OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

Formelsammlung
FWL

Wintersemester 22/23

Name:	Tony Pham
Letzte Änderung:	20. Oktober 2022
Lizenz:	GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Differentialoperatoren

Divergenz div: Vektor → Skalar
gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\operatorname{div}\vec{G} = \nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{Volumen} \\ > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \end{cases}$$

Bsp: $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, da mag. Felder in sich geschlossen.

Rotation rot: Vektorfeld → Vektorfeld
gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Bsp: energieerhaltende (konservatives) Felder → rot = 0

Gradient grad: Skalarfeld → Vektor/Gradientenfeld (in Richtung steilster Anstieg, max. Änderung), *S.380 Papula*

$$\operatorname{grad} G(x,y,z) = \nabla \cdot G(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.2 Rechenregeln

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f} \\
\nabla \cdot (fg) &= f(\nabla g) + g(\nabla f) \\
\nabla \cdot (f\vec{g}) &= g(\nabla \vec{f}) + f(\nabla \vec{g}) \\
\nabla \times (f\vec{g}) &= \nabla f \times \vec{g} + f(\nabla \times \vec{g}) \\
\operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= 0 \Rightarrow \text{Gradientenfeld Quellenfrei} \\
\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{f} &= 0 \Rightarrow \text{Wirbelfeld Quellenfrei}
\end{aligned}$$

Nabla Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right)$$

Feldänderung bei Bewegung

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\Delta z \\
&= dG = \operatorname{grad} G \cdot d\vec{s}
\end{aligned}$$

1.3 Schnittwinkel zweier Vektoren

$$\begin{aligned}
\vec{E} \cdot \vec{H} &= |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot cos(\varphi) \\
cos(\varphi) &= \frac{E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z}{|E| \cdot |H|}
\end{aligned}$$

1.4 Logarithmische Maße

- dBm≙1mW
- dBμV≙1μV
- dBmV≙1mV
- dBi → Isotropic

1.5 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Dezibel [dB]

$$X[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \qquad X[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$U_1 = U_2 \cdot 10^{X/20\text{dB}} \qquad P_1 = P_2 \cdot 10^{X/10\text{dB}}$$

$$1\text{dB} \,\hat{=}\, 0,1151\text{Np}$$

Neper [Np]

$$X[Np] = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \qquad X[Np] = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$U_1 = U_2 \cdot e^X \qquad P_1 = P_2 \cdot e^{2X}$$

$$1\text{Np} \,\hat{=}\, 8,686\text{dB}$$

1.6 Randbedingung

Dirichlet-RB	Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)
Neumann-RB	Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an

1.7 Begriffe

	Begriff	Beschreibung
ρ	Raumladungsdichte	

1.8 Vergleich/Umrechnung

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r\cos\varphi$	$r\sin\vartheta\cos\varphi$
y	$r\sin\varphi$	$r\sin\vartheta\sin\varphi$
z	z	$r\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	r	
$\arctan\frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi$	dr	
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$	$rd\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$		r
$\arctan\frac{y}{x}$		φ
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$		ϑ
$dx\sin\vartheta\cos\varphi\ +$ $dy\sin\vartheta\sin\varphi\ +$ $dz\cos\vartheta$		dr
$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi$		$r\sin\vartheta d\varphi$
$dx\cos\vartheta\cos\varphi\ +$ $dy\cos\vartheta\sin\varphi\ -$ $dz\sin\vartheta$		$rd\vartheta$

1.9 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \Delta E_x\vec{e}_x + \Delta E_y\vec{e}_y + \Delta E_z\vec{e}_z \\ &= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right]\vec{e}_z\end{aligned}$$

1.10 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r\vec{e}_r + F_\varphi\vec{e}_\varphi + F_z\vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \vec{D}_r\right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\vec{D}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\vec{E} = \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{E_r}{r^2}\right]\vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2}\right]\vec{e}_\varphi + [\Delta E_z]\,\vec{e}_z$$

1.11 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r;\vartheta;\varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r\vec{e}_r + F_\vartheta\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2\sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\operatorname{grad}\phi \equiv \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 D_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\cdot D_\vartheta\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}$$

Rotation:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial\left(\sin\vartheta\cdot E_\varphi\right)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial rE_\varphi}{\partial r}\right]\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rE_\vartheta\right)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right]\vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} = &\left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2}E_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\cdot E_\vartheta\right)}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r \\ &+ \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_\vartheta \\ &+ \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

2 Maxwell'schen Gleichungen

differentielle Form		Integralform
$\operatorname{div}\mathbf{D} = \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$ **Gaußsches Gesetz**: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.	Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{D}\cdot da = \iiint_V \rho\cdot dV = Q(V)$ Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.
$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ Das magnetische Feld ist quellenfrei. Es gibt **keine magnetischen Monopole.**	Gauß	$\oiint_{\partial V} \mathbf{B}\cdot da = 0$ Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ **Induktionsgesetz**: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.	Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{E}\cdot ds = -\iint_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot da = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$ Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ **Amperesches Gesetz**: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.	Stokes	$\oint_{\partial A} \mathbf{H}\cdot ds = \iint_A \mathbf{j}\cdot da + \iint_A \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\cdot da$ Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Durchflutungssatz:

Elektrischer Strom ist Ursache für magnetische Wirbelfeld

$$\boxed{\int_c \vec{H}d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J}d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein Elektrisches Wirbelfeld

$$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{s} = u_{ind} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

$$\boxed{rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}}$$

Differentielle ohmsche Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

$$\boxed{rot\vec{H} = \vec{J} = \sigma\cdot\vec{E}}$$

Bei isotropen Stoffen sind ε u. μ Skalare:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r \qquad \mu = \mu_0\cdot\mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren → Rand betrachten

$$\int_a^b \operatorname{grad} F\cdot d\vec{s} = F(b) - F(a)$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\cdot dV = \oiint_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{a}$$

$$\iint_A \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial A}\vec{A}\cdot d\vec{r}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}} \qquad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \qquad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

