OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

Formelsammlung
FWL

Wintersemester 22/23
nach Vorlesung von Prof. Stücke und Prof. Sattler

Erstellt von
Tony Pham und Max Forstner

Name:	Tony Pham
Letzte Änderung:	31. Januar 2023
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Permiabilitätskonstante	μ_0	$\frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{Am}}$
Dilelektrizitätskonstante	ε_0	$\frac{\mathtt{As}}{\mathtt{Vm}}$
elek. Ladung/Fluss	Q, q	$C = As$
elek. Feldstärke	$\vec{E}$	$\frac{\mathtt{V}}{\mathtt{m}}$
elek. Flussdichte	$\vec{D}$	$\frac{\mathtt{As}}{\mathtt{m}^2} = \frac{\mathtt{C}}{\mathtt{m}^2}$
Kapazität	C	$F = \frac{\mathtt{As}}{\mathtt{V}}$
mag. Fluss	ϕ, Φ	$Wb = Vs$
mag. Feldstärke	$\vec{H}$	$\frac{A}{m}$
mag. Flussdichte	$\vec{B}$	$T = \frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{m}^2}$
Induktivität	L	$H = \frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{A}}$
Strahlungsdichte	S_{av}, I	$\frac{\mathtt{W}}{\mathtt{m}^2}$

1.2 Vektorrechnung

1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.2.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

1.2.3 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

1.3 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\varDelta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div (grad)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz div: Vektorfeld → Skalar S.382
Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div}\, \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation rot: Vektorfeld → Vektorfeld S.382
Wirbeldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$

Gradient grad: Skalarfeld → Vektor/Gradientenfeld
zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad}\, \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

1.3.1 Rechenregeln

ϕ, ψ: Skalarfelder $\vec{A}, \vec{B}$: Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla\phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld $\vec{F}$ → Vektorpotential $\vec{E}$

$$\text{div}\, \vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot}\, \vec{E}) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{rot}\, \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$ → Skalarpotential ϕ

$$\text{rot}\, \vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad}\, \phi) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad}\, \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$:

$$\text{rot}\, \vec{F} = 0 \quad \text{div}\, \vec{F} = 0$$

$$\text{div}(\text{grad}\, \phi) = \varDelta\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad}\, \phi$$

$$\text{rot}(\text{rot}\, \vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\, \vec{F}) - \varDelta\vec{F}$$

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n: Spannung, Strom, $\vec{E}$-, $\vec{H}$-Feld, Schalldruck
Leistungsgröße P_n: Energie, Intensität, Leistung
Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte**!

- **Dämpfungsmaß** a in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$$1\,\mathrm{dB} = 0,1151\,\mathrm{Np} \qquad 1\,\mathrm{Np} = 8,686\,\mathrm{dB}$$

$$a\,[\mathrm{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} \qquad a\,[\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\mathrm{dB}]}{20\mathrm{dB}}} \qquad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\mathrm{dB}]}{10\mathrm{dB}}}$$

$$a\,[\mathrm{Np}] = \ln \frac{F_1}{F_2} \qquad a\,[\mathrm{Np}] = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{a[\mathrm{Np}]} \qquad \frac{P_1}{P_2} = e^{2a[\mathrm{Np}]}$$

- **absolute Pegel** L mit Bezugsgrößen P_0, F_0

$$L\,[\mathrm{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \qquad L\,[\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\mathrm{dB}]}{20\mathrm{dB}}} \qquad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\mathrm{dB}]}{10\mathrm{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1mW$	$L_{\mathtt{P/mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1W$	$L_{\mathtt{P/W}}$

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße P_n	Feldgröße F_n
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

- **relativer Pegel / Maß**
  Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\,\mathrm{dB}$$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $\quad x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) - \log(y) \qquad \log\left(\tfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \qquad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

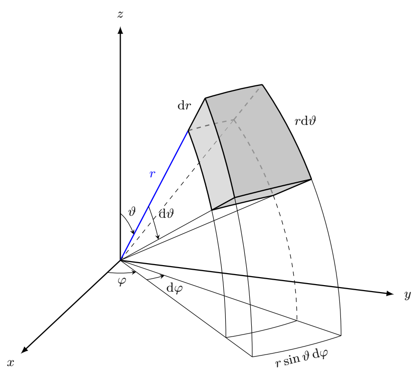
$$\mathtt{Pegel} = 10 \cdot \log(\mathtt{Faktor}) \qquad \mathtt{Faktor} = 10^{\frac{\mathtt{Pegel}}{10}}$$

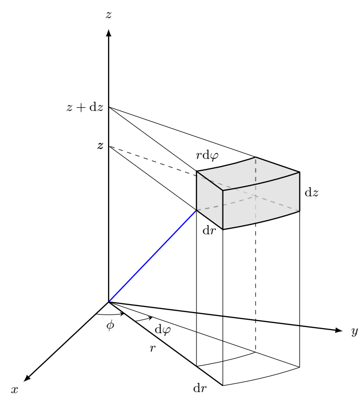
1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Umrechnungstabelle

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r\cos\varphi$	$r\sin\vartheta\cos\varphi$
y	$r\sin\varphi$	$r\sin\vartheta\sin\varphi$
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	r	
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi$	dr	
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$	$rd\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$		r
$\arctan\frac{y}{x}$		φ
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$		ϑ
$dx\sin\vartheta\cos\varphi + dy\sin\vartheta\sin\varphi + dz\cos\vartheta$		dr
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$		$r\sin\vartheta d\varphi$
$dx\cos\vartheta\cos\varphi + dy\cos\vartheta\sin\varphi - dz\sin\vartheta$		$rd\vartheta$

1.5.2 Schema KOS Kugel/Zylinder





1.5.3 Kartesische Koordinaten

Variablen: x, y, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente: $dV = dx\, dy\, dz$

Flächenelemente: $dA_{xy} = dx\, dy\, \vec{e}_z \quad dA_{yz} = dy\, dz\, \vec{e}_x \quad dA_{xz} = dx\, dz\, \vec{e}_y$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; y; z)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z}$

Gradient: $\operatorname{grad} \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$ **Divergenz**: $\operatorname{div} \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Rotation: $\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] \vec{e}_z$

La-Place : $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\quad \Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right] \vec{e}_z$$

1.5.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen: r, φ, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + \mathbf{r} d\varphi^2 + dz^2} = dr \cdot \vec{e}_r + \mathbf{r}\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente: $dV = \mathbf{r}\, dr\, d\varphi\, dz$

Flächenelemente: $dA_{r\varphi} = \mathbf{r}\, dr\, d\varphi\, \vec{e}_z \quad dA_{rz} = dr\, dz\, \vec{e}_\varphi \quad dA_{\varphi z} = \mathbf{r}\, d\varphi\, dz\, \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; \varphi; z)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z}$

Gradient: $\operatorname{grad} \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$

Divergenz: $\operatorname{div} \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \vec{D}_r\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

Rotation: $\operatorname{rot} \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right] \vec{e}_z$

La-Place : $\Delta \phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ $\quad \Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \Delta E_r \vec{e}_r + \Delta E_\varphi \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2}\right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2}\right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z]\, \vec{e}_z$$

1.5.5 Kugelkoordinaten

siehe Papula S.391/392

Variablen: r, ϑ, φ Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + \mathbf{r^2} \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2 + \mathbf{r^2} d\vartheta^2} = dr \cdot \vec{e}_r + r\, d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r\, \sin \varphi\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

Volumenelemente: $dV = \mathbf{r^2}\, \sin \vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

Flächenelemente: $dA_{r\vartheta} = \mathbf{r}\, dr\, d\vartheta\, \vec{e}_\varphi \quad dA_{r\varphi} = \mathbf{r}\, \sin \vartheta\, dr\, d\varphi\, \vec{e}_\vartheta \quad dA_{\vartheta\varphi} = \mathbf{r^2}\, \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi}$

Gradient: $\operatorname{grad} \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

Divergenz: $\operatorname{div} \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 D_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

Rotation: $\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}\right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r}\right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}\right] \vec{e}_\varphi$

La-Place : $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}\right\}$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = &\left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\right] \vec{e}_r \\ &+ \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\right] \vec{e}_\vartheta \\ &+ \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi}\right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form		Integralform
$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$ **Gaußsches Gesetz**: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.	Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{D}\cdot da = \iiint_V \rho\cdot dV = Q(V)$ Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens *V* ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.
$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ Das magnetische Feld ist quellenfrei. Es gibt **keine magnetischen Monopole.**	Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B}\cdot da = 0$ Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ **Induktionsgesetz**: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.	Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{E}\cdot ds = -\iint_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{da} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$ Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ **Amperesches Gesetz**: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.	Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{H}\cdot ds = \iint_A \mathbf{j}\cdot da + \iint_A \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot da$ Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\boxed{\oint_s \vec{H}\cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J}\cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\boxed{\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = u_{ind} = -\frac{d}{dt}\iint_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}}$$

Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

$$\boxed{rot\vec{H} = \vec{J} = \kappa\cdot\vec{E}}$$

Bei isotropen Stoffen sind ε u. μ Skalare:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r \qquad \mu = \mu_0\cdot\mu_r$$

Zeitbereich: $\frac{\partial}{\partial t}$ Harmonischer Frequenzbereich (komplexe Berechnung): jw

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich → nur den Rand betrachten.

$$\int_a^b \text{grad}\, F\cdot d\vec{s} = F(b) - F(a)$$

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{A}\cdot dV = \oiint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{a}$$

$$\iint_A \text{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa\vec{E} = \left[\frac{A}{m^2}\right]} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu\vec{H} = [T]} \qquad \boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \left[\frac{C}{m^2}\right]}$$

Verkopplung von $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder über $\vec{J} = \kappa\vec{E}$.

