OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

Formelsammlung
FWL

Wintersemester 22/23
nach Vorlesung von Prof. Stücke

Name:	Tony Pham
Letzte Änderung:	23. Januar 2023
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Einheiten

Größe	Symbol	Einheit
Permiabilitätskonstante	μ	$\frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{Am}}$
Dilelektrizitätskonstante	ε	$\frac{\mathtt{As}}{\mathtt{Vm}}$
elek. Ladung/Fluss	Q, q	$C = As$
elek. Feldstärke	$\vec{E}$	$\frac{\mathtt{V}}{\mathtt{m}}$
elek. Flussdichte	$\vec{D}$	$\frac{\mathtt{As}}{\mathtt{m}^2} = \frac{\mathtt{C}}{\mathtt{m}^2}$
Kapazität	C	$F = \frac{\mathtt{As}}{\mathtt{V}}$
mag. Fluss	ϕ, Φ	$Wb = Vs$
mag. Feldstärke	$\vec{H}$	$\frac{A}{m}$
mag. Flussdichte	$\vec{B}$	$T = \frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{m}^2}$
Induktivität	L	$H = \frac{\mathtt{Vs}}{\mathtt{A}}$
Strahlungsdichte	S_{av}, I	$\frac{\mathtt{W}}{\mathtt{m}^2}$

1.2 Vektorrechnung

1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.2.2 Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\varphi) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

1.2.3 Kreuzprodukt

$$A_{Para} = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Trick: Regel von Sarrus anwenden!

1.3 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div (grad)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz div: Vektorfeld $\rightarrow$ Skalar S.382
Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation rot: Vektorfeld $\rightarrow$ Vektorfeld S.382
Wirbeldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix}$$

Vektorfeld skalar annotiert: $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$

Gradient grad: Skalarfeld $\rightarrow$ Vektor/Gradientenfeld
zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad}\,\phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

1.3.1 Rechenregeln

ϕ, ψ: Skalarfelder $\quad \vec{A}, \vec{B}$: Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla\psi) + \psi(\nabla\phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla\phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.3.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Vektorpotential $\vec{E}$

$$\text{div}\,\vec{F} = \boxed{\text{div}(\text{rot}\,\vec{E}) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{rot}\,\vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F} \rightarrow$ Skalarpotential ϕ

$$\text{rot}\,\vec{F} = \boxed{\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad}\,\phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld $\vec{F}$:

$$\text{rot}\,\vec{F} = 0 \quad \text{div}\,\vec{F} = 0$$

$$\text{div}(\text{grad}\,\phi) = \Delta\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad}\,\phi$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{F}) - \Delta\vec{F}$$

1.4 Logarithmische Maße/Pegel

Feldgröße F_n: Spannung, Strom, $\vec{E}$-, $\vec{H}$-Feld, Schalldruck
Leistungsgröße P_n: Energie, Intensität, Leistung
Wichtig: Feldgrößen sind **Effektivwerte**!

- **Dämpfungsmaß** a in Dezibel [dB] und Neper [Np]

$$1\,\mathrm{dB} = 0,1151\,\mathrm{Np} \qquad 1\,\mathrm{Np} = 8,686\,\mathrm{dB}$$

$$a\,[\mathrm{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_2} \qquad a\,[\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{a[\mathrm{dB}]}{20\mathrm{dB}}} \qquad \frac{P_1}{P_2} = 10^{\frac{a[\mathrm{dB}]}{10\mathrm{dB}}}$$

$$a\,[\mathrm{Np}] = \ln \frac{F_1}{F_2} \qquad a\,[\mathrm{Np}] = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{a[\mathrm{Np}]} \qquad \frac{P_1}{P_2} = e^{2a[\mathrm{Np}]}$$

- **absolute Pegel** L mit Bezugsgrößen P_0, F_0

$$L\,[\mathrm{dB}] = 20 \cdot \log \frac{F_1}{F_0} \qquad L\,[\mathrm{dB}] = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_0}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{L[\mathrm{dB}]}{20\mathrm{dB}}} \qquad \frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L[\mathrm{dB}]}{10\mathrm{dB}}}$$

Einheit	Bezugswert	Formelzeichen
dBm, dB(mW)	$P_0 = 1mW$	$L_{\mathtt{P/mW}}$
dBW, dB(W)	$P_0 = 1W$	$L_{\mathtt{P/W}}$
dBV, dB(V)	$F_0 = 1V$	$L_{\mathtt{U/V}}$
dBμV, dB(μV)	$F_0 = 1\mu V$	$L_{\mathtt{U/\mu V}}$
dBμA, dB(μA)	$F_0 = 1\mu A$	$L_{\mathtt{I/\mu A}}$
dB(μV/m)	$F_0 = 1\frac{\mu V}{m}$	$L_{\mathtt{E/(\mu V/m)}}$
dB(μA/m)	$F_0 = 1\frac{\mu A}{m}$	$L_{\mathtt{H/(\mu A/m)}}$

- **Umrechnung** (Annäherungswerte)

Faktor $\frac{F_1}{F_0}$ bzw. $\frac{P_1}{P_0}$	Energiegröße P_n	Feldgröße F_n
1	0	0
100	20 dB	40 dB
1000	30 dB	60 dB
0,1	-10 dB	-20 dB
0,01	-20 dB	-40 dB
0,001	-30 dB	-60 dB
2	3 dB	6 dB
4	6 dB	12 dB
8	9 dB	18 dB
0,5	-3,01 dB	-6,02 dB
1,25	0,97 dB	1,94 dB
0,8	-0,97 dB	-1,94 dB

- **relativer Pegel / Maß**
  Maß = Differenz zweier (Leistungs)pegel bei gleichem Bezugswert P_0

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{P_2}{P_1}\right) \mathrm{dB}$$

1.4.1 Rechnen mit Pegeln

Rechenregeln für Logarithmen (10er-Basis): $x, y, a > 0$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) - \log(y) \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^a) = a \cdot \log(x) \qquad \log \sqrt[a]{x} = \frac{1}{a} \cdot \log(x)$$

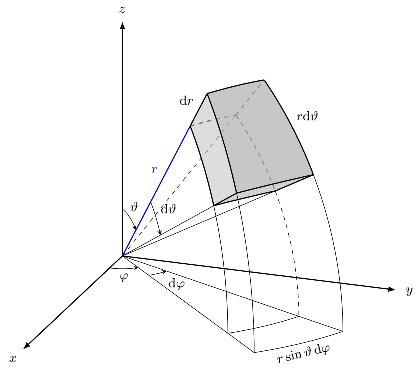
$$\mathtt{Pegel} = 10 \cdot \log(\mathtt{Faktor}) \qquad \mathtt{Faktor} = 10^{\frac{\mathtt{Pegel}}{10}}$$

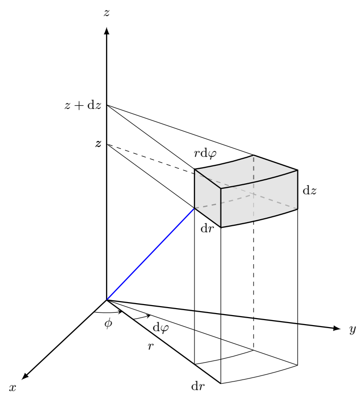
1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Umrechnungstabelle

