



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23
nach Vorlesung von Prof. Stücke

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

23. Januar 2023

Lizenz:

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Einheiten	1
1.2	Vektorrechnung	1
1.2.1	Betrag, Richtungswinkel, Normierung	1
1.2.2	Skalarprodukt	1
1.2.3	Kreuzprodukt	1
1.3	Differentialoperatoren	1
1.3.1	Rechenregeln	1
1.3.2	Spezielle Vektorfelder	1
1.4	Logarithmische Maße/Pegel	2
1.4.1	Rechnen mit Pegeln	2
1.5	Koordinatensysteme	2
1.5.1	Umrechnungstabelle	2
1.5.2	Schema KOS Kugel/Zylinder	2
1.5.3	Kartesische Koordinaten	3
1.5.4	Zylinderkoordinaten	3
1.5.5	Kugelkoordinaten	3
2	Maxwell-Gleichungen	4
2.1	Integralsätze	4
3	Felder	5
3.1	Elektrostatik	5
3.1.1	Potential-/Poisson-Gleichung	5
3.1.2	Randwertprobleme, -bedingungen (RB)	5
3.1.3	Green'sche Funktionen	5
3.1.4	Elektrischer Dipol	5
3.2	Magnetostatik	5
3.2.1	Vektorpotential	5
3.2.2	Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	5
3.2.3	Biot-Savart-Gesetz	6
3.2.4	Magnetischer Dipol	6
3.3	Quasistationäre Felder (Wechselstrom)	6
3.3.1	Komplexe Feldgrößen	6
3.3.2	Skineffekt	6
3.3.3	Näherungen für Skineffekt	6
3.4	E-Felder an Grenzflächen	7
3.4.1	Dielektrische Grenzfläche	7
3.4.2	Grenzfläche Dielektrikum-Leiter	7
3.4.3	Grenzfläche an magn. Feldern	7
4	Wellen	8
4.1	Wellengleichungen allgemein	8
4.1.1	Zeitbereich	8
4.1.2	Frequenzbereich	8
4.1.3	Vereinfachung der Gleichungen	8
4.2	Ebene Wellen	8
4.3	Kenngrößen	8
4.3.1	Wellenzahl	8
4.3.2	Wellenlänge	8
4.3.3	Phasengeschwindigkeit	8
4.3.4	Brechzahl/Brechungsindex	8
4.3.5	Gruppengeschwindigkeit	8
4.3.6	Feldwellenwiderstand	8
4.3.7	Poynting-Vektor	8
4.4	Ausbreitung im Medium	9
4.4.1	Allgemein (mit Verlusten)	9
4.4.2	Im leeren Raum (Vakuum)	9
4.4.3	Im verlustlosen/idealen Dielektrikum	9
4.4.4	Im Dielektrikum mit geringem Verlust	9
4.4.5	Im guten Leiter	9
4.5	Ebene Wellen an Grenzflächen	9

4.5.1	Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	9
4.6	Polarisation	9
4.7	Verlustlose Polarisation	9
4.8	Totalreflexion	9
4.9	Grenzwinkel	9
4.10	Brewster-/Polarisationswinkel	10
4.11	Senkrechter Einfall	10
4.11.1	Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	10
4.11.2	Medium 1: Luft	10
4.11.3	Medium 2: Luft	10
4.11.4	beide Medien: nicht magnetisch	10
4.11.5	Medium 2: idealer Leiter	11
4.12	Stehwellenverhältnis	11
4.13	Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)	12
4.14	Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)	12
5	Leitungen	13
5.1	Allgemeine Leitung (mit Verlusten)	13
5.1.1	Gleichungen	13
5.1.2	Kenngrößen	13
5.1.3	Kurzschluss und Leerlauf	13
5.1.4	Lange und Kurze Leitung	13
5.2	Verlustlose Leitung	13
5.2.1	Kenngrößen	13
5.2.2	verlustloser Reflexionsfaktor	13
5.2.3	Beliebiger Abschluss (Last)	14
5.2.4	Kurzschluss an Leitungsende	14
5.2.5	Leerlauf an Leitungsende	14
5.2.6	Leitung als Impedanz-Transformator	14
5.2.7	Vorgehen Eingangswiderstand	14
5.2.8	Stehwellenverhältnis	14
5.2.9	Leistung	14
5.2.10	Gleichspannungswert (=Endwert)	14
5.2.11	Position von Extrema	14
5.2.12	Spezialfall: Angepasste Leitung	14
5.2.13	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung	15
5.3	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	15
5.4	Kettenmatrix einer Leitung	15
6	Smith-Diagramm	16
6.1	Allgemein	16
6.1.1	Normierte Impedanz	16
6.1.2	Reflexionsfaktor	16
6.1.3	Anpassungsfaktor	16
6.2	Impedanz/Admetanz umrechnen	16
6.3	Von Last zu Quelle	16
7	Wellenleiter	17
7.1	Koaxial Leiter	17
7.1.1	Wellenwiderstand	17
7.1.2	Dämpfung	17
7.2	Mikrostreifenleiter	17
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl	17
7.2.2	Schmale Streifen	17
7.2.3	Breite Streifen	17
7.3	Hohlleiter	17
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss	17
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser	17
7.6	Leitungsparameter	17
7.6.1	Streifenleitung / Parallele Platten	17
7.6.2	Doppelleitung	18
7.6.3	Koaxialleitung	18

