



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG FELDER, WELLEN UND LEITUNGEN

Sommersemester 22

Name:

Matrikelnummer:

Letzte Änderung:

Lizenz:

Die Prinzen - Alles nur geklaut

MATNR

6. Juli 2022

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 mathematische	1
1.2 Rechenregeln	1
1.3 Schnittwinkel zweier Vektoren	1
1.4 Logarithmische Maße	1
1.5 Kreuzprodukt	1
1.6 Randbedingung	1
1.7 Begriffe	1
1.8 Vergleich/Umrechnung	2
1.9 Kartesische Koordinaten	3
1.10 Zylinderkoordinaten	3
1.11 Kugelkoordinaten	4
2 Maxwell'schen Gleichungen	5
2.1 Integralsätze	5
3 Felder	6
3.1 E-Felder an Grenzflächen	6
3.2 Elektrostatik	6
3.2.1 Potential Gleichung	6
3.2.2 Green'sche Funktionen	6
3.3 Magnetostatik	6
3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	6
3.3.2 Biot-Savart-Gesetz	6
3.3.3 Elektrischer Dipol	7
3.3.4 Magnetischer Dipol	7
3.4 Skineffekt	7
4 Wellen	8
4.1 Ausbreitung	8
4.1.1 Allgemein	8
4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)	8
4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika	8
4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.1.5 Im guten Leiter	8
4.2 Übergang	9
4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	9
4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)	9
4.3.1 Leistung	9
4.3.2 Leistung nach Dämpfung	9
4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert	9
4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)	9
4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)	9
4.5.1 Zeitbereich	9
4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)	9
4.6 Wellenzahl	9
4.7 Wellenlänge	9
4.8 Phasengeschwindigkeit	10
4.8.1 Gruppengeschwindigkeit	10
4.9 Polarisaton	10
4.10 Verlustlose Polarisaton	10
4.11 Totalreflexion	10
4.12 Grenzwinkel	10
4.13 Brewster-/Polarisationswinkel	10
4.14 Senkrechter Einfall	11
4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	11
4.14.2 Spezialfall Medium 1 ist Luft	11
4.14.3 Spezialfall Medium 2 ist Luft	11
4.14.4 Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch	11
4.14.5 Spezialfall Medium 2 idealer Leiter	11
4.15 Stehwellenverhältnis	11
4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisaton (H-Feld parallel)	12

4.17	Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)	12
5	Leitungen	13
5.1	Leitungsparameter	13
5.1.1	Doppelleitung:	13
5.1.2	Koaxial Leitung	13
5.1.3	Parallele Platten	13
5.2	Allgemeine Lösung Leitungsgleichung	13
5.2.1	Verlustlose Übertragungsleitung	14
5.2.2	vernachlässigbarer Widerstandsbelag	14
5.2.3	vernachlässigbarer Leitwertbelag	14
5.3	Übertragungsleitung mit Last	14
5.3.1	Vorgehen Eingangswiderstand	14
5.3.2	Reflexionsfaktor entlang einer Leitung	14
5.3.3	Stehwellenverhältnis	14
5.3.4	Position von Extrema	14
5.3.5	Spezialfall: Angepasste Leitung	15
5.3.6	Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung	15
5.3.7	Spezialfall: Leerlaufende Leitung	15
5.3.8	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung	15
5.4	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung	15
6	Smith-Diagramm	16
6.1	Allgemein	16
6.2	Kurzgeschlossene Leitung	16
7	Wellenleiter	17
7.1	Koaxial Leiter	17
7.1.1	Wellenwiderstand	17
7.1.2	Dämpfung	17
7.2	Mikrostreifenleiter	17
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl	17
7.2.2	Schmale Streifen	17
7.2.3	Breite Streifen	17
7.3	Hohlleiter	17
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss	17
7.5	Lichtwellenleiter oder Glasfaser	17
8	Antennen	18
8.1	Herz'scher Dipol	18
8.1.1	Allgemein	18
8.1.2	Nahfeld	18
8.1.3	Fernfeld	18
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	18
8.1.5	Strahlungswiderstand	18
8.2	Magnetischer Dipol	18
8.2.1	Fernfeld	18
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld	18
8.2.3	Nahfeld	18
8.3	Lineare Antenne	18
8.3.1	Dipolantenne	19
8.4	Antennenkenngrößen	19
8.4.1	Abgestrahlte Leistung	19
8.4.2	Verlustleistung	19
8.4.3	Wirkungsgrad	19
8.4.4	Richtcharakteristik	19
8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor	19
8.4.6	Gewinn	19
8.4.7	Wirksame Antennenfläche	19
8.5	Bezugsantennen	19
8.6	Senden und Empfangen	19
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß	20
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel	20
8.7	Antennentabelle	21