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r\cos\varphi$	$r\sin\vartheta\cos\varphi$
y	$r\sin\varphi$	$r\sin\vartheta\sin\varphi$
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	r	
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi$	dr	
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$	$rd\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$		r
$\arctan\frac{y}{x}$		φ
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$		ϑ
$dx\sin\vartheta\cos\varphi$ + $dy\sin\vartheta\sin\varphi + dz\cos\vartheta$		dr
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$		$r\sin\vartheta d\varphi$
$dx\cos\vartheta\cos\varphi$ + $dy\cos\vartheta\sin\varphi - dz\sin\vartheta$		$rd\vartheta$

1.5.2 Schema KOS Kugel/Zylinder





1.5.3 Kartesische Koordinaten

Variablen: x, y, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ Volumenelemente: $dV = dx\,dy\,dz$

Flächenelemente: $dA_{xy} = dx\,dy\,\vec{e}_z \quad dA_{yz} = dy\,dz\,\vec{e}_x \quad dA_{xz} = dx\,dz\,\vec{e}_y$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; y; z)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z}$

Gradient: $\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$ **Divergenz**: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\vec{e}_z$

La-Place : $\Delta \equiv \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $\quad \Delta\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e}_x + \Delta E_y\vec{e}_y + \Delta E_z\vec{e}_z$

$$\Delta\vec{E} = \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right]\vec{e}_z$$

1.5.4 Zylinderkoordinaten

Polarkoordinaten siehe S.386, Papula S.387,

Variablen: r, φ, z Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2 + dz^2}$ Volumenelemente: $dV = \mathbf{r}\,dr\,d\varphi\,dz$

Flächenelemente: $dA_{r\varphi} = \mathbf{r}\,dr\,d\varphi\,\vec{e}_z \quad dA_{rz} = dr\,dz\,\vec{e}_\varphi \quad dA_{\varphi z} = \mathbf{r}\,d\varphi\,dz\,\vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(x; \varphi; z)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_z\vec{e}_z}$

Gradient: $\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$

Divergenz: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\vec{D}_r\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\vec{D}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{D}_z}{\partial z}$

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z$

La-Place : $\Delta\phi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ $\quad \Delta\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \Delta E_r\vec{e}_r + \Delta E_\varphi\vec{e}_\varphi + \Delta E_z\vec{e}_z$

$$\Delta\vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{E_r}{r^2}\right]\vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2}\right]\vec{e}_\varphi + [\Delta E_z]\,\vec{e}_z$$

1.5.5 Kugelkoordinaten

Variablen: r, ϑ, φ Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi$

Linienelemente: $ds = \sqrt{dr^2 + \mathbf{r^2}\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 + \mathbf{r^2}d\vartheta^2}$ Volumenelemente: $dV = \mathbf{r^2}\,\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$

Flächenelemente: $dA_{r\vartheta} = \mathbf{r}\,dr\,d\vartheta\,\vec{e}_\varphi \quad dA_{r\varphi} = \mathbf{r}\,\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,\vec{e}_\vartheta \quad dA_{\vartheta\varphi} = \mathbf{r^2}\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,\vec{e}_r$

Skalarfeld: $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$ Vektorfeld: $\boxed{\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\vec{e}_\varphi}$

Gradient: $\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$

Divergenz: $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 D_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot D_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial(\sin\vartheta\cdot E_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial rE_\varphi}{\partial r}\right]\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{e}_\varphi$

La-Place : $\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right\}$

2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form		Integralform
$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ **Gaußsches Gesetz**: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.	⇔ Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$ Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.
$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Das magnetische Feld ist quellenfrei. Es gibt **keine magnetischen Monopole**.	⇔ Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$ Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ **Induktionsgesetz**: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.	⇔ Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{eing.}}{dt}$ Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ **Amperesches Gesetz**: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.	⇔ Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$ Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Amperesches- /Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\boxed{\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\boxed{\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{ind} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}}$$

Differentielles ohmsches Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

$$\boxed{rot\vec{H} = \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}}$$

Bei isotropen Stoffen sind ε u. μ Skalare:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \qquad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren sich → nur den Rand betrachten.

$$\int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} = F(b) - F(a)$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV = \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[\frac{A}{m^2}\right]} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = [T]} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[\frac{C}{m^2}\right]}$$

Verkopplung von $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder über $\vec{J} = \kappa \vec{E}$.

Feldunterscheidung

$\vec{E}(x,y,z)$	$\widehat{=}$	statisches Feld
$\vec{E}(x,y,z,t)$	$\widehat{=}$	stationäres Feld
$\vec{E}(x,y,z,t) \cdot cos(\omega t - \beta z)$	$\widehat{=}$	Welle

3.1 Elektrostatik

Wirbelfreie Felder → Gradientenfeld → elek. Ladungen sind Quellen des $\vec{E}$-Feldes (Skalare Potenzialfkt. φ)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} E \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_z$$

3.1.1 Potential-/Poisson-Gleichung

La-Place-Gleichung, wenn $\rho = 0$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\Delta \varphi + \underbrace{\frac{\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi}{\varepsilon}}_{=0,\ \texttt{wenn homogen}} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$
$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon}$$

Vereinfachung zu 1-dimensionalem System:

$$\text{z.B. mit } \frac{\partial^2 \ldots}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \ldots}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

3.1.2 Randwertprobleme, -bedingungen (RB)

Dirichlet-RB: Gesuchte Potenzialfunktion φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)

Neumann-RB: Die Normalenableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ der Fkt. φ nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an.
(Bsp.: Grenzfläche unterschiedlicher Dielektrika)

3.1.3 Green'sche Funktionen

- **Skalarpotential** einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \qquad [V]$$

- **E-Feld** einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

- **D-Feld** einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \qquad \left[\frac{As}{m^2} = \frac{C}{m^2}\right]$$

- **Potentialfeld** einer Ladungsdichteverteilung mit $\varphi(\infty) = 0$

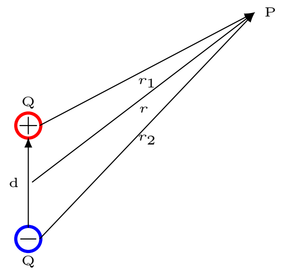
$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x',y',z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$$

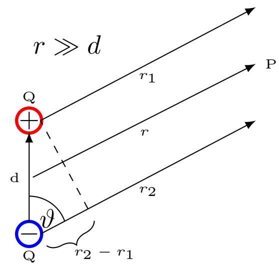
mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon |\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x,y,z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}'\vec{r}')\, \rho(\vec{r}')\, \mathrm{d}V'$$

3.1.4 Elektrischer Dipol

Dipolmoment $\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$





$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad\qquad \varphi \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \qquad\qquad = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

3.2 Magnetostatik

Quellenfreie Wirbelfelder mit *geschlossenen* Feldlinien.
Keine magnetischen Monopole: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.
Skalarpotential φ_m existiert, wenn $\vec{H}$ wirbelfrei ist:
$\operatorname{rot} \vec{H} = 0$, wenn $\vec{J} = 0$.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} B \qquad \vec{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m$$
$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

3.2.1 Vektorpotential

Reine Hilfsgröße, in Analogie zum elek. Skalarpotential φ. **Coulomb-Eichung**, wenn $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, gilt nur für zeitunabhängige Felder.

