



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

# FORMELSAMMLUNG FWL

**Sommersemester 23**

nach Vorlesung von Prof. Stücke und Prof. Sattler

Erstellt von

Tony Pham, Max Forstner und Ayham Alhulaibi

Name:

NAME

Letzte Änderung:

4. Juli 2023

Lizenz:

GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	Einheiten	1
1.2	Kugel	1
1.2.1	Skalarprodukt	1
1.2.2	Kreuzprodukt	1
1.3	Differentialoperatoren	1
1.3.1	Rechenregeln	1
1.3.2	Spezielle Vektorfelder	1
1.4	Logarithmische Maße/Pegel	1
1.4.1	Rechnen mit Pegeln / Logarithmen	2
1.5	Rechnen mit Wurzeln	2
1.6	Rechnen mit Potenzen	2
1.7	Koordinatensysteme	2
1.7.1	Umrechnungstabelle	2
1.7.2	Schema KOS Kugel/Zylinder	2
1.7.3	Kartesische Koordinaten	3
1.7.4	Zylinderkoordinaten	3
1.7.5	Kugelkoordinaten	3
<b>2</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>4</b>
2.1	Feldstärkekomponenten einer ebenen Welle	4
2.2	Integralsätze	4
<b>3</b>	<b>Felder</b>	<b>5</b>
3.1	Elektrostatik	5
3.1.1	Potential-/Poisson-Gleichung	5
3.1.2	Randwertprobleme, -bedingungen (RB)	5
3.1.3	Green'sche Funktionen	5
3.1.4	Elektrischer Dipol	5
3.2	Magnetostatik	5
3.2.1	Vektorpotential	5
3.2.2	Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	5
3.2.3	Biot-Savart-Gesetz	5
3.2.4	Magnetischer Dipol	5
3.3	Quasistationäre Felder (Wechselstrom)	6
3.3.1	Komplexe Feldgrößen	6
3.4	Skineffekt	6
3.4.1	Näherungen für Skineffekt	6
3.5	E-Felder an Grenzflächen	6
3.5.1	Dielektrische Grenzfläche	6
3.5.2	Grenzfläche Dielektrikum-Leiter	6
3.5.3	Grenzfläche an magn. Feldern	6
<b>4</b>	<b>Wellen</b>	<b>7</b>
4.1	Wellengleichungen allgemein	7
4.1.1	Zeitbereich	7
4.1.2	Frequenzbereich	7
4.1.3	Vereinfachung der Gleichungen	7
4.2	Ebene Wellen	7
4.2.1	Gleichung Ebene Welle	7
4.2.2	komplexer Amplitudendrehzeiger	7
4.2.3	Fortpflanzungskonstante	7
4.3	Kenngößen	7
4.3.1	Wellenzahl	7
4.3.2	Wellenlänge	7
4.3.3	Phasengeschwindigkeit	7
4.3.4	Brechzahl/Brechungsindex	7
4.3.5	Gruppengeschwindigkeit	7
4.3.6	Zusammenhang Gruppen- und Phasengeschwindigkeit	7
4.3.7	Feldwellenwiderstand	7
4.3.8	Poynting-Vektor	7
4.4	Ausbreitung im Medium	8

4.4.1	Allgemein (mit Verlusten)	8
4.4.2	Im leeren Raum (Vakuum)	8
4.4.3	Im verlustlosen Dielektrikum	8
4.4.4	Im Dielektrikum mit geringen Verlusten	8
4.4.5	Im guten Leiter	8
4.5	Ebene Wellen an Grenzflächen	8
4.5.1	Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.5.2	Brechungsgesetz allgemein	8
4.6	Senkrechter Einfall	8
4.6.1	Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	9
4.6.2	Medium 1 oder 2: Luft	9
4.6.3	beide Medien: nicht magnetisch	9
4.6.4	Medium 2: idealer Leiter	9
4.6.5	Stehwellenverhältnis (SWR)	9
4.7	Schräger Einfall (allgemein)	9
4.7.1	Brechungsgesetz	9
4.7.2	Leistungsbilanz an Grenzflächen	9
4.7.3	Totalreflexion/Grenzwinkel	9
4.7.4	Brewster-/Polarisationswinkel	9
4.7.5	Verlauf von r und t beim Grenzübergang	9
4.7.6	Verlauf der Reflexionsfaktoren	9
4.7.7	Senkrechte Polarisierung ohne $\mu_r$	10
4.7.8	Parallele Polarisierung ohne $\mu_r$	10
4.7.9	Senkrechte Polarisierung mit $\mu_r$	11
4.7.10	Parallele Polarisierung mit $\mu_r$	11
4.8	Polarisation einer Welle	11
<b>5</b>	<b>Leitungen</b>	<b>12</b>
5.1	Allgemeine Leitung (mit Verlusten)	12
5.1.1	Gleichungen	12
5.1.2	Kenngrößen	12
5.1.3	Kurzschluss und Leerlauf	12
5.1.4	Lange und Kurze Leitung	12
5.2	Verlustlose Leitung	12
5.2.1	Kenngrößen	12
5.2.2	verlustloser Reflexionsfaktor	12
5.2.3	Beliebiger Abschluss (Last)	12
5.2.4	Angepasste (reflexionsfreie) Leitung	12
5.2.5	Kurzschluss an Leitungsende	13
5.2.6	Leerlauf an Leitungsende	13
5.2.7	Leitung als Impedanz-Transformator	13
5.2.8	Ohmscher Abschluss an Leitungsende	13
5.2.9	Position von Extrema	13
5.2.10	Stehwellenverhältnis (SWR)	13
5.2.11	Leistung	13
5.2.12	Reflexionsfaktor mit Verlusten	13
5.2.13	Gleichspannungswert (=Endwert)	13
5.3	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	13
5.4	Leitungsparameter	14
5.4.1	Allgemein	14
5.4.2	Streifenleitung / Parallele Platten	14
5.4.3	Doppelleitung	14
5.4.4	Koaxialleitung	14
<b>6</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>15</b>
6.1	Koaxial Leiter	15
6.1.1	Wellenwiderstand	15
6.1.2	Dämpfung	15
6.2	Mikrostreifenleiter	15
6.2.1	Effektive Permittivitätszahl	15
6.2.2	Schmale Streifen	15
6.2.3	Breite Streifen	15
6.3	Hohlleiter	15

6.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss . . . . .	15
6.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser . . . . .	15
6.6	Leitungsparameter . . . . .	16
6.6.1	Streifenleitung / Parallele Platten . . . . .	16
6.6.2	Doppelleitung . . . . .	16
6.6.3	Koaxialleitung . . . . .	16
6.6.4	Allgemein . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Smith-Diagramm</b> . . . . .	<b>17</b>
7.1	Allgemein . . . . .	17
7.1.1	Normierte Impedanz . . . . .	17
7.1.2	verlustloser Reflexionsfaktor . . . . .	17
7.1.3	Schema und Kenngrößen . . . . .	17
7.2	Maxima/Minima bei stehender Welle . . . . .	17
7.3	Impedanz/Admittanz umrechnen . . . . .	17
7.4	Von Last zu Quelle . . . . .	17
7.5	Vorgehen mit geg. Eingangswiderstand . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Antennen</b> . . . . .	<b>18</b>
8.1	Herz'scher Dipol (HDp) . . . . .	18
8.1.1	Allgemein . . . . .	18
8.1.2	Nahfeld . . . . .	18
8.1.3	Fernfeld . . . . .	18
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld HDp . . . . .	18
8.1.5	Strahlungswiderstand HDp . . . . .	18
8.1.6	Verlustwiderstand HDp . . . . .	18
8.2	Magnetischer Dipol . . . . .	18
8.2.1	Fernfeld . . . . .	18
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .	18
8.2.3	Nahfeld . . . . .	18
8.3	Lineare Antenne . . . . .	19
8.3.1	Dipolantenne allgemein . . . . .	19
8.3.2	Eingangs-/Fußpunktimpedanz . . . . .	19
8.3.3	Strahlungsdichte . . . . .	19
8.3.4	abgestrahlte Wirkleistung . . . . .	19
8.4	Antennenkenngrößen . . . . .	19
8.4.1	Abgestrahlte Leistung . . . . .	19
8.4.2	Verlustleistung . . . . .	19
8.4.3	Wirkungsgrad . . . . .	19
8.4.4	Gewinn/Gain . . . . .	19
8.4.5	Richtcharakteristik . . . . .	19
8.4.6	Richtfunktion/-faktor . . . . .	19
8.5	Senden und Empfangen . . . . .	19
8.5.1	Wirksame/Effektive Antennenfläche . . . . .	20
8.5.2	Friis-Übertragungsgleichung . . . . .	20
8.5.3	Freiraumdämpfung . . . . .	20
8.5.4	Leistungspegel/Freiraumpegel . . . . .	20
8.6	Bezugsantennen . . . . .	20
8.7	Monopolantenne . . . . .	20
8.8	Richtcharakteristik Dipolantennen . . . . .	21
8.9	Blindwiderstand Dipolantennen . . . . .	21
8.10	Antennentabelle . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Einheiten</b> . . . . .	<b>23</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 Einheiten

weitere Einheiten siehe Kapitel 9.