1 Grundlagen

1.1 mathematische

Divergenz/Rotation/Gradient

div: Vektor \rightarrow Skalar (Quelle / Senke)

rot: Vektor auf Vektorfeld (rot = 0 für E. erhaltendes Feld)

grad: Skalar-/Gradientenfeld \rightarrow Vektorfeld (Richtung stärkster Feldänderung)

$$\text{div } \vec{G} = \nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{Volumen} \\ > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \end{cases}$$

$$\text{rot } \vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } G = \nabla \cdot G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.2 Rechenregeln

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f} \\ \nabla \cdot (fg) &= f(\nabla g) + g(\nabla f) \\ \nabla \cdot (f\vec{g}) &= g(\nabla f) + f(\nabla g) \\ \nabla \times (f\vec{g}) &= \nabla f \times \vec{g} + f(\nabla \times \vec{g}) \\ \text{rot grad } f &= 0 \Rightarrow \text{Gradientenfeld Quellenfrei} \\ \text{div rot } \vec{f} &= 0 \Rightarrow \text{Wirbelfeld Quellenfrei} \end{aligned}$$

Nabla Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right)$$

Feldänderung bei Bewegung

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z \\ &= dG = \text{grad } G \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

1.3 Schnittwinkel zweier Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{H} &= |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \frac{E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z}{|\vec{E}| \cdot |\vec{H}|} \end{aligned}$$

1.4 Logarithmische Maße

- dBm $\hat{=}$ 1mW
- dB μ V $\hat{=}$ 1 μ V
- dBmV $\hat{=}$ 1mV
- dBi \rightarrow Isotropic

1.5 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Dezibel [dB]

$$\begin{aligned} X[dB] &= 20 \cdot \log \left(\frac{U_1}{U_2} \right) & X[dB] &= 10 \cdot \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \\ U_1 &= U_2 \cdot 10^{X/20\text{dB}} & P_1 &= P_2 \cdot 10^{X/10\text{dB}} \\ 1\text{dB} &\hat{=} & & 0,1151\text{Np} \end{aligned}$$

Neper [Np]

$$\begin{aligned} X[Np] &= \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \right) & X[Np] &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \\ U_1 &= U_2 \cdot e^X & P_1 &= P_2 \cdot e^{2X} \\ 1\text{Np} &\hat{=} & & 8,686\text{dB} \end{aligned}$$

1.6 Randbedingung

Dirichlet-RB	Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$)
Neumann-RB	Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an

1.7 Begriffe

	Begriff	Beschreibung
ρ	Raumladungsdichte	

1.8 Vergleich/Umrechnung

Kart.	Zyl.	Kug.
x	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
y	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
z	z	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	
$\arctan \frac{y}{x}$	φ	
z	z	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	dr	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
dz	dz	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		r
$\arctan \frac{y}{x}$		φ
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		ϑ
$dx \sin \vartheta \cos \varphi$ + $dy \sin \vartheta \sin \varphi$ + $dz \cos \vartheta$		dr
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi$ + $dy \cos \vartheta \sin \varphi$ - $dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

1.9 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.10 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.11 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

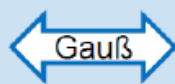
2 Maxwell'schen Gleichungen

differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Gaußsches Gesetz: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

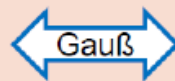


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Induktionsgesetz: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Amperesches Gesetz: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Durchflutungssatz:

Elektrischer Strom ist Ursache für magnetische Wirbelfeld

$$\int_c \vec{H} d\vec{s} = \Theta = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein Elektrisches Wirbelfeld

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Differentielle ohmsche Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind ϵ u. μ Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren \rightarrow Rand betrachten

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Feldunterscheidung

$$\vec{E}(x, y, z) \quad \hat{=} \quad \text{statisches Feld}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) \quad \hat{=} \quad \text{stationäres Feld}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad \hat{=} \quad \text{Welle}$$

3.1 E-Felder an Grenzflächen

Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung: $D_{1n} = D_{2n}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Grenzfläche dielektrischer Leiter

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Querschichtung: $D_{1n} = \frac{Q}{A}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$$

Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $H_{1t} = H_{2t}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

3.2 Elektrostatik

• wirbelfreies Feld → Elektrische Ladungen sind Quellen des Feldes

$$\text{div } \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$= \text{rot grad } E$$

3.2.1 Potential Gleichung

$$\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

⇒ **Poisson-Gleichung** mit $\rho = 0$

→ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \varphi + \underbrace{\frac{\text{grad } \varepsilon \cdot \text{grad } \varphi}{\varepsilon}}_{=0, \text{ wenn homogen}} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

3.2.2 Green'sche Funktionen

Potential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{As}{m^2} \right]$$

Potentialfeld einer Ladungsverteilung

mit $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

3.3 Magnetostatik

• Wirbelfeld, quellenfrei und hat immer geschlossene Feldlinien.

