

# Seminararbeit

**Leitfach: Mathematik**

Rahmenthema des Wissenschaftspropädeutischen Seminars:  
"i - komplex, aber faszinierend"

Thema der Arbeit:

## **Die Mandelbrot-Menge und die Erzeugung ihrer fraktalen Struktur**

Verfasser: Markus Helmut Huber  
Kursleiter: StR P. Giese  
Abgabetermin: 08. November 2022

Bewertung	Note	Notenstufe in Worten	Punkte		Punkte
schriftliche Arbeit				x 3	
Abschlusspräsentation				x 1	
Summe:					
Gesamtleistung (Summe : 2; gerundet)					

---

Datum und Unterschrift des Kursleiters

# Zusammenfassung

Überall in der Natur begegnet man fraktalen, sich selbst wiederholenden Strukturen. Der französisch-amerikanische Mathematiker Benoît Mandelbrot zeigt in seinem Buch „Die Fraktale Geometrie der Natur“ nicht nur wie sich all diese natürlichen Strukturen mathematisch beschreiben lassen, sondern zudem, mit welchen einfachen Funktionen man diese komplexen Fraktale erzeugen kann.

Die wohl berühmteste und nach ihm benannte fraktale Menge bildet dabei die Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$ , welche sich durch die Iterationsvorschrift  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  mit  $z_0 = 0$  berechnen lässt. Dazu untersucht man durch wiederholtes Einsetzen des Ergebnisses das Verhalten aller Startwerte  $c \in \mathbb{C}$ . Wird  $z_n$  mit jeder Berechnung größer und divergiert gegen Unendlich, gehört die zugehörige Zahl  $c$  nicht zur Mandelbrot-Menge, sondern zur Fluchtmenge  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{M}$ . Bleibt  $z_n$  klein, ist es wahrscheinlich, dass dieser Punkt Element von  $\mathbb{M}$  ist.

Eine genauere Untersuchung der Zahlenfolgen ermöglicht dabei nicht nur das Einteilen der Verhaltensmöglichkeiten der Folgen in verschiedene Kategorien wie Konvergenzen oder periodische Zyklen, sondern erlaubt zudem den Beweis ganzer Bereiche, die sicher zur Mandelbrot-Menge gehören. Eine zentrale Rolle spielen dabei die Fixpunkte jeder Zahlenfolge. So nähern sich zum Beispiel alle Startpunkte innerhalb des Hauptkörpers des Apfelmännchens, der Kardioide, genau einem Fixpunkt an.

Um nun die bekannten Abbildungen der Mandelbrot-Menge zu erhalten, färbt man alle Punkte dieser Menge in der Gauß'schen Zahlenebene schwarz und alle der Fluchtmenge weiß ein. In der Praxis ist es jedoch unmöglich durch Überlegungen und Beweise alle Punkte von  $\mathbb{M}$  zu bestimmen, weshalb man die Folgen mithilfe von Computern berechnet. Dabei reicht es aus, die Iterationen so lange durchzuführen, solange  $z$  nicht den Fluchtradius 2 überschritten hat, da andernfalls eine Divergenz garantiert ist.

Die farbliche Gestaltung steht dabei grundsätzlich nicht direkt in einer Beziehung mit mathematischen Eigenschaften, sondern ist viel mehr ein künstlerisches Mittel für die Ästhetik. Die bekannteste Methode ist dabei die Färbung mittels des Escape-Time Algorithmus. Dabei färbt man die Fluchtmenge je nach Anzahl der Iterationen, die für die Überschreitung der Fluchtgrenze 2 benötigt wurden, farblich unterschiedlich. Jedoch erhält man durch diesen Farbalgorithmus Vermessungskarten ähnliche Farbübergänge. Um einen kontinuierlichen Farbverlauf zu erzeugen, verwendet man deshalb heutzutage andere Algorithmen wie zum Beispiel den Normalized-Iteration-Count Algorithmus.

Eben diese Form- und Farbvielfalt des Apfelmännchens, aber auch der anderen Fraktale, wie die eng verwandten Julia-Mengen, waren Auslöser eines ganz neuen Trends in der Popkultur. Auf allen möglichen Gegenständen konnte man Abbildungen der Mandelbrot-Menge finden. Doch die Fraktale beeinflussten nicht nur die Kunst. Bis heute werden, obgleich in der Landschaftsgeneration durch Computer, in der Antennenfunktechnik oder in der Medizin immer wieder neue Entdeckungen gemacht, die ohne Benoît Mandelbrot und seiner Mandelbrot-Menge wahrscheinlich nicht möglich gewesen wären.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Benoît Mandelbrot als Vater der fraktalen Geometrie</b>	<b>4</b>
<b>2 Die Mandelbrot-Menge aus mathematischer Sicht</b>	<b>6</b>
2.1 Das Verfahren der Iteration . . . . .	6
2.2 Die Definition der Mandelbrot-Menge . . . . .	7
2.3 Das Verhalten der Zahlenfolge im Zuge der Iteration . . . . .	7
2.3.1 Die Fixpunkte einer Zahlenfolge . . . . .	8
2.3.2 Die Kardioide $K$ der Mandelbrot-Menge . . . . .	11
2.3.3 Die Periodenverdopplung und das Feigenbaum-Diagramm . . . . .	14
2.3.4 Die Divergenz für Punkte mit $r > 2$ . . . . .	16
2.4 Der Zusammenhang mit der Julia-Menge . . . . .	18
2.5 Die Symmetrie bezüglich der reellen Achse . . . . .	20
<b>3 Die grafische Darstellung der Mandelbrot-Menge</b>	<b>21</b>
3.1 Fraktale in der Gauß'schen Zahlenebene . . . . .	21
3.2 Die farbige Darstellung der Mandelbrot-Menge . . . . .	22
3.3 Besondere Strukturen der Mandelbrotmenge . . . . .	24
<b>4 Die Rezeption der Mandelbrot-Menge in der Öffentlichkeit</b>	<b>25</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>26</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>27</b>

# 1 Benoît Mandelbrot als Vater der fraktalen Geometrie

Der französisch-amerikanische Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924-2010) prägte nicht nur aus dem lateinischen Adjektiv „fractus“ zu Deutsch „gebrochen“, den Begriff des Fraktals, sondern leitete sogar einen neuen Zweig der Mathematik ein.<sup>1</sup> Während sich die klassische Mathematik mit regulären geometrischen Strukturen von Euklid, mit Punkten, Linien, Kreisen, etc., befasste, begann die „moderne“ Mathematik auf Basis der Mengentheorie von Cantor und den raumfüllenden Kurven von Peano sich mit Fraktalen zu beschäftigen.<sup>2</sup> Eine zentrale Rolle spielt dabei der Begriff der Dimension. In der Topologie, einem Teilgebiet der Mathematik, geht man von einem „gummiartigen“ Raum aus, in dem man Objekte beliebig transformieren bzw. verzerren kann. Ein Würfel und eine Kugel besitzen somit die gleiche Form, da man den einen Körper in den anderen ohne Schnitt transformieren kann. So wie eine Fläche die Dimension 2 und ein Körper die Dimension 3 besitzt, gilt nach der Topologie weiterhin, dass der Rand jeder zweidimensionalen Fläche die Dimension 1 besitzen muss. Grund dafür ist eben, dass jede der Figuren durch eine Transformation in eine Kreislinie verzerrt werden kann, also topologisch identisch ist.<sup>3</sup>

Berechnet man die Dimension einer Figur nach einem anderen Verfahren von Hausdorff und Besicovitch, indem man diese mit Kugeln bedeckt und deren Radius gegen Null gehen lässt, nimmt die Anzahl der benötigten Kugeln je nach geometrischer Form bzw. Dimension unterschiedlich zu. Steigt die Anzahl linear mit dem Radius der Kugeln, so liegt eine Linie vor, steigt sie quadratisch, eine Fläche. Der Exponent bildet folglich die Hausdorff-Dimension, welche für die Kreislinie ebenfalls 1 ist. Wendet man diese Methode jedoch auf ein Fraktal an, erhält man eine meist nicht ganzzahlige Dimension, welche größer als die der Topologie ist.<sup>4</sup> Grund dafür ist deren besondere Struktur. Bei Fraktalen handelt es sich um komplexe, geometrische Figuren, deren Struktur stark „gebrochen“ bzw. „zerklüftet“ erscheint und welche einen hohen Grad an Skaleninvarianz aufweisen. Dies bedeutet, dass bei Vergrößerung eines Ausschnitts eines Fraktals, anders als bei euklidischen Figuren, stets immer feinere Strukturen erkennbar sind und so Ränder unendlich lang werden können.<sup>5</sup> Zudem weist ein großer Teil der Fraktale einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit auf, das heißt man findet durch die Vergrößerung einzelner Stellen die Gesamtmenge unendlich oft, zumindest ähnlich, wieder.<sup>6</sup>

---

<sup>1</sup>vgl. WIKIPEDIA FOUNDATION INC., 2022, Mandelbrot-Menge.

<sup>2</sup>vgl. Mandelbrot, 1987, S. 15f.

<sup>3</sup>vgl. a. a. O, S. 28f.

<sup>4</sup>vgl. a. a. O, S. 374f.

<sup>5</sup>vgl. a. a. O, S. 30f.

<sup>6</sup>vgl. a. a. O, S. 178.

Auf Grundlage dieser Eigenschaft definierte Mandelbrot den Begriff des Fraktals: „Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.“<sup>7</sup> In seinem Werk „Die Fraktale Geometrie der Natur“ beschreibt Benoît Mandelbrot nicht nur die Vielfalt dieser Figuren und wie sie uns überall in der Natur begegnen, sondern zeigt außerdem mit welchem Ausmaß an Ästhetik dieses neue Gebiet der Mathematik erfüllt ist,<sup>8</sup> einer „Welt voller Schönheiten.“<sup>9</sup>

