



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23
nach Vorlesung von Prof. Stücke

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

31. Januar 2023

Lizenz:

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Einheiten	1
1.2	Vektorrechnung	1
1.2.1	Betrag, Richtungswinkel, Normierung	1
1.2.2	Skalarprodukt	1
1.2.3	Kreuzprodukt	1
1.3	Differentialoperatoren	1
1.3.1	Rechenregeln	1
1.3.2	Spezielle Vektorfelder	1
1.4	Logarithmische Maße/Pegel	2
1.4.1	Rechnen mit Pegeln	2
1.5	Koordinatensysteme	2
1.5.1	Umrechnungstabelle	2
1.5.2	Schema KOS Kugel/Zylinder	2
1.5.3	Kartesische Koordinaten	3
1.5.4	Zylinderkoordinaten	3
1.5.5	Kugelkoordinaten	3
2	Maxwell-Gleichungen	4
2.1	Integralsätze	4
3	Felder	5
3.1	Elektrostatik	5
3.1.1	Potential-/Poisson-Gleichung	5
3.1.2	Randwertprobleme, -bedingungen (RB)	5
3.1.3	Green'sche Funktionen	5
3.1.4	Elektrischer Dipol	5
3.2	Magnetostatik	5
3.2.1	Vektorpotential	5
3.2.2	Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	5
3.2.3	Biot-Savart-Gesetz	5
3.2.4	Magnetischer Dipol	5
3.3	Quasistationäre Felder (Wechselstrom)	6
3.3.1	Komplexe Feldgrößen	6
3.3.2	Skineffekt	6
3.3.3	Näherungen für Skineffekt	6
3.4	E-Felder an Grenzflächen	6
3.4.1	Dielektrische Grenzfläche	6
3.4.2	Grenzfläche Dielektrikum-Leiter	6
3.4.3	Grenzfläche an magn. Feldern	6
4	Wellen	7
4.1	Wellengleichungen allgemein	7
4.1.1	Zeitbereich	7
4.1.2	Frequenzbereich	7
4.1.3	Vereinfachung der Gleichungen	7
4.2	Ebene Wellen	7
4.3	Kenngrößen	7
4.3.1	Wellenzahl	7
4.3.2	Wellenlänge	7
4.3.3	Phasengeschwindigkeit	7
4.3.4	Brechzahl/Brechungsindex	7
4.3.5	Gruppengeschwindigkeit	7
4.3.6	Feldwellenwiderstand	7
4.3.7	Poynting-Vektor	7
4.4	Ausbreitung im Medium	8
4.4.1	Allgemein (mit Verlusten)	8
4.4.2	Im leeren Raum (Vakuum)	8
4.4.3	Im verlustlosen Dielektrikum	8
4.4.4	Im Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.4.5	Im guten Leiter	8
4.5	Ebene Wellen an Grenzflächen	8

4.5.1	Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.5.2	Brechungsgesetz allgemein	8
4.5.3	Leistungsbilanz an Grenzflächen	8
4.6	Senkrechter Einfall	9
4.6.1	Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	9
4.6.2	Medium 1 oder 2: Luft	9
4.6.3	beide Medien: nicht magnetisch	9
4.6.4	Medium 2: idealer Leiter	9
4.6.5	Stehwellenverhältnis (SWR)	9
4.7	Schräger Einfall (allgemein)	9
4.7.1	Brechungsgesetz	9
4.7.2	Totalreflexion/Grenzwinkel	9
4.7.3	Brewster-/Polarisationswinkel	9
4.7.4	Senkrechte Polarisation ohne μ_r	10
4.7.5	Parallele Polarisation ohne μ_r	10
4.7.6	Senkrechte Polarisation mit μ_r	11
4.7.7	Parallele Polarisation mit μ_r	11
5	Leitungen	12
5.1	Allgemeine Leitung (mit Verlusten)	12
5.1.1	Gleichungen	12
5.1.2	Kenngrößen	12
5.1.3	Kurzschluss und Leerlauf	12
5.1.4	Lange und Kurze Leitung	12
5.2	Verlustlose Leitung	12
5.2.1	Kenngrößen	12
5.2.2	verlustloser Reflexionsfaktor	12
5.2.3	Beliebiger Abschluss (Last)	12
5.2.4	Kurzschluss an Leitungsende	12
5.2.5	Leerlauf an Leitungsende	13
5.2.6	Leitung als Impedanz-Transformator	13
5.2.7	Angepasste (reflexionsfreie) Leitung	13
5.2.8	Ohmscher Abschluss an Leitungsende	13
5.2.9	Position von Extrema	13
5.2.10	Stehwellenverhältnis (SWR)	13
5.2.11	Leistung	13
5.2.12	Reflexionsfaktor mit Verlusten	13
5.2.13	Gleichspannungswert (=Endwert)	13
5.3	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	13
5.4	Leitungsparameter	14
5.4.1	Allgemein	14
5.4.2	Streifenleitung / Parallele Platten	14
5.4.3	Doppelleitung	14
5.4.4	Koaxialleitung	14
6	Smith-Diagramm	15
6.1	Allgemein	15
6.1.1	Normierte Impedanz	15
6.1.2	Reflexionsfaktor	15
6.1.3	Anpassungsfaktor	15
6.2	Impedanz/Admetanz umrechnen	15
6.3	Maxima und Minima bei stehender Welle	15
6.4	Von Last zu Quelle	15
6.5	Vorgehen mit geg. Eingangswiderstand	15
7	Wellenleiter	16
7.1	Koaxial Leiter	16
7.1.1	Wellenwiderstand	16
7.1.2	Dämpfung	16
7.2	Mikrostreifenleiter	16
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl	16
7.2.2	Schmale Streifen	16
7.2.3	Breite Streifen	16

7.3	Hohlleiter	16
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss	16
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser	16
8	Antennen	17
8.1	Herz'scher Dipol (HDp)	17
8.1.1	Allgemein	17
8.1.2	Nahfeld	17
8.1.3	Fernfeld	17
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld HDp	17
8.1.5	Strahlungswiderstand HDp	17
8.1.6	Verlustwiderstand HDp	17
8.2	Magnetischer Dipol	17
8.2.1	Fernfeld	17
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	17
8.2.3	Nahfeld	17
8.3	Lineare Antenne	18
8.3.1	Dipolantenne allgemein	18
8.3.2	Eingangs-/Fußpunktimpedanz	18
8.3.3	Strahlungsdichte	18
8.3.4	abgestrahlte Wirkleistung	18
8.4	Antennenkenngrößen	18
8.4.1	Abgestrahlte Leistung	18
8.4.2	Verlustleistung	18
8.4.3	Wirkungsgrad	18
8.4.4	Gewinn/Gain	18
8.4.5	Richtcharakteristik	18
8.4.6	Richtfunktion/-faktor	18
8.5	Senden und Empfangen	18
8.5.1	Wirksame/Effektive Antennenfläche	19
8.5.2	Friis-Übertragungsgleichung	19
8.5.3	Freiraumdämpfung	19
8.5.4	Leistungspegel/Freiraumpegel	19
8.6	Bezugsantennen	19
8.7	Monopolantenne	19
8.8	Richtcharakteristik Dipolantennen	20
8.9	Blindwiderstand Dipolantennen	20
8.10	Antennentabelle	21
9	Einheiten	22

