Übung 8

Approximation der Grösse eines Graphen

In dieser Übung entwickeln Sie eine Methode zur Approximation der Grösse eines Graphen, von dem Sie fast nur zufällig gewählte Kanten sehen. Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge V mit $n = |V|$ Knoten und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von $m = |E|$ Kanten. Jede Kante $e \in E$ verbindet zwei Knoten. Der Graph ist ungerichtet, enthält keine Mehrfachkanten und auch keine Schlingen, d.h., keine Kanten der Form $e = (v, v)$. Der *Grad* $\deg(v)$ eines Knotens v ist die Zahl der Kanten, welche den Knoten enthalten, d.h., $\deg(v) = |\{e \in E | e = (v, \cdot) \vee e = (\cdot, v)\}|$. Angenommen, jeder Knoten mindestens Grad 1.

Über einen Graph G kennt man nur folgendes: (1) Eine Funktion, welche zufällig eine Kante mit uniformer Verteilung aus E liefert; (2) die Anzahl Kanten insgesamt (m); (3) den Grad $\deg(v)$ für einen bekannten Knoten v; und (4) dass der Graph d-begrenzt ist (siehe Teilaufgabe 8.3).

Der Graph ist so gross, dass Ihr Algorithmus weder alle Knoten noch Kanten aufzählen kann. Gesucht ist eine Approximation für $n = |V|$.

Die Zufallsvariable $S \in V$ wird durch den nachfolgenden randomisierten Algorithmus bestimmt, welcher über eine Zufallsvariable $R \stackrel{R}{\leftarrow} \{0, 1\}$ uniforme Zufallsbits erzeugen kann. (Die Notation $a \stackrel{R}{\leftarrow} \mathcal{A}$ steht dafür, dass ein Wert a aus einer Menge $\mathcal{A}$ zufällig und mit uniformer Verteilung gewählt wird.)

Algorithm S:
    $(u, v) \stackrel{R}{\leftarrow} E$ // Eine zufällige Kante mit Gleichverteilung
    $r \stackrel{R}{\leftarrow} \{0, 1\}$ // Ein zufälliges Bit
    if $r = 1$ **then**
        return u
    else
        return v

8.1 Knoten-Wahrscheinlichkeit (2pt)

Berechnen Sie $P_S(v) = \mathrm{P}[S = v]$ für einen bestimmten Knoten $v \in V$, in Abhängigkeit von $\deg(v)$ und m. (Hinweis: $\sum_{u \in V} \deg(u) = 2m$.)

8.2 Schätzfunktion (2pt)

Sei $\ell(v) = \frac{2m}{\deg(v)}$. Bestimmen Sie $\mathrm{E}[\,\ell(S)\,]$.

$\Longrightarrow$

8.3 Varianz (2pt)

Ab jetzt sei der Graph G *Grad-d-begrenzt*, was bedeutet, dass $\max_{v \in V} \deg(v) \leq d$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Var}[\,\ell(S)\,] \;\leq\; dn^2.$$

8.4 Testverfahren (2pt)

Sei $Z = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \ell(S_i)$, wobei die Zufallsvariable S_i für $i = 1, \ldots, t$ mittels unabhängiger Wiederholungen von S bestimmt wird. Berechnen Sie $\mathrm{E}[Z]$ und zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Var}[Z] \;\leq\; dn^2/t.$$

(Hinweis: Eigenschaften der Varianz aus [MU17; Kapitel 3.2] und [MU17; Exercise 3.4].)

8.5 Beschränkung des Approximationsfehlers (2pt)

Ihr Algorithmus wählt also t Testkanten und berechnet dann Z anhand von Teilaufgabe 8.4. Für gegebene Konstanten $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, wie gross muss t mindestens sein, damit der relative Approximationsfehler kleiner als ϵ ist ausser mit Wahrscheinlichkeit δ? Die Schranke für t sollte eine Funktion von d, ϵ und δ sein.

In anderen Worten, benutzen Sie die Chebyshev-Ungleichung, um einen Wert von t zu bestimmen, für welchen gilt

$$\mathrm{P}\big[\,\big|Z - n\big| \geq \epsilon n\,\big] \;\leq\; \delta.$$