Größe	Symbol	Einheit
Permiabilitätskonstante	$\mu_0$	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Dielektrizitätskonstante	$\varepsilon_0$	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
elek. Ladung/Fluss	$Q, q$	$C = As$
elek. Feldstärke	$\vec{E}$	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
elek. Flussdichte	$\vec{D}$	$\frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Kapazität	$C$	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
mag. Fluss	$\phi, \Phi$	$Wb = Vs$
mag. Feldstärke	$\vec{H}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$
mag. Flussdichte	$\vec{B}$	$T = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
Induktivität	$L$	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$
Strahlungsdichte	$S_{av}, I$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

## 1.2 Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad A = 4\pi r^2$$

### 1.2.1 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### 1.2.2 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

## 1.3 Differentialoperatoren

### Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

### Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Divergenz** div: Vektorfeld  $\rightarrow$  Skalar S.382

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

**Rotation** rot: Vektorfeld  $\rightarrow$  Vektorfeld S.382

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert:  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

**Gradient** grad: Skalarfeld  $\rightarrow$  Vektor/Gradientenfeld  
zeigt in Richtung steilster Anstieg von  $\phi$

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

### 1.3.1 Rechenregeln

$\phi, \psi$ : Skalarfelder  $\vec{A}, \vec{B}$ : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

### 1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Vektorpotential  $\vec{E}$

$$\text{div } \vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Skalarpotential  $\phi$

$$\text{rot } \vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{F}) &= \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F} \end{aligned}$$

## 1.4 Logarithmische Maße/Pegel

**Feldgröße**  $F_n$ : Spannung, Strom,  $\vec{E}$ -,  $\vec{H}$ -Feld, Schalldruck

**Leistungsgröße**  $P_n$ : Energie, Intensität, Leistung

Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- Dämpfungsmaß**  $a$  in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$$1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}$$

$$1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$$

$$a [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2}$$

$$a [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10}}$$

$$a [\text{Np}] = \ln \frac{F_1}{F_2}$$

$$a [\text{Np}] = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{a[\text{Np}]}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{2a[\text{Np}]}$$

- absolute Pegel  $L$  mit Bezugsgrößen  $P_0, F_0$

$$L [\text{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \quad L [\text{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20\text{dB}}} \quad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10\text{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1\text{mW}$	$L_{P/\text{mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1\text{W}$	$L_{P/\text{W}}$

- relativer Pegel / Maß

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert  $P_0$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \text{dB}$$

#### 1.4.1 Rechnen mit Pegeln / Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis):  $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log(x)$$

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor}) \quad \text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$$

### 1.5 Rechnen mit Wurzeln

$a$ : Radikant  $n$ : Wurzelexponent

$$\text{Merke: } \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \quad x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) \cdot \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

### 1.6 Rechnen mit Potenzen

$a$ : Basis  $m, n$ : Exponent

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0) \quad a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

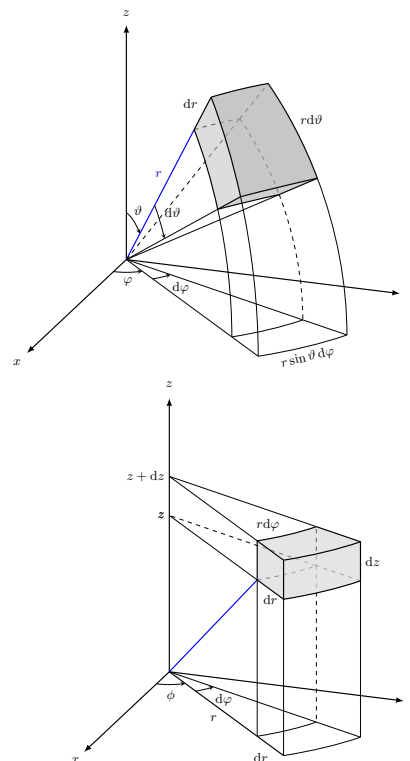
$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## 1.7 Koordinatensysteme

### 1.7.1 Umrechnungstabelle

Kart.	Zyl.	Kug.
$x$	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
$y$	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
$z$	$z$	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$r$	
$\arctan \frac{y}{x}$	$\varphi$	
$z$	$z$	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	$dr$	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
$dz$	$dz$	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		$r$
$\arctan \frac{y}{x}$		$\varphi$
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		$\vartheta$
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		$dr$
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

### 1.7.2 Schema KOS Kugel/Zylinder



### 1.7.3 Kartesische Koordinaten

Variablen:  $x, y, z$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  Rechtssystem:  $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente:  $dV = dx dy dz$

Flächenelemente:  $dA_{xy} = dx dy \vec{e}_z$   $dA_{yz} = dy dz \vec{e}_x$   $dA_{xz} = dx dz \vec{e}_y$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(x, y, z)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$  **Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$

**La-Place:**  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$   $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z$$

### 1.7.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen:  $r, \varphi, z$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  Rechtssystem:  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente:  $dV = r dr d\varphi dz$

Flächenelemente:  $dA_{r\varphi} = r dr d\varphi \vec{e}_z$   $dA_{rz} = dr dz \vec{e}_\varphi$   $dA_{\varphi z} = r d\varphi dz \vec{e}_r$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(r, \varphi, z)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(r, \varphi, z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$

**Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$

**La-Place:**  $\Delta \phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$   $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_r \vec{e}_r + \Delta E_\varphi \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z$$

### 1.7.5 Kugelkoordinaten

siehe Papula S.391/392

Variablen:  $r, \vartheta, \varphi$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  Rechtssystem:  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

Volumenelemente:  $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Flächenelemente:  $dA_{r\vartheta} = r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi$   $dA_{r\varphi} = r \sin \vartheta dr d\varphi \vec{e}_\vartheta$   $dA_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(r, \vartheta, \varphi)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

**Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$

**La-Place:**  $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

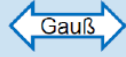
$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[ \Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

## 2 Maxwell-Gleichungen

### differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

**Gaußsches Gesetz:** Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung  $Q$  bzw. die Ladungsdichte  $\rho$  ist Quelle des elektrischen Feldes.



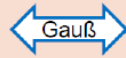
### Integralform

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei. Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Induktionsgesetz:** Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  einer Fläche  $A$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**Amperesches Gesetz:** Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  der Fläche  $A$  entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

### Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

### Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu \vec{H}$$

### Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind  $\varepsilon$  u.  $\mu$  Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

Zeitbereich:  $\frac{\partial}{\partial t}$

Harmonischer Frequenzbereich (komplexe Berechnung):  $j\omega$

## 2.1 Feldstärkekomponenten einer ebenen Welle

Bei Ausbreitung in  $z$ -Richtung gibt es keine Amplitudenabhängigkeit von  $x, y$  d.h.  $\frac{\partial \dots}{\partial x} = \frac{\partial \dots}{\partial y} = 0$  damit ergibt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H} & \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\varepsilon \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & \underline{E}_y & \underline{E}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = -j\omega\mu \begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{H}_z \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{H}_x & \underline{H}_y & \underline{H}_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich  $\rightarrow$  nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$



### 3 Felder

#### Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = [T] \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Verkopplung von  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder über  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ .

#### Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

### 3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder  $\rightarrow$  Gradientenfeld  $\rightarrow$  elek. Ladungen sind Quellen des  $\vec{E}$ -Feldes (Skalare Potenzialfkt.  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 = \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

#### 3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \epsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\epsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

#### 3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

**Dirichlet-RB:** Gesuchte Potenzialfunktion  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.:  $\rho_r = 5V$ )

**Neumann-RB:** Die Normalenableitung  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  der Fkt.  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

#### 3.1.3 Green'sche Funktionen

• **Skalarpotential** einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

• **E-Feld** einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

• **D-Feld** einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

• **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung mit  $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

#### 3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment  $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

### 3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole:  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Skalarpotential  $\varphi_m$  existiert, wenn  $\vec{H}$  wirbelfrei ist:

$\text{rot } \vec{H} = 0$ , wenn  $\vec{J} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 = \text{div rot } \vec{A} & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

#### 3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential  $\varphi$ .

**Coulomb-Eichung**, wenn  $\text{div } \vec{A} = 0$ , gilt **nur** für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad [\vec{A}] = \frac{Wb}{m} = \frac{Vs}{m}$$

#### 3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

#### 3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

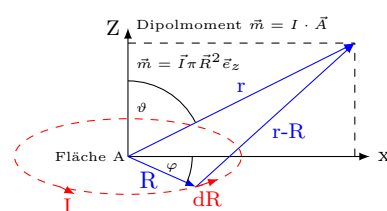
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit  $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$ : Aufpunkt  $\vec{r}'$ : Quellpunkt

#### 3.2.4 Magnetischer Dipol



Strom  $I$  entlang eines Leiters:  $[\vec{A}] = \frac{Vs}{m}$

$$\begin{aligned} \vec{A}(r) &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

### 3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium:  $\varepsilon, \mu, \kappa = \text{kost.}$   
 Leiter ist quasineutral:  $\rho = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

#### 3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexer Amplitudenvektor / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

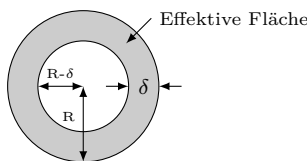
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

### 3.4 Skineffekt



$$[\sigma/\kappa]: \text{Leitfähigkeit} \quad \frac{A}{V_m} = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$$

**Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke**  
 (Abfall der Amplitude:  $A_0 \cdot \frac{1}{e}$ ):

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [\delta] = m$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

**Feldstärke** verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

→ gilt analog für E-Feld.

**Amplitude** und **Phase** bezogen auf  $\delta$ :

$$\text{Amplitude: } x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$$

$$\text{Dämpfung: } \alpha = \frac{1}{\delta} \quad \text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

**Leistung** verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

**Rundleiter - Effektive Fläche:**

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left( R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

#### 3.4.1 Näherungen für Skineffekt

nur für **Rundleiter**:  $R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$

**Geometrische** Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ \frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

**Bessel-Funktion** (Fehler < 6%):

$$\begin{aligned} \frac{R_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \\ \frac{X_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \hat{=} \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

**Empirische** Beschreibung (Fehler < 10%):

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left( \frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1)  $\hat{=}$  Kreisring mit Näherung (2)  $\hat{=}$  Ring mittig

### 3.5 E-Felder an Grenzflächen

#### 3.5.1 Dielektrische Grenzfläche

**Querschichtung:**

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem  $\varepsilon$ .

