



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

22. Januar 2023

Lizenz:

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	title	1
1.2	Differentialoperatoren	1
1.2.1	Rechenregeln	1
1.2.2	Spezielle Vektorfelder	1
1.3	Vektorrechnung	1
1.3.1	Betrag, Richtungswinkel, Normierung	1
1.3.2	Skalarprodukt	1
1.3.3	Kreuzprodukt	1
1.4	Logarithmische Maße/Pegel	1
1.4.1	Rechnen mit Pegeln	2
1.5	Umrechnung der KOS	2
1.6	Kartesishe Koordinaten	3
1.7	Zylinderkoordinaten	3
1.8	Kugelkoordinaten	4
2	Maxwell-Gleichungen	5
2.1	Integralsätze	5
3	Felder	6
3.1	Elektrostatik	6
3.1.1	Potential-/Poisson-Gleichung	6
3.1.2	Randwertprobleme, -bedingungen (RB)	6
3.1.3	Green'sche Funktionen	6
3.1.4	Elektrischer Dipol	6
3.2	Magnetostatik	6
3.2.1	Vektorpotential	6
3.2.2	Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	6
3.2.3	Biot-Savart-Gesetz	7
3.2.4	Magnetischer Dipol	7
3.3	Quasistationäre Felder (Wechselstrom)	7
3.3.1	Komplexe Feldgrößen	7
3.3.2	Skineffekt	7
3.3.3	Näherungen für Skineffekt	7
3.4	E-Felder an Grenzflächen	8
3.4.1	Dielektrische Grenzfläche	8
3.4.2	Grenzfläche Dielektrikum-Leiter	8
3.4.3	Grenzfläche an magn. Feldern	8
4	Wellen	9
4.1	Ausbreitung	9
4.1.1	Allgemein	9
4.1.2	Im leeren Raum(Vakuum)	9
4.1.3	Im verlustlosen/idealen Dielektrika	9
4.1.4	Im Dielektrika mit geringem Verlust	9
4.1.5	Im guten Leiter	9
4.2	Übergang	10
4.2.1	Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	10
4.3	Poyntingvektor	10
4.3.1	Leistung	10
4.3.2	Leistung nach Dämpfung	10
4.3.3	Leistung vom Kabel transportiert	10
4.4	d'Alembertsche Gleichung (allg.)	10
4.5	Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)	10
4.5.1	Zeitbereich	10
4.5.2	Frequenzbereich (harmonisch)	10
4.6	Wellenzahl	11
4.7	Wellenlänge	11
4.8	Phasengeschwindigkeit	11
4.8.1	Gruppengeschwindigkeit	11
4.9	Polarisation	11
4.10	Verlustlose Polarisation	11

4.11	Totalreflexion	11
4.12	Grenzwinkel	11
4.13	Brewster-/Polarisationswinkel	11
4.14	Senkrechter Einfall	12
4.14.1	Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	12
4.14.2	Spezialfall Medium 1 ist Luft	12
4.14.3	Spezialfall Medium 2 ist Luft	12
4.14.4	Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch	12
4.14.5	Spezialfall Medium 2 idealer Leiter	12
4.15	Stehwellenverhältnis	12
4.16	Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)	13
4.17	Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)	13
5	Leitungen	14
5.1	Allgemeine Leitung (mit Verlusten)	14
5.1.1	Gleichungen	14
5.1.2	Kenngrößen	14
5.1.3	Kurzschluss und Leerlauf	14
5.1.4	Lange und Kurze Leitung	14
5.2	Verlustlose Leitung	14
5.2.1	Kenngrößen	14
5.2.2	verlustloser Reflexionsfaktor	14
5.2.3	Beliebiger Abschluss (Last)	15
5.2.4	Kurzschluss an Leitungsende	15
5.2.5	Leerlauf an Leitungsende	15
5.2.6	Leitung als Impedanz-Transformator	15
5.2.7	Vorgehen Eingangswiderstand	15
5.2.8	Stehwellenverhältnis	15
5.2.9	Leistung	15
5.2.10	Gleichspannungswert (=Endwert)	15
5.2.11	Position von Extrema	15
5.2.12	Spezialfall: Angepasste Leitung	15
5.2.13	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung	16
5.3	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	16
5.4	Kettenmatrix einer Leitung	16
6	Smith-Diagramm	17
6.1	Allgemein	17
6.1.1	Normierte Impedanz	17
6.1.2	Reflexionsfaktor	17
6.1.3	Anpassungsfaktor	17
6.2	Impedanz/Admetanz umrechnen	17
6.3	Von Last zu Quelle	17
7	Wellenleiter	18
7.1	Koaxial Leiter	18
7.1.1	Wellenwiderstand	18
7.1.2	Dämpfung	18
7.2	Mikrostreifenleiter	18
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl	18
7.2.2	Schmale Streifen	18
7.2.3	Breite Streifen	18
7.3	Hohlleiter	18
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss	18
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser	18
7.6	Leitungsparameter	18
7.6.1	Parallele Platten	19
7.6.2	Doppelleitung:	19
7.6.3	Koaxial Leitung	19

