



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

# FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23  
nach Vorlesung von Prof. Stücke

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

25. Januar 2023

Lizenz:

GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Grundlagen</b>                                   | <b>1</b> |
| 1.1      | Einheiten   | 1        |
| 1.2      | Vektorrechnung                                      | 1        |
| 1.2.1    | Betrag, Richtungswinkel, Normierung                 | 1        |
| 1.2.2    | Skalarprodukt                                       | 1        |
| 1.2.3    | Kreuzprodukt  | 1        |
| 1.3      | Differentialoperatoren                              | 1        |
| 1.3.1    | Rechenregeln  | 1        |
| 1.3.2    | Spezielle Vektorfelder                              | 1        |
| 1.4      | Logarithmische Maße/Pegel                           | 2        |
| 1.4.1    | Rechnen mit Pegeln                                  | 2        |
| 1.5      | Koordinatensysteme                                  | 2        |
| 1.5.1    | Umrechnungstabelle                                  | 2        |
| 1.5.2    | Schema KOS Kugel/Zylinder                           | 2        |
| 1.5.3    | Kartesische Koordinaten                             | 3        |
| 1.5.4    | Zylinderkoordinaten                                 | 3        |
| 1.5.5    | Kugelkoordinaten                                    | 3        |
| <b>2</b> | <b>Maxwell-Gleichungen</b>                          | <b>4</b> |
| 2.1      | Integralsätze                                       | 4        |
| <b>3</b> | <b>Felder</b>                                       | <b>5</b> |
| 3.1      | Elektrostatik                                       | 5        |
| 3.1.1    | Potential-/Poisson-Gleichung                        | 5        |
| 3.1.2    | Randwertprobleme, -bedingungen (RB)                 | 5        |
| 3.1.3    | Green'sche Funktionen                               | 5        |
| 3.1.4    | Elektrischer Dipol                                  | 5        |
| 3.2      | Magnetostatik                                       | 5        |
| 3.2.1    | Vektorpotential                                     | 5        |
| 3.2.2    | Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte | 5        |
| 3.2.3    | Biot-Savart-Gesetz                                  | 6        |
| 3.2.4    | Magnetischer Dipol                                  | 6        |
| 3.3      | Quasistationäre Felder (Wechselstrom)               | 6        |
| 3.3.1    | Komplexe Feldgrößen                                 | 6        |
| 3.3.2    | Skineffekt  | 6        |
| 3.3.3    | Näherungen für Skineffekt                           | 6        |
| 3.4      | E-Felder an Grenzflächen                            | 7        |
| 3.4.1    | Dielektrische Grenzfläche                           | 7        |
| 3.4.2    | Grenzfläche Dielektrikum-Leiter                     | 7        |
| 3.4.3    | Grenzfläche an magn. Feldern                        | 7        |
| <b>4</b> | <b>Wellen</b>                                       | <b>8</b> |
| 4.1      | Wellengleichungen allgemein                         | 8        |
| 4.1.1    | Zeitbereich   | 8        |
| 4.1.2    | Frequenzbereich                                     | 8        |
| 4.1.3    | Vereinfachung der Gleichungen                       | 8        |
| 4.2      | Ebene Wellen  | 8        |
| 4.3      | Kenngrößen  | 8        |
| 4.3.1    | Wellenzahl  | 8        |
| 4.3.2    | Wellenlänge   | 8        |
| 4.3.3    | Phasengeschwindigkeit                               | 8        |
| 4.3.4    | Brechzahl/Brechungsindex                            | 8        |
| 4.3.5    | Gruppengeschwindigkeit                              | 8        |
| 4.3.6    | Feldwellenwiderstand                                | 8        |
| 4.3.7    | Poynting-Vektor                                     | 8        |
| 4.4      | Ausbreitung im Medium                               | 9        |
| 4.4.1    | Allgemein (mit Verlusten)                           | 9        |
| 4.4.2    | Im leeren Raum (Vakuum)                             | 9        |
| 4.4.3    | Im verlustlosen Dielektrikum                        | 9        |
| 4.4.4    | Im Dielektrika mit geringem Verlust                 | 9        |
| 4.4.5    | Im guten Leiter                                     | 9        |
| 4.5      | Ebene Wellen an Grenzflächen                        | 9        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.5.1    | Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust . . . . .          | 9         |
| 4.5.2    | Brechungsgesetz . . . . .                                    | 9         |
| 4.5.3    | Leistungsbilanz an Grenzflächen . . . . .                    | 9         |
| 4.6      | Senkrechter Einfall . . . . .                                | 10        |
| 4.6.1    | Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt. . . . .       | 10        |
| 4.6.2    | Medium 1 oder 2: Luft . . . . .                              | 10        |
| 4.6.3    | beide Medien: nicht magnetisch . . . . .                     | 10        |
| 4.6.4    | Medium 2: idealer Leiter . . . . .                           | 10        |
| 4.6.5    | Stehwellenverhältnis (SWR) . . . . .                         | 10        |
| 4.7      | Schräger Einfall (allgemein) . . . . .                       | 10        |
| 4.7.1    | Brechungsgesetz . . . . .                                    | 10        |
| 4.7.2    | Totalreflexion/Grenzwinkel . . . . .                         | 10        |
| 4.7.3    | Brewster-/Polarisationswinkel . . . . .                      | 10        |
| 4.7.4    | Senkrechte Polarisierung . . . . .                           | 11        |
| 4.7.5    | Parallele Polarisierung . . . . .                            | 11        |
| <b>5</b> | <b>Leitungen</b>   | <b>12</b> |
| 5.1      | Allgemeine Leitung (mit Verlusten) . . . . .                 | 12        |
| 5.1.1    | Gleichungen . . . . .  | 12        |
| 5.1.2    | Kenngrößen . . . . .   | 12        |
| 5.1.3    | Kurzschluss und Leerlauf . . . . .                           | 12        |
| 5.1.4    | Lange und Kurze Leitung . . . . .                            | 12        |
| 5.2      | Verlustlose Leitung . . . . .                                | 12        |
| 5.2.1    | Kenngrößen . . . . .   | 12        |
| 5.2.2    | verlustloser Reflexionsfaktor . . . . .                      | 12        |
| 5.2.3    | Beliebiger Abschluss (Last) . . . . .                        | 13        |
| 5.2.4    | Kurzschluss an Leitungsende . . . . .                        | 13        |
| 5.2.5    | Leerlauf an Leitungsende . . . . .                           | 13        |
| 5.2.6    | Leitung als Impedanz-Transformator . . . . .                 | 13        |
| 5.2.7    | Angepasste (reflexionsfreie) Leitung . . . . .               | 13        |
| 5.2.8    | Ohmscher Abschluss an Leitungsende . . . . .                 | 13        |
| 5.2.9    | Position von Extrema . . . . .                               | 13        |
| 5.2.10   | Vorgehen Eingangswiderstand . . . . .                        | 13        |
| 5.2.11   | Stehwellenverhältnis (SWR) . . . . .                         | 13        |
| 5.2.12   | Leistung . . . . .   | 13        |
| 5.2.13   | Gleichspannungswert (=Endwert) . . . . .                     | 14        |
| 5.3      | Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung . . . . .        | 14        |
| 5.4      | Leitungsparameter . . . . .                                  | 14        |
| 5.4.1    | Allgemein . . . . .  | 14        |
| 5.4.2    | Streifenleitung / Parallele Platten . . . . .                | 14        |
| 5.4.3    | Doppelleitung . . . . .                                      | 14        |
| 5.4.4    | Koaxialleitung . . . . .                                     | 14        |
| <b>6</b> | <b>Smith-Diagramm</b>  | <b>15</b> |
| 6.1      | Allgemein . . . . .  | 15        |
| 6.1.1    | Normierte Impedanz . . . . .                                 | 15        |
| 6.1.2    | Reflexionsfaktor . . . . .                                   | 15        |
| 6.1.3    | Anpassungsfaktor . . . . .                                   | 15        |
| 6.2      | Impedanz/Admetanz umrechnen . . . . .                        | 15        |
| 6.3      | Von Last zu Quelle . . . . .                                 | 15        |
| <b>7</b> | <b>Wellenleiter</b>  | <b>16</b> |
| 7.1      | Koaxial Leiter . . . . .                                     | 16        |
| 7.1.1    | Wellenwiderstand . . . . .                                   | 16        |
| 7.1.2    | Dämpfung . . . . .   | 16        |
| 7.2      | Mikrostreifenleiter . . . . .                                | 16        |
| 7.2.1    | Effektive Permittivitätszahl . . . . .                       | 16        |
| 7.2.2    | Schmale Streifen . . . . .                                   | 16        |
| 7.2.3    | Breite Streifen . . . . .                                    | 16        |
| 7.3      | Hohlleiter . . . . .   | 16        |
| 7.4      | VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss . . . . . | 16        |
| 7.5      | Lichtwellenleiter oder Glasfaser . . . . .                   | 16        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>8</b> | <b>Antennen</b>                                 | <b>17</b> |
| 8.1      | Herz'scher Dipol . . . . .                      | 17        |
| 8.1.1    | Allgemein . . . . .                             | 17        |
| 8.1.2    | Nahfeld . . . . .                               | 17        |
| 8.1.3    | Fernfeld . . . . .                              | 17        |
| 8.1.4    | Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .     | 17        |
| 8.1.5    | Strahlungswiderstand . . . . .                  | 17        |
| 8.1.6    | Verlustwiderstand . . . . .                     | 17        |
| 8.2      | Magnetischer Dipol . . . . .                    | 17        |
| 8.2.1    | Fernfeld . . . . .                              | 17        |
| 8.2.2    | Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .     | 17        |
| 8.2.3    | Nahfeld . . . . .                               | 17        |
| 8.3      | Lineare Antenne . . . . .                       | 17        |
| 8.3.1    | Dipolantenne . . . . .                          | 18        |
| 8.4      | Antennenkenngrößen . . . . .                    | 18        |
| 8.4.1    | Abgestrahlte Leistung . . . . .                 | 18        |
| 8.4.2    | Verlustleistung . . . . .                       | 18        |
| 8.4.3    | Wirkungsgrad . . . . .                          | 18        |
| 8.4.4    | Richtcharakteristik . . . . .                   | 18        |
| 8.4.5    | Richtfunktion/Richtfaktor . . . . .             | 18        |
| 8.4.6    | Gewinn . . . . .                                | 18        |
| 8.4.7    | Wirksame Antennenfläche . . . . .               | 18        |
| 8.5      | Bezugsantennen . . . . .                        | 18        |
| 8.6      | Senden und Empfangen . . . . .                  | 18        |
| 8.6.1    | Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß . . . . . | 19        |
| 8.6.2    | Leistungspegel/Freiraumpegel . . . . .          | 19        |
| 8.7      | Antennentabelle . . . . .                       | 20        |
| <b>9</b> | <b>Einheiten</b>                                | <b>21</b> |

