



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

# FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

10. November 2022

Lizenz:

GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Differentialoperatoren	1
1.1.1 Rechenregeln	1
1.1.2 Spezielle Vektorfelder	1
1.2 Logarithmische Maße	1
1.3 Vektorrechnung	1
1.3.1 Kreuzprodukt	1
1.3.2 Schnittwinkel zweier Vektoren	1
1.3.3 Betrag eines Vektors	1
1.4 Randbedingung	1
1.5 Vergleich/Umrechnung	2
1.6 Kartesische Koordinaten	3
1.7 Zylinderkoordinaten	3
1.8 Kugelkoordinaten	4
<b>2 Maxwell-Gleichungen</b>	<b>5</b>
2.1 Integralsätze	5
<b>3 Felder</b>	<b>6</b>
3.1 E-Felder an Grenzflächen	6
3.2 Elektrostatik	6
3.2.1 Potential Gleichung	6
3.2.2 Green'sche Funktionen	6
3.3 Magnetostatik	6
3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	6
3.3.2 Biot-Savart-Gesetz	6
3.3.3 Elektrischer Dipol	7
3.3.4 Magnetischer Dipol	7
3.4 Skineffekt	7
<b>4 Wellen</b>	<b>8</b>
4.1 Ausbreitung	8
4.1.1 Allgemein	8
4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)	8
4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika	8
4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.1.5 Im guten Leiter	8
4.2 Übergang	9
4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	9
4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)	9
4.3.1 Leistung	9
4.3.2 Leistung nach Dämpfung	9
4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert	9
4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)	9
4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)	9
4.5.1 Zeitbereich	9
4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)	9
4.6 Wellenzahl	9
4.7 Wellenlänge	10
4.8 Phasengeschwindigkeit	10
4.8.1 Gruppengeschwindigkeit	10
4.9 Polarisierung	10
4.10 Verlustlose Polarisierung	10
4.11 Totalreflexion	10
4.12 Grenzwinkel	10
4.13 Brewster-/Polarisationswinkel	10
4.14 Senkrechter Einfall	11
4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	11
4.14.2 Spezialfall Medium 1 ist Luft	11
4.14.3 Spezialfall Medium 2 ist Luft	11
4.14.4 Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch	11
4.14.5 Spezialfall Medium 2 idealer Leiter	11

4.15	Stehwellenverhältnis	11
4.16	Senkrechte (E-Feld) Polarisierung (H-Feld parallel)	12
4.17	Parallel (E-Feld) Polarisierung (H-Feld senkrecht)	12
<b>5</b>	<b>Leitungen</b>	<b>13</b>
5.1	Leitungsparameter	13
5.1.1	Parallele Platten	13
5.1.2	Doppelleitung:	13
5.1.3	Koaxial Leitung	13
5.2	Allgemeine Lösung Leitungsgleichung	13
5.2.1	Verlustlose Übertragungsleitung	14
5.2.2	vernachlässigbarer Widerstandsbelag	14
5.2.3	vernachlässigbarer Leitwertbelag	14
5.3	Übertragungsleitung mit Last	14
5.3.1	Vorgehen Eingangswiderstand	14
5.3.2	Reflexionsfaktor entlang einer Leitung	14
5.3.3	Stehwellenverhältnis	14
5.3.4	Leistung	14
5.3.5	Gleichspannungswert (=Endwert)	14
5.3.6	Position von Extrema	15
5.3.7	Spezialfall: Angepasste Leitung	15
5.3.8	Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung	15
5.3.9	Spezialfall: Leerlaufende Leitung	15
5.3.10	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung	15
5.4	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	15
5.5	Kettenmatrix einer Leitung	15
<b>6</b>	<b>Smith-Diagramm</b>	<b>16</b>
6.1	Allgemein	16
6.2	Impedanz/Admetanz umrechnen	16
6.3	Zusammenschaltungen	16
6.4	Von Last zu Quelle	16
<b>7</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>17</b>
7.1	Koaxial Leiter	17
7.1.1	Wellenwiderstand	17
7.1.2	Dämpfung	17
7.2	Mikrostreifenleiter	17
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl	17
7.2.2	Schmale Streifen	17
7.2.3	Breite Streifen	17
7.3	Hohlleiter	17
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss	17
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser	17
<b>8</b>	<b>Antennen</b>	<b>18</b>
8.1	Herz'scher Dipol	18
8.1.1	Allgemein	18
8.1.2	Nahfeld	18
8.1.3	Fernfeld	18
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	18
8.1.5	Strahlungswiderstand	18
8.1.6	Verlustwiderstand	18
8.2	Magnetischer Dipol	18
8.2.1	Fernfeld	18
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	18
8.2.3	Nahfeld	18
8.3	Lineare Antenne	18
8.3.1	Dipolantenne	19
8.4	Antennenkenngrößen	19
8.4.1	Abgestrahlte Leistung	19
8.4.2	Verlustleistung	19
8.4.3	Wirkungsgrad	19
8.4.4	Richtcharakteristik	19