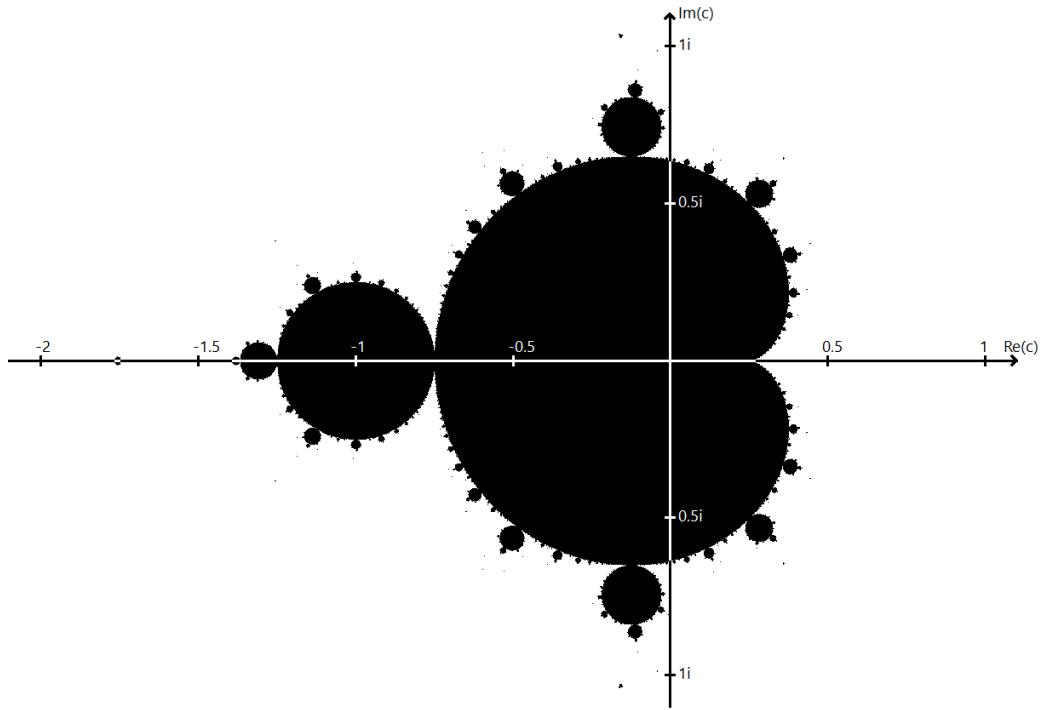


Abbildung 1: Die Mandelbrot-Menge in der Gauß'schen Zahlenebene.<sup>10</sup>

Sein wohl berühmtestes und nach ihm benanntes Fraktal bildet dabei die Darstellung der Mandelbrot-Menge, das Apfelmännchen, welche in Abbildung 1 zu sehen ist. Eben diese Zahlenmenge, was sich dahinter verbirgt und wie man sie grafisch darstellt, soll Inhalt dieser Arbeit sein.

---

<sup>7</sup>Mandelbrot, 1987, S. 27.

<sup>8</sup>vgl. Mandelbrot, 1987, S. 15f.

<sup>9</sup>Mandelbrot, 1987, S. 15.

<sup>10</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022. Der vollständige Programmcode kann unter <https://github.com/M4RKUS28/Mandelbrot-Menge-Generator> abgerufen werden.

## 2 Die Mandelbrot-Menge aus mathematischer Sicht

Vor dem Einstieg in die mathematischen Eigenschaften sollte noch erwähnt werden, dass Benoît Mandelbrot nicht der Entdecker der Mandelbrot-Menge ist. Ihr Ursprung liegt in der komplexen Dynamik, einem Zweig der Mathematik, welcher bereits im Jahre 1905 von den französischen Mathematikern Pierre Fatou und Gaston Julia untersucht wurde. Das Fraktal selbst wurde erstmals von Robert W. Brooks und Peter Matelski im Rahmen einer Studie definiert und gezeichnet. Doch erst Benoît Mandelbrot erreichte durch neuere Computerdarstellungen, dass dieses und viele weitere Fraktale öffentlich derart an Populärität gewannen.<sup>11</sup> In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen, auf denen die Mandelbrot-Menge aufbaut, erläutert.

### 2.1 Das Verfahren der Iteration

Die Mandelbrot-Menge selbst wird durch das Verfahren der Iteration berechnet. In der Mathematik ist damit die schrittweise Wiederholung einer Rechenvorschrift gemeint. Wird dabei immer das Ergebnis der letzten Berechnung für die nächste verwendet, so spricht man von einer Rekursion.<sup>12</sup> Diese ist wie folgt definiert:

**Definition 2.1** (aus Graf 2009, S. 8). *Eine Folge von komplexen Zahlen  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  heißt rekursive Folge, wenn es einen Startwert  $z_0 \in \mathbb{C}$  und eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt, so dass*

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad \text{für } n = 0, 1, \dots$$

gilt.

Der Startwert, meist  $z_0$  genannt, muss dabei zu Beginn festgelegt werden. Man setzt den Startwert in die Rechen- bzw. Iterationsvorschrift ein und berechnet das Ergebnis. Dieses bildet dann den Startwert, welcher beim nächsten Rechendurchlauf für  $z_n$  eingesetzt wird. Der Vorgang wird nun beliebig oft wiederholt, um sich schrittweise einer Lösung immer genauer anzunähern. Der Index  $n$ , beginnend bei  $n = 0$ , steht dabei für die Anzahl der Iterationsdurchläufe und nähert sich bei fortlaufenden Berechnungen  $\infty$  an. Eben durch ein solches Verfahren berechnet man auch die Mandelbrot-Menge.

---

<sup>11</sup>vgl. Weitz HAW Hamburg, 2017.

<sup>12</sup>vgl. Graf, 2009, S. 8.

## 2.2 Die Definition der Mandelbrot-Menge

**Definition 2.2** (aus Graf 2009, S. 7). *Die Mandelbrot-Menge ist die Menge  $\mathbb{M}$ , für die gilt*

$$\mathbb{M} := \{c \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq \infty \text{ mit } z_{n+1} = z_n^2 + c, z_0 = 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$$

Die Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$  ist folglich die Menge aller komplexen Zahlen, deren Folge durch die Iterationsvorschrift

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (1)$$

mit dem Startwert  $z_0 = 0$  beschränkt bleibt, d.h. nicht gegen Unendlich strebt.<sup>13</sup> Für eine Darstellung der Mandelbrot-Menge in der Gauß'schen Zahlenebene wie in Abbildung 1 zu sehen ist, berechnet man für jede beliebige Zahl  $c \in \mathbb{C}$ , eben diese Iterationsfolge nach dem im vorherigen Kapitel erläuterten Prinzip der Rekursion. Allgemein erhält man dabei für  $c$  eine Zahlenfolge der Form:

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= z_0^2 + c = c \\ z_2 &= z_1^2 + c = c^2 + c \\ z_3 &= z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Dabei ergeben sich zwei übergeordnete Möglichkeiten: Entweder geht die Zahl  $z$  mit zunehmendem Index  $n \in \mathbb{N}$  gegen  $\infty$ , die Iterationsfolge divergiert und ist unbeschränkt, oder sie bleibt endlich, der Limes ist ungleich  $\infty$ . Während die Startwerte, die nicht divergieren, d.h. beschränkte Folgen bilden, zur Mandelbrot-Menge bzw. Gefangenensetzung  $\mathbb{M}$  gehören und in Abbildung 1 schwarz gefärbt wurden, sind die restlichen Zahlen Teil der Fluchtmenge  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{M}$ .<sup>14</sup>

## 2.3 Das Verhalten der Zahlenfolge im Zuge der Iteration

Das Verhalten der Zahlenfolgen lässt sich jedoch noch genauer unterteilen. Welche Verhaltensweisen sich für verschiedene Startwerte ergeben können, soll mithilfe der Beispiele in Abbildung 2 gezeigt werden.

$z_1 = c$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$
$c = 1$	2	5	26	667
$c = 0.1500$	0.1725	0.1798	0.1823	0.1832
$c = -1.500$	0.750	-0.938	-0.621	-1.114
$c = i$	$-1+i$	$-i$	$-1+i$	$-i$

Abbildung 2: Eigene Beispiele zur Zahlenfolge der Iteration.<sup>15</sup>

---

<sup>13</sup>vgl. Graf, 2009, S. 6.

<sup>14</sup>vgl. Zimmer, 2010, S. 1.

<sup>15</sup>eigens ausgewählte und berechnete Beispiele.

Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, divergiert der Startwert  $c = 1$  gegen unendlich und ist dementsprechend nicht Teil der Mandelbrot-Menge. Das Verhalten der beschränkten Zahlenfolgen lässt sich dagegen in drei Typen aufteilen. Entweder konvergiert sie gegen einen Fixpunkt (z.B. bei  $c = 0.15$ ), das heißt sie nähert sich einem Punkt immer weiter an, oder sie pendelt asymptotisch periodisch zu einer Folge mit Periode  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q = 2, 3, 4, \dots$  (z.B. bei  $c = i$ ). Darunter versteht man, dass sich die Folge zwei oder mehreren Fixpunkten periodisch abwechselnd annähert oder zwischen diesen hin und her wechselt, also in diesem Fall zwischen  $-i$  und  $-1 + i$ . Es geht hierbei um die in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellten Zahlen. Daher spricht man auch von Punkten. Die letzte Möglichkeit ist ein aperiodisches Verhalten, bei dem die Folge ein chaotisches, scheinbar zufälliges Verhalten aufzeigt (z.B. bei  $c = -1.5$ ).<sup>16</sup>

Möchte man die Grenzwerte bestimmter Zahlenfolgen bestimmen, bedarf es folglich der genaueren Untersuchung von Fixpunkten, welche die Grenzwerte bilden.

### 2.3.1 Die Fixpunkte einer Zahlenfolge

**Definition 2.3** (aus Graf 2009, S. 11). Eine Zahl  $z^* \in \mathbb{C}$  heißt Fixpunkt einer rekursiven Folge  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$  mit  $z_{n+1} = f(z_n)$ , wenn

$$z^* = f(z^*) \quad (2)$$

gilt.

Ein Fixpunkt einer Folge ist dementsprechend eine komplexe Zahl, die auch bei weiteren Iterationsdurchläufen konstant bleibt, das heißt  $z_{n+1} = f(z_n)$  erfüllt ist. Der \* symbolisiert dabei, dass der Index  $n$  beliebig groß gewählt werden kann.

Würde man zum Vergleich die Punktspiegelung als rekursive Funktion wählen, so wäre der Ursprung ein Fixpunkt. Denn unabhängig davon wie oft man diesen Punkt in die Funktion rekursiv einsetzt, wird er sich nie verändern, sondern bildet sich weiterhin auf sich selbst ab.

Die Fixpunkte der Mandelbrot-Menge berechnet man über die Iterationsvorschrift (1). Grundsätzlich erhält man durch diese Formel zur Berechnung der Fixpunkte eine quadratische Gleichung der Form  $z = z^2 + c$ . Löst man die Gleichung mittels der Lösungsformel nach  $z$  auf, erhält man die Fixpunktgleichung der ersten Iteration:<sup>17</sup>

$$z_{a,b} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c} \quad (3)$$

Setzt man nun den Startwert  $c = 0.15$  aus den Beispielen (Abb. 2) ein und berechnet dessen Fixpunkte, so erhält man  $z_a \approx 0.8162$  und  $z_b \approx 0.1838$ . Vergleicht man das Ergebnis

---

<sup>16</sup>vgl. Zimmer, 2010, S. 2.

<sup>17</sup>vgl. Graf, 2009, S. 10f.

mit der Zahlenfolge aus der Tabelle 2 fällt auf, dass diese sich jedoch scheinbar nur dem Punkt  $z_b$  annähert. Um nun den Grenzwert dieser Folge zu bestimmen, bedarf es demzufolge einer weiteren Kategorisierung der Fixpunkte, und zwar anhand ihrer Beziehung zur Iterationsfolge. Grundsätzlich existieren drei verschiedene Arten von Fixpunkten: abstoßende, attraktive und indifferent. Mathematisch unterscheiden sich diese hinsichtlich ihrer ersten Ableitung.