8	Antennen	19
8.1	Herz'scher Dipol	19
8.1.1	Allgemein	19
8.1.2	Nahfeld	19
8.1.3	Fernfeld	19
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	19
8.1.5	Strahlungswiderstand	19
8.1.6	Verlustwiderstand	19
8.2	Magnetischer Dipol	19
8.2.1	Fernfeld	19
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	19
8.2.3	Nahfeld	19
8.3	Lineare Antenne	19
8.3.1	Dipolantenne	20
8.4	Antennenkenngrößen	20
8.4.1	Abgestrahlte Leistung	20
8.4.2	Verlustleistung	20
8.4.3	Wirkungsgrad	20
8.4.4	Richtcharakteristik	20
8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor	20
8.4.6	Gewinn	20
8.4.7	Wirksame Antennenfläche	20
8.5	Bezugsantennen	20
8.6	Senden und Empfangen	20
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß	21
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel	21
8.7	Antennentabelle	22
9	Einheiten	23

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Permiabilitätskonstante	μ	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Dielektrizitätskonstante	ε	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
elek. Ladung/Fluss	Q, q	$C = As$
elek. Feldstärke	\vec{E}	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
elek. Flussdichte	\vec{D}	$\frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Kapazität	C	$F = \frac{\text{As}}{\text{V}}$
mag. Fluss	ϕ, Φ	$Wb = Vs$
mag. Feldstärke	\vec{H}	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$
mag. Flussdichte	\vec{B}	$T = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
Induktivität	L	$H = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$
Strahlungsdichte	S_{av}, I	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

1.2 Vektorrechnung

1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.2.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

1.2.3 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

1.3 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz div: Vektorfeld \rightarrow Skalar S.382

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation rot: Vektorfeld \rightarrow Vektorfeld S.382

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

Gradient grad: Skalarfeld \rightarrow Vektor/Gradientenfeld

zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

1.3.1 Rechenregeln

ϕ, ψ : Skalarfelder \vec{A}, \vec{B} : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Vektorpotential \vec{E}

$$\text{div } \vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Skalarpotential ϕ

$$\text{rot } \vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0} \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld \vec{F} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{F}) &= \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F} \end{aligned}$$

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n : Spannung, Strom, \vec{E} -, \vec{H} -Feld, Schalldruck
Leistungsgröße P_n : Energie, Intensität, Leistung
Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte!**

- **Dämpfungsmaß** a in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$1\text{ dB} = 0,1151\text{ Np}$ $1\text{ Np} = 8,686\text{ dB}$

$a\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2}$ $a\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{20}}$ $\frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a\text{[dB]}}{10}}$

$a\text{ [Np]} = \ln \frac{F_1}{F_2}$ $a\text{ [Np]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$

$\frac{F_1}{F_2} = e^{a\text{[Np]}}$ $\frac{P_1}{P_2} = e^{2a\text{[Np]}}$

- **absolute Pegel** L mit Bezugsgrößen P_0, F_0

$L\text{ [dB]} = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0}$ $L\text{ [dB]} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$

$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{20}}$ $\frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L\text{[dB]}}{10}}$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1mW$	$L_{P/mW}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1W$	$L_{P/W}$
dBV, dB(V)	$F_0 = 1V$	$L_{U/V}$
dBμV, dB(μV)	$F_0 = 1μV$	$L_{U/μV}$
dBμA, dB(μA)	$F_0 = 1μA$	$L_{I/μA}$
dB(μV/m)	$F_0 = 1 \frac{μV}{m}$	$L_{E/(μV/m)}$
dB(μA/m)	$F_0 = 1 \frac{μA}{m}$	$L_{H/(μA/m)}$

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße P_n	Feldgröße F_n
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

- **relativer Pegel / Maß**
Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \text{ dB}$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

$\log(x^a) = a \cdot \log(x)$ $\log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$