Feldunterscheidung

$\vec{E}(x,y,z)$	$\widehat{=}$	statisches Feld
$\vec{E}(x,y,z,t)$	$\widehat{=}$	stationäres Feld
$\vec{E}(x,y,z,t)\cdot cos(\omega t - \beta z)$	$\widehat{=}$	Welle

3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder $\rightarrow$ Gradientenfeld $\rightarrow$ elek. Ladungen sind Quellen des $\vec{E}$-Feldes (Skalare Potenzialfkt. φ)

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 = \operatorname{rot}\operatorname{grad} E \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\vec{e}_y - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_z$$

3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn $\rho = 0$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\varphi + \underbrace{\frac{\operatorname{grad}\varepsilon\cdot\operatorname{grad}\varphi}{\varepsilon}}_{=0,\ \texttt{wenn homogen}} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 ...}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 ...}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

Dirichlet-RB: Gesuchte Potenzialfunktion φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)

Neumann-RB: Die Normalenableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ der Fkt. φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an.
(Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

3.1.3 Green'sche Funktionen

• **Skalarpotential** einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot r} \qquad [V]$$

• **E-Feld** einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\cdot r^2}\cdot\vec{e}_r \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

• **D-Feld** einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi\cdot r^2}\cdot\vec{e}_r \qquad \left[\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}\right]$$

• **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung
mit $\varphi(\infty) = 0$

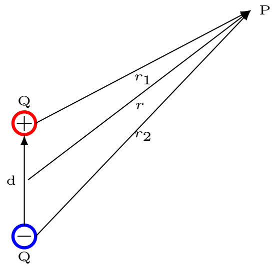
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V'}\frac{\rho(x',y',z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

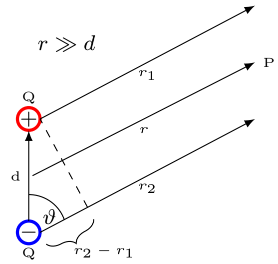
mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\varphi(x,y,z) = \iiint_{V'} G\left(\vec{r}'\vec{r}'\right)\rho\left(\vec{r}'\right)\mathrm{d}V'$$

3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment $\vec{p} = Q\cdot\vec{d}$





$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r^2}$$

$$\varphi \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.
Keine magnetischen Monopole: $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.
Skalarpotential φ_m existiert, wenn $\vec{H}$ wirbelfrei ist:
$\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, wenn $\vec{J} = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 = \operatorname{div}\operatorname{rot} B \qquad \vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_m$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential φ.
Coulomb-Eichung, wenn $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'}\frac{\vec{J}(x',y',z')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

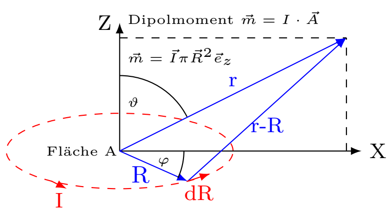
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{C'}\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\times\mathrm{d}\vec{s}'$$

mit $\operatorname{grad}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\vec{s}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$: Aufpunkt $\quad \vec{r}'$: Quellpunkt

3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0\cdot I}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

3.3 Quasistätionäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium: $\varepsilon, \mu, \kappa = \texttt{kost}$.
Leiter ist quasineutral: $\rho = 0$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} && \operatorname{div}\vec{E} = 0 && \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\
&\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} = \kappa\vec{E} && \operatorname{div}\vec{B} = 0 && \vec{B} = \mu\vec{H} \\
&\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} && \operatorname{div}\vec{H} = 0 && \vec{J} = \kappa\vec{E}
\end{aligned}$$

3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexer Amplitudenvektor / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

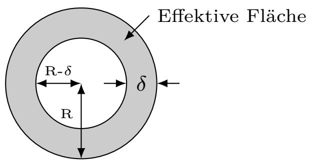
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{jwt} = J \cdot e^{j(wt+\varphi)}$$

- Darstellung in karthesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

3.3.2 Skineffekt



$[\sigma/\kappa]$: Leitfähigkeit $\frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$

Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke
(Abfall der Amplitude: $A_0 \cdot \frac{1}{e}$):

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}} \quad [m]$$

(Oberflächen)**widerstand**:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\texttt{eff}}} \qquad R_{DC} = \frac{l}{\kappa\pi R^2} \qquad R_F = \frac{1}{\kappa\delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x,t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(wt - \beta x)$$

analog für E-Feld

Amplitude und **Phase** bezogen auf δ:

$$\text{Amplitude} : x = \delta \cdot \ln(\texttt{Dämpfungsfaktor})$$

$$\text{Dämpfung} : \alpha = \frac{1}{\delta} \qquad \text{Phase} : \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x,t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Rundleiter - Effektive Fläche:

$$\begin{aligned}
A_{\texttt{eff}} &= A_{\texttt{ges}} - A_\sigma = R^2\pi - (R-\delta)^2\pi \\
&= 2 \cdot \pi\delta\left(R - \frac{\delta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

3.3.3 Näherungen für Skineffekt

Rundleiter: $R_{DC} = \frac{l}{\kappa\pi r_0^2}$

Geometrische Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2}\right)^4 & \text{für} r_0 \geq \delta \end{cases}$$

Bessel-Funktion (Fehler < 6%):

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für} \quad x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2\left(1 - \frac{x^4}{6}\right) & \text{für} \quad x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \qquad r_0 \mathrel{\widehat{=}} \text{Außenradius} \qquad X_{AC} = wL_i$$

Empirische Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0}{2,65 \cdot \delta}\right)^4 & \text{für} \quad \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für} \quad 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für} \quad 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1) $\widehat{=}$ Kreisring mit Näherung (2) $\widehat{=}$ Ring mittig

3.4 E-Felder an Grenzflächen

3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung:

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem ε.

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem ε.

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \qquad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

Querschichtung:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \qquad D_{1n} = \frac{Q}{A} \qquad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung:

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem μ.

Längsschichtung:

$$H_{1t} = H_{2t} \qquad \frac{B_{1t}}{mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem μ.

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4 Wellen

4.1 Wellengleichungen allgemein

4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta\vec{E} - \kappa\mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{H} - \kappa\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0$$

4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:
mit harmonischer Zeitabhängigkeit: $\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{j}\omega$

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{E}} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\underline{\vec{H}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum: $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\underline{\vec{E}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \qquad \Delta\underline{\vec{H}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter $\rho = 0$, $\kappa \gg \omega\epsilon$

$$\Delta\vec{E} - \kappa\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{H} - \kappa\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \kappa\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \qquad \Delta\underline{\vec{H}} - \kappa\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen $\rho = 0$, keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2}{\partial^2 y} = 0$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{H}$$

TEM-Welle: $\vec{E}$ und $\vec{H}$ besitzen nur transversale (= *senkrecht zur Ausbreitungsrichtung* stehende) Komponenten.

4.2.1 ebene Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (**Realteil** von $\underline{\vec{E}}(z,t)$)

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \overbrace{e^{-\alpha z}}^{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{cos(\omega t \overbrace{-}^{\text{positive z-Richtung}} \beta z)}_{\text{Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z}$$

4.2.2 komplexer Amplitudendrehzeiger

Achtung: **mit** e^{jwt} ! , wenn **ohne**: komplexer Amplituden*vektor*.

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\underline{\gamma} z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z}$$

4.2.3 Fortpflanzungskonstante

Dämpfungskonstante α: $\frac{\mathtt{Np}}{m}$ Phasenkonstante β: $\frac{\mathtt{rad}}{m}$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad \left[\frac{1}{m}\right]$$

4.3 Kenngrößen

4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$\beta \mathrel{\widehat{=}} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[\frac{\mathtt{rad}}{\mathtt{m}}\right]$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.
Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum λ_0

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0} \quad [\mathtt{m}]$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \qquad v_{p,\mathtt{Medium}} \leq c_0$$

4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

4.3.6 Feldwellenwiderstand

Z_{F0}: im **materiefreien** Raum/Vakuum!
Falls keine Verluste (ideal) $\to Z_F$ reell!