**Definition 2.4** (nach Graf 2009, S. 17). *Ein Fixpunkt  $z^*$  heißt*

- **abstoßend**, wenn  $|f'(z^*)| > 1$ ,
- **indifferent**, wenn  $|f'(z^*)| = 1$ , und
- **attraktiv**, wenn  $|f'(z^*)| < 1$

gilt.

Ist ein Fixpunkt abstoßend, so muss der Betrag der ersten Ableitung größer 1 sein. Für die Zahlenfolge bedeutet das, dass sich diese von dem Fixpunkt entfernt. Ist der Betrag der ersten Ableitung kleiner 1, so muss der Fixpunkt attraktiv sein, das heißt die Iterationsfolge nähert sich diesem an. Ist der Betrag 1, so ist der Fixpunkt indifferent. Der Punkt kann dabei beide Eigenschaften aufweisen.<sup>18</sup> Dass die erste Ableitung dabei das Unterscheidungskriterium bildet, lässt sich durch folgende Überlegung zeigen:

Man nimmt eine rekursive Folge mit beliebigem Startwert und deren Fixpunkt  $z^*$  sowie zwei Zahlen  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$ . Um nun zu zeigen, dass  $|f'(z^*)| < 1$  gilt, falls  $z^*$  ein anziehender Fixpunkt ist, berechnet man für einen beliebigen Punkt  $p_1$  die Iterationsfolge. Dabei erhält man den Punkt  $f(p_1) = p_2$ . Der Punkt  $p_1$  soll dabei die Summe aus dem Fixpunkt  $z^*$  und dem Punkt  $x_1$  sein, sowie  $p_2$  die aus  $z^*$  und  $x_2$ :

$$f(z^* + x_1) = z^* + x_2$$

Aus der Eigenschaft von Fixpunkten,  $f(z^*) = z^*$ , folgt:

$$\begin{aligned} f(z^* + x_1) &= f(z^*) + x_2 \\ f(z^* + x_1) - f(z^*) &= x_2 \end{aligned}$$

Aufgrund des anziehenden Einflusses des Fixpunkts  $z^*$  muss  $p_2$  näher am Fixpunkt liegen als  $p_1$  es war und da sich der Fixpunkt  $z^*$  nicht verändert, gilt  $|x_2| < |x_1|$ . Folglich muss ein  $x_1$  existieren, so dass gilt:<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} f(z^* + x_1) - f(z^*) &= x_2 \\ |f(z^* + x_1) - f(z^*)| &< |x_1| \\ \left| \frac{f(z^* + x_1) - f(z^*)}{x_1} \right| &< 1 \end{aligned}$$

---

<sup>18</sup>vgl. Graf, 2009, S. 17.

<sup>19</sup>vgl. a. a. O, S. 19.

Aufgrund der fortlaufenden Annäherung konvergiert  $x_1$  gegen 0 und man erhält:

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \left| \frac{f(z^* + x_1) - f(z^*)}{x_1} \right| < 1$$

Der linke Teil dieser Ungleichung entspricht dabei der h-Methode zur Berechnung des Differentialquotienten, also der lokalen bzw. momentanen Änderungsrate, woraus für einen anziehenden Fixpunkt die Bedingung  $|f'(z^*)| < 1$  folgt. Analog lässt sich diese Überlegung auch für abstoßende und indifferenten Fixpunkte durchführen.<sup>20</sup>

Für die weitere Untersuchung des Beispiels  $c = 0.15$  leitet man folglich die Funktion  $f(z) = z^2 + c$  nach  $z$  ab:

$$f'(z) = 2z \quad (4)$$

Setzt man  $z_a \approx 0.8162$  und  $z_b \approx 0.1838$  in die Funktion ein, erhält man für den Startpunkt  $c = 0.15$  Fixpunkte mit den Ableitungen  $f'(z_a) \approx 1.1324 > 1$  und  $f'(z_b) \approx 0.1324 < 1$ . Folglich ist  $z_a$  ein abstoßender Fixpunkt, während  $z_b$ , wie in den Beispielen 2 zu sehen, als attraktiver Fixpunkt den Grenzwert der Folge bildet.

Dass genau  $z_a$  der abstoßende Fixpunkt ist, ist jedoch kein Zufall. Setzt man die Fixpunktgleichung zur Berechnung von  $z_a$  aus (3) in die abgeleitete Funktion  $f'(z) = 2z$  aus (4) ein und bildet davon den Betrag, so erhält man:

$$\begin{aligned} |f'(z_a)| &= |2z_a| = |2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}\right)| = \\ &= |1 + \sqrt{1 - 4c}| \end{aligned} \quad (5)$$

Mit der Gleichung lässt sich nun der Fixpunkt  $z_a$  in Abhängigkeit vom Startwert  $c$  genauer untersuchen. Wenn  $z_a$  ein attraktiver Fixpunkt wäre, müsste nach Definition 2.4  $|f'(z_a)| < 1$  und somit  $|1 + \sqrt{1 - 4c}| < 1$  sein.<sup>21</sup> Da sich der Betrag einer komplexen Zahl durch  $|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$  berechnet, muss ebenfalls die Ungleichung

$$\sqrt{(1 + Re(\sqrt{1 - 4c}))^2 + (Im(\sqrt{1 - 4c}))^2} < 1 \quad (6)$$

erfüllt sein. Geht man davon aus, dass der Imaginärteil  $Im(\sqrt{1 - 4c})$  gleich 0 ist, muss

$$\begin{aligned} -1 &< 1 + Re(\sqrt{1 - 4c}) < 1 & -1 \\ -2 &< Re(\sqrt{1 - 4c}) < 0 \end{aligned}$$

sein, sodass man durch das Quadrieren und Wurzelziehen der äußeren Wurzel aus (6) einen Wert  $< 1$  erhält. Per Definition kann die Wurzel einer reellen Zahl jedoch nicht negativ sein, weshalb es keine Lösung für die Ungleichung  $-2 < Re(\sqrt{1 - 4c}) < 0$  gibt. Liegt nun ein Imaginärteil  $Im(\sqrt{1 - 4c}) \neq 0$  vor, so verkleinert sich lediglich das Intervall der Ungleichung, in dem der Realteil liegen muss. Es wird jedoch niemals in einen positiven Bereich verschoben. Daher gibt es keinen Startwert  $c$  mit  $z_a$  als attraktiven Fixpunkt.

---

<sup>20</sup>vgl. Graf, 2009, S. 19.

<sup>21</sup>vgl. a. a. O, S. 20.

Im nächsten Schritt berechnet man nun für möglichst viele Zahlen der Gauß'schen Zahlenebene die Iterationsfolge. Dabei färbt man jeden Punkt, dessen Zahlenfolge gegen einen Grenzpunkt konvergiert, oder sich mehreren Grenzpunkten periodisch annähert, je nach der Anzahl der Periodenlänge unterschiedlich. Als Ergebnis erhält man ein Bild, wie es in Abbildung 3 zu sehen ist.

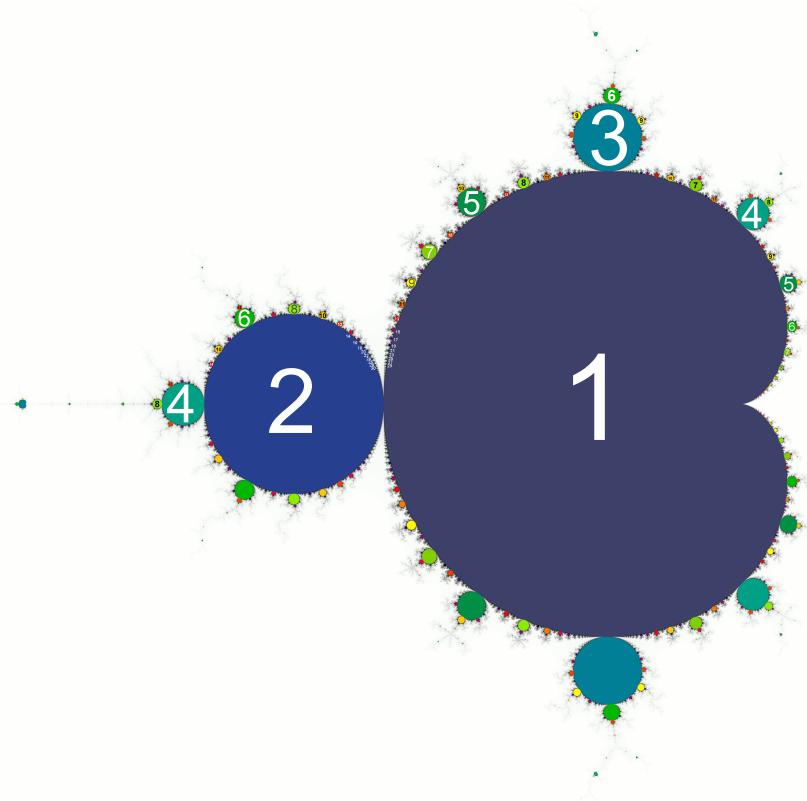


Abbildung 3: Die Mandelbrot-Menge mit farbkodierter Periodenlänge der Grenzzyklen.<sup>22</sup>

Die Zahlen in Abbildung 3 stehen dabei für die Periodenzahl, also die Anzahl der Zahlenfolgen, zwischen denen  $z$  periodisch pendelt. Im Fall 1 liegt wie im Beispiel  $c = 0.15$  eine Konvergenz gegen den Fixpunkt  $z_b$  vor. Wie es zu den Periodenzahlen  $> 1$  kommt, wird in Kapitel 2.3.3 näher erläutert. Zuvor sollen jedoch noch die Fixpunkte, die sich genau einem Grenzwert annähern, genauer betrachtet werden.

### 2.3.2 Die Kardioide $K$ der Mandelbrot-Menge

Nimmt man noch einmal die Abbildung 3 zur Hand, so sieht man, dass es genau einen Bereich gibt, in dem  $z$  gegen genau einen Fixpunkt konvergiert. Der Bereich lässt sich jedoch nicht nur grafisch darstellen, sondern auch mathematisch beschreiben. Die Kardioide, benannt nach dem griechischen Wort Kardia für Herz, beschreibt die Grenzlinie aller Startpunkte, die gegen exakt einen Fixpunkt konvergieren. Alle Startpunkte innerhalb der Kardioide gehören folglich sicher zur Mandelbrot-Menge.<sup>23</sup>

---

<sup>22</sup>Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot\\_Set\\_-\\_Periodicities\\_coloured.png](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelbrot_Set_-_Periodicities_coloured.png), abgerufen am 14.6.22.

<sup>23</sup>vgl. Zimmer, 2010, S. 2.