8	Antennen	20
8.1	Herz'scher Dipol	20
8.1.1	Allgemein	20
8.1.2	Nahfeld	20
8.1.3	Fernfeld	20
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	20
8.1.5	Strahlungswiderstand	20
8.1.6	Verlustwiderstand	20
8.2	Magnetischer Dipol	20
8.2.1	Fernfeld	20
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	20
8.2.3	Nahfeld	20
8.3	Lineare Antenne	20
8.3.1	Dipolantenne	21
8.4	Antennenkenngrößen	21
8.4.1	Abgestrahlte Leistung	21
8.4.2	Verlustleistung	21
8.4.3	Wirkungsgrad	21
8.4.4	Richtcharakteristik	21
8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor	21
8.4.6	Gewinn	21
8.4.7	Wirksame Antennenfläche	21
8.5	Bezugsantennen	21
8.6	Senden und Empfangen	21
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß	22
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel	22
8.7	Antennentabelle	23
9	Einheiten	24

1 Grundlagen

1.1 title

1.2 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz

div: Vektorfeld \rightarrow Skalar
Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation

rot: Vektorfeld \rightarrow Vektorfeld
Wirbeldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix}$$

Gradient

grad: Skalarfeld \rightarrow Vektor/Gradientenfeld
zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

1.2.1 Rechenregeln

ϕ, ψ : Skalarfelder \vec{A}, \vec{B} : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.2.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Vektorpotential \vec{E}

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Skalarpotential ϕ

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad } \phi) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld \vec{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

1.3 Vektorrechnung

1.3.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.3.2 Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \cos(\varphi) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

1.3.3 Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} A_{Para} &= |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n : Spannung, Strom, \vec{E} -, \vec{H} -Feld, Schalldruck

Leistungsgröße P_n : Energie, Intensität, Leistung

Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- **Dämpfungsmaß** a in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$$\begin{aligned} 1 \text{ dB} &= 0,1151 \text{ Np} & 1 \text{ Np} &= 8,686 \text{ dB} \\ a [\text{dB}] &= 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} & a [\text{dB}] &= 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{F_1}{F_2} &= 10^{\frac{a[\text{dB}]}{20}} & \frac{P_1}{P_2} &= 10^{\frac{a[\text{dB}]}{10}} \\ a [\text{Np}] &= \ln \frac{F_1}{F_2} & a [\text{Np}] &= \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} \\ \frac{F_1}{F_2} &= e^{a[\text{Np}]} & \frac{P_1}{P_2} &= e^{2a[\text{Np}]} \end{aligned}$$

- **absolute Pegel** L mit Bezugsgrößen P_0, F_0

$$\begin{aligned} L [\text{dB}] &= 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} & L [\text{dB}] &= 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0} \\ \frac{F_1}{F_0} &= 10^{\frac{L[\text{dB}]}{20}} & \frac{P_1}{P_0} &= 10^{\frac{L[\text{dB}]}{10}} \end{aligned}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1 \text{ mW}$	$L_{P/\text{mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1 \text{ W}$	$L_{P/\text{W}}$
dBV, dB(V)	$F_0 = 1 \text{ V}$	$L_{U/\text{V}}$
dBμV, dB(μV)	$F_0 = 1 \mu\text{V}$	$L_{U/\mu\text{V}}$
dBμA, dB(μA)	$F_0 = 1 \mu\text{A}$	$L_{I/\mu\text{A}}$
dB(μV/m)	$F_0 = 1 \frac{\mu\text{V}}{\text{m}}$	$L_{E/(\mu\text{V/m})}$
dB(μA/m)	$F_0 = 1 \frac{\mu\text{A}}{\text{m}}$	$L_{H/(\mu\text{A/m})}$

