



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

# FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

22. Januar 2023

Lizenz:

GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1	title . . . . .	1
1.2	Differentialoperatoren . . . . .	1
1.2.1	Rechenregeln . . . . .	1
1.2.2	Spezielle Vektorfelder . . . . .	1
1.3	Vektorrechnung . . . . .	1
1.3.1	Betrag, Richtungswinkel, Normierung . . . . .	1
1.3.2	Skalarprodukt . . . . .	1
1.3.3	Kreuzprodukt . . . . .	1
1.4	Logarithmische Maße/Pegel . . . . .	1
1.4.1	Rechnen mit Pegeln . . . . .	2
1.5	Umrechnung der KOS . . . . .	2
1.6	Kartesishe Koordinaten . . . . .	3
1.7	Zylinderkoordinaten . . . . .	3
1.8	Kugelkoordinaten . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Maxwell-Gleichungen</b>	<b>5</b>
2.1	Integralsätze . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Felder</b>	<b>6</b>
3.1	Elektrostatik . . . . .	6
3.1.1	Potential-/Poisson-Gleichung . . . . .	6
3.1.2	Randwertprobleme, -bedingungen (RB) . . . . .	6
3.1.3	Green'sche Funktionen . . . . .	6
3.1.4	Elektrischer Dipol . . . . .	6
3.2	Magnetostatik . . . . .	6
3.2.1	Vektorpotential . . . . .	6
3.2.2	Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte . . . . .	6
3.2.3	Biot-Savart-Gesetz . . . . .	7
3.2.4	Magnetischer Dipol . . . . .	7
3.3	Quasistationäre Felder (Wechselstrom) . . . . .	7
3.3.1	Komplexe Feldgrößen . . . . .	7
3.3.2	Skineffekt . . . . .	7
3.3.3	Näherungen für Skineffekt . . . . .	7
3.4	E-Felder an Grenzflächen . . . . .	8
3.4.1	Dielektrische Grenzfläche . . . . .	8
3.4.2	Grenzfläche Dielektrikum-Leiter . . . . .	8
3.4.3	Grenzfläche an magn. Feldern . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Wellen</b>	<b>9</b>
4.1	Ausbreitung . . . . .	9
4.1.1	Allgemein . . . . .	9
4.1.2	Im leeren Raum(Vakuum) . . . . .	9
4.1.3	Im verlustlosen/idealen Dielektrika . . . . .	9
4.1.4	Im Dielektrika mit geringem Verlust . . . . .	9
4.1.5	Im guten Leiter . . . . .	9
4.2	Übergang . . . . .	10
4.2.1	Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust . . . . .	10
4.3	Poyntingvektor . . . . .	10
4.3.1	Leistung . . . . .	10
4.3.2	Leistung nach Dämpfung . . . . .	10
4.3.3	Leistung vom Kabel transportiert . . . . .	10
4.4	d'Alembertsche Gleichung (allg.) . . . . .	10
4.5	Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich) . . . . .	10
4.5.1	Zeitbereich . . . . .	10
4.5.2	Frequenzbereich (harmonisch) . . . . .	10
4.6	Wellenzahl . . . . .	11
4.7	Wellenlänge . . . . .	11
4.8	Phasengeschwindigkeit . . . . .	11
4.8.1	Gruppengeschwindigkeit . . . . .	11
4.9	Polarisation . . . . .	11
4.10	Verlustlose Polarisation . . . . .	11