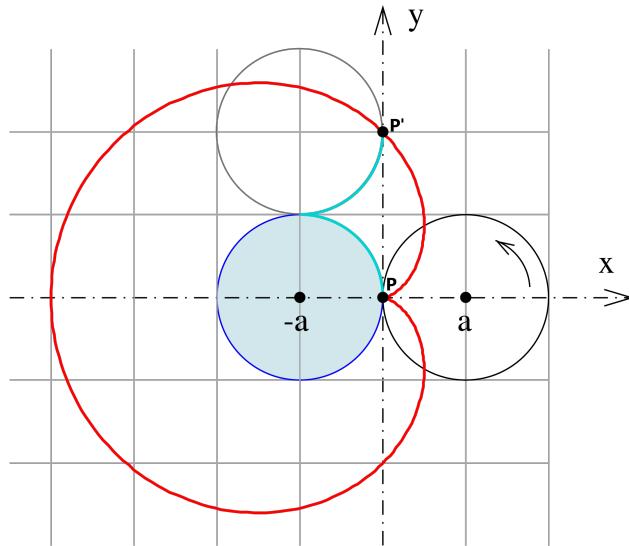


Abbildung 4: Die Erzeugung einer Kardioide durch das Abrollen eines Kreises auf einem anderem von gleichem Radius.<sup>24</sup>

Die Kardioide beschreibt dabei eine geometrische Figur, welche wie in Abbildung 4 dargestellt, durch das Abrollen eines Kreises mit dem Punkt P auf der Außenseite eines weiteren festen Kreises mit demselben Radius r entsteht.<sup>25</sup> Der dunkelblaue Kreis der Abbildung mit dem Mittelpunkt  $-a$  stellt dabei den festen Kreis dar, während der schwarze Kreis um den Punkt  $a$  die Startposition des abzurollenden Kreises zeigt. Die Achsensymmetrie der Mittelpunkte sowie der Berührungs punkt der Kreislinien im Ursprung zeigen den benötigten gleichen Radius, sowie den Abstand  $2r$  der Kreismittelpunkte. Nach einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn nimmt der schwarze Kreis die Position des grauen ein. Die abgerollte Fläche ist hierbei türkis gefärbt. Die in Abbildung 4 rot gezeichnete Kardioide selbst entsteht dabei durch den Verlauf des Punktes P auf dem losen Kreis, welcher zu Beginn gleichzeitig den Berührungs punkt darstellt.

Mathematisch lässt sich die Kardioide der Mandelbrot-Menge als Zahlenmenge  $\mathbb{K}$  in Abhängigkeit des Winkels  $\phi$  in Real- und Imaginärteil getrennt in Polarform oder mit Hilfe der Eulerschen Formel darstellen.

**Definition 2.5** (aus Zimmer 2010, S. 2). *Für die Kardioide  $\mathbb{K}$  gilt:*

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &:= \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}e^{i\phi} - \frac{1}{4}e^{2i\phi}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \\ &= \{x + iy : x = \frac{\cos\phi}{2} - \frac{\cos 2\phi}{4}, y = \frac{\sin\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}\end{aligned}$$

Dass  $z_a$  ein abstoßender Fixpunkt ist, dadurch keine Konvergenz bzw. keinen Zyklus erzeugen kann und somit keinen Einfluss auf die Kardioide hat, wurde in Kapitel 2.3.1 gezeigt. Dagegen ist der Fixpunkt  $z_b$ , wie zu Beginn erwähnt, ausschlaggebend für die Kardioide.

<sup>24</sup>Quelle: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/51/Kardioide.svg/2343px-Kardioide.svg.png>, abgerufen am 20.8.2022.

<sup>25</sup>vgl. Zimmer, 2010, S. 3.

**Satz 2.6.** (nach Zimmer 2010, S.2) Für den Fixpunkt  $z_b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}$  der Iterationsfunktion  $f_c = z^2 + c$  siehe (1), und den Startpunkt  $c \in \mathbb{C}$  gilt:

A. Liegt  $c$  auf der Kardioide, dann ist  $z_b$  ein indifferenter Fixpunkt.

B. Liegt  $c$  im Inneren der Kardioide, dann ist  $z_b$  ein attraktiver Fixpunkt.

C. Liegt  $c$  außerhalb der Kardioide, dann ist  $z_b$  ein abstoßender Fixpunkt.

*Beweis von A.* (nach Zimmer 2010, S.3) Zunächst soll die Bedingung A bewiesen werden. Damit die Voraussetzung A erfüllt ist und der Fixpunkt  $z = z_b$  indifferent ist, muss die Gleichung  $|f'(z)| = 1$  erfüllt sein. Setzt man nun diese Gleichung mit der ersten Ableitung eines Fixpunktes  $|f'(z)| = |2z|$  aus (4) gleich, ergibt sich  $|2z| = 1$ . Löst man die Gleichung anschließend nach  $|z|$  auf, erhält man  $|z| = \frac{1}{2}$ . Somit muss der Fixpunkt  $z_b$  aller Punkte der Kardioide einen Abstand von  $\frac{1}{2}$  zum Ursprung haben, um indifferent zu sein. Stellt man diese Bedingung durch die Polarform einer komplexen Zahl dar und formt sie anschließend mittels der Eulerschen Formel  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \cdot \sin \phi$  um, so erhält man:

$$z = |z| \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi) = \frac{1}{2} \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi) \quad \text{bzw.}$$

$$z = r \cdot e^{i\phi} = |z| \cdot e^{i\phi} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\phi}$$

Löst man die Fixpunktgleichung  $z = z^2 + c$  nun nach  $c$  auf und setzt für  $z$  das oben erhaltene Ergebnis in Polarform ein, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung der Startwerte, deren Fixpunkte einen Abstand von  $\frac{1}{2}$  zum Ursprung haben, also indifferent sind und so die Voraussetzung A erfüllen:

$$c = z - z^2 = \frac{1}{2}e^{i\phi} - \left(\frac{1}{2}e^{i\phi}\right)^2 = \frac{1}{2}e^{i\phi} - \frac{1}{4}e^{2i\phi}$$

Ebendiese Gleichung zeigt die Definition der Kardioide, weshalb auch alle Punkte der Kardioide die Bedingung A erfüllen.  $\square$

*Beweis von B.* (nach Zimmer 2010, S.3) Es muss jedoch ebenfalls bewiesen werden, dass der Fixpunkt  $z_b$  innerhalb der Kardioide attraktiv und außerhalb abstoßend auf die Zahlenfolge wirkt. Wählt man dazu einen beliebigen Startwert innerhalb von  $\mathbb{K}$ , zum Beispiel  $c = 0$ , und berechnet dazu den Fixpunkt, so erhält man  $z_b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 0} = 0$ . Setzt man diesen nun in die erste Ableitung  $f'(z) = 2z = 0$  von (4) ein, so sieht man, dass dieser Fixpunkt attraktiv sein muss, da der Betrag  $|f'(z)| = 0$  kleiner 1 ist. Daraus lässt sich schließen, dass  $z_b$  für alle Startwerte innerhalb der Kardioide ein attraktiver Fixpunkt ist und somit die Voraussetzung B erfüllt ist.  $\square$

*Beweis von C.* (nach Zimmer 2010, S.3) Lässt man den Startwert  $c \in \mathbb{C}$  nun nach außen wandern, so wächst dessen Betrag immer weiter, womit auch  $\sqrt{\frac{1}{4} - c}$  gegen Unendlich strebt. Dadurch steigt  $z_b = |\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c}|$  ebenfalls, was bedeutet, dass  $f'(z_b) = 2|z_b|$  größer 1 sein wird. Somit ist der Fixpunkt  $z_b$  nicht mehr attraktiv. Alle innerhalb der Kardioide gewählten Startpunkte führen folglich zu einer Folge mit dem Grenzwert bzw. Limes

$z_b$ , während für alle Punkte außerhalb der Fixpunkt  $z_b$  abstoßend ist. Damit ist nun auch die Voraussetzung C bewiesen.  $\square$

In eigenen Worten ist die Kardioide  $\mathbb{K}$  die Menge aller Punkte in Abhängigkeit des Winkels  $\phi$ , welche umschließend die Grenze zu allen Startwerten bildet, deren Iterationsfolge zwei Fixpunkte hat. Durch den anziehenden Einfluss des Fixpunktes  $z_b$  auf die Zahlenfolge innerhalb der Kardioide, gehören auch alle Startpunkte innerhalb sicher zur Mandelbrot-Menge. Die Fixpunkte der Zahlenfolgen der Kardioide selbst weisen dagegen indifferente Eigenschaften auf, worauf die Definition der Kardioide aufbaut. Außerhalb der Kardioide sind sowohl  $z_a$  also auch  $z_b$  abstoßende Fixpunkte.

### 2.3.3 Die Periodenverdopplung und das Feigenbaum-Diagramm

Wirft man noch einmal einen Blick auf Abbildung (3), so stellt sich nun natürlich die Frage, wie es zu Grenzzyklen mit mehr als einem attraktiven Fixpunkt außerhalb der Kardioide kommen kann, wenn gerade bewiesen wurde, dass die Fixpunkte der Gleichung (3) beide außerhalb der Kardioide nicht attraktiv sind. Grund dafür ist, dass die bisherigen Fixpunkte auf Basis der Gleichung  $z = z^2 + c$  berechnet wurden. Jedoch muss die Bedingung der Fixpunkte  $z_n = f(z_n)$  genauso für die Gleichung der zweiten Iteration  $z = (z^2 + c)^2 + c$  gelten.

Mit dieser Fixpunktgleichung lassen sich nun alle Punkte berechnen, die bei jeder zweiten Iteration denselben Wert haben. Es ist also nicht mehr zwingend die Folge

$z_n = z, z_{n+1} = z, z_{n+2} = z, z_{n+3} = z, \dots$  nötig, sondern es wäre auch  $z_n = z, z_{n+1} = x, z_{n+2} = z, z_{n+3} = x, \dots$  (mit  $x \in \mathbb{C}$ ) möglich. Formt man diese Gleichung 4. Grades um und faktorisiert sie, wird auch deutlich, dass es neben den alten Fixpunkten aus der Gleichung  $z^2 + c = z$  bzw.  $z^2 - z + c = 0$ , nun zwei weitere mit der Gleichung  $z^2 + z + c + 1 = 0$  gibt:<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= (z^2 + c)^2 + c \\ 0 &= z^4 + 2z^2c - z + c^2 + c \\ 0 &= (z^2 - z + c) \cdot (z^2 + z + c + 1) \end{aligned}$$

Berechnet man für alle Startwerte der reellen Achse ( $c \in \mathbb{R}$ ) die zugehörigen Grenzwerte ( $z^* \in \mathbb{R}$ ) und trägt diese in ein Diagramm ein, so ergibt sich das Feigenbaum-Diagramm, welches im oberen Teil der Abbildung 5 zu sehen ist. Auch hier lässt sich noch einmal erkennen, dass es innerhalb der Kardioide nur einen Grenzwert gibt. Bewegt man sich auf der reellen Achse weiter nach links, nimmt die Anzahl der Grenzwerte erstmal immer weiter zu, wie man in Abbildung 3 bereits erkennen konnte. Diese Periodenverdopplung, also der Übergang in einen Zustand mit einer höheren Anzahl von Grenzwerten, wird Bifurkation genannt und ist typisch für chaotische Systeme.<sup>27</sup>

---

<sup>26</sup>vgl. Graf, 2009, S. 23.