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße P_n	Feldgröße F_n
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

- **relativer Pegel / Maß**

Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \quad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

$$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor}) \quad \text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$$

1.5 Umrechnung der KOS

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	dr	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		r
$\arctan \frac{y}{x}$		φ
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		ϑ
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		dr
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

1.6 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.7 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.8 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

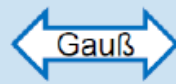
2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Gaußsches Gesetz: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

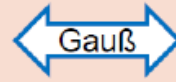


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Induktionsgesetz: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Amperesches Gesetz: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Amperesches- / Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind ϵ u. μ Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich \rightarrow nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = [T] \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Verkopplung von \vec{E} - und \vec{H} -Felder über $\vec{J} = \kappa \vec{E}$.

Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder \rightarrow Gradientenfeld \rightarrow elek. Ladungen sind Quellen des \vec{E} -Feldes (Skalare Potenzialfkt. φ)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = 0 &= \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-PLace-Gleichung, wenn $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\varepsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\varphi}{\varepsilon}$$

3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

Dirichlet-RB: Gesuchte Potenzialfunktion φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)

Neumann-RB: Die Normalenableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der Fkt. φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

3.1.3 Green'sche Funktionen

• Skalarpotential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

• E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

• D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

• **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung mit $\varphi(\infty) = 0$

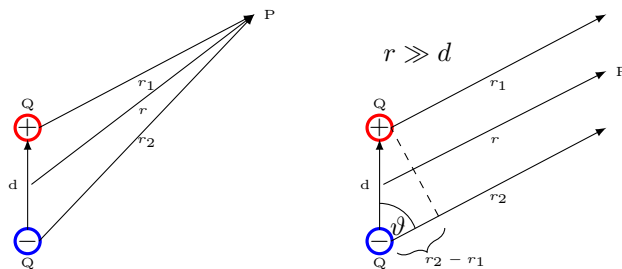
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole: $\text{div } \vec{B} = 0$.

Skalarpotential φ_m existiert, wenn \vec{H} wirbelfrei ist:

$\text{rot } \vec{H} = 0$, wenn $\vec{J} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} = 0 &= \text{div rot } B & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential φ .

Coulomb-Eichung, wenn $\text{div } \vec{A} = 0$, gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

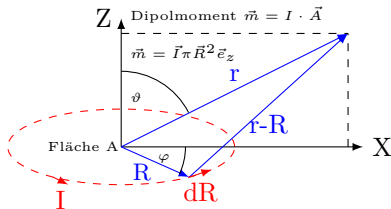
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{r} : Aufpunkt \vec{r}' : Quellpunkt

3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium: $\varepsilon, \mu, \kappa = \text{konst.}$

Leiter ist quasineutral: $\rho = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexe Amplitude / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

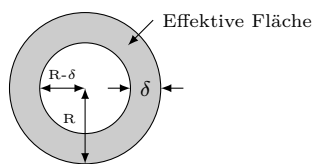
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

3.3.2 Skineffekt



$$[\sigma/\kappa]: \text{Leitfähigkeit} \quad \frac{A}{V_m} = \frac{1}{\Omega m}$$

Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke
(Abfall der Amplitude: $A_0 \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für E-Feld

Amplitude und **Phase** bezogen auf δ :

Amplitude: $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$

Dämpfung: $\alpha = \frac{1}{\delta}$ Phase: $\varphi = -\frac{x}{\delta}$

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Rundleiter - Effektive Fläche:

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left(R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

3.3.3 Näherungen für Skineffekt

$$\text{Rundleiter: } R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$$

Geometrische Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} \right)^4 & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

Bessel-Funktion (Fehler < 6%):

$$\begin{aligned} \frac{R_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \\ \frac{X_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \hat{=} \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

Empirische Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1) $\hat{=}$ Kreisring mit Näherung (2) $\hat{=}$ Ring mittig

3.4 E-Felder an Grenzflächen

3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem ε .