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Permiabilitätskonstante	μ_0	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Dielektrizitätskonstante	ε_0	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
elek. Ladung/Fluss	Q, q	$C = As$
elek. Feldstärke	\vec{E}	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
elek. Flussdichte	\vec{D}	$\frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Kapazität	C	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
mag. Fluss	ϕ, Φ	$Wb = Vs$
mag. Feldstärke	\vec{H}	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$
mag. Flussdichte	\vec{B}	$T = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
Induktivität	L	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$
Strahlungsdichte	S_{av}, I	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

1.2 Vektorrechnung

1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.2.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

1.2.3 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

1.3 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz div: Vektorfeld \rightarrow Skalar S.382

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation rot: Vektorfeld \rightarrow Vektorfeld S.382

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

Gradient grad: Skalarfeld \rightarrow Vektor/Gradientenfeld

zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

1.3.1 Rechenregeln

ϕ, ψ : Skalarfelder \vec{A}, \vec{B} : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Vektorpotential \vec{E}

$$\text{div } \vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Skalarpotential ϕ

$$\text{rot } \vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld \vec{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{F}) &= \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F} \end{aligned}$$

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n : Spannung, Strom, \vec{E} -, \vec{H} -Feld, Schalldruck
Leistungsgröße P_n : Energie, Intensität, Leistung
Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- **Dämpfungsmaß** a in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$1\text{ dB} = 0,1151\text{ Np}$ $1\text{ Np} = 8,686\text{ dB}$

$a\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2}$ $a\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{20\text{dB}}}$ $\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{10\text{dB}}}$

$a\text{ [Np]} = \ln \frac{F_1}{F_2}$ $a\text{ [Np]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = e^{a\text{[Np]}}$ $\frac{P_1}{P_2} = e^{2a\text{[Np]}}$

- **absolute Pegel** L mit Bezugsgrößen P_0, F_0

$L\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0}$ $L\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$

$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{20\text{dB}}}$ $\frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{10\text{dB}}}$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1mW$	$L_{P/mW}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1W$	$L_{P/W}$

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße P_n	Feldgröße F_n
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

- **relativer Pegel / Maß**
Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

$\log(x^a) = a \cdot \log(x)$ $\log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$

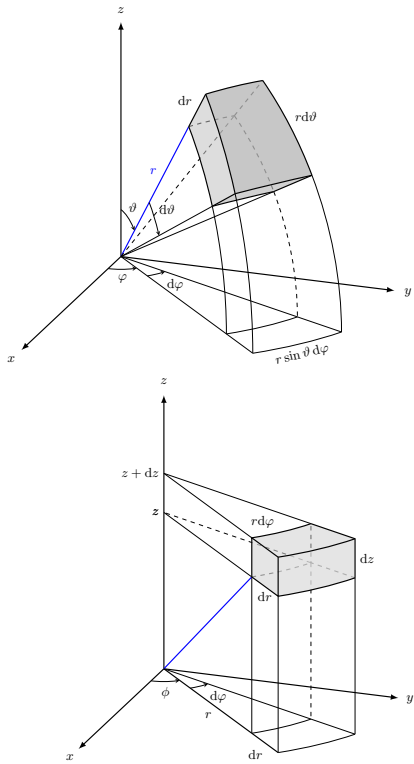
$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor})$ $\text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Umrechnungstabelle

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	dr	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		r
$\arctan \frac{y}{x}$		φ
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		ϑ
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		dr
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

1.5.2 Schema KOS Kugel/Zylinder



1.5.3 Kartesische Koordinaten

Variablen: x, y, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente: $dV = dx dy dz$

Flächenelemente: $dA_{xy} = dx dy \vec{e}_z$ $dA_{yz} = dy dz \vec{e}_x$ $dA_{xz} = dx dz \vec{e}_y$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; y; z)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$ **Divergenz:** $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$

La-Place: $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z$$

1.5.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen: r, φ, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$

Volumenelemente: $dV = r dr d\varphi dz$

Flächenelemente: $dA_{r\varphi} = r dr d\varphi \vec{e}_z$ $dA_{rz} = dr dz \vec{e}_\varphi$ $dA_{\varphi z} = r d\varphi dz \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; \varphi; z)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$

Divergenz: $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$

La-Place: $\Delta \phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_r \vec{e}_r + \Delta E_\varphi \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z$

$$\Delta \vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z$$

1.5.5 Kugelkoordinaten

siehe Papula S.391/392

Variablen: r, ϑ, φ Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

Volumenelemente: $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Flächenelemente: $dA_{r\vartheta} = r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi$ $dA_{r\varphi} = r \sin \vartheta dr d\varphi \vec{e}_\vartheta$ $dA_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

Divergenz: $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$

La-Place: $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Gaußsches Gesetz: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Induktionsgesetz: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Amperesches Gesetz: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{ind} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind ϵ u. μ Skalare:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

Zeitbereich: $\frac{\partial}{\partial t}$

Harmonischer Frequenzbereich (komplexe Berechnung): $j\omega$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich \rightarrow nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = [T] \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Verkopplung von \vec{E} - und \vec{H} -Felder über $\vec{J} = \kappa \vec{E}$.

Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder \rightarrow Gradientenfeld \rightarrow elek. Ladungen sind Quellen des \vec{E} -Feldes (Skalare Potenzialfkt. φ)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 = \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \epsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\epsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

Dirichlet-RB: Gesuchte Potenzialfunktion φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)

Neumann-RB: Die Normalenableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der Fkt. φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

3.1.3 Green'sche Funktionen

• Skalarpotential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

• E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

• D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

• **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung mit $\varphi(\infty) = 0$

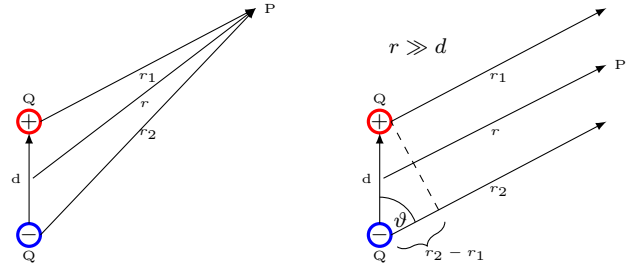
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole: $\text{div } \vec{B} = 0$.

Skalarpotential φ_m existiert, wenn \vec{H} wirbelfrei ist:

$\text{rot } \vec{H} = 0$, wenn $\vec{J} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 = \text{div rot } B & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential φ .

Coulomb-Eichung, wenn $\text{div } \vec{A} = 0$, gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

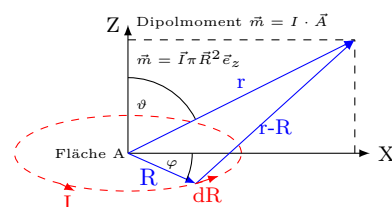
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{r} : Aufpunkt \vec{r}' : Quellpunkt

3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium: $\epsilon, \mu, \kappa = \text{konst.}$

Leiter ist quasineutral: $\rho = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexer Amplitudenvektor / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

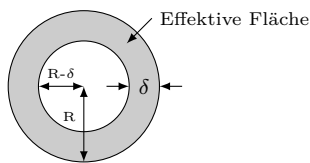
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

3.3.2 Skineffekt



$$[\sigma/\kappa]: \text{Leitfähigkeit} \quad \frac{A}{V_m} = \frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$$

Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke
(Abfall der Amplitude: $A_0 \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

analog für E-Feld

Amplitude und **Phase** bezogen auf δ :

$$\text{Amplitude: } x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$$

$$\text{Dämpfung: } \alpha = \frac{1}{\delta} \quad \text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Rundleiter - Effektive Fläche:

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left(R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

3.3.3 Näherungen für Skineffekt

$$\text{Rundleiter: } R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$$

Geometrische Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} \right)^4 & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

Bessel-Funktion (Fehler < 6%):

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \triangleq \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

Empirische Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1) $\hat{=}$ Kreisring mit Näherung (2) $\hat{=}$ Ring mittig

3.4 E-Felder an Grenzflächen

3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem ϵ .

