Lineare Algebra I

Frank Kutzschebauch

Herbstsemester 2022

Über dieses Dokument

Das ist eine Mitschrift der Vorlesung "Lineare Algebra" von Prof. Dr. Frank Kutzschebauch im Herbstsemester 2022. Du darfst sie so verwenden, wie sie dir am meisten beim Verständnis des Materials hilft. Verantwortlich dafür was hier drin steht ist Manuel Flückiger. Beachte, dass der Dozent dieses Dokument nicht geschrieben (und vielleicht auch nicht gelesen) hat. Falls du selbst Fehler entdeckst, oder Verbesserungsvorschläge hast, sind diese unter der Adresse

`manuel.flueckiger@students.unibe.ch`

Bei dieser Mitschrift ist zu beachten, dass der Aufbau und die Einführung ein Plagiat von Levi Ryffel's Analysis 1 Notizen ist. Es dient mir vorallem beim lernen von LaTeXund beim Verständnis der Vorlesung. Das original Repository von Levi Ryffel findet ihr unter: https://github.com/raw-bacon/ana1-notes

Anerkenntnis

Diese Vorlesungsnotizen wurden von meinen Handnotizen der Vorlesung abgeschrieben kann viele Fehler enthalten. Unzählige davon sollten entdeckt und behoben von euch. Vielen Dank euch! Weitere hilfreiche Beiträge kamen von eure Namen, wenn ihr helft ;).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Abbildungen?

1 Erinnerung

Definition (Erinnerung an letztes mal)**.** Eine Abblidung $f : A \to B$ heisst:

i) injektiv: falls $\forall\ a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, gilt $f(a_1) \neq f(a_2)$.

ii) surjektiv: falls $\forall\ b \in B$ existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$

ii) bijektiv: falls f injektiv und surjektiv ist. $\Rightarrow f$ hat einen Umkehrwert $f^{-1}\ B \to A$.

Beispiel. Sei $A = B = \mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$

1. $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   $n \mapsto 2n$.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv $n \mapsto 2n$ $\neg$surjektiv

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

Theorem (Euklid)**.** *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

Beweis. Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = mL$ und $d = nL$. Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen $x_1 = d - x$ und $d_1 = 2x - d$ ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung **??**.

Weiterhin gilt, dass sowohl x_1 als auch d_1 ganze Vielfache von L sind:

$$x_1 = d - x = (n - m)L,$$
$$d_1 = 2x - d = (2m - n)L.$$

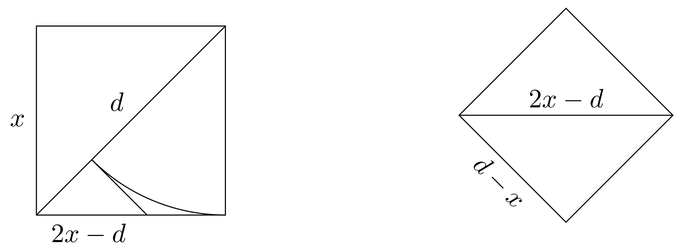

Abbildung I.1: Euklids Konstruktion

Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$, und somit $d \leq 3/2 \cdot x$, da $(3/2)^2 > 2$. Daraus folgt, dass $x_1 = d - x \leq 1/2 \cdot x$. Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten $x_2, x_3, \dots$ und Diagonalen $d_2, d_3, \dots$. Es gilt $x_k \leq 1/2^k \cdot x$. Ausserdem ist jedes x_k (und d_k) ein ganzes Vielfaches von L. Wähle nun k so gross, dass $x_k \leq 1/2^k \cdot x < L$. Dies, zusammen mit dem Fakt, dass x_k ein ganzes Vielfaches von L ist, impliziert, dass $x_k = 0$, was unmöglich ist. Deshalb können x und d nicht kommensurabel sein. $\square$

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Zeitgenössische Umformulierung