8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor . . . . .	19
8.4.6	Gewinn . . . . .	19
8.4.7	Wirksame Antennenfläche . . . . .	19
8.5	Bezugsantennen . . . . .	19
8.6	Senden und Empfangen . . . . .	19
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß . . . . .	20
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel . . . . .	20
8.7	Antennentabelle . . . . .	21

<b>9</b>	<b>Einheiten</b>	<b>22</b>
----------	------------------	-----------

# 1 Grundlagen

## 1.1 Differentialoperatoren

### Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

### Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Divergenz**  $\text{div}$ : Vektorfeld  $\rightarrow$  Skalar

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden. *mFS S.382*

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

**Rotation**  $\text{rot}$ : Vektorfeld  $\rightarrow$  Vektorfeld

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an. *mFS S.382*

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

**Gradient**  $\text{grad}$ : Skalarfeld  $\rightarrow$  Vektor/Gradientenfeld  
zeigt in Richtung steilster Anstieg von  $\phi$ , *mFS S.380*

$$\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

### 1.1.1 Rechenregeln

$\phi, \psi$ : Skalarfelder  $\vec{A}, \vec{B}$ : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

### 1.1.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld  $\rightarrow$  Wirbelfeld:

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld  $\rightarrow$  Skalarfeld:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad } \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{div}(\text{grad } \phi) = \Delta \phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } \phi$$

## 1.2 Logarithmische Maße

- $\text{dBm} \triangleq 1\text{mW}$
- $\text{dB}\mu\text{V} \triangleq 1\mu\text{V}$
- $\text{dBmV} \triangleq 1\text{mV}$
- $\text{dBi} \rightarrow \text{Isotropic}$

Dezibel [dB]

$$\begin{aligned} X[\text{dB}] &= 20 \cdot \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) & X[\text{dB}] &= 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \\ U_1 &= U_2 \cdot 10^{X/20\text{dB}} & P_1 &= P_2 \cdot 10^{X/10\text{dB}} \\ 1\text{dB} &\triangleq & 0,1151\text{Np} \end{aligned}$$

Neper [Np]

$$\begin{aligned} X[\text{Np}] &= \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) & X[\text{Np}] &= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \\ U_1 &= U_2 \cdot e^X & P_1 &= P_2 \cdot e^{2X} \\ 1\text{Np} &\triangleq & 8,686\text{dB} \end{aligned}$$

## 1.3 Vektorrechnung

### 1.3.1 Kreuzprodukt

*mFS S.53*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Schnittwinkel zweier Vektoren

*mFS S.52*

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{H} &= |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \frac{E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z}{|\vec{E}| \cdot |\vec{H}|} \end{aligned}$$

### 1.3.3 Betrag eines Vektors

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

## 1.4 Randbedingung

Dirichlet-RB	Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5\text{V}$ )
Neumann-RB	Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an

## 1.5 Vergleich/Umrechnung

Kart.	Zyl.	Kug.
$x$	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
$y$	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
$z$	$z$	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$r$	
$\arctan \frac{y}{x}$	$\varphi$	
$z$	$z$	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	$dr$	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
$dz$	$dz$	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		$r$
$\arctan \frac{y}{x}$		$\varphi$
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		$\vartheta$
$dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$		$dr$
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

## 1.6 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.7 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.8 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[ \Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$



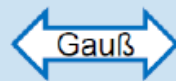
## 2 Maxwell-Gleichungen

### differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

**Gaußsches Gesetz:** Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung  $Q$  bzw. die Ladungsdichte  $\rho$  ist Quelle des elektrischen Feldes.

### Integralform

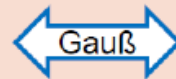


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.  
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.

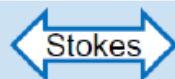


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Induktionsgesetz:** Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.

