4a) Beweis durch Kontraposition

$U \cap W = \{0\} \Rightarrow \dim U + \dim W \leq \dim V$

⊛ Sei $U \cap W = H = \{0\} \Leftrightarrow \dim H = 0$

Dimensionsformel:

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$\Leftrightarrow \dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

mit ⊛ $\dim(U+W) + 0 = \dim U + \dim W$

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

$\dim U + \dim W = \dim(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \beta w_1 + \dots + \beta_n w_n) \overset{\text{Korollar Äquivalenzsatz}}{\leq} \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim(V)$

weil: $U \cap W$ ist ein Unterraum

$U+W$ ist " "

$\Rightarrow \dim U + \dim W \leq \dim(V) \Rightarrow U \cap W = \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim U + \dim W > \dim(V) \Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$

b) "$\Rightarrow$" $a_1, \dots, a_n :=$ Basis von A

$a \in \operatorname{span} A \Rightarrow a$ kann als lin. komb. $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ geschrieben werden.

$\Rightarrow A \cup \{a\} \leq \operatorname{span} A$

$\Rightarrow \operatorname{Rang} A \cup \{a\} \leq \operatorname{Rang} A$

(weil $a_1, \dots, a_n \in A \cup \{a\}$) $\Rightarrow \operatorname{Rang} A \cup \{a\} = \operatorname{Rang} A$

"$\Leftarrow$"

$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A \cup \{a\} \overset{\text{sonst } \operatorname{Rang} A \cup \{a\} > \operatorname{Rang} A)}{\Rightarrow}$ beliebige anzahl Vektoren $a_1, \dots, a_n \in A$ sind

a lin. abh. $\Rightarrow a$ kann als lin. komb. $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = a$ geschrieben werden $\Rightarrow a \in \operatorname{span} A$

$\square$