- Nach $\text{rot } \vec{H} = j \rightarrow$ nur wirbelfrei wenn $j = 0$
- Damit Skalarpotential φ_m existiert muss H wirbelfrei
- keine magnetischen Monopole $\text{grad } \vec{B} = 0$
- Vektorpotential $\vec{A} =$ Maß für Φ_{magn} durch Fläche A

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\text{div } \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$= \text{div rot } \vec{B}$$

Coulomb-Eichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.3.2 Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

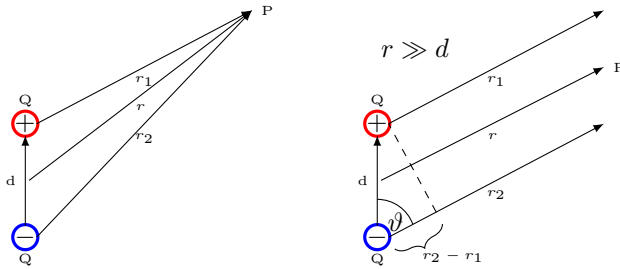
mit $\text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{r} : Aufpunkt \vec{r}' : Quellpunkt

3.3.3 Elektrischer Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2}$$

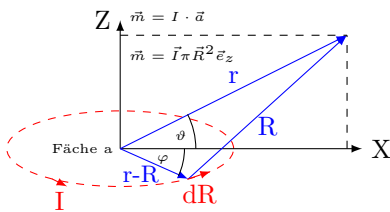
$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\varphi \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

3.3.4 Magnetischer Dipol

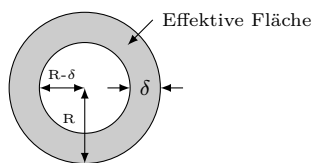


I entlang Leiter

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.4 Skineffekt



$$\sigma/\kappa : \text{Leitfähigkeit [A/Vm]} = [1/\Omega\text{m}]$$

Äquivalente Leiterschichtdicke (Amp: $A \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [m]$$

Widerstand/Oberflächenwiderstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\sigma \cdot A_{\text{eff}}}$$

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma\pi R^2}$$

$$R_F = \frac{1}{\sigma\delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für E -Feld

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Amplitude und Phase bezogen auf δ :

Amplitude: $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfung}[\])$

$$\text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Effektive Fläche:

$$A_{\text{eff}} = A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2\pi - (R - \delta)^2\pi$$

$$= 2 \cdot \pi\delta \left(R - \frac{\delta}{2} \right)$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % nimmt der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

Bessel-Funktion:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{r_0}{2\delta} \quad r_0 \hat{=} \text{Außendurchmesser}$$

4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner c_0
- raumzeitlicher Vorgang $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Einheit[S] = $\frac{W}{m^2}$
Falls $\vec{E} \perp \vec{H}$ und $\vec{S} \perp \vec{E}$ und $\vec{S} \perp \vec{H}$

Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf(Realteil von $\vec{E}(z, t)$)

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

α : Dämpfungskonstante [Np/m]

β : Phasenkonstante [rad/m]

v_p : Phasengeschwindigkeit [m/s]

v_g : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

λ : Wellen [m]

4.1 Ausbreitung

4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos: $\sigma = 0$, maximale Wirkleistung
 Z_F rein reel \rightarrow ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$$

4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

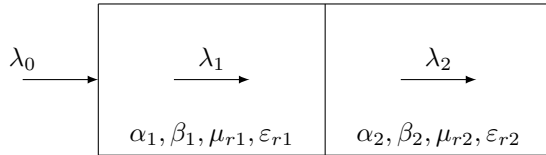
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

4.2 Übergang

4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{\text{av}} d\vec{a}$$

$$W_M = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$W_E = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$

4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \vec{E} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{H} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

keine Raumladung $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{H}$$

4.6 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$

$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium}} \leq c_0$$

4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

↓

$$E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	H oder E
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\mu_{r1} = \mu_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