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem ϵ .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\epsilon_2}{D_{1n}/\epsilon_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

Querschichtung:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\epsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem μ .

Längsschichtung:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem μ .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4 Wellen

4.1 Wellengleichungen allgemein

4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:
mit harmonischer Zeitabhängigkeit: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum: $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter $\rho = 0$, $\kappa \gg \omega \varepsilon$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen
 $\rho = 0$, keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{H}$$

TEM-Welle: \vec{E} und \vec{H} besitzen nur transversale (= senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende) Komponenten.

ebene Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (**Realteil** von $\vec{E}(z, t)$)

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

komplexer Amplitudendrehzeiger

Achtung: **mit** $e^{j\omega t}$!, wenn **ohne**: komplexer Amplitudenvektor.

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\underline{\gamma} z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante

Dämpfungskonstante α : $\frac{\text{Np}}{\text{m}}$ Phasenkonstante β : $\frac{\text{rad}}{\text{m}}$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

4.3 Kenngrößen

4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$\beta \hat{=} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.
Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum λ_0

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0} \quad [\text{m}]$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_{p, \text{Medium}} \leq c_0$$

4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \hat{=} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

4.3.6 Feldwellenwiderstand

Z_{F0} : im **materiefreien** Raum/Vakuum!
Falls keine Verluste (ideal) $\rightarrow Z_F$ reell!

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_{\text{transversal}}}{\underline{H}_{\text{transversal}}} = \frac{E_h}{H_h} = -\frac{E_r}{H_r} = \frac{\omega \mu}{k} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\kappa + j\omega \varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega \quad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4.3.7 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$
Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} = \vec{S}_{av} $	

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re} \{ \underline{U} \cdot \underline{I}^* \}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \quad P_{\text{Leitung}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$

4.4 Ausbreitung im Medium

$\kappa, \sigma =$ Leitfähigkeit

4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \quad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum: $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \quad Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.4.3 Im verlustlosen Dielektrikum

verlustlos: $\kappa = 0$, maximale Wirkleistung

Z_F rein reell \rightarrow ebene Welle

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4.4.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon} \right)$$

4.4.5 Im guten Leiter

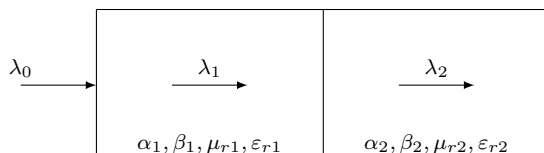
geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

4.5.2 Brechungsgesetz allgemein

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.5.3 Leistungsbilanz an Grenzflächen

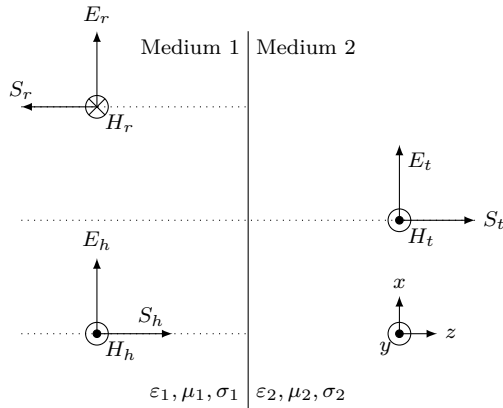
Index n: Normalkomponente. Wichtig: Beträge beachten!

$$S_{tn} = S_{hn} - S_{rn}$$

$$S_{t0} = S_{h0} \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_2} (1 - r^2)$$

4.6 Senkrechter Einfall

Gilt bei Einfallswinkel $\theta_h = 0$.



$$\begin{aligned}
 r_e &= \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & t_e &= \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \\
 r_m &= \frac{Z_{F1} - Z_{F2}}{Z_{F2} + Z_{F1}} & t_m &= \frac{2 \cdot Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \\
 &= -r_e & &= t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \\
 t_e &= 1 + r_e & t_m &= 1 + r_m \\
 E_{t1} &= E_{t2} & H_{t1} &= H_{t2} \\
 E_t &= t_e \cdot E_h & H_t &= t_e \cdot \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot H_h \\
 E_r &= r_e \cdot E_h & -H_r &= r_e \cdot H_h \\
 E_t &= E_h + E_r & H_t &= H_h + H_r \\
 t_e \cdot E_h &= E_h + r_e \cdot E_h & t_m \cdot H_h &= H_h + r_m \cdot H_h
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_t &= H_h + H_r \\
 \frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} &= \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}} \\
 \frac{t}{Z_{F2}} &= \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}
 \end{aligned}$$

4.6.1 Verlustloses Dielektrikum allgemein

gilt für $\kappa = 0$, keine Dämpfung.

rein reell: $Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ rein imaginär: $\gamma = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon}$

$$\begin{aligned}
 r &= r_e = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r1}}} \\
 t &= t_e = \frac{2 Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1} \mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r1}}}
 \end{aligned}$$

4.6.2 Medium 1 oder 2: Luft

$$\begin{aligned}
 \mu_{r1} &= \varepsilon_{r1} = 1 & \mu_{r2} &= \varepsilon_{r2} = 1 \\
 r &= \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} & r &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}} \\
 t &= \frac{2 \sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} & t &= \frac{2 \sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}
 \end{aligned}$$

4.6.3 beide Medien: nicht magnetisch

Gilt für $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} \quad t = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.6.4 Medium 2: idealer Leiter

$\vec{E} = 0$ im idealen Leiter \rightarrow **Stehende** Welle!, vollständige Reflexion.

$$Z_{F2} = 0 \quad r = -1 \quad t = 0 \quad \vec{S}_{av} = 0$$

$$\begin{aligned}
 E_{1x} &= -2j \cdot E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) & H_{1y} &= 2 \cdot \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z) \\
 E_{1x}(z, t) &= 2 E_{h1} \cdot \sin(\beta_1 z) \cdot \sin(\omega t) \\
 H_{1y}(z, t) &= 2 \frac{E_{h1}}{Z_{F1}} \cdot \cos(\beta_1 z) \cdot \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$H_{\max} \text{ und } E_{\min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2 \quad H_{\min} \text{ und } E_{\max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4$$

4.6.5 Stehwellenverhältnis (SWR)

$$SWR = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.7 Schräger Einfall (allgemein)

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

4.7.1 Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.7.2 Totalreflexion/Grenzwinkel

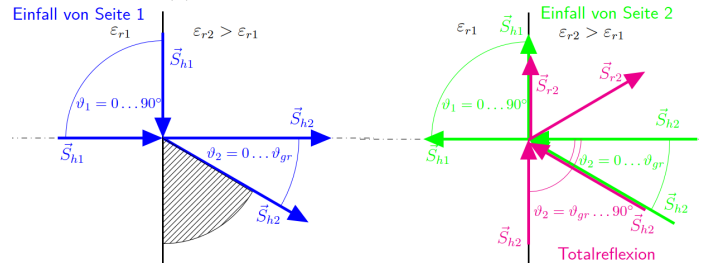
Grenzwinkel θ_g gibt an, bis zu welchem Winkel eine Welle von höherem in kleineres Dielektrikum $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ eindringen kann. \rightarrow Brechungsgesetz beachten!

$$\begin{aligned}
 (1) \theta_g &= \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}} \\
 (2) \theta_g &= \arcsin \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}}
 \end{aligned}$$

(1): bei *senkrechter* transmittierter Welle $\theta_t = \sin 90^\circ$

(2): bei *senkrechter* einfallender Welle $\theta_h = \sin 90^\circ$

Anmerkung zu (2):



4.7.3 Brewster-/Polarisationswinkel

Bei Brewster-Winkel θ_b wird Reflexionsfaktor $r = 0$.