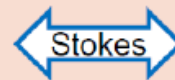


$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  einer Fläche  $A$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**Amperesches Gesetz:** Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  der Fläche  $A$  entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

### Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

### Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

### Differentielle ohmsche Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind  $\epsilon$  u.  $\mu$  Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

## 2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren  $\rightarrow$  Rand betrachten

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

### 3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[ \frac{A}{m^2} \right]} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = [T]} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[ \frac{C}{m^2} \right]}$$

Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

#### 3.1 E-Felder an Grenzflächen

**Dielektrische Grenzfläche**

Querschichtung:  $D_{1n} = D_{2n}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung:  $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung:  $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

**Grenzfläche dielektrischer Leiter**

Längsschichtung:  $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Querschichtung:  $D_{1n} = \frac{Q}{A}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$$

**Grenzfläche an magn. Feldern**

Querschichtung:  $B_{1n} = B_{2n}$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung:  $H_{1t} = H_{2t}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung:  $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

#### 3.2 Elektrostatik

• wirbelfreies Feld → Elektrische Ladungen sind Quellen des Feldes

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0} \quad = \operatorname{rot} \operatorname{grad} E$$

##### 3.2.1 Potential Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

⇒ **Poisson-Gleichung** mit  $\rho = 0$

→ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \varphi + \underbrace{\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi}_{=0, \text{ wenn homogen}} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

##### 3.2.2 Green'sche Funktionen

**Potential einer Punktladung**

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

**E-Feld einer Punktladung**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

**D-Feld einer Punktladung**

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{As}{m^2} \right]$$

**Potentialfeld einer Ladungsverteilung**

mit  $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

#### 3.3 Magnetostatik

• Wirbelfeld, quellenfrei und hat immer geschlossene Feldlinien.

- Nach  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \rightarrow$  nur wirbelfrei wenn  $\vec{j} = 0$
- Damit Skalarpotential  $\varphi_m$  existiert muss  $\vec{H}$  wirbelfrei
- keine magnetischen Monopole  $\operatorname{grad} \vec{B} = 0$
- Vektorpotential  $\vec{A}$  = Maß für  $\Phi_{\text{magn}}$  durch Fläche  $A$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$$

**Coulomb-Eichung**

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

##### 3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

##### 3.3.2 Biot-Savart-Gesetz

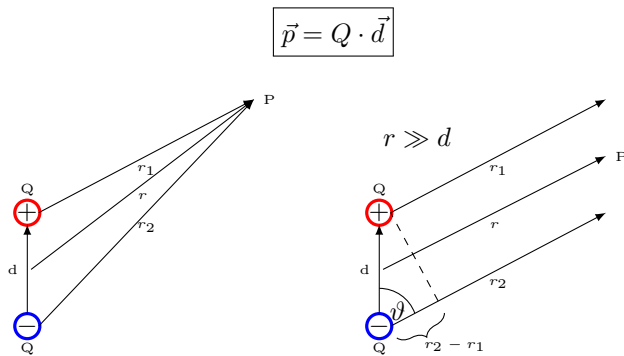
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

mit  $\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$  : Aufpunkt     $\vec{r}'$  : Quellpunkt

### 3.3.3 Elektrischer Dipol



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2}$$

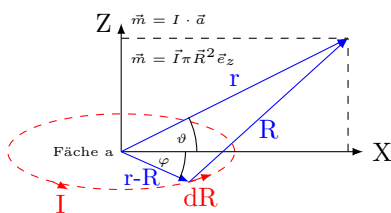
$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\varphi \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

### 3.3.4 Magnetischer Dipol

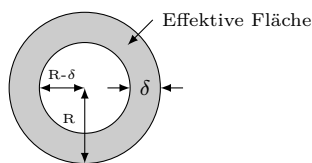


$I$  entlang Leiter

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

### 3.4 Skineffekt



$$\sigma/\kappa : \text{Leitfähigkeit [A/Vm]} = [1/\Omega\text{m}]$$

Äquivalente Leiterschichtdicke (Amp:  $A \cdot \frac{1}{e}$ ):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [m]$$

Widerstand/Oberflächenwiderstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\sigma \cdot A_{\text{eff}}}$$

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma\pi R^2}$$

$$R_F = \frac{1}{\sigma\delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für  $E$ -Feld

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Amplitude und Phase bezogen auf  $\delta$ :

Amplitude:  $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfung}[\ ])$

$$\text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Effektive Fläche:

$$A_{\text{eff}} = A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2\pi - (R - \delta)^2\pi$$

$$= 2 \cdot \pi\delta \left( R - \frac{\delta}{2} \right)$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % nimmt der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

Bessel-Funktion:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{r_0}{2\delta} \quad r_0 \hat{=} \text{Außendurchmesser}$$

## 4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner  $c_0$
- raumzeitlicher Vorgang  $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  Einheit[S] =  $\frac{W}{m^2}$   
Falls  $\vec{E} \perp \vec{H}$  und  $\vec{S} \perp \vec{E}$  und  $\vec{S} \perp \vec{H}$

### Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf(Realteil von  $\vec{E}(z, t)$ )

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante  $\gamma$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$\alpha$  : Dämpfungskonstante [Np/m]

$\beta$  : Phasenkonstante [rad/m]

$v_p$  : Phasengeschwindigkeit [m/s]

$v_g$  : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

$\lambda$  : Wellen [m]

## 4.1 Ausbreitung

### 4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

### 4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

### 4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos:  $\sigma = 0$ , maximale Wirkleistung  
 $Z_F$  rein reel  $\rightarrow$  ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

### 4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust:  $0 < \sigma \ll \omega\epsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left( 1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left( 1 + \frac{j\sigma}{2\omega\epsilon} \right)$$

### 4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust:  $\sigma \gg \omega\epsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

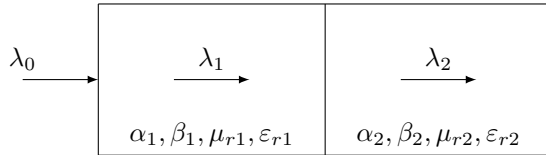
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

## 4.2 Übergang

### 4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \quad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

### 4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S_{AV} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$= \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

#### 4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{\text{av}} d\vec{a}$$

$$= \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$W_M = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$W_E = 1/2 \cdot \varepsilon \cdot E^2$$

#### 4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

#### 4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

### 4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter  $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

### 4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \varepsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

#### 4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

#### 4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \vec{E} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{H} + \varepsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \varepsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} i = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \varepsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon}$$

keine Raumladung  $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \varepsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{H}$$

### 4.6 Wellenzahl

Im Vakuum:  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

## 4.7 Wellenlänge

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m] \\ &= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0} \\ \lambda_0 &= \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}\end{aligned}$$

## 4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium} \leq c_0}$$

### 4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$\begin{aligned}E_1(z, t) &= E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z) \\ E_2(z, t) &= E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z) \\ &\downarrow \\ E(z, t) &= 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega} \\ v_p &= \frac{\omega_0}{\beta_0} \\ v_g &= \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}\end{aligned}$$

## 4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	$H$ oder $E$
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

## 4.10 Verlustlose Polarisation

$$\begin{aligned}Z_F &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ r_s &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i} \\ t_s &= \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i} \\ r_p &= \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t} \\ t_p &= \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}\end{aligned}$$

## 4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

## 4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

## 4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliussche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

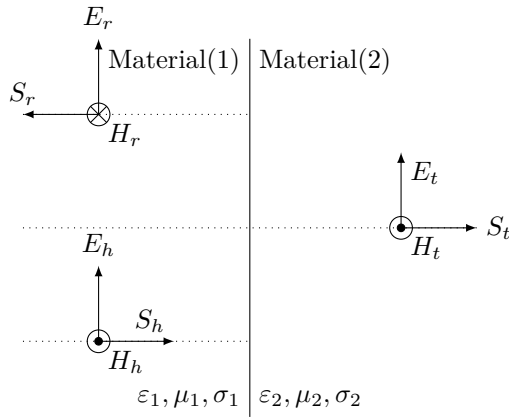
$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

#### 4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$

$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

##### 4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

##### 4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

##### 4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

##### StehendeWelle

$$\rightarrow H_{\max} \text{ und } E_{\min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2$$

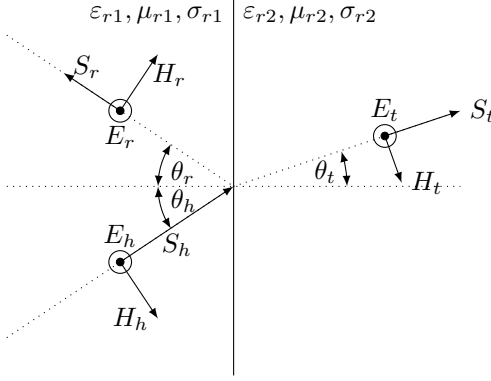
$$\rightarrow H_{\min} \text{ und } E_{\max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4$$

$$\rightarrow 90^\circ \text{ Phasenverschiebung}$$

#### 4.15 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

#### 4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

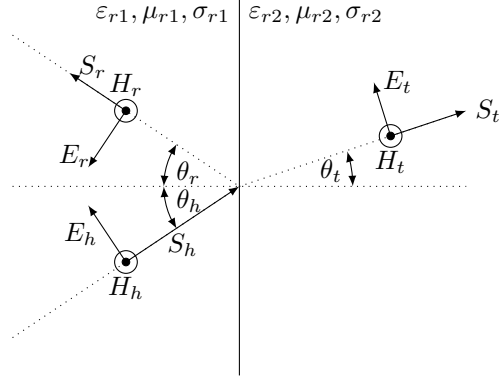
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