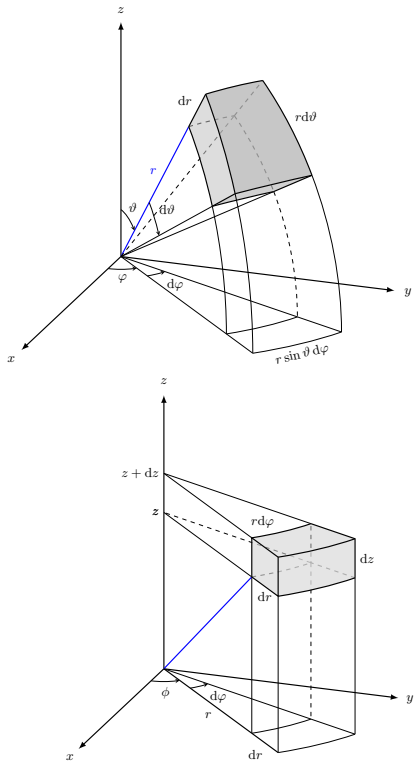
$\text{Pegel} = 10 \cdot \log(\text{Faktor})$ $\text{Faktor} = 10^{\frac{\text{Pegel}}{10}}$

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Umrechnungstabelle

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	dr	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		r
$\arctan \frac{y}{x}$		φ
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		ϑ
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		dr
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

1.5.2 Schema KOS Kugel/Zylinder



1.5.3 Kartesische Koordinaten

Variablen: x, y, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ Volumenelemente: $dV = dx dy dz$

Flächenelemente: $dA_{xy} = dx dy \vec{e}_z$ $dA_{yz} = dy dz \vec{e}_x$ $dA_{xz} = dx dz \vec{e}_y$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; y; z)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$ **Divergenz:** $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$

La-Place: $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z$

$\Delta \vec{E} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z$

1.5.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen: r, φ, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 + dz^2}$ Volumenelemente: $dV = r dr d\varphi dz$

Flächenelemente: $dA_{r\varphi} = r dr d\varphi \vec{e}_z$ $dA_{rz} = dr dz \vec{e}_\varphi$ $dA_{\varphi z} = r d\varphi dz \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(r; \varphi; z)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$

Divergenz: $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$

La-Place: $\Delta \phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ $\Delta \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_r \vec{e}_r + \Delta E_\varphi \vec{e}_\varphi + \Delta E_z \vec{e}_z$

$\Delta \vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z$

1.5.5 Kugelkoordinaten

Variablen: r, ϑ, φ Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$ Volumenelemente: $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Flächenelemente: $dA_{r\vartheta} = r dr d\vartheta \vec{e}_\varphi$ $dA_{r\varphi} = r \sin \vartheta dr d\varphi \vec{e}_\vartheta$ $dA_{\vartheta\varphi} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$ Vektorfeld: $\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

Gradient: $\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

Divergenz: $\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$

Rotation: $\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$

La-Place: $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$

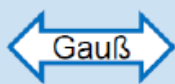
2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Gaußsches Gesetz: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

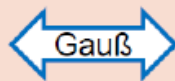


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.

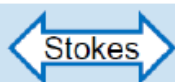


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Induktionsgesetz: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.

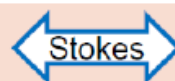


$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Amperesches Gesetz: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind ε u. μ Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich \rightarrow nur den Rand betrachten.

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[\frac{A}{m^2} \right]} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = [T]} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[\frac{C}{m^2} \right]}$$

Verkopplung von \vec{E} - und \vec{H} -Felder über $\vec{J} = \kappa \vec{E}$.

Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder \rightarrow Gradientenfeld \rightarrow elek. Ladungen sind Quellen des \vec{E} -Feldes (Skalare Potenzialfkt. φ)

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 = \text{rot grad } E & \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \text{div } \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z$$

3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn $\rho = 0$

$$\begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\varepsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

Dirichlet-RB: Gesuchte Potenzialfunktion φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)

Neumann-RB: Die Normalenableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der Fkt. φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an. (Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

3.1.3 Green'sche Funktionen

• Skalarpotential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

• E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

• D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2} \right]$$

• Potentialfeld einer Ladungsdichteverteilung mit $\varphi(\infty) = 0$

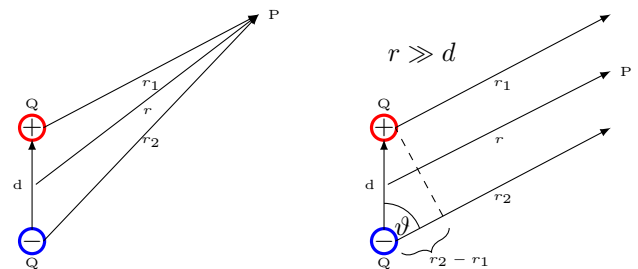
$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$



$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.

