Lineare Algebra Serie 6 Übungsaufgaben

Pascal Zürcher 22-111-314
Leandro Lüthi 22-105-035
Manuel Flückiger 22-112-502

November 9, 2022

1 Finden Sie fur die folgenden Vektorräume jeweils eine Basis und bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums (Begründen Sie Ihre Antworten!):

a)

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\mathbb{R}^4 : x_1 = 2x_2, x_1 + x_4 = x_3\}$$

Da $x_1 = 2x_2$ sind x_1 und x_2 linear unabhängig. da $x_1 + x_4 = x_3$ gilt, ist x_3 von x_1 und x_4 abhängig. Somit sind nur x_1 und x_4 linear unabhängig. Damit ist dim = 2 und eine mögliche Basis ist:

$$< x_1, x_4 >, < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

b)

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$$

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 = 0$ wenn $\alpha = \beta = \delta = 0$ gelten müsste, um diese Gleichung zu erfüllen, wären x_1, x_2, x_3, x_4 linear unabhängig. Daraus folgt, dass nicht alle linear unabhängig sind. $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$ Da es zur Darstellung einer der Vektoren immer alle drei Anderen benötigt (siehe (*)), sind drei Vektoren linear unabhängig. Somit ist dim = 3 und eine mögliche Basis ist:

$$basis < x_1, x_3, x_4 >$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - x_3 - 2x_4 \\ x_2 &= -\frac{1}{5}x_1 - x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_3 &= -x_1 - 3x_2 - 2x_4 \\ x_4 &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{aligned}}$$

c)

$$Mat(3,2;\mathbb{R})$$

$Mat(3,2,\mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^6$, da jedes Elemente der Matrix irgend ein Element aus $\mathbb{R}$ ist. Somit ist dim = 6 und eine Basis zum Beispiel:

$$basis\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\rangle$$

d)

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Mat(2,2;\mathbb{R})$$

a_{12} und a_{21} müssen den gleichen Wert haben, also:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Matrizen bilden die Basis mit drei Variablen $\Rightarrow$ dim = 3. Eine mögliche Basis ist:

$$basis\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e)

$$Span\{1+x, x+x^2, x^2+x^3, 1+x^2, x+x^3\} \subseteq Pol\mathbb{R}$$

U=Span

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

dim $= 4$, da vier Pivot-Vektoren existieren und eine Basis ist:

$$basis < (1), (x), (x^2), (-2x^3), (diePivot - Vektoren)$$

f)

$$\{p(x) \in Pol_s\mathbb{R} : p(1) = 0\}$$
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$
$$p(1) = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3(a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 = 0)$$

$\Rightarrow$ Basis ist:

$$\{(-1 + x), (-x^2), (-1 + x^3)\} : 3\ Komponenten \Rightarrow dim = 3$$

g)

$$\{p(x) \in Pol_s\mathbb{R} : p(1) = p(-1) = 0\}$$
$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$p(1) = a + b + c + d = 0$$
$$p(-1) = -1 + b - c + d = 0$$
$$a + b + c + d = -a + b - c + d| + a, +c, -b, -d$$
$$2a + 2c = 0| : 2$$
$$a + c = 0| - c$$
$$a = -c$$
$$\Rightarrow -c + b + c + d = c + b - c + d = 0$$
$$b + d = b + d == | - d$$
$$b = b = -d$$

Wir schreiben die Polynome als Vektor ein in $\{x^3, x^2, x, 1\}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -d \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sind linear unabhängig, da wenn $c \cdot 1 = 0$ oder $c \cdot (-1) = 0$, $c = 0$ sein muss. Die Dimension beträgt dim $= 2$. eine Basis ist:

$$< (x - x^3), (1 - x^2) >$$

h)

$$f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0\ bis\ auf\ endlich\ viele\ x\ \in \mathbb{R}$$

Sei B eine endliche Basis von h). Jedes $b_o \in B$ hat endlich viele Inputwerte $\neq 0. \Rightarrow$ *Span B hat endlich viele Inputwerte* $\neq 0$

$$\Rightarrow h)\ hat\ keine\ endliche\ Basis\ dim\ (h)\ = \infty$$

2

a) Sei V ein Vektorraum über K und seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v_{n+1} \in V \backslash \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig sind

Fall 1:

$$\lambda_{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \ \textit{widerspruch, da } \mathrm{v}_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig sind.}$$

Fall 2:

$$\lambda_{n+1} \neq 0$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$

$$\Rightarrow \ \textit{widerspruch zu } \mathrm{v}_{n+1} \notin \textit{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}.$$

b) Seien V und W Vektorräume über K und sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von W. Zeigen Sie, dass für jede Abbildung $f : V \to W$ sind äquivalent:

(i) $f : V \to W$ ist ein Homomorphismus.

