Universidad de la Habana
Facultad de Matemática y Computación

Proyecto de Simulación
Miguel A. Asin Barthelemy C411
Tema: Simulación basada en eventos discretos.

El concepto de sistema de evento discreto tiene por finalidad identificar sistemas en los que los eventos que cambian el estado del mismo ocurren en instantes espaciados en el tiempo, a diferencia de los sistemas cuyo estado puede cambiar continuamente en el tiempo. Aunque aparentemente simples, los sistemas de eventos discretos, pueden modelar muchos de los fenómenos a los que se enfrentan estadísticos de la actualidad. Un ejemplo de ello se muestra a continuación.

Poblado en Evolución

Se desea conocer la evolución de la población de una determinada región.

Se conoce que la probabilidad de fallecer de una persona distribuye uniforme y se corresponde, según su edad y sexo, con la siguiente tabla:

Edad	**Hombre**	**Mujer**
0 – 12	0.25	0.25
12 – 45	0.1	0.15
45 – 76	0.3	0.35
76 – 125	0.7	0.65

Del mismo modo, se conoce que la probabilidad de una mujer se embarace es uniforme y está relacionada con la edad:

Edad	**Probabilidad Embarazarce**
12 – 15	0.2
15 – 21	0.45
21 – 35	0.8
35 – 45	0.4
45 – 60	0.2
60 – 125	0.05

Para que una mujer quede embarazada debe tener pareja y no haber tenido el número máximo de hijos que deseaba tener ella o su pareja en ese momento. El número de hijos que cada persona desea tener distribuye uniforme según la tabla siguiente:

Número	**Probabilidad**
1	0.6
2	0.75
3	0.35
4	0.2
5	0.1
más de 5	0.05

Para que dos personas sean pareja deben estar solas en ese instante y deben desear tener pareja. El desear tener pareja está relacionado con la edad:

Edad	**Probabilidad Querer Pareja**
$12-15$	0.6
$15-21$	0.65
$21-35$	0.8
$35-45$	0.6
$45-60$	0.5
$60-125$	0.2

Si dos personas de diferente sexo están solas y ambas desean querer tener parejas entonces la probabilidad de volverse pareja está relacionada con la diferencia de edad:

Diferencia de Edad	**Probabilidad Establecer Pareja**
$0-5$	0.45
$5-10$	0.4
$10-15$	0.35
$15-20$	0.25
20 o más	0.15

Cuando dos personas están en pareja la probabilidad de que ocurra una ruptura distribuye uniforme y es de 0.2. Cuando una persona se separa, o enviuda, necesita estar sola por un período de tiempo que distribuye exponencial con un parámetro que está relacionado con la edad:

Edad	λ
$12-15$	3 meses
$15-21$	6 meses
$21-35$	6 meses
$35-45$	1 año
$45-60$	2 años
$60-125$	4 años

Cuando están dadas todas las condiciones y una mujer queda embarazada puede tener o no un embarazo múltiple y esto distribuye uniforme acorde a las probabilidades siguientes:

Número de Bebés	Probabilidad
1	0.7
2	0.18
3	0.08
4	0.04
5	0.02

La probabilidad del sexo de cada bebé nacido es uniforme $0,5$.

Asumiendo que se tiene una población inicial de M mujeres y H hombres y que cada poblador, en el instante incial, tiene una edad que distribuye uniforme $U(0,100)$. Realice un proceso de simulación para determinar como evoluciona la población en un período de 100 años.

Modelo de Simulación

Se desea determinar la evolución de un grupo de $M+H$ personas en un determinado período de tiempo. En cada instante de tiempo, la evolución de este depende de las propias características de la población y no del tiempo, de ahí que se considere un sistema dinámico estacionario.

Inicialización

Para cada instante de tiempo t es necesario llevar un registro de la población, fallecimientos, nacimientos, emparejamientos y rupturas. De ahí que estas formen parte de las variables definidas en el modelo. Se define además $T = 100$ como el límite de tiempo expresado en años, y una lista de emparejamientos que contiene la cantidad de emparejamientos en el istante t.

Tras inicializar las variables anteriores se tiene:

```
initialize():
  populationMale <- lista tamaño M
  populationFemale <- lista tamaño F
  total_mathing = 0
  total_breakups = 0
  total_deaths = 0
  total_borns = 0
  T = 100*12
```

Note que el tiempo T se expresa en meses, a continuación se explicará la razón de ello.