- Parallele Polarisation:** rechts: $\mu_{r1} = \mu_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

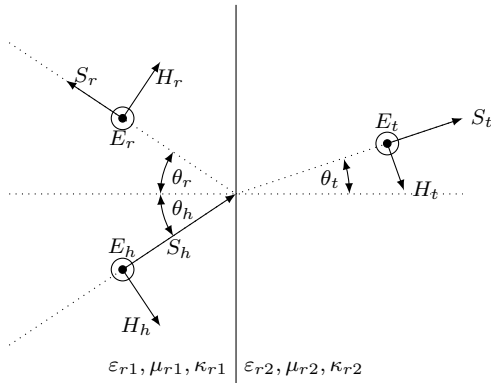
Brewster-Winkel existiert nur bei $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$.

- Senkrechte Polarisation:** rechts: $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}} \quad \tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

Brewster-Winkel existiert nur bei $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$.

Bei $\mu_{r1} = \mu_{r2} \rightarrow r \neq 0$ keine Reflexionsfreiheit!

4.7.4 Senkrechte Polarisation ohne μ_r 

\vec{E} -Feld senkrecht, \vec{H} -Feld parallel. $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

$$Z_{F0} = 120\pi \Omega \quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r(n)}} \quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

Brechungsgesetz: mit $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

Fresnelsche Formeln:

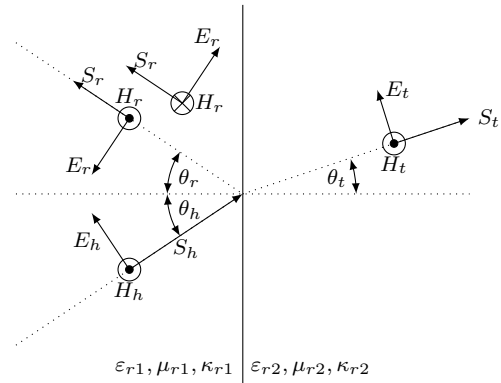
$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{es} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} = \frac{2 \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= 1 + r_s \\ t_{ms} &= \frac{2 Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \cdot t_{es} \end{aligned}$$

Beziehungen Polarisation

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h & E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h & E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h & H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h & H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} & E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} & E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

Richtungssinn Felder (Hand-Regel)

Linke Hand	Rechte Hand
Daumen: \vec{E}	Daumen: \vec{E}
Zeigef.: \vec{S}_{av}	Zeigef.: \vec{H}
Mittelf.: \vec{H}	Mittelf.: \vec{S}_{av}

4.7.5 Parallele Polarisation ohne μ_r 

\vec{E} -Feld parallel, \vec{H} -Feld senkrecht. $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$

Stücke: \vec{H}_h und \vec{H}_r zeigen in die selbe Richtung!
Sattler: \vec{H}_h und \vec{H}_r zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

Fresnelsche Formeln (Stücke):

$$\begin{aligned} r_{ep} &= r_{mp} = r_p \\ &= \frac{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h - Z_{F2} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{ep} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} = (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot t_{mp} \\ t_{mp} &= \frac{2 \cdot Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} = 1 + r_p \end{aligned}$$

Fresnelsche Formeln (Sattler):

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = -r_{p,[\text{Stücke}]} \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_h}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t} \\ t_{ep} &= \frac{2 Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_h}{\sqrt{\epsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 + r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ t_{mp} &= 1 - r_p = \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{ep} \end{aligned}$$

4.7.6 Senkrechte Polarisation mit μ_r 

\vec{E} -Feld senkrecht, \vec{H} -Feld parallel. $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

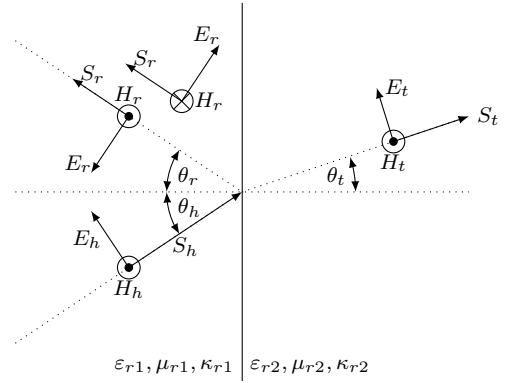
$$Z_{F0} = 120\pi \Omega \quad Z_{F(n)} = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r(n)}{\epsilon_r(n)}} \quad \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}}$$

Brechungsgesetz: mit $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Fresnelsche Formeln:

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{es} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= 1 + r_s \\ t_{ms} &= \frac{2Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}} - \frac{\mu_{r1}^2}{\mu_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ &= \sqrt{\frac{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}} t_{es} \end{aligned}$$

4.7.7 Parallele Polarisation mit μ_r 

\vec{E} -Feld parallel, \vec{H} -Feld senkrecht. $\mu_{r1} \neq \mu_{r2}$

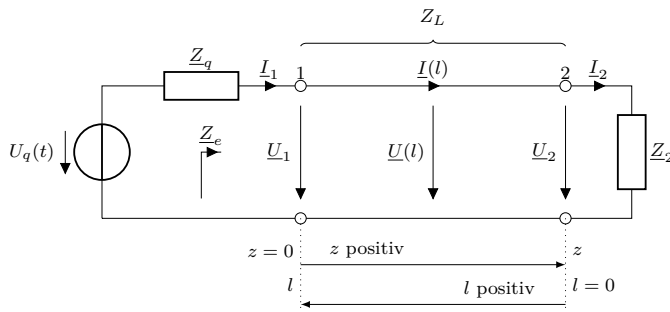
Stücke: \vec{H}_h und \vec{H}_r zeigen in die selbe Richtung!
Sattler: \vec{H}_h und \vec{H}_r zeigen in **entgegengesetzter** Richtung!

Fresnelsche Formeln (Stücke):

$$\begin{aligned} r_{ep} &= r_{mp} = r_p \\ &= \frac{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h - Z_{F2} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \vartheta_1 - \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ t_{ep} &= \frac{2 \cdot Z_{F2} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} = (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ t_{ep} &= \frac{2\sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}} \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} = \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}}} \cdot t_{mp} \\ t_{mp} &= \frac{2 \cdot Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{2 \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 + \sqrt{\frac{\mu_{r2}\epsilon_{r1}}{\mu_{r1}\epsilon_{r2}} - \frac{\epsilon_{r1}^2}{\epsilon_{r2}^2} \sin^2 \vartheta_1}} \\ &= 1 + r_p \end{aligned}$$

5 Leitungen

5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang: \underline{Z}_e Anfang: $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$ Abschluss: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}(l=0)$
Referenzpunkt **Last** ($l = 0$):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + Z_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{Z_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{I}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + Z_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \tanh(\gamma l)} = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + Z_L \tanh(\gamma l)}{Z_L + \underline{Z}_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer γ nicht im TR berechenbar:

Lösung: $\alpha l \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]$ und $\beta l \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$ einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$: Dämpfung $e^{\pm j\beta l}$: Phase (\angle im TR)

Für Winkel αl bzw. βl auf **RAD** in TR!