<sup>27</sup>vgl. a. a. O., S. 26.

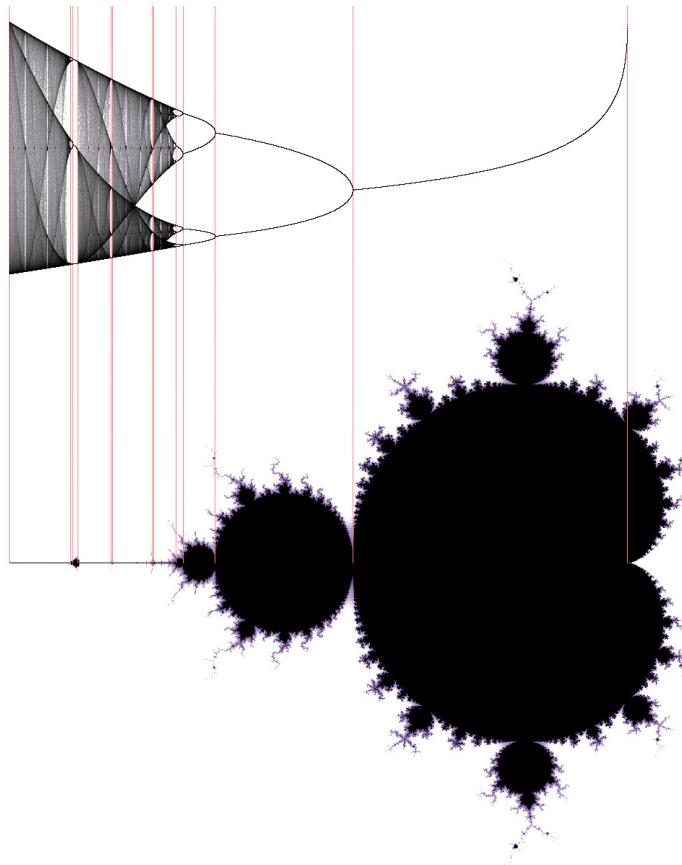


Abbildung 5: Die Verbindung zwischen dem Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge.<sup>28</sup>

An welchen Punkten sich die Periode verdoppelt, lässt sich zudem über die indifferenten Fixpunkten berechnen. Denn diese bilden die Übergänge anziehender Fixpunkten in abstoßende bzw. abstoßender in anziehende und somit auch zwischen verschiedenen Grenzzyklen. Aufgrund des immer weiter wachsenden Grades der Fixpunktgleichung verwendet man jedoch in der Praxis numerische Verfahren, wie zum Beispiel das Newton-Verfahren, um die Gabelungspunkte näherungsweise zu berechnen.

Neben der Selbstähnlichkeit besitzt das Feigenbaumdiagramm dabei eine weitere interessante Eigenschaft. Unabhängig von dem mathematischen System bzw. der Funktion, weisen alle Feigenbaumdiagramme im Übergang von Ordnung zu Chaos, also in einen Zustand mit einer höheren Anzahl von Grenzwerten, dieselbe Grundstruktur auf. Ein weiteres solches System wäre zum Beispiel das logistische Wachstum von Tierpopulationen. Eben diese ähnliche Grundstruktur spiegelt sich in der Feigenbaum-Konstante  $\delta = 4.6692016\dots$ , einer fundamentale Konstante der Chaostheorie, wieder. Diese bezeichnet den Wert gegen den das Verhältnis der Längen zweier aufeinander folgender Intervalle, die durch Gabelungen begrenzt sind, konvergiert.<sup>29</sup>

---

<sup>28</sup>Quelle: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Verhulst-Mandelbrot-Bifurcation.jpg>, abgerufen am 20.8.2022.

<sup>29</sup>vgl. Graf, 2009, S. 27.

Dass es immer wieder Bereiche mit einzelnen attraktiven Fixpunkten gibt, also dass das System zurück zur Ordnung wechselt, ist ebenfalls ein typisches Merkmal. Im Fall der Mandelbrot-Menge trifft man dabei auf Satelliten, verkleinerte Abbildungen der Mandelbrot-Menge auf der Antenne, wie man es in Abbildung 5 erkennen kann.<sup>30</sup>

Eine weitere Besonderheit, die sich durch die Bifurkation ergibt, ist ein chaotisches Verhalten der Zahlenfolge. Neben der Tatsache, dass es schwer bzw. kaum möglich ist, dieses scheinbar zufällige Verhalten abstrakt und allgemeingültig zu beschreiben, ist die Sensibilität bezüglich des Startwertes besonders wichtig. Verändert man  $c$  nur geringfügig, können sich ganz andere Zahlen in der Iterationsfolge ergeben, wie die Beispiele der Abbildung 6 verdeutlichen sollen.

$z_1 = c$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$
$c = -1.85$	1.573	0.623	-1.462	0.288
$c = -1.9$	1.710	1.024	-0.851	-1.175
$c = -1.95$	1.852	1.482	0.246	-1.890

Abbildung 6: Chaotische Beispiele zur Zahlenfolge der Iteration.<sup>31</sup>

Obwohl sich die Beispielwerte nur um 0.05 unterscheiden, erhält man schon nach wenigen Iterationsdurchläufen gänzlich unterschiedliche Werte. Während zum Beispiel  $z_5$  mit  $c = -1.85$  etwa bei 0.288 liegt, erhält man für  $c = -1.95$  bereits -1.890. Trotz des chaotischen Verhaltens sind die Folgenglieder nicht zufällig, sondern nur nicht auf den ersten Blick erkennbar.<sup>32</sup>

Dieses Verhalten tritt jedoch nicht nur auf, wenn man sich auf der reellen Achse nach rechts bewegt, sondern überall am Rand der Mandelbrot-Menge vergrößert sich die Periodenzahl. Dieses Phänomen lässt sich sehr deutlich in Abbildung 3 erkennen und ist der Grund, weshalb der Rand von  $\mathbb{M}$  so besondere Strukturen aufweist.<sup>33</sup>

### 2.3.4 Die Divergenz für Punkte mit $r > 2$

Bewegt man sich weiter als  $|c| = 2$  vom Ursprung weg, scheint offensichtlich kein Punkt mehr zur Mandelbrot-Menge zu gehören. Um diesen Fluchtradius zu beweisen, bedarf es grundsätzlich der Unterscheidung zweier Fälle: Im ersten Fall soll die Zahlenfolge den Fluchtradius überschritten haben,  $|z_n| > 2$ , und der Startwert  $c$  näher am Ursprung liegen als  $z_n$ , also  $|z_n| > |c|$  gelten. Wenn nun die nächste Zahlenfolge größer als die vorherige ist,  $|z_{n+1}| > |z_n|$ , so muss auch das Verhältnis  $|z_{n+1}|$  zu  $|z_n|$  größer als 1 sein.<sup>34</sup>

---

<sup>30</sup>vgl. Graf, 2009, S. 27.

<sup>31</sup>eigens ausgewählte und berechnete Beispiele.

<sup>32</sup>vgl. Graf, 2009, S. 29.

<sup>33</sup>vgl. a. a. O, S. 28.

<sup>34</sup>vgl. Munafo, 1997, Escape Radius.

**Satz 2.7.** (nach Munafo 1997)

Sei  $|z_n| > 2 \geq |c|$ , so gilt  $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ : Die Zahlenfolge divergiert.

*Beweis.* (nach Munafo 1997) Basierend auf der Dreiecksungleichung gilt für die Zahlen  $a, b \in \mathbb{C}$  die Ungleichung  $|a+b| \leq |a| + |b|$ . Aus Gründen der Symmetrie sind dann ebenfalls die Ungleichungen  $|a+b| \geq |a| - |b|$  sowie  $\frac{|a+b|}{|a|} \geq \frac{|a|-|b|}{|a|}$  erfüllt. Diese Ungleichungen müssen ebenfalls für die obige Bedingung gelten, wodurch man für die Iterationsfolge der Mandelbrot-Menge folgende Ungleichung erhält:

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}$$

Da  $|z_n| > |c|$  ist, muss  $\frac{|c|}{|z_n|} < 1$  sein und somit ebenfalls:

$$|z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1$$

Des Weiteren hat  $z_n$  die Fluchlinie überschritten ( $|z_n| > 2$ ), womit ebenfalls gilt:

$$|z_n| - 1 > 1$$

Fasst man diese Schritte in einer Ungleichung zusammen, so erhält man

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geq |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1 > 1$$

Es folgt  $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ . Dementsprechend divergiert auch die Zahlenfolgen für  $|c| \leq 2 < |z_n|$  sicher gegen Unendlich und gehört damit nicht zur Mandelbrot-Menge.  $\square$

Im zweiten Fall ist der Startwerte  $|c| > 2$ :

**Satz 2.8.** (nach Munafo 1997)

Sei  $|c| > 2$ , so gilt  $|z_{n+1}| > |z_n|$ : Die Zahlenfolge divergiert.

*Beweis.* (nach Munafo, 1997) Man nehme die allgemeine Gleichung der zweiten Iteration  $z_2 = c^2 + c$ . Auch für diese muss die Dreiecksungleichung gelten und damit  $|c^2 + c| \geq |c|^2 - |c|$ :

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c| = |z_1| > 2$$

Da  $|c| > 2$  ist, muss  $(|c| - 1) > 1$  sein und somit  $|c|(|c| - 1) > |c|$ . Dadurch wurde gezeigt, dass  $|z_2| > |c|(|c| - 1) > |z_1|$  ist und damit  $|z_{n+1}| > |z_n|$  sein muss.  $z_n$  divergiert demzufolge mit steigender Iterationszahl ebenfalls gegen Unendlich und  $c \notin \mathbb{M}$ .  $\square$

Es lässt sich also zeigen, dass für die Mandelbrot-Menge ein Fluchtradius  $r = 2$  existiert. Außerhalb dessen ist für jeden Startwert  $|c| > 2$  bzw. für jedes Iterationsglied  $|z_n| > 2$  eine Divergenz gegen Unendlich garantiert.

## 2.4 Der Zusammenhang mit der Julia-Menge

Beschäftigt man sich mit der Mandelbrot-Menge genauer, wird man neben dem Grenzwert 2 ebenso dem Begriff der Julia-Menge begegnen. Wie die Mandelbrot-Menge ist die Julia-Menge, bzw. sind die Julia-Mengen fraktale Mengen, basierend auf einer rekursiven Funktion. Eine Julia Menge ergibt sich dabei aus allen Zahlen  $z_0 \in \mathbb{C}$ , deren Iterationsfolge, ähnlich wie die der Mandelbrot-Menge, bei steigender Iterationszahl durch die Iterationsvorschrift  $z_{n+1} = f(z_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  beschränkt bleibt.