4.11	Totalreflexion . . . . .	11
4.12	Grenzwinkel . . . . .	11
4.13	Brewster-/Polarisationswinkel . . . . .	11
4.14	Senkrechter Einfall . . . . .	12
4.14.1	Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt. . . . .	12
4.14.2	Spezialfall Medium 1 ist Luft . . . . .	12
4.14.3	Spezialfall Medium 2 ist Luft . . . . .	12
4.14.4	Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch . . . . .	12
4.14.5	Spezialfall Medium 2 idealer Leiter . . . . .	12
4.15	Stehwellenverhältnis . . . . .	12
4.16	Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel) . . . . .	13
4.17	Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht) . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Leitungen</b>	<b>14</b>
5.1	Allgemeine Leitung (mit Verlusten) . . . . .	14
5.1.1	Gleichungen . . . . .	14
5.1.2	Kenngrößen . . . . .	14
5.1.3	Kurzschluss und Leerlauf . . . . .	14
5.1.4	Lange und Kurze Leitung . . . . .	14
5.2	Verlustlose Leitung . . . . .	14
5.2.1	Kenngrößen . . . . .	14
5.2.2	verlustloser Reflexionsfaktor . . . . .	14
5.2.3	Beliebiger Abschluss (Last) . . . . .	15
5.2.4	Kurzschluss an Leitungsende . . . . .	15
5.2.5	Leerlauf an Leitungsende . . . . .	15
5.2.6	Leitung als Impedanz-Transformator . . . . .	15
5.2.7	Vorgehen Eingangswiderstand . . . . .	15
5.2.8	Stehwellenverhältnis . . . . .	15
5.2.9	Leistung . . . . .	15
5.2.10	Gleichspannungswert (=Endwert) . . . . .	15
5.2.11	Position von Extrema . . . . .	15
5.2.12	Spezialfall: Angepasste Leitung . . . . .	15
5.2.13	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung . . . . .	16
5.3	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung . . . . .	16
5.4	Kettenmatrix einer Leitung . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Smith-Diagramm</b>	<b>17</b>
6.1	Allgemein . . . . .	17
6.1.1	Normierte Impedanz . . . . .	17
6.1.2	Reflexionsfaktor . . . . .	17
6.1.3	Anpassungsfaktor . . . . .	17
6.2	Impedanz/Admetanz umrechnen . . . . .	17
6.3	Von Last zu Quelle . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>18</b>
7.1	Koaxial Leiter . . . . .	18
7.1.1	Wellenwiderstand . . . . .	18
7.1.2	Dämpfung . . . . .	18
7.2	Mikrostreifenleiter . . . . .	18
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl . . . . .	18
7.2.2	Schmale Streifen . . . . .	18
7.2.3	Breite Streifen . . . . .	18
7.3	Hohlleiter . . . . .	18
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss . . . . .	18
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser . . . . .	18
7.6	Leitungsparameter . . . . .	18
7.6.1	Parallele Platten . . . . .	19
7.6.2	Doppelleitung: . . . . .	19
7.6.3	Koaxial Leitung . . . . .	19

<b>8</b>	<b>Antennen</b>	<b>20</b>
8.1	Herz'scher Dipol . . . . .	20
8.1.1	Allgemein . . . . .	20
8.1.2	Nahfeld . . . . .	20
8.1.3	Fernfeld . . . . .	20
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .	20
8.1.5	Strahlungswiderstand . . . . .	20
8.1.6	Verlustwiderstand . . . . .	20
8.2	Magnetischer Dipol . . . . .	20
8.2.1	Fernfeld . . . . .	20
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .	20
8.2.3	Nahfeld . . . . .	20
8.3	Lineare Antenne . . . . .	20
8.3.1	Dipolantenne . . . . .	21
8.4	Antennenkenngrößen . . . . .	21
8.4.1	Abgestrahlte Leistung . . . . .	21
8.4.2	Verlustleistung . . . . .	21
8.4.3	Wirkungsgrad . . . . .	21
8.4.4	Richtcharakteristik . . . . .	21
8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor . . . . .	21
8.4.6	Gewinn . . . . .	21
8.4.7	Wirksame Antennenfläche . . . . .	21
8.5	Bezugsantennen . . . . .	21
8.6	Senden und Empfangen . . . . .	21
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß . . . . .	22
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel . . . . .	22
8.7	Antennentabelle . . . . .	23
<b>9</b>	<b>Einheiten</b>	<b>24</b>

# 1 Grundlagen

## 1.1 title

## 1.2 Differentialoperatoren

### Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

### Divergenz

div: Vektorfeld  $\rightarrow$  Skalar  
Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

### Rotation

rot: Vektorfeld  $\rightarrow$  Vektorfeld  
Wirbeldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix}$$

### Gradient

grad: Skalarfeld  $\rightarrow$  Vektor/Gradientenfeld  
zeigt in Richtung steilster Anstieg von  $\phi$

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

### 1.2.1 Rechenregeln

$\phi, \psi$ : Skalarfelder  $\vec{A}, \vec{B}$ : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

### 1.2.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Vektorpotential  $\vec{E}$

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F} \rightarrow$  Skalarpotential  $\phi$

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad } \phi) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