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_{\mathtt{transversal}}}{\underline{H}_{\mathtt{transversal}}} = \frac{\underline{E}_h}{\underline{H}_h} = -\frac{\underline{E}_r}{\underline{H}_r} = \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \qquad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4.3.7 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\, dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right\}$
Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} = \lvert\vec{S}_{av}\rvert$	

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\mathtt{Fläche}}}$$

$$P = \iint \vec{S}_{\text{av}}\, d\vec{a} = Re\,\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \qquad P_{\mathtt{Leitung}} = \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2}{\cdot \mathrm{Re}\{Z_L\}}$$

4.4 Ausbreitung im Medium

κ, σ = Leitfähigkeit

4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \qquad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1\right)}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}}$$

4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum: $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c_0} \qquad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \qquad Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.4.3 Im verlustlosen Dielektrikum

verlustlos: $\kappa = 0$, maximale Wirkleistung
Z_F rein reell $\rightarrow$ ebene Welle

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \qquad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \qquad \boxed{Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}}$$

4.4.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \qquad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} \approx Z_{F0}\left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)}$$

4.4.5 Im guten Leiter

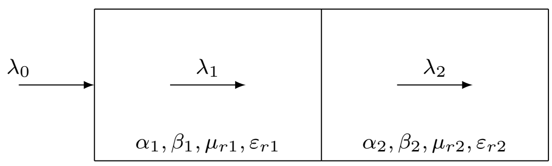
geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \qquad \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \qquad \boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}e^{j\frac{\pi}{4}}}$$

4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

4.5.2 Brechungsgesetz allgemein

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.5.3 Leistungsbilanz an Grenzflächen

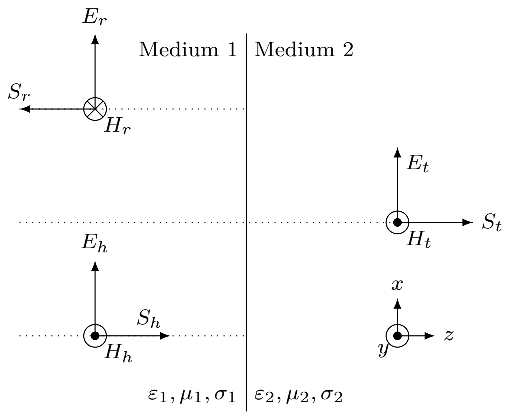
Index n: Normalkomponente. Wichtig: Beträge beachten!

$$S_{tn} = S_{hn} - S_{rn}$$

$$S_{t0} = S_{h0} \cdot \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2}(1 - r^2)$$

4.6 Senkrechter Einfall

Gilt bei Einfallswinkel $\theta_h = 0$.



$$r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \qquad t_e = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$r_m = \frac{Z_{F1} - Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} \qquad t_m = \frac{2 \cdot Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$= -r_e \qquad = t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}}$$

$$t_e = 1 + r_e \qquad t_m = 1 + r_m$$

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

$$E_t = t_e \cdot E_h \qquad H_t = t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot H_h$$

$$E_r = r_e \cdot E_h \qquad -H_r = r_e \cdot H_h$$

$$E_t = E_h + E_r \qquad H_t = H_h + H_r$$

$$t_e \cdot E_h = E_h + r_e \cdot E_h \qquad t_m \cdot H_h = H_h + r_m \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$
$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$
$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.6.1 Verlustloses Dielektikum allgemein

gilt für $\kappa = 0$, keine Dämpfung.

rein reell: $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ rein imaginär: $\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$r = r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

$$t = t_e = \frac{2 Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.6.2 Medium 1 oder 2: Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1} \qquad \boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.6.3 beide Medien: nicht magnetisch

Gilt für $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.6.4 Medium 2: idealer Leiter

$\vec{E} = 0$ im idealen Leiter $\rightarrow$ **Stehende** Welle!, vollständige Reflexion.

$$Z_{F2} = 0 \qquad r = -1 \qquad t = 0 \qquad \vec{S}_{\text{av}} = 0$$

$$\underline{E}_{1x} = -2j \cdot E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \qquad \underline{H}_{1y} = 2 \cdot \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z)$$
$$E_{1x}(z,t) = 2E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \cdot \sin(\omega t)$$
$$H_{1y}(z,t) = 2\frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z) \cdot \cos(\omega t)$$

$$\boxed{H_{\max} \text{ und } E_{\min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2} \qquad \boxed{H_{min} \text{ und } E_{max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4}$$

4.6.5 Stehwellenverhältnis (SWR)

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \qquad 1 < s < \infty$$

4.7 Schräger Einfall (allgemein)

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4.7.1 Brechungsgesetz

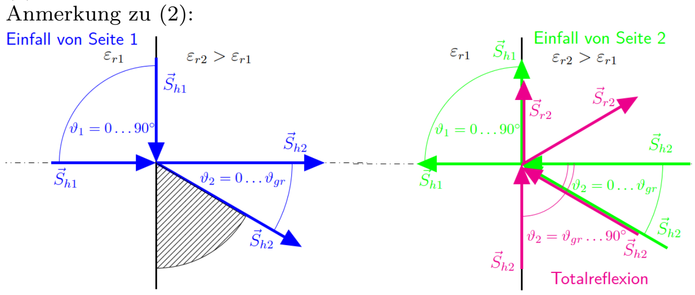
$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.7.2 Totalrefexion/Grenzwinkel

Grenzwinkel θ_g gibt an, bis zu welchem Winkel eine Welle von höherem in kleineres Dielektrikum $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ eindringen kann. $\rightarrow$ Brechungsgesetz beachten!

$$\boxed{(1)\, \theta_g = \arcsin\sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}} \qquad \boxed{(2)\, \theta_g = \arcsin\sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}}$$

(1): bei *senkrechter* transmittierter Welle $\theta_t = \sin 90°$
(2): bei *senkrechter* einfallender Welle $\theta_h = \sin 90°$
Anmerkung zu (2):



4.7.3 Brewster-/Polarisationswinkel

Bei Brewster-Winkel θ_b wird Reflexionsfaktor $r = 0$.

- **Parallele** Polarisation: rechts: $\mu_{r1} = \mu_{r2}$

  $$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}} \qquad \boxed{\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}}$$

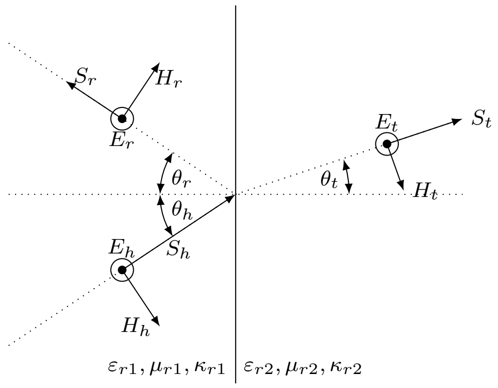
  Brewster-Winkel existiert nur bei $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$.

- **Senkrechte** Polarisation: rechts: $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

  $$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}} \qquad \tan\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

  Brewster-Winkel existiert nur bei $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$.
  Bei $\mu_{r1} = \mu_{r2} \rightarrow r \neq 0$ keine Reflexionsfreiheit!

4.7.4 Senkrechte Polarisation ohne μ_r



$\vec{E}$-Feld senkrecht, $\vec{H}$-Feld parallel. $\quad \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$Z_{F0} = 120\pi\,\Omega \qquad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r(n)}}} \qquad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$

Brechungsgesetz: mit $\theta_h = \theta_r$

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad \sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin\theta_h$$

Fresnelsche Formeln:

$$r_s = r_{es} = r_{ms} =$$
$$= \frac{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h - Z_{F1}\cdot\cos\theta_t}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_h}$$
$$= \frac{\cos\vartheta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\vartheta_1}}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\vartheta_1}}$$

$$t_{es} = \frac{2\cdot Z_{F2}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t} = \frac{2\cdot\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_h}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_h}$$
$$= \frac{2\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\vartheta_1}}$$
$$= 1 + r_s$$

$$t_{ms} = \frac{2Z_{F1}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t}$$
$$= \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\vartheta_1}}$$
$$= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}}\cdot t_{es} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}\cdot t_{es}$$

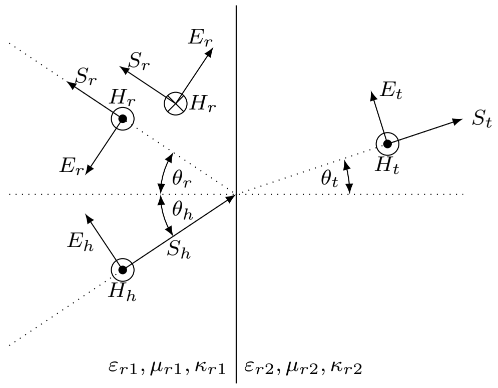
Beziehungen Polarisation

$E_r = r_s \cdot E_h$	$E_r = r_p \cdot E_h$
$E_t = t_{es} \cdot E_h$	$E_t = t_{ep} \cdot E_h$
$H_r = r_s \cdot H_h$	$H_r = r_p \cdot H_h$
$H_t = t_{ms} \cdot H_h$	$H_t = t_{mp} \cdot H_h$
$E_t = H_t \cdot Z_{F2}$	$E_t = H_t \cdot Z_{F2}$
$E_h = H_h \cdot Z_{F1}$	$E_h = H_h \cdot Z_{F1}$

Richtungssinn Felder (Hand-Regel)

Linke Hand	**Rechte Hand**
Daumen: $\vec{E}$	Daumen: $\vec{E}$
Zeigef.: $\vec{S}_{av}$	Zeigef.: $\vec{H}$
Mittelf.: $\vec{H}$	Mittelf.: $\vec{S}_{av}$

4.7.5 Parallele Polarisation ohne μ_r



$\vec{E}$-Feld parallel, $\vec{H}$-Feld senkrecht. $\quad \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

Stücke: $\vec{H}_h$ und $\vec{H}_r$ zeigen in die selbe Richtung!
Sattler: $\vec{H}_h$ und $\vec{H}_r$ zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

Fresnelsche Formeln (Stücke):

$$r_{ep} = r_{mp} = r_p \qquad = -r_{p,[\texttt{Sattler}]}$$
$$= \frac{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h - Z_{F2}\cdot\cos\theta_t}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t}$$
$$= \frac{\cos\vartheta_1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$t_{ep} = \frac{2\cdot Z_{F2}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t} = (1 - r_p)\cdot\frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t}$$
$$= \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$
$$= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}}\cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}\cdot t_{mp}$$

$$t_{mp} = \frac{2\cdot Z_{F1}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t} = 1 + r_p$$

