Lineare Algebra Serie 6 Übungsaufgaben

Pascal Zürcher 22-111-314
Leandro Lüthi 22-105-035
Manuel Flückiger 22-112-502

November 9, 2022

1 Basis und Dimensionen verschiedener Vektorräume bestimmen.

a) Da $x_1 = 2x_2$ sind x_1 und x_2 linear unabhängig. da $x_1 + x_4 = x_3$ gilt, ist x_3 von x_1 und x_4 abhängig. Somit sind nur $x_1 und x_4$ linear unabhängig. Damit ist $dim = 2$ und eine mögliche Basis ist

$$< x_1, x_4 > , < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

b) $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0$ wenn $\alpha = \beta = \delta = 0$ gelten müsste, um diese Gleichung zu erfüllen, wären x_1, x_2, x_3, x_4 linear unabhängig. Daraus folgt, dass nicht alle linear unabhängig sind. $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ Da es zur Darstellung einer der Vektoren immer alle drei Anderen benötigt (siehe (*)), sind drei Vektoren linear unabhängig. Somit ist dim = 3 und eine mögliche Basis ist basis $< x_1, x_3, x_4 >$

*
$x_1 = -3x_2 - x_3 - 2x_4$
$x_2 = -\frac{1}{5}x_1 - x_3 - \frac{2}{3}x_4$
$x_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_4$
$x_4 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$

c) $Mat(2, 3, \mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^6$, da jedes Elemente der Matrix irgend ein Element aus $\mathbb{R}$ ist. Somit ist dim = 6 und eine Basis zum Beispiel:

$$\text{basis}< \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\rangle$$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Mat(2, 2, \mathbb{R})$

a_{12} und a_{21} müssen den gleichen Wert haben, also:

$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die drei Matrizen bilden die Basis mit drei Variablen $\Rightarrow$ dim = 3.

Basis: basis$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

e)