Übung 11

11.1 Datenkompression (2pt)

Gegeben eine unfaire Münze, welche mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8}$ *Kopf* zeigt. Sie wird drei Mal hintereinander geworfen.

a) Konstruieren Sie einen optimalen binären Codie mit variabler Länge für eine Dreier-Sequenz von Münzwürfen. Berechnen Sie die Entropie der Quelle und die durchschnittliche Länge eines Codeworts.

b) Nun wird genau eine Dreier-Sequenz codiert. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Bit im Codewort "1" ist? Falls im Codewort ein zweites, drittes ... Bit existiert, was ist dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung?

11.2 Ich sehe was, was du nicht siehst (3pt)

Alice stellt K ihrer Lieblingssachen s_1, ..., s_K auf einen Tisch vor Bob. Da Alice und Bob gut bekannt sind, wissen beide um die Vorliebe von Alice in der Form einer Gewichtung $p_1, \ldots, p_K$, die sich zu 1 summiert. Nun wählt Alice ein Objekt S zufällig anhand ihrer Vorliebe und Bob versucht dieses zu erraten. Alice antwortet nur mit "ja" oder "nein."

a) Angenommen, Bob kann nur Fragen stellen der Form "Ist es s_j?" In welcher Reihenfolge geht er vor und wie viele Fragen beantwortet Alice durchschnittlich?

b) Nun kann Bob die Sachen beliebig gruppieren und binäre Fragen dazu stellen. Wie soll Bob vorgehen, um Gruppen zu formen und zu fragen? Wie viele Fragen braucht er im Durchschnitt mindestens? Und wie viele höchstens?

c) Beantworten Sie die ersten zwei Fragen für acht Objekte von Alice mit

$$[p_1, \ldots, p_8] = \left[\frac{8}{36}, \frac{7}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}\right].$$

11.3 Noch ein Huffmancode (2pt)

Geben Sie einen binären Huffmancode für die Zufallsvariable $S \in \mathcal{S}$ mit Verteilung

s	α	β	γ	δ	ε
$P_S(s)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

Zeigen Sie, dass dieser Code ebenfalls optimal ist für die Quelle U mit uniformer Verteilung über $\mathcal{S}$.

$\Longrightarrow$

11.4 Schätzfehler (3pt)

Eine Zufallsvariable Y sei bekannt und wir möchten den Wert einer unbekannten Zufallsvariable $X \in \mathcal{X}$ raten, welche mit Y korreliert ist. Aus dem Skript folgt, dass wir X genau dann mit Sicherheit kennen, wenn $H(X|Y) = 0$.

Sei $\hat{X} = g(Y)$ für eine Funktion g unsere bestmögliche Schätzung für X. Dann bezeichnet $p_e = \mathrm{P}[\hat{X} \neq X]$ die Wahrscheinlichkeit, dass wir X nicht erraten. Zeigen Sie, dass

$$h(p_e) + p_e \log |\mathcal{X}| \;\geq\; H(X|Y).$$

Dieses Resultat ist als *Fano-Ungleichung* bekannt und wird meist in der umgekehrten Richtung verwendet. Das heisst, aus einer Schranke $H(X|Y) > 0$ folgt $p_e > 0$, d.h., dass man X nicht mit Sicherheit kennt.

Hinweis: Führen Sie eine Indikator-Zufallsvariable E ein für das Ereignis $\hat{X} \neq X$ und expandieren Sie $H(EX|\hat{X})$ auf zwei Arten. Zeigen Sie damit, dass $h(p_e) + p_e \log |\mathcal{X}| \;\geq\; H(X|\hat{X})$. Danach benutzen Sie die Datenverarbeitungs-Ungleichung aus Aufgabe 10.1