(ii) Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ mit $f(v) = f_1(v)b_1 + \cdots + f_n(v)b_n \forall v \in V$.

"(ii)$\Rightarrow$ (i)"

$$\begin{aligned} f(v) + f(u) &= f_1(v)b_1 + \cdots + f_n(v)b_n + f_1(u)b_1 + \cdots + f_n(u)b_n \\ &= f_1(v)b_1 + f_1(u)b_1 + \cdots + f_n(v)b_n + f_n(u)b_n \\ &= f_1(v+u)b_1 + \cdots + f_n(v+u)b_n \end{aligned}$$

3 Sei V ein Vektorraum über K und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(i) $_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ hat nur die Lösung $a_1 = \cdots = a_n = 0$

(ii) Es existieren keine Koeffizienten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$, so dass $v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$.

Proof. Wir beweisen das erste durch Kontraposition

"(i)$\Rightarrow$(ii)" Es gibt einen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq (0, \ldots, 0)$ und $v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Wir sehen, dass v_n per Definition eine Linearkombination ist. Daraus folgt, dass $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig sind.

"(ii)$\not\Rightarrow$(i)" Wir zeigen die Behauptung anhand eines Gegenbeispiels.

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun gibt es keine Koeffizienten λ_1, λ_2, beide ungleich Null, so dass gilt:

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \; und \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jedoch sind v_1, v_2 und v_3 trivialerweise linear abhängig.

□

4

a) Seien U, W Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über K mit dim U + dim W ¿ dim V . Zeigen Sie, dass $U \cap W \neq \{0\}$.

b) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und sei $A \cup \{a\} \subseteq V$. Zeigen Sie, dass

$$a \in Span\ A \Leftrightarrow Rang\ A = \ Rang A \cup \{a\}.$$

4 a) Beweis durch Kontraposition

$U \cap W = \{0\} \Rightarrow \dim U + \dim W \leq \dim V$

⊛ Sei $U \cap W = H = \{0\} \Leftrightarrow \dim H = 0$

Dimensionsformel:

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$\Longleftrightarrow \dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$

mit ⊛ $\dim(U+W) + 0 = \dim U + \dim W$

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W$

$\dim U + \dim W = \dim(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n + \beta w_1 + \ldots + \beta_n w_n) \overset{\text{Korollar Äquivalenzsatz}}{\leq} \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim(V)$

weil: $U \cap W$ ist ein Unterraum

$U + W$ ist " "

$\Rightarrow \dim U + \dim W \leq \dim(V) \Rightarrow U \cap W = \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim U + \dim W > \dim(V) \Rightarrow U \cap W \neq \{0\}$

b) "$\Rightarrow$" $a_1, \ldots, a_n :=$ Basis von A

$a \in \operatorname{span} A \Rightarrow a$ kann als lin. komb. $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ geschrieben werden.

$\Rightarrow A \cup \{a\} \leq \operatorname{span} A$

$\Rightarrow \operatorname{Rang} A \cup \{a\} \leq \operatorname{Rang} A$

(weil $a_1, \ldots, a_n \in A \cup \{a\}$) $\Rightarrow \operatorname{Rang} A \cup \{a\} = \operatorname{Rang} A$

"$\Leftarrow$"

$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A \cup \{a\} \overset{\text{sonst } \operatorname{Rang} A \cup \{a\} > \operatorname{Rang} A)}{\Rightarrow}$ beliebige anzahl Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in A$ sind

a lin. abh. $\Rightarrow a$ kann als lin. komb. $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = a$ geschrieben werden $\Rightarrow a \in \operatorname{span} A$

$\square$

5 Betrachten Sie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(3,4;\mathbb{R})$ $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$-

x$_1 = 2x_4, x_2 = x_4, x_3 = 3_4$ Basis: $< \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

-x$_1 = 2x_4, 1 - x_2 = x_4, x_3 = 3_4 \Rightarrow (-2, 0, 1, 1) \in L$

c)

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$