Algorithmen, Wahrscheinlichkeit und Information

Chernoff Bounds

Annahmen:

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ X_i unabhängig
- X_i können verschieden verteilt sein
- $0 \leq X_i \leq 1 \leftarrow$ ohne Beweis!
- $\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

Zusammenfassung der Chernoff-Methode

- Nicht P[X > c], sonder P[$e^X > e^{t \cdot c}$]
- E[e^X] = E[$e^{\sum_i X_i}$] $= \prod_i E[e^{X_i}]$
- Wähle t so, dass WSK möglichst klein wird
- P[X $\geq$ (1+δ) μ] $\leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$
- P[X $\leq$ (1-δ) μ] $\leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$
- P[| X-μ | $\geq \delta \cdot \mu$] $\leq 2 \cdot e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$

Bsp.: Wettervorhersage trifft zu an jedem Tag mit WSK 0.75
Jemand behauptet: Stimmt am Sa/So nie!
$\Rightarrow$ Prognose stimmt nur an höchsten $\frac{5}{7}$ Tage
$X_1, \ldots, X_n : X_i$ Indikator-ZV dafür, dass die Prognose stimmt an Tag i

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P_{X_i}(1) = \frac{3}{4} \qquad E[X] = \mu = \frac{3}{4} \cdot n$$

P["Prognose stimmt höchstens an $\frac{5}{7}$ Tagen"] $= P[X \leq \frac{5}{7} \cdot n]$

$$\frac{5}{7} \cdot n = (1-\delta) \cdot \mu = (1-\delta) \cdot \frac{3}{4} \cdot n$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow P[X \leq \frac{5}{7} \cdot n] = P[X \leq (1 - \frac{1}{21}) \cdot \frac{3}{4} \cdot n] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}} = e^{-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{441} \cdot \frac{1}{3} \cdot n}$$

- 1 Jahr = 365 Tage $\rightarrow$ WSK = 0,81
- 10 Jahr = 3650 Tage $\rightarrow$ WSK = 0,12
- 20 Jahr = 7300 Tage $\rightarrow$ WSK = 0,016

Für welche Abweichung (δ) ergibt ein Chernoff-Bound eine geg. WSK ε?

$$P[\ldots] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}} = \varepsilon$$

- ε: Fehler-WSK
- δ: Abweichung vom Erwartungswert
- μ: Erwartungswert

$$\Delta(\mu, \varepsilon)?$$
$$e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}} = \varepsilon$$
$$\frac{\mu\delta^2}{3} = ln(\frac{1}{\varepsilon})$$
$$\delta = \sqrt{\frac{3}{\mu} \cdot ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$
$$\Rightarrow \Delta(\mu, \varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{\mu} \cdot ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

X_i Bernoulli-Experiment mit WSK p
$\mu = E[X] = n \cdot p$
Fehler WSK möglichst klein:

$$\Delta(\mu, e^{-n}) = \sqrt{\frac{3}{n \cdot p} \cdot n} = \sqrt{\frac{3}{p}} \textit{ nicht möglich}$$

$$\Delta(\mu, n^{-c}) = \sqrt{\frac{3}{n \cdot p} \cdot ln(n^c)} = \sqrt{\frac{3}{n \cdot p} \cdot c \cdot ln(n)} = \sqrt{\frac{3c}{p} \cdot \frac{ln(n)}{n}}$$

$\delta = \frac{1}{21}$ mit Fehler-WSK $= n^{-2}$

$$\Delta(\mu, n^{-2}) = \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{ln(n)}{n}} = \sqrt{8 \cdot \frac{ln(n)}{n}}$$

- 365 Tage $\rightarrow \varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-6} \rightarrow \delta = 0,35$
- 1000 Tage $\rightarrow \varepsilon = 10^{-6} \rightarrow \delta = 0,23$
- 3650 Tage $\rightarrow \varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-8} \rightarrow \delta = 0,13$
- 7300 Tage $\rightarrow \varepsilon = 1,8 \cdot 10^{-8} \rightarrow \delta = 0,099$

Balls and Bins
m Bälle und n Töpfe, wobei m >> n
X_i Anzahl Bälle in T_i
E[X_i] = $\frac{m}{n}$ für jedes T_i
Mit hoher WSK ist X_i "nicht viel größer" als $\frac{m}{n}$; wie viel größer? (und mit welcher WSK?)

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} \textit{ Indikator für Ball j in Topf i}$$

$$P_{X_{ij}}(1) = \frac{1}{n}$$

$$E[X_{ij}] = \frac{1}{n} \qquad\qquad Var[X_{ij}] = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

$$Var[X_i] = \sum_{j=1}^{m} Var[X_{ij}] = \frac{m}{n} - \frac{m}{n^2}$$

$$\underline{Chebyshev} \Rightarrow P[X_i \geq \frac{m}{n} + l] = P[\mid X_i - \frac{m}{n} \mid \geq l] \leq \frac{Var[X_i]}{l^2} \leq \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{l^2}$$

Bsp. (Markov): m = 10^6, n = 10^3, l = 250

$$P[X_i \geq 1250] \leq 0,016$$

Chernoff-Bound

Lemma:

$$\Rightarrow P[X_i \geq \frac{m}{n} + 3 \cdot \sqrt{ln(n)} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \leq \frac{1}{n^3}$$

Beweis:

$$P[X_i \geq (1+\delta) \cdot \mu] \leq e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}}$$

$$\delta \cdot \mu = \delta \cdot \frac{m}{n} := 3 \cdot \sqrt{ln(n)} \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$\delta = \frac{3 \cdot \sqrt{ln(n)}}{\sqrt{\frac{m}{n}}}$$

$$\varepsilon = e^{-\frac{\mu\delta^2}{3}} = e^{-\frac{9 \cdot ln(n)}{3 \cdot \frac{m}{n}} \cdot \frac{m}{n}} = e^{-3 \cdot ln(n)} = n^{-3} = \frac{1}{n^3}$$

Bsp. (Chernoff): m = 10^6, n = 10^3, l = 250

$$P[X_i \geq \frac{m}{n} + l] = P[X_i \geq 1000 + 250] \leq 10^{-9}$$

Kombination von Chernoff-Bound mit Union-Bound

"Fehlerereignisse" $B_1, B_2, \ldots, B_n$, die alle kleine WSK (mit Chernoff-Bound)
$P[B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n] \leq \sum_{i=1}^{n} P[B_i]$
Falls P[B_i] "sehr sehr klein" und "viele" solcher Ereignisse auftreten können, dann ist Gesamtfehler-WSK "sehr klein"
Bsp.: n Fehler und P[B_i] $\leq 2^{-\frac{n}{2}}$

$$P[\bigcup_i B_i] \leq n \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \in O(2^{-\frac{n}{2}})$$

$$P[B_i] = \varepsilon \in O(n^{-c})$$

$$P[\bigcup_i B_i] \leq n \cdot \varepsilon \in O(n^{-c+1})$$

Bsp.: Server-Farm mit n Servern und m Jobs, welche statisch aber zufällig auf k Server verteilt werden
Storage-Array mit n Disks und m Blocks, die zu verteilen sind (uniform und zufällig)
Entspricht Modell: Balls and Bins
X_i ZV für Anzahl Bälle in T_i

$$M = max\{X_1, \dots, X_n\}$$

$$P[M \geq \frac{m}{n} + l] \leq ?$$

$$P[M \geq \frac{m}{n} + l^n] \leq n \cdot P[X - i \geq \frac{m}{n} + l] \leq n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

WSK dafür, dass irgend ein T_i mehr als 1'250 Bälle enthält $\leq 10^{-6}$.