# 1 Grundlagen

## 1.1 Einheiten

| Größe                    | Symbol        | Einheit  |
|--------------------------|---------------|--|
| Permiabilitätskonstante  | $\mu$         | $\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$                                |
| Dielektrizitätskonstante | $\varepsilon$ | $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$                                |
| elek. Ladung/Fluss       | $Q, q$        | $C = As$   |
| elek. Feldstärke         | $\vec{E}$     | $\frac{\text{V}}{\text{m}}$                                  |
| elek. Flussdichte        | $\vec{D}$     | $\frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ |
| Kapazität                | $C$           | $F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$                             |
| mag. Fluss               | $\phi, \Phi$  | $Wb = Vs$  |
| mag. Feldstärke          | $\vec{H}$     | $\frac{\text{A}}{\text{m}}$                                  |
| mag. Flussdichte         | $\vec{B}$     | $T = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$                           |
| Induktivität             | $L$           | $H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$                             |
| Strahlungsdichte         | $S_{av}, I$   | $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$                                |

## 1.2 Vektorrechnung

### 1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

#### Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

#### Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

#### Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

### 1.2.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### 1.2.3 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

## 1.3 Differentialoperatoren

### Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

### Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### Divergenz div: Vektorfeld $\rightarrow$ Skalar S.382

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

### Rotation rot: Vektorfeld $\rightarrow$ Vektorfeld S.382

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert:  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

### Gradient grad: Skalarfeld $\rightarrow$ Vektor/Gradientenfeld

zeigt in Richtung steilster Anstieg von  $\phi$

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

### 1.3.1 Rechenregeln

$\phi, \psi$ : Skalarfelder  $\vec{A}, \vec{B}$ : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

### 1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Vektorpotential  $\vec{E}$

$$\text{div } \vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Skalarpotential  $\phi$

$$\text{rot } \vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{F}) &= \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F} \end{aligned}$$

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße  $F_n$ : Spannung, Strom,  $\vec{E}$ -,  $\vec{H}$ -Feld, Schalldruck  
Leistungsgröße  $P_n$ : Energie, Intensität, Leistung  
Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- **Dämpfungsmaß**  $a$  in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$1\text{ dB} = 0,1151\text{ Np}$  $1\text{ Np} = 8,686\text{ dB}$

$a\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2}$  $a\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{20}}$  $\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{10}}$