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

3.2.2 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x',y',z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$$

3.2.3 Biot-Savart-Gesetz

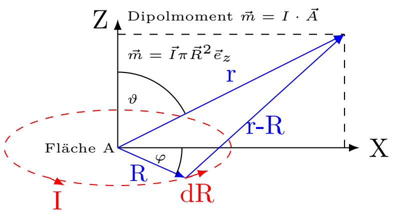
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \times \mathrm{d}\vec{s}\,'$$

mit $\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}\vec{s}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$\vec{r}$: Aufpunkt $\quad \vec{r}\,'$: Quellpunkt

3.2.4 Magnetischer Dipol



I entlang eines Leiters:

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.3 Quasistätionäre Felder (Wechselstrom)

Homogenes, Isotropes Medium: $\varepsilon, \mu, \kappa = \texttt{kost}$.
Leiter ist quasineutral: $\rho = 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} = \kappa \vec{E} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 & \vec{J} &= \kappa \vec{E} \end{aligned}$$

3.3.1 Komplexe Feldgrößen

- komplexe Amplitude / Phasor:

$$\underline{J} = J \cdot e^{j\varphi}$$

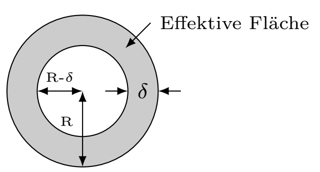
- komplexer Amplituden-Drehzeiger:

$$\underline{J}(t) = \underline{J} \cdot e^{jwt} = J \cdot e^{j(wt+\varphi)}$$

- Darstellung in karthesischen Koordinaten:

$$\underline{J} = \underline{J}_x \cdot \vec{e}_x + \underline{J}_y \cdot \vec{e}_y + \underline{J}_z \cdot \vec{e}_z$$

3.3.2 Skineffekt



$[\sigma/\kappa]$: Leitfähigkeit $\frac{A}{Vm} = \frac{1}{\Omega m}$

Eindringtiefe/Äquivalente Leiterschichtdicke
(Abfall der Amplitude: $A_0 \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \kappa f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} \quad [m]$$

(Oberflächen)**widerstand**:

$$R_{AC} = \frac{l}{\kappa \cdot A_{\texttt{eff}}} \qquad R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi R^2} \qquad R_F = \frac{1}{\kappa \delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x,t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) = H_0 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(wt - \beta x)$$

analog für E-Feld

Amplitude und **Phase** bezogen auf δ:

Amplitude : $x = \delta \cdot \ln(\texttt{Dämpfungsfaktor})$

Dämpfung : $\alpha = \frac{1}{\delta}$ $\quad$ Phase : $\varphi = -\frac{x}{\delta}$

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x,t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Rundleiter - Effektive Fläche:

$$\begin{aligned} A_{\texttt{eff}} &= A_{\texttt{ges}} - A_\sigma = R^2\pi - (R-\delta)^2\pi \\ &= 2 \cdot \pi\delta \left(R - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz abnimmt, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

3.3.3 Näherungen für Skineffekt

Rundleiter: $R_{DC} = \frac{l}{\kappa \pi r_0^2}$

Geometrische Beschreibung (Fehler $< 6\%$)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0^2}{2 \cdot \delta \cdot r_0 - \delta^2}\right)^4 & \text{für} r_0 \geq \delta \end{cases}$$

Bessel-Funktion (Fehler $< 6\%$):

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für} \quad x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2\left(1 - \frac{x^4}{6}\right) & \text{für} \quad x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}}$ $\quad r_0 \mathrel{\hat{=}}$ Außenradius $\quad X_{AC} = wL_i$

Empirische Beschreibung (Fehler $< 10\%$)

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad r_0 < \delta \\ 1 + \left(\frac{r_0}{2,65 \cdot \delta}\right)^4 & \text{für} \quad \delta < r_0 < 2\delta \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} + \frac{1}{4} & \text{für} \quad 2\delta < r_0 < 5\delta \quad (1) \\ \frac{r_0}{2 \cdot \delta} & \text{für} \quad 5\delta < r_0 \quad (2) \end{cases}$$

Anmerkung: (1) $\mathrel{\hat{=}}$ Kreisring mit Näherung $\quad$ (2) $\mathrel{\hat{=}}$ Ring mittig

3.4 E-Felder an Grenzflächen

3.4.1 Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung:

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

Schwächeres E-Feld bei höherem ε.

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Höheres D-Feld (mehr Ladungen) bei höherem ε.

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{D_{2n}/\varepsilon_2}{D_{1n}/\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

3.4.2 Grenzfläche Dielektrikum-Leiter

Ladungen verschieben sich so lange, bis im Leiter kein Feld mehr herrscht. $\rightarrow E_{2t}, E_{2n}, D_{2t}, D_{2n} = 0$

Längsschichtung:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0 \qquad D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} = 0$$

Felder stehen stets senkrecht auf elek. Leitern.

Querschichtung:

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{Q}{A} \qquad D_{1n} = \frac{Q}{A} \qquad E_{1n} = \frac{Q}{\varepsilon_1 A}$$

D-Feld entspricht der Flächenladungsdichte des Leiters.

3.4.3 Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung:

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Schwächeres H-Feld bei höherem μ.

Längsschichtung:

$$H_{1t} = H_{2t} \qquad \frac{B_{1t}}{mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

Höheres B-Feld (mehr Fluss) bei höherem μ.

Schrägschichtung:

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4 Wellen

4.1 Wellengleichungen allgemein

4.1.1 Zeitbereich

auch d'Alembertsche Gleichungen genannt:

$$\Delta\vec{E} - \kappa\mu \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t} = \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\Delta\vec{H} - \kappa\mu \cdot \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \cdot \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial^2 t} = 0$$

4.1.2 Frequenzbereich

auch Helmholtz-Gleichungen genannt:
mit harmonischer Zeitabhängigkeit: $\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{j}\omega$

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{E}} = \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\Delta\underline{\vec{H}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.1.3 Vereinfachung der Gleichungen

Bei quellfreiem, idealem Dielektrikum: $\rho = \kappa = \vec{J} = 0$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$
$$\Delta\underline{\vec{E}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \qquad \Delta\underline{\vec{H}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Im elektrisch guten Leiter $\rho = 0$, $\kappa \gg \omega\epsilon$

$$\Delta\vec{E} - \kappa\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \Delta\vec{H} - \kappa\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$
$$\Delta\underline{\vec{E}} - \kappa\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \qquad \Delta\underline{\vec{H}} - \kappa\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.2 Ebene Wellen

Vereinfachung: harmonische Zeitabhängigkeit, keine Raumladungen $\rho = 0$, keine Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2}{\partial^2 y} = 0$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$
$$\Delta\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)\vec{H}$$