Análisis de las probabilidades

Como se puede apreciar en el planteamiento del problema, existen eventos que ocurren en períodos de meses y no años (período de tiempo tras una ruptura), de ahí que sea necesario modificar la estructura del modelo tras cada mes. Sin embargo las probabilidades dadas en el problema corresponden a intervalos de tiempo en años, luego es necesario determinarlas por meses en los casos que lo requieran. En lo adelante cada vez que se haga referencia a una unidad de tiempo, se refiere al transcurso de un mes en el sistema.

Considere que una persona pertenece al grupo de edad de entre l y r años, y tiene una probabilidad de fallecer de p. En dicho intervalo existen $12(r-l)$ unidades de tiempo, luego p corresponde a la probabilidad de fallecer en un istante de tiempo correspondiente a una de esas $12(r-l)$ unidades, es decir:

$$p \ = \ \sum_{i=1}^{12(r-l)} P(Fallecer_i)$$

Como dicha probabilidad es la misma para cada unidad de tiempo:

$$P(Fallecer_i) \ = \ \frac{p}{12(r-l)}$$

La probabilidad de fallecer en el instante de tiempo i sería entonces $\frac{p}{12(r-l)}$.

En el caso de la probabilidad de embarazo, a diferencia del caso de los fallecimientos, es posible tener varios embarazos en un intervalo de l a r años (un máximo de $s = \left\lceil \frac{4(r-l)}{3} \right\rceil$ embarazos). Dado que en caso de un embarazo, los siguientes 9 meses no puede volver a embarazar, la cantidad de formas de tener k embarazos en dicho período de tiempo, está dada por $\binom{12(r-l)+8(k-1)}{k}$, donde $\binom{n}{m}$ denota las combinaciones de n en m. Aplicando exclusiones e inclusiones, se cumple que:

$$\begin{aligned}
p \ &= \ P\left(\bigcup_{i=1}^{12(r-l)} E_i\right) \qquad (E_i\text{: Probabiliad de embarazar en el instante de tiempo } i) \\
&= \sum_{i=1}^{12(r-l)} P(E_i) - \sum_{\substack{i=1,\\ j>i+8}}^{12(r-l)} P(E_i)P(E_j) + ... + (-1)^{s-1} \sum_{\substack{i_1=1,...,\\ i_s>i_{s-1}+8}}^{12(r-l)} P(E_{i_1})...P(E_{i_s}) \\
&= \sum_{i=1}^{12(r-l)} P - \sum_{\substack{i=1,\\ j>i+8}}^{12(r-l)} P^2 + ... + (-1)^{s-1} \sum_{\substack{i_1=1,...,\\ i_s>i_{s-1}+8}}^{12(r-l)} P^s \qquad (\text{Tomando } P(E_i)=P,\ \forall\, i) \\
&= \sum_{i=1}^{s} \binom{12(r-l)+8(i-1)}{i} P^i(-1)^{i-1}
\end{aligned}$$

Donde P es la probabilidad buscada. Para obtenerla, basta con tomar la raíz entre 0 y 1 del polinomio resultante.

Al igual que en el caso de los fallecimientos, la probabilidad de querer pareja en una unidad de tiempo es de $\frac{p}{12(r-l)}$, la diferencia radica en que si en algún momento una persona desea una pareja, no es necesario volver a ejecutar el test de probabilidad a menos que sufra una ruptura y se cumpla el tiempo tras su ocurrencia, o la edad de dicha persona supere el límite r.

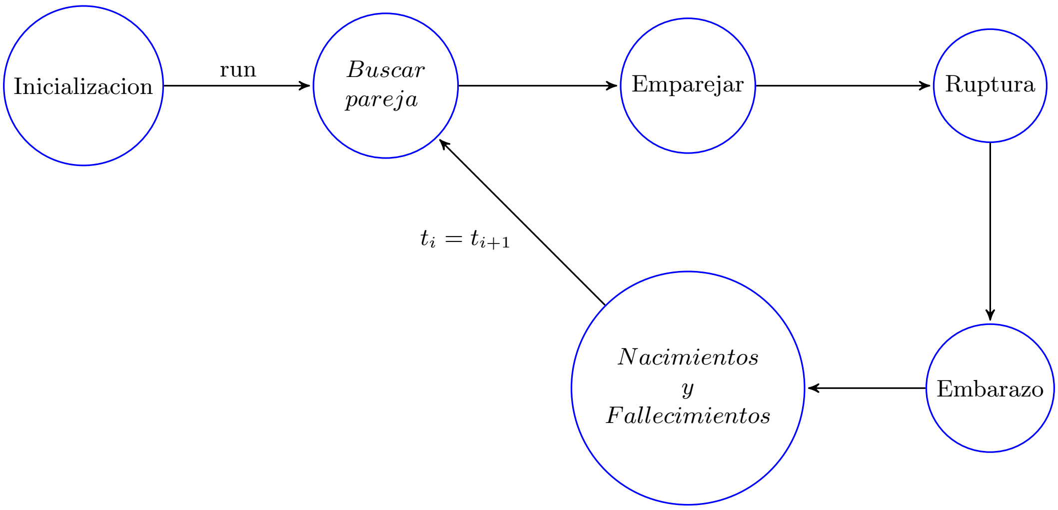
Para los restantes casos, la probabilidad por unidad de tiempo es la misma que la dada para el intervalo.