Feldunterscheidung

$\vec{E}(x, y, z)$	$\widehat{=}$	statisches Feld
$\vec{E}(x, y, z, t)$	$\widehat{=}$	stationäres Feld
$\vec{E}(x, y, z, t) \cdot cos(\omega t - \beta z)$	$\widehat{=}$	Welle

3.1 E-Felder an Grenzflächen

Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung: $D_{1n} = D_{2n}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Grenzfläche dielektrischer Leiter

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Querschichtung: $D_{1n} = \frac{Q}{A}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$$

Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $H_{1t} = H_{2t}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

3.2 Elektrostatik

• wirbelfreies Feld → Elektrische Ladungen sind Quellen des Feldes

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0} \qquad = \operatorname{rot} \operatorname{grad} E$$

3.2.1 Potential Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

⇒ **Poisson-Gleichung** mit $\rho = 0$

→ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta\varphi + \underbrace{\frac{\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi}{\varepsilon}}_{=0,\ \texttt{wenn homogen}} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

3.2.2 Green'sche Funktionen

Potential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \qquad [V]$$

E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \qquad \left[\frac{V}{m}\right]$$

D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \qquad \left[\frac{As}{m^2}\right]$$

Potentialfeld einer Ladungsverteilung
mit $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho\left(x', y', z'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$$

mit der Green'schen Funktion $G\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G\left(\vec{r}'\vec{r}'\right) \rho\left(\vec{r}'\right) \mathrm{d}V'$$

3.3 Magnetostatik

• Wirbelfeld, quellenfrei und hat immer <u>geschlossene</u> Feldlinien.
• Nach $rot\vec{H} = j$ → nur wirbelfrei wenn $j = 0$
• Damit Skalarpotential φ_m existiert muss H wirbelfrei
• keine magnetischen Monopole $grad\vec{B} = 0$
• Vektorpotential $\vec{A}$ = Maß für Φ_{magn} durch Fläche A

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0} \qquad = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$$

Coulomb-Eichung

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}\left(x', y', z'\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.3.2 Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \mathrm{d}\vec{s}'$$

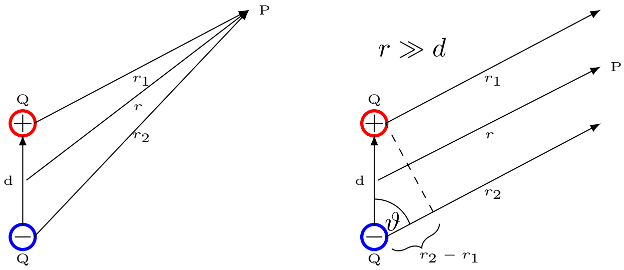
mit $\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{\mathrm{d}\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$: Aufpunkt $\quad \vec{r}'$: Quellpunkt

3.3.3 Elektrischer Dipol

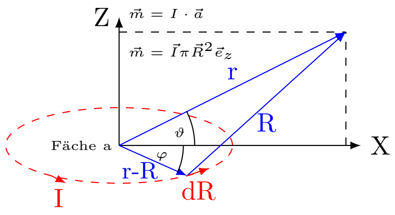
$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{d}}$$



$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2} \\
\vec{E} &= -\nabla\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &\approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}
\end{aligned}$$

3.3.4 Magnetischer Dipol

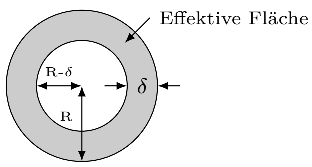


I entlang Leiter

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi}\int\frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

3.4 Skineffekt



σ/κ : Leitfähigkeit [A/Vm] = [1/Ωm]

Äquivalente Leiterschichtdicke (Amp: $A \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad [m]$$

Widerstand/Oberflächenwiderstand:

$$\begin{aligned}
R_{AC} &= \frac{l}{\sigma \cdot A_{\texttt{eff}}} \\
R_{DC} &= \frac{l}{\sigma\pi R^2} \\
R_F &= \frac{1}{\sigma\delta}
\end{aligned}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x,t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für E-Feld

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x,t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Amplitude und Phase bezogen auf δ:

Amplitude: $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfung}[\ ])$

Phase: $\varphi = -\dfrac{x}{\delta}$

Effektive Fläche:

$$\begin{aligned}
A_{\texttt{eff}} &= A_{\texttt{ges}} - A_\sigma = R^2\pi - (R-\delta)^2\pi \\
&= 2\cdot\pi\delta\left(R - \frac{\delta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % nimmt der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

Bessel-Funktion:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für} \quad x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2\left(1 - \frac{x^4}{6}\right) & \text{für} \quad x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{r_0}{2\delta}} \qquad r_0 \hat{=} \text{ Außendurchmesser}$$

4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner c_0
- raumzeitlicher Vorgang $cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Einheit[S]= $\frac{W}{m^2}$
  Falls $\vec{E} \perp \vec{H}$ und $\vec{S} \perp \vec{E}$ und $\vec{S} \perp \vec{H}$

Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf(Realteil von $\underline{\vec{E}}(z,t)$)

$$\boxed{\vec{E}(z,t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \overbrace{e^{-\alpha z}}^{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{cos(\omega t \overbrace{-}^{\text{positive z-Richtung}} \beta z)}_{\text{Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z}$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\boxed{\underline{\vec{E}}(z,t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\underline{\gamma} z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z}$$