TEM-Welle: $\vec{E}$ und $\vec{H}$ besitzen nur transversale (= *senkrecht zur Ausbreitungsrichtung* stehende) Komponenten.

ebene Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von $\underline{\vec{E}}(z,t)$)

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \overbrace{e^{-\alpha z}}^{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{cos(\omega t \overbrace{-}^{\text{positive z-Richtung}} \beta z)}_{\text{Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z}$$

komplexer Amplitudenvektor

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\underline{\gamma} z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z}$$

Fortpflanzungskonstante

$$\boxed{\underline{\gamma} = \alpha + j\beta}$$

4.3 Kenngrößen

4.3.1 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \dfrac{\omega}{c_0}$

$$\beta \mathrel{\widehat{=}} k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \quad \left[\frac{\mathtt{rad}}{\mathtt{m}}\right]$$
$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.3.2 Wellenlänge

Periodenlänge entlang der Ausbreitungsrichtung.
Freiraumwellenlänge: im materiefreien Raum λ_0

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0} \quad [\mathtt{m}]$$
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

4.3.3 Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \qquad v_{p,\mathtt{Medium}} \leq c_0$$

4.3.4 Brechzahl/Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

4.3.5 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

4.3.6 Feldwellenwiderstand

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \frac{\omega\mu}{\underline{k}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}}$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \qquad Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

4.3.7 Poynting-Vektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

Zeitbereich	Frequenzbereich
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$
$\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt$	$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right\}$
Leistungsflussdichte, Intensität $S_{av} = \lvert\vec{S}_{av}\rvert$	

$$S_{av} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} = \frac{P}{A_{\mathtt{Fläche}}}$$
$$P = \iint \vec{S}_{\mathrm{av}}\,d\vec{a} = Re\left\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right\}$$
$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z} \qquad P_{\mathtt{Leitung}} = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 Ausbreitung im Medium

4.4.1 Allgemein (mit Verlusten)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad E_2 = E_1 e^{-\alpha z} \qquad v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1\right)}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}}$$

4.4.2 Im leeren Raum (Vakuum)

materiefreier Raum: $\mu_r = \varepsilon_r = 1$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c_0} \qquad \lambda_0 = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0 \qquad \underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.4.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrikum

verlustlos: $\kappa = 0$, maximale Wirkleistung
Z_F rein reell $\rightarrow$ ebene Welle

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \qquad v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \qquad \boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

4.4.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \kappa \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \qquad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} \approx Z_{F0}\left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)}$$

4.4.5 Im guten Leiter

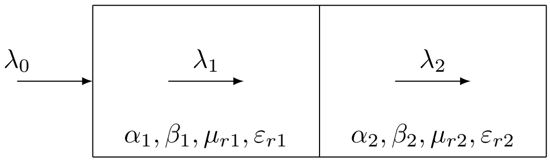
geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f} \qquad \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta \qquad \boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}$$

4.5 Ebene Wellen an Grenzflächen

4.5.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

4.6 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E–Vektors eine Linie beschreibt	H oder E
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

4.7 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_t}$$

4.8 Totalrefexion

$$\sin\theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}$$

4.9 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}\right)$$

4.10 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$

$$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

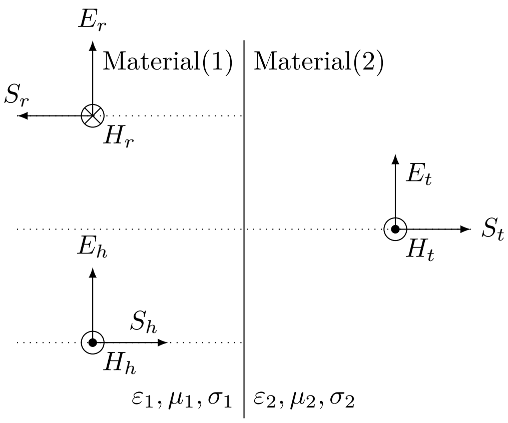
$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$

$$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.11 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$E_{t1} = E_{t2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$

$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \qquad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \qquad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t_e \cdot E_h$$
$$E_r = r_e \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$
$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$
$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$
$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$
$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$
$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.11.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
$$\texttt{imaginär:}\ \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.11.2 Medium 1: Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.11.3 Medium 2: Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.11.4 beide Medien: nicht magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.11.5 Medium 2: idealer Leiter

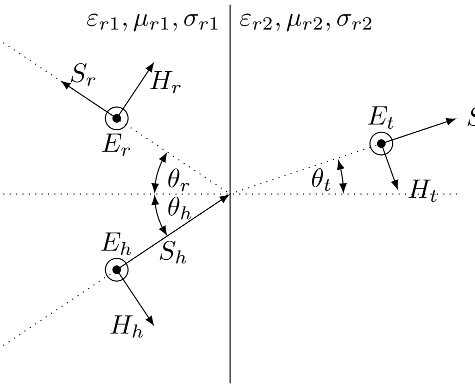
$$
\begin{aligned}
Z_{F2} &= 0 \\
r &= -1 \\
t &= 0 \\
\overline{S} &= 0 \\
E_1 &= -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z) \\
H_1 &= 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)
\end{aligned}
$$

$\underline{Stehende Welle}$
$\rightarrow H_{max}$ und E_{min} bei $n \cdot \lambda/_2$
$\rightarrow H_{min}$ und E_{max} bei $(2n-1) \cdot \lambda/_4$
$\rightarrow 90^\circ Phasenverschiebung$

4.12 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1+|r|}{1-|r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.13 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\boxed{\texttt{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega}$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$
$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

n : `Brechungsindex` ; $\theta_h = \theta_r$

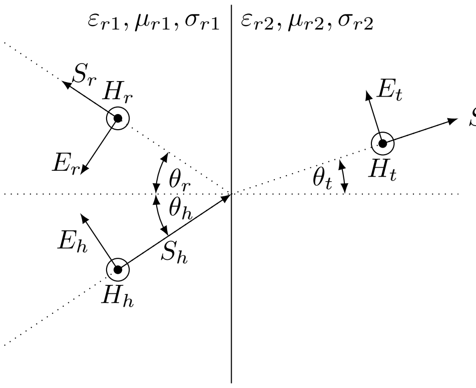
$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$
$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin\theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned}
r_s = r_{es} = r_{ms} &= \\
&= \frac{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h - Z_{F1} \cdot \cos\theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t} \\
&= \frac{\cos\theta_h - \sqrt{{}^{\varepsilon_{r2}}/_{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\theta_h}}{\cos\theta_h + \sqrt{{}^{\varepsilon_{r2}}/_{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\theta_h}} \\
t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos\theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t} \\
&= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t} \\
&= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\
t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos\theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_h + Z_{F1} \cdot \cos\theta_t} \\
&= 1 + r_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= r_s \cdot E_h \\
E_t &= t_{es} \cdot E_h \\
H_r &= r_s \cdot H_h \\
H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\
E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\
E_h &= H_h \cdot Z_{F1}
\end{aligned}$$

4.14 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\boxed{\texttt{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega}$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$
$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

n : `Brechungsindex` ; $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$
$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin\theta_h$$