Seien $a, b > 0$ zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = mL$, $b = nL$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst, das Verhältnis a/b ist eine *rationale Zahl.* Zurück zum Quadrat mit Seite x und Diagonale d. Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$. Falls $x = mL$ und $d = nL$ gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit $2m^2 = n^2$. Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass n^2, und somit auch n, durch 2 teilbar ist. Schreibe nun $n = 2k$. Schreibe $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Setze das in die Gleichung $m^2 = n^2$ ein und erhalte

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

beziehungsweise $m^2 = 2k^2$. Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch m. Wir schliessen, dass sowohl n als auch m durch 2 teilbar sind. Schreibe noch $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren k mal, bis $n/2^k < 1$. Dann entsteht ein Widerspruch.

Korollar. *Die Gleichung $z^2 = 2$ hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form $z = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$.*

Der goldene Schnitt

Wir werden nun ein weiteres Beispiel einer irrationalen Zahl nach Euklid untersuchen.

Kapitel II

Konstruktion der Reellen Zahlen

1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

Definition (Euklid, 300 vor Christus)**.** Zwei Längen $a, b > 0$ heissen *kommensurabel*, falls eine Länge $L > 0$ existiert, so wie zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $a = mL$ und $b = nL$.

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

Theorem (Euklid)**.** *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

Beweis. Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = mL$ und $d = nL$. Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen $x_1 = d - x$ und $d_1 = 2x - d$ ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung **??**.

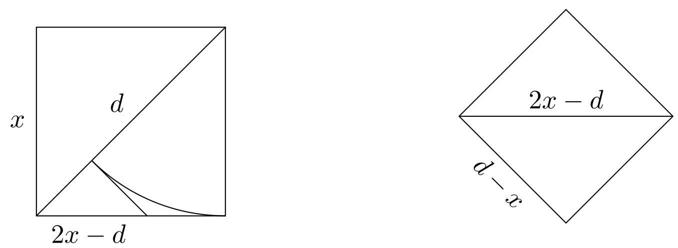

Abbildung II.1: Euklids Konstruktion

Weiterhin gilt, dass sowohl x_1 als auch d_1 ganze Vielfache von L sind:

$$x_1 = d - x = (n - m)L,$$
$$d_1 = 2x - d = (2m - n)L.$$

Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$, und somit $d \leq 3/2 \cdot x$, da $(3/2)^2 > 2$. Daraus folgt, dass $x_1 = d - x \leq 1/2 \cdot x$. Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten $x_2, x_3, \ldots$ und Diagonalen $d_2, d_3, \ldots$. Es gilt $x_k \leq 1/2^k \cdot x$. Ausserdem ist jedes x_k (und d_k) ein ganzes Vielfaches von L. Wähle nun k so gross, dass $x_k \leq 1/2^k \cdot x < L$. Dies, zusammen mit dem Fakt, dass x_k ein ganzes Vielfaches von L ist, impliziert, dass $x_k = 0$, was unmöglich ist. Deshalb können x und d nicht kommensurabel sein. $\square$

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Zeitgenössische Umformulierung

Seien $a, b > 0$ zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = mL$, $b = nL$. Dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst, das Verhältnis a/b ist eine *rationale Zahl*. Zurück zum Quadrat mit Seite x und Diagonale d. Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$. Falls $x = mL$ und $d = nL$ gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit $2m^2 = n^2$. Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass n^2, und somit auch n, durch 2 teilbar ist. Schreibe nun $n = 2k$. Schreibe $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Setze das in die Gleichung $m^2 = n^2$ ein und erhalte

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

beziehungsweise $m^2 = 2k^2$. Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch m. Wir schliessen, dass sowohl n als auch m durch 2 teilbar sind. Schreibe noch $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren k mal, bis $n/2^k < 1$. Dann entsteht ein Widerspruch.

Korollar. *Die Gleichung $z^2 = 2$ hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form $z = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$.*

Der goldene Schnitt

Wir werden nun ein weiteres Beispiel einer irrationalen Zahl nach Euklid untersuchen.