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem  $\varepsilon$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

#### 3.5.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. →  $E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

**Querschichtung:**

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

#### 3.5.3 Grenzfläche an magn. Feldern

**Querschichtung:**

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem  $\mu$ .

**Längsschichtung:**

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu \mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem  $\mu$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## 4 Wellen

### 4.1 Wellengleichungen allgemein

#### 4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0$$

#### 4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:  
mit harmonischer Zeitabhängigkeit:  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

#### 4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum:  $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter  $\rho = 0$ ,  $\kappa \gg \omega \varepsilon$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \cdot j\omega \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \cdot j\omega \cdot \vec{H} = 0$$

## 4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen  
 $\rho = 0$ , keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung  $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} = 0$   
 $\frac{\partial^2}{\partial^2 y} = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{H}$$

**TEM-Welle:**  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  besitzen nur transversale (= senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende) Komponenten.

#### 4.2.1 Gleichung Ebene Welle

Tatsächlicher Zeitverlauf (**Realteil** von  $\vec{E}(z, t)$ )

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

#### 4.2.2 komplexer Amplitudendrehzeiger

Achtung: **mit**  $e^{j\omega t}$  !, wenn **ohne**: komplexer Amplitudenvektor.

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

#### 4.2.3 Fortpflanzungskonstante

Dämpfungskonstante  $[\alpha] = \frac{\text{Np}}{\text{m}}$  Phasenkonstante  $[\beta] = \frac{\text{rad}}{\text{m}}$

$$\gamma = \alpha + j\beta = jk = \sqrt{j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon)} \quad \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

## 4.3 Kenngrößen

### 4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum:  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$   $\underline{k} = \beta - j\alpha$

$$\beta \hat{=} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

### 4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.  
Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum  $\lambda_0$ .  $[\lambda] = \text{m}$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

### 4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_{p, \text{Medium} \leq c_0}$$

### 4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

### 4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \hat{=} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

2 Wellen mit geringem Unterschied  $\Delta\omega$  und  $\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ :

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

$$\Rightarrow E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad \text{Grenzwert: } v_g = \frac{1}{d\beta/d\omega}$$

### 4.3.6 Zusammenhang Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_{ph}}$$

$$v_g(\omega, v_{ph}) = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{\omega}{v_{ph}} \right]} = \frac{1}{\frac{v_{ph} - \omega \frac{dv_{ph}}{d\omega}}{v_{ph}^2}} = \frac{v_{ph}}{1 - \frac{\omega}{v_{ph}} \frac{dv_{ph}}{d\omega}}$$

mit  $v_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = kv_{ph}$

$$v_g(k, v_{ph}) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} [kv_{ph}] = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk}$$

### 4.3.7 Feldwellenwiderstand

$Z_{F0}$ : im **materiefreien** Raum/Vakuum!

Falls keine Verluste (ideal)  $\rightarrow Z_F$  reell!

$$Z_F = \frac{E_{\text{transversal}}}{H_{\text{transversal}}} = \frac{E_h}{H_h} = -\frac{E_r}{H_r} = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\kappa + j\omega \varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega \quad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

### 4.3.8 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$
Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} =  \vec{S}_{av} $	

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re} \{ \underline{U} \cdot \underline{I}^* \}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \quad P_{\text{Leitung}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$

## 4.4 Ausbreitung im Medium

$\kappa$  = Leitfähigkeit

### 4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \quad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$\underline{Z}_F = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}}$

 komplex, wenn  $\alpha \neq 0$

### 4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum:  $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \quad Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

### 4.4.3 Im verlustlosen Dielektrikum

verlustlos:  $\kappa = 0$ , maximale Wirkleistung

$Z_F$  rein reell  $\rightarrow$  ebene Welle

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

### 4.4.4 Im Dielektrikum mit geringen Verlusten

geringer Verlust:  $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\kappa}{2} \cdot Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{j\kappa}{\omega\varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left( 1 + \frac{j\kappa}{2\omega\varepsilon} \right)$

### 4.4.5 Im guten Leiter

geringer Verlust:  $\kappa \gg \omega\varepsilon \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}} \approx \frac{1+j}{\kappa \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} (1+j)$$

**Feldstärken** im Leiter: Winkel  $\varphi = -\frac{z}{\delta}$  in **DEGREE**

$E_0, H_0$ : Beträge/Amplituden!

$$H_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\omega\mu}} \cdot E_0$$

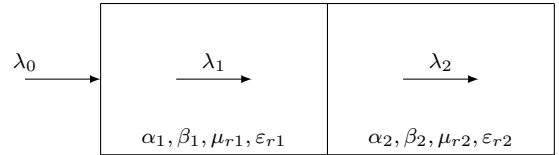
$$E(z, t) = E_0 \cdot e^{-z/\delta} \cdot \cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$$

$$H(z, t) = H_0 \cdot e^{-z/\delta} \cdot \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4})$$

siehe Analogie in Kapitel 3.4 (Skinneffekt).

## 4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

### 4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}} \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}$$

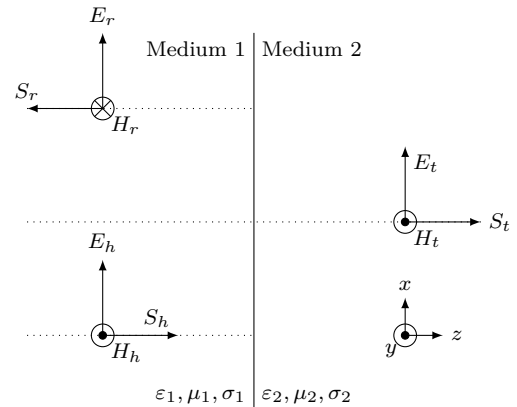
$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}} \quad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}}$$

### 4.5.2 Brechungsgesetz allgemein

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

## 4.6 Senkrechter Einfall

Gilt bei Einfallswinkel  $\theta_h = 0$ .



$$r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \quad t_e = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$r_m = \frac{Z_{F1} - Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} = -r_e \quad t_m = \frac{2 \cdot Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}}$$

$$t_e = 1 + r_e$$

$$t_m = 1 + r_m$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$$E_t = t_e \cdot E_h$$

$$H_t = t_m \cdot H_h = t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot H_h$$

$$E_r = r_e \cdot E_h$$

$$H_r = r_m \cdot H_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$t_e \cdot E_h = E_h + r_e \cdot E_h$$

$$t_m \cdot H_h = H_h + r_m \cdot H_h$$

$$E_t = E_h \cdot \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}}$$

$$E_r = E_h \cdot \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}}$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

#### 4.6.1 Verlustloses Dielektrikum allgemein

gilt für  $\kappa = 0$ , keine Dämpfung.

$$\text{rein reell: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \quad \text{rein imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

$$t = t_e = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

#### 4.6.2 Medium 1 oder 2: Luft

$\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1$	$\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1$
$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$	$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$
$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$	$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$

#### 4.6.3 beide Medien: nicht magnetisch

Gilt für  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad t = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}$$

#### 4.6.4 Medium 2: idealer Leiter

Für Leiter mit (geringen) Verlusten siehe Kapitel 4.4.5.

$\vec{E} = 0$  im idealen Leiter  $\rightarrow$  **Stehende** Welle!, vollständige Reflexion.

$$Z_{F2} = 0 \quad r = -1 \quad t = 0 \quad \vec{S}_{av} = 0$$

$E$  und  $H$ : zeitlich sowie örtlich zueinander um  $90^\circ$  phasenverschoben.

$$\underline{E}_{1x} = -2j \cdot E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \quad \underline{H}_{1y} = 2 \cdot \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z)$$

$$E_{1x}(z, t) = 2E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \cdot \sin(\omega t)$$

$$H_{1y}(z, t) = 2 \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z) \cdot \cos(\omega t)$$

Annahme: Grenzfläche bei  $z = 0$ .

$$H_{\max}, E_{\min} \text{ bei } z = -n \cdot \lambda/2$$

$$H_{\min}, E_{\max} \text{ bei } z = -(2n-1) \cdot \lambda/4$$

#### 4.6.5 Stehwellenverhältnis (SWR)

siehe auch Kapitel 6.4.

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

#### 4.7 Schräger Einfall (allgemein)

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

##### 4.7.1 Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_t} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

##### 4.7.2 Leistungsbilanz an Grenzflächen

Index n: Normalkomponente. Index 0: Amplitude/Betrag

Index h: hinlaufende Welle Index r: rücklaufende Welle

Index t: transmittierte Welle

$r_e$ : Reflexionsfaktor

$$S_{tn} = S_{hn} - S_{rn}$$

$$S_{t0} = S_{h0} \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} (1 - r_e^2)$$

#### 4.7.3 Totalreflexion/Grenzwinkel

Grenzwinkel  $\theta_g$  gibt an, bis zu welchem Winkel eine Welle von höherem in kleineres Dielektrikum  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  eindringen kann.  $\rightarrow$  Brechungsgesetz beachten!

$$(1) \theta_g = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

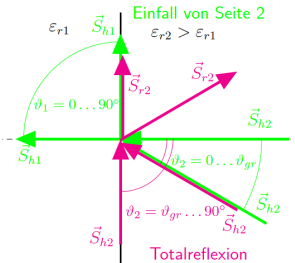
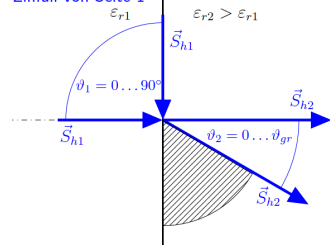
$$(2) \theta_g = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

(1): bei *senkrechter* transmittierter Welle  $\theta_t = \sin 90^\circ$  (Sattler)

(2): bei *senkrechter* einfallender Welle  $\theta_h = \sin 90^\circ$  (Stücke)

Anmerkung zu (2):

Einfall von Seite 1



#### 4.7.4 Brewster-/Polarisationswinkel

Brewster-Winkel  $\theta_b \rightarrow$  KEINE Reflexion  $r = 0$ .