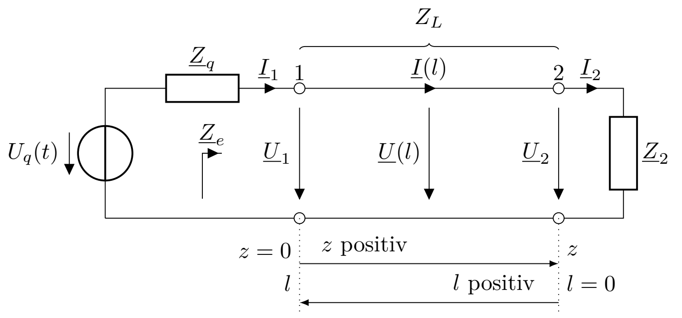
- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned}
r_p = r_{ep} = r_{mp} &= \\
&= \frac{Z_{F2} \cdot \cos\theta_t - Z_{F1} \cdot \cos\theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos\theta_t + Z_{F1} \cdot \cos\theta_h} = \\
&= \frac{\varepsilon_{r2}\cos\theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r1}{}^2\sin^2\theta_h}}{\varepsilon_{r2}\cos\theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r1}{}^2\sin^2\theta_h}} \\
t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos\theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h + Z_{F2} \cdot \cos\theta_t} \\
&= 1 + r_p \\
t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos\theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos\theta_h + Z_{F2} \cdot \cos\theta_t} \\
&= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t} \\
&= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= r_p \cdot E_h \\
E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\
H_r &= r_p \cdot H_h \\
H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\
E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\
E_h &= H_h \cdot Z_{F1}
\end{aligned}$$

5 Leitungen

5.1 Allgemeine Leitung (mit Verlusten)



Eingang: $\underline{Z}_e$ Anfang: $\underline{Z}(l) = \underline{Z}_1$ Abschluss: $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{(l=0)}$
Referenzpunkt **Last** ($l = 0$):

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot e^{\underline{\gamma} l} + \underline{U}_r \cdot e^{-\underline{\gamma} l}$$
$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot e^{\underline{\gamma} l} + \underline{I}_r \cdot e^{-\underline{\gamma} l}$$

5.1.1 Gleichungen

$$\begin{aligned}
\underline{U}(l) &= \underline{U}_2 \cdot \cosh(\underline{\gamma} l) + Z_L \underline{I}_2 \cdot \sinh(\underline{\gamma} l) \\
&= \underline{U}_2 \cdot \left[\cosh(\underline{\gamma} l) + \tfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_2} \sinh(\underline{\gamma} l)\right] \\
\underline{I}(l) &= \underline{I}_2 \cdot \cosh(\underline{\gamma} l) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_L} \cdot \sinh(\underline{\gamma} l) \\
&= \underline{I}_2 \cdot \left[\cosh(\underline{\gamma} l) + \tfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma} l)\right] \\
\underline{Z}(l) &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\underline{\gamma} l)}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_L} \tanh(\underline{\gamma} l)} = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_L \tanh(\underline{\gamma} l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_2 \tanh(\underline{\gamma} l)}
\end{aligned}$$

komplexer $\underline{\gamma}$ nicht im TR berechenbar:
<u>Lösung:</u> $\alpha l \left[\frac{\mathtt{Np}}{\mathtt{m}}\right]$ und $\beta l \left[\frac{\mathtt{rad}}{\mathtt{m}}\right]$ einzeln berechnen, dann:

$$\begin{aligned}
\cosh(\underline{\gamma} l) &= \frac{1}{2}\left[e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} + e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}\right] \\
\sinh(\underline{\gamma} l) &= \frac{1}{2}\left[e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - e^{-\alpha l} \cdot e^{-j\beta l}\right] \\
\tanh(\underline{\gamma} l) &= 1 + \frac{2}{e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l} - 1}
\end{aligned}$$

$e^{\pm \alpha l}$: Dämpfung $e^{\pm j\beta l}$: Phase ($\angle$ im TR)
Für Winkel αl bzw. βl auf **RAD** in TR!

5.1.2 Kenngrößen

- Leitungswellenwiderstand:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}$$

  komplexer $\underline{Z}_L$ nicht in TR berechenbar:
  Betrag: erst $\underline{Z}_L^2$, dann $\sqrt{|\underline{Z}_L^2|}$ ermitteln.
  Phase: $0.5 \cdot \arg(\underline{Z}_L^2)$ $\rightarrow \underline{\gamma}$ analog vorgehen.

- Fortpflanzungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \left[\frac{1}{m}\right]$$
$$= j\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2\omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

- Reflexionsfaktor: $r(l) \mathrel{\widehat{=}} r_1$: Leitungs*anfang*

$$\begin{aligned}
\underline{r}(l) &= \underline{r}_2 \cdot e^{-2\underline{\gamma} l} = \underline{r}_2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-2j\beta l} \\
&= \frac{\underline{U}_r(l)}{\underline{U}_h(l)} = -\frac{\underline{I}_r(l)}{\underline{I}_h(l)} = \frac{\underline{Z}(l) - \underline{Z}_L}{\underline{Z}(l) + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} - 1}{\frac{\underline{Z}(l)}{\underline{Z}_L} + 1}
\end{aligned}$$

- weitere Parameter: meistens $\mu_r = 1$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c_0}{f\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$
$$l_{\mathtt{elek.}} = \beta \cdot l \qquad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$

5.1.3 Kurzschluss und Leerlauf

Eingangswiderstand $\underline{Z}_e$ am Leitungsende:

mit Kurzschluss $\underline{Z}_{e,\mathtt{kurz}} = \underline{Z}_L \cdot \tanh(\underline{\gamma} l)$
im Leerlauf $\underline{Z}_{e,\mathtt{leer}} = \frac{\underline{Z}_L}{\tanh(\underline{\gamma} l)}$
beliebige Länge $\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{e,\mathtt{kurz}}(l) \cdot \underline{Z}_{e,\mathtt{leer}}(l)}$

5.1.4 Lange und Kurze Leitung

- kurze Leitung $\rightarrow l \ll \frac{\lambda}{4}$ $|\underline{\gamma} l| \ll 1$

$$\underline{U}(l) \approx \underline{U}_2 + \underline{I}_2 \cdot l(R' + jwL')$$
$$\underline{I}(l) \approx \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \cdot l(G' + jwC')$$

  Leitung wird durch konzentrierte Elemente ersetzt.

- lange Leitung $\rightarrow l \gg \frac{\lambda}{4}$ $|\underline{\gamma} l| \gg 1$
  Abschluss egal, es wird nur $\underline{Z}_L = \underline{Z}(l)$ gemessen wird.