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem ε .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

Querschichtung:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem μ .

Längsschichtung:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem μ .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner c_0
- raumzeitlicher Vorgang $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Einheit [S] = $\frac{W}{m^2}$
Falls $\vec{E} \perp \vec{H}$ und $\vec{S} \perp \vec{E}$ und $\vec{S} \perp \vec{H}$

Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von $\vec{E}(z, t)$)

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

α : Dämpfungskonstante [Np/m]

β : Phasenkonstante [rad/m]

v_p : Phasengeschwindigkeit [m/s]

v_g : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

λ : Wellen [m]

4.1 Ausbreitung

4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

4.1.2 Im leeren Raum (Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos: $\sigma = 0$, maximale Wirkleistung
 Z_F rein reel \rightarrow ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$$

4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

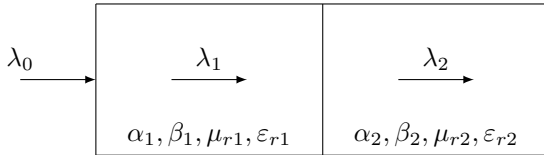
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

4.2 Übergang

4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

4.3 Poyntingvektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$
Leistungsflussdichte $S_{av} = \vec{S}_{av} $	

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S_{AV} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$= \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$w_e = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$w_e = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$

4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 d'Alambertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \underline{\vec{E}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{E}} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} i = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

keine Raumladung $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{H}$$

4.6 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$

$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium} \leq c_0}$$

4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

$$\downarrow$$

$$E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	H oder E
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

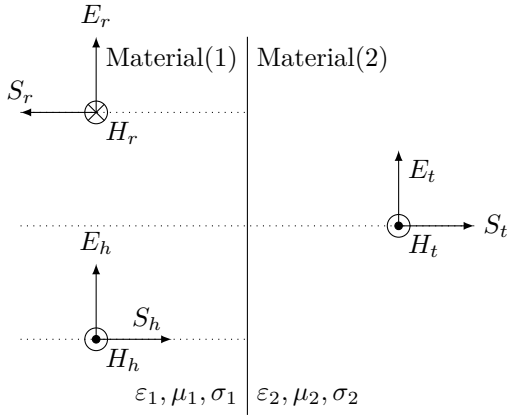
$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$E_{t1} = E_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$

$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

StehendeWelle

→ H_{max} und E_{min} bei $n \cdot \lambda/2$

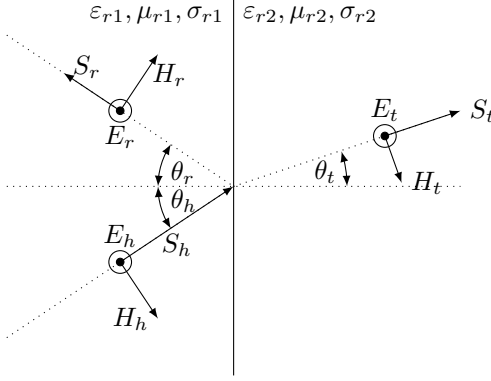
→ H_{min} und E_{max} bei $(2n - 1) \cdot \lambda/4$

→ 90° Phasenverschiebung

4.15 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

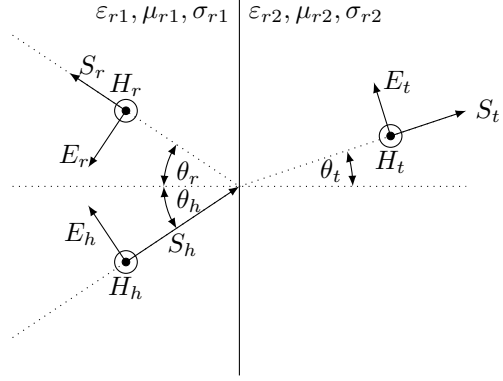
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

