Übung 3

3.1 Bedingte Erwartungswerte (2pt)

Bei einem Würfelspiel gewinnt Alice 5 (Tokens), wenn sie im Voraus den Wurf errät; andernfalls verliert sie 1. Der Würfel zeigt sechs gleich wahrscheinliche Werte wie üblich. Verifizieren Sie, dass Alice' erwarteter Gewinn G_1 gleich 0 ist.

In einem zweiten Experiment hat Bob zwei unterschiedliche Würfel im Ärmel, von welchen er mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen auswählt und damit würfelt. Der eine zeigt nur gerade Zahlen, der andere nur ungerade. Der erwartete Gewinn G_2 ist immer noch 0.

Im dritten Fall erfährt Alice von einem Orakel, welchen Würfel Bob nehmen wird, noch bevor sie ihre Auswahl trifft. Sie passt ihre Strategie an und nützt die Zusatzinformation aus. Wie hoch wird ihr erwarteter Gewinn G_3?

3.2 Verteilungen (2pt)

a) Alice und Bob beschliessen, dass sie solange Kinder kriegen möchten bis sie ein Mädchen haben oder k Kinder. Jungen und Mädchen sind gleich wahrscheinlich und es gibt keine Mehrlingsgeburten. Was ist die erwartete Anzahl ihrer Kinder?

b) Carole und David möchten solange Kinder kriegen, bis sie mindestens ein Mädchen und einen Jungen haben. Wie viele Kinder werden sie durchschnittlich haben?

c) Elena wirft wiederholt eine Münze für welche $\mathrm{P}[\textit{Kopf}] = p$. Wie viele Münzwürfe muss sie durchschnittlich machen bis insgesamt k Mal *Kopf* aufgetreten ist?

3.3 Reisen (2pt)

Ab einem Bahnhof fahren morgens Züge nach n verschiedenen Zielorten. Fritz reist täglich an eines der Ziele, aber er kann sich jeweils nicht mehr daran erinnern, wo er schon war. Er wählt deshalb einen Zug zufällig mit uniformer Verteilung. Sei X die Anzahl Tage, bis Fritz mindestens einmal an alle n Zielorte gereist ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[X] = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ und nützen Sie dabei Fritz' Vergesslichkeit aus.

3.4 Von Monte Carlo nach Las Vegas (2pt)

Gegeben sei ein Monte-Carlo-Algorithmus M für ein Problem Π, welcher für jede Instanz des Problems durchschnittlich T Schritte benötigt und dabei eine korrekte Antwort mit Wahrscheinlichkeit mindestens α liefert. Angenommen für Π existiere ein deterministischer Verifikationsalgorithmus V, der in höchstens K Schritten feststellt, ob eine mögliche Lösung stimmt. Transformieren Sie M in einen Las-Vegas-Algorithmus L, welcher immer eine richtige Lösung für Π liefert, und zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit $(T + K)/\alpha$ Schritte ist.

$\Longrightarrow$

3.5 Online-Algorithmus für eine zufällige Teilmenge (2pt)

Ein *Online-Algorithmus* verarbeitet seine Inputdaten sequenziell, ohne dass die ganze Datenmenge bekannt ist.

Der folgende Algorithmus liest eine Folge s_1, s_2, … unbekannter Länge aus jeweils verschiedenen Elementen. Er merkt sich eine zufällige Auswahl von k Elementen der Folge. Die Funktion *random*$(1, i)$ wählt einen zufälligen Integer in $[1, i]$. Zeigen Sie, dass die Variablen $r_1, \ldots, r_k$ eine zufällige und uniform verteilte Auswahl der bisher gelesenen Elemente $(s_1, \ldots, s_i)$ enthalten.

for $i = 1, \ldots, k$ **do**
    $r_i \leftarrow s_i$
$i \leftarrow k + 1$
while TRUE **do**
    $j \leftarrow$ *random*$(1, i)$
    if $j \leq k$ **then**
        $r_j \leftarrow s_i$
    $i \leftarrow i + 1$