$a\text{ [Np]} = \ln \frac{F_1}{F_2}$  $a\text{ [Np]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = e^{a\text{[Np]}}$  $\frac{P_1}{P_2} = e^{2a\text{[Np]}}$

- **absolute Pegel**  $L$  mit Bezugsgrößen  $P_0, F_0$

$L\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0}$  $L\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$

$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{20}}$  $\frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{10}}$

| Einheit      | Bezugswert                          | Formelzeichen         |
|--------------|-------------------------------------|-----------------------|
| dBm, dB(mW)  | $P_0 = 1\text{ mW}$                 | $L_{\text{P/mW}}$     |
| dBW, dB(W)   | $P_0 = 1\text{ W}$                  | $L_{\text{P/W}}$      |
| dBV, dB(V)   | $F_0 = 1\text{ V}$                  | $L_{\text{U/V}}$      |
| dBμV, dB(μV) | $F_0 = 1\text{ μV}$                 | $L_{\text{U/μV}}$     |
| dBμA, dB(μA) | $F_0 = 1\text{ μA}$                 | $L_{\text{I/μA}}$     |
| dB(μV/m)     | $F_0 = 1\frac{\text{μV}}{\text{m}}$ | $L_{\text{E/(μV/m)}}$ |
| dB(μA/m)     | $F_0 = 1\frac{\text{μA}}{\text{m}}$ | $L_{\text{H/(μA/m)}}$ |

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

| Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$ | Energiegröße $P_n$ | Feldgröße $F_n$ |
|---|--------------------|-----------------|
| 1   | 0                  | 0               |
| 100   | 20 dB              | 40 dB           |
| 1000  | 30 dB              | 60 dB           |
| 0,1   | -10 dB             | -20 dB          |
| 0,01  | -20 dB             | -40 dB          |
| 0,001   | -30 dB             | -60 dB          |
| 2   | 3 dB               | 6 dB            |
| 4   | 6 dB               | 12 dB           |
| 8   | 9 dB               | 18 dB           |
| 0,5   | -3,01 dB           | -6,02 dB        |
| 1,25  | 0,97 dB            | 1,94 dB         |
| 0,8   | -0,97 dB           | -1,94 dB        |

- **relativer Pegel / Maß**  
Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert  $P_0$

$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis):  $x, y, a > 0$

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

$\log(x^a) = a \cdot \log(x)$  $\log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$

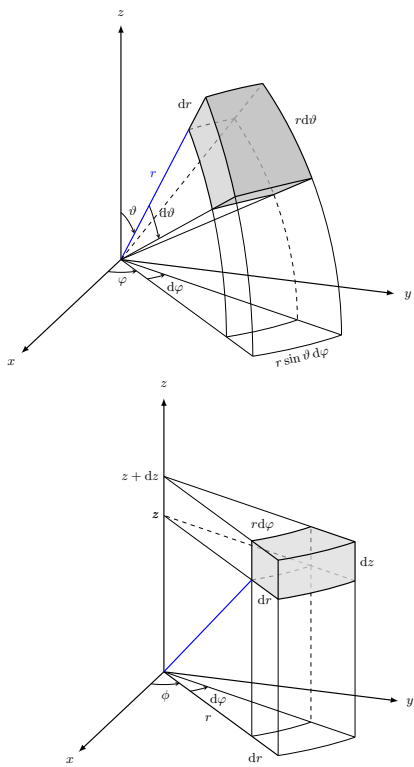
$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor})$  $\text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Umrechnungstabelle

| Kart.   | Zyl.             | Kug.                            |
|---|------------------|---------------------------------|
| $x$   | $r \cos \varphi$ | $r \sin \vartheta \cos \varphi$ |
| $y$   | $r \sin \varphi$ | $r \sin \vartheta \sin \varphi$ |
| $z$   | $z$              | $r \cos \vartheta$              |
| $\sqrt{x^2 + y^2}$  | $r$              |                                 |
| $\arctan \frac{y}{x}$   | $\varphi$        |                                 |
| $z$   | $z$              |                                 |
| $dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$   | $dr$             |                                 |
| $dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$   | $r d\varphi$     |                                 |
| $dz$  | $dz$             |                                 |
| $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  |                  | $r$                             |
| $\arctan \frac{y}{x}$   |                  | $\varphi$                       |
| $\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$  |                  | $\vartheta$                     |
| $dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$ |                  | $dr$                            |
| $dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$   |                  | $r \sin \vartheta d\varphi$     |
| $dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$ |                  | $r d\vartheta$                  |

1.5.2 Schema KOS Kugel/Zylinder



### 1.5.3 Kartesische Koordinaten

Variablen:  $x, y, z$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  Rechtssystem:  $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  Volumenelemente:  $dV = dx dy dz$

Flächenelemente:  $dA_{xy} = dx dy \vec{e}_z$   $dA_{yz} = dy dz \vec{e}_x$   $dA_{xz} = dx dz \vec{e}_y$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(x; y; z)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$  **Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$

**La-Place:**  $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$   $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

$\Delta \vec{E} = \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z$

### 1.5.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen:  $r, \varphi, z$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  Rechtssystem:  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$  Volumenelemente:  $dV = r dr d\varphi dz$

Flächenelemente:  $dA_{r\varphi} = r dr d\varphi \vec{e}_z$   $dA_{rz} = dr dz \vec{e}_\varphi$   $dA_{\varphi z} = r d\varphi dz \vec{e}_r$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(r; \varphi; z)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$

**Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$

**La-Place:**  $\Delta \phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$   $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_r \vec{e}_r + \Delta E_\varphi \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z$

$\Delta \vec{E} = \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z$

### 1.5.5 Kugelkoordinaten

Variablen:  $r, \vartheta, \varphi$  Einheitsvektoren:  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  Rechtssystem:  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente:  $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$  Volumenelemente:  $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Flächenelemente:  $dA_{r\vartheta} = r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi$   $dA_{r\varphi} = r \sin \vartheta dr d\varphi \vec{e}_\vartheta$   $dA_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$

Skalarfeld:  $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$  Vektorfeld:  $\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

**Gradient:**  $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

**Divergenz:**  $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

**Rotation:**  $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$

**La-Place:**  $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$

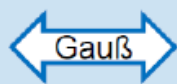
## 2 Maxwell-Gleichungen

### differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

**Gaußsches Gesetz:** Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung  $Q$  bzw. die Ladungsdichte  $\rho$  ist Quelle des elektrischen Feldes.

### Integralform

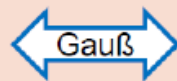


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.  
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.

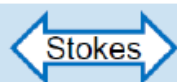


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Induktionsgesetz:** Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.