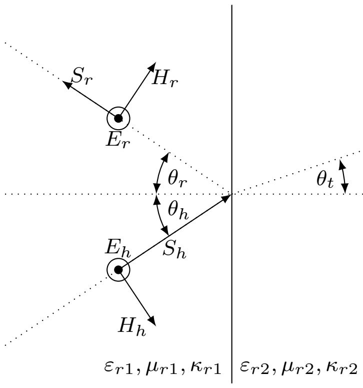
Fresnelsche Formeln (Sattler):

$$r_p = r_{ep} = r_{mp} \qquad = -r_{p,[\texttt{Stücke}]}$$
$$= \frac{Z_{F2}\cdot\cos\theta_t - Z_{F1}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_t + Z_{F1}\cdot\cos\theta_h}$$
$$= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_h}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_t}$$

$$t_{ep} = \frac{2Z_{F2}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t}$$
$$= \frac{2\cdot\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_h}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cdot\cos\theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cdot\cos\theta_t}$$
$$= (1 + r_p)\cdot\frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t}$$

$$t_{mp} = 1 - r_p = \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}}\cdot t_{ep}$$

4.7.6 Senkrechte Polarisation mit μ_r



$\vec{E}$-Feld senkrecht, $\vec{H}$-Feld parallel. $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

$Z_{F0} = 120\pi\,\Omega$ $\quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_{r(n)}}{\varepsilon_{r(n)}}}$ $\quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}}$

Brechungsgesetz: mit $\theta_h = \theta_r$

$$\boxed{\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Fresnelsche Formeln:

$$r_s = r_{es} = r_{ms} =$$

$$= \frac{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h - Z_{F1} \cdot \cos\theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{\cos\vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}{}^2}{\mu_{r2}^2}\sin^2\vartheta_1}}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}{}^2}{\mu_{r2}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$t_{es} = \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos\theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}{}^2}{\mu_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$= 1 + r_s$$

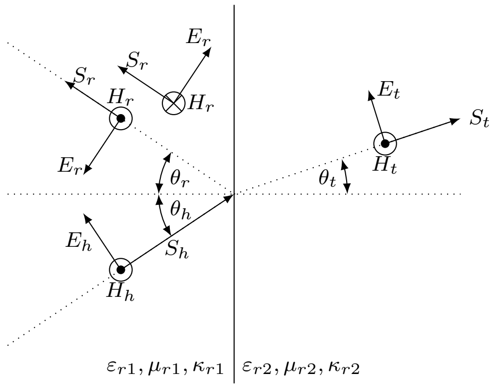
$$t_{ms} = \frac{2Z_{F1} \cdot \cos\theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}}\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}{}^2}{\mu_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}}t_{es}$$

4.7.7 Parallele Polarisation mit μ_r



$\vec{E}$-Feld parallel, $\vec{H}$-Feld senkrecht. $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

Stücke: $\vec{H}_h$ und $\vec{H}_r$ zeigen in die selbe Richtung!
Sattler: $\vec{H}_h$ und $\vec{H}_r$ zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

Fresnelsche Formeln (Stücke):

$$r_{ep} = r_{mp} = r_p \qquad = -r_{p,[\texttt{Sattler}]}$$

$$= \frac{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h - Z_{F2} \cdot \cos\theta_t}{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h + Z_{F2} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{\cos\vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$t_{ep} = \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos\theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h + Z_{F2} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}}\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}}} \cdot t_{mp}$$

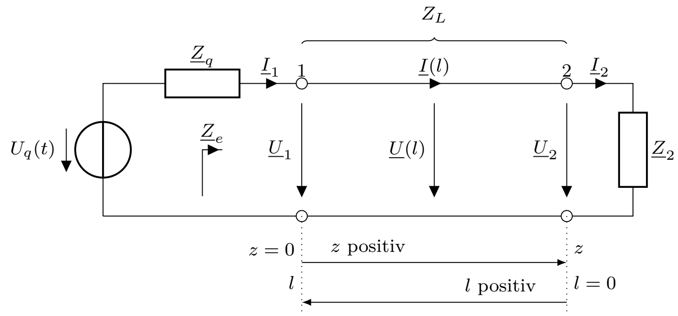
$$t_{mp} = \frac{2 \cdot Z_{F1} \cdot \cos\theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h + Z_{F2} \cdot \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r2}} - \frac{\varepsilon_{r1}{}^2}{\varepsilon_{r2}{}^2}\sin^2\vartheta_1}}$$

$$= 1 + r_p$$

5 Leitungen

5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang: $\underline{Z}_e$ Anfang: $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$ Abschluss: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{(l=0)}$
Referenzpunkt **Last** ($l = 0$):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\underline{\gamma} l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\underline{\gamma} l}$$
$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\underline{\gamma} l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\underline{\gamma} l}$$

5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh\left(\underline{\gamma} l\right) + Z_L \underline{I}_2 \cdot \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) = \underline{U}_2 \cdot \left[\cosh\left(\underline{\gamma} l\right) + \tfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh\left(\underline{\gamma} l\right)\right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh\left(\underline{\gamma} l\right) + \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot \sinh\left(\underline{\gamma} l\right) = \underline{I}_2 \cdot \left[\cosh\left(\underline{\gamma} l\right) + \tfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh\left(\underline{\gamma} l\right)\right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh\left(\underline{\gamma} l\right)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh\left(\underline{\gamma} l\right)} = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh\left(\underline{\gamma} l\right)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh\left(\underline{\gamma} l\right)}$$

komplexer $\underline{\gamma}$ nicht im TR berechenbar:
Lösung: $\alpha l \left[\frac{\mathtt{Np}}{\mathtt{m}}\right]$ und $\beta l \left[\frac{\mathtt{rad}}{\mathtt{m}}\right]$ einzeln berechnen, dann:

$$\cosh\left(\underline{\gamma} l\right) = \frac{1}{2}\left[e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}\right]$$
$$\sinh\left(\underline{\gamma} l\right) = \frac{1}{2}\left[e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}\right]$$
$$\tanh\left(\underline{\gamma} l\right) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm\alpha l}$: Dämpfung $e^{\pm j\beta l}$: Phase ($\angle$ im TR)
Für Winkel αl bzw. βl auf **RAD** in TR!

5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

  komplexer $\underline{Z}_L$ nicht in TR berechenbar:
  Betrag: erst $\underline{Z}_L^2$, dann $\sqrt{|Z_L^2|}$ ermitteln.
  Phase: $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2)$ $\rightarrow \underline{\gamma}$ analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[\frac{1}{m}\right] = j\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2\omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor: $r(l) \mathrel{\widehat{=}} r_1$: Leitungs*anfang*

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\underline{\gamma} l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l} = \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$
$$l_{\mathtt{elek.}} = \beta \cdot l \qquad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$

5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand $\underline{Z}_e$ am Leitungsende:

mit Kurzschluss $\underline{Z}_{e,\mathtt{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh\left(\underline{\gamma} l\right)$

im Leerlauf $\underline{Z}_{e,\mathtt{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh\left(\underline{\gamma} l\right)}$

beliebige Länge $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\mathtt{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\mathtt{leer}}(l)}$

5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4}$ $|\underline{\gamma} l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + jwL')$$
$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + jwC')$$

  Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.
- lange Leitung $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4}$ $|\underline{\gamma} l| \gg 1$
  Abschluss egal, es wird nur $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$ gemessen wird.

5.2 Verlustlose Leitung

5.2.1 Kenngrößen

$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0$ $Z_L, v_p \nsim f$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$
$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \qquad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$\underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2$ $0 < r < 1$ $0 < \Psi < 2\pi$ Ψ in **RAD**!

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} = \tfrac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L}$$
$$\underline{r}_2 = \tfrac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \tfrac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_L}$$
$$\tfrac{\underline{Z}(l)}{Z_L} = \tfrac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$

$$U_{\mathtt{max}} = |U_h| \cdot (1 + |r(l)|) \qquad U_{\mathtt{min}} = |U_h| \cdot (1 - |r(l)|)$$
$$I_{\mathtt{max}} = \left|\frac{U_h}{Z_L}\right| \cdot (1 + |r(l)|) \qquad I_{\mathtt{min}} = \left|\frac{U_h}{Z_L}\right| \cdot (1 - |r(l)|)$$

5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r$ $\underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \tan(\beta l)} = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$
$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\tfrac{Z_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l)\right]$$
$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\tfrac{\underline{Z}_2}{Z_L} \sin(\beta l)\right]$$

Für Beträge/Amplitudenwerte: $\left|\frac{\underline{U}}{\underline{U}_2}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$.
Bildung von **stehenden** Wellen für alle Fälle *außer* bei Anpassung!

