Übung 4

4.1 Inversionen (2pt)

Sei Π eine zufällige Permutation der Folge $1, 2, \ldots, n$. Eine *Inversion* bezeichnet ein Paar (j, k) in Π für welches $j > k$ aber $\Pi_k < \Pi_j$. Wie gross ist die erwartete Anzahl Inversionen in Π? (Hinweis: Benutzen Sie Zufallsvariablen als Indikator.)

4.2 Mehr zufällige Permutationen? (2pt)

In der Vorlesung haben wir den folgenden Algorithmus zum Erzeugen einer zufälligen und uniform gewählten Permutation von $A = [1, \ldots, n]$ eingeführt. Er benötigt nur $O(n)$ Operationen. Die Funktion *random*(i, j) wählt einen zufälligen Integer in $[i, j]$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    $j \leftarrow$ *random*(i, n)
    swap$(A[i], A[j])$

Wir ersetzen nun *random*(i, n) durch *random*$(1, n)$, d.h., j wird immer mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus allen Elementen gewählt. Erzeugt dieser Algorithmus ebenfalls eine zufällige Permutation von A? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

4.3 Markov-Ungleichung (2pt)

Beschreiben Sie eine Zufallsvariable M, welche nur nicht-negative Werte annimmt und für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Markov-Ungleichung mit Gleichheit erfüllt. Das heisst, es soll gelten

$$\mathrm{P}[M \geq m\,\mathrm{E}[M]] \;=\; \frac{1}{m}.$$

(Hinweis: Es reicht schon, dass M nur zwei Werte annimmt.)

4.4 Varianz (2pt)

a) Sei X eine Zufallsvariable mit uniformer Verteilung auf $[-n, n] \subset \mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

b) Beschreiben Sie eine Zufallsvariable Y, deren kleinster und grösster Wert ebenfalls $-n$ und n ist, welche jedoch eine grössere Varianz hat als X.

4.5 Konzentration um den Erwartungswert (2pt)

Die Varianz einer Zufallsvariable mit Binomialverteilung $B(p, n)$ ist $np(1-p)$. Eine unfaire Münze, welche mit Wahrscheinlichkeit 40% *Kopf* zeigt, wird 1000 Mal geworfen. Benutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung und berechnen Sie eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze weniger als 350 Mal oder mehr als 450 Mal *Kopf* zeigt.