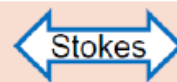


$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  einer Fläche  $A$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**Amperesches Gesetz:** Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  der Fläche  $A$  entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

### Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

### Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

### Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind  $\varepsilon$  u.  $\mu$  Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

Zeitbereich:  $\frac{\partial}{\partial t}$

Harmonischer Frequenzbereich (komplexe Berechnung):  $j\omega$

### 2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich  $\rightarrow$  nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$



### 3 Felder

#### Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[ \frac{A}{m^2} \right]} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = [T]} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[ \frac{C}{m^2} \right]}$$

Verkopplung von  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder über  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ .

#### Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

### 3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder  $\rightarrow$  Gradientenfeld  $\rightarrow$  elek. Ladungen sind Quellen des  $\vec{E}$ -Feldes (Skalare Potenzialfkt.  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 = \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z$$

#### 3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\varepsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

#### 3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

**Dirichlet-RB:** Gesuchte Potenzialfunktion  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.:  $\rho_r = 5V$ )

**Neumann-RB:** Die Normalenableitung  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  der Fkt.  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

#### 3.1.3 Green'sche Funktionen

##### • Skalarpotential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

##### • E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

##### • D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

##### • Potentialfeld einer Ladungsdichteverteilung mit $\varphi(\infty) = 0$

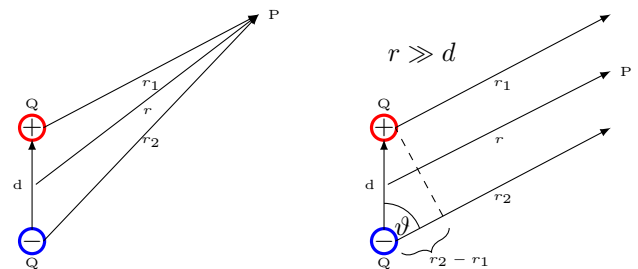
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

#### 3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment  $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

### 3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole:  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Skalarpotential  $\varphi_m$  existiert, wenn  $\vec{H}$  wirbelfrei ist:  $\text{rot } \vec{H} = 0$ , wenn  $\vec{J} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 = \text{div rot } B & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

#### 3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential  $\varphi$ .

**Coulomb-Eichung**, wenn  $\text{div } \vec{A} = 0$ , gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

#### 3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### 3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

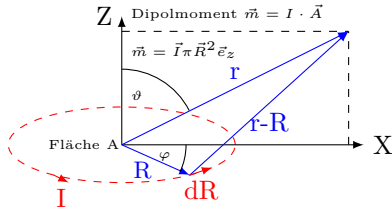
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit  $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$ : Aufpunkt  $\vec{r}'$ : Quellpunkt

### 3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

## 3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium:  $\varepsilon, \mu, \kappa = \text{konst.}$

Leiter ist quasineutral:  $\rho = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

#### 3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexe Amplitude / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

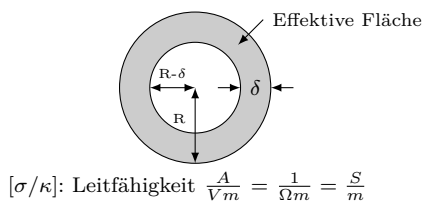
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

#### 3.3.2 Skineffekt



**Eindringtiefe**/Äquivalente Leiterschichtdicke  
(Abfall der Amplitude:  $A_0 \cdot \frac{1}{e}$ ):

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

**Feldstärke** verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

analog für E-Feld

**Amplitude** und **Phase** bezogen auf  $\delta$ :

Amplitude:  $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$

Dämpfung:  $\alpha = \frac{1}{\delta}$  Phase:  $\varphi = -\frac{x}{\delta}$

**Leistung** verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

**Rundleiter - Effektive Fläche:**

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left( R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

#### 3.3.3 Näherungen für Skineffekt

$$\text{Rundleiter: } R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$$

**Geometrische** Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left( \frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} \right)^4 & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

**Bessel-Funktion** (Fehler < 6%):

$$\begin{aligned} \frac{R_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \\ \frac{X_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \hat{=} \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

**Empirische** Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left( \frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1)  $\hat{=}$  Kreisring mit Näherung (2)  $\hat{=}$  Ring mittig

### 3.4 E-Felder an Grenzflächen

#### 3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

**Querschichtung:**

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem  $\varepsilon$ .

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem  $\varepsilon$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

#### 3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht.  $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

**Querschichtung:**

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

#### 3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

**Querschichtung:**

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem  $\mu$ .

**Längsschichtung:**

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem  $\mu$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## 4 Wellen

### 4.1 Wellengleichungen allgemein

#### 4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

#### 4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:

mit harmonischer Zeitabhängigkeit:  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

#### 4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum:  $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter  $\rho = 0$ ,  $\kappa \gg \omega \varepsilon$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

## 4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen  $\rho = 0$ , keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{H}$$

**TEM-Welle:**  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  besitzen nur transversale (= senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende) Komponenten.

### ebene Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von  $\vec{E}(z, t)$ )

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

### komplexer Amplitudenvektor

$$\underline{\vec{E}}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

### Fortpflanzungskonstante

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

## 4.3 Kenngrößen

### 4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum:  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$\beta \hat{=} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

### 4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.

Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum  $\lambda_0$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0} \quad [\text{m}]$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

### 4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_{p, \text{Medium}} \leq c_0$$

### 4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

### 4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \hat{=} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

### 4.3.6 Feldwellenwiderstand

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \frac{\underline{E}_h}{\underline{H}_h} = -\frac{\underline{E}_r}{\underline{H}_r} = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\kappa + j\omega \varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega \quad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

### 4.3.7 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energiestromung an.

| Zeitbereich   | Frequenzbereich  |
|---|--|
| $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  | $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$      |
| $\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$ | $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$ |
| Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} =  \vec{S}_{av} $                  |  |

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \quad P_{\text{Leitung}} = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

## 4.4 Ausbreitung im Medium

### 4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \quad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

### 4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum:  $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \quad Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

### 4.4.3 Im verlustlosen Dielektrikum

verlustlos:  $\kappa = 0$ , maximale Wirkleistung  
 $Z_F$  rein reell  $\rightarrow$  ebene Welle

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad \boxed{Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}$$

### 4.4.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust:  $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left( 1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon} \right)}$$

### 4.4.5 Im guten Leiter

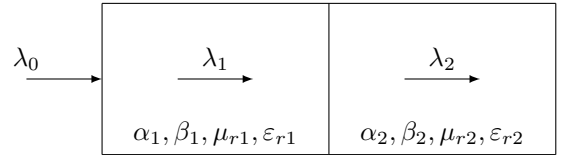
geringer Verlust:  $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \quad \boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