5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$\underline{Z}_2 = 0$ $\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r$ $\underline{I}_h = \underline{I}_r$ $r_2 = +1$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = Z_L \cdot j\tan(\beta l) \qquad \rightarrow \text{rein imaginär!}$$
$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j\sin(\beta l) = \underline{I}_2 Z_L \cdot j\sin(\beta l)$$
$$I(l) = \underline{I}_h \cdot 2\cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \qquad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{Z_L}$$

$l = \frac{\lambda}{4}$: Parallelresonanz (LL) $l = \frac{\lambda}{2}$: Serienresonanz (KS)

5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$\underline{Z}_2 = \infty \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r \qquad \underline{U}_h = \underline{U}_r \qquad r_2 = -1$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j\,\frac{Z_L}{\tan(\beta l)} \qquad \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2\cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) \qquad \underline{U}_2 = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2j\sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot j\sin(\beta l)$$

$l = \frac{\lambda}{4}$: Serienresonanz (KS) $\quad l = \frac{\lambda}{2}$: Parallelresonanz (LL)

5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$ aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{Z_L} = \frac{Z_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{Y_L} \rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert: L $\leftrightarrow$ C,
Kurzschluss $\leftrightarrow$ Leerlauf, **großes** R $\leftrightarrow$ **kleines** R

5.2.7 Angepasste (reflexionsfreie) Leitung

Eingangswiderstand $Z_1 \nsim$ Leitungslänge, rein reell!
Nur hinlaufende Welle, **reflexionsfrei**!

$$Z_L = Z_1 = Z_2 = Z(l) \qquad r_A = 0 \qquad \text{SWR} = 1$$

$$U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z} \qquad I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}$$

5.2.8 Ohmscher Abschluss an Leitungsende

Abstand **Spannungs**max. von der Last $z_{\mathtt{max}}$:
$r_A \rightarrow$ rein reell! $\qquad z_{\mathtt{max}} = \frac{\lambda}{4\pi}(\theta_{\mathtt{rad}} + 2n\pi)$

$$R_A > Z_L \rightarrow \theta_{\mathtt{rad}} = 0 \qquad r_A > 0 \qquad \rightarrow z_{\mathtt{max}} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$R_A < Z_L \rightarrow \theta_{\mathtt{rad}} = \pi \qquad r_A < 0 \qquad \rightarrow z_{\mathtt{max}} = \frac{\lambda}{4} \cdot n$$

5.2.9 Position von Extrema

bei beliebigen Abschlüssen/Lasten! $\rightarrow$ stehende Welle!

$$\boxed{r_l = |r_A| \cdot e^{-j\Psi_r}} \rightarrow \Psi_r \text{ in rad}$$

$f_{\mathtt{min}} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen
$f_{\mathtt{max}} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\mathtt{min/max}} = \frac{c_0}{f_{\mathtt{min/max}}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

$$z_{\mathtt{min}} = \frac{-n \cdot \lambda_{\mathtt{min}}}{2} \qquad \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\mathtt{min}}}$$

$$z_{\mathtt{max}} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\mathtt{max}}}{4} \qquad \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\mathtt{max}}}{2 \cdot \lambda_{\mathtt{max}}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\mathtt{min}} \cdot \lambda_{\mathtt{max}}}{4(\lambda_{\mathtt{min}} - \lambda_{\mathtt{max}})}$$

5.2.10 Stehwellenverhältnis (SWR)

Smith-Chart: Kap. 6.1 $\qquad$ VSWR: Kap. 7.4

$$s = \text{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

$$m = \text{SWR}^{-1} = \frac{R_{\min}}{Z_L} \qquad |r_2| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

5.2.11 Leistung

$$P_A = P_H - P_R \quad = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{Re\{Z_L\}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}} \cdot \left(1 - r^2\right)$$

$$= P_{\max} \cdot \left(1 - r^2\right)$$

$$= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*$$

$$P_V = P_q - P_A$$

$$\underline{I}(z) = \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z$$

5.2.12 Reflexionsfaktor mit Verlusten

r_e: am **Eingang** $\qquad r_a$: am Abschluss/an der Last

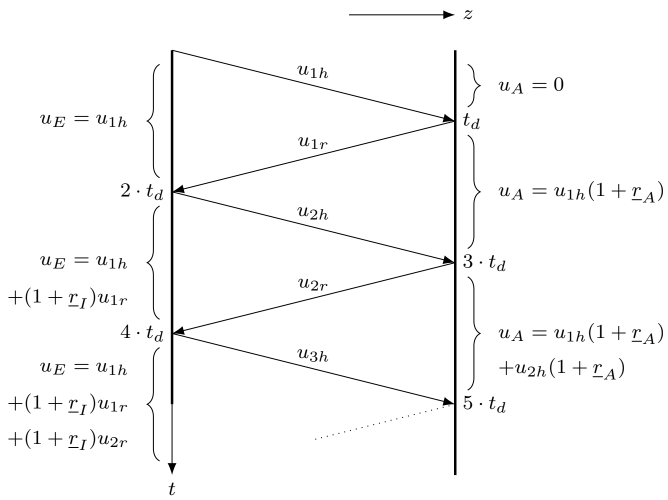
$$r_e = r_a^{-2\gamma l} = \overbrace{r_a \cdot e^{-2\alpha l}}^{\texttt{gedämpfter Betrag}} \cdot e^{-j2\beta l}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{\ln(r_a)}{2 \cdot l} \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}}\right]} \qquad \boxed{\beta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2 \cdot l} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right]}$$

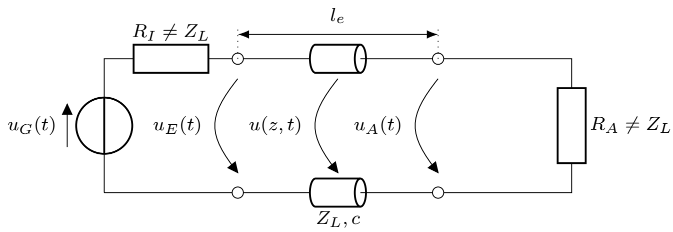
5.2.13 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$
$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



Reflexionsfaktor Leitungsanfang: $\quad \underline{r}_I = \dfrac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

Reflexionsfaktor Leitungsende: $\quad \underline{r}_A = \dfrac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Hinlaufende Welle $\quad u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \dfrac{Z_L}{Z_L + R_I}$

Signallaufzeit: $\quad t_d = \dfrac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \dfrac{l}{v_p}$

5.4 Leitungsparameter

5.4.1 Allgemein

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$\boxed{LC = \mu\varepsilon} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\varepsilon}}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

5.4.2 Streifenleitung / Parallele Platten

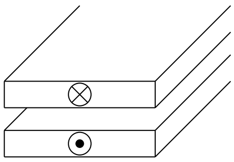
Für Sinus-Anregung:

$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l \cdot e^{j\omega t}}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \overset{b \gg d}{=} E \cdot d \qquad \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \qquad \rightarrow H = \frac{I_0}{b} \cdot^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

b: Platten**breite**   **d**: Abstand zwischen den Platten

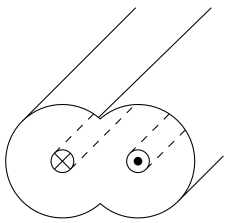


$$R' = \frac{2}{\delta\kappa b}\left[\frac{\Omega}{m}\right] \qquad L' = \frac{\mu d}{b}\left[\frac{H}{m}\right]$$

$$G' = \frac{\kappa b}{d}\left[\frac{S}{m}\right] \qquad C' = \frac{b\varepsilon}{d}\left[\frac{F}{m}\right]$$

5.4.3 Doppelleitung

κ: Leitwert des Dielektrikums κ_L Leitwert des Leiters
r: Leiterradius   **d**: Abstand zw. Leitermitten



$$R' = \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L}\left[\frac{\Omega}{m}\right]$$

$$L' = \frac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\frac{d}{2r}\left[\frac{H}{m}\right]$$

$$G' = \frac{\pi\kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)}\left[\frac{S}{m}\right]$$

$$C' = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)}\left[\frac{F}{m}\right]$$

Wenn $\left(\frac{d}{2r}\right)^2 \gg 1 \rightarrow \cosh^{-1}\frac{d}{2r} \approx \ln\frac{d}{r}$

5.4.4 Koaxialleitung

Mit Hin- und Rückleiter. r_i: Innenradius r_a: Außenradius

$0 < r < r_i$: Innenleiter, **keine** Felder!
$r_i < r < r_a$: Zwischenbereich, nur hier Felder vorhanden!
$r_a < r < \infty$: Außenbereich, **keine** Felder!

$$\underline{\vec{H}}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{\hat{U}}{2\pi r \cdot Z_L} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

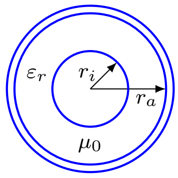
$$\underline{\vec{E}}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\hat{I}}{2\pi r}\right)^2 \cdot Z_{F0}$$

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \overbrace{=}^{\mu_r = 1} \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\frac{r_a}{r_i}$$

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\mathrm{Re}\{Z_L\}}$$



$$R' = \frac{1}{2\pi\delta\kappa_L}\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i}\right)\left[\frac{\Omega}{m}\right]$$

$$L' = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\frac{r_a}{r_i}\left[\frac{H}{m}\right]$$

$$G' = \frac{2\pi\kappa}{\ln(r_a/r_i)}\left[\frac{S}{m}\right]$$

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(r_a/r_i)}\left[\frac{F}{m}\right]$$

Bei realer Beschreibung: $\kappa < \infty$ zusätzliche Feldkomponente:

$$\vec{E}_z \approx E_r \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \varepsilon}{\kappa}} \cdot \vec{e}_z$$

Dielektrische Dämpfungsverluste: für sehr hohe f
$G \ll \omega C, \quad \tan\delta = (G/\omega C) < 0,1$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}\pi f}{c_0} \cdot \tan\delta \sim f$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

6.1.1 Normierte Impedanz

gilt nur für **verlustlose** Leitung!