Keine magnetischen Monopole: $\text{div } \vec{B} = 0$.

Skalarpotential φ_m existiert, wenn \vec{H} wirbelfrei ist: $\text{rot } \vec{H} = 0$, wenn $\vec{J} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 = \text{div rot } B & \vec{H} &= -\text{grad } \varphi_m \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} & \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned}$$

3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential φ .

Coulomb-Eichung, wenn $\text{div } \vec{A} = 0$, gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

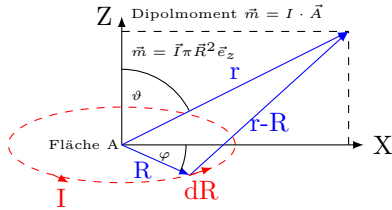
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{r} : Aufpunkt \vec{r}' : Quellpunkt

3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.3 Quasistationäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium: $\varepsilon, \mu, \kappa = \text{konst.}$

Leiter ist quasineutral: $\rho = 0$.

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \text{div } \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \text{div } \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \text{div } \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

3.3.1 Komplexe Feldgrößen

• komplexe Amplitude / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

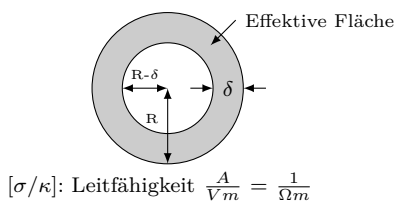
• komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{j\omega t} = J \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

• Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

3.3.2 Skineneffekt



Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke
(Abfall der Amplitude: $A_0 \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)widerstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\text{eff}}} \quad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \quad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x)$$

analog für E-Feld

Amplitude und **Phase** bezogen auf δ :

Amplitude: $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfungsfaktor})$

Dämpfung: $\alpha = \frac{1}{\delta}$ Phase: $\varphi = -\frac{x}{\delta}$

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Rundleiter - Effektive Fläche:

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}} &= A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2 \pi - (R - \delta)^2 \pi \\ &= 2 \cdot \pi \delta \left(R - \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

3.3.3 Näherungen für Skineneffekt

$$\text{Rundleiter: } R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$$

Geometrische Beschreibung (Fehler < 6%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2} \right)^4 & \text{für } r_0 \geq \delta \end{cases}$$

Bessel-Funktion (Fehler < 6%):

$$\begin{aligned} \frac{R_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases} \\ \frac{X_{AC}}{R_{DC}} &= \begin{cases} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \quad r_0 \hat{=} \text{Außenradius} \quad X_{AC} = w L_i$$

Empirische Beschreibung (Fehler < 10%)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für } r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0}{2,65 \cdot \delta} \right)^4 & \text{für } \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für } 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für } 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1) $\hat{=}$ Kreisring mit Näherung (2) $\hat{=}$ Ring mittig

3.4 E-Felder an Grenzflächen

3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem ε .

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem ε .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

Querschichtung:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \quad D_{1n} = \frac{Q}{A} \quad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem μ .

Längsschichtung:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem μ .

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4 Wellen

4.1 Wellengleichungen allgemein

4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:

mit harmonischer Zeitabhängigkeit: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum: $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter $\rho = 0$, $\kappa \gg \omega \varepsilon$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \kappa \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen $\rho = 0$, keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\kappa + j\omega \varepsilon) \vec{H}$$

TEM-Welle: \vec{E} und \vec{H} besitzen nur transversale (= senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende) Komponenten.

ebene Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von $\vec{E}(z, t)$)

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

komplexer Amplitudenvektor

$$\underline{\vec{E}}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

4.3 Kenngrößen

4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$\beta \hat{=} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.

Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum λ_0

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0} \quad [\text{m}]$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_{p, \text{Medium}} \leq c_0$$

4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \hat{=} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

4.3.6 Feldwellenwiderstand

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \frac{\omega \mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\kappa + j\omega \varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \Omega \quad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

4.3.7 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energiestromung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \}$
Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} = \vec{S}_{av} $	

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a} = \text{Re} \{ \underline{U} \cdot \underline{I}^* \}$$

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \quad P_{\text{Leitung}} = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 Ausbreitung im Medium

4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \quad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum: $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \quad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \quad \underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.4.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrikum

verlustlos: $\kappa = 0$, maximale Wirkleistung
 Z_F rein reell \rightarrow ebene Welle

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

4.4.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot \underline{Z}_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^{-1/2} \approx \underline{Z}_{F0} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon} \right)$$

4.4.5 Im guten Leiter

geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust

$\lambda_0 \rightarrow$

$\xrightarrow{\lambda_1}$
 $\alpha_1, \beta_1, \mu_{r1}, \varepsilon_{r1}$

$\xrightarrow{\lambda_2}$
 $\alpha_2, \beta_2, \mu_{r2}, \varepsilon_{r2}$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

4.6 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	H oder E
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

4.7 Verlustlose Polarisation

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

4.8 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}$$

4.9 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} \right)$$

4.10 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$ Magnetisches Feld:

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\mu_{r1} = \mu_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

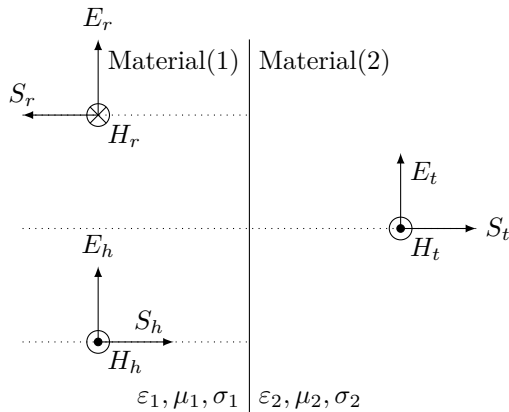
$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.11 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$E_{t1} = E_{t2} \quad H_{t1} = H_{t2}$$

$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t_e \cdot E_h$$

$$E_r = r_e \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.11.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.11.2 Medium 1: Luft

$$\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.11.3 Medium 2: Luft

$$\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.11.4 beide Medien: nicht magnetisch

$$\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.11.5 Medium 2: idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

StehendeWelle

$\rightarrow H_{max}$ und E_{min} bei $n \cdot \lambda/2$

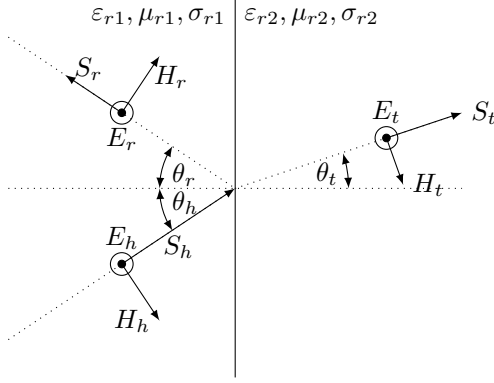
$\rightarrow H_{min}$ und E_{max} bei $(2n-1) \cdot \lambda/4$

$\rightarrow 90^\circ$ Phasenverschiebung

4.12 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.13 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

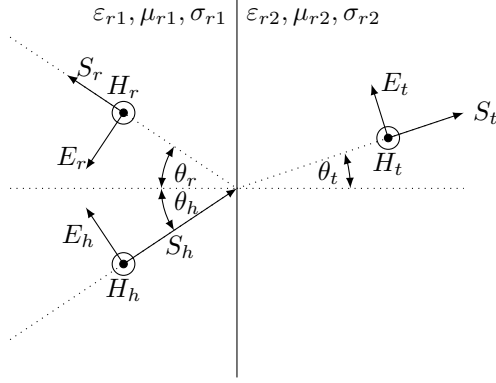
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}} \cdot \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}} \cdot \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

4.14 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

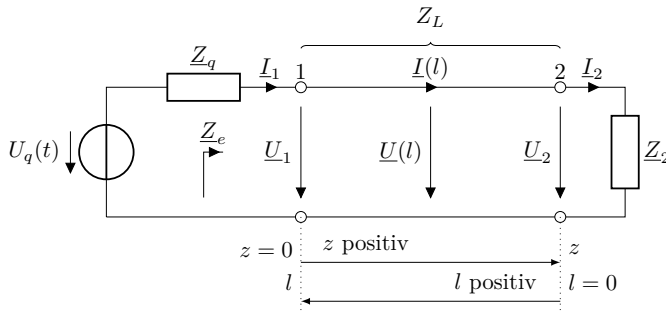
- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\varepsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1}} \cdot \sin^2 \theta_h}{\varepsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1}} \cdot \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

5 Leitungen

5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang: \underline{Z}_e Anfang: $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$ Abschluss: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}(l=0)$
 Referenzpunkt **Last** ($l = 0$):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\gamma l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\gamma l}$$