5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer \underline{Z}_L nicht in TR berechenbar:

Betrag: erst \underline{Z}_L^2 , dann $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$ ermitteln.

Phase: $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \gamma$ analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor: $r(l) \hat{=} r_1$: Leitungsanfang

$$r(l) = r_2 \cdot e^{-2\gamma l} = r_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand \underline{Z}_e am Leitungsende:

mit Kurzschluss $\underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$

im Leerlauf $\underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$

beliebige Länge $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$

5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$
Abschluss egal, es wird nur $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$ gemessen wird.

5.2 Verlustlose Leitung

5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \approx f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{LC}}$$

5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l=0) = r_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi \quad \Psi \text{ in RAD!}$$

$$\underline{r}(l) = r_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$r_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + r(l)}{1 - r(l)}$$

$$\underline{U}_{\max} = |\underline{U}_h| \cdot (1 + |r(l)|) \quad \underline{U}_{\min} = |\underline{U}_h| \cdot (1 - |r(l)|)$$

$$\underline{I}_{\max} = \left| \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 + |r(l)|) \quad \underline{I}_{\min} = \left| \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}_L} \right| \cdot (1 - |r(l)|)$$

5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}(l=0) = \underline{U}_h + \underline{U}_r \quad \underline{I}_2 = \underline{I}(l=0) = \underline{I}_h + \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tan(\beta l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sin(\beta l) \right]$$

Für Beträge/Amplitudenwerte: $\left| \frac{\underline{U}}{\underline{U}_2} \right| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$.

Bildung von **stehenden** Wellen für alle Fälle *außer* bei Anpassung!

5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = 0 \quad \underline{U}_2 = \underline{U}(l=0) = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r \quad \underline{I}_h = \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = \underline{Z}_L \cdot j \tan(\beta l) \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 \underline{Z}_L \cdot j \sin(\beta l)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{\underline{Z}_L}$$

$$l = \frac{\lambda}{4}: \text{Parallelresonanz (LL)} \quad l = \frac{\lambda}{2}: \text{Serienresonanz (KS)}$$

5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$$\begin{aligned} Z_2 = \infty \quad I_2 = I(l=0) = 0 \rightarrow I_h = -I_r \quad U_h = U_r \\ Z(l) = \frac{U(l)}{I(l)} = -j \frac{Z_L}{\tan(\beta l)} \rightarrow \text{rein imaginär!} \\ U(l) = U_h \cdot 2 \cos(\beta l) = U_2 \cdot \cos(\beta l) \quad U_2 = 2U_h \\ I(l) = I_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{U_2}{Z_L} \cdot j \sin(\beta l) \end{aligned}$$

$l = \frac{\lambda}{4}$: Serienresonanz (KS) $l = \frac{\lambda}{2}$: Parallelresonanz (LL)

5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand $Z_e = Z(l)$ aus 5.2.3:

$$\frac{Z_e}{Z_L} = \frac{Z_L}{Z_2} = \frac{Y_2}{Y_L} \rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{Z_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert: $L \leftrightarrow C$,
Kurzschluss \leftrightarrow Leerlauf, **großes R** \leftrightarrow **kleines R**

5.2.7 Angepasste (reflexionsfreie) Leitung

Eingangswiderstand $Z_1 \approx$ Leitungslänge, rein reell!
Nur hinlaufende Welle, **reflexionsfrei!**

$$\begin{aligned} Z_L = Z_1 = Z_2 = Z(l) \quad r_A = 0 \quad \text{SWR} = 1 \\ U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z} \quad I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z} \end{aligned}$$

5.2.8 Ohmscher Abschluss an Leitungsende

Abstand **Spannungsmax.** von der Last z_{\max} :
 $r_A \rightarrow$ rein reell! $z_{\max} = \frac{\lambda}{4\pi}(\theta_{\text{rad}} + 2n\pi)$

$$\begin{aligned} R_A > Z_L \rightarrow \theta_{\text{rad}} = 0 \quad r_A > 0 \quad \rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n \\ R_A < Z_L \rightarrow \theta_{\text{rad}} = \pi \quad r_A < 0 \quad \rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{4} \cdot n \end{aligned}$$

5.2.9 Position von Extrema

bei beliebigen Abschlüssen/Lasten! \rightarrow stehende Welle!

$$r_l = |r_A| \cdot e^{-j\Psi_r} \rightarrow \Psi_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen
 $f_{\max} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\begin{aligned} \lambda_{\min/\max} &= \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}} \\ z_{\min} &= \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}} \\ z_{\max} &= \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}} \\ z &= \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})} \end{aligned}$$

5.2.10 Stehwellenverhältnis (SWR)

Smith-Chart: Kap. 6.1 VSWR: Kap. 7.4

$$\begin{aligned} s = \text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L} \\ m = \text{SWR}^{-1} &= \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_2| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} = \frac{1 - m}{1 + m} \end{aligned}$$

5.2.11 Leistung

$$\begin{aligned} P_A = P_H - P_R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2) \\ &= P_{\max} \cdot (1 - r^2) \\ &= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ \underline{I}(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z \end{aligned}$$

5.2.12 Reflexionsfaktor mit Verlusten

r_e : am **Eingang** r_a : am Abschluss/an der Last

$$r_e = r_a \cdot e^{-2\gamma l} = \overbrace{r_a \cdot e^{-2\alpha l}}^{\text{gedämpfter Betrag}} \cdot e^{-j2\beta l}$$

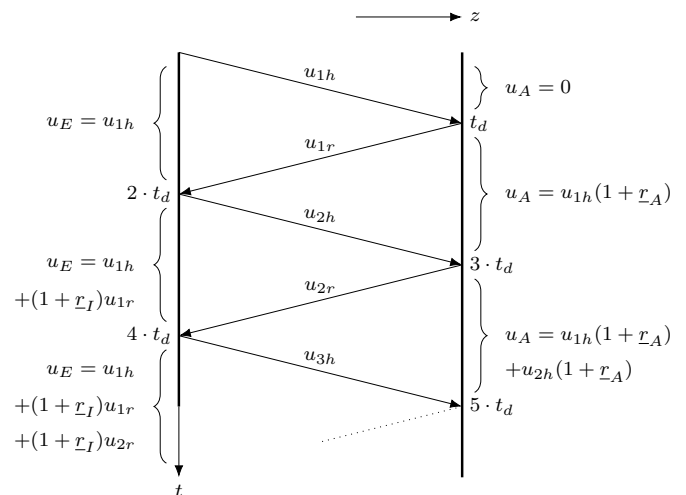
$$\alpha = -\frac{\ln(r_a)}{2 \cdot l} \left[\frac{\text{Np}}{\text{m}} \right]$$

$$\beta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2 \cdot l} \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