Die Funktion  $f$  kann eine beliebige komplexe, meromorphe, d.h. eine bis auf die Polstellen ableitbare Funktion sein, deren Grad größer Eins ist.<sup>35</sup> Im Zusammenhang mit der Mandelbrot-Menge spezialisiert man sich jedoch lediglich auf Julia-Mengen quadratischer Polynome der Form  $f_c(z) = z^2 + c$ . Anders als bei der Mandelbrot-Menge berechnet man die Julia-Menge jedoch nicht durch die Bildung aller Zahlenfolgen in Abhängigkeit des Startwertes  $c$ , sondern durch die aller Startwerte  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Die Variable  $c$  dient dabei als eine beliebig veränderbare Konstante.<sup>36</sup>

Setzt man zum Beispiel  $c = 0$  ein und berechnet nun die Iterationsfolgen für  $z_0 \in \mathbb{C}$ , erhält man  $z_1 = z_0^2 + 0$ ,  $z_2 = z_1^2 + 0$ , usw. Damit die Zahlenfolge in diesem Fall nicht gegen Unendlich divergiert, muss  $|z_0| \leq 1$  sein. In der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt, hat diese Julia-Menge demzufolge die Form des Einheitskreises.<sup>37</sup>

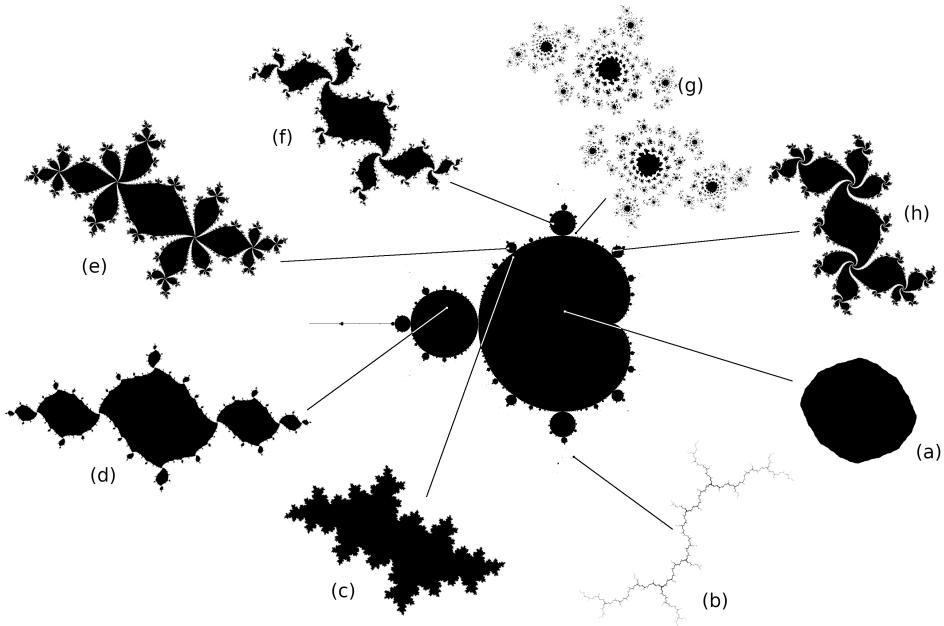


Abbildung 7: Julia-Mengen  $J(f_c)$  für  $c$  an verschiedenen Punkten in der Mandelbrot-Menge:

- (a)  $c = 0.1 + 0.1i$ ; (b)  $c = -i$ ; (c)  $c = -0.5 + 0.5i$ ; (d)  $c = -1 + 0.1i$ ;
- (e)  $c = -0.5 + 0.55i$ ; (f)  $c = -0.2 + 0.75i$ ; (g)  $c = 0.66i$ ; (h)  $c = 0.25 + 0.52i$ <sup>38</sup>

<sup>35</sup>vgl. Mansur u. a., 2021, Mandelbrotmenge.

<sup>36</sup>vgl. Falconer, 1993, S. 235f.

<sup>37</sup>vgl. a. a. O, S. 241.

<sup>38</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022.

Wie bereits erwähnt kann man für  $c$  beliebige Zahlen wählen. Berechnet man nun für verschiedene Bereiche der Mandelbrot-Menge mit dem Startwert  $c$  eine Julia-Menge mit entsprechendem Wert für  $c$ , so fällt auf, dass diese Julia-Mengen ähnliche Eigenschaften aufweisen, wie dieselbe Region der Mandelbrot-Menge.<sup>39</sup>

Bewegt man sich im Beispiel  $c = 0$  vom Ursprung nach außen, nimmt die fraktale Struktur jedoch zu. Die Julia-Menge bleibt aber eine einfach geschlossene Kurve, solange  $c$  innerhalb der Kardioide der Mandelbrot-Menge liegt. Wählt man für  $c$  einen Wert, welcher innerhalb der vorspringenden kreisförmigen Scheibe von  $\mathbb{M}$  liegt, so erhält man eine Julia Menge, die aus unendlich vielen einfach geschlossenen Kurven aufgebaut ist. Diese berühren sich gegenseitig paarweise, wie man in (d) in Abbildung 7 sehen kann.<sup>40</sup> Wählt man einen Startpunkt  $\mathbb{M}$  mit Periodenlänge 3 aus, so berühren sich jeweils immer drei Kurven der Julia-Menge in einem Punkt, wie es in der Julia-Menge (f) in Abbildung 7 der Fall ist. Aufgrund dieses Zusammenhangs, dass die Mandelbrot-Menge in gewisser Weise eine Karte für Julia-Mengen ist, wird die Mandelbrot-Menge oft zur Klassifizierung verwendet.<sup>41</sup>

Am schwierigsten und kompliziertesten zu analysieren sind die Julia-Mengen, welche auf dem Rand der Mandelbrot-Menge liegen. Wählt man ein  $c$  auf ebendiesem, so kann die zugehörige Julia-Menge viele verschiedene Formen annehmen. Wie in (b) in Abbildung 7 zu sehen ist, kann die Julia-Menge zum Beispiel ein Dendrit, also von baumähnlicher Struktur sein, wenn  $c$  auf einem der feinen, haarähnlichen Strukturen von  $\mathbb{M}$  liegt.<sup>42</sup> Dabei verbindet all die bis jetzt genannten Julia-Mengen eine Eigenschaft: Sie sind zusammenhängend; es existieren also keine zwei Einzelmengen, die die Julia-Menge bilden. Bewegt man sich nun außerhalb von  $\mathbb{M}$ , so erhält man, wie zum Beispiel bei (g) ein Fraktal, welches nicht mehr zusammenhängend ist, also aus mehreren Einzelmengen besteht. Diese Tatsache lässt sich auch mathematisch beweisen. Jedoch würde das über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen und wird deshalb als Tatsache hingenommen. Dennoch erhält man dabei einen weiteren grundlegenden Zusammenhang zwischen den Julia-Mengen und der Mandelbrot-Menge, womit sich eine weitere äquivalente Definition der Mandelbrot-Menge ergibt:<sup>43</sup>

**Definition 2.9.** (nach Falconer 1993, S.235)

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ ist zusammenhängend}\}$$

Die Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$  besteht also aus allen komplexen Zahlen  $c$ , für die die Julia-Menge der quadratischen Funktion aus einer zusammenhängenden Zahlenmenge besteht.

---

<sup>39</sup>vgl. Falconer, 1993, S. 239f.

<sup>40</sup>vgl. a. a. O, S. 241f.

<sup>41</sup>vgl. Mansur u. a., 2021, Mandelbrotmenge.

<sup>42</sup>vgl. Falconer, 1993, S. 245.

<sup>43</sup>vgl. a. a. O, S. 234f.

## 2.5 Die Symmetrie bezüglich der reellen Achse

Neben dem Bezug zu den Julia-Mengen besitzt die Mandelbrot-Menge eine weitere wesentliche Eigenschaft. Wie sich aus den bisherigen Bildern vermuten lässt, ist die Menge Achsensymmetrie bezüglich der reellen Achse.

**Satz 2.10.** (nach Mansur 2021) Für einen Startwert  $c \in \mathbb{C}$  der Mandelbrot-Menge  $\mathbb{M}$  gilt:  
 $a + bi = c \in \mathbb{M} \Rightarrow a - bi = \bar{c} \in \mathbb{M}$

*Beweis.* (nach Mansur 2021) Betrachtet man die Entwicklung der rekursiven Gleichung  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  aus (1), so erhält man für  $c = a + bi$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + a + bi \\ z_2 &= (a + bi)^2 + a + bi = (a^2 - b^2 + a) + i(b + 2ab) \\ z_3 &= ((a^2 - b^2 + a) + i(b + 2ab))^2 + a + bi \\ &= (a^2 - b^2 + a)^2 - (b + 2ab)^2 + a + i(2((a^2 - b^2 + a)(b + 2ab) + b)) \\ z_n &= Re(z_n) + i \cdot Im(z_n) \end{aligned}$$

Führt man dieselben Schritte für die konjugierte Zahl  $\bar{c}$  durch, ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + a - bi \\ z_2 &= (a - bi)^2 + a - bi = (a^2 - b^2 + a) - i(b + 2ab) \\ z_3 &= ((a^2 - b^2 + a) - i(b + 2ab))^2 + a - bi \\ &= (a^2 - b^2 + a)^2 - (b + 2ab)^2 + a - i(2((a^2 - b^2 + a)(b + 2ab) + b)) \\ z_n &= Re(z_n) - i \cdot Im(z_n) \end{aligned}$$

Dabei zeigt sich, dass sich die rekursiven Folgen allein im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden. Damit ist bewiesen, dass im Falle einer Divergenz von  $c$  gegen Unendlich, dessen konjugierte Form ebenfalls gegen  $\infty$  divergiert, während bei einer beschränkten Folge des Startwerts  $c$  oder  $\bar{c}$  beide Elemente der Mandelbrot-Menge sind. Aus dieser Tatsache ergibt sich eine Achsensymmetrie bezüglich der reellen Achse.  $\square$

### 3 Die grafische Darstellung der Mandelbrot-Menge

Bekannter als durch ihre mathematischen Besonderheiten wurde die Mandelbrot-Menge durch ihre einzigartige Formen- und Farbvielfalt. Das Fraktal selbst wird aufgrund des optischen Erscheinungsbildes auch „Apfelmännchen“ genannt.<sup>44</sup> Im folgenden Teil der Arbeit soll es um diese farbige Darstellung wie in Abbildung 8 und deren Erzeugung gehen.