- Parallele Polarisation:** rechts:  $\mu_{r1} = \mu_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Brewster-Winkel existiert nur, wenn  $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$ .

- Senkrechte Polarisation:** rechts:  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

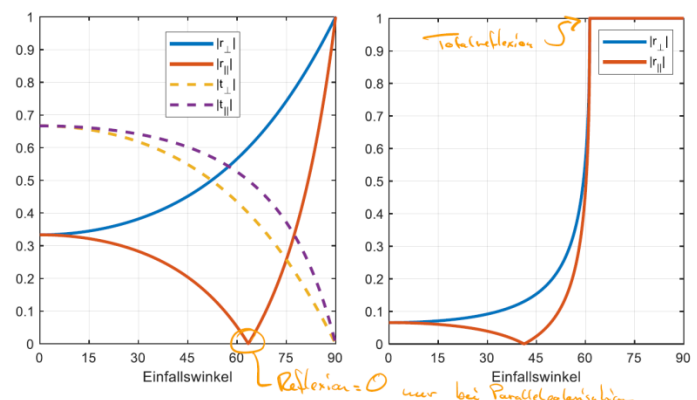
Brewster-Winkel existiert nur, wenn  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ .

Bei  $\mu_{r1} = \mu_{r2} \rightarrow r \neq 0$  kein Brewster-Winkel  $\theta_b \rightarrow \infty$ !

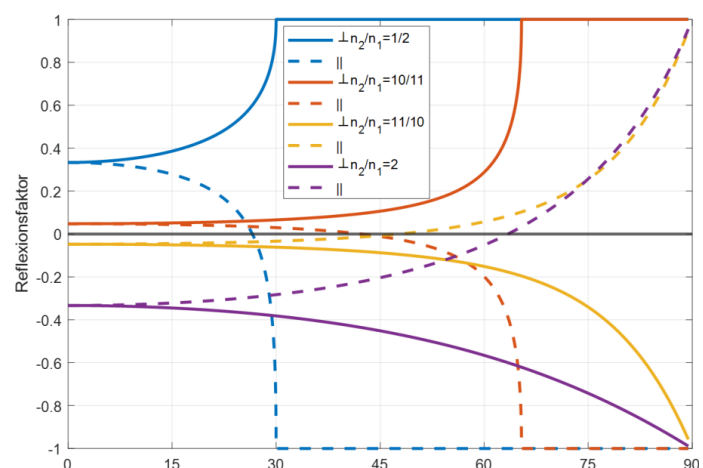
#### 4.7.5 Verlauf von r und t beim Grenzübergang

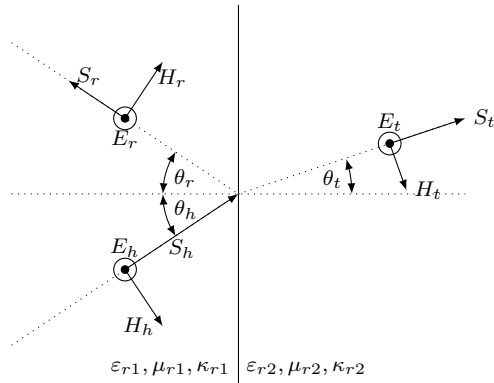
$$\varepsilon_{r1}=1, \mu_{r1}=1 \rightarrow \varepsilon_{r2}=4, \mu_{r2}=1$$

$$\varepsilon_{r1}=1,3, \mu_{r1}=1 \rightarrow \varepsilon_{r2}=1, \mu_{r2}=1$$



#### 4.7.6 Verlauf der Reflexionsfaktoren



4.7.7 Senkrechte Polarisation ohne  $\mu_r$ 

$\vec{E}$ -Feld senkrecht,  $\vec{H}$ -Feld parallel.  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$Z_{F0} = 120\pi \Omega \quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r(n)}}} \quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

**Brechungsgesetz:** mit  $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

**Fresnelsche Formeln:**  $\theta_h = \vartheta_1 \quad \theta_t = \vartheta_2$

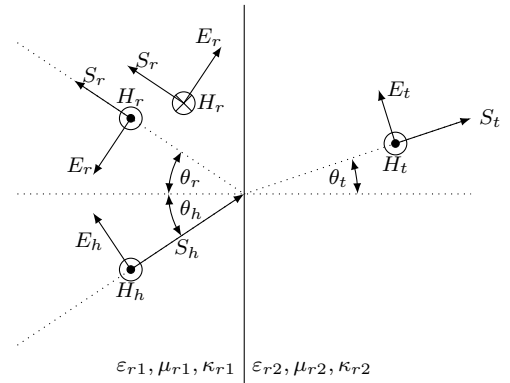
$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 - Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_1 - \sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_2}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_2 + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_1} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sin^2 \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sin^2 \vartheta_1} \\ t_{es} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_1}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_2 + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_1} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sin^2 \vartheta_1} \\ &= 1 + r_s \\ t_{ms} &= \frac{2 Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sin^2 \vartheta_1} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \cdot t_{es} \end{aligned}$$

**Beziehungen Polarisation**

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h & E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h & E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h & H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h & H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} & E_t &= H_t \cdot Z_{F1} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} & E_h &= H_h \cdot Z_{F2} \end{aligned}$$

**Richtungssinn Felder (Hand-Regel)**

Linke Hand	Rechte Hand
Daumen: $\vec{E}$	Daumen: $\vec{E}$
Zeigef.: $\vec{S}_{av}$	Zeigef.: $\vec{H}$
Mittelf.: $\vec{H}$	Mittelf.: $\vec{S}_{av}$

4.7.8 Parallele Polarisation ohne  $\mu_r$ 

$\vec{E}$ -Feld parallel,  $\vec{H}$ -Feld senkrecht.  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

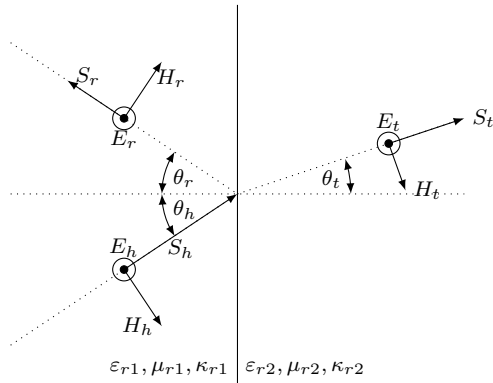
Stücke:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in die selbe Richtung!  
Sattler:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

**Fresnelsche Formeln (Stücke):**  $\theta_h = \vartheta_1 \quad \theta_t = \vartheta_2$

$$\begin{aligned} r_{ep} &= r_{mp} = r_p = -r_{p,[Sattler]} \\ &= \frac{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 - Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin^2 \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin^2 \vartheta_1} \\ t_{ep} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} = (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin^2 \vartheta_1} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot t_{mp} \\ t_{mp} &= \frac{2 \cdot Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} = 1 + r_p \end{aligned}$$

**Fresnelsche Formeln (Sattler):**

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = -r_{p,[Stücke]} \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2 - Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_2 - \sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_1}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_1 + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_2} \\ t_{ep} &= \frac{2 Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_1}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \vartheta_1 + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= (1 + r_p) \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} \\ t_{mp} &= 1 - r_p = \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{ep} \end{aligned}$$

4.7.9 Senkrechte Polarisation mit  $\mu_r$ 

$\vec{E}$ -Feld senkrecht,  $\vec{H}$ -Feld parallel.  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

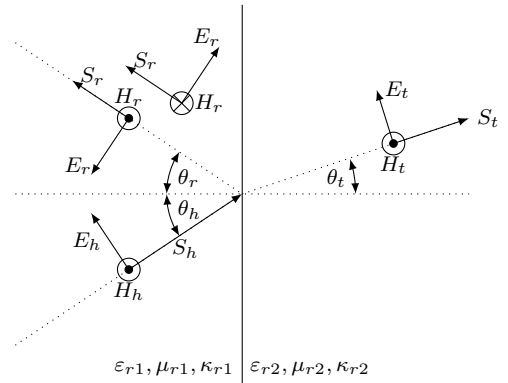
$$Z_{F0} = 120\pi \Omega \quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{r(n)}}{\epsilon_{r(n)}}} \quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}}$$

**Brechungsgesetz:** mit  $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

**Fresnelsche Formeln:**  $\theta_h = \vartheta_1 \quad \theta_t = \vartheta_2$

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 - Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{es} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= 1 + r_s \\ t_{ms} &= \frac{2Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}} t_{es} \end{aligned}$$

4.7.10 Parallele Polarisation mit  $\mu_r$ 

$\vec{E}$ -Feld parallel,  $\vec{H}$ -Feld senkrecht.  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

Stücke:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in die selbe Richtung!  
Sattler:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

**Fresnelsche Formeln (Stücke):**  $\theta_h = \vartheta_1 \quad \theta_t = \vartheta_2$

$$\begin{aligned} r_{ep} &= r_{mp} = r_p = -r_{p,[\text{Sattler}]} \\ &= \frac{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 - Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{ep} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}} \cdot t_{mp} \\ t_{mp} &= \frac{2 \cdot Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1}{Z_{F1} \cdot \cos \vartheta_1 + Z_{F2} \cdot \cos \vartheta_2} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= 1 + r_p \end{aligned}$$

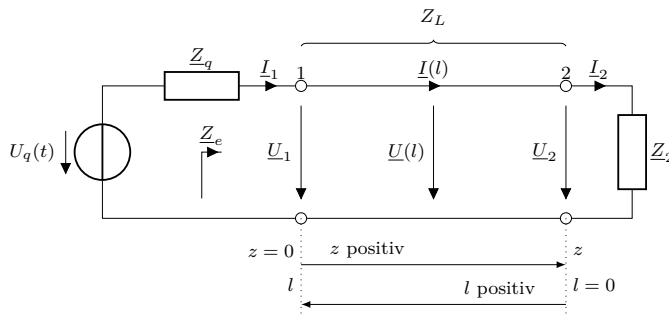
## 4.8 Polarisation einer Welle

Die Polarisation (Ausrichtung) bezieht sich **immer** auf das  $\vec{E}$ -Feld.