Fortpflanzungskonstante γ

$$\boxed{\underline{\gamma} = \alpha + j\beta}$$

α : Dämpfungskonstante [Np/m]
β : Phasenkonstante [rad/m]
v_p : Phasengeschwindigkeit [m/s]
v_g : Gruppengeschwindigkeit [m/s]
λ : Wellen [m]

4.1 Ausbreitung

4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1\right)}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}}$$

4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$
$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$
$$v_p = c_0$$

$$\boxed{\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega}$$

4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos: $\sigma = 0$, maximale Wirkleistung
Z_F rein reel $\rightarrow$ ebene Welle

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\lambda = \frac{c_0}{f}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$
$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$
$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)$$
$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$
$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} \approx Z_{F0}\left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)}$$

4.1.5 Im guten Leiter

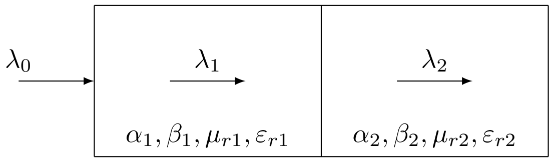
geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$
$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$
$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\boxed{\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}}$$

4.2 Übergang

4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}} \qquad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}} \qquad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$$

4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \cdot Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$\begin{aligned} S_{AV} &= \frac{1}{2} \cdot E \cdot H = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0} \\ &= \frac{P}{A_{\texttt{Fläche}}} \end{aligned}$$

4.3.1 Leistung

$$\begin{aligned} P &= \iint \vec{S}_{\text{av}} d\vec{a} \\ &= Re\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} \\ W_M &= 1/_2 \cdot \mu \cdot H^2 \\ W_E &= 1/_2 \cdot \varepsilon \cdot E^2 \end{aligned}$$

4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 dÀlembertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta\vec{E} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{H} - \kappa\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter $\kappa = 0$

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{H} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta\vec{E} = \kappa\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{H} = \kappa\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{E}} = \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\underline{\vec{H}} - \left(\kappa\mu \cdot \mathrm{j}\omega - \varepsilon\mu \cdot \omega^2\right) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta\underline{\vec{E}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Delta\underline{\vec{H}} + \varepsilon\mu\omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta\vec{H} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu)\vec{H}$$

$$\Delta\vec{E}i = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu)\vec{E} + grad\frac{\rho}{\varepsilon}$$

keine Raumladung $\rho = 0$

$$\Delta\vec{E} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\varepsilon\mu)\vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial z^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{H}$$

4.6 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$\begin{aligned} k &= \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}| \\ &= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0 \end{aligned}$$

4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$
$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$
$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \qquad v_{p,\texttt{Medium}\leq c_0}$$

4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z,t) = E\cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$
$$E_2(z,t) = E\cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$
$$\downarrow$$
$$E(z,t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$
$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E–Vektors eine Linie beschreibt	H oder E
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\theta_i}$$
$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}$$
$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\theta_t}$$
$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos\theta_t}$$

4.11 Totalrefexion

$$\sin\theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}$$

4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}\right)$$

4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

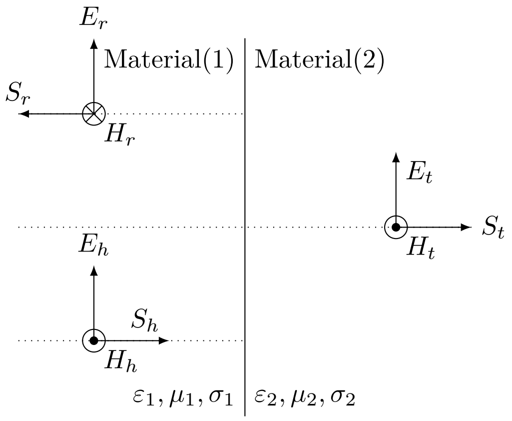
$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$
$$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$
$$\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$
$$\sin\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2\varepsilon_1 - \mu_1\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$
$$\tan\theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin\vartheta_2}{\sin\vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \qquad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \qquad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$
$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$
$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$
$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$
$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$
$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$
$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$
$$\texttt{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$
$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.14.2 Spezialfall $\underline{Medium1}$ ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.3 Spezialfall $\underline{Medium2}$ ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.14.4 Spezialfall $\underline{beideMedien}$ NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$
$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$
$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.5 Spezialfall $\underline{Medium2}$ idealer Leiter

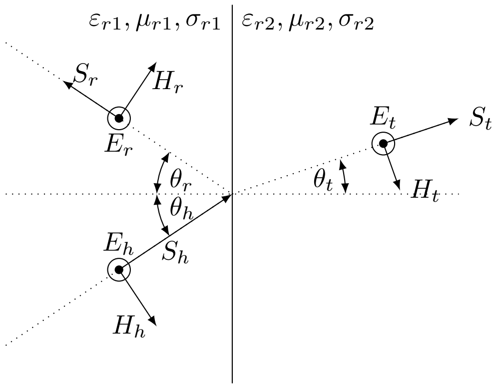
$$Z_{F2} = 0$$
$$r = -1$$
$$t = 0$$
$$\overline{S} = 0$$
$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$
$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

$\underline{StehendeWelle}$
$\rightarrow H_{max}$ und E_{min} bei $n \cdot \lambda/_2$
$\rightarrow H_{min}$ und E_{max} bei $(2n-1) \cdot \lambda/_4$
$\rightarrow 90° Phasenverschiebung$

4.15 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \qquad 1 < s < \infty$$