## 4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

### 4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

### 4.5.2 Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

### 4.5.3 Leistungsbilanz an Grenzflächen

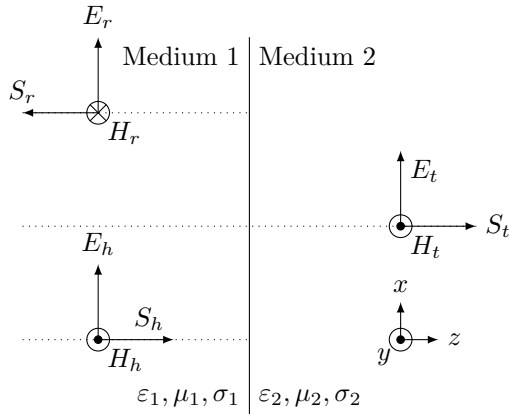
Index n: Normalkomponente.

$$S_{tn} = S_{hn} - S_{rn}$$

$$S_{t0} = S_{h0} \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} (1 - r^2)$$

## 4.6 Senkrechter Einfall

Gilt bei Einfallswinkel  $\theta_h = 0$ .



$$\begin{aligned}
 r_e &= \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & t_e &= \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \\
 r_m &= \frac{Z_{F1} - Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & t_m &= \frac{2 \cdot Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \\
 &= -r_e & &= t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \\
 t_e &= 1 + r_e & t_m &= 1 + r_m \\
 E_{t1} &= E_{t2} & H_{t1} &= H_{t2} \\
 E_t &= t_e \cdot E_h & H_t &= t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot H_h \\
 E_r &= r_e \cdot E_h & -H_r &= r_e \cdot H_h \\
 E_t &= E_h + E_r & H_t &= H_h + H_r \\
 t_e \cdot E_h &= E_h + r_e \cdot E_h & t_m \cdot H_h &= H_h + r_m \cdot H_h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_t &= H_h + H_r \\
 \frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} &= \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}} \\
 \frac{t}{Z_{F2}} &= \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}
 \end{aligned}$$

### 4.6.1 Verlustloses Dielektrikum allgemein

gilt für  $\kappa = 0$ , keine Dämpfung.

rein reell:  $Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$     rein imaginär:  $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
 r &= r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}} \\
 t &= t_e = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}
 \end{aligned}$$

### 4.6.2 Medium 1 oder 2: Luft

|   |   |
|---|---|
| $\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1$   | $\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1$   |
| $r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$ | $r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$ |
| $t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$                          | $t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$                  |

### 4.6.3 beide Medien: nicht magnetisch

Gilt für  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

### 4.6.4 Medium 2: idealer Leiter

$\vec{E} = 0$  im idealen Leiter  $\rightarrow$  **Stehende Welle!**

$$Z_{F2} = 0 \quad r = -1 \quad t = 0 \quad \vec{S}_{av} = 0$$

$$\underline{E}_{1x} = -2j \cdot E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \quad \underline{H}_{1y} = 2 \cdot \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z)$$

$$E_{1x}(z, t) = 2E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \cdot \sin(\omega t)$$

$$H_{1y}(z, t) = 2\frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z) \cdot \cos(\omega t)$$

|   |  |
|---|--|
| $H_{\max}$ und $E_{\min}$ bei $n \cdot \lambda/2$ | $H_{\min}$ und $E_{\max}$ bei $(2n - 1) \cdot \lambda/4$ |
|---|--|

### 4.6.5 Stehwellenverhältnis (SWR)

$$SWR = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

## 4.7 Schräger Einfall (allgemein)

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

### 4.7.1 Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

### 4.7.2 Totalreflexion/Grenzwinkel

Grenzwinkel  $\theta_g$  gibt an, bis zu welchem Winkel eine Welle von höherem in kleineres Dielektrikum  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  eindringen kann.  $\rightarrow$  Brechungsgesetz beachten!

|   |   |
|---|---|
| (1) $\theta_g = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$ | (2) $\theta_g = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$ |
|---|---|

(1): bei *senkrechter* transmittierter Welle  $\theta_t = \sin 90^\circ$

(2): bei *senkrechter* einfallender Welle  $\theta_h = \sin 90^\circ$

### 4.7.3 Brewster-/Polarisationswinkel

Bei Brewster-Winkel  $\theta_b$  wird Reflexionsfaktor  $r = 0$ .

- **Parallele Polarisation:** rechts:  $\mu_{r1} = \mu_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Brewster-Winkel existiert nur bei  $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$ .

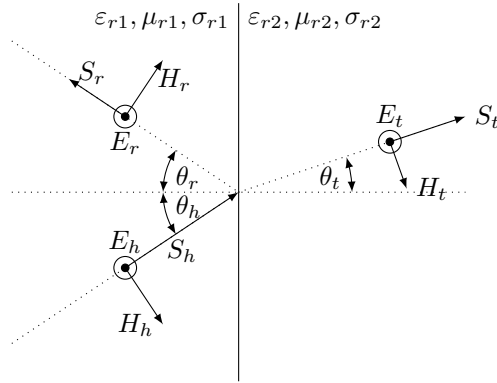
- **Senkrechte Polarisation:** rechts:  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

Brewster-Winkel existiert nur bei  $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$ .

Bei  $\mu_{r1} = \mu_{r2} \rightarrow r \neq 0$  keine Reflexionsfreiheit!

## 4.7.4 Senkrechte Polarisation



$\vec{E}$ -Feld senkrecht,  $\vec{H}$ -Feld parallel.  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$Z_{F0} = 120\pi \Omega \quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r(n)}}} \quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

Brechungsgesetz: mit  $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

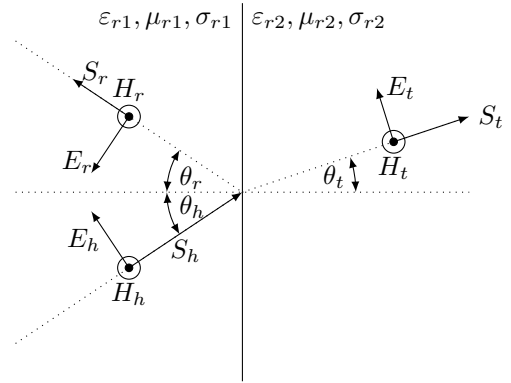
Fresnelsche Formeln:

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h} \\ t_{es} &= \frac{2Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i} \\ &= 1 + r_s \\ t_{ms} &= \frac{2Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot t_{es} \end{aligned}$$

Beziehungen Polarisation

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h & E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h & E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h & H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h & H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} & E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} & E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