#### 4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$



## 5 Leitungen

Medium	C (pF/m)	L (nH/m)	v (m/μs)	Z (Ω)	R for f ≤ 1kHz (mΩ/m)
RG58/U Coaxial Cable	93.5	273	198	54	53
RG58C/U Coaxial Cable	101	252	198	50	50
RG59B/U Coaxial Cable	72.0	405	185	75	45
CAT-5 Twisted Pair (Solid)	49.2	495	203	100	180
Vacuum	8.85	1260	299	377	
Water	708	1260	34	42	[3]

### 5.1 Leitungsparameter

$\sigma$  = Leitwert des Dielektr.       $\sigma_c$  = Leitwert des Leiters

#### 5.1.1 Parallele Platten

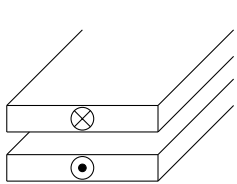
$w$  = Platten Breite       $d$  = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

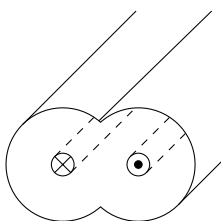


$R = \frac{2}{w\delta\sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w\epsilon}{d}$

#### 5.1.2 Doppelleitung:

$a$  = Leiter Radius       $d$  = Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU → 1; OPTN → 1 → 5



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

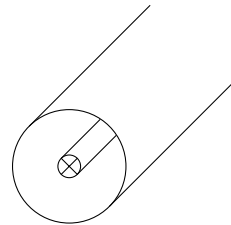
#### 5.1.3 Koaxial Leitung

$a$  = innen Radius       $b$  = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\hat{I}}{2\pi r} \right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$



$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!  
Länge verdoppeln!!!**

### 5.2 Allgemeine Lösung Leitungsgleichung

$$\underline{U}(z) = U_h e^{\gamma z} + U_r e^{-\gamma z} = U_h e^{\gamma d} + U_r e^{-\gamma d}$$

$$\underline{I}(z) = I_h e^{\gamma z} + I_r e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_h}{I_h} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2\omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

$$= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$l_{\text{elektr.}} = \beta \cdot l$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} + 1 \right)}$$

### 5.2.1 Verlustlose Übertragungsleitung

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega\sqrt{LC} = j\beta \\ Z_L &= \frac{U_h}{U_r} = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ v_p &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}\end{aligned}$$

### 5.2.2 vernachlässigbarer Widerstandsbelag

Leitungswelle				Ebene Welle			
$\alpha$	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}-1\right)}$	$G \leftrightarrow \sigma$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$	$C \leftrightarrow \epsilon$	$\alpha$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$	$L \leftrightarrow \mu$
$\beta$	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}+1\right)}$		$\beta$		$\beta$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$	
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$v_p$		$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	

	$G \ll \omega C$	$G \gg \omega C$	$G = \omega C$
$\alpha$	$\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$0,455 \omega\sqrt{LC}$
$\beta$	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{G^2}{\omega^2C^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$1,1 \omega\sqrt{LC}$
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{GL}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$

	Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter
$\alpha$	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
$\beta$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$

### 5.2.3 vernachlässigbarer Leitwertbelag

Leitungswelle				Ebene Welle			
$\alpha$	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}-1\right)}$	$R \leftrightarrow \sigma$	$\alpha$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$	$L \leftrightarrow \epsilon$	$\alpha$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$
$\beta$	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}+1\right)}$	$C \leftrightarrow \mu$	$\beta$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$		$\beta$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		$v_p$			$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

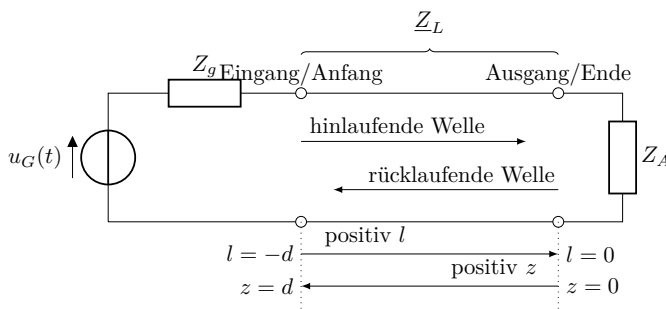
  

	$R \ll \omega L$	$R \gg \omega L$	$R = \omega L$
$\alpha$	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$0,455 \omega\sqrt{LC}$
$\beta$	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$1,1 \omega\sqrt{LC}$
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$

	Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter
$\alpha$	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
$\beta$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
$v_p$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$

## 5.3 Übertragungsleitung mit Last



$$\begin{aligned}U(z) &= U_h \cdot e^{\gamma z} + U_r \cdot e^{-\gamma z} = U_h \cdot e^{\gamma d} + U_r \cdot e^{-\gamma d} \\ I(z) &= I_h \cdot e^{\gamma z} + I_r \cdot e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}\end{aligned}$$

### 5.3.1 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$Z_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$Z_E = Z_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$Z_E = \frac{1}{\frac{1}{Z_E} + j\omega C_E}$$

### 5.3.2 Reflexionsfaktor entlang einer Leitung

$$\begin{aligned}r_E &= r_A^{-2\gamma l} = r_A e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l} \\ \alpha &= -\frac{\ln(r_A)}{2l} [\text{Np/m}] \quad \beta = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2l} [\text{rad/m}]\end{aligned}$$

### 5.3.3 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\begin{aligned}\text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(z)|}{1 - |r(z)|} = \frac{|U_H| + |U_R|}{|U_H| - |U_R|} \\ &= \frac{R_{\max}}{Z_L} \\ \text{SWR}^{-1} &= \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_A| = \frac{\text{SWR} + 1}{\text{SWR} - 1}\end{aligned}$$

### 5.3.4 Leistung

$$\begin{aligned}P_A &= P_H - P_R \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2) \\ &= P_{\max} \cdot (1 - r^2) \\ &= U_A \cdot I_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ I(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z\end{aligned}$$

### 5.3.5 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

### 5.3.6 Position von Extrema

$$r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$  Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$  Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\min/\max} = \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$z_{\min} = \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}}$$

$$z_{\max} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}$$

### 5.3.7 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$Z_A = Z_L = Z(z)$$

$$r_A = 0 \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$

$$\text{SWR} = 1$$

$$U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}$$

### 5.3.8 Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung

$$Z_A = 0$$

$$Z(z) = jZ_L \cdot \tan(\beta z) \rightarrow \text{rein imaginär}$$

$$r_A = -1$$

$$\text{SWR} = \infty$$

$$U(z) = U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \rightarrow U(z=0) = 0$$

$$\hat{U}_E = \hat{U}_{\text{generator}} \cdot \frac{Z_E}{Z_{\text{generator}} + Z_E}$$

$$I(z) = U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2U_h}{Z_L}$$

### 5.3.9 Spezialfall: Leerlaufende Leitung

$$Z_A = \infty$$

$$Z(z) = -jZ_L \cdot \cot(\beta z) \rightarrow \text{rein imaginär}$$

$$r_A = 1$$

$$\text{SWR} = \infty$$

$$U(z) = U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \rightarrow U(z=0) = 0$$

$$I(z) = U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2 \cdot U_h}{Z_L}$$

### 5.3.10 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

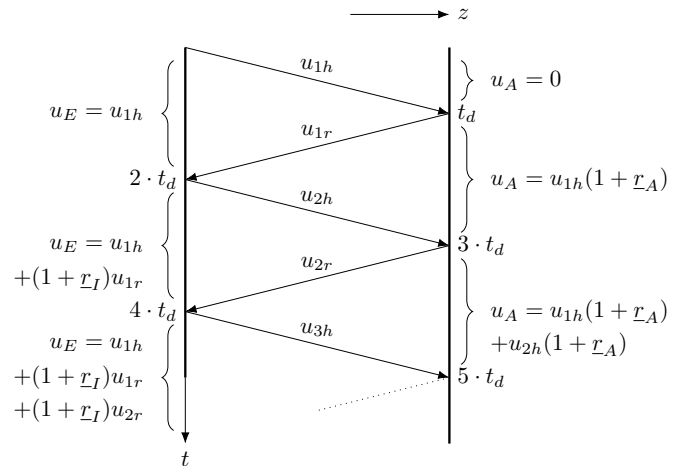
$$r_A = \text{reell}$$

$$R_A > Z_L \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$R_A < Z_L \rightarrow \theta_r = \pi \rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