## 1.3 Vektorrechnung

### 1.3.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

#### Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

#### Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

#### Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

### 1.3.2 Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \cos(\varphi) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

### 1.3.3 Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} A_{Para} &= |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

## 1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße  $F_n$ : Spannung, Strom,  $\vec{E}$ -,  $\vec{H}$ -Feld, Schalldruck

Leistungsgröße  $P_n$ : Energie, Intensität, Leistung

Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- **Dämpfungsmaß**  $a$  in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$$\begin{aligned} 1 \text{ dB} &= 0,1151 \text{ Np} & 1 \text{ Np} &= 8,686 \text{ dB} \\ a [\text{dB}] &= 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} & a [\text{dB}] &= 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{F_1}{F_2} &= 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20}} & \frac{P_1}{P_2} &= 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10}} \\ a [\text{Np}] &= \ln \frac{F_1}{F_2} & a [\text{Np}] &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{F_1}{F_2} &= e^{a[\text{Np}]} & \frac{P_1}{P_2} &= e^{2a[\text{Np}]} \end{aligned}$$

- **absolute Pegel**  $L$  mit Bezugsgrößen  $P_0, F_0$

$$\begin{aligned} L [\text{dB}] &= 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} & L [\text{dB}] &= 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0} \\ \frac{F_1}{F_0} &= 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20}} & \frac{P_1}{P_0} &= 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10}} \end{aligned}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1 \text{ mW}$	$L_{P/\text{mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1 \text{ W}$	$L_{P/\text{W}}$
dBV, dB(V)	$F_0 = 1 \text{ V}$	$L_{U/\text{V}}$
dBμV, dB(μV)	$F_0 = 1 \mu\text{V}$	$L_{U/\mu\text{V}}$
dBμA, dB(μA)	$F_0 = 1 \mu\text{A}$	$L_{I/\mu\text{A}}$
dB(μV/m)	$F_0 = 1 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$	$L_{E/(\mu\text{V/m})}$
dB(μA/m)	$F_0 = 1 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$	$L_{H/(\mu\text{A/m})}$

• **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße $P_n$	Feldgröße $F_n$
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

• **relativer Pegel / Maß**

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert  $P_0$

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$$

**1.4.1 Rechnen mit Pegeln**

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis):  $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor}) \quad \text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$$

**1.5 Umrechnung der KOS**

Kart.	Zyl.	Kug.
$x$	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
$y$	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
$z$	$z$	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$r$	
$\arctan \frac{y}{x}$	$\varphi$	
$z$	$z$	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	$dr$	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
$dz$	$dz$	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		$r$
$\arctan \frac{y}{x}$		$\varphi$
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		$\vartheta$
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		$dr$
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

## 1.6 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.7 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.8 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[ \Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$



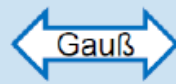
## 2 Maxwell-Gleichungen

### differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

**Gaußsches Gesetz:** Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung  $Q$  bzw. die Ladungsdichte  $\rho$  ist Quelle des elektrischen Feldes.

### Integralform

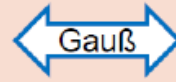


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.  
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Induktionsgesetz:** Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  einer Fläche  $A$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**Amperesches Gesetz:** Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  der Fläche  $A$  entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

### Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

### Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

### Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind  $\epsilon$  u.  $\mu$  Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

## 2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich  $\rightarrow$  nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

### 3 Felder

#### Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[ \frac{A}{m^2} \right] \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = [T] \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Verkopplung von  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder über  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$ .

#### Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

### 3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder  $\rightarrow$  Gradientenfeld  $\rightarrow$  elek. Ladungen sind Quellen des  $\vec{E}$ -Feldes (Skalare Potenzialfkt.  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = 0 &= \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

#### 3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\varepsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

#### 3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

**Dirichlet-RB:** Gesuchte Potenzialfunktion  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.:  $\rho_r = 5V$ )

**Neumann-RB:** Die Normalenableitung  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  der Fkt.  $\varphi$  nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

#### 3.1.3 Green'sche Funktionen

##### • Skalarpotential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

##### • E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

##### • D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

• **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung mit  $\varphi(\infty) = 0$