## 4.7.5 Parallele Polarisation



$\vec{E}$ -Feld parallel,  $\vec{H}$ -Feld senkrecht.  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

Stücke:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in die selbe Richtung!  
Sattler:  $\vec{H}_h$  und  $\vec{H}_r$  zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

Fresnelsche Formeln (Stücke):

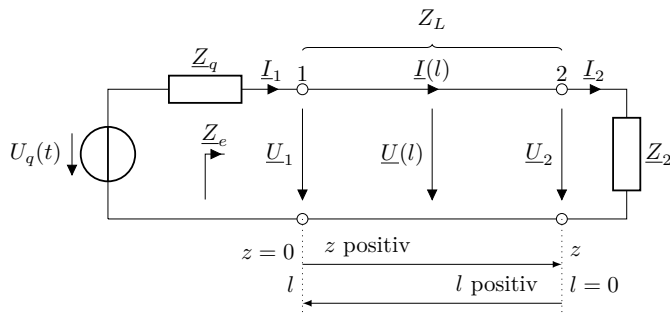
$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} \\ &= \frac{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h - Z_{F2} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\varepsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}}{\varepsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}} \\ t_{ep} &= \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cdot t_{mp} \\ t_{mp} &= \frac{2Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \end{aligned}$$

Fresnelsche Formeln (Sattler):

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} & &= -r_{p,[\text{Stücke}]} \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t} \\ t_{ep} &= \frac{2Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 + r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ t_{mp} &= 1 - r_p = \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{ep} \end{aligned}$$

## 5 Leitungen

### 5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang:  $\underline{Z}_e$  Anfang:  $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$  Abschluss:  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}(l=0)$   
Referenzpunkt **Last** ( $l = 0$ ):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

#### 5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{I}_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer  $\gamma$  nicht im TR berechenbar:

Lösung:  $\alpha l$   $\left[ \frac{\text{NP}}{\text{m}} \right]$  und  $\beta l$   $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$  einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$ : Dämpfung  $e^{\pm j\beta l}$ : Phase ( $\angle$  im TR)

Für Winkel  $\alpha l$  bzw.  $\beta l$  auf **RAD** in TR!

#### 5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer  $\underline{Z}_L$  nicht in TR berechenbar:

**Betrag:** erst  $\underline{Z}_L^2$ , dann  $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$  ermitteln.

**Phase:**  $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \gamma$  analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor:  $r(l) \hat{=} r_1$ : Leitungsanfang

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens  $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e$  am Leitungsende:

mit Kurzschluss  $\underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$

im Leerlauf  $\underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$

beliebige Länge  $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$

#### 5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung  $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung  $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$

Abschluss egal, es wird nur  $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$  gemessen.

## 5.2 Verlustlose Leitung

### 5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \approx f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{LC}}$$

### 5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi \quad \Psi \text{ in RAD!}$$

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$



### 5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tan(\beta l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sin(\beta l) \right]$$

Für Beträge/Amplitudenwerte:  $\left| \frac{\underline{U}}{\underline{U}_2} \right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$ .  
Bildung einer Stehenden Welle!

### 5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = 0 \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r \quad \underline{I}_h = \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_L \cdot j \tan(\beta l) \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 \underline{Z}_L \cdot j \sin(\beta l)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{\underline{Z}_L}$$

### 5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = \infty \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r \quad \underline{U}_h = \underline{U}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j \frac{\underline{Z}_L}{\tan(\beta l)} \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{U}_2 = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot j \sin(\beta l)$$

### 5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$  aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_L} \rightarrow \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine  $\lambda/4$ -Leitung transformiert:  $L \leftrightarrow C$ ,  
Kurzschluss  $\leftrightarrow$  Leerlauf, **großes**  $R \leftrightarrow$  **kleines**  $R$

### 5.2.7 Angepasste (reflexionsfreie) Leitung

Eingangswiderstand  $\underline{Z}_1 \approx$  Leitungslänge, rein reell!  
Nur hinlaufende Welle, **reflexionsfrei**!

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}(l) \quad r_A = 0 \quad \text{SWR} = 1$$

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h \cdot e^{j\beta z} \quad \underline{I}(z) = \underline{I}_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \cdot e^{j\beta z}$$

### 5.2.8 Ohmscher Abschluss an Leitungsende

$r_2 \rightarrow$  rein reell!

$$R_A > Z_L \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$R_A < Z_L \rightarrow \theta_r = \pi$$

$$\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

### 5.2.9 Position von Extrema

bei beliebigen Abschlüssen/Lasten!  $\rightarrow$  stehende Welle!

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\Psi_r}} \rightarrow \Psi_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$  Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$  Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\min/\max} = \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$z_{\min} = \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}}$$

$$z_{\max} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}$$

### 5.2.10 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

### 5.2.11 Stehwellenverhältnis (SWR)

Smith-Chart: Kap. 6.1 VSWR: Kap. 7.4

$$s = \text{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

$$m = \text{SWR}^{-1} = \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_2| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

### 5.2.12 Leistung

$$P_A = P_H - P_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2)$$

$$= P_{\max} \cdot (1 - r^2)$$

$$= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*$$

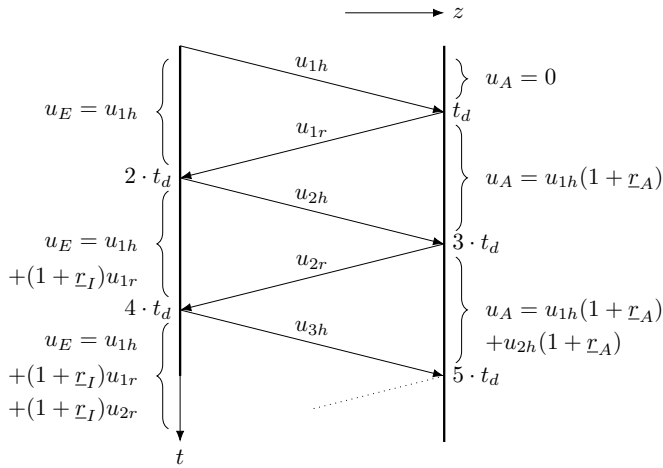
$$P_V = P_q - P_A$$

$$\underline{I}(z) = \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z$$

### 5.2.13 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

### 5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

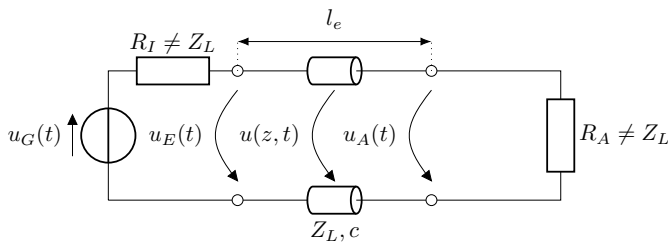


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



Reflexionsfaktor Leitungsanfang:  $r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

