Algorithmen, Wahrscheinlichkeit und Information

Algorithmus: VerifyMatrix(A,B,C)
IN:A,B,C , nxn Matrizen, binär
OUT: A x B $\stackrel{?}{=}$ C
r $\stackrel{R}{\leftarrow}$ $\{0, 1\}^{n}$
if $A \cdot (B \cdot r) \neq C \cdot r$ than
return **FALSE**
else
return **TRUE**

Kosten: $O(n^2)$ Operationen
Nachberechnung: $O(n^3)$ zum $A \cdot B$
Fehler tritt auf, falls $A \cdot B \neq C$ aber Alg. $\rightarrow$ **TRUE**
P($A \cdot B \cdot r = C \cdot r \mid A \cdot B \neq C$)
($D = A \cdot B - C \neq 0$)
P($D \cdot R = 0$)
D = $[d_{ij}]$
$d_{nn} \neq 0$
$\Sigma d_{nn} \cdot r = 0$
$\leftrightarrow rn = \frac{1}{d_{nn}} \Sigma d_{n1} \cdot r_i$

Angenommen $r_1, \ldots, r_{n-1}$ sind bestimmt, dann:
$P(r_n = s \mid r_1, \ldots, r_{n-1}) = \frac{1}{2}$
= P(Alg. irrt) = P(VerifyMatrix(A,B,C) = **TRUE** | A · B ≠ C)

Prinzip der **aufgeschobenen Entscheidung**
Einschränkung (Conditioning) auf bereits getroffene Auswahlen
Bedingt, die "offene" WSK gleich ist für alle möglichen Auswahlen

Algorithmus: zur Berechnung des minimalen Schnitts
IN: G = (V,E)
OUT: (mögl.) kleinster Schnitt C

while $\mid V \mid > 2$ do
e $\stackrel{R}{\leftarrow}$ E
"join v_1 und v_2, retain all edges in G except e and except self-loops"
$V \leftarrow V \setminus \{v_1, v_2\} \cup \{v_{12}\}$
return E
$WSK \geq \frac{2}{n \cdot (n-1)}$

Intuition:
Sei G_i der Graph nach i Operationen

Schnitt in G_i ist auch ein Schnitt in $G_{i-1}, \ldots, G_0 = G$
Schnitt in $G_0, G_1, \ldots, G_{i-1}$ ist nicht immer ein Schnitt in G_i

Theorem: MinCut(...) berechnet den kleinsten Schritt mit $WSK \geq \frac{2}{n\cdot(n-1)}$

Sei C ein kleinster Schnitt mit k Kanten
Ereignis $A_i \equiv$ Kante e aus Schnitt i $\notin$ C
Ereignis $B_i \equiv \bigcap A_j$: Alle Kanten aus Schnitt 1, ..., i ist $\notin$ C
P(B_{n-2} = WSK, dass Ereignis Min-Cut
P(A_1) = P(B_1)
Wegen $| C |$ = k hat jeder Knoten mind. k Kanten
$\rightarrow$ G hat $\geq \frac{n\cdot k}{2}$ Kanten
Schnitt 1 wählt e zufällig
P(A_1) = P(B_2)$\geq 1 - k \cdot \frac{2}{n\cdot k} = 1 - \frac{2}{n}$
Nach i-1 Schritten hat G $\frac{(n-i+1)\cdot k}{2}$ Kanten
P(A_i | B_{i-1} $\geq 1 - k \cdot \frac{2}{(n-i+1)\cdot k} = 1 - \frac{2}{n-i+1}$
P(B_{n-2}) = P(A_{n-2} | B_{n-3}) $\cdot$ P(A_{n-3} | B_{n-4}) $\cdot \ldots$ P(A_2 | B_1) $\cdot$ P(A_1)
$= \Pi P(A_i \mid B_{i-1})$
$\geq \Pi(1 - \frac{2}{n-i+1}) = \frac{2}{n\cdot(n-1)}$

Kapitel 2: Zufallsvariablen und Erwartungswert

Zufallsvariablen (ZV) ist eine Abbildung aus einem WSK Ω in ein X
Def.: ZV X $\in$ X
Ω WSK-Raum
X Definitionsmenge
$X : \Omega \rightarrow X$ Abbildung

Notation:
ZV A Definitionsmenge A $P_A(a) = P(A = a) = \Sigma P(A(\omega) = a)$, a $\in$ A, $\omega \in \Omega$

Def.: Erwartungswert einer reell-wertigen ZV X, X $\subset R$
$E(X) = \Sigma x \cdot P_X(x)$

Def.: Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig
$\leftrightarrow$
$\forall x \in X, \forall y \in Y : P_{XY}(xy) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

Theorem: $E(\Sigma X_i) = \Sigma E(X_i)$
Lemma: für Konstante c: $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$

Jensen-Ungleichung
Def.: f: R $\rightarrow$ ist konvex (convex-$\cup$) $\leftrightarrow$
$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0, 1]$

$f(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Theorem: Für konvexe f und ZV X:
$E[f(x)] \geq f[E(X)]$
Beispiel: $E(X^2) \geq E(X)^2$

Sei f zweimal diff.bar
f konvex, daraus folgt: f”() $\geq$ 0

f(x) = f(μ) + f’(μ)*(x-μ) + f”(c)$\cdot\frac{1}{2}\cdot$(x-μ)^2
f(x) $\geq$ f(μ) + f’(μ)(x-μ)
E(f(X)) $\geq$ E(f(μ)+f’(μ)(X-μ))
= E[f(μ)] + E[f’(μ)$\cdot$(X-μ)]
= E(f(μ) + f’(μ)$\cdot$E(X)-μ)
= f(μ) = f(E(X))