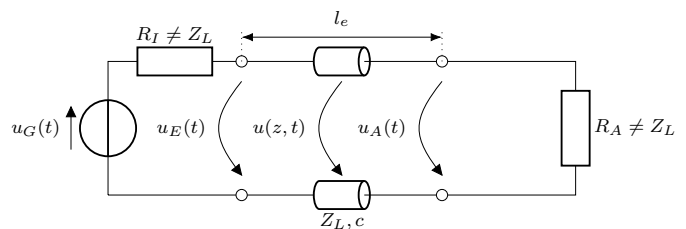
5.2.13 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$\begin{aligned} u_{1r} &= r_A \cdot u_{1h} \\ u_{2h} &= r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h} \\ u_{2r} &= r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h} \\ u_{3h} &= r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang:} \quad r_I &= \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L} \\ \text{Reflexionsfaktor Leitungsende:} \quad r_A &= \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L} \\ \text{Hinlaufende Welle} \quad u_{1h} &= \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I} \\ \text{Signallaufzeit:} \quad t_d &= \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \\ &= \frac{l}{v_p} \end{aligned}$$

5.4 Leitungsparameter

5.4.1 Allgemein

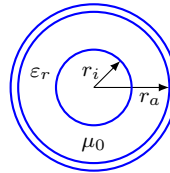
Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$\boxed{LC = \mu\varepsilon} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{G}{C} = \frac{\kappa}{\varepsilon}}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!**



$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{2\pi\delta\kappa_L} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_i} \right) \left[\frac{\Omega}{m} \right] \\ L' &= \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \left[\frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{2\pi\kappa}{\ln(r_a/r_i)} \left[\frac{S}{m} \right] \\ C' &= \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(r_a/r_i)} \left[\frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

Bei realer Beschreibung: $\kappa < \infty$ zusätzliche Feldkomponente:

$$\vec{E}_z \approx E_r \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \varepsilon}{\kappa}} \cdot \vec{e}_z$$

Dielektrische Dämpfungsverluste: für sehr hohe f
 $G \ll \omega C$, $\tan \delta = (G/\omega C) < 0,1$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\varepsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

5.4.2 Streifenleitung / Parallele Platten

Für Sinus-Anregung:

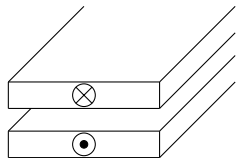
$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{b \gg d}{=} E \cdot d \quad \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \quad \rightarrow H = \frac{I_0}{b} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

b: Plattenbreite

d: Abstand zwischen den Platten

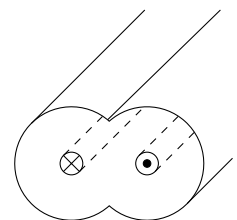


$$\begin{aligned} R' &= \frac{2}{\delta\kappa b} \left[\frac{\Omega}{m} \right] & L' &= \frac{\mu d}{b} \left[\frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{\kappa b}{d} \left[\frac{S}{m} \right] & C' &= \frac{b\varepsilon}{d} \left[\frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

5.4.3 Doppelleitung

κ : Leitwert des Dielektrikums κ_L Leitwert des Leiters

r: Leiterradius **d:** Abstand zw. Leitmitten



$$\begin{aligned} R' &= \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L} \left[\frac{\Omega}{m} \right] \\ L' &= \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \left[\frac{H}{m} \right] \\ G' &= \frac{\pi\kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[\frac{S}{m} \right] \\ C' &= \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[\frac{F}{m} \right] \end{aligned}$$

Wenn $\left(\frac{d}{2r}\right)^2 \gg 1 \rightarrow \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \approx \ln \frac{d}{r}$

5.4.4 Koaxialleitung

Mit Hin- und Rückleiter. r_i : Innenradius r_a : Außenradius

$0 < r < r_i$: Innenleiter, **keine** Felder!

$r_i < r < r_a$: Zwischenbereich, nur hier Felder vorhanden!

$r_a < r < \infty$: Außenbereich, **keine** Felder!

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{\hat{U}}{2\pi r \cdot Z_L} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\hat{I}}{2\pi r} \right)^2 \cdot Z_{F0}$$

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \stackrel{\mu_r=1}{=} \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\operatorname{Re}\{Z_L\}}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

6.1.2 Reflexionsfaktor

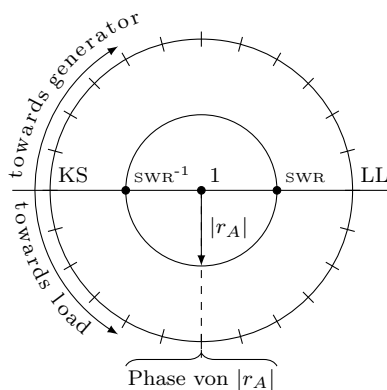
$\underline{r}(l) = \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$ Immer gültig,
auch ohne Quelle!

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ r_2 &= \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} = \frac{U_2 - I_2 Z_L}{U_2 + I_2 Z_L} \\ \underline{z}_n &= \frac{1 + r}{1 - r} \end{aligned}$$

6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von $m \rightarrow$ Werte von $\operatorname{Re}\{z_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} \quad |\underline{r}| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m}$$



$$z_n = \frac{Z_n}{Z_L}$$

$$r_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \frac{1 - y_n}{1 + y_n}$$

$$m = \frac{1 - |r|}{1 + |r|}$$

$$\text{SWR} = \frac{1}{m} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} = \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von z_n um Mittelpunkt ergibt y_n . (Phase $\pm 180^\circ / \pm \pi$)

6.3 Maxima und Minima bei stehender Welle

Bei **verlustloser** Leitung:

$$U_{\max} = |U_h| \cdot (1 + |r(l)|) \qquad U_{\min} = |U_h| \cdot (1 - |r(l)|)$$

$$I_{\max} = \left| \frac{U_h}{Z_L} \right| \cdot (1 + |r(l)|) \quad I_{\min} = \left| \frac{U_h}{Z_L} \right| \cdot (1 - |r(l)|)$$

Für **Spannungen**: Abstand von der Last z

$$z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi}(\theta_{rad} + (2n+1)\pi) \qquad z_{\max} = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot (\theta_{rad} + 2n\pi)$$

Minima alle $\frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = 0.5$

Maxima alle $\frac{\lambda}{4} \rightarrow \frac{l}{\lambda} = 0.25$

→ Schnittpunkte mit der reellen Achse!

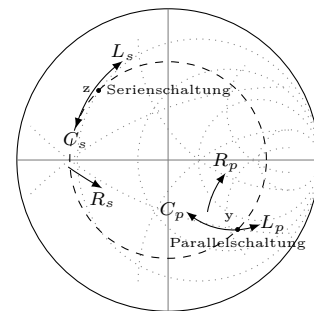
6.4 Lastseite → Quelle

1. $Z_L = Z_B$ ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren

$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L}$$

4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch z_n s nach außen
Ablesen und Notieren:
→ Relative Länge $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$
→ Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichnen
Ablesen und Notieren:
→ **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse
→ **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse
→ r abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen
Ablesen und Notieren:
→ Relativer Winkel
8. Wenn $\alpha \neq 0$
→ Dämpfung ausrechnen → Um Faktor nach innen Spiralisieren
9. Dieser Punkt ist z_e
10. Eingangsimpedanz ablesen

$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



6.5 Vorgehen mit geg. Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

- ### 1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

- ## 2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_A - \underline{Z}_L}{Z_A + \underline{Z}_L}$$

- ### 3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z = d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

- #### 4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + r_E}{1 - r_E}$$

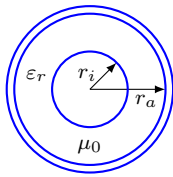
- ## 5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{Z_E} + j\omega C_E}$$

7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \stackrel{\mu_r=1}{=} \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}$$

7.1.2 Dämpfung

Hin- und Rückleiter!