4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\boxed{\texttt{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega}$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$
$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

n : `Brechungsindex` ; $\theta_h = \theta_r$

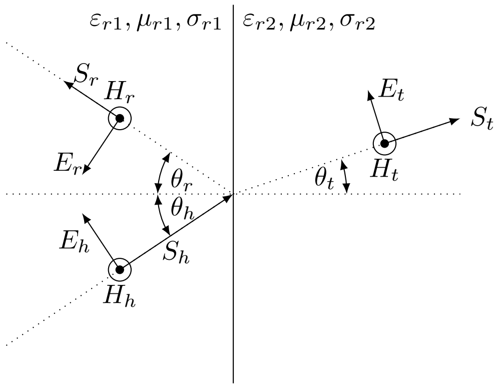
$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$
$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin\theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned}
r_s = r_{es} = r_{ms} &= \\
&= \frac{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h - Z_{F1}\cdot\cos\theta_t}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t} \\
&= \frac{\cos\theta_h - \sqrt{{\varepsilon_{r2}}/{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\theta_h}}{\cos\theta_h + \sqrt{{\varepsilon_{r2}}/{\varepsilon_{r1}} - \sin^2\theta_h}} \\
t_{ms} &= Z_{F1}\cdot\frac{2\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t} \\
&= (1 - r_s)\cdot\frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t} \\
&= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}}\cdot t_{es} \\
t_{es} &= Z_{F2}\cdot\frac{2\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_h + Z_{F1}\cdot\cos\theta_t} \\
&= 1 + r_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= r_s \cdot E_h \\
E_t &= t_{es} \cdot E_h \\
H_r &= r_s \cdot H_h \\
H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\
E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\
E_h &= H_h \cdot Z_{F1}
\end{aligned}$$

4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\boxed{\texttt{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega}$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{rn}}}$$
$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

n : `Brechungsindex` ; $\theta_h = \theta_r$

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$
$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \cdot \sin\theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned}
r_p = r_{ep} = r_{mp} &= \\
&= \frac{Z_{F2}\cdot\cos\theta_t - Z_{F1}\cdot\cos\theta_h}{Z_{F2}\cdot\cos\theta_t + Z_{F1}\cdot\cos\theta_h} = \\
&= \frac{\varepsilon_{r2}\cos\theta_h - \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - {\varepsilon_{r1}}^2\sin^2\theta_h}}{\varepsilon_{r2}\cos\theta_h + \sqrt{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r1} - {\varepsilon_{r1}}^2\sin^2\theta_h}} \\
t_{mp} &= Z_{F1}\cdot\frac{2\cdot\cos\theta_h}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t} \\
&= 1 + r_p \\
t_{ep} &= Z_{F2}\cdot\frac{2\cdot\cos\theta_h}{Z_{F1}\cdot\cos\theta_h + Z_{F2}\cdot\cos\theta_t} \\
&= (1 - r_p)\cdot\frac{\cos\theta_h}{\cos\theta_t} \\
&= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}}\cdot t_{mp}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_r &= r_p \cdot E_h \\
E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\
H_r &= r_p \cdot H_h \\
H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\
E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\
E_h &= H_h \cdot Z_{F1}
\end{aligned}$$

5 Leitungen

Medium	C (pF/m)	L (nH/m)	v (m/μs)	Z (Ω)	R for f≲ 1kHz (mΩ/m)
RG58/U Coaxial Cable	93.5	273	198	54	53
RG58C/U Coaxial Cable	101	252	198	50	50
RG59B/U Coaxial Cable	72.0	405	185	75	45
CAT-5 Twisted Pair (Solid)	49.2	495	203	100	180
Vacuum	8.85	1260	299	377	
Water	708	1260	34	42	[3]

5.1 Leitungsparameter

$\sigma =$ Leitwert des Dielektr. $\qquad \sigma_c =$ Leitwert des Leiters

5.1.1 Parallele Platten

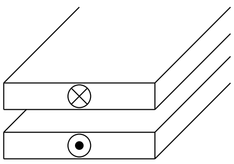
$w =$ Platten Breite $\qquad d =$ Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z \cdot e^{j\omega t}}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \overset{w \gg d}{=} E \cdot d \to E = \frac{U_0}{d} \cdot^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \to H = \frac{I_0}{w} \cdot^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

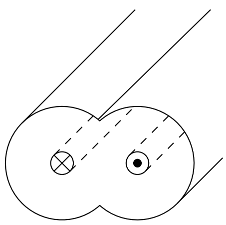


$R = \frac{2}{w\delta\sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w\varepsilon}{d}$

5.1.2 Doppelleitung:

$a =$ Leiter Radius $\qquad d =$ Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU $\to$ 1; OPTN $\to$ 1 $\to$ 5



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(^d/_{2a})}$
$C = \frac{\pi\varepsilon}{\cosh^{-1}(^d/_{2a})}$

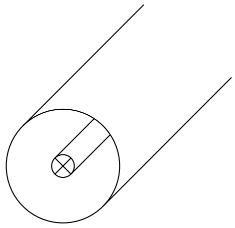
5.1.3 Koaxial Leitung

$a =$ innen Radius $\qquad b =$ außen Radius

$$\vec{H}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r,z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(^b/_a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\hat{I}}{2\pi r}\right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$



$R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(^b/_a)}$
$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(^b/_a)}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

5.2 Allgemeine Lösung Leitungsgleichung

$$\underline{U}(z) = U_h e^{\underline{\gamma} z} + U_r e^{-\underline{\gamma} z} = U_h e^{\underline{\gamma} d} + U_r e^{-\underline{\gamma} d}$$

$$\underline{I}(z) = I_h e^{\underline{\gamma} z} + I_r e^{-\underline{\gamma} z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\underline{\gamma} d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\underline{\gamma} d}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_h}{I_h} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2\omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

$$= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$l_{\texttt{elektr.}} = \beta \cdot l$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1\right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1\right)}$$