5.2 Verlustlose Leitung

5.2.1 Kenngrößen

$R', G' = 0 \rightarrow \alpha = 0$ $Z_L, v_p \neq f$

$$Z_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \text{rein reell!}$$
$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{LC} \qquad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC}$$
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{1}{f\sqrt{LC}}$$

5.2.2 verlustloser Reflexionsfaktor

$\underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2$ $0 < r < 1$ $0 < \Psi < 2\pi$

$$\begin{aligned}
\underline{r}(l) &= \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi} \\
&= \tfrac{\underline{Z}(l) - Z_L}{\underline{Z}(l) + Z_L} \\
\underline{r}_2 &= \tfrac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \tfrac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_L} \\
\tfrac{\underline{Z}(l)}{Z_L} &= \tfrac{1 + \underline{r}(l)}{1 - \underline{r}(l)}
\end{aligned}$$

5.2.3 Beliebiger Abschluss (Last)

$\underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = \underline{U}_h + \underline{U}_r \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = \underline{I}_h + \underline{I}_r$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{1 + j\frac{\underline{Z}_2}{Z_L}\tan(\beta l)} = Z_L \frac{\underline{Z}_2 + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z}_2 \tan(\beta l)}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{Z_L}{\underline{Z}_2}\sin(\beta l)\right]$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_2 \cdot \left[\cos(\beta l) + j\frac{\underline{Z}_2}{Z_L}\sin(\beta l)\right]$$

5.2.4 Kurzschluss an Leitungsende

$\underline{Z}_2 = 0 \qquad \underline{U}_2 = \underline{U}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{U}_h = -\underline{U}_r \qquad \underline{I}_h = \underline{I}_r$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = Z_L \cdot j\tan(\beta l) \qquad \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2j\sin(\beta l) = \underline{I}_2 Z_L \cdot j\sin(\beta l)$$

$$I(l) = \underline{I}_h \cdot 2\cos(\beta l) = \underline{I}_2 \cdot \cos(\beta l) \qquad \underline{I}_2 = \frac{2\underline{U}_h}{Z_L}$$

Bildung einer Stehen

5.2.5 Leerlauf an Leitungsende

$\underline{Z}_2 = \infty \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_{(l=0)} = 0 \rightarrow \underline{I}_h = -\underline{I}_r \qquad \underline{U}_h = \underline{U}_r$

$$\underline{Z}(l) = \frac{\underline{U}(l)}{\underline{I}(l)} = -j\frac{Z_L}{\tan(\beta l)} \qquad \rightarrow \text{rein imaginär!}$$

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_h \cdot 2\cos(\beta l) = \underline{U}_2 \cdot \cos(\beta l) \qquad \underline{U}_2 = 2\underline{U}_h$$

$$\underline{I}(l) = \underline{I}_h \cdot 2j\sin(\beta l) = \frac{\underline{U}_2}{Z_L} \cdot j\sin(\beta l)$$

5.2.6 Leitung als Impedanz-Transformator

$\lambda/4$ -Leitung mit Eingangswiderstand $\underline{Z}_e = \underline{Z}(l)$ aus 5.2.3:

$$\frac{\underline{Z}_e}{Z_L} = \frac{Z_L}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{Y_L} \rightarrow Z_e = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_2}$$

Eine $\lambda/4$ -Leitung transformiert: L $\leftrightarrow$ C, Kurzschluss $\leftrightarrow$ Leerlauf, **großes** R $\leftrightarrow$ **kleines** R

5.2.7 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz
$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$
2. Reflexion am Leitungsende
$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_A - \underline{Z}_L}{Z_A + \underline{Z}_L}$$
3. Reflexion am Leitungsanfang
$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$
4. Bestimmung der Impedanz
$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$
5. Eingangswiderstand
$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

5.2.8 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\begin{aligned} \text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(l)|}{1 - |r(l)|} = \frac{|U_h| + |U_r|}{|U_h| - |U_r|} \\ &= \frac{R_{max}}{Z_L} \end{aligned}$$

$$\text{SWR}^{-1} = \frac{R_{min}}{Z_L} \qquad |r_A| = \frac{SWR + 1}{SWR - 1}$$

5.2.9 Leistung

$$\begin{aligned} P_A &= P_H - P_R \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{Re\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}} \cdot \left(1 - r^2\right) \\ &= P_{\max} \cdot \left(1 - r^2\right) \\ &= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ \underline{I}(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z \end{aligned}$$

5.2.10 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.2.11 Position von Extrema

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r}} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$$f_{\mathtt{min}} \rightarrow \text{Minimum(Knoten) der Spannungen}$$

$$f_{\mathtt{max}} \rightarrow \text{Maximum(Bäuche) der Spannungen}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathtt{min/max}} &= \frac{c_0}{f_{\mathtt{min/max}}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \\ z_{\mathtt{min}} &= \frac{-n \cdot \lambda_{\mathtt{min}}}{2} \qquad \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\mathtt{min}}} \\ z_{\mathtt{max}} &= \frac{-(2n+1)\lambda_{\mathtt{max}}}{4} \qquad \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\mathtt{max}}}{2 \cdot \lambda_{\mathtt{max}}} \\ z &= \frac{\lambda_{\mathtt{min}} \cdot \lambda_{\mathtt{max}}}{4(\lambda_{\mathtt{min}} - \lambda_{\mathtt{max}})} \end{aligned}$$

5.2.12 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_L = Z(z) \\ r_A &= 0 \qquad \rightarrow \text{reflexionsfrei} \\ \text{SWR} &= 1 \\ U(z) &= U_h \cdot e^{j\beta z} \\ I(z) &= I_h \cdot e^{j\beta z} \\ &= \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z} \end{aligned}$$

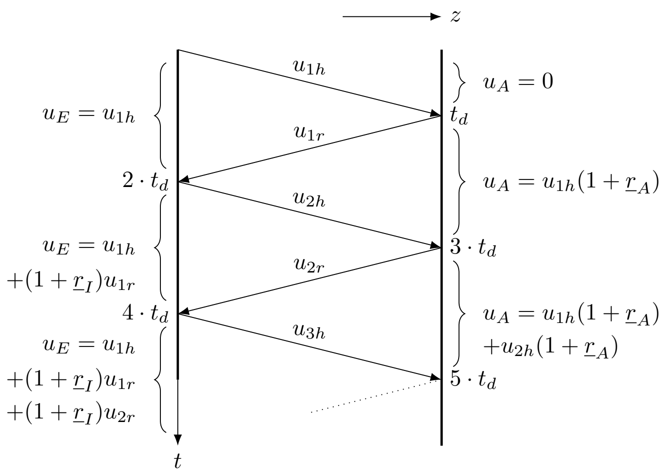
5.2.13 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \texttt{reell}$$

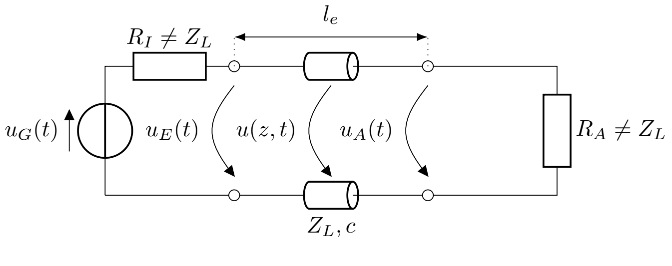
$$\underline{R_A > Z_L} \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \texttt{ ist negativ}$$
$$\rightarrow z_{\texttt{max}} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$\underline{R_A < Z_L} \rightarrow \theta_r = \pi$$
$$\rightarrow z_{\texttt{min}} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

5.3 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$
$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



Reflexionsfaktor Leitungsanfang: $\underline{r}_I = \dfrac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