## 5.4 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

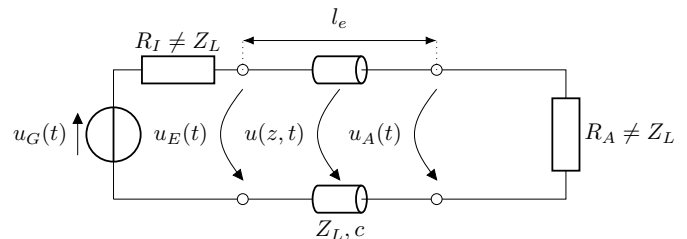


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Hinlaufende Welle: } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

$$\text{Signallaufzeit: } t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{l}{v_p}$$

## 5.5 Kettenmatrix einer Leitung

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

## 6 Smith-Diagramm

### 6.1 Allgemein

$m$  : Anpassungsfaktor

$s$  : inverser Anpassungsfaktor

$\underline{r}$  : Reflexionsfaktor

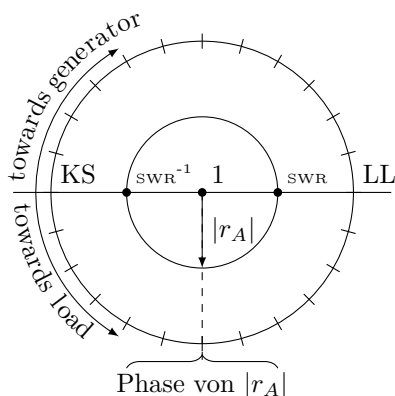
1 : Anpassungspunkt

$$r(z) = r_A \cdot e^{-j2\beta z}$$

$$Z(z) = Z_L \cdot \frac{Z_A + jZ_L \cdot \tan(\beta z)}{Z_L + jZ_A \cdot \tan(\beta z)}$$

$$\text{mit } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

auch ohne Quelle gültig!



$$\underline{z}_n = \frac{Z_n}{Z_L}$$

$$\underline{r}_n = \frac{Z_n - Z_L}{Z_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$

$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|}$$

$$s = \frac{1}{m}$$

### 6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

Im Smithchart spiegeln (Phase  $\pm 180^\circ / \pm \pi$ )

### 6.3 Zusammenschaltungen

### 6.4 Lastseite $\rightarrow$ Quelle

1.  $Z_L$  ins Diagramm einzeichnen

2. Lastimpedanz bestimmen, wenn zB Parallelschaltung etc

3. Normieren

$$\underline{z}_a = \frac{Z_A}{Z_L}$$

4. Ins Chart eintragen

5. Linie vom Mittelpunkt durch  $\underline{z}_a$  nach außen

Ablesen und Notieren:

$\rightarrow$ Relative Länge  $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$

$\rightarrow$ Relativer Winkel

6. Kreis einzeichnen

Ablesen und Notiere:

$\rightarrow$ Maxima: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse

$\rightarrow$ Minima: linker Schnittpunkt mit Re-Achse

$\rightarrow$ Rexlexionsfaktor abmessen und aus Skala oben auslesen

7. Um Leitungslänge im UZS laufen  $\rightarrow$  Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen

Ablesen und Notieren:

$\rightarrow$ Relativer Winkel

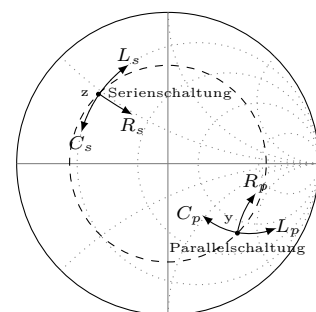
8. Wenn  $\alpha \neq 0$

$\rightarrow$  Dämpfung ausrechnen  $\rightarrow$  Um Faktor nach innen Spiralisieren

9. Dieser Punkt ist  $\underline{z}_e$

10. Eingangsimpedanz ablesen

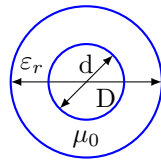
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



## 7 Wellenleiter

### 7.1 Koaxial Leiter

#### 7.1.1 Wellenwiderstand



$D$  = Außendurchmesser

$d$  = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

#### 7.1.2 Dämpfung

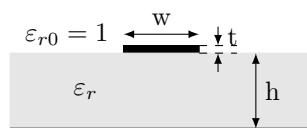
Ohm'sche Verluste  $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste  $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

### 7.2 Mikrostreifenleiter



$w$  := Leiterbahnbreite

$h$  := Substratbreite

#### 7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit  $\rightarrow$  Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer  $\frac{w}{h}$  desto mehr nähert sich  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  an  $\epsilon_r$  und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

#### 7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

### 7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

### 7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

### 7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$  := Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes  $B \cdot l$  wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes  $B \cdot l$ , keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit  $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[ \frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