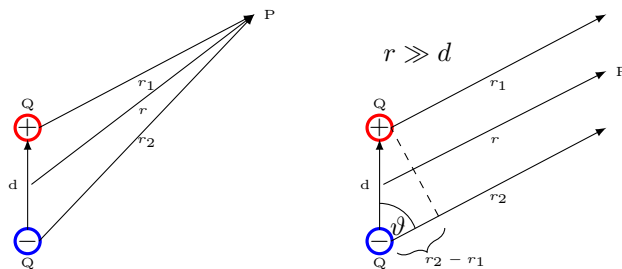
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

#### 3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment  $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

### 3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole:  $\text{div } \vec{B} = 0$ .

Skalarpotential  $\varphi_m$  existiert, wenn  $\vec{H}$  wirbelfrei ist:

$\text{rot } \vec{H} = 0$ , wenn  $\vec{J} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 = \text{div rot } B & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

#### 3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential  $\varphi$ .

**Coulomb-Eichung**, wenn  $\text{div } \vec{A} = 0$ , gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

#### 3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

### 3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

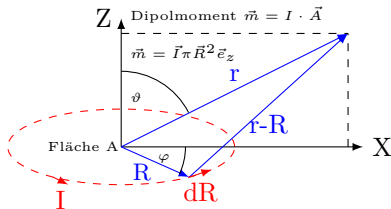
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit  $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$ : Aufpunkt  $\vec{r}'$ : Quellpunkt

### 3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

## 3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium:  $\varepsilon, \mu, \kappa = \text{konst.}$

Leiter ist quasineutral:  $\rho = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

### 3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexe Amplitude / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

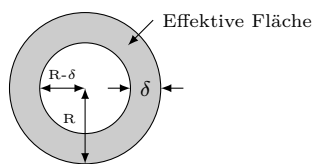
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

### 3.3.2 Skineffekt



$$[\sigma/\kappa]: \text{Leitfähigkeit} \quad \frac{A}{V_m} = \frac{1}{\Omega m}$$

**Eindringtiefe**/Äquivalente Leiterschichtdicke  
(Abfall der Amplitude:  $A_0 \cdot \frac{1}{e}$ ):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

**Feldstärke** verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für E-Feld

**Amplitude** und **Phase** bezogen auf  $\delta$ :

Amplitude:  $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$

Dämpfung:  $\alpha = \frac{1}{\delta}$  Phase:  $\varphi = -\frac{x}{\delta}$

**Leistung** verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

**Rundleiter - Effektive Fläche:**

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left( R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

### 3.3.3 Näherungen für Skineffekt

$$\text{Rundleiter: } R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$$

**Geometrische** Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left( \frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} \right)^4 & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

**Bessel-Funktion** (Fehler < 6%):

$$\begin{aligned} \frac{R_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \\ \frac{X_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \hat{=} \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

**Empirische** Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left( \frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1)  $\hat{=}$  Kreisring mit Näherung (2)  $\hat{=}$  Ring mittig

### 3.4 E-Felder an Grenzflächen

#### 3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

**Querschichtung:**

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem  $\varepsilon$ .

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem  $\varepsilon$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

#### 3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht.  $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

**Längsschichtung:**

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

**Querschichtung:**

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

#### 3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

**Querschichtung:**

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem  $\mu$ .

**Längsschichtung:**

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem  $\mu$ .

**Schrägschichtung:**

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## 4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner  $c_0$
- raumzeitlicher Vorgang  $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  Einheit [S] =  $\frac{W}{m^2}$   
Falls  $\vec{E} \perp \vec{H}$  und  $\vec{S} \perp \vec{E}$  und  $\vec{S} \perp \vec{H}$

### Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von  $\vec{E}(z, t)$ )

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante  $\gamma$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$\alpha$  : Dämpfungskonstante [Np/m]

$\beta$  : Phasenkonstante [rad/m]

$v_p$  : Phasengeschwindigkeit [m/s]

$v_g$  : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

$\lambda$  : Wellen [m]

## 4.1 Ausbreitung

### 4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

### 4.1.2 Im leeren Raum (Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

### 4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos:  $\sigma = 0$ , maximale Wirkleistung  
 $Z_F$  rein reel  $\rightarrow$  ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

### 4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust:  $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left( 1 + \frac{j\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$$

### 4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust:  $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

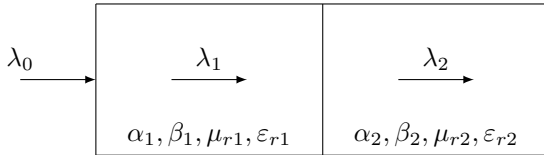
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