Reflexionsfaktor Leitungsende: $\underline{r}_A = \dfrac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Hinlaufende Welle $u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \dfrac{Z_L}{Z_L + R_I}$

Signallaufzeit: $t_d = \dfrac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$

$$= \frac{l}{v_p}$$

5.4 Kettenmatrix einer Leitung

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

6.1.1 Normierte Impedanz

$$\underline{z}_n = \frac{Z(l)}{Z_L} = \frac{Z_2 + jZ_L \cdot \tan(\beta l)}{Z_L + jZ_2 \cdot \tan(\beta l)}$$

6.1.2 Reflexionsfaktor

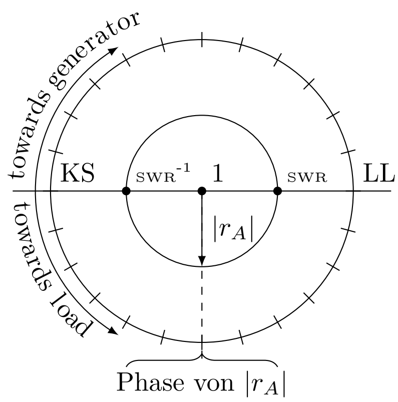
$\underline{r}(l) = \underline{r} \qquad \underline{r}_{(l=0)} = \underline{r}_2 \qquad 0 < r < 1 \qquad 0 < \Psi < 2\pi$
Immer gültig, auch ohne Quelle!

$$\underline{r} = \underline{r}_2 \cdot e^{-j2\beta l} = r \cdot e^{-j(\Psi_0 + 2\beta l)} = r \cdot e^{j\Psi}$$
$$= \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1}$$
$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - Z_L}{\underline{Z}_2 + Z_L} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{I}_2 Z_L}{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 Z_L}$$
$$\underline{z}_n = \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}}$$

6.1.3 Anpassungsfaktor

Werte von $m \to$ Werte von $\mathrm{Re}\{\underline{z}_n\} : 0 \leq m \leq 1$

$$m = \frac{U_{min}}{U_{max}} = \frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}} \qquad |\underline{r}| = \frac{1 - m}{1 + m} \qquad s = \frac{1}{m}$$



$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{Z_L}$$
$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$
$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|}$$
$$s = \frac{1}{m}$$

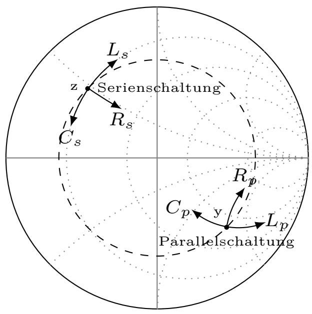
6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Spiegelung von $\underline{z}_n$ um Mittelpunkt ergibt $\underline{y}_n$. (Phase $\pm 180° / \pm\pi$)

6.3 Lastseite → Quelle

1. $Z_L = Z_B$ ins Diagramm einzeichnen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn z.B. Parallelschaltung etc.
3. Normieren
$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}(l)}{Z_L}$$
4. Ims Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch $\underline{z}_n s$ nach außen
   Ablesen und Notieren:
   → Relative Länge $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$
   → Relativer Winkel in **Degree**
6. Kreis einzeichen
   Ablesen und Notieren:
   → **Maxima**: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse
   → **Minima**: linker Schnittpunkt mit Re-Achse
   → $\underline{r}$ abmessen und aus oberer Skala auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen
   Ablesen und Notieren:
   →Relativer Winkel
8. Wenn $\alpha \neq 0$
   → Dämpung ausrechen → Um Faktor nach innen Spiralieren
9. Dieser Punkt ist $\underline{z}_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen

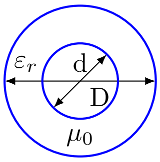
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



$$\mathrm{D} = \text{Außendurchmesser}$$
$$\mathrm{d} = \text{Innendurchmesser}$$

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

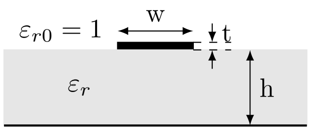
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{\frac{f\cdot\mu}{\pi\cdot\sigma}}}{120\Omega} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{D} \cdot \frac{1+\frac{D}{d}}{\ln\frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C$,$\tan\delta = ({}^{G}/_{\omega C})$

$$\alpha_d = \pi\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \tan\delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



$$\mathrm{w} := \text{Leiterbahnbreite}$$
$$\mathrm{h} := \text{Substratbreite}$$

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} = \frac{\varepsilon_r+1}{2} + \frac{\varepsilon_r-1}{2\sqrt{1+10\cdot\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}}}}$$

Je größer $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{h}}$ desto mehr nähert sich $\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}$ an ε_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}}} \cdot \ln\left(\frac{8\mathrm{h}}{\mathrm{w}} + \frac{\mathrm{w}}{4\mathrm{h}}\right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{h}} + 2,42 - 0,44\cdot\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}} + \left(1-\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \mathrm{VSWR} = \frac{1+|r|}{1-|r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s-1}{s+1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20\log(r) dB$$

Missmatch Loss

$$\mathrm{ML} = -10\log\left(1-r^2\right) dB$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B\cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B\cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B\cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B\cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$B' = B\cdot l[\frac{MHz}{km}]$ = konstant

$B \sim \frac{1}{l}$ und $l \sim \frac{1}{B}$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, solange Dämpfung keine Rolle spielt.

7.6 Leitungsparameter

σ = Leitwert des Dielektr. σ_c = Leitwert des Leiters

7.6.1 Parallele Platten

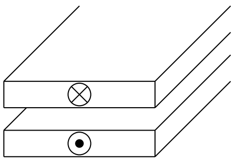
$w =$ Platten Breite $\qquad d =$ Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z \cdot e^{j\omega t}}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \overset{w \gg d}{=} E \cdot d \to E = \frac{U_0}{d} \cdot^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \to H = \frac{I_0}{w} \cdot^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

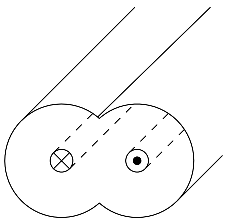


$R = \frac{2}{w\delta\sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w\varepsilon}{d}$

7.6.2 Doppelleitung:

$a =$ Leiter Radius $\qquad d =$ Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU → 1; OPTN → 1 → 5



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

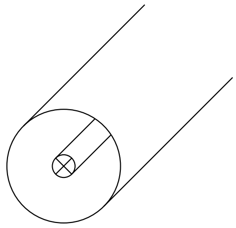
7.6.3 Koaxial Leitung

$a =$ innen Radius $\qquad b =$ außen Radius

$$\vec{H}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r \quad = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\hat{I}}{2\pi r}\right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$



$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{d}}$$

8.1.1 Allgemein

$$\vec{H} = -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi$$
$$\vec{E} = -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R$$
$$= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta$$

