Datenbanken

Frühlingssemester 23

Manuel Flückiger
Universität Bern

über dieses Dokument

Das ist eine Zusammenfassung der Vorlesung “Datenbanken” von Prof. Dr. Thomas Studer im Frühlingssemester 2023. Du darfst sie so verwenden, wie sie dir am meisten beim Verständnis des Materials hilft. Verantwortlich dafür was hier drin steht ist Manuel Flückiger. Beachte, dass der Dozent dieses Dokument nicht geschrieben (und vielleicht auch nicht gelesen) hat. Falls du selbst Fehler entdeckst, oder Verbesserungsvorschläge hast, sind diese unter der Adresse

`manuel.flueckiger@students.unibe.ch`

zu melden. Bei dieser Zusammenfassung ist zu beachten, dass der Aufbau ein Plagiat von Theo Oggier’s Skripten vom Gymnasium Burgdorf sind. Es dient mir vorallem beim lernen von LATEXund beim Verständnis der Vorlesung.

Anerkenntnis

Diese Zusammenfassung wird als Testvorbereitung des Stoffes gemacht und kann daher viele Fehler enthalten. Falls ihr Fehler findet, meldet diese bitte, dann korrigiere ich es für zukünftige Leser/innen Vielen Dank euch! Hilfreiche Beiträge kamen von:
eure Namen, wenn ihr helft ;).

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

Definition 1.1: Objekte in der Mengenlehre

Objekte sind entweder

- atomare Objekte, d.h. unteilbare Objekte ohne interne Struktur oder
- n-Tupel der Form $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wobei a_1 bis a_n Objekte sind $(n \geq 1)$.

Die Komponenten eines Tupels sind geordnet.

Konvention

Wir benutzen Kleinbuchstaben $a, b, c, \ldots$ um Objekte zu bezeichnen.

Konvention

Spielt bei einem n-Tupel die Anzahl der Komponenten keine Rolle (oder ist sie klar aus dem Kontext), so sprechen wir einfach von einem Tupel.

Definition 1.2: Projektion auf Komponenten

Sei $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ ein n-Tupel, dann nennen wir a_i die i-te Komponente von a. Wir definieren für $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $1 \leq i \leq n$:

$$\pi_i(a) := a_i$$

Mit Hilfe der Projektionsfunktion $\pi_i(a)$ können wir die i-te Komponente aus einem Tupel a extrahieren.

Beispiel:
Seien a, b und c Objekte. Dann sind auch $t = (a, a, b)$ sowie $s = ((a, a, b), c)$ Objekte.

- $\pi_1(t) = a$
- $\pi_2(t) = a$
- $\pi_3(t) = b$
- $\pi_1(s) = (a.a.b)$
- $\pi_2(s) = c$
- $\pi_3(s) = b$

Definition 1.3: Gleichheit in der Mengenlehre

Seien $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ zwei n-Tupel. Es gilt

$$a = b \; g.d.w. \; \forall 1 \leq i \leq n(a_i = b_i).$$

Das heisst, zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn Gleichheit für alle Komponenten gilt.

Beispiel:

- $(999, Max, Muster) = (999, Max, Muster)$
- $(999, Max, Muster) \neq (999, (Max, Muster))$

Definition 1.4: Mengen

Eine Menge ist eine ungeordnete Kollektion von Objekten. Falls das Objekt a zu einer Menge M gehört, sagen wir a ist ein Element von M und schreiben $a \in M$.
Eine endliche Menge M kann durch Aufzählen ihrer Elemente beschrieben werden. So besteht beispielsweise die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ genau aus den Elementen a, b, c und d.
Bei Mengen geht es ausschliesslich um die Frage, welche Elemente in ihr enthalten sind. Häufigkeit und Reihenfolge der Elemente spielen keine Rolle.
$\{b, b, a, c, d\}$ und $\{a, b, c, d, d, d\}$
beschreiben dieselbe Menge.
Wir verwenden Grossbuchstaben $A, B, C, \dots$ um Mengen zu bezeichnen.

