Algorithmen, Wahrscheinlichkeit und Information

Bedingter Erwartungswert:

$P_X : \sum_x x \cdot P_X(x)$
$P_{X|Y=y}$:
Def.: E[X|Y=y] $\sum_{x \in X} x \cdot P_{X|Y=y}(x)$
Bsp.: X_1, X_2 sind uniform in [1, k]
$Z = X_1 + X_2$
$E[X_i] = \frac{k+1}{2}$
$E[Z] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = k + 1$
$E[Z \mid X_1 = 1] = E[X_1 + X_2 \mid X_1 = 1] = E[X_2 + 1] = E[X_2] + 1 = \frac{k+1}{2} + 1$
Theorem: Für ZV X und Y
$E[X] = \sum_{y \in Y} P_Y(y) E[X \mid Y = y]$
Bew.:

$$\to \sum_y P_Y(y) \cdot \sum_x x \cdot P_{X|Y=y}(x)$$
$$= \sum_x \sum_y x \cdot P_Y(y) \cdot P_{X|Y=y}(x)$$
$$= \sum_x \sum_y x \cdot P_{XY}(xy)$$
$$= \sum_x \sum_y x \cdot P_X(x) \cdot P_{Y|X=x}(y)$$
$$= \sum_x x \cdot P(X = x) \cdot \sum_y P(Y = y \mid X = x)$$
$$= \sum_x x \cdot P(X = x) \cdot 1$$
$$E[X \mid Y = y] \neq E[X \mid Y]$$

Bedingter Erwartungswert gegeben eine ZV
E[X|Y] bezeichnet eine ZV A=f(Y) $\in$ R, die mit WSK $P_Y(y)$ den Wert a = E[X|Y=y]
Bsp.: $Z = X_1 + X_2$, $X_1, X_2 \in_{\mathrm{R}} [1, k]$
E[Z| $X_1 = x_1$] für $x_1 \in [1, k]$
$\to \sum_{z=2}^{2k} z \cdot P_{Z|X_1=x_1}(z) = \sum_{x_2=1}^{k} (x_1 + x_2) \cdot P_{Z|X_1=x_1}(z) = x_1 + \sum_{x_2=1}^{k} x_2 \cdot P_{X_2}(x_2) = x_1 + E[X_2] = x_1 + \frac{k+1}{2}$

$P_{X_1}(x_1) = \frac{1}{k}$

$$E[E[Z \mid X_1]] = \sum_{X_1} E[Z \mid X_1 = x_1] \cdot P_{X_1}(x_1)$$
$$= \sum_{X_1} \frac{1}{k} \cdot (x_1 + \frac{k+1}{2} = \sum_{x_1=1}^{k} \frac{1}{k} \cdot x_1 + \frac{k+1}{2} = k + 1 = E[Z]$$

Algorithmen für zufällige Permutationen 1, ..., n

Geg.: random(1,k) $\rightarrow$ zuf. Zahl n [1,k]
1) for i = 1, ..., n do
j $\leftarrow$random(1,n)
while j $\in \{\Pi_1, \Pi_1, \ldots \Pi_{\text{i-1}}\}$
$\Pi_{\text{i}} \leftarrow j$
$O(n^2)$ Operationen

2) j $\leftarrow$random(1,n!)
Π ist j-te Permutation von n Elementen
$O(2^n)$ Error

3) $L_1, L_2, \ldots, L_n$ zufällige Zahlen und sortieren
for i = 1, ..., n do
$L_i \leftarrow (i, random(1, n^3))$
$\sum \leftarrow$ sort(L) anhand 2. Komponenten
for i = 1, ..., n do
$\Pi_i \leftarrow L_i$ 1. Komponente
O(n log(n)) Operationen

4) Linearer Algorithmus: [CLRS]
for i = 1, ..., n do $\Pi \leftarrow i$
for i = 1, ..., n do
$k \leftarrow random(i, n)$
$swap(\Pi_i, \Pi_k)$
O(n) Operationen

Def.: Eine m-Permuattion aus Menge G mit n Elementen ist eine Sequenz von m Elementen aus G
Es gibt $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(n-m)!}$ m-Permutation.

Invariante (*): Vor Iteration i für jede (i-1)-Permutation ρ von [1,n] die Sequenz $\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}$ ist gleich ρ mit WSK $\frac{(n-i+1)!}{n!}$.
Verankerung (i-1): jede O-Permutation ist gleich [ ] mit WSK 1.

Schritt: Sei ρ eine (i-1)-Permutation, $\rho = \rho_1, \ldots, \rho_{i-1}$
(1) $\mathrm{P}[\Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1} = \rho_1, \ldots, \rho_{i-1}] = \frac{(n-i+1)!}{n!}$
(2) $\mathrm{P}[\rho_i = \Pi_i \mid \Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1} = \rho_1, \ldots, \rho_{i-1}] = \frac{1}{n-i+1}$

(1) $\cap$ (2) $\rightarrow \mathrm{P}[\rho_1, \ldots, \rho_i = \Pi_1, \ldots, \Pi_i]$
$= \mathrm{P}[\rho_1, \ldots, \rho_{i-1} = \Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1}] \cdot \mathrm{P}[\rho_i = \Pi_i \mid \Pi_1, \ldots, \Pi_{i-1} = \rho_1, \ldots, \rho_{i-1}]$
$= \frac{(n-i+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{(n-i+1)} = \frac{(n-i)!}{n!} \leftarrow$ WSK für bestimmte i-Permutation

Bernoulli-ZV
Experiment mit WSK p gelingt.

$$P_X(0) = 1 - p \qquad P_X(1) = p \qquad E[X] = p$$

Binomialverteilung
WSK für k Erfolge in n unabhängigen Experimenten mit WSK p.
Def.: $B_{n,p} \in [0, n]$

$$P_{B_{n,p}}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad E[B_{n,p}] = n \cdot p$$

$$B_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \textit{(}X_i \textit{ ist Bernoulli-ZV))}$$

$$E[B_{n,p}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Geometrische ZV
"Anzahl Versuche bis zum ersten Erfolg"
Def.: ZV X geometrisch verteilt mit Parameter p

$$P_X(n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Lemma: Für n > 0, k > 0
$P[X = n + k \mid X > k] = P[X = n]$ "memory loss"
Bew.:

$$P[X = n + k \mid X > k] = \frac{P[X = n + k \cap X > k]}{P[X > k]} = \frac{P[X = n + k]}{P[X > k]} = \frac{(1-p)^{n+k-1} \cdot p}{\sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i \cdot p}$$

$$= \frac{(1-p)^{n+k-1} \cdot p}{(1-p)^k} = (1-p)^{n-1} \cdot p = P[X = n]$$

Lemma: Erwartungswert einer geometrischen ZV mit Parameter p

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

Bew.: Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p.
X: Anzahl Versuche bis ersten Erfolg (p).
S: Bernoulli-ZV, ob erster Versuch gelingt (p).

$$E[X] = P[S = 0] \cdot E[X \mid S = 0] + P[S = 1] \cdot E[X \mid S = 1] = (1-p) \cdot E[X \mid S = 0] + p$$

Sei Z die Anzahl verbleibender Versuche für S=0.

$$E[X] = (1-p) \cdot E[Z + 1] + p = (1-p) \cdot E[Z] + 1 \ \textit{"memoryloss" E[X] = E[Z]}$$

$$E[X] = (1-p) \cdot E[X] + 1 \rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$$