5.1.1 Gleichungen

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \underline{Z}_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{U}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \cosh(\gamma l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \sinh(\gamma l)$$

$$= \underline{I}_2 \cdot \left[\cosh(\gamma l) + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\gamma l) \right]$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\gamma l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh(\gamma l)}$$

komplexer γ nicht im TR berechenbar:

Lösung: $\alpha l \left[\frac{\text{dB}}{\text{m}} \right]$ und $\beta l \left[\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right]$ einzeln berechnen, dann:

$$\cosh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\sinh(\gamma l) = \frac{1}{2} [e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}]$$

$$\tanh(\gamma l) = 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}$$

$e^{\pm \alpha l}$: Dämpfung $e^{\pm j\beta l}$: Phase (\angle im TR)

Für Winkel αl bzw. βl auf **RAD** in TR!

5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

komplexer \underline{Z}_L nicht in TR berechenbar:

Betrag: erst \underline{Z}_L^2 , dann $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$ ermitteln.

Phase: $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2) \rightarrow \gamma$ analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

$$= j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor: $r(l) \hat{=} r_1$: Leitungsanfang

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\gamma l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l}$$

$$= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}$$

- weitere Parameter: meistens $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

$$l_{\text{elek.}} = \beta \cdot l \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand \underline{Z}_e am Leitungsende:

$$\text{mit Kurzschluss} \quad \underline{Z}_{e,\text{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\gamma l)$$

$$\text{im Leerlauf} \quad \underline{Z}_{e,\text{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\gamma l)}$$

$$\text{beliebige Länge} \quad \underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\text{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\text{leer}}(l)}$$

5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + j\omega L')$$

$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + j\omega C')$$

Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4} \quad |\gamma l| \gg 1$
 Abschluss egal, es wird nur $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$ gemessen wird.

5.2 Verlustlose Leitung

5.2.1 Kenngrößen

$$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0 \quad \underline{Z}_L, v_p \neq f$$

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{LC} \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{1}{f \sqrt{LC}}$$

5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$$\underline{r}(l=0) = \underline{r}_2 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < \Psi < 2\pi$$

$$\underline{r}(l) = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$

$$= \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 \underline{Z}_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \underline{Z}_L}$$

$$\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} = \frac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}$$

5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{Z_2}{Z_L} \tan(\beta l)} = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{Z_L}{\underline{Z}_2} \sin(\beta l) \right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{Z_L} \sin(\beta l) \right]$$

5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = 0 \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r \quad \underline{I}_h = \underline{I}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = Z_L \cdot j \tan(\beta l) \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \underline{I}_2 Z_L \cdot j \sin(\beta l)$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{Z_L}$$

Bildung einer Stehen

5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$$\underline{Z}_2 = \infty \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r \quad \underline{U}_h = \underline{U}_r$$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j \frac{Z_L}{\tan(\beta l)} \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2 \cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) \quad \underline{U}_2 = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2j \sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot j \sin(\beta l)$$

5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$ aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{Z_L} = \frac{Z_L}{\underline{Z}_2} = \frac{Y_2}{Y_L} \rightarrow \underline{Z}_e = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert: L \leftrightarrow C, Kurzschluss \leftrightarrow Leerlauf, **großes R** \leftrightarrow **kleines R**

5.2.7 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

5.2.8 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\text{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|}$$

$$= \frac{R_{\max}}{Z_L}$$

$$\text{SWR}^{-1} = \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_A| = \frac{\text{SWR} + 1}{\text{SWR} - 1}$$

5.2.9 Leistung

$$P_A = P_H - P_R$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2)$$

$$= P_{\max} \cdot (1 - r^2)$$

$$= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^*$$

$$P_V = P_q - P_A$$

$$\underline{I}(z) = \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z$$

5.2.10 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.2.11 Position von Extrema

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r}} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\min/\max} = \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$z_{\min} = \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}}$$

$$z_{\max} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}$$

5.2.12 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$Z_A = Z_L = Z(z)$$

$$r_A = 0 \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$

$$\text{SWR} = 1$$

$$U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$= \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}$$

5.2.13 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

$$\underline{R_A} > \underline{Z_L} \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