Ohmsche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_L = \frac{\sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}}}{120\Omega} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

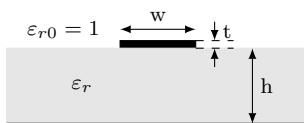
Dämpfungsminimum für $\frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} = 1$

bei vorgegebenen Außendurchmesser: $\frac{D}{d} = 3,59$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \frac{\sqrt{\epsilon_r} \pi f}{c_0} \cdot \tan \delta \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite

h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer $\frac{w}{h}$ desto mehr nähert sich $\epsilon_{r,\text{eff}}$ an ϵ_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln\left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

Reflexionsfaktor

$$r_2 = r(z=0) = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L}$$

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s-1}{s+1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Mismatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[\frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, solange Dämpfung keine Rolle spielt.

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol (HDp)

8.1.1 Allgemein

r : Antennenabstand

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta r} \cdot \cos \vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

Im Zeitbereich:

$$\begin{aligned}E_r(t) &= \frac{Z_F I_0 l}{2\pi r^3 \beta} \cos \vartheta [\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r)] \\ E_\vartheta(t) &= \frac{Z_F I_0 l}{4\pi r^3 \beta} \sin \vartheta [\sin(\omega t - \beta r) + \beta r \cos(\omega t - \beta r) - (\beta r)^2 \sin(\omega t - \beta r)] \\ H_\varphi(t) &= \frac{I_0 l}{4\pi r^2} \sin \vartheta [\cos(\omega t - \beta r) + \beta r \sin(\omega t - \beta r)]\end{aligned}$$

8.1.2 Nahfeld (Fresnel-Zone)

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1 \text{ oder } r \ll \lambda$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da \vec{E} zu \vec{H} 90° phasenverschoben. Lösung entspricht dem quasistatischen Dipolfeld. → **keine** Wellenausbreitung!

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi r^2} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon r^3} \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon r^3} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

8.1.3 Fernfeld (Fraunhofer-Zone)

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1 \text{ oder } r \gg \lambda$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, \vec{S} in Richtung \vec{e}_r → Kugelwelle, \vec{E} und \vec{H} in Phase, fallen mit $\frac{1}{r}$ ab.

$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \underline{\vec{E}} &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld HDp

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} = \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ \vec{S}_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand HDp

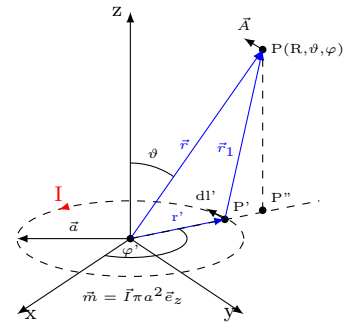
$$R_s = \frac{2}{3} \pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand HDp

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

Dipolmoment: $\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z$ $m = I \cdot A$



$$\begin{aligned}\underline{\vec{H}} &= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \cos \vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_r \\ &\quad - \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta r} \cdot \sin \vartheta \left(\frac{1}{(j\beta r)} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) \vec{e}_\vartheta \\ \underline{\vec{E}} &= \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

mag. Vektorpotenzial \vec{A} :

$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi r^2} (1 + j\beta r) e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi$$

P_{rad} : elek. Dipol der Länge $l \hat{=} \text{mag. Dipol der Fläche } A$

$$\Delta l = \beta \cdot A_{\text{kreis}} = \beta \cdot \pi a^2 \quad \frac{m}{v_p} = p$$

8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi r Z_{F0}} e^{-j\beta r} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} = P_s &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} = \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 r^2} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\varphi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r + \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta)\end{aligned}$$

8.3 Lineare Antenne

Stromverteilung auf linearen Antennen **nicht** konstant:

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne allgemein

l : Antennenlänge r : Antennenabstand

$$\vec{H} = j \frac{I_0}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \frac{\cos \left[\left(\frac{\beta l}{2} \right) \cos \vartheta \right] - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\sin \vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_\vartheta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_s}{R_s}} \quad R_s \rightarrow \text{siehe Antennentabelle Kap. 8.10}$$

Halbwellendipol: $l = \frac{\lambda}{2}$ $Z_s = \overbrace{(73, 13 + j 42, 54)}^{R_s} \Omega$
Ganzwellendipol: $l = \lambda$ $Z_s = \overbrace{(199, 09 + j 125, 41)}^{X_s} \Omega$

8.3.2 Eingangs-/Fußpunktimpedanz

Bei leerlaufender Leitung entstehen in Längsrichtung stehende Wellen. Um max. Wirkleistung zu übertragen, muss die Eingangs-/Fußpunktimpedanz Z_A **reell** bzw. die Leitung in Resonanz sein.

$$P_{max} \rightarrow n \cdot \frac{\lambda}{4}$$

$$Z_A = Z_s \frac{|I_0|^2}{|I_0(z' = 0)|^2} = \frac{Z_s}{\sin^2 \left[\beta \frac{l}{2} \right]}$$

Strom am Fußpunkt:

$$I(z' = 0) = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{l}{2} \right) \right]$$

komplexe Strahlungsleistung:

$$P_s + jQ_s = Z_s \cdot \frac{|I_0|^2}{2} = Z_A \cdot \frac{|I_0(z' = 0)|^2}{2}$$

8.3.3 Strahlungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{\cos \left(\frac{\beta}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\sin \vartheta} \right)^2 \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = S_{iso} \cdot D_{max} = S_{iso} \cdot D_{max} \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

8.3.4 abgestrahlte Wirkleistung

$$P_s = \int_A S_{av} \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} S_{av} \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$P_s = \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\left(\cos \left(\frac{\beta l}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{\beta l}{2} \right) \right)^2}{\sin \vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \cdot x$$

Numerische Lösung des Integrals ergibt Faktor x :

bei **Halbwellendipol:** $x = 1,2188$

bei **Ganzwellendipol:** $x = 3,3181$

8.4 Antennenkenngrößen



X_A wird kompensiert \rightarrow max. Wirkleistungsübertragung

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_s = P_{rad} = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_s$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

wenn R_V vorhanden \rightarrow wirkt sich auf G aus!

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_V} = \frac{R_s}{R_s + R_V}$$

8.4.4 Gewinn/Gain

Verlustlose Antenne, wenn $\eta = 1$

$$G = \eta \cdot D \quad \text{bei } \eta = 1 \rightarrow G = D$$

8.4.5 Richtcharakteristik

$C_i \stackrel{\wedge}{=}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\cos \left(\frac{\beta L}{2} \cos \vartheta \right) - \cos \left(\frac{\beta L}{2} \right)}{\sin \vartheta} \right|$$

8.4.6 Richtfunktion/-faktor

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i} = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D_{max} = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

$$\text{Halbwellendipol } l = \frac{\lambda}{2}$$

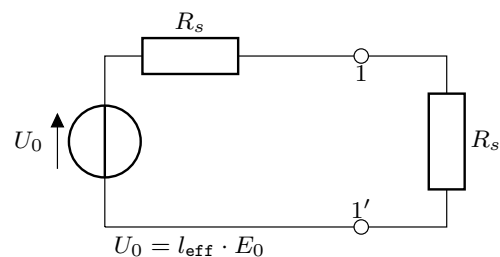
$$D(\vartheta, \varphi) = 1,64 \cdot \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin \vartheta} \right)^2$$

$$\text{Ganzwellendipol } l = \lambda$$

$$D(\vartheta, \varphi) = 2,41 \cdot \left(\frac{\cos(\pi \cos \vartheta) + 1}{2 \sin \vartheta} \right)^2$$

8.5 Senden und Empfangen

Bei Anpassung: $R_e = R_s \rightarrow$ max. Wirkleistung wird übertragen!