8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone): $\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1$ oder $\beta R \ll 1$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\vec{H} \approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\vec{E} \approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega\varepsilon R^3} \cos\theta \cdot \vec{e}_R + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega\varepsilon R^3} \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone): $\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1$ oder $\beta R \gg 1$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, $\vec{S}$ nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$H \approx j\frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$
$$E \approx j\frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$P_{\text{rad}} = \frac{Z_{F0} {I_0}^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} = \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} = 40\pi^2\Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2$$
$$S_{av} = \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \vec{e}_R = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

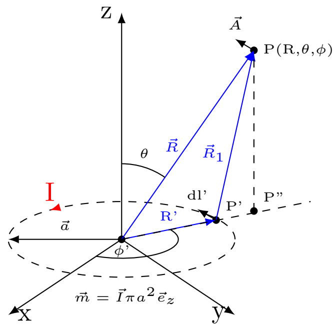
$$R_S = \frac{2}{3}\pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2\Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

$$\boxed{\vec{m} = \vec{I}\pi\vec{a}^2\vec{e}_z} \quad \boxed{m = I \cdot A}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi R^2}(1 + j\beta R)e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\Delta l \to \beta\pi\ a^2$$

$$\vec{H} = -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R$$
$$= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta$$
$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin\theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi$$

8.2.1 Fernfeld

$$E \approx -\frac{\beta m\omega\mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$
$$H \approx -\frac{\beta m\omega\mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$P_{\text{rad}} = \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} = \frac{m^2 \mu\omega^4}{12\pi v_p^3}$$
$$S_{av} = \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \vec{e}_R = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}$$

8.2.3 Nahfeld

$$E \approx -\frac{jm\omega\mu}{4\pi R^2} \sin\theta \cdot \vec{e}\phi$$
$$H \approx \frac{m}{4\pi R^3}(2\cos\theta \cdot \vec{e}_R + \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta)$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin\left[\beta \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$
$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

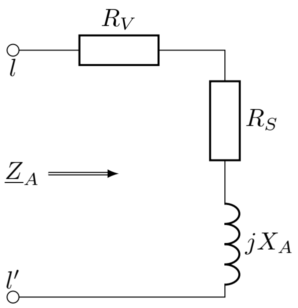
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{Z_{F0} I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)\right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$
$$= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a}$$
$$= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi$$

8.4 Antennenkenngrößen



$\underline{Z}_A$:= Antennenimpedanz
R_V := Verlustwiderstand
R_S := Strahlungswiderstand
X_A := Antennenblindwiderstand
D := Directifity/Richtfaktor
G := Gain/Gewinn
A_{eff} := Wirksame Antennenfläche

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \triangleq$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\varphi,\vartheta)}{U_{\max}} \qquad 0 \le C(\vartheta,\varphi) \le 1$$
$$C_i(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_i} \qquad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_i}$$
$$D(\vartheta,\varphi) = C_i^2(\vartheta,\varphi) = D \cdot C^2(\vartheta,\varphi)$$
$$D = \max\{D(\vartheta,\varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \qquad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\texttt{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\texttt{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$\boxed{g = 10 \cdot log(G)\text{dB}}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76\text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15\text{dBi}$$

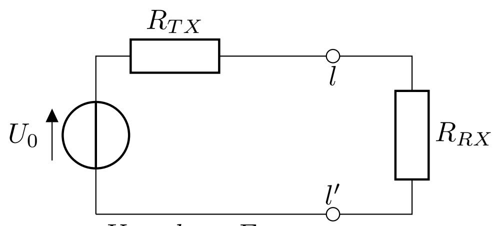
EIRP: Eqivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i[\text{dBi}]$$

ERP: Eqivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d[\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



$U_0 = l_{\texttt{eff}} \cdot E$

Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}
\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\texttt{eff},RX} \cdot A_{\texttt{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\
&= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{A_{\texttt{eff}}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2} \cdot \sin^2\theta}^{D_{i,\theta}}}$$

$$\begin{aligned}
P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\texttt{eff}} \\
&= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2
\end{aligned}$$

8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \qquad [1]$$

$$a_0 = 20\lg\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20\lg\left(\frac{4\pi df}{c_0}\right) \qquad [\mathrm{dB}]$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10\lg\left(\frac{P}{1\mathrm{mW}}\right) \qquad [\mathrm{dBm}]$$

$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \qquad [\mathrm{dB}]$$

8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0{,}08\lambda^2$	–	–	+	+
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität	l	1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	l	$80\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$	90°	$\vartheta = 90°$
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$	h	3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0{,}06\lambda^2$	h	$160\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$	45°	$\vartheta = 90°$
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$	h	3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0{,}06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$	45°	$\vartheta = 90°$
$\lambda/4$-Antenne auf leitender Ebene	$\lambda/4$	3,28; (5,1 dB)	$0{,}065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0{,}16\lambda$	40Ω	39°	$\vartheta = 90°$
kurzer Dipol $l \ll \lambda$	l	1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$	90°	$\vartheta = 90°$
$\lambda/2$-Dipol	$\lambda/2$	1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0{,}32\lambda$	73Ω	78°	$\vartheta = 90°$
λ-Dipol	λ	2,41; (3,8 dB)	$0{,}19\lambda^2$	$\gg\lambda$	200Ω	47°	$\vartheta = 90°$
$\lambda/2$-Schleifendipol	$\lambda/2$	1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0{,}64\lambda$	290Ω	78°	$\vartheta = 90°$
Schlitzantenne in Halbraum strahlend	$\lambda/2$, $\varphi = 0°$	3,28; (5,1 dB)	$0{,}26\lambda^2$	–	$\approx 500\Omega$	78°, $-90° \leq \varphi \leq 90°$	$\vartheta = 90°$
kleiner Rahmen, n-Windungen, beliebige Form	Fläche A, $\varphi = 0°$	1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$	90°, $\varphi = 90°$	90°, $\varphi = 0°$
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$	n-Windungen, D, l, $\varphi = 0°$	1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0{,}12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$	90°, $\varphi = 90°$	90°, $\varphi = 0°$
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$	l	$\approx \frac{4}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0{,}12\, l\lambda$	–	–	$50°\lambda/l$	+
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$	l, $\varphi = 0°$	$\approx \frac{8}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0{,}25\lambda$	–	–	$51°\lambda/l$	90°, $\varphi = 0°$
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$	a, b, $\varphi = 0°$	$\approx \frac{6{,}5 \cdot 10^6\, ab}{\lambda^2}$	ab	–	–	$51°\lambda/b$, $\varphi = 0°$	$51°\lambda/a$
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren	l, $\varphi = 0°$	$\approx 5 + 10\, l/\lambda$	–	–	–	50°, $\varphi = 0°$	40°, $\varphi = 0°$

9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	J = VAs = Ws
$\vec{A}$	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m}$ $(\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
$\vec{B}$	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
$\vec{D}$	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	C = As
$\vec{E}$	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$\vec{H}$	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
$\vec{J}$	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
$\vec{M}$	Drehmoment	J = Nm = VAs
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
R_{mag}	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	Ω
δ_s	Eindringtiefe	m
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
φ	elek. Skalarpotenzial	V
φ_m	mag. Skalarpotenzial	A
ρ	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
ρ	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
κ, σ	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
λ	Wellenlänge	m
μ	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
Φ_e	elek. Fluss	C = As
Φ_m	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$