## 4.2 Übergang

### 4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

## 4.3 Poyntingvektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$
Leistungsflussdichte $S_{av} =  \vec{S}_{av} $	

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S_{AV} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$= \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

### 4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$w_e = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$w_e = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$

### 4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

### 4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

## 4.4 d'Alambertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter  $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

## 4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \underline{\vec{E}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{E}} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

### 4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

### 4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} i = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

keine Raumladung  $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{H}$$

## 4.6 Wellenzahl

Im Vakuum:  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

## 4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$

$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

## 4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium} \leq c_0}$$

### 4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

$$\downarrow$$

$$E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

## 4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	$H$ oder $E$
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

## 4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

## 4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

## 4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

## 4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

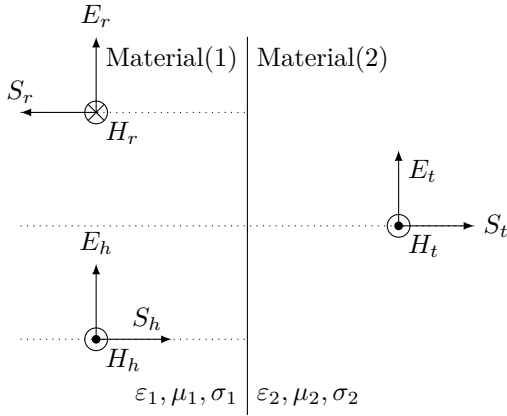
$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

#### 4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$E_{t1} = E_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$

$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

##### 4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2\mu_1}}$$

##### 4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

##### 4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

StehendeWelle

→  $H_{max}$  und  $E_{min}$  bei  $n \cdot \lambda/2$

→  $H_{min}$  und  $E_{max}$  bei  $(2n - 1) \cdot \lambda/4$

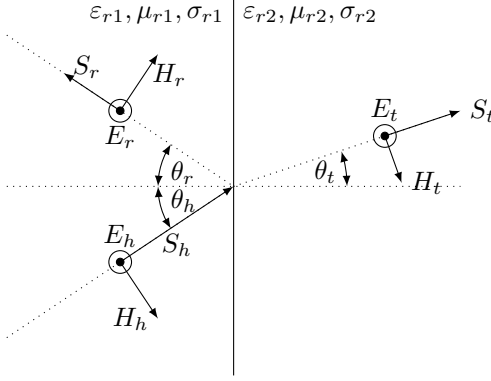
→ 90° Phasenverschiebung

#### 4.15 Stehwellenverhältnis

$$SWR = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$



#### 4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

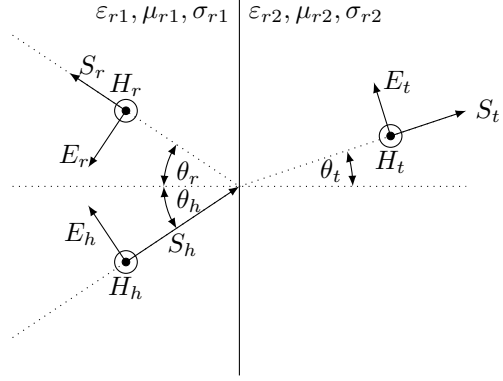
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

#### 4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

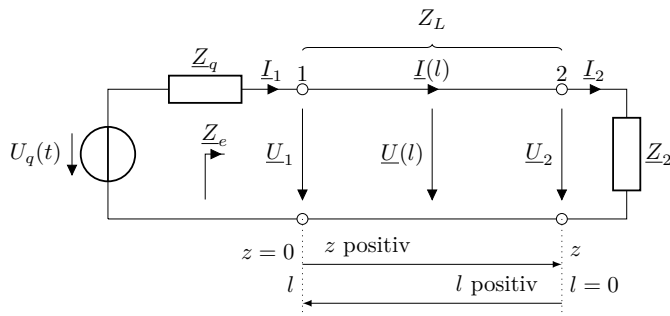
- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

## 5 Leitungen

### 5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang:  $\underline{Z}_e$  Anfang:  $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$  Abschluss:  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}(l=0)$   
Referenzpunkt **Last** ( $l = 0$ ):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

#### 5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{I}_2 \cdot \left[ \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer  $\gamma$  nicht im TR berechenbar:

Lösung:  $\alpha l$   $\left[ \frac{\text{NP}}{\text{m}} \right]$  und  $\beta l$   $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$  einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$ : Dämpfung  $e^{\pm j\beta l}$ : Phase ( $\angle$  im TR)

Für Winkel  $\alpha l$  bzw.  $\beta l$  auf **RAD** in TR!