Reflexionsfaktor Leitungsende:  $r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Hinlaufende Welle:  $u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$

Signallaufzeit:  $t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{l}{v_p}$

## 5.4 Leitungsparameter

### 5.4.1 Allgemein

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!**  
**Länge verdoppeln!!!**

### 5.4.2 Streifenleitung / Parallele Platten

Für Sinus-Anregung:

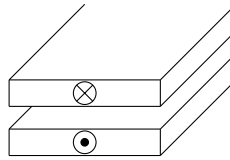
$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{b \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \rightarrow H = \frac{I_0}{b} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

b: Plattenbreite

d: Abstand zwischen den Platten



$$R' = \frac{2}{\delta \kappa b} \left[ \frac{\Omega}{m} \right] \quad L' = \frac{\mu d}{b} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\kappa b}{d} \left[ \frac{S}{m} \right] \quad C' = \frac{b\epsilon}{d} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

### 5.4.3 Doppelleitung

$\kappa$ : Leitwert des Dielektrikums  $\kappa_L$  Leitwert des Leiters

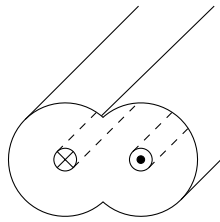
r: Leiterradius d: Abstand zw. Leitermitten

$$R' = \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L} \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

$$L' = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\pi \kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{S}{m} \right]$$

$$C' = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[ \frac{F}{m} \right]$$



### 5.4.4 Koaxialleitung

Mit Hin- und Rückleiter.  $r_i$ : Innenradius  $r_a$ : Außenradius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{U}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\hat{I}}{2\pi r} \right)^2 \cdot Z_{F0}$$

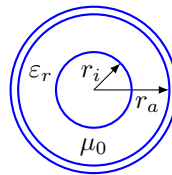
$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$R' = \frac{1}{2\pi \delta \kappa_L} \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i} \right) \left[ \frac{\Omega}{m} \right]$$

$$L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \left[ \frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{2\pi \kappa}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{S}{m} \right]$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \left[ \frac{F}{m} \right]$$



**Dielektrische Dämpfungsverluste:** für sehr hohe f

$$G \ll \omega C, \quad \tan \delta = (G/\omega C) < 0,1$$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

## 6 Smith-Diagramm

## 6.1 Allgemein

### 6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

### 6.1.2 Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l) = \underline{r} \quad \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$$

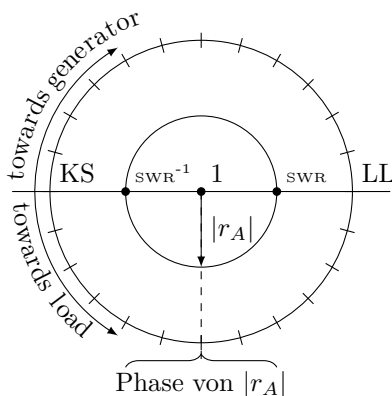
Immer gültig, auch ohne Quelle!

$$\begin{aligned} \underline{r} &= r_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0+2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ r_2 &= \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} = \frac{U_2 - I_2 Z_L}{U_2 + I_2 Z_L} \\ \underline{z}_n &= \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \end{aligned}$$

### 6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von  $m \rightarrow$  Werte von  $\operatorname{Re}\{z_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \quad |r| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m}$$



$$\begin{aligned} z_n &= \frac{Z_n}{Z_L} \\ r_n &= \frac{Z_n - Z_L}{Z_n + Z_L} = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n} \\ m &= \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \\ s &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

## 6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von  $\underline{z}_n$  um Mittelpunkt ergibt  $\underline{y}_n$ . (Phase  $\pm 180^\circ / \pm \pi$ )

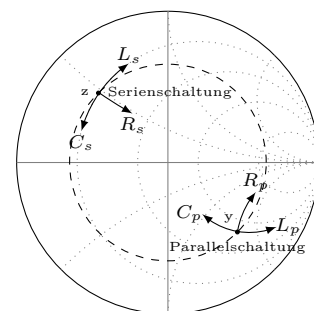
### 6.3 Lastseite → Quelle

1.  $Z_L = Z_B$  ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L}$$

4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch  $z_n$ s nach außen  
Ablesen und Notieren:  
→ Relative Länge  $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$   
→ Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichnen  
Ablesen und Notieren:  
→ **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse  
→ **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse  
→  $r$  abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen  
Ablesen und Notieren:  
→ Relativer Winkel
8. Wenn  $\alpha \neq 0$   
→ Dämpfung ausrechnen → Um Faktor nach innen skalieren
9. Dieser Punkt ist  $z_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen

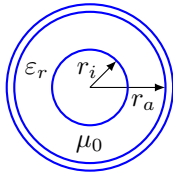
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



## 7 Wellenleiter

### 7.1 Koaxial Leiter

#### 7.1.1 Wellenwiderstand



$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

#### 7.1.2 Dämpfung

Hin- und Rückleiter!

**Ohmsche Verluste**  $R \ll \omega L$

$$\alpha_L = \frac{\sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}}}{120\Omega} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

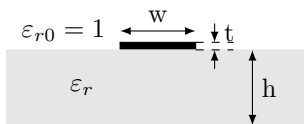
Dämpfungsminimum für  $\frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} = 1$

bei vorgegebenen Außendurchmesser:  $\frac{D}{d} = 3,59$

**Dielektrische Verluste**  $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

### 7.2 Mikrostreifenleiter



$w$  := Leiterbahnbreite

$h$  := Substratbreite

#### 7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit  $\rightarrow$  Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer  $\frac{w}{h}$  desto mehr nähert sich  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  an  $\epsilon_r$  und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)$$

#### 7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

### 7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

### 7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Mismatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

### 7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$  := Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes  $B \cdot l$  wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes  $B \cdot l$ , keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit  $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[ \frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

## 8 Antennen

### 8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

#### 8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da  $E$  zu  $H$  90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**,  $\vec{S}$  nach außen somit Kugelwelle

mit  $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left( \frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.1.5 Strahlungswiderstand

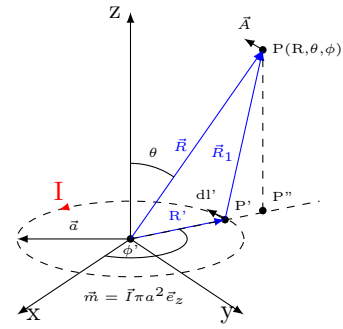
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