## 8 Antennen

### 8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

#### 8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da  $E$  zu  $H$  90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**,  $\vec{S}$  nach außen somit Kugelwelle

mit  $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left( \frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.1.5 Strahlungswiderstand

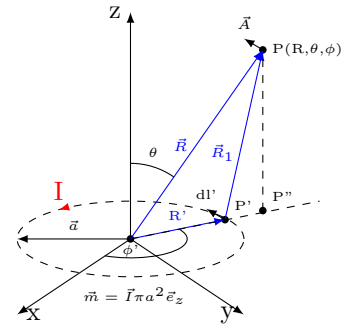
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

#### 8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

## 8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

#### 8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

#### 8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

#### 8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

## 8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

### 8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

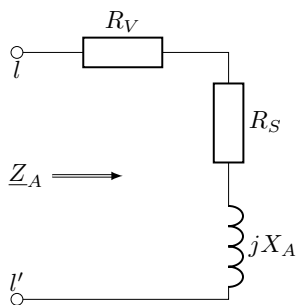
Die gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left( \cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

$$= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi$$

## 8.4 Antennenkenngrößen



$Z_A$  := Antennenimpedanz  
 $R_V$  := Verlustwiderstand  
 $R_S$  := Strahlungswiderstand  
 $X_A$  := Antennenblindwiderstand  
 $D$  := Directivity/Richtfaktor  
 $G$  := Gain/Gewinn  
 $A_{eff}$  := Wirksame Antennenfläche

### 8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

### 8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

### 8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

### 8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$  isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

### 8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

### 8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

### 8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

## 8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit  $P_0$  : Eingangsleistung der Antenne

### G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

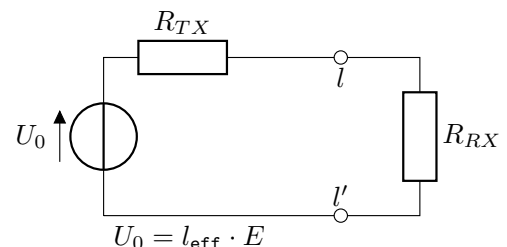
### EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

### ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

## 8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}
\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\
&= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \\
\boxed{A_{\text{eff}}(\theta) &= G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta} \\
P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\
&= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2
\end{aligned}$$

### 8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$\begin{aligned}
F &= \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1] \\
a_0 &= 20 \lg \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left( \frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]
\end{aligned}$$

### 8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$\begin{aligned}
L &= 10 \lg \left( \frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}] \\
L_{RX} &= L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]
\end{aligned}$$



## 8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1: (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$l$	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$h$	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28: (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	$40 \Omega$		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	$73 \Omega$		
$\lambda$ -Dipol		2,41: (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	$200 \Omega$		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	$290 \Omega$		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28: (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500 \Omega$		
kleiner Rahmen, $n$ -Windungen, beliebige Form		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l \lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l \lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	$ab$	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l \lambda$	—	—	—		

## 9 Einheiten

Symbol	Größe	Einheit
A, W	Arbeit, Energie	$J = VAs = Ws$
$\vec{A}$	mag. Vektorpotenzial	$\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$
$\vec{B}$	mag. Flussdichte	$T = \frac{Vs}{m^2}$
C	Kapazität	$F = \frac{As}{V}$
$\vec{D}$	dielek. Verschiebung/Erregung	$\frac{As}{m^2}$
e, q, Q	(Elementar-)ladung	$C = As$
$\vec{E}$	elek. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$\vec{H}$	mag. Feldstärke/Erregung	$\frac{A}{m}$
$\vec{J}$	Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$\vec{J}_F$	Flächenstromdichte	$\frac{A}{m}$
$\vec{M}$	Drehmoment	$J = Nm = VAs$
F	Kraft	$\frac{kgm}{s} = N$
$R_{mag}$	mag. Widerstand	$\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$
$\vec{S}$	Poynting-Vektor	$\frac{W}{m^2}$
Z	Wellenwiderstand	$\Omega$
$\delta_s$	Eindringtiefe	m
$\varepsilon$	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
$\varphi$	elek. Skalarpotenzial	V
$\varphi_m$	mag. Skalarpotenzial	A
$\rho$	Raumladungsdichte	$\frac{As}{m^3}$
$\rho$	spez. Widerstand	$\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$
$\kappa, \sigma$	elek. Leitfähigkeit	$\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$
$\lambda$	Wellenlänge	m
$\mu$	Permiabilitätskonstante	$\frac{Vs}{Am}$
$\Phi_e$	elek. Fluss	$C = As$
$\Phi_m$	mag. Fluss	$Wb = \frac{T}{m^2}$