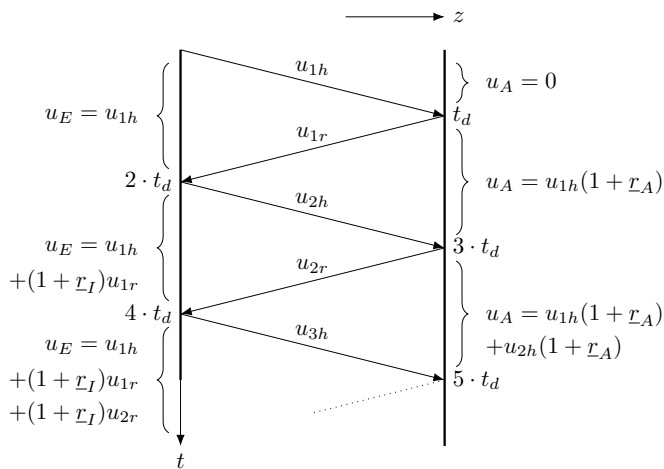
$$\underline{R_A} < \underline{Z_L} \rightarrow \theta_r = \pi$$

$$\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

5.4 Kettenmatrix einer Leitung

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

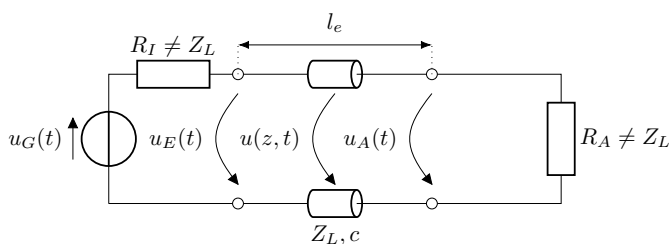


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Hinlaufende Welle } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

$$\begin{aligned} \text{Signallaufzeit: } t_d &= \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \\ &= \frac{l}{v_p} \end{aligned}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

6.1.2 Reflexionsfaktor

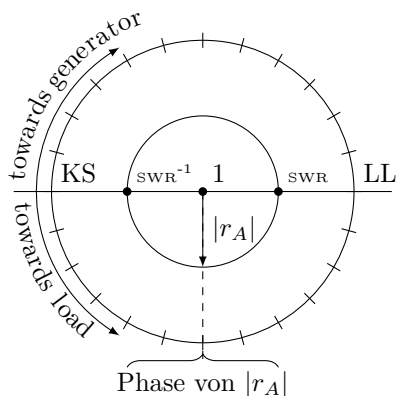
$\underline{r}(l) = \underline{r}$ $\underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2$ $0 < r < 1$ $0 < \Psi < 2\pi$
Immer gültig, auch ohne Quelle!

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\ &= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} \\ \underline{r}_2 &= \frac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \frac{\underline{U}_2 - I_2 Z_L}{\underline{U}_2 + I_2 Z_L} \\ \underline{z}_n &= \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \end{aligned}$$

6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von $m \rightarrow$ Werte von $\text{Re}\{\underline{z}_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} \quad |\underline{r}| = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m}$$



$$\begin{aligned} \underline{z}_n &= \frac{Z_n}{Z_L} \\ \underline{r}_n &= \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n} \\ m &= \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} \\ s &= \frac{1}{m} \end{aligned}$$

6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von \underline{z}_n um Mittelpunkt ergibt \underline{y}_n . (Phase $\pm 180^\circ / \pm \pi$)

6.3 Lastseite \rightarrow Quelle

1. $Z_L = Z_B$ ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L}$$

4. Im Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch $\underline{z}_n s$ nach außen

Ablesen und Notieren:

\rightarrow Relative Länge $[\frac{l}{\lambda}]$

\rightarrow Relativer Winkel in **Degree**

6. Kreis einzeichnen

Ablesen und Notieren:

\rightarrow **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse

\rightarrow **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse

\rightarrow \underline{r} abmessen und aus oberer Skala auslesen

7. Um Leitungslänge im UZS laufen \rightarrow Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen

Ablesen und Notieren:

\rightarrow Relativer Winkel

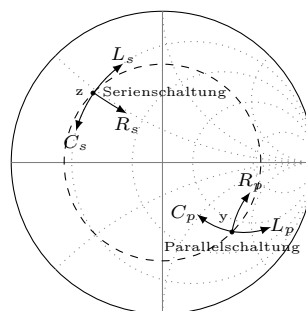
8. Wenn $\alpha \neq 0$

\rightarrow Dämpfung ausrechnen \rightarrow Um Faktor nach innen spiralisieren

9. Dieser Punkt ist \underline{z}_e

10. Eingangsimpedanz ablesen

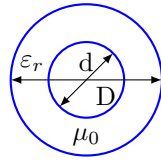
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser
 d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

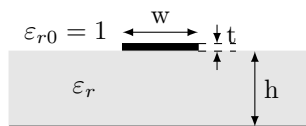
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite
 h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit \rightarrow Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer $\frac{w}{h}$ desto mehr nähert sich $\epsilon_{r,\text{eff}}$ an ϵ_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[\frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