5.2.1 Verlustlose Übertragungsleitung

$$\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta$$

$$Z_L = \frac{U_h}{U_r} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

5.2.2 vernachlässigbarer Widerstandsbelag

Leitungswelle

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}-1\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}+1\right)}$$

$$G \leftrightarrow \sigma \quad C \leftrightarrow \epsilon \quad L \leftrightarrow \mu$$

Ebene Welle

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$$

	$G \ll \omega C$	$G \gg \omega C$	$G = \omega C$
α	$\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$0,455\ \omega\sqrt{LC}$
β	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{G^2}{\omega^2C^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$1,1\ \omega\sqrt{LC}$
v_p	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{GL}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$

	Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter
	$\sigma \ll \omega\epsilon$	$\sigma \gg \omega\epsilon$
α	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
β	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
v_p	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$

5.2.3 vernachlässigbarer Leitwertbelag

Leitungswelle

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}-1\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}+1\right)}$$

$$R \leftrightarrow \sigma \quad L \leftrightarrow \epsilon \quad C \leftrightarrow \mu$$

Ebene Welle

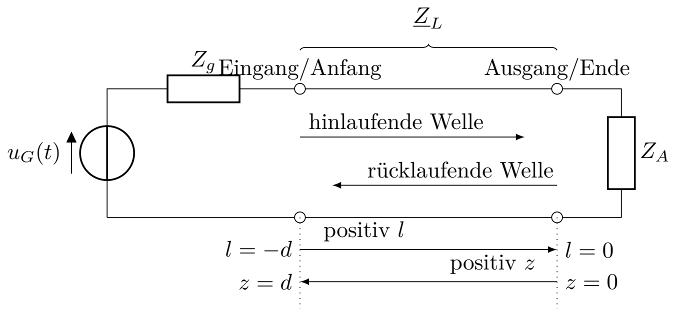
$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$$

	$R \ll \omega L$	$R \gg \omega L$	$R = \omega L$
α	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$0,455\ \omega\sqrt{LC}$
β	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$1,1\ \omega\sqrt{LC}$
v_p	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$

	Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter
	$\sigma \ll \omega\epsilon$	$\sigma \gg \omega\epsilon$
α	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
β	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$
v_p	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$

5.3 Übertragungsleitung mit Last



$$U(z) = U_h \cdot e^{\underline{\gamma}z} + U_r \cdot e^{-\underline{\gamma}z} = U_h \cdot e^{\underline{\gamma}d} + U_r \cdot e^{-\underline{\gamma}d}$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{\underline{\gamma}z} + I_r \cdot e^{-\underline{\gamma}z} = \frac{U_h}{Z_L}e^{\underline{\gamma}d} - \frac{U_r}{Z_L}e^{-\underline{\gamma}d}$$

5.3.1 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1+\underline{r}_E}{1-\underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

5.3.2 Reflexionsfaktor entlang einer Leitung

$$r_E = r_A^{-2\gamma l} = r_A e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}$$

$$\alpha = -\frac{\ln(r_A)}{2l}[\mathrm{Np/m}] \qquad \beta = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2l}[\mathrm{rad/m}]$$

5.3.3 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\mathrm{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1+|r(z)|}{1-|r(z)|} = \frac{|U_H|+|U_R|}{|U_H|-|U_R|} = \frac{R_{max}}{Z_L}$$

$$\mathrm{SWR}^{-1} = \frac{R_{min}}{Z_L} \qquad |r_A| = \frac{SWR+1}{SWR-1}$$

5.3.4 Leistung

$$\begin{aligned}
P_A &= P_H - P_R \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{U}_r^2}{Re\{Z_L\}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\hat{U}_h^2}{Re\{Z_L\}}\cdot(1-r^2) \\
&= P_{\max}\cdot(1-r^2) \\
&= \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* \\
P_V &= P_q - P_A \\
\underline{I}(z) &= \hat{I}\cdot e^{-\alpha z}\angle\beta z
\end{aligned}$$

5.3.5 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.3.6 Position von Extrema

$$\boxed{r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r}} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$
$$f_{\texttt{min}} \rightarrow \text{Minimum(Knoten) der Spannungen}$$
$$f_{\texttt{max}} \rightarrow \text{Maximum(Bäuche) der Spannungen}$$

$$\lambda_{\texttt{min/max}} = \frac{c_0}{f_{\texttt{min/max}}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}$$
$$z_{\texttt{min}} = \frac{-n \cdot \lambda_{\texttt{min}}}{2} \qquad \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\texttt{min}}}$$
$$z_{\texttt{max}} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\texttt{max}}}{4} \qquad \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\texttt{max}}}{2 \cdot \lambda_{\texttt{max}}}$$
$$z = \frac{\lambda_{\texttt{min}} \cdot \lambda_{\texttt{max}}}{4(\lambda_{\texttt{min}} - \lambda_{\texttt{max}})}$$

5.3.7 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$Z_A = Z_L = Z(z)$$
$$r_A = 0 \qquad \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$
$$\text{SWR} = 1$$
$$U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z}$$
$$I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z} = \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}$$

5.3.8 Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung

$$Z_A = 0$$
$$Z(z) = jZ_L \cdot \tan(\beta z) \qquad \rightarrow \text{rein imaginär}$$
$$r_A = -1$$
$$\text{SWR} = \infty$$
$$U(z) = U_h \cdot 2j\sin(\beta z) \qquad \rightarrow U(z=0) = 0$$
$$\hat{U}_E = \hat{U}_{generator} \cdot \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_{generator} + \underline{Z}_E}$$
$$I(z) = U_h \cdot 2\cos(\beta z) \qquad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2U_h}{Z_L}$$