- **Lineare** Polarisation  
Endpunkt des  $\vec{E}$ -Vektors beschreibt bei fortschreitender Welle eine Gerade (Linie).
  - horizontale Polarisation: E-Feld parallel zum Erdboden.
  - vertikale Polarisation: E-Feld senkrecht zum Erdboden.
- **Elliptische** Polarisation  
Endpunkt des  $\vec{E}$ -Vektors beschreibt bei fortschreitender Welle eine Ellipse.
  - Zirkulare Polarisation:  $|\vec{E}_x| = |\vec{E}_y|$  bei  $\vec{E}_x \perp \vec{E}_y$  (90° Phasenverschiebung)

## 5 Leitungen

### 5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang:  $Z_e$  Anfang:  $Z(l) = Z_1$  Abschluss:  $Z_2 = Z(l=l)$   
Referenzpunkt **Last** ( $l = 0$ ):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

#### 5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + Z_L I_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{Z_L}{Z_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = I_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= I_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{Z_2}{Z_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{Z_2 + Z_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{Z_2}{Z_L} \tanh(\gamma l)} = Z_L \frac{Z_2 + Z_L \tanh(\gamma l)}{Z_L + Z_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer  $\gamma$  nicht im TR berechenbar:

Lösung:  $\alpha l$   $\left[ \frac{\text{NP}}{\text{m}} \right]$  und  $\beta l$   $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$  einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 - \frac{2}{e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} + 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$ : Dämpfung  $e^{\pm j\beta l}$ : Phase ( $\angle$  im TR)

Für Winkel  $\alpha l$  bzw.  $\beta l$  auf **RAD** in TR!

#### 5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer  $\underline{Z}_L$  nicht in TR berechenbar:

**Betrag:** erst  $\underline{Z}_L$ , dann  $\sqrt{|\underline{Z}_L|^2}$  ermitteln.

**Phase:**  $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \gamma$  analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{L'C'} \cdot \sqrt{\frac{R'G'}{j^2 \omega^2 L'C'} + \frac{G'}{j\omega C'} + \frac{R'}{j\omega L'}} + 1$$

- Reflexionsfaktor:  $r(l) \hat{=} r_1$ : Leitungseingang

$$\underline{r}(l) = r_2 \cdot e^{-2\gamma l} = r_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens  $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e$  am Leitungsende:

$$\text{mit Kurzschluss} \quad \underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$$

$$\text{im Leerlauf} \quad \underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$$

$$\text{beliebige Länge} \quad \underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$$

#### 5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung  $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung  $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$

Abschluss egal, es wird nur  $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$  gemessen wird.

## 5.2 Verlustlose Leitung

### 5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \approx f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{L'C'} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L'C'}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{L'C'}}$$

### 5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}_{(l=0)} = r_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi \quad \Psi \text{ in RAD!}$$

$$\underline{r}(l) = r_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$r_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$

$$U_{\max} = |U_h| \cdot (1 + |r(l)|) \quad U_{\min} = |U_h| \cdot (1 - |r(l)|)$$

$$I_{\max} = \left| \frac{U_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 + |r(l)|) \quad I_{\min} = \left| \frac{U_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 - |r(l)|)$$

### 5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tan(\beta l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sin(\beta l) \right]$$

Für **Beträge**/Amplitudenwerte:

$$\left| \frac{\underline{U}}{\underline{U}_2} \right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$$

$\rightarrow j$  weglassen.

Bildung von **stehenden** Wellen für alle Fälle *außer* bei Anpassung!

### 5.2.4 Angepasste (reflexionsfreie) Leitung

Eingangswiderstand  $\underline{Z}_1 \approx$  Leitungslänge, rein reell!

Nur hinlaufende Welle, **reflexionsfrei**!

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}(l) \quad r_A = 0 \quad \text{SWR} = 1$$

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h \cdot e^{j\beta z} \quad \underline{I}(z) = \underline{I}_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \cdot e^{j\beta z}$$



### 5.2.5 Kurzschluss an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = 0 \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r \quad \underline{I}_h = \underline{I}_r \quad r_2 = -1$$

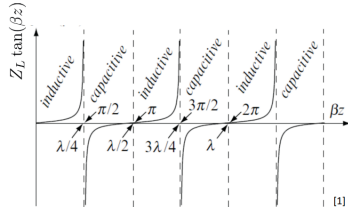
$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_L \cdot j \tan(\beta l) \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 \underline{Z}_L \cdot j \sin(\beta l)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{\underline{Z}_L}$$

Um  $\beta l$  über Formel zu berechnen  $\rightarrow$  **Betrag** von  $\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L}$  bilden!

$l = \frac{\lambda}{4}$ : Parallelresonanz (LL)  $l = \frac{\lambda}{2}$ : Serienresonanz (KS)



### 5.2.6 Leerlauf an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = \infty \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r \quad \underline{U}_h = \underline{U}_r \quad r_2 = +1$$

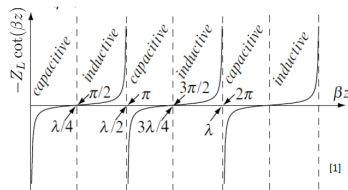
$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j \frac{\underline{Z}_L}{\tan(\beta l)} \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{U}_2 = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot j \sin(\beta l)$$

Um  $\beta l$  über Formel zu berechnen  $\rightarrow$  **Betrag** von  $\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L}$  bilden!

$l = \frac{\lambda}{4}$ : Serienresonanz (KS)  $l = \frac{\lambda}{2}$ : Parallelresonanz (LL)



### 5.2.7 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$  aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_L} \rightarrow \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine  $\lambda/4$ -Leitung transformiert:  $L \leftrightarrow C$ ,

Kurzschluss  $\leftrightarrow$  Leerlauf, **großes R**  $\leftrightarrow$  **kleines R**

### 5.2.8 Ohmscher Abschluss an Leitungsende

Abstand **Spannungsmax.** von der Last (also bei  $z=0$ )  $z_{\max}$ :  
 $r_A \rightarrow$  rein reell!  $z_{\max} = \frac{\lambda}{4\pi} (\theta_{\text{rad}} + 2n\pi)$

$$R_A > Z_L \rightarrow \theta_{\text{rad}} = 0 \quad r_A > 0 \rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$R_A < Z_L \rightarrow \theta_{\text{rad}} = \pi \quad r_A < 0 \rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{4} \cdot n$$

$R_A > Z_L$ : Erstes  $U_{\max}/I_{\min}$  entsteht an der Last.

$R_A < Z_L$ : Erstes  $U_{\min}/I_{\max}$  entsteht an der Last.

### 5.2.9 Position von Extrema

siehe auch Kapitel 7.2.

gilt bei beliebigen Abschlüssen/Lasten!  $\rightarrow$  stehende Welle!

$$r_l = |r_A| \cdot e^{-j\Psi_r} \rightarrow \Psi_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$  Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$  Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\min/\max} = \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$z_{\min} = \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}}$$

$$z_{\max} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}$$

### 5.2.10 Stehwellenverhältnis (SWR)

Smith-Chart: Kap. 7.1 VSWR: Kap. 6.4

$$s = \text{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

$$m = \text{SWR}^{-1} = \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_2| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

### 5.2.11 Leistung

$$P_A = P_H - P_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2)$$

$$= P_{\max} \cdot (1 - r^2)$$

$$= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*$$

$$P_V = P_q - P_A$$

$$\underline{I}(z) = \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z$$

### 5.2.12 Reflexionsfaktor mit Verlusten

$r_e$ : am Eingang  $r_a$ : am Abschluss/an der Last

$$r_e = r_a \cdot \frac{\text{gedämpfter Betrag}}{e^{-2\gamma l}} = \frac{r_a \cdot e^{-2\alpha l}}{e^{-j2\beta l}}$$

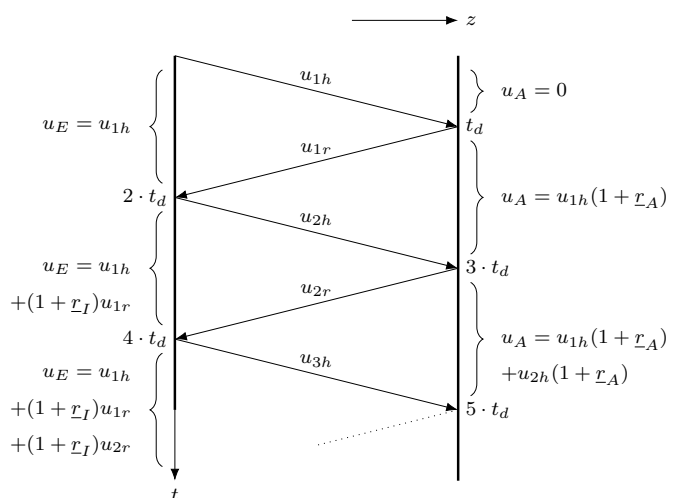
$$\alpha = -\frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_a}\right)}{2 \cdot l} \left[ \frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]$$

$$\beta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2 \cdot l} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