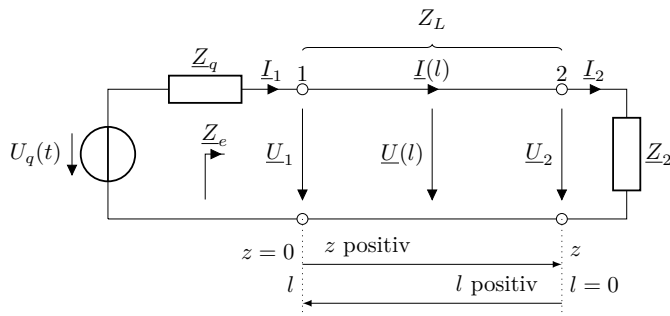
- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

5 Leitungen

5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang: \underline{Z}_e Anfang: $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$ Abschluss: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}(l=0)$
 Referenzpunkt **Last** ($l = 0$):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{I}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer γ nicht im TR berechenbar:

Lösung: αl $\left[\frac{\text{NP}}{\text{m}} \right]$ und βl $\left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$ einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$: Dämpfung $e^{\pm j\beta l}$: Phase (\angle im TR)

Für Winkel αl bzw. βl auf **RAD** in TR!

5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer \underline{Z}_L nicht in TR berechenbar:

Betrag: erst \underline{Z}_L^2 , dann $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$ ermitteln.

Phase: $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \gamma$ analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor: $r(l) \hat{=} r_1$: Leitungsanfang

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand \underline{Z}_e am Leitungsende:

$$\text{mit Kurzschluss} \quad \underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$$

$$\text{im Leerlauf} \quad \underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$$

$$\text{beliebige Länge} \quad \underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$$

5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$

Abschluss egal, es wird nur $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$ gemessen.

5.2 Verlustlose Leitung

5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \neq f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{LC}}$$

5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l=0) = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$$

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$

5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r & \underline{I}_2 &= \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tan(\beta l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right] \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sin(\beta l) \right]\end{aligned}$$

5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= 0 & \underline{U}_2 &= \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r & \underline{I}_h &= \underline{I}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_L \cdot j \tan(\beta l) & & \rightarrow \text{rein imaginär!} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 \underline{Z}_L \cdot j \sin(\beta l) \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) & \underline{I}_2 &= \frac{2\underline{U}_h}{\underline{Z}_L}\end{aligned}$$

Bildung einer Stehen

5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$$\begin{aligned}\underline{Z}_2 &= \infty & \underline{I}_2 &= \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r & \underline{U}_h &= \underline{U}_r \\ \underline{Z}(l) &= \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j \frac{\underline{Z}_L}{\tan(\beta l)} & & \rightarrow \text{rein imaginär!} \\ \underline{U}(l) &= \underline{U}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) & \underline{U}_2 &= 2\underline{U}_h \\ \underline{I}(l) &= \underline{I}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot j \sin(\beta l)\end{aligned}$$

5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$ aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_L} \rightarrow \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert: L \leftrightarrow C, Kurzschluss \leftrightarrow Leerlauf, **großes R** \leftrightarrow **kleines R**

5.2.7 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{\underline{R}_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

5.2.8 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\begin{aligned}\text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} \\ &= \frac{R_{\max}}{Z_L} \\ \text{SWR}^{-1} &= \frac{R_{\min}}{Z_L} & |r_A| &= \frac{\text{SWR} + 1}{\text{SWR} - 1}\end{aligned}$$

5.2.9 Leistung

$$\begin{aligned}P_A &= P_H - P_R \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2) \\ &= P_{\max} \cdot (1 - r^2) \\ &= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ \underline{I}(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z\end{aligned}$$

5.2.10 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.2.11 Position von Extrema

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r}} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\begin{aligned}\lambda_{\min/\max} &= \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}} \\ z_{\min} &= \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}} \\ z_{\max} &= \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}} \\ z &= \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}\end{aligned}$$

5.2.12 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_L = \underline{Z}(z)$$

$$\underline{r}_A = 0 \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$

$$\text{SWR} = 1$$

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$= \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \cdot e^{j\beta z}$$