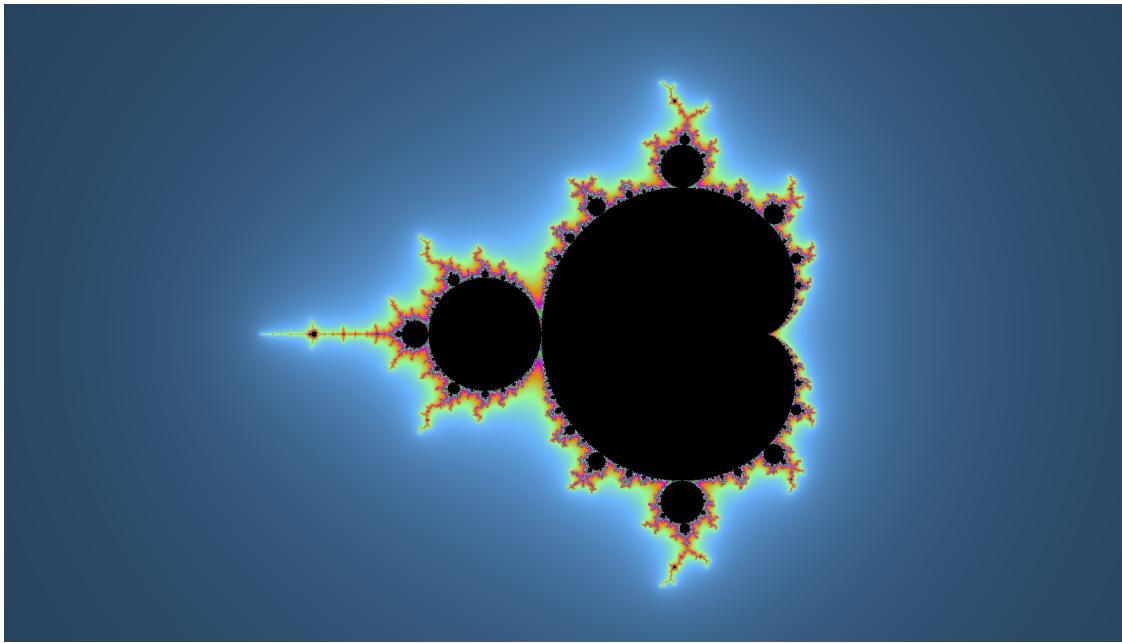


Abbildung 8: Die Mandelbrot-Menge mit fließendem Farbübergang.<sup>45</sup>

#### 3.1 Fraktale in der Gauß'schen Zahlenebene

Wie bereits in Kapitel 2.2 angeführt, handelt es sich bei den Darstellungen des Apfelmännchens um Abbildungen der Mandelbrot-Menge in der Gauß'schen Zahlenebene. Da es jedoch vor allem in den Randgebieten immer schwerer wird, das Verhalten mathematisch zu bestimmen, setzt man auf Berechnungsverfahren moderner Computer, um zu berechnen, welche Zahlen zur Mandelbrot-Menge gehören. Dennoch ist es unmöglich, für unendlich viele Zahlen unendlich viele Berechnungen durchzuführen. Um trotzdem relativ schnell scharfe Bilder berechnen zu können, weist man jedem Pixel auf dem Bild eine komplexe Zahl zu, und berechnet nur für diese die Iterationsfolge. Aufgrund der Divergenz der Zahlenfolge für  $r > 2$ , welche im Kapitel 2.3.4 bewiesen wurde, führt man die Berechnungen zudem nur durch, solange ebendieser Grenzwert nicht überschritten wird. Andernfalls weiß man, dass die Zahl sicher kein Teil der Mandelbrot-Menge ist. Auch kann auf die Iteration der konjugierten komplexen Zahl verzichtet werden, da die Mandelbrot-Menge symmetrisch zur reellen Achse ist. Zuletzt muss eine Obergrenze für

<sup>44</sup>vgl. Mansur u. a., 2021, Mandelbrotmenge.

<sup>45</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.8.2022.

die Iterationsdurchläufe festgelegt werden. Wird diese Grenze erreicht, kann man jedoch nicht davon ausgehen, dass diese Zahl zur Mandelbrot-Menge gehört. Man kann es lediglich nur vermuten. Wie in Abbildung 9 zu sehen, ist dieser Grenzwert auch ausschlaggebend dafür, wie genau die Menge abgebildet wird.<sup>46</sup>

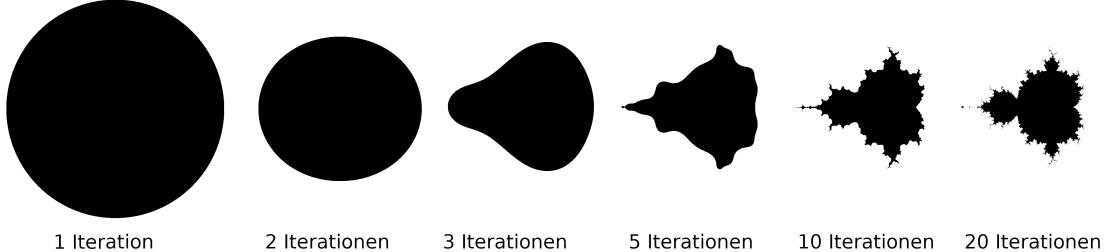


Abbildung 9: Die Mandelbrot-Menge nach Iterationsdurchläufen.<sup>47</sup>

Während mit einer Iteration nur ein Kreis zu sehen ist, da nur alle Startwerte  $|c| > 2$  den Grenzwert überschritten haben, sieht man die Mandelbrot-Menge nach 20 Iterationen bereits relativ deutlich. Je stärker man dabei einen Ausschnitt vergrößert, umso komplexere Strukturen lassen sich dort finden, doch auch umso mehr Iterationen sind für ein scharfes Bild nötig. Für ein Bild mit 1000x1000 Pixel und 1000 Iterationen sind beispielsweise bereits eine Milliarde Berechnungen nötig.

### 3.2 Die farbige Darstellung der Mandelbrot-Menge

Obwohl die farbliche Gestaltung selbst gar nicht der möglichst genauen Darstellung der Mandelbrot-Menge dient, war sie dennoch ausschlaggebend für die Berühmtheit von  $\mathbb{M}$ . Als künstlerisches Mittel verleiht sie der Menge ihre Ästhetik. Dementsprechend gibt es auch viele verschiedene Möglichkeiten, das Apfelmännchen zu färben. Die wohl aufgrund ihrer Einfachheit bekannteste Methode, ist die Färbung mittels des Escape-Time Algorithmus. Dabei definiert man grundsätzlich zuerst eine bestimmte Farbpalette, also eine Folge von Farbwerten. Die Auswahl des Farbverlaufs ist dabei eine der wichtigsten künstlerischen Entscheidungen bei der Erstellung eines guten fraktalen Bildes. Die Färbung eines Startwerts erfolgt dann je nach seiner Fluchtgeschwindigkeit, also der Anzahl der Iterationen die man benötigt, bis die Zahlenfolge die Fluchtgrenze  $R$  überschreitet und immer weiter in Richtung Unendlich divergiert. Im Fall der Mandelbrot-Menge wäre dies der Radius 2. Dennoch lassen sich auch andere, interessante Variationen durch das Ändern der Form und Position von  $R$  schaffen.<sup>48</sup>

---

<sup>46</sup>vgl. Weitz HAW Hamburg, 2017.

<sup>47</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.8.2022.

<sup>48</sup>vgl. Barrallo; Jones, 2000, S.1f.

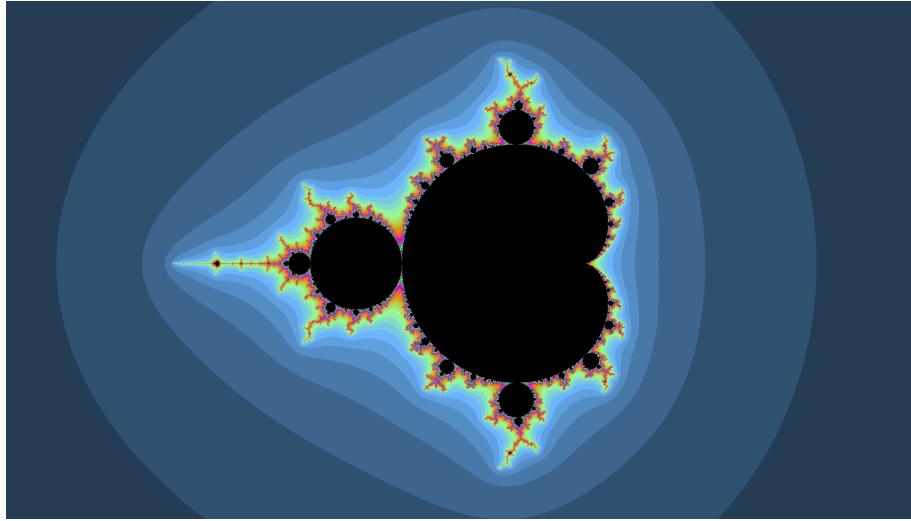


Abbildung 10: Die Mandelbrot-Menge mit Banding-Effekt.<sup>49</sup>

Aus künstlerischer Sicht verliert dieser Algorithmus jedoch an Bedeutung. Denn aufgrund der schnellen Divergenz der Zahlenfolgen in den äußeren Gebieten der Mandelbrot-Menge, erzeugt dieser einen Banding-Effekt, welchen man in Abbildung 10 sehen kann. Um diese topografischen Vermessungskarten ähnlichen Konturlinien zu verbergen, entwickelte man neue Algorithmen. Der erste historische Ansatz dafür war der Distance-Estimation Algorithmus. Dabei färbt man jeden Punkt je nach Abstand zur Mandelbrot-Menge, wodurch man kontinuierliche Übergänge erhält, die nun aber anders verlaufen, als die Grenzen des Escape-Time Algorithmus. Um einen kontinuierlichen Farbverlauf zu erhalten, der den alten Übergangslinien identisch ist, wie man es in Abbildung 8 sehen kann, wird heutzutage der Normalized-Iteration-Count Algorithmus verwendet. Dabei erzeugt man eine kontinuierlich steigende Iterationszahl  $v$ , indem man der ganzzahligen Iterationszahl  $n$  eine Zahl zwischen 0 und 1 in Abhängigkeit von  $z_n$  hinzu addiert.

$$v(n) = n + \frac{\log(\log b) - \log(\log |z_n|)}{\log 2}$$

Für die Variable  $b$  setzt man die verwendeten Fluchtgrenze  $R$  ein.

Neben diesen Algorithmen gibt es jedoch noch viele weitere Möglichkeiten die Fluchtmenge zu färben. So kann man zum Beispiel den Winkel der Polarkoordinate für die Berechnung der Farbe miteinbeziehen,<sup>50</sup> 3D-Effekte erzeugen oder sogar verschiedene Algorithmen kombinieren.<sup>51</sup>

---

<sup>49</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.8.2022.

<sup>50</sup>vgl. Barrallo; Jones, 2000, S.3f.

<sup>51</sup>a. a. O, S. 10.