### 5.2.13 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

## 5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

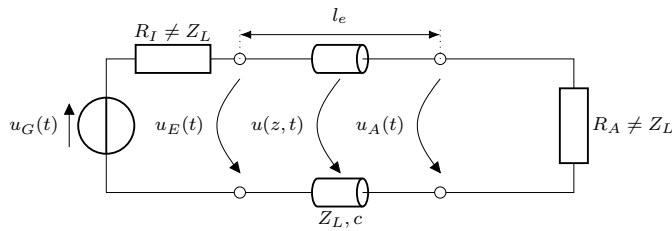


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



Reflexionsfaktor Leitungsanfang:  $\Gamma_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

Reflexionsfaktor Leitungsende:  $\Gamma_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Hinlaufende Welle:  $u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$

Signallaufzeit:  $t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{l}{v_p}$

## 5.4 Leitungssparameter

### 5.4.1 Allgemein

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\epsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!**  
**Länge verdoppeln!!!**

### 5.4.2 Streifenleitung / Parallele Platten

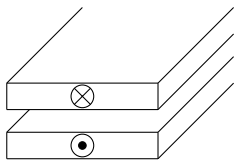
Für Sinus-Anregung:

$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{b \gg d}{\approx} E \cdot d \quad \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \quad \rightarrow H = \frac{I_0}{b} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

**b:** Plattenbreite      **d:** Abstand zwischen den Platten

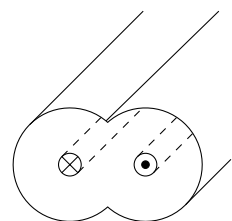


$$R' = \frac{2}{\delta \kappa b} \left[ \frac{\Omega}{m} \right] \quad L' = \frac{\mu d}{b} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\kappa b}{d} \left[ \frac{S}{m} \right] \quad C' = \frac{b \epsilon}{d} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

### 5.4.3 Doppelleitung

$\kappa$ : Leitwert des Dielektrikums       $\kappa_L$  Leitwert des Leiters  
**r:** Leiterradius      **d:** Abstand zw. Leitern



Wenn  $\left(\frac{d}{2r}\right)^2 \gg 1 \rightarrow \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \approx \ln \frac{d}{r}$

$$R' = \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L} \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

$$L' = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\pi \kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{S}{m} \right]$$

$$C' = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

### 5.4.4 Koaxialleitung

Mit Hin- und Rückleiter.  $r_i$ : Innenradius       $r_a$ : Außenradius

$0 < r < r_i$ : Innenleiter, **keine** Felder!

$r_i < r < r_a$ : Zwischenbereich, nur hier Felder vorhanden!

$r_a < r < \infty$ : Außenbereich, **keine** Felder!

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{\hat{U}}{2\pi r \cdot Z_L} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

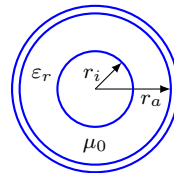
$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{I}}{2\pi r} \right)^2 \cdot Z_{F0}$$

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \stackrel{\mu_r=1}{=} \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$



$$R' = \frac{1}{2\pi \delta \kappa_L} \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i} \right) \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

$$L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{2\pi \kappa}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{S}{m} \right]$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

Bei realer Beschreibung:  $\kappa < \infty$  zusätzliche Feldkomponente:

$$\vec{E}_z \approx E_r \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \epsilon}{\kappa}} \cdot \vec{e}_z$$

**Dielektrische Dämpfungsverluste:** für sehr hohe  $f$

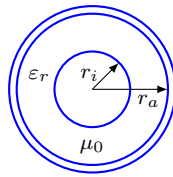
$G \ll \omega C$ ,  $\tan \delta = (G/\omega C) < 0,1$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

## 6 Wellenleiter

### 6.1 Koaxial Leiter

#### 6.1.1 Wellenwiderstand



$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \stackrel{\mu_r=1}{=} \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

#### 6.1.2 Dämpfung

Hin- und Rückleiter!

**Ohmsche Verluste**  $R \ll \omega L$

$$\alpha_L = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \kappa}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dämpfungsminimum für  $\frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} = 1$

bei vorgegebenen Außendurchmesser:  $\frac{D}{d} = 3,59$

**Dielektrische Verluste**  $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

### 6.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite

h := Substratbreite

#### 6.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer  $\frac{w}{h}$  desto mehr nähert sich  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  an  $\epsilon_r$  und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 6.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)$$

#### 6.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

### 6.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

### 6.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

Überlagerung von einlaufender und reflektierender Welle. Wenn Transmission vorhanden → Teil der Welle wird an der Grenzfläche transmittiert. Abhängigkeit vom Reflexionsfaktor

**Reflexionsfaktor**

$$r_2 = r(z=0) = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L}$$

**VSWR**

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

**Return Loss**

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

**Missmatch Loss**

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

### 6.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$  := Bandbreitenlängenprodukt

**Dispersion:**

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

**Stufenprofil:**

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes  $B \cdot l$  wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes  $B \cdot l$ , keine Modendispersion

**Gradientenprofil:**

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit  $B \cdot l$

**Bandbreitenlängenprodukt:**

$$B' = B \cdot l \left[ \frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

## 6.6 Leitungsparameter

### 6.6.1 Streifenleitung / Parallele Platten

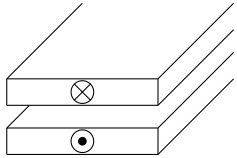
Für Sinus-Anregung:

$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{b \gg d}{=} E \cdot d \rightarrow \quad E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \rightarrow \quad H = \frac{I_0}{b} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

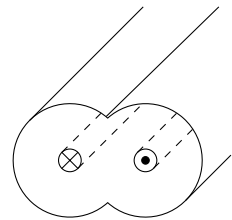
**b:** Plattenbreite      **d:** Abstand zwischen den Platten



$$\begin{aligned} R' &= \frac{2}{\delta \kappa b} \left[ \frac{\Omega}{m} \right] & L' &= \frac{\mu d}{b} \left[ \frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{\kappa b}{d} \left[ \frac{S}{m} \right] & C' &= \frac{b \varepsilon}{d} \left[ \frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

### 6.6.2 Doppelleitung

$\kappa$ : Leitwert des Dielektrikums       $\kappa_L$  Leitwert des Leiters  
**r:** Leiterradius      **d:** Abstand zw. Leitermitten



$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L} \left[ \frac{\Omega}{m} \right] \\ L' &= \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \left[ \frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{\pi \kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{S}{m} \right] \\ C' &= \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

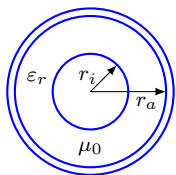
### 6.6.3 Koaxialleitung

$r_i$ : Innenradius       $r_a$ : Außenradius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{I}}{2\pi r} \right)^2 \cdot Z_F$$



$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{2\pi \delta \kappa_L} \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i} \right) \left[ \frac{\Omega}{m} \right] \\ L' &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \left[ \frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{2\pi \kappa}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{S}{m} \right] \\ C' &= \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

### 6.6.4 Allgemein

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!**  
**Länge verdoppeln!!!**

## 7 Smith-Diagramm

### 7.1 Allgemein

#### 7.1.1 Normierte Impedanz

gilt nur für **verlustlose** Leitung!

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \cdot \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \cdot \tan(\beta l)} = \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} + j \tan(\beta l)}{1 + j \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \tan(\beta l)}$$

allgemeine Gleichung **mit Verlusten** (siehe auch Kap. 5.1.1.)

Ersetze:  $\tan \rightarrow \tanh$  und  $\beta l \rightarrow \gamma l$

#### 7.1.2 verlustloser Reflexionsfaktor

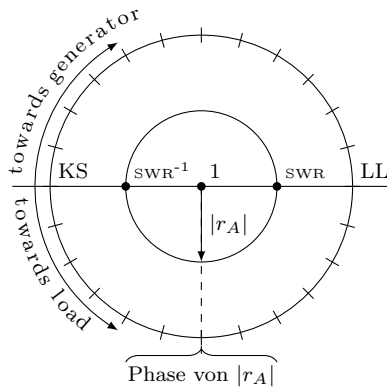
Immer gültig, auch ohne Quelle! siehe auch Kap. 5.2.2.

$$\underline{r}(l) = \underline{r} \quad \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi [360^\circ]$$

$L_n$ : reale Leitungslänge von Last zu Eingang.

$$\begin{aligned} \underline{r}_n &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta L_n} = \underline{r}_2 \cdot e^{-j4\pi \frac{L_n}{\lambda}} \\ &= |\underline{r}_2| \cdot e^{j(\Psi_0 - 2\beta L_n)} \quad \Psi_0(\underline{r}_2) := \text{Startwinkel in Radiant} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ \underline{r}_2 &= \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L} \end{aligned}$$

#### 7.1.3 Schema und Kenngrößen



Werte von Anpassungsfaktor  $m \rightarrow$  Werte von  $\text{Re}\{\underline{z}_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} \quad |\underline{r}| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad \text{SWR} = \frac{1}{m}$$

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \quad |\underline{r}(l)| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$

$$\text{SWR} = \frac{1}{m} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |\underline{r}(l)|}{1 - |\underline{r}(l)|} = \frac{|\underline{U}_h| + |\underline{U}_r|}{|\underline{U}_h| - |\underline{U}_r|} = \frac{R_{\max}}{\underline{Z}_L}$$

### 7.2 Maxima/Minima bei stehender Welle

Bei **verlustloser** Leitung:

$$U_{\max} = |\underline{U}_h| \cdot (1 + |\underline{r}(l)|) \quad U_{\min} = |\underline{U}_h| \cdot (1 - |\underline{r}(l)|)$$

$$I_{\max} = \left| \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 + |\underline{r}(l)|) \quad I_{\min} = \left| \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 - |\underline{r}(l)|)$$

Für **Spannungen**: Abstand von der Last  $z$ :  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} (\theta_{rad} + (2n+1)\pi) \quad z_{\max} = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot (\theta_{rad} + 2n\pi)$$

$$\text{Minima alle } \frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = 0.5$$

$$\text{Maxima alle } \frac{\lambda}{4} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = 0.25$$

$\rightarrow$  Schnittpunkte mit der reellen Achse!