5.2.13 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

$$\underline{R_A > Z_L} \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

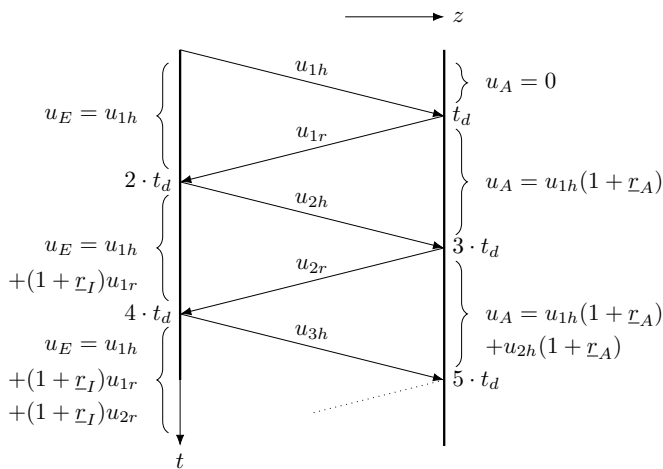
$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$\underline{R_A < Z_L} \rightarrow \theta_r = \pi$$

$$\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

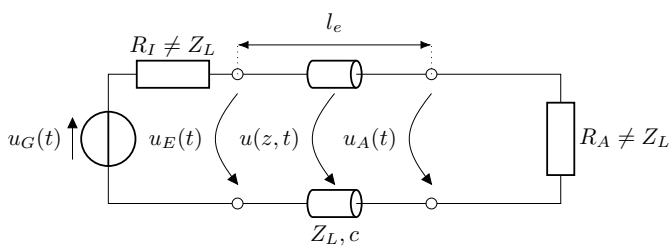


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Hinlaufende Welle } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

$$\begin{aligned} \text{Signallaufzeit: } t_d &= \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \\ &= \frac{l}{v_p} \end{aligned}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

6.1.2 Reflexionsfaktor

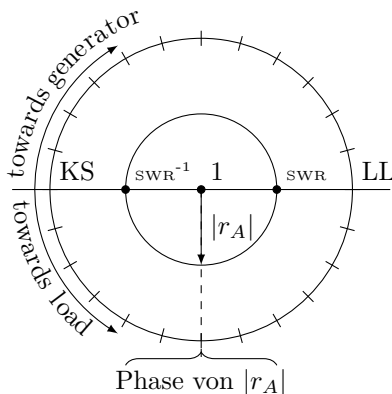
$r(l) = \underline{r}$ $r_{(l=0)} = \underline{r}_2$ $0 < r < 1$ $0 < \Psi < 2\pi$
Immer gültig, auch ohne Quelle!

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ \underline{r}_2 &= \frac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_L} \\ \underline{z}_n &= \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \end{aligned}$$

6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von $m \rightarrow$ Werte von $\text{Re}\{\underline{z}_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} \quad |\underline{r}| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m}$$



$$\begin{aligned} \underline{z}_n &= \frac{\underline{Z}_n}{Z_L} \\ \underline{r}_n &= \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n} \\ m &= \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} \\ s &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

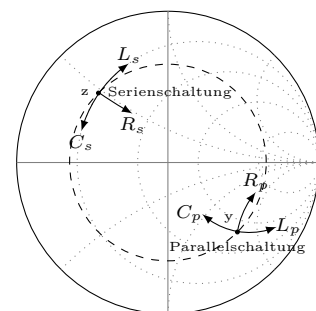
6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von \underline{z}_n um Mittelpunkt ergibt \underline{y}_n . (Phase $\pm 180^\circ / \pm \pi$)

6.3 Lastseite \rightarrow Quelle

1. $Z_L = Z_B$ ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren
 $\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L}$
4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch \underline{z}_n s nach außen
Ablesen und Notieren:
 \rightarrow Relative Länge $[\frac{l}{\lambda}]$
 \rightarrow Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichnen
Ablesen und Notieren:
 \rightarrow **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse
 \rightarrow **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse
 \rightarrow \underline{r} abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen \rightarrow Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen
Ablesen und Notieren:
 \rightarrow Relativer Winkel
8. Wenn $\alpha \neq 0$
 \rightarrow Dämpfung ausrechnen \rightarrow Um Faktor nach innen spiralisieren
9. Dieser Punkt ist \underline{z}_e
10. Eingangsimpedanz ablesen

