Übung 6

6.1 Uniforme Verteilung (2pt)

Eine Quelle $X \in \{0,1\}$ generiert beliebig viele uniform verteilte und unabhängige Bits.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von X eine uniform verteilte Zahl in $[0, n-1]$ erzeugt.

b) Diskutieren Sie die erwartete Anzahl Aufrufe von X durch Ihren Algorithmus, in Abhängigkeit von n.

6.2 Rationale Bernoulli-Variable (2pt)

Es steht eine Quelle $Z(n)$ zur Verfügung, welche für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt viele Male aufgerufen werden kann. Bei jedem Aufruf gibt X eine uniform verteilte und unabhängige Zahl in $[0, n-1]$ aus. (Z.B. der Algorithmus aus der vorangehenden Aufgabe.) Konstruieren Sie daraus eine Bernoulli-Zufallsvariable mit einer gegebenen Erfolgswahrscheinlichkeit q, wobei q rational ist.

6.3 Chernoff-Bound (3pt)

Im Roulette setzt jemand auf eine "volle Zahl," d.h., eine Zahl in $[1, 36]$. Das Ergebnis eines Spiels ist zufällig und uniform verteilt in $[0, 36]$. Sei X die Anzahl Gewinne durch Setzen auf volle Zahl in einer Serie von n Spielen. Geben Sie drei verschiedene Schranken an (abhängig von n) für die Wahrscheinlichkeit, dass X um 10% grösser ist als sein Erwartungswert, und zwar mittels Markov-Ungleichung, Chebyshev-Ungleichung, und Chernoff-Abschätzung.

6.4 Hamming-Gewicht einer Bitsequenz (3pt)

Eine Quelle $X \in \{0,1\}$ generiert ein Bit mit Wahrscheinlichkeit $P_X(1) = p > 1/2$. Nun erzeugt X eine Sequenz $X^{(n)} = X_1, \ldots, X_n$ in n unabhängigen Wiederholungen. Sei W das *Hamming-Gewicht* von $X^{(n)}$, also die Anzahl Symbole, welche *nicht* 0 sind. Für den Erwartungswert von W gilt natürlich $\mathrm{E}[W] = np$. Gegeben ein positives ϵ so dass auch $p - \epsilon > 1/2$; berechnen Sie eine Abschätzung mittels Chernoff-Bound für die Wahrscheinlichkeit, dass W *höchstens* $n(p-\epsilon)$ ist. Verifizieren Sie, dass die Schranke exponentiell (in n) sinkt.