7.6 Leitungsparameter

7.6.1 Streifenleitung / Parallele Platten

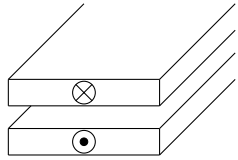
Für Sinus-Anregung:

$$I(l) = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta l} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U(l) = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{b \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_x$$

$$I(l) = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot b \rightarrow H = \frac{I_0}{b} \cdot e^{-j\beta l} \cdot \vec{e}_y$$

b: Plattenbreite **d:** Abstand zwischen den Platten



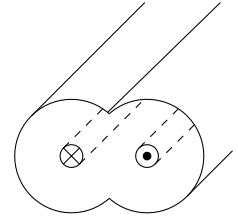
$$R' = \frac{2}{\delta \kappa b} \left[\frac{\Omega}{m} \right] \quad L' = \frac{\mu d}{b} \left[\frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\kappa b}{d} \left[\frac{S}{m} \right] \quad C' = \frac{b \varepsilon}{d} \left[\frac{F}{m} \right]$$

7.6.2 Doppelleitung

κ : Leitwert des Dielektrikums κ_L Leitwert des Leiters

r : Leiterradius d : Abstand zw. Leitermitte



$$R' = \frac{1}{\pi a \delta \kappa_L} \left[\frac{\Omega}{m} \right]$$

$$L' = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2r} \left[\frac{H}{m} \right]$$

$$G' = \frac{\pi \kappa}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[\frac{S}{m} \right]$$

$$C' = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2r)} \left[\frac{F}{m} \right]$$

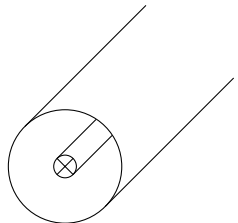
7.6.3 Koaxialleitung

r_i : Innenradius r_a : Außenradius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(r_a/r_i)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\hat{I}}{2\pi r} \right)^2 \cdot Z_{F0}$$



$R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi \sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, \vec{S} nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

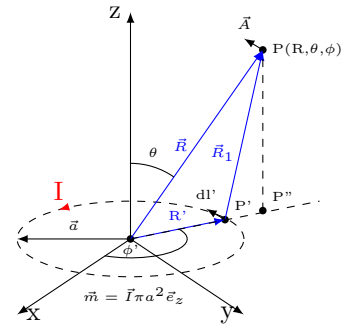
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

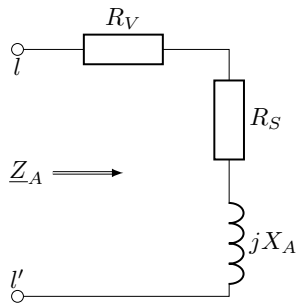
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi \end{aligned}$$

8.4 Antennenkenngrößen



Z_A := Antennenimpedanz
 R_V := Verlustwiderstand
 R_S := Strahlungswiderstand
 X_A := Antennenblindwiderstand
 D := Directivity/Richtfaktor
 G := Gain/Gewinn
 A_{eff} := Wirksame Antennenfläche

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\varphi, \vartheta)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

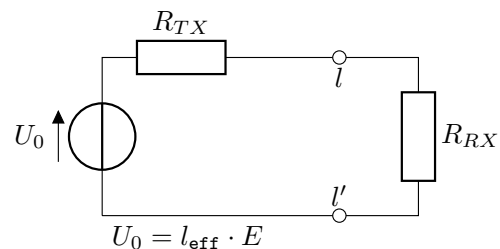
EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \\ A_{\text{eff}}(\theta) &= G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta \\ P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\ &= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2\end{aligned}$$

8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$\begin{aligned}F &= \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1] \\ a_0 &= 20 \lg \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left(\frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]\end{aligned}$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$\begin{aligned}L &= 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}] \\ L_{RX} &= L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]\end{aligned}$$

8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	l	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	h	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28; (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	73Ω		
λ -Dipol		2,41; (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	200Ω		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64; (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28; (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500 \Omega$		
kleiner Rahmen, n -Windungen, beliebige Form		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	ab	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l \lambda$	—	—	—		

9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
\vec{A}	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
\vec{B}	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
\vec{D}	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
\vec{E}	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
\vec{H}	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
\vec{J}	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
\vec{J}_F	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
\vec{M}	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
R_{mag}	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
\vec{S}	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	Ω
δ_s	Eindringtiefe	m
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
φ	elek. Skalarpotenzial	V
φ_m	mag. Skalarpotenzial	A
ρ	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
ρ	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
κ, σ	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
λ	Wellenlänge	m
μ	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
Φ_e	elek. Fluss	$C = As$
Φ_m	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$