#### 5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer  $\underline{Z}_L$  nicht in TR berechenbar:

**Betrag:** erst  $\underline{Z}_L^2$ , dann  $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$  ermitteln.

**Phase:**  $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \underline{\gamma}$  analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[ \frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor:  $r(l) \hat{=} r_1$ : Leitungsanfang

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens  $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e$  am Leitungsende:

mit Kurzschluss  $\underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$

im Leerlauf  $\underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$

beliebige Länge  $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$

#### 5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung  $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung  $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$

Abschluss egal, es wird nur  $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$  gemessen.

## 5.2 Verlustlose Leitung

### 5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \neq f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{LC}}$$

### 5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l=0) = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$$

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$

### 5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r & \underline{I}_2 &= \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tan(\beta l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right] \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_2 \cdot \left[ \cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sin(\beta l) \right]\end{aligned}$$

### 5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= 0 & \underline{U}_2 &= \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r & \underline{I}_h &= \underline{I}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_L \cdot j \tan(\beta l) & & \rightarrow \text{rein imaginär!} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 \underline{Z}_L \cdot j \sin(\beta l) \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) & \underline{I}_2 &= \frac{2\underline{U}_h}{\underline{Z}_L}\end{aligned}$$

Bildung einer Stehen

### 5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \infty & \underline{I}_2 &= \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r & \underline{U}_h &= \underline{U}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j \frac{\underline{Z}_L}{\tan(\beta l)} & & \rightarrow \text{rein imaginär!} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) & \underline{U}_2 &= 2\underline{U}_h \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot j \sin(\beta l)\end{aligned}$$

### 5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$  -Leitung mit Eingangswiderstand  $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$  aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_L} \rightarrow \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine  $\lambda/4$  -Leitung transformiert: L  $\leftrightarrow$  C, Kurzschluss  $\leftrightarrow$  Leerlauf, **großes R**  $\leftrightarrow$  **kleines R**

### 5.2.7 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{\underline{R}_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

### 5.2.8 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\begin{aligned}\text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} \\ &= \frac{R_{\max}}{Z_L} \\ \text{SWR}^{-1} &= \frac{R_{\min}}{Z_L} & |r_A| &= \frac{\text{SWR} + 1}{\text{SWR} - 1}\end{aligned}$$

### 5.2.9 Leistung

$$\begin{aligned}P_A &= P_H - P_R \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2) \\ &= P_{\max} \cdot (1 - r^2) \\ &= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ \underline{I}(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z\end{aligned}$$

### 5.2.10 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

### 5.2.11 Position von Extrema

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r}} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$  Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$  Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\begin{aligned}\lambda_{\min/\max} &= \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}} \\ z_{\min} &= \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}} \\ z_{\max} &= \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}} \\ z &= \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}\end{aligned}$$

### 5.2.12 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_L = \underline{Z}(z)$$

$$\underline{r}_A = 0 \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$

$$\text{SWR} = 1$$

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$= \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \cdot e^{j\beta z}$$

### 5.2.13 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

$$\underline{R_A > Z_L} \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

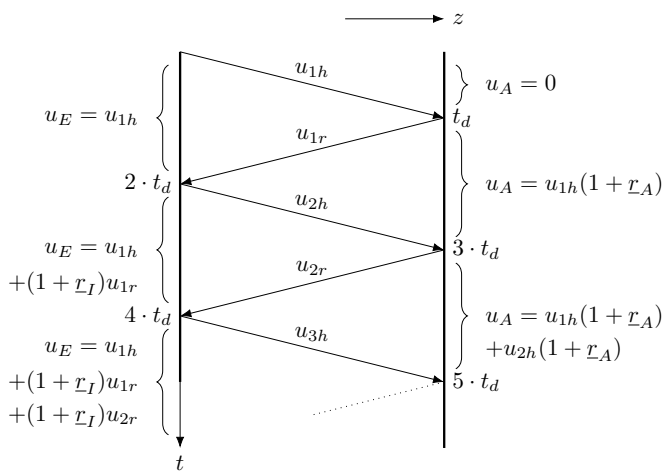
$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$\underline{R_A < Z_L} \rightarrow \theta_r = \pi$$