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L} = \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \cdot \tan(\beta l)} \qquad = \frac{\frac{\underline{Z}_2}{Z_L} + j\tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \cdot \tan(\beta l)}$$

allgemeine Gleichung **mit Verlusten** (siehe auch Kap. 5.1.1.)
Ersetze: $\tan \to \tanh$ und $\beta l \to \underline{\gamma} l$

6.1.2 verlustloser Reflexionsfaktor

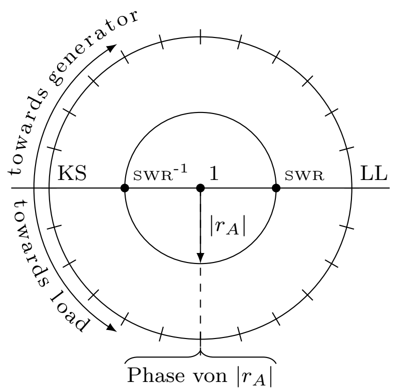
Immer gültig, auch ohne Quelle!
$\underline{r}(l) = \underline{r}$ $\quad \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2$ $\quad 0 < r < 1$ $\quad 0 < \Psi < 2\pi\,[360°]$

$$\boxed{\underline{r}_n = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta L_n} = r_2 \cdot e^{-j4\pi\frac{L_n}{\lambda}}}$$
$$= |\underline{r}_2| \cdot e^{j(\Psi_0 + 2\beta L_n)} = r \cdot e^{j\Psi}$$
$$= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1}$$
$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_L}$$

6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von $m \to$ Werte von $\mathrm{Re}\left\{\underline{z}_n\right\} : 0 \le m \le 1$

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}} \qquad |\underline{r}| = \frac{1-m}{1+m} \qquad s = \frac{1}{m}$$



$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{Z_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)} \qquad |\underline{r}(l)| = \frac{\mathrm{SWR} - 1}{\mathrm{SWR} + 1} = \frac{1-m}{1+m}$$
$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$
$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|}$$
$$\mathrm{SWR} = \frac{1}{m} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von $\underline{z}_n$ um Mittelpunkt ergibt $\underline{y}_n$. (Phase $\pm 180°/\pm\pi$)

6.3 Maxima und Minima bei stehender Welle

Bei **verlustloser** Leitung:

$$U_{\max} = |U_h| \cdot (1 + |r(l)|) \qquad U_{\min} = |U_h| \cdot (1 - |r(l)|)$$
$$I_{\max} = \left|\frac{U_h}{Z_L}\right| \cdot (1 + |r(l)|) \qquad I_{\min} = \left|\frac{U_h}{Z_L}\right| \cdot (1 - |r(l)|)$$

Für **Spannungen**: Abstand von der Last z

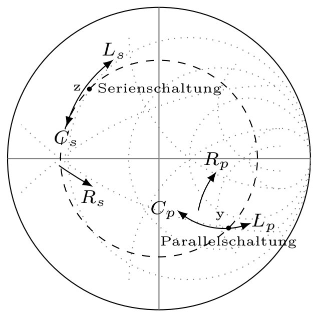
$$z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi}(\theta_{rad} + (2n+1)\pi) \qquad z_{\max} = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot (\theta_{rad} + 2n\pi)$$

$$\boxed{\textbf{Minima} \text{ alle } \frac{\lambda}{2} \to \frac{l}{\lambda} = 0.5} \qquad \boxed{\textbf{Maxima} \text{ alle } \frac{\lambda}{4} \to \frac{l}{\lambda} = 0.25}$$

→ Schnittpunkte mit der reellen Achse!

6.4 Lastseite → Quelle

1. $Z_L = Z_B$ ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren
$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L}$$
4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch $\underline{z}_n s$ nach außen
Ablesen und Notieren:
→ Relative Länge $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$
→ Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichen
Ablesen und Notieren:
→ **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse
→ **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse
→ $\underline{r}$ abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen
Ablesen und Notieren:
→Relativer Winkel
8. Wenn $\alpha \neq 0$
→ Dämpung ausrechen → Um Faktor nach innen Spiralieren
9. Dieser Punkt ist $\underline{z}_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



6.5 Vorgehen mit geg. Eingangswiderstand

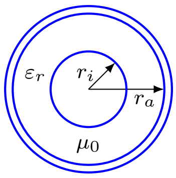
Wenn mit dem Smith-Diagramm gearbeitet wird, liefert dies die Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz
$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$
2. Reflexion am Leitungsende
$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_A - \underline{Z}_L}{Z_A + \underline{Z}_L}$$
3. Reflexion am Leitungsanfang
$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$
4. Bestimmung der Impedanz
$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$
5. Eingangswiderstand
$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



$$\boxed{Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \overbrace{=}^{\mu_r=1} \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\frac{r_a}{r_i}$$

7.1.2 Dämpfung

Hin- und Rückleiter!

Ohmsche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_L = \frac{\sqrt{\frac{f\cdot\mu}{\pi\cdot\sigma}}}{120\Omega}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{D}\cdot\frac{1+\frac{D}{d}}{\ln\frac{D}{d}}$$

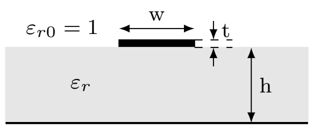
Dämpfungsminimum für $\frac{1+\frac{D}{d}}{\ln\frac{D}{d}} = 1$

bei vorgegebenen Außendurchmesser: $\frac{D}{d} = 3,59$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C$,$\tan\delta = (^{G}/_{\omega C})$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}\pi f}{c_0}\cdot\tan\delta \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



$$\text{w} := \text{Leiterbahnbreite}$$
$$\text{h} := \text{Substratbreite}$$

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\varepsilon_{r,\texttt{eff}} = \frac{\varepsilon_r+1}{2} + \frac{\varepsilon_r-1}{2\sqrt{1+10\cdot\frac{\text{h}}{\text{w}}}}$$

Je größer $\frac{\text{w}}{\text{h}}$ desto mehr nähert sich $\varepsilon_{r,\texttt{eff}}$ an ε_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\texttt{eff}}\cdot\mu_{r,\texttt{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\texttt{eff}}}}\cdot\ln\left(\frac{8\text{h}}{\text{w}} + \frac{\text{w}}{4\text{h}}\right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\texttt{eff}}}}\cdot\frac{1}{\frac{\text{w}}{\text{h}} + 2,42 - 0,44\cdot\frac{\text{h}}{\text{w}} + \left(1-\frac{\text{h}}{\text{w}}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

Reflexionsfaktor

$$\underline{r}_2 = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_2 - \underline{Z}_L}{Z_2 + \underline{Z}_L}$$

<u>VSWR</u>

$$s = \text{VSWR} = \frac{1+|r|}{1-|r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s-1}{s+1}$$

<u>Return Loss</u>

$$\alpha_r = -20\log(r)dB$$

<u>Missmatch Loss</u>

$$\text{ML} = -10\log\left(1-r^2\right)dB$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B\cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

<u>Dispersion:</u>

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

<u>Stufenprofil:</u>

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B\cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B\cdot l$, keine Modendispersion

<u>Gradientenprofil:</u>

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B\cdot l$

<u>Bandbreitenlängenprodukt:</u>

$B' = B\cdot l[\frac{MHz}{km}]$ = konstant

$B \sim \frac{1}{l}$ und $l \sim \frac{1}{B}$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, solange Dämpfung keine Rolle spielt.

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol (HDp)

8.1.1 Allgemein

r: Antennen**abstand**

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin\vartheta \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi \\
\underline{\vec{E}} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta r} \cdot \cos\vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\
&\quad - \frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin\vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta
\end{aligned}}$$

Im Zeitbereich:

$$E_r(t) = \frac{Z_F I_0 l}{2\pi r^3 \beta} \cos\vartheta \left[\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r)\right]$$

$$E_\vartheta(t) = \frac{Z_F I_0 l}{4\pi r^3 \beta} \sin\vartheta \left[\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r) - (\beta r)^2 \sin(\omega t - \beta r)\right]$$

$$H_\varphi(t) = \frac{I_0 l}{4\pi r^2} \sin\vartheta \left[\cos(\omega t - \beta r) + \beta r \sin(\omega t - \beta r)\right]$$

8.1.2 Nahfeld (Fresnel-Zone) $\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1$ oder $\beta R \ll 1$ oder $r \ll \lambda$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da $\vec{E}$ zu $\vec{H}$ 90° phasenverschoben. Lösung entspricht dem quasistatischem Dipolfeld. $\rightarrow$ **keine** Wellenausbreitung!

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi r^2} \cdot \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\
\underline{\vec{E}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega\varepsilon r^3} \cos\vartheta \cdot \vec{e}_r + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega\varepsilon r^3} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta
\end{aligned}}$$

8.1.3 Fernfeld (Fraunhofer-Zone) $\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1$ oder $\beta R \gg 1$ oder $r \gg \lambda$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, $\vec{S}$ in Richtung $\vec{e}_r$
$\rightarrow$ Kugelwelle, $\vec{E}$ und $\vec{H}$ in Phase, fallen mit $\frac{1}{r}$ ab.