### 3.3 Besondere Strukturen der Mandelbrotmenge

Im Jahr 1982 wurde von Douady und Hubbard gezeigt, dass die Mandelbrot-Menge zusammenhängend ist und nicht die Vereinigung mehrerer Einzelmengen darstellt. Wie viele Fraktale besitzt die Mandelbrot-Menge einen unendlich langen Rand mit der Hausdorff-Dimension 2. Die Struktur ähnelt folglich mehr der einer Fläche, als der einer Linie. Ebenso ist die Mandelbrot-Menge selbstähnlich, allerdings nicht strikt selbstähnlich, da keine zwei Teilstrukturen ihres Randes exakt gleich sind.<sup>52</sup> Dennoch bewies Mikhail Lyubich im Jahre 1999, dass es zumindest spezielle Punkte gibt, an denen die Mandelbrotmenge vollständig selbstähnlich ist.

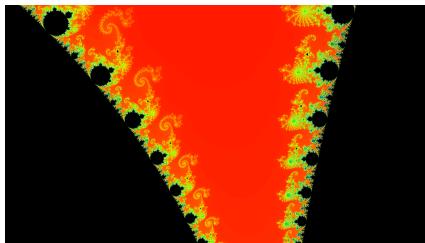


Abbildung 11: Das Tal der Seepferdchen.<sup>53</sup>



Abbildung 12: Die Doppelspirale.<sup>54</sup>

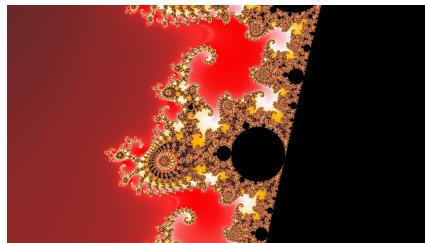


Abbildung 13: Das Seepferdchen.<sup>55</sup>

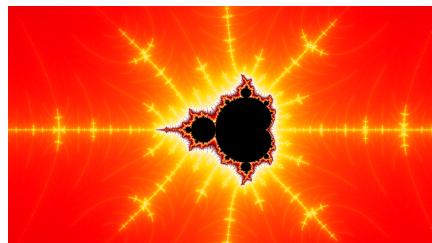


Abbildung 14: Der Satellit.<sup>56</sup>

Zoomt man wie in Abbildung 11 zwischen dem Kopf und Körper des Apfelmännchens in das Tal der Seepferdchen, sieht man bereits viele verschiedene Strukturelemente. Auf der linken Seite sind dabei wie in Abbildung 12 Doppelspiralen zu sehen, die neben ihrer Selbstähnlichkeit die Besonderheit haben, dass man beliebig tief hinein zoomen kann, ohne je ein Ende zu erreichen. Auf der rechten Seite, und in Abbildung 13 vergrößert, sind die typischen Seepferdchen abgebildet. Ein weiteres Strukturelement ist der in Abbildung 14 zu erkennende Satellit, eine verkleinerte Abbildung der Mandelbrot-Menge selbst. Ist ein solcher Satellit direkt mit anderen Satelliten verbunden, so wird die Struktur auch Knospe genannt.<sup>57</sup>

<sup>52</sup>vgl. Graf, 2009, S. 38f.

<sup>53</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022.

<sup>54</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022.

<sup>55</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022.

<sup>56</sup>selbst erstellt mit eigens entwickeltem Programm, am 20.10.2022.

<sup>57</sup>vgl. WIKIPEDIA FOUNDATION INC., 2022, Mandelbrot-Menge.

## 4 Die Rezeption der Mandelbrot-Menge in der Öffentlichkeit

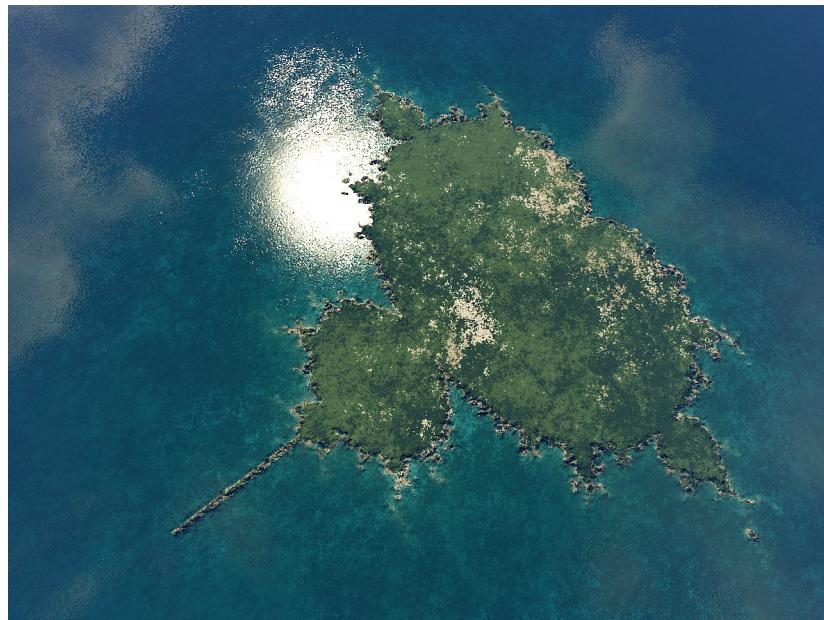


Abbildung 15: Insellandschaft in Form der Mandelbrot-Menge erzeugt mit Terragen.<sup>58</sup>

Benoît Mandelbrot löste mit seinen Forschungsarbeiten einen regelrechten Hype um die Mandelbrot-Menge und Fraktale allgemein aus. Nach der Veröffentlichung der Computergrafiken in den Medien beschäftigten sich immer mehr Computerkünstler mit der Erzeugung und Modifikation von Iterationsvorschriften und Farbalgorithmen. Erstmals gelang es dadurch Loren Carpenter, Mitbegründer der Pixar Animation Studios, ganze Landschaftsbilder am Computer durch die Verwendung fraktaler Algorithmen zu generieren. So wurde zum Beispiel ein ganzer Planet in dem zweiten Spielfilm der Star-Trek-Saga durch diese neue Technik erschaffen und auch bis heute verwenden alle gängigen Anwendungen zum Erstellen von 3D-Landschaften dasselbe Prinzip. Die neuen Bilder führten sogar zu einem neuen Trend in der Popkultur. Auf Modeartikeln und sämtlichen anderen Alltagsgegenständen konnte man Abbildungen von Fraktalen finden, allem voran das der Mandelbrot-Menge. Mobiltelefone, so klein wie wir sie heute kennen, konnten nur durch die Entdeckung fraktaler Antennen gebaut werden. Denn erst damit gelang es, ohne Leistungsverlust, Antennen nicht nur kleiner, sondern zudem mit einem größeren Frequenzspektrum zu bauen. Und auch in vielen anderen Bereichen, wie zum Beispiel in der Medizin in der Krebs- oder Herzforschung, werden bis heute noch immer neue Entdeckungen durch die Untersuchung fraktaler Strukturen erzielt, die ohne Benoît Mandelbrot und der Mandelbrot-Menge wahrscheinlich nicht möglich gewesen wären.<sup>59</sup>

---

<sup>58</sup>Quelle: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/Mandelbrot\\_island.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/Mandelbrot_island.jpg), abgerufen am 20.8.2022.

<sup>59</sup>vgl. DrSelbstdenker, 2013, Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension.

# Literaturverzeichnis

- BARRALLO, Javier; JONES, Damien, 2000. Coloring algorithms for dynamical systems in the complex plane. In: *Visual Mathematics* [online]. 1(4), S. 1-11 [Zugriff am: 18.09.2022]. European Digital Mathematics Library. ISSN 1821-1437. Verfügbar unter <http://eudml.org/doc/257038>.
- DRSELBSTDENKER, 2013. *Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension (ARTE)* In: YouTube [online]. 12.12.2013 [Zugriff am: 22.08.2022]. Verfügbar unter <https://www.youtube.com/watch?v=101B2uA4l38>.
- FALCONER, Kenneth J., 1993. *Fraktale Geometrie: Mathematische Grundlagen und Anwendungen*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag. ISBN 3860250752.
- GRAF, Melanie, 2009. *Mandelbrot-Menge: Die Mathematik hinter dem Apfelmännchen*. Fachbereichsarbeit. Wien; GRG 12 Rosasgasse 1-3.
- MANDELBROT, Benoît B., 1987. *Die fraktale Geometrie der Natur*. Schweiz: Birkhäuser Basel. ISBN 978-3-0348-5028-5.
- MANSUR, Daschaew; HANNAH, Otte; SELIN, Koparan; DANIELLE, Eitelmann, 2021. *Mandelbrotmenge* [online]. Uni Heidelberg, 12.04.2021 [Zugriff am: 22.06.2022]. Verfügbar unter <https://funfacts.mathi.uni-heidelberg.de/index.php/Mandelbrotmenge>.
- MUNAFO, Robert, 1997. *Escape Radius* [online]. 19.11.1997 [Zugriff am: 18.09.2022]. Verfügbar unter <https://mrob.com/pub/muency/escaperadius.html>.
- WEITZ HAW HAMBURG, 2017. *Die Mandelbrotmenge* In: YouTube [online]. 04.10.2017 [Zugriff am: 22.06.2022]. Verfügbar unter <https://www.youtube.com/watch?v=5TzqfheD3rQ>.
- WIKIPEDIA FOUNDATION INC., 2022. *Mandelbrot-Menge* [online]. San Francisco: Wikipedia Foundation Inc., 16.06.2022 [Zugriff am: 22.06.2022]. Verfügbar unter <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Mandelbrot-Menge&oldid=223745342>.
- ZIMMER, Lisanne, 2010. *Wohlgeformte Grenzlinien: Epizykloiden als Konvergenzgrenzen der Mandelbrotmengen*. Hans-und-Hilde-Coppi-Schule, Berlin.

# Abbildungsverzeichnis

1	Die Mandelbrot-Menge in der Gauß'schen Zahlenebene. . . . .	5
2	Eigene Beispiele zur Zahlenfolge der Iteration. . . . .	7
3	Die Mandelbrot-Menge mit farbkodierter Periodenlänge der Grenzzyklen. . . . .	11
4	Die Erzeugung einer Kardioide durch das Abrollen eines Kreises auf einem anderen von gleichem Radius. . . . .	12
5	Die Verbindung zwischen dem Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge. . . . .	15
6	Chaotische Beispiele zur Zahlenfolge der Iteration. . . . .	16
7	Julia-Mengen $J(f_c)$ für $c$ an verschiedenen Punkten in der Mandelbrot-Menge. . . . .	18
8	Die Mandelbrot-Menge mit fließendem Farbübergang. . . . .	21
9	Die Mandelbrot-Menge nach Iterationsdurchläufen. . . . .	22
10	Die Mandelbrot-Menge mit Banding-Effekt. . . . .	23
11	Das Tal der Seepferdchen. . . . .	24
12	Die Doppelspirale der Mandelbrot-Menge. . . . .	24
13	Das Seepferdchen der Mandelbrot-Menge. . . . .	24
14	Der Satellit der Mandelbrot-Menge. . . . .	24
15	Insellandschaft in Form der Mandelbrot-Menge erzeugt mit Terragen. . .	25

Ich erkläre, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

---

Datum und Unterschrift des Verfassers