$$\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

### 5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

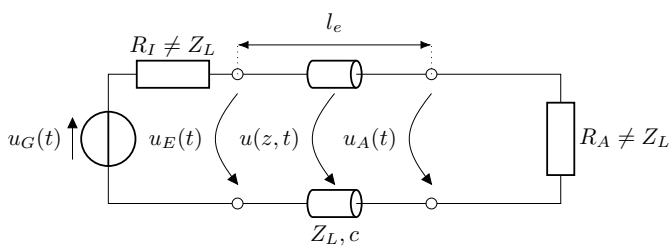


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Hinlaufende Welle } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

$$\begin{aligned} \text{Signallaufzeit: } t_d &= \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \\ &= \frac{l}{v_p} \end{aligned}$$

## 6 Smith-Diagramm

## 6.1 Allgemein

### 6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

### 6.1.2 Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l) = \underline{r} \quad \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$$

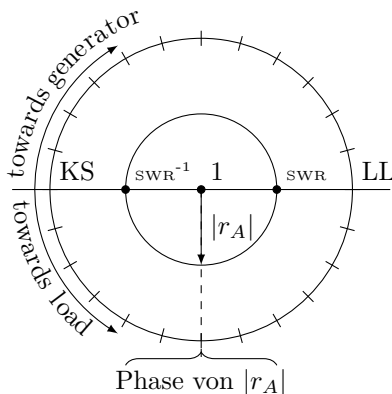
Immer gültig, auch ohne Quelle!

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0+2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ \underline{r}_2 &= \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L} \\ \underline{z}_n &= \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \end{aligned}$$

### 6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von  $m \rightarrow$  Werte von  $\operatorname{Re}\{z_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \quad |r| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m}$$



$$\begin{aligned} z_n &= \frac{Z_n}{Z_L} \\ r_n &= \frac{Z_n - Z_L}{Z_n + Z_L} = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n} \\ m &= \frac{1 - |r|}{1 + |r|} \\ s &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

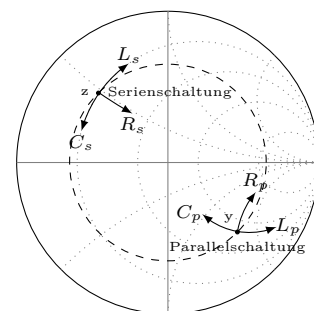
## 6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von  $\underline{z}_n$  um Mittelpunkt ergibt  $\underline{y}_n$ . (Phase  $\pm 180^\circ / \pm \pi$ )

### 6.3 Lastseite → Quelle

1.  $Z_L = Z_B$  ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren
 
$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L}$$
4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch  $\underline{z}_n$  nach außen  
Ablesen und Notieren:  
→ Relative Länge  $[\frac{l}{\lambda}]$   
→ Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichnen  
Ablesen und Notieren:  
→ **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse  
→ **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse  
→  $\underline{r}$  abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen  
Ablesen und Notieren:  
→ Relativer Winkel
8. Wenn  $\alpha \neq 0$   
→ Dämpfung ausrechnen → Um Faktor nach innen spiralisieren
9. Dieser Punkt ist  $\underline{z}_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen

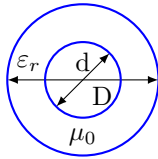
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



## 7 Wellenleiter

### 7.1 Koaxial Leiter

#### 7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser  
d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

#### 7.1.2 Dämpfung

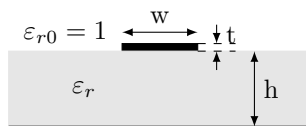
Ohm'sche Verluste  $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste  $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

### 7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite  
h := Substratbreite

#### 7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer  $\frac{w}{h}$  desto mehr nähert sich  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  an  $\epsilon_r$  und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

#### 7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

### 7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

### 7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

### 7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$  := Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes  $B \cdot l$  wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes  $B \cdot l$ , keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit  $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[ \frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