$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &\approx j\frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\
\underline{\vec{E}} &\approx j\frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta
\end{aligned}}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld HDp

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_{F0} {I_0}^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} = \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\
&= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\
\vec{S}_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2\vartheta \cdot \vec{e}_r \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}
\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand HDp

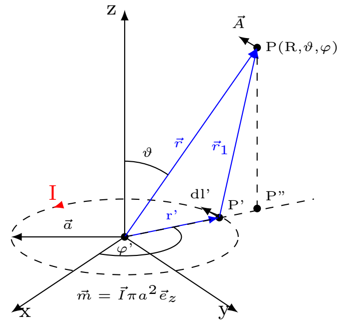
$$R_s = \frac{2}{3}\pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand HDp

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

Dipolmoment: $\boxed{\vec{m} = \vec{I}\pi\vec{a}^2\vec{e}_z}$ $\boxed{m = I \cdot A}$



$$\boxed{\begin{aligned}
\underline{\vec{H}} &= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \cos\vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\
&\quad - \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \sin\vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta \\
\underline{\vec{E}} &= \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta r} \sin\vartheta \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi
\end{aligned}}$$

mag. Vektorpotenzial $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi r^2}(1 + j\beta r) e^{-j\beta r} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi$$

P_{rad}: elek. Dipol der Länge l $\widehat{=}$ mag. Dipol der Fläche A

$$\Delta l = \beta \cdot A_{\texttt{Kreis}} = \beta \cdot \pi\, a^2 \qquad \frac{m}{v_p} = p$$

8.2.1 Fernfeld

$$\boxed{\begin{aligned}
E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\
H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r Z_{F0}} e^{-j\beta r} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta
\end{aligned}}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} = \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\
S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2\vartheta \cdot \vec{e}_r \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}
\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\boxed{\begin{aligned}
E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi r^2} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\
H &\approx \frac{m}{4\pi r^3} (2\cos\vartheta \cdot \vec{e}_r + \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta)
\end{aligned}}$$

8.3 Lineare Antenne

Stromverteilung auf linearen Antennen **nicht** konstant:

$$I(z') = I_0 \cdot \sin\left[\beta\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right]$$

8.3.1 Dipolantenne allgemein

l: Antennen**länge** $\quad$ r: Antennen**abstand**

$$\underline{\vec{H}} = j\frac{I_0}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta l}{2}\right)\cos\vartheta\right] - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin\vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\vec{E}} = H \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_\vartheta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_s}{R_s}} \qquad R_s \rightarrow \text{siehe Antennentabelle Kap. 8.10}$$

Halbwellendipol: $l = \frac{\lambda}{2}$ $\quad$ $\underline{Z}_s = (\overbrace{73,13}^{R_s} + j\overbrace{42,54}^{X_s})\Omega$

Ganzwellendipol: $l = \lambda$ $\quad$ $\underline{Z}_s = (199,09 + j125,41)\Omega$

8.3.2 Eingangs-/Fußpunktimpedanz

Bei leerlaufender Leitung entstehen in Längsrichtung stehende Wellen. Um max. Wirkleistung zu übertragen, muss die Eingangs-/Fußpunktimpedanz Z_A **reell** bzw. die Leitung in Resonanz sein.

$$P_{max} \rightarrow n \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_s \frac{|I_0|^2}{|I_0(z'=0)|^2} = \frac{\underline{Z}_s}{\sin^2\left[\beta\frac{l}{2}\right]}$$

Strom am Fußpunkt:

$$I(z'=0) = I_0 \cdot \sin\left[\beta\left(\frac{l}{2}\right)\right]$$

komplexe Strahlungsleistung:

$$P_s + jQ_s = \underline{Z}_s \cdot \frac{|I_0|^2}{2} = \underline{Z}_A \cdot \frac{|I_0(z'=0)|^2}{2}$$

8.3.3 Strahlungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\beta l}{2}\cos\vartheta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\sin\vartheta}\right)^2 \cdot \vec{e}_r$$

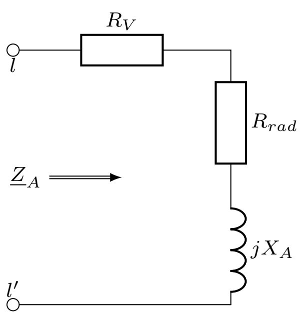
$$S_{av} = S_{iso} \cdot D_{max} = S_{iso} \cdot D_{max} \cdot C^2(\vartheta,\varphi)$$

8.3.4 abgestrahlte Wirkleistung

$$\begin{aligned}
P_s &= \int_A S_{av} \cdot d\vec{a} \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} S_{av} \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
P_s &= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta l}{2}\cos\vartheta\right) - \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)^2}{\sin\vartheta} d\vartheta \\
&= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot x
\end{aligned}$$

Numerische Lösung des Integrals ergibt Faktor x:
bei **Halbwellen**dipol: $x = 1,2188$
bei **Ganzwellen**dipol: $x = 3,3181$

8.4 Antennenkenngrößen



$\underline{Z}_A :=$ Antennenimpedanz
$R_V :=$ Verlustwiderstand
$R_S :=$ Strahlungswiderstand
$X_A :=$ Antennenblindwiderstand
$D :=$ Directifity/Richtfaktor
$G :=$ Gain/Gewinn
$A_{eff} :=$ Wirksame Antennenfläche

X_A wird kompensiert $\rightarrow$ max. Wirkleistungsübertragung

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_s = P_{rad} = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_s$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

wenn R_V vorhanden $\rightarrow$ wirkt sich auf G aus!

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_V} = \frac{R_s}{R_s + R_V}$$

8.4.4 Gewinn/Gain

Verlustlose Antenne, wenn $\eta = 1$

$$G = \eta \cdot D \qquad \text{bei } \eta = 1 \rightarrow G = D$$

8.4.5 Richtcharakteristik

$C_i \stackrel{\wedge}{=}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C_i(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_i} \qquad C_i > 1$$

$$C(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta,\varphi)}{U_{\max}} \qquad 0 \leq C(\vartheta,\varphi) \leq 1$$

$$C(\vartheta,\varphi) = \left|\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\vartheta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\vartheta}\right|$$

8.4.6 Richtfunktion/-faktor

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_i} = C_i^{\mathbf{2}}(\vartheta,\varphi) = D \cdot C^{\mathbf{2}}(\vartheta,\varphi)$$

$$D_{max} = \max\{D(\vartheta,\varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

Halbwellendipol $\quad l = \frac{\lambda}{2}$

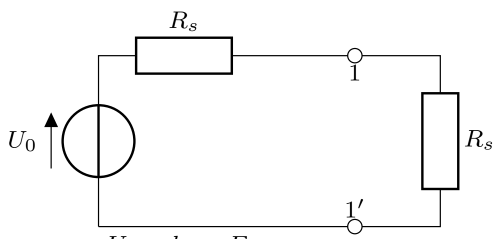
$$D(\vartheta,\varphi) = 1,64 \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin\vartheta}\right)^{\mathbf{2}}$$

Ganzwellendipol $\quad l = \lambda$

$$D(\vartheta,\varphi) = 2,41 \cdot \left(\frac{\cos(\pi\cos\vartheta) + 1}{2\sin\vartheta}\right)^{\mathbf{2}}$$

8.5 Senden und Empfangen

Bei Anpassung: $R_e = R_s \rightarrow$ max. Wirkleistung wird übertragen!



$U_0 = l_{\mathtt{eff}} \cdot E_0$

R_s: Strahlungswiderstand $\quad$ s: Sender $\quad$ e: Empfänger
r: **Abstand** von der Antenne

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot I^2 = \frac{U_0^2}{8R_s} \qquad S_s = \frac{1}{2} H_0^2 Z_{F0} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z_{F0}}$$

$$= \frac{E_0^2 \cdot l_{\mathtt{eff}}^2}{8R_s}$$

8.5.1 Wirksame/Effektive Antennenfläche

$$A_{\texttt{eff}} = \frac{P_e}{S_s} = \frac{U_0^2}{8R_s}\frac{2Z_{F0}}{E_0^2} \qquad A_{\texttt{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\texttt{eff}}^2$$

Beim Hertzschen Dipol:

$$A_{\texttt{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$$

8.5.2 Friis-Übertragungsgleichung

$$S_{iso} = \frac{P_s}{4\pi r^2} \qquad S_s = S_{iso} \cdot D_s$$

$$A_{\texttt{eff,n}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_n(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_n \qquad A_{\texttt{eff,n}}\Big|_{\texttt{max}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_n$$

$$\begin{aligned} P_e &= S_s \cdot A_{\texttt{eff,e}} \\ &= S_s \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e \\ \frac{P_e}{P_s} &= A_{\texttt{eff},e} \cdot A_{\texttt{eff},s} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e \cdot D_s(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_s \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \\ \frac{P_e}{P_s}\Big|_{\texttt{max}} &= G_s \cdot G_e \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \end{aligned}$$

Reziprozität: Sende- und Empfangscharakteristik sind identisch!

8.5.3 Freiraumdämpfung

d: Abstand zur Antenne

$$F = \frac{P_s}{P_e} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \qquad [1]$$

$$a_0 = 20 \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20 \log\left(\frac{4\pi df}{c_0}\right) \qquad [\text{dB}]$$

Freiraumdämpfung wird durch räumliche Verteilung der Strahlung verursacht, **nicht** durch Wirkverluste des Ausbreitungsmediums.