Strommaxima sind an Spannungsminima und umgekehrt.

### 7.3 Impedanz/Admittanz umrechnen

Spiegelung von  $\underline{z}_n$  um Mittelpunkt ergibt  $\underline{y}_n$ . (Phase  $\pm 180^\circ / \pm \pi$ )

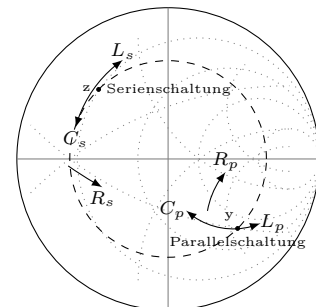
### 7.4 Lastseite $\rightarrow$ Quelle

1.  $\underline{Z}_L = \underline{Z}_B$  ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L}$$

4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch  $\underline{z}_n$ s nach außen  
Ablesen und Notieren:  
 $\rightarrow$  Relative Länge  $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$   
 $\rightarrow$  Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichnen  
Ablesen und Notieren:  
 $\rightarrow$  **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse  
 $\rightarrow$  **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse  
 $\rightarrow$   $r$  abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen  $\rightarrow$  Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen  
Ablesen und Notieren:  
 $\rightarrow$  Relativer Winkel
8. Wenn  $\alpha \neq 0$   
 $\rightarrow$  Dämpfung ausrechnen  $\rightarrow$  Um Faktor nach innen Spiralisieren
9. Dieser Punkt ist  $\underline{z}_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen

$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot \underline{Z}_L$$



Positive/negative Blindwerte bewegen sich im/gegen den Uhrzeigersinn. Wirkwiderstände bewegen sich immer zum Leerlaufpunkt.

### 7.5 Vorgehen mit geg. Eingangswiderstand

Wenn mit dem Smith-Diagramm gearbeitet wird, liefert dies die Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

## 8 Antennen

### 8.1 Herz'scher Dipol (HDp)

#### 8.1.1 Allgemein

$r$ : Antennenabstand

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left( \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta r} \cdot \cos \vartheta \left( \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left( \frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

Im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}E_r(t) &= \frac{Z_F I_0 l}{2\pi r^3 \beta} \cos \vartheta [\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r)] \\ E_\vartheta(t) &= \frac{Z_F I_0 l}{4\pi r^3 \beta} \sin \vartheta [\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r) - (\beta r)^2 \sin(\omega t - \beta r)] \\ H_\varphi(t) &= \frac{I_0 l}{4\pi r^2} \sin \vartheta [\cos(\omega t - \beta r) + \beta r \sin(\omega t - \beta r)]\end{aligned}$$

#### 8.1.2 Nahfeld (Fresnel-Zone)

$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1$  oder  $\beta R \ll 1$  oder  $r \ll \lambda \quad \approx$  Faktor 10

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da  $\vec{E}$  zu  $\vec{H}$  90° phasenverschoben. Lösung entspricht dem quasistatischen Dipolfeld. → **keine** Wellenausbreitung!

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi r^2} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon r^3} \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon r^3} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

#### 8.1.3 Fernfeld (Fraunhofer-Zone)

$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1$  oder  $\beta R \gg 1$  oder  $r \gg \lambda \quad \approx$  Faktor 10

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**,  $\vec{S}$  in Richtung  $\vec{e}_r$  → Kugelwelle,  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  in Phase, fallen mit  $\frac{1}{r}$  ab.

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

#### 8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld HDp

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} = \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left( \frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ \vec{S}_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}\end{aligned}$$

#### 8.1.5 Strahlungswiderstand HDp

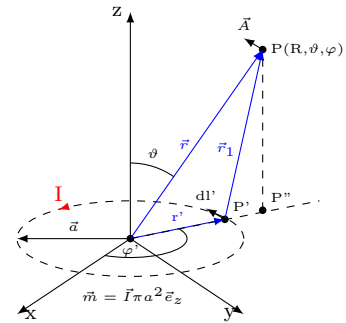
$$R_s = \frac{2}{3} \pi Z_F \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

#### 8.1.6 Verlustwiderstand HDp

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

### 8.2 Magnetischer Dipol

Dipolmoment:  $\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$



$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \cos \vartheta \left( \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left( \frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta \\ \underline{\vec{E}} &= \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \left( \frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

mag. Vektorpotenzial  $\vec{A}$ :

$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi$$

$P_{\text{rad}}$ : elek. Dipol der Länge  $l \hat{=}$  mag. Dipol der Fläche  $A$

$$\Delta l = \beta \cdot A_{\text{Kreis}} = \beta \cdot \pi a^2 \quad \frac{m}{v_p} = p$$

#### 8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r Z_{F0}} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

#### 8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} = \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}\end{aligned}$$

#### 8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r + \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta)\end{aligned}$$

### 8.3 Lineare Antenne

Stromverteilung auf linearen Antennen **nicht** konstant:

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{l}{2} - |z'| \right) \right]$$

#### 8.3.1 Dipolantenne allgemein

$l$ : Antennenlänge  $r$ : Antennenabstand

$$\vec{H} = j \frac{I_0}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \frac{\cos \left[ \left( \frac{\beta l}{2} \right) \cos \vartheta \right] - \cos \left( \frac{\beta l}{2} \right)}{\sin \vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_\vartheta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_s}{R_s}} \quad R_s \rightarrow \text{siehe Antennentabelle Kap. 8.10}$$

**Halbwellendipol:**  $l = \frac{\lambda}{2}$   $Z_s = \overbrace{(73, 13 + j42, 54)}^{R_s} \Omega$   
**Ganzwellendipol:**  $l = \lambda$   $Z_s = \overbrace{(199, 09 + j125, 41)}^{X_s} \Omega$

#### 8.3.2 Eingangs-/Fußpunktimpedanz

Bei leerlaufender Leitung entstehen in Längsrichtung stehende Wellen. Um max. Wirkleistung zu übertragen, muss die Eingangs-/Fußpunktimpedanz  $Z_A$  **reell** bzw. die Leitung in Resonanz sein.

$$P_{max} \rightarrow n \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$$Z_A = Z_s \frac{|I_0|^2}{|I_0(z' = 0)|^2} = \frac{Z_s}{\sin^2 \left[ \beta \frac{l}{2} \right]}$$

Strom am Fußpunkt:

$$I(z' = 0) = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{l}{2} \right) \right]$$

komplexe Strahlungsleistung:

$$P_s + jQ_s = Z_s \cdot \frac{|I_0|^2}{2} = Z_A \cdot \frac{|I_0(z' = 0)|^2}{2}$$

#### 8.3.3 Strahlungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left( \frac{\cos \left( \frac{\beta l}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left( \frac{\beta l}{2} \right)}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = S_{iso} \cdot D_{max} = S_{iso} \cdot D_{max} \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

#### 8.3.4 abgestrahlte Wirkleistung

$$P_s = \int_A S_{av} \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} S_{av} \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$P_s = \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\left( \cos \left( \frac{\beta l}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left( \frac{\beta l}{2} \right) \right)^2}{\sin \vartheta} d\vartheta$$

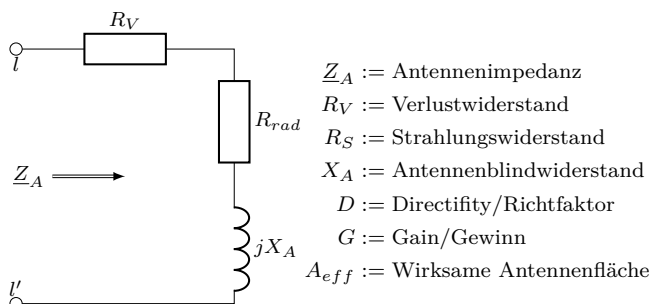
$$= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot x$$

Numerische Lösung des Integrals ergibt Faktor  $x$ :

bei **Halbwellendipol:**  $x = 1,2188$

bei **Ganzwellendipol:**  $x = 3,3181$

### 8.4 Antennenkenngrößen



$X_A$  wird kompensiert  $\rightarrow$  max. Wirkleistungsübertragung

#### 8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_s = P_{rad} = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_s$$

#### 8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

#### 8.4.3 Wirkungsgrad

wenn  $R_V$  vorhanden  $\rightarrow$  wirkt sich auf  $G$  aus!