5.3.9 Spezialfall: Leerlaufende Leitung

$$Z_A = \infty$$
$$Z(z) = -jZ_L \cdot \cot(\beta z) \qquad \rightarrow \text{rein imaginär}$$
$$r_A = 1$$
$$\text{SWR} = \infty$$
$$U(z) = U_h \cdot 2\cos(\beta z) \qquad \rightarrow U(z=0) = 0$$
$$I(z) = U_h \cdot 2j\sin(\beta z) \qquad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2 \cdot U_h}{Z_L}$$

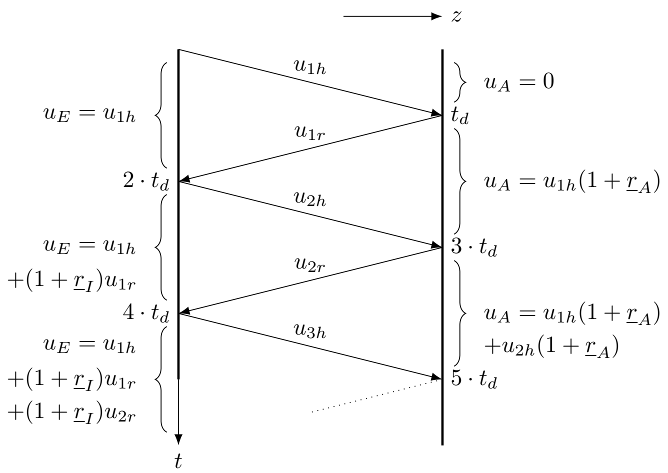
5.3.10 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \texttt{reell}$$

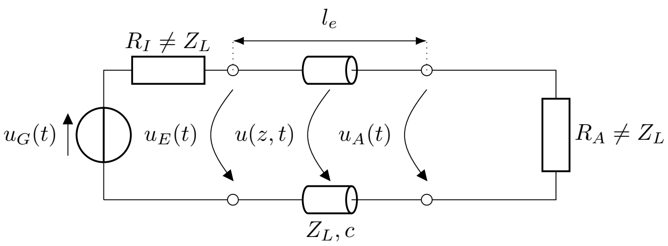
$$\underline{R_A > Z_L} \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \texttt{ ist negativ}$$
$$\rightarrow z_{\texttt{max}} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$\underline{R_A < Z_L} \rightarrow \theta_r = \pi$$
$$\rightarrow z_{\texttt{min}} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

5.4 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$
$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$
$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



Reflexionsfaktor Leitungsanfang: $\underline{r}_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$

Reflexionsfaktor Leitungsende: $\underline{r}_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$

Hinlaufende Welle $u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$

Signallaufzeit: $t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \frac{l}{v_p}$

5.5 Kettenmatrix einer Leitung

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L}\sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

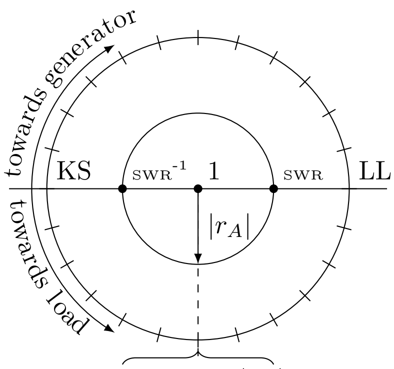
m : Anpassungsfaktor
s : inverser Anpassungsfaktor
$\underline{r}$: Reflexionsfaktor
1 : Anpassungspunkt

$$\boxed{r(z) = r_A \cdot e^{-j2\beta z}}$$

$$\boxed{Z(z) = Z_L \cdot \frac{Z_A + jZ_L \cdot \tan(\beta z)}{Z_L + jZ_A \cdot \tan(\beta z)}}$$

$$\text{mit} \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

auch ohne Quelle gültig!



$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{Z_L}$$

$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$

$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|}$$

$$s = \frac{1}{m}$$

6.2 Impedanz/Admetanz umrechnen

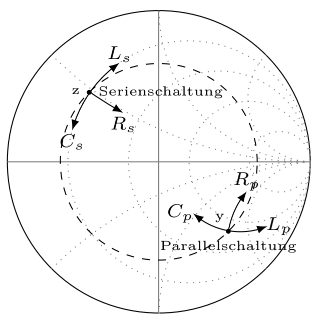
Im Smithchart spiegeln (Phase $\pm 180° / \pm\pi$)

6.3 Zusammenschaltungen

6.4 Lastseite → Quelle

1. Z_L ins Diagramm einzeichen
2. Lastimpedanz bestimmen, wenn zB Parallelschaltung etc
3. Normieren
$$\underline{z}_a = \frac{Z_A}{Z_L}$$
4. Ins Chart eintragen
5. Linie vom Mittelpunkt durch $\underline{z}_a$ nach außen
   Ablesen und Notieren:
   →Relative Länge $\left[\frac{l}{\lambda}\right]$
   →Relativer Winkel
6. Kreis einzeichen
   Ablesen und Notiere:
   →Maxima: rechter Schnittpunkt mit Re-Achse
   →Minima: linker Schnittpunkt mit Re-Achse
   →Rexlexionsfaktor abmessen und aus Skala oben auslesen
7. Um Leitungslänge im UZS laufen → Linie vom Mittelpunkt durch neuen Punkt nach außen
   Ablesen und Notieren:
   →Relativer Winkel
8. Wenn $\alpha \neq 0$
   → Dämpung ausrechen → Um Faktor nach innen Spiralieren
9. Dieser Punkt ist $\underline{z}_e$
10. Eingangsimpedanz ablesen

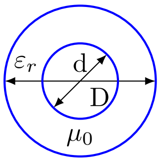
$$\underline{Z}_E = \underline{z}_e \cdot Z_L$$



7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser
d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln\frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

