Übung 1

1.1 Binär-symmetrischer Kanal (BSK, 3pt)

Ein binärer, symmetrischer Übertragunskanal $X \to Y$ mit Input-Alphabet $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und Output-Alphabet $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ verfälscht jedes übertragene Symbol mit Wahrscheinlichkeit p in sein Gegenteil, d.h., $P_Y(b|X = b) = 1 - p$ und $P_Y(b \oplus 1|X = b) = p$ und für $b \in \{0, 1\}$. Mit einem *Wiederholungs-Code* (engl., *repetition code*) kann die Zuverlässigkeit der Übertragung verbessert werden, indem jedes zu übertragende Bit (auch *Informations-Bit* genannt) k-fach wiederholt gesendet wird. Der Decoder gibt das am häufigsten empfangene Symbol aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Informationsbit korrekt übertragen wird für ungerade k. Überprüfen Sie die Spezialfälle $p = 0$ und $p = \frac{1}{2}$.

1.2 Abhängigkeit (1pt)

Finden Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum und drei Ereignisse A, B und C, so dass jeweils zwei davon unabhängig sind und alle drei abhängig voneinander.

1.3 Würfelsumme (2pt)

Es werden fünf faire, sechsseitige Würfel geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augen aller fünf Würfel durch sechs teilbar ist? (*Hinweis:* Benutzen Sie das Prinzip der aufgeschobenen Entscheidung und betrachten Sie den Zeitpunkt kurz bevor der letzte Würfel fällt.)

1.4 Münzentrick (2pt)

Ein Taschenspieler besitzt drei gleich aussehende Münzen: eine davon ist fair, eine zweite zeigt auf beiden Seiten *Zahl* und die dritte zeigt mit WSK $\frac{3}{4}$ *Zahl* und mit WSK $\frac{1}{4}$ *Kopf*. Der Spieler wählt versteckt und zufällig eine der Münzen, er wirft sie und sie zeigt *Zahl*. Mit welcher WSK handelt es sich um die Münze, welche immer *Zahl* zeigt?

1.5 Unfaire Münze (2pt)

Gegeben sei eine unfaire Münze, welche mit einer konstanten aber unbekannten WSK *Kopf* oder *Zahl* zeigt.

a) Wie können Sie daraus einen perfekten Münzwurf erzeugen, für welchen gilt $\Pr[\textit{Kopf}] = \Pr[\textit{Zahl}] = \frac{1}{2}$? Sie können die unfaire Münze beliebig oft werfen.

b) Erweitern Sie den Algorithmus, so dass er aus einer Folge von k unfairen Münzwürfen eine grössere Anzahl unabhängiger und fairer Münzwürfe extrahiert.

c*) Wie viele faire Münzwürfe können maximal erzeugt werden?