Annahme: Die Klasse der Objekte und die Klasse der Mengen sind disjunkt.
Dies bedeutet, dass Mengen keine Objekte sind. Somit kann eine Menge nicht Element einer (anderen) Menge sein. Für Mengen A und B ist also $A \in B$ nicht möglich. Wir treffen diese Annahme, damit wir uns nicht um Paradoxien der Mengenlehre kümmern müssen.

Beispiel:
Seien $a, b,$ und c Objekte.

- Die leere Menge ist eine Menge, sie wird auch mit $\emptyset$ bezeichnet.
- $\{a, b\}$ ist eine Menge
- $\{a, (b, c)\}$ ist eine Menge.
- $\{a, \{b, c\}\}$ ist keine Menge (gemäss unserer Definition).

Definition 1.5: Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen sind gleich, falls sie dieselben Elemente enthalten. Formal heisst das

$$A = B \text{ } g.d.w. \text{ } \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Statt A und B sind gleich sagen wir auch, A und B sind identisch.

Definition 1.6: Teilmengen

Eine Menge A heisst Teilmenge einer Menge B (wir schreiben dafür $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist. Das heisst

$$A \subseteq B \text{ } g.d.w. \text{ } \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

A heisst *echte Teilmenge* von B (in Zeichen $A \subsetneq B$, falls

$$A \subseteq B \text{ } und \text{ } A \neq B.$$

Bemerkung:

Für zwei Mengen A und B gilt somit

$$A = B \text{ } g.d.w. \text{ } A \subseteq BundB \subseteq A.$$

Definition 1.7: Prädikate

Ein Prädikat $\varphi(x)$ beschreibt eine Eigenschaft, welche Objekten zu- oder abgesprochen werden kann. Der Ausdruck $\varphi(a)$ sagt, dass das Objekt a die durch $\varphi(x)$ beschriebene Eigenschaft hat. Wir sagen dann a erfüllt φ.

Beispiel:

- $\varphi(x) = x$ ist eine gerade Zahl
- $\varphi(x) = x$ so, dass $\exists y \in \mathbb{N}$ mit $x = 2y$
- $\varphi(x) = x$ ist rot

Komprehension
Annahme: Für jedes Prädikat $\varphi(x)$ gibt es eine Menge A, so dass für alle Objekte $x$gilt.

$$x \in A \text{ } g.d.w. \text{ } \varphi(x).$$

Wir verwenden folgende Schreibweise, um eine durch Komprehension gebildete Menge zu definieren

$$A := \{x \mid \varphi(x)\}$$

und sagen A ist die Menge von allen x, welche φ erfüllen.

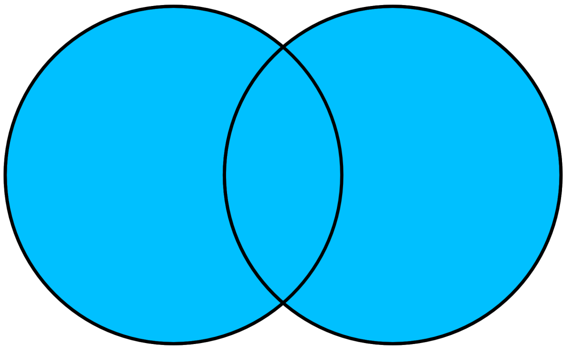
Beispiel:
Die Menge

$$A := \{x \mid \exists y \in \mathbb{N} \; mit \; x = 2y\}$$

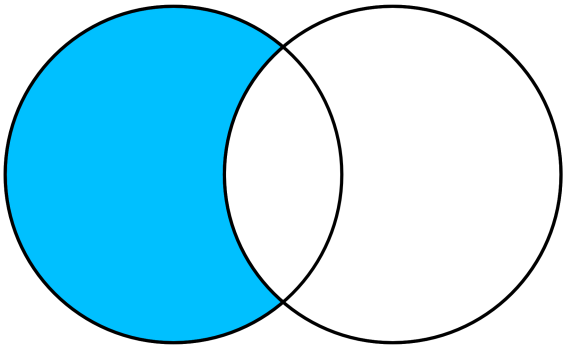
ist die Menge derjenigen x für die es eine natürliche Zahl y gibt mit $x = 2y$.
Das heisst, A ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Weniger formal: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