R_s : Strahlungswiderstand s : Sender e : Empfänger
 r : Abstand von der Antenne

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot R_s \cdot I^2 = \frac{U_0^2}{8R_s} \quad S_s = \frac{1}{2} H_0^2 Z_{F0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{Z_{F0}}$$

$$= \frac{E_0^2 \cdot l_{\text{eff}}^2}{8R_s}$$

8.5.1 Wirksame/Effektive Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{P_e}{S_s} = \frac{U_0^2}{8R_s} \frac{2Z_{F0}}{E_0^2} \quad A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_s} \cdot I_{\text{eff}}^2$$

Beim Hertzschen Dipol:

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$$

8.5.2 Friis-Übertragungsgleichung

$$S_{iso} = \frac{P_s}{4\pi r^2} \quad S_s = S_{iso} \cdot D_s$$

$$A_{\text{eff},n} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_n(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_n \quad A_{\text{eff},n} \Big|_{\text{max}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_n$$

$$P_e = S_s \cdot A_{\text{eff},e}$$

$$= S_s \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e$$

$$\frac{P_e}{P_s} = A_{\text{eff},e} \cdot A_{\text{eff},s} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}$$

$$= D_e(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_e \cdot D_s(\vartheta, \varphi) \cdot \eta_s \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

$$\frac{P_e}{P_s} \Big|_{\text{max}} = G_s \cdot G_e \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

Reziprozität: Sende- und Empfangscharakteristik sind identisch!

8.5.3 Freiraumdämpfung

d: Abstand zur Antenne

$$F = \frac{P_s}{P_e} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \log \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \log \left(\frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

Freiraumdämpfung wird durch räumliche Verteilung der Strahlung verursacht, **nicht** durch Wirkverluste des Ausbreitungsmediums.

8.5.4 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_e = L_s + g_s + g_s - a_0 \quad [\text{dB}]$$

8.6 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

EIRP: Equivalent Isotropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

8.7 Monopolantenne

Verhält sich wie ein Dipol, der nur in die obere Hälfte abstrahlt. Strahlungswiderstand halbiert sich und Richtfaktor verdoppelt sich gegenüber der Dipolantenne.

Geometrisch zu kurze Antennen können durch breiteren Drahtdurchmesser, Fußpunktinduktivität oder Dachkapazität elektrisch verlängert werden.

8.8 Richtcharakteristik Dipolantennen

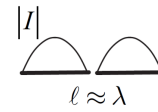
5.4.4 Richtcharakteristik der Dipolantenne



$$R=73,1\Omega$$

$$D=1,64$$

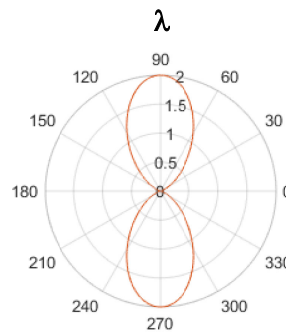
$$\theta_{3dB}=78^\circ$$



$$R=199\Omega$$

$$D=2,41$$

$$\theta_{3dB}=48^\circ$$



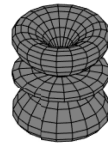
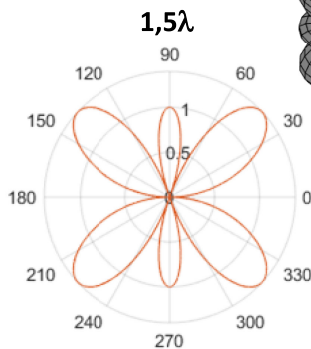
→ k541_Dipolantenne.m



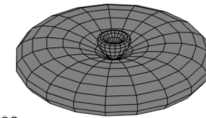
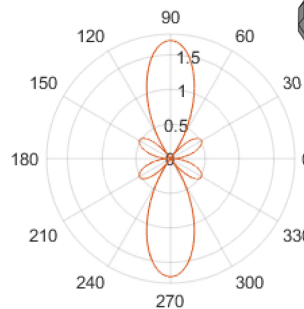
$$R=105\Omega$$

$$D=2,22$$

$$\theta_{3dB}=36,3^\circ$$



1,25λ



$$R=106\Omega$$

$$D=3,28$$

$$\theta_{3dB}=32,6^\circ$$

Robert Sattler

Felder, Wellen und Leitungen

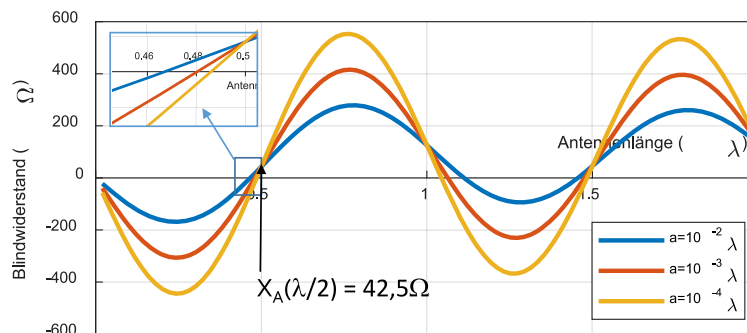
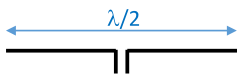
S. 36

8.9 Blindwiderstand Dipolantennen

5.4.5 Blindwiderstand Dipolantenne

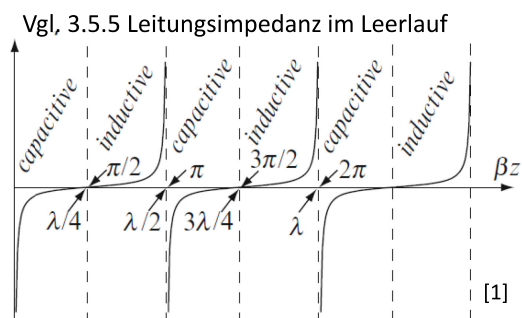


Aus dem Nahfeld des Hertzchen Dipols lässt sich durch Überlagerung der Blindwiderstand der Dipolantenne berechnen:
→ Formel (4-70) in [11]



Für maximale Leistungsübertragung ist ein reeller Eingangswiderstand erforderlich. Dies ist der Fall, wenn die Leitung in Resonanz ist. Man spricht von Resonanzantennen, wenn $l \approx n \cdot \lambda/2$.

Je größer der Durchmesser a der Antenne, desto **kürzer/länger** ist die Länge bei **Halb-/Ganzwellenresonanz**.



Robert Sattler

Felder, Wellen und Leitungen

S. 37

8.10 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	l	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	h	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28; (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	73Ω		
λ -Dipol		2,41; (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	200Ω		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28; (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500 \Omega$		
kleiner Rahmen, n -Windungen, beliebige Form		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	ab	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10^4 / \lambda$	—	—	—		

9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
\vec{A}	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \ (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
\vec{B}	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
\vec{D}	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
\vec{E}	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
\vec{H}	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
\vec{J}	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
\vec{J}_F	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
\vec{M}	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
R_{mag}	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
\vec{S}	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	Ω
δ_s	Eindringtiefe	m
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
φ	elek. Skalarpotenzial	V
φ_m	mag. Skalarpotenzial	A
ρ	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
ρ	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
κ, σ	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
λ	Wellenlänge	m
μ	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
Φ_e	elek. Fluss	$C = As$
Φ_m	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$