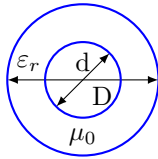
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser
d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

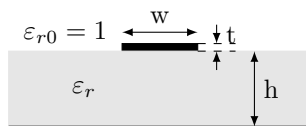
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite
h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer $\frac{w}{h}$ desto mehr nähert sich $\epsilon_{r,\text{eff}}$ an ϵ_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[\frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

7.6 Leitungsparameter

σ = Leitwert des Dielektr. σ_c = Leitwert des Leiters

7.6.1 Parallele Platten

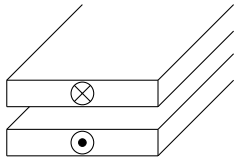
w = Platten Breite d = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

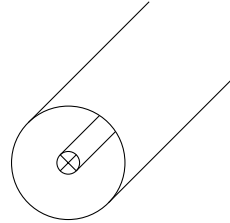
$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$



$R = \frac{2}{w\delta\sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w\varepsilon}{d}$



$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

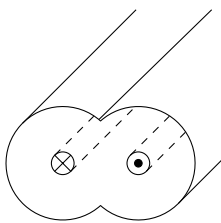
$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

7.6.2 Doppelleitung:

a = Leiter Radius d = Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU → 1; OPTN → 1 → 5



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

7.6.3 Koaxial Leitung

a = innen Radius b = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\hat{I}}{2\pi r} \right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, \vec{S} nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

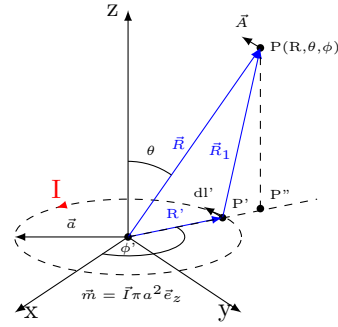
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

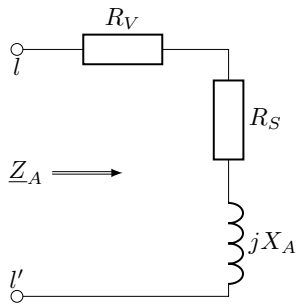
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi \end{aligned}$$

8.4 Antennenkenngrößen



Z_A := Antennenimpedanz
 R_V := Verlustwiderstand
 R_S := Strahlungswiderstand
 X_A := Antennenblindwiderstand
 D := Directivity/Richtfaktor
 G := Gain/Gewinn
 A_{eff} := Wirksame Antennenfläche

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

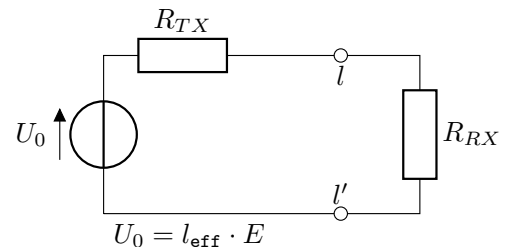
EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



$$U_0 = l_{\text{eff}} \cdot E$$

Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

$$A_{\text{eff}}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\ &= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \lg \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left(\frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]$$

8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1: (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	l	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	h	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28: (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	73Ω		
λ -Dipol		2,41: (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	200Ω		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28: (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, n -Windungen, beliebige Form		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzchen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzchen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	ab	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l \lambda$	—	—	—		

9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
\vec{A}	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
\vec{B}	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
\vec{D}	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
\vec{E}	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
\vec{H}	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
\vec{J}	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
\vec{J}_F	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
\vec{M}	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
R_{mag}	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
\vec{S}	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	Ω
δ_s	Eindringtiefe	m
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
φ	elek. Skalarpotenzial	V
φ_m	mag. Skalarpotenzial	A
ρ	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
ρ	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
κ, σ	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
λ	Wellenlänge	m
μ	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
Φ_e	elek. Fluss	$C = As$
Φ_m	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$