Definition 1.8: Operationen auf Mengen

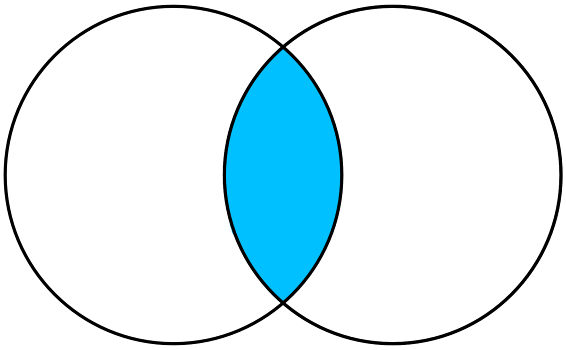
Vereinigung $x \in A \cup B$
g.d.w. $x \in A$ *oder* $x \in B$



Differenz $x \in A \setminus B$
g.d.w. $x \in A$ *und* $x \notin B$



Vereinigung $x \in A \cap B$
g.d.w. $x \in A$ *oder* $x \in B$



Bemerkung:

Die Vereinigung, die Differenz und der Schnitt zweier Mengen existieren (als neue Mengen), da sie durch das Schema der Komprehension gebildet werden können.

Definition 1.9: Relation

Eine Menge R heisst n-stellige (oder n-äre) Relation über Mengen $A_1, ..., A_n$, falls

$$R \subseteq \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1 \textit{ und } \dots \textit{ und } x_n \in A_n\}.$$

Für eine n-stellige Relation R über Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt somit: Jedes Element von R ist ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in A_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel:
Seien a, b und c atomare Objekte.

- $\{a, b, c\}$ ist keine Relation.
- $\{(a), (b), (c)\}$ ist eine Relation.
- $\{(a, a, a), (b, c, a), (b, c, c)\}$ ist eine Relation.
- $\{(a, a), (a, b, c), (c, c)\}$ ist keine Relation.

Definition 1.10: Kartesisches Produkt

Eine Menge R heisst n-stellige (oder n-äre) Relation über Mengen $A_1, ..., A_n$, falls

$$R \subseteq \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1 \textit{ und } \dots \textit{ und } x_n \in A_n\}.$$

Für eine n-stellige Relation R über Mengen $A_1, \dots, A_n$ gilt somit: Jedes Element von R ist ein n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in A_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel:
Sei

- R die 1-stellige Relation $R = \{(a), (b), (c)\}$ und
- S die 2-stellige Relation $S = \{(1, 5), (2, 6)\}$. Dann ist $R \times S$ die 3-stellige Relation

$$R \times S = (a, 1, 5), (a, 2, 6), (b, 1, 5), (b, 2, 6), (c, 1, 5), (c, 2, 6).$$

Bemerkung:

Unsere Definition nennt man auch flaches kartesisches Produkt. Das bedeutet, dass das kartesische Produkt einer m-stelligen mit einer n-stelligen Relation eine $(m+n)$-stellige Relation ist.

Bemerkung:

Besteht R aus h-vielen Elementen und S aus k-vielen Elementen, so enthält das kartesische Produkt $(h * k)$-viele Elemente.

Bemerkung:

Assoziativität
Seien R, S und T Relationen. Es gilt

$$(R \times S) \times T = R \times (S \times T).$$

Diese Eigenschaft erlaubt es uns, die Klammern wegzulassen und einfach $R \times S \times T$ zu schreiben.

Flaches Produkt vs. übliche mathematische Definition
üblicherweise wird in der mathematischen Mengenlehre das kartesische Produkt anders definiert, nämlich durch

$$R \times S := \{(a, b) \mid a \in R und b \in S\}.(1)$$

Damit ist $R \times S$ immer eine 2-stellige Relation.
Im Gegensatz zu unserem kartesischen Produkt erfüllt das Produkt aus (1) das Assoziativgesetzt nicht. Für R uns S aus dem vorherigen Beispiel finden wir dann

$$R \times S := \{((a), (1, 5)), ((a), (2, 6)), ((b), (1, 5)), ((b), (2, 6)), ((c), (1, 5)), ((c), (2, 6))\}.$$

Die Elemente aus $R \times S$ sind 2-Tupel (Paare) bestehend aus einem 1-Tupel und einem 2-Tupel.