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_V} = \frac{R_s}{R_s + R_V}$$

#### 8.4.4 Gewinn/Gain

Verlustlose Antenne, wenn  $\eta = 1$

$$G = \eta \cdot D \quad \text{bei } \eta = 1 \rightarrow G = D$$

#### 8.4.5 Richtcharakteristik

$C_i \triangleq$  isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C'(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\cos \left( \frac{\beta L}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left( \frac{\beta L}{2} \right)}{\sin \vartheta} \right|$$

#### 8.4.6 Richtfunktion/-faktor

$$D_{\text{eff}}(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i} = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D_{\max} \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D_{\max} = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

**Halbwellendipol**  $l = \frac{\lambda}{2}$

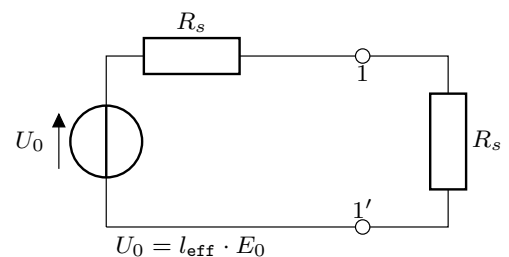
$$D_{\text{eff}}(\vartheta, \varphi) = 1,64 \cdot \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} \right)^2$$

**Ganzwellendipol**  $l = \lambda$

$$D_{\text{eff}}(\vartheta, \varphi) = 2,41 \cdot \left( \frac{\cos(\pi \cos \vartheta) + 1}{2 \sin \vartheta} \right)^2$$

### 8.5 Senden und Empfangen

Bei Anpassung:  $R_e = R_s \rightarrow$  max. Wirkleistung wird übertragen!



$R_s$ : Strahlungswiderstand  $s$ : Sender  $e$ : Empfänger  
 $r$ : Abstand von der Antenne

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot I^2 = \frac{U_0^2}{8R_s} \quad S_s = \frac{1}{2} H_0^2 Z_{F0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_{F0}}$$

$$= \frac{E_0^2 \cdot I_{\text{eff}}^2}{8R_s}$$

### 8.5.1 Wirksame/Effektive Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{P_e}{S_s} = \frac{U_0^2}{8R_s} \frac{2Z_{F0}}{E_0^2} \quad A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_s} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

Beim Hertzschen Dipol:

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$$

### 8.5.2 Friis-Übertragungsgleichung

$$S_{\text{iso}} = \frac{P_s}{4\pi r^2} \quad S_s = S_{\text{iso}} \cdot D_s$$

$$S_{\text{iso,max}} = \frac{P_s}{4\pi r^2} \cdot G$$

$$A_{\text{eff,n}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_n(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_n \quad A_{\text{eff,n}} \Big|_{\text{max}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_n$$

$$P_e = S_s \cdot A_{\text{eff,e}}$$

$$= S_s \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e$$

$$\frac{P_e}{P_s} = A_{\text{eff,e}} \cdot A_{\text{eff,s}} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}$$

$$= D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e \cdot D_s(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_s \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

$$\frac{P_e}{P_s} \Big|_{\text{max}} = G_s \cdot G_e \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

Reziprozität: Sende- und Empfangscharakteristik sind identisch!

### 8.5.3 Freiraumdämpfung

d: Abstand zur Antenne

$$F = \frac{P_s}{P_e} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \log \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20 \log \left(\frac{4\pi df}{c_0}\right) \quad [\text{dB}]$$

Freiraumdämpfung wird durch räumliche Verteilung der Strahlung verursacht, **nicht** durch Wirkverluste des Ausbreitungsmediums.

### 8.5.4 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}}\right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_e = L_s + g_s + g_s - a_0 \quad [\text{dB}]$$

## 8.6 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit  $P_0$  : Eingangsleistung der Antenne

**G→Bezugsantenne:**

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

**EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power**

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dB}]$$

**ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)**

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

## 8.7 Monopolantenne

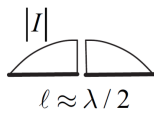
Verhält sich wie ein Dipol, der nur in die obere Hälfte abstrahlt. Strahlungswiderstand halbiert sich und Richtfaktor verdoppelt sich gegenüber der Dipolantenne.

Geometrisch zu kurze Antennen können durch breiteren Drahtdurchmesser, Fußpunktinduktivität oder Dachkapazität elektrisch verlängert werden.



## 8.8 Richtcharakteristik Dipolantennen

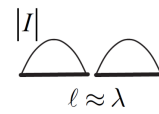
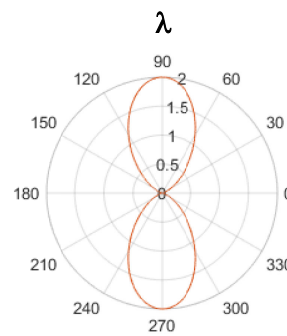
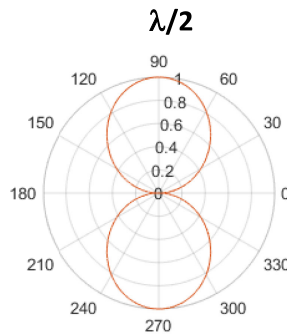
## 5.4.4 Richtcharakteristik der Dipolantenne



$$R=73,1\Omega$$

$$D=1,64$$

$$\theta_{3dB}=78^\circ$$



$$R=199\Omega$$

$$D=2,41$$

$$\theta_{3dB}=48^\circ$$

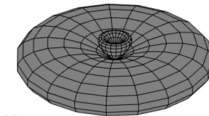
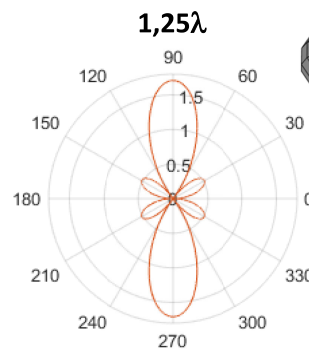
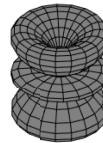
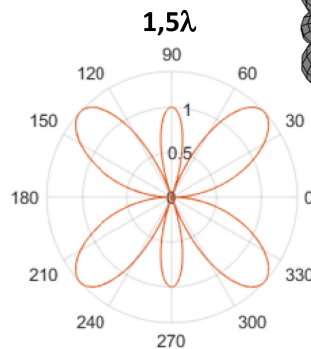
→ k541\_Dipolantenne.m



$$R=105\Omega$$

$$D=2,22$$

$$\theta_{3dB}=36,3^\circ$$



$$R=106\Omega$$

$$D=3,28$$

$$\theta_{3dB}=32,6^\circ$$

Robert Sattler

Felder, Wellen und Leitungen

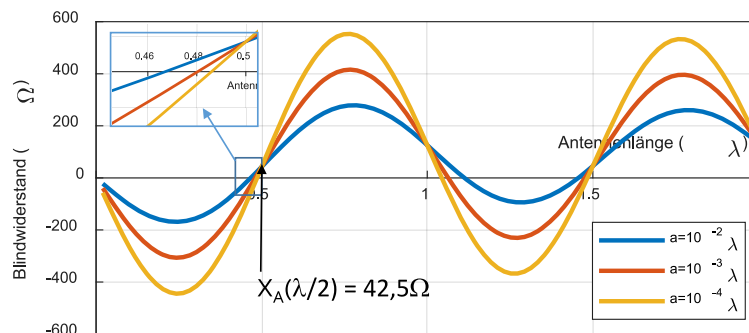
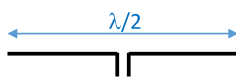
S. 36

## 8.9 Blindwiderstand Dipolantennen

## 5.4.5 Blindwiderstand Dipolantenne

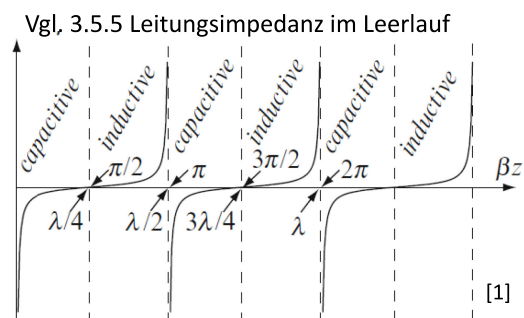


Aus dem Nahfeld des Hertzschen Dipols lässt sich durch Überlagerung der Blindwiderstand der Dipolantenne berechnen:  
→ Formel (4-70) in [11]



Für maximale Leistungsübertragung ist ein reeller Eingangswiderstand erforderlich. Dies ist der Fall, wenn die Leitung in Resonanz ist. Man spricht von Resonanzantennen, wenn  $l \approx n \cdot \lambda/2$ .

Je größer der Durchmesser  $a$  der Antenne, desto **kürzer/länger** ist die Länge bei **Halb-/Ganzwellenresonanz**.



Robert Sattler

Felder, Wellen und Leitungen

S. 37

## 8.10 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$l$	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$h$	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28; (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	$40 \Omega$		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	$73 \Omega$		
$\lambda$ -Dipol		2,41; (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	$200 \Omega$		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	$290 \Omega$		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28; (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500 \Omega$		
kleiner Rahmen, $n$ -Windungen, beliebige Form		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	$ab$	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10^4 / \lambda$	—	—	—		

## 9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
$\vec{A}$	mag. Vektorpotential	$\frac{Vs}{m} = \frac{Wb}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
$\vec{B}$	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
$\vec{D}$	dielek. Verschiebung/Flussdichte	$\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
$\vec{E}$	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$\vec{H}$	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
$\vec{J}$	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
L	Induktivität	$\frac{kgm^2}{A^2s^2} = \frac{Wb}{A} = 1\Omega s$
$\vec{M}$	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
$R_{mag}$	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	$\Omega$
$\delta_s$	Eindringtiefe	m
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
$\varphi$	elek. Skalarpotential	V
$\varphi_m$	mag. Skalarpotential	A
$\rho$	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
$\rho$	spez. Widerstand	$\frac{\Omega mm^2}{m} = \frac{VAmm^2}{m}$
$\kappa, \sigma$	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\mu$	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
$\Phi_e$	elek. Fluss	$C = As$
$\Phi_m$	mag. Fluss	$Wb = Vs = \frac{T}{m^2}$