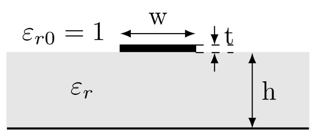
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}}}{120\Omega} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln\frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C$, $\tan\delta = ({}^{G}/_{\omega C})$

$$\alpha_d = \pi\sqrt{\varepsilon_r} \cdot \tan\delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite
h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit → Dispersion

$$\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}}}}$$

Je größer $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{h}}$ desto mehr nähert sich $\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}$ an ε_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}} \cdot \mu_{r,\mathtt{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}}} \cdot \ln\left(\frac{8\mathrm{h}}{\mathrm{w}} + \frac{\mathrm{w}}{4\mathrm{h}}\right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\varepsilon_{r,\mathtt{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{h}} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}} + \left(1 - \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{w}}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

<u>VSWR</u>

$$s = \mathrm{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

<u>Return Loss</u>

$$\alpha_r = -20\log(r) dB$$

<u>Missmatch Loss</u>

$$\mathrm{ML} = -10\log\left(1 - r^2\right) dB$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

<u>Dispersion:</u>

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

<u>Stufenprofil:</u>

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

<u>Gradientenprofil:</u>

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

<u>Bandbreitenlängenprodukt:</u>

$B' = B \cdot l[\frac{MHz}{km}]$ = konstant

$B \sim \frac{1}{l}$ und $l \sim \frac{1}{B}$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, solange Dämpfung keine Rolle spielt.

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol

$$\boxed{\vec{p} = Q \cdot \vec{d}}$$

8.1.1 Allgemein

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2}\right) \vec{e}_\phi \\
\vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right) \vec{e}_R \\
&= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right) \vec{e}_\theta
\end{aligned}}$$

8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone): $\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1$ oder $\beta R \ll 1$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi \\
\vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega\varepsilon R^3} \cos\theta \cdot \vec{e}_R \\
&+ \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega\varepsilon R^3} \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta
\end{aligned}}$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone): $\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1$ oder $\beta R \gg 1$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, $\vec{S}$ nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$\boxed{\begin{aligned}
H &\approx j\frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi \\
E &\approx j\frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta
\end{aligned}}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} {I_0}^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\
&= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\
&= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda}\right)^2 \\
S_{av} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \vec{e}_R \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}
\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

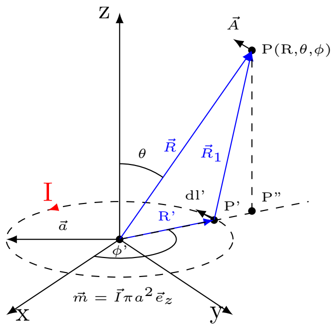
$$R_S = \frac{2}{3}\pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda}\right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

$$\boxed{\vec{m} = \vec{I}\pi\vec{a}^2\vec{e}_z} \quad \boxed{m = I \cdot A}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu m}{4\pi R^2}(1 + j\beta R)e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\Delta l \rightarrow \beta\pi\ a^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{H} &= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right) \vec{e}_R \\
&= -\frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin\theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3}\right) \vec{e}_\theta \\
\vec{E} &= \frac{j\omega\mu\beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin\theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2}\right) \vec{e}_\phi
\end{aligned}}$$

8.2.1 Fernfeld

$$\boxed{\begin{aligned}
E &\approx -\frac{\beta m\omega\mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\phi \\
H &\approx -\frac{\beta m\omega\mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta
\end{aligned}}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\
&= \frac{m^2 \mu\omega^4}{12\pi v_p^3} \\
S_{av} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \vec{e}_R \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}
\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\boxed{\begin{aligned}
E &\approx -\frac{jm\omega\mu}{4\pi R^2} \sin\theta \cdot \vec{e}\phi \\
H &\approx \frac{m}{4\pi R^3}(2\cos\theta \cdot \vec{e}_R + \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta)
\end{aligned}}$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin\left[\beta\left(\frac{L}{2} - |z'|\right)\right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$
$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$
$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

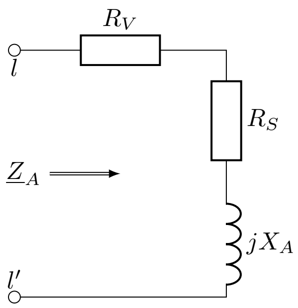
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta}\right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{Z_{F0} I_0^2}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)\right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$
$$= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a}$$
$$= \int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi$$

8.4 Antennenkenngrößen



$\underline{Z}_A$:= Antennenimpedanz
R_V := Verlustwiderstand
R_S := Strahlungswiderstand
X_A := Antennenblindwiderstand
D := Directifity/Richtfaktor
G := Gain/Gewinn
A_{eff} := Wirksame Antennenfläche

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \mathrel{\hat{=}}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\varphi,\vartheta)}{U_{\max}} \qquad 0 \le C(\vartheta,\varphi) \le 1$$
$$C_i(\vartheta,\varphi) = \frac{E(\vartheta,\varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta,\varphi)}{H_i} \qquad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_i}$$
$$D(\vartheta,\varphi) = C_i^2(\vartheta,\varphi) = D \cdot C^2(\vartheta,\varphi)$$
$$D = \max\{D(\vartheta,\varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \qquad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\texttt{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\texttt{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$\boxed{g = 10 \cdot log(G)\text{dB}}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \to g = 1,76\text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \to g = 2,15\text{dBi}$$

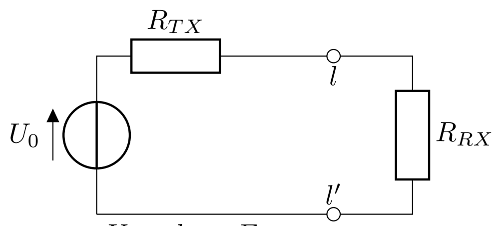
EIRP: Eqivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i[\text{dBi}]$$