#### 8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

## 8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

#### 8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

## 8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

### 8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

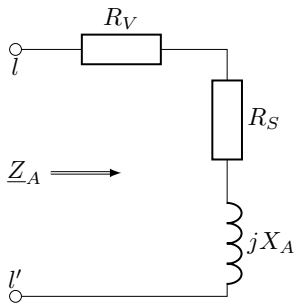
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left( \cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi \end{aligned}$$

## 8.4 Antennenkenngrößen



$Z_A$  := Antennenimpedanz  
 $R_V$  := Verlustwiderstand  
 $R_S$  := Strahlungswiderstand  
 $X_A$  := Antennenblindwiderstand  
 $D$  := Directivity/Richtfaktor  
 $G$  := Gain/Gewinn  
 $A_{eff}$  := Wirksame Antennenfläche

### 8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

### 8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

### 8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

### 8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$  isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\varphi, \vartheta)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

### 8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

### 8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

### 8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

## 8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit  $P_0$  : Eingangsleistung der Antenne

### G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

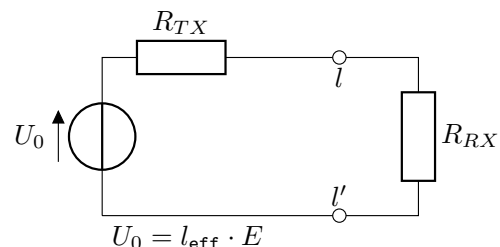
### EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

### ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

## 8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \\ A_{\text{eff}}(\theta) &= G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta \\ P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\ &= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

### 8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$\begin{aligned}F &= \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1] \\ a_0 &= 20 \lg \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left( \frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]\end{aligned}$$

### 8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$\begin{aligned}L &= 10 \lg \left( \frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}] \\ L_{RX} &= L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]\end{aligned}$$

## 8.7 Antennentabelle

| Antennenart   | Darstellung, Belegung | Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)           | wirksame Antennenfläche                     | effektive Höhe                       | Strahlungs-Widerstand                                | vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich) | horizontales Richtdiagramm |
|---|-----------------------|---|---|--------------------------------------|--|---|----------------------------|
| isotrope Antenne  | fiktiv                | 1; (0 dB)                                     | $\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$    | —                                    | —  |   |                            |
| Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität                            |                       | 1,5; (1,8 dB)                                 | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$   | $l$                                  | $80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$     |   |                            |
| kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$ |                       | 3; (4,8 dB)                                   | $\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$  | $h$                                  | $160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$    |   |                            |
| kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$                   |                       | 3; (4,8 dB)                                   | $\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$  | $\frac{h}{2}$                        | $40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$     |   |                            |
| $\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene                            |                       | 3,28; (5,1 dB)                                | $0,065\lambda^2$                            | $\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$ | $40 \Omega$  |   |                            |
| kurzer Dipol $l \ll \lambda$  |                       | 1,5; (1,8 dB)                                 | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$   | $\frac{l}{2}$                        | $20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$     |   |                            |
| $\lambda/2$ -Dipol  |                       | 1,64; (2,1 dB)                                | $0,13\lambda^2$                             | $\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$  | $73 \Omega$  |   |                            |
| $\lambda$ -Dipol  |                       | 2,41; (3,8 dB)                                | $0,19\lambda^2$                             | $\gg \lambda$                        | $200 \Omega$   |   |                            |
| $\lambda/2$ -Schleifendipol   |                       | 1,64; (2,1 dB)                                | $0,13\lambda^2$                             | $\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$ | $290 \Omega$   |   |                            |
| Schlitzantenne in Halbraum strahlend                                |                       | 3,28; (5,1 dB)                                | $0,26\lambda^2$                             | —                                    | $\approx 500 \Omega$                                 |   |                            |
| kleiner Rahmen, $n$ -Windungen, beliebige Form                      |                       | 1,5; (1,8 dB)                                 | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$   | $\frac{2\pi n A}{\lambda}$           | $\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$            |   |                            |
| Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$                       |                       | 1,5; (1,8 dB)                                 | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$   | $\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$ | $19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$ |   |                            |
| Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$                        |                       | $\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$       | $\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$ | —                                    | —  |   |                            |
| Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$                        |                       | $\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$       | $\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$       | —                                    | —  |   |                            |
| einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$          |                       | $\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$ | $ab$  | —                                    | —  |   |                            |
| Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren                                   |                       | $\approx 5 \cdot 10 / l \lambda$              | —   | —                                    | —  |   |                            |



## 9 Einheiten

| Symbol           | Größe                         | Einheit  |
|------------------|-------------------------------|--|
| A, W             | Arbeit, Energie               | J = VAs = Ws   |
| $\vec{A}$        | mag. Vektorpotenzial          | $\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$ |
| $\vec{B}$        | mag. Flussdichte              | $T = \frac{Vs}{m^2}$   |
| C                | Kapazität                     | $F = \frac{As}{V}$   |
| $\vec{D}$        | dielek. Verschiebung/Erregung | $\frac{As}{m^2}$   |
| e, q, Q          | (Elementar-)ladung            | C = As   |
| $\vec{E}$        | elek. Feldstärke              | $\frac{V}{m}$  |
| $\vec{H}$        | mag. Feldstärke/Erregung      | $\frac{A}{m}$  |
| $\vec{J}$        | Stromdichte                   | $\frac{A}{m^2}$  |
| $\vec{J}_F$      | Flächenstromdichte            | $\frac{A}{m}$  |
| $\vec{M}$        | Drehmoment                    | J = Nm = VAs   |
| F                | Kraft                         | $\frac{kgm}{s} = N$  |
| $R_{mag}$        | mag. Widerstand               | $\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$   |
| $\vec{S}$        | Poynting-Vektor               | $\frac{W}{m^2}$  |
| Z                | Wellenwiderstand              | $\Omega$   |
| $\delta_s$       | Eindringtiefe                 | m  |
| $\varepsilon$    | Dielektrizitätskonstante      | $\frac{As}{Vm}$  |
| $\varphi$        | elek. Skalarpotenzial         | V  |
| $\varphi_m$      | mag. Skalarpotenzial          | A  |
| $\rho$           | Raumladungsdichte             | $\frac{As}{m^3}$   |
| $\rho$           | spez. Widerstand              | $\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$                                    |
| $\kappa, \sigma$ | elek. Leitfähigkeit           | $\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$   |
| $\lambda$        | Wellenlänge                   | m  |
| $\mu$            | Permiabilitätskonstante       | $\frac{Vs}{Am}$  |
| $\Phi_e$         | elek. Fluss                   | C = As   |
| $\Phi_m$         | mag. Fluss                    | $Wb = \frac{T}{m^2}$   |