### 7.6 Leitungsparameter

$\sigma$  = Leitwert des Dielektr.       $\sigma_c$  = Leitwert des Leiters

### 7.6.1 Parallele Platten

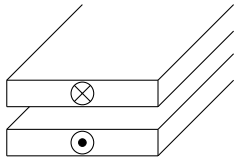
$w$  = Platten Breite       $d$  = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

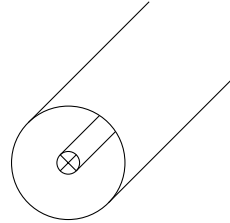
$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$



$R = \frac{2}{w\delta\sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w\varepsilon}{d}$



$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

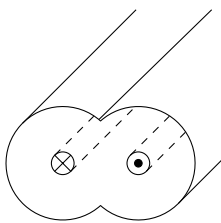
$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!**  
**Länge verdoppeln!!!**

### 7.6.2 Doppelleitung:

$a$  = Leiter Radius       $d$  = Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU → 1; OPTN → 1 → 5



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

### 7.6.3 Koaxial Leitung

$a$  = innen Radius       $b$  = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\hat{I}}{2\pi r} \right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$

## 8 Antennen

### 8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

#### 8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da  $E$  zu  $H$  90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**,  $\vec{S}$  nach außen somit Kugelwelle

mit  $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left( \frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.1.5 Strahlungswiderstand

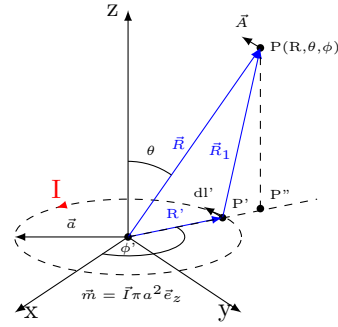
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

#### 8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

### 8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

#### 8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

### 8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$



### 8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

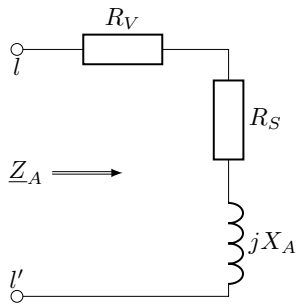
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{Z_{F0} I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left( \cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi \end{aligned}$$

## 8.4 Antennenkenngrößen



$Z_A$  := Antennenimpedanz  
 $R_V$  := Verlustwiderstand  
 $R_S$  := Strahlungswiderstand  
 $X_A$  := Antennenblindwiderstand  
 $D$  := Directivity/Richtfaktor  
 $G$  := Gain/Gewinn  
 $A_{eff}$  := Wirksame Antennenfläche

### 8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

### 8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

### 8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

### 8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$  isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

### 8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

### 8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

### 8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

## 8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit  $P_0$  : Eingangsleistung der Antenne

### G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

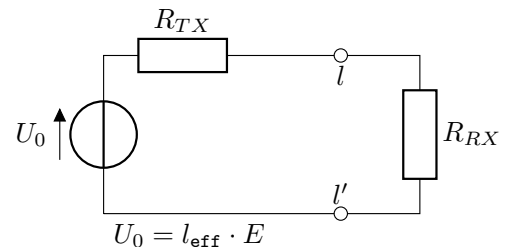
### EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

### ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

## 8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

$$A_{\text{eff}}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\ &= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

### 8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \lg \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left( \frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

### 8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg \left( \frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]$$

## 8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1: (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$l$	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$h$	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28: (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	$40\Omega$		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	$73\Omega$		
$\lambda$ -Dipol		2,41: (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	$200\Omega$		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	$290\Omega$		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28: (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, $n$ -Windungen, beliebige Form		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzchen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 \frac{l}{\lambda}$	—	—		
Zeile aus Hertzchen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 \frac{l}{\lambda}$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	$ab$	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l\lambda$	—	—	—		

## 9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
$\vec{A}$	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
$\vec{B}$	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
$\vec{D}$	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
$\vec{E}$	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$\vec{H}$	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
$\vec{J}$	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
$\vec{M}$	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
$R_{mag}$	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	$\Omega$
$\delta_s$	Eindringtiefe	m
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
$\varphi$	elek. Skalarpotenzial	V
$\varphi_m$	mag. Skalarpotenzial	A
$\rho$	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
$\rho$	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
$\kappa, \sigma$	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\mu$	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
$\Phi_e$	elek. Fluss	$C = As$
$\Phi_m$	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$