Para determinar la probabilidad de que ocurra un determinado evento, se genera primeramente (en los casos que lo requieran), una variable aleatoria U con distribución uniforme $U(0, 1)$, en caso de que sea menor o igual que la probabilidad establecida para ese evento, se considera que el mismo ocurrirá (ver archivo `probabilities.py`).

Lógica tras la simulación

Hasta el momento se han creado las condiciones para iniciar la simulación, sin embaro aún no se ha hecho alusión a la lógica detrás de la misma.

El siguiente diagrama brinda una breve idea del funcionamiento de la simulación:



Este mismo proceso se ejecuta una y otra vez, hasta que $t_i > T$. Tal y como se puede apreciar, inicialmente se comprueba si existen personas que desean encontrar una pareja, independientemente de si nuevos individuos desean o no tener una pareja, es necesario comprobar el emparejamiento si en anteriores iteraciones se obtubieron casos afirmativos de personas que desean parejas. De la misma forma se comprueba a partir de la probabilidad dada la cantidad de rupturas de parejas que habrán en dependencia del número de emparejamientos. En caso de que queden parejas, se realiza la prueba de posibilidad de embarazoo se obvia este paso en caso de que no queden y; por último, se actualiza la edad de las personas y se realiza la prueba de nacimiento para los embarazon con 9 meses de edad y la de fallecimiento, todo esto en correspondencia con las probabilidades dadas anteriormente para cada unidad de tiempo.

```
def run_simulation():
    for current_time in 0..T:
        matching_and_pregnant()
        breakup()
        update_population_state()

def matching_and_pregnant():
    foreach person in population:
        if person.single:
            person.want_partner()

    foreach person1,person2 in population:
        if person1.want_partner and person2.want_partner and person1.sex != person2.sex:
            check_if_will_be_partners(person1, person2)
```

```
    foreach woman in population:
        if woman.have_partner and not woman.pregnant and
        woman.children < max(woman.max_children, woman.partner.max_children):
            woman.pregnant()

def update_population_state():
    foreach person in population:
        person.update_age()
        person.update_breakups_time()
        if person.pregnant and person.time_pregnant == 9:
            person.ChildBirth()
        check_if_person.die()

def breakup():
    while total_breakups < breakup_probability * total_matching:
        man, woman = select_random_partners()
        break(man, woman)
        total_breakup += 1
```

Algoritmo

El algoritmo para la simulación fue implementado en el lenguaje Python, el mismo se encuentra anexo al documento (mismo "path") y no posee requerimientos especiales. Para ejecutarlo, es necesario tener instalado dicho lenguaje y en una consola o terminal con direccíon del archivo .py, ejecutar la orden bash que corresponda de las siguientes:

```
$py simulation.py <cantidad inicial de Hombres> <cantidad inicial de Mujeres>
$python simulation.py <cantidad inicial de Hombres> <cantidad inicial de Mujeres>
$python3 simulation.py <cantidad inicial de Hombres> <cantidad inicial de Mujeres>
```

Cada caso de prueba ejecutado tendrá como salida la cantidad de Personas que quedan, el total de nacimientos, fallecimientos, emparejamientos y rupturas hasta cada año en el período de tiempo analizado.

Consideraciones

Como la edad inicial de las personas sigue una distribución uniforme entre 0 y 100, la probabilidad de encontrar parejas es relativamente pequeña y aproximadamente un 30% pertenece a la tercera edad, por estas razones una evolución positiva de la población se torna complicado sino imposible. Valores de las probabilidades de fallecimiento elevados, para una temprana edad (25%) influye en el futuro de dicha población. Para obtener valores más acordes, se recomienda modificar valores de dichas probabilidades a consideración y seleccionar un intervalo más pequeño para la generación de las edades, de esta forma existe una mayor probabilidad de que se establezcan un mayor número de parejas.

Para mejoras del algoritmo es posible incluir probabilidades de contraer enfermedades que influyan en la taza de mortalidad de la población o; el número de migrantes por año, a fin de lograr una simulación más acertada de la realidad.

Github Link

https://github.com/M4S1N/Population_Simulation