ERP: Eqivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d[\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



$$U_0 = l_{\texttt{eff}} \cdot E$$

Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\frac{P_{RX}}{P_{TX}} = A_{\mathtt{eff},RX} \cdot A_{\mathtt{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2}$$
$$= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

$$\boxed{A_{\mathtt{eff}}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2} \cdot \sin^2\theta}^{D_{i,\theta}}}$$

$$P_{RX} = S_{RX} \cdot A_{\mathtt{eff}}$$
$$= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2$$

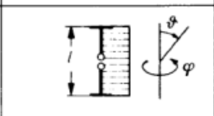
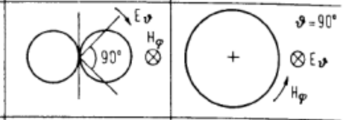
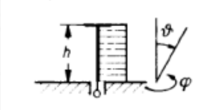
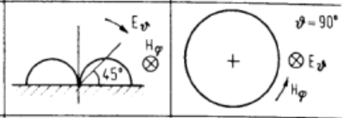
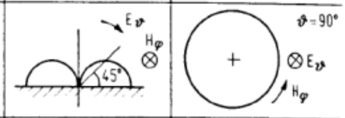
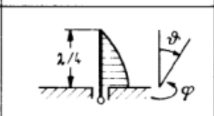
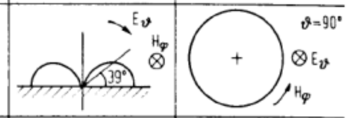
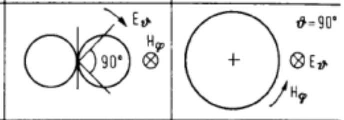
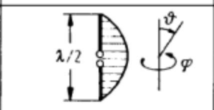
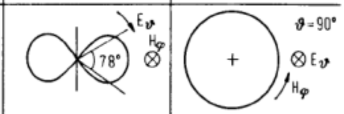
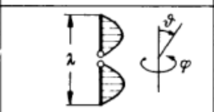
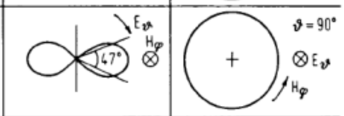
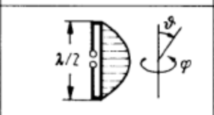
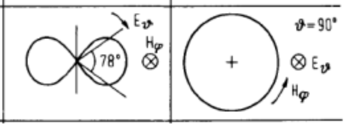
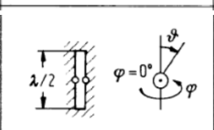
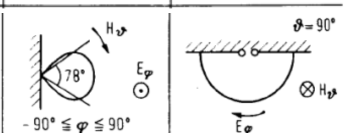
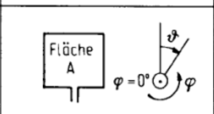
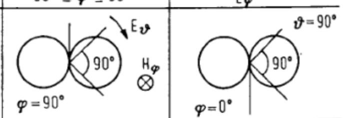
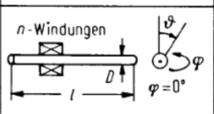
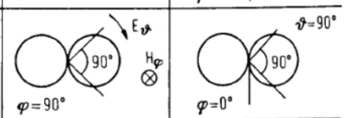
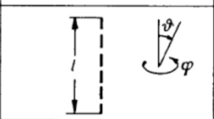
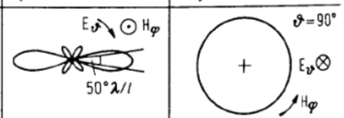
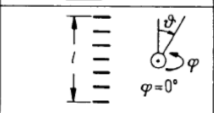
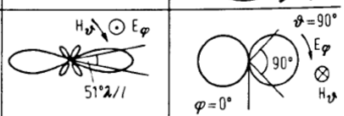
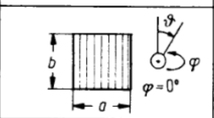
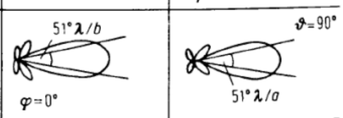
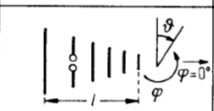
8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \qquad [1]$$
$$a_0 = 20\lg\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20\lg\left(\frac{4\pi d f}{c_0}\right) \qquad [\mathrm{dB}]$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10\lg\left(\frac{P}{1\mathrm{mW}}\right) \qquad [\mathrm{dBm}]$$
$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \qquad [\mathrm{dB}]$$

8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear;(in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1; (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi}=0{,}08\lambda^2$	–	–		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\,\lambda^2$	l	$80\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi}=0{,}06\lambda^2$	h	$160\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3; (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi}=0{,}06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2\Omega$		
$\lambda/4$-Antenne auf leitender Ebene		3,28; (5,1 dB)	$0{,}065\,\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi}=0{,}16\,\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20\left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2\Omega$		
$\lambda/2$-Dipol		1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\,\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi}=0{,}32\lambda$	73Ω		
λ-Dipol		2,41; (3,8 dB)	$0{,}19\,\lambda^2$	$\gg\lambda$	200Ω		
$\lambda/2$-Schleifendipol		1,64; (2,1 dB)	$0{,}13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi}=0{,}64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28; (5,1 dB)	$0{,}26\lambda^2$	–	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, n-Windungen, beliebige Form		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\,\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000\,n^2(A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5; (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi}=0{,}12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100\,n^2\mu_r^2\left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8}\approx 0{,}12\,l\lambda$	–	–		
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3}\,\frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4}=0{,}25\,\lambda$	–	–		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$		$\approx \frac{6{,}5\cdot 10^6\,ab}{\lambda^2}$	ab	–	–		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \div 10\,l/\lambda$	–	–	–