8.5.4 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg\left(\frac{P}{1\text{mW}}\right) \qquad [\text{dBm}]$$

$$L_e = L_s + g_s + g_s - a_0 \qquad [\text{dB}]$$

8.6 Bezugsantennen

$$\boxed{g = 10 \cdot log(G)\text{dB}}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76\text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15\text{dBi}$$

EIRP: Eqivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i[\text{dBi}]$$

ERP: Eqivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d[\text{dBd}]$$

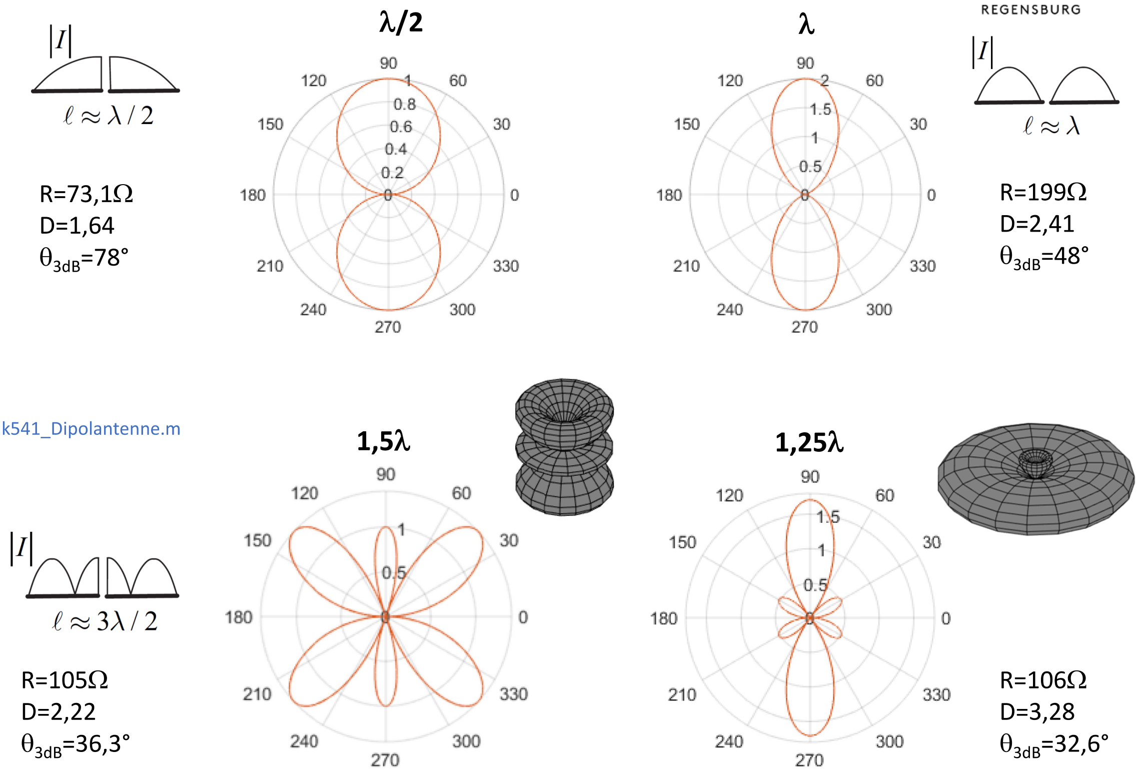
8.7 Monopolantenne

Verhält sich wie ein Dipol, der nur in die obere Hälfte abstrahlt. Strahlungswiderstand halbiert sich und Richtfaktor verdoppelt sich gegenüber der Dipolantenne.
Geometrisch zu kurze Antennen können durch breiteren Drahtdurchmesser, Fußpunktinduktivität oder Dachkapazität elektrisch verlängert werden.

8.8 Richtcharakteristik Dipolantennen

5.4.4 Richtcharakteristik der Dipolantenne

OTH REGENSBURG



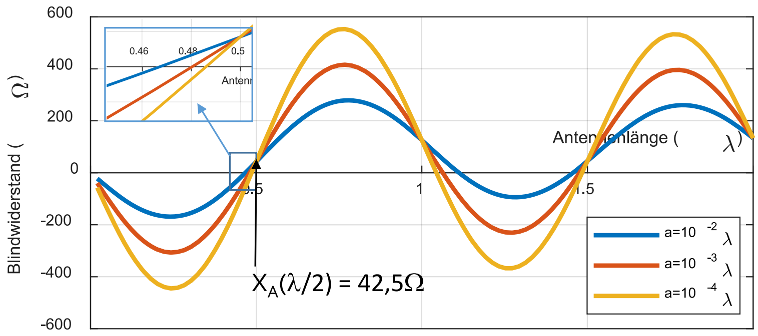
Robert Sattler Felder, Wellen und Leitungen S. 36

8.9 Blindwiderstand Dipolantennen

5.4.5 Blindwiderstand Dipolantenne

OTH REGENSBURG

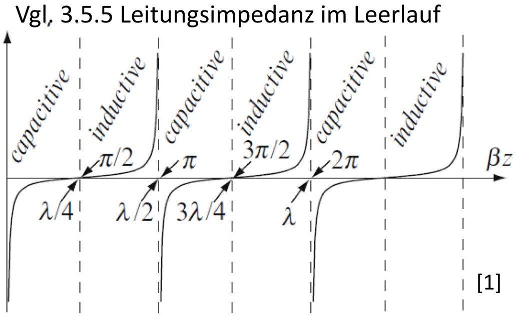
Aus dem Nahfeld des Hertzschen Dipols lässt sich durch Überlagerung der Blindwiderstand der Dipolantenne berechnen:
→ Formel (4-70) in [11]



Für maximale Leistungsübertragung ist ein reeller Eingangswiderstand erforderlich. Dies ist der Fall, wenn die Leitung in Resonanz ist. Man spricht von Resonanzantennen, wenn $\ell \approx n \cdot \lambda/2$.

Je größer der Durchmesser a der Antenne, desto kürzer/länger ist die Länge bei Halb-/Ganzwellenresonanz.

Vgl, 3.5.5 Leitungsimpedanz im Leerlauf



[1]

Robert Sattler Felder, Wellen und Leitungen S. 37

8.10 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear;(in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi}=0{,}08\lambda^2$	–	–	+	+
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität	l	1,5; (1,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	l	$80\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$	90°	$\vartheta=90°$
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$	h	3; (4,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi}=0{,}06\lambda^2$	h	$160\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$	45°	$\vartheta=90°$
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$	h	3; (4,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi}=0{,}06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$	45°	$\vartheta=90°$
$\lambda/4$-Antenne auf leitender Ebene	$\lambda/4$	3,28; (5,1dB)	$0{,}065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi}=0{,}16\lambda$	40Ω	39°	$\vartheta=90°$
kurzer Dipol $l \ll \lambda$	l	1,5; (1,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$	90°	$\vartheta=90°$
$\lambda/2$-Dipol	$\lambda/2$	1,64; (2,1dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi}=0{,}32\lambda$	73Ω	78°	$\vartheta=90°$
λ-Dipol	λ	2,41; (3,8dB)	$0{,}19\lambda^2$	$\gg\lambda$	200Ω	47°	$\vartheta=90°$
$\lambda/2$-Schleifendipol	$\lambda/2$	1,64; (2,1dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi}=0{,}64\lambda$	290Ω	78°	$\vartheta=90°$
Schlitzantenne in Halbraum strahlend	$\lambda/2$, $\varphi=0°$	3,28; (5,1dB)	$0{,}26\lambda^2$	–	$\approx 500\Omega$	78°, $-90° \leqq \varphi \leqq 90°$	$\vartheta=90°$
kleiner Rahmen, n-Windungen, beliebige Form	Fläche A, $\varphi=0°$	1,5; (1,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (\mathrm{A/m})^2}{(\lambda/m)^4}$	90°, $\varphi=90°$	90°, $\varphi=0°$
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$	n-Windungen, D, l, $\varphi=0°$	1,5; (1,8dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$	90°, $\varphi=90°$	90°, $\varphi=0°$
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$	l	$\approx \frac{4}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8}\approx 0{,}12\,l\lambda$	–	–	$50°\lambda/l$	$\vartheta=90°$
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$	l, $\varphi=0°$	$\approx \frac{8}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4}=0{,}25\lambda$	–	–	$51°\lambda/l$	90°, $\varphi=0°$
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$	a, b, $\varphi=0°$	$\approx \frac{6{,}5\cdot 10^6\, ab}{\lambda^2}$	ab	–	–	$51°\lambda/b$, $\varphi=0°$	$51°\lambda/a$
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren	l, $\varphi=0°$	$\approx 5+10\,l/\lambda$	–	–	–	50°, $\varphi=0°$	40°, $\varphi=0°$

9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	J = VAs = Ws
$\vec{A}$	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m}$ $(\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
$\vec{B}$	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
$\vec{D}$	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	C = As
$\vec{E}$	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$\vec{H}$	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
$\vec{J}$	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
$\vec{M}$	Drehmoment	J = Nm = VAs
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
R_{mag}	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	Ω
δ_s	Eindringtiefe	m
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
φ	elek. Skalarpotenzial	V
φ_m	mag. Skalarpotenzial	A
ρ	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
ρ	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
κ, σ	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
λ	Wellenlänge	m
μ	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
Φ_e	elek. Fluss	C = As
Φ_m	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$