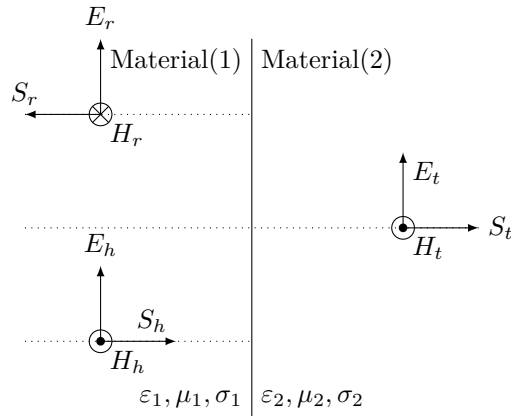
- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$ 

$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$

$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \epsilon_{r1} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \epsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

StehendeWelle

$$\rightarrow H_{max} \text{ und } E_{min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2$$

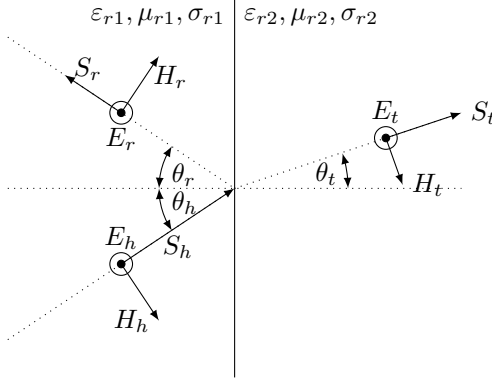
$$\rightarrow H_{min} \text{ und } E_{max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4$$

$$\rightarrow 90^\circ \text{ Phasenverschiebung}$$

4.15 Stehwellenverhältnis

$$SWR = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{H_{max}}{H_{min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

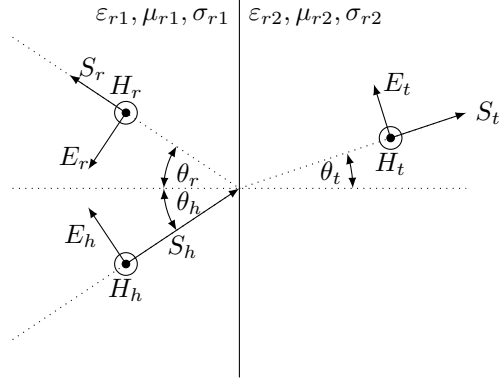
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \end{aligned}$$

5 Leitungen

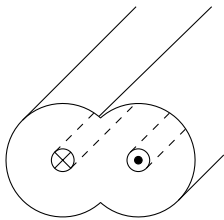
Medium	C (pF/m)	L (nH/m)	v (m/μs)	Z (Ω)	R for f ≤ 1kHz (mΩ/m)
RG58/U Coaxial Cable	93.5	273	198	54	53
RG58C/U Coaxial Cable	101	252	198	50	50
RG59B/U Coaxial Cable	72.0	405	185	75	45
CAT-5 Twisted Pair (Solid)	49.2	495	203	100	180
Vacuum	8.85	1260	299	377	
Water	708	1260	34	42	[3]

5.1 Leitungsparameter

σ = Leitwert des Dielektr. σ_c = Leitwert des Leiters

5.1.1 Doppelleitung:

a = Leiter Radius d = Abstand zw. den Leitern



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

5.1.3 Parallele Platten

w = Platten Breite d = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

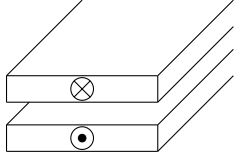
$$I = \frac{U}{Z_L} = \frac{U_0}{\underbrace{Z_L}_{I_0}} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{I}{2\pi r} \cdot Z_F \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(2b/2a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

	$R = \frac{2}{w \delta \sigma}$
	$L = \frac{\mu d}{w}$
	$G = \frac{\sigma w}{d}$
	$C = \frac{w \varepsilon}{d}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!**

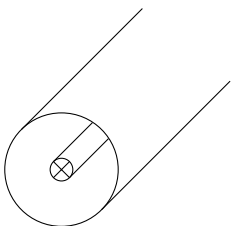
5.1.2 Koaxial Leitung

a = innen Radius b = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\hat{I}}{2\pi r} \right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$



$R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi \sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)}$

5.2 Allgemeine Lösung Leitungsgleichung

$$\underline{U}(z) = U_h e^{\gamma z} + U_r e^{-\gamma z} = U_h e^{\gamma d} + U_r e^{-\gamma d}$$

$$\underline{I}(z) = I_h e^{\gamma z} + I_r e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_h}{I_h} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

$$= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$l_{\text{elektr.}} = \beta \cdot l$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

5.2.1 Verlustlose Übertragungsleitung

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= j\omega\sqrt{LC} = j\beta \\ Z_L &= \frac{U_h}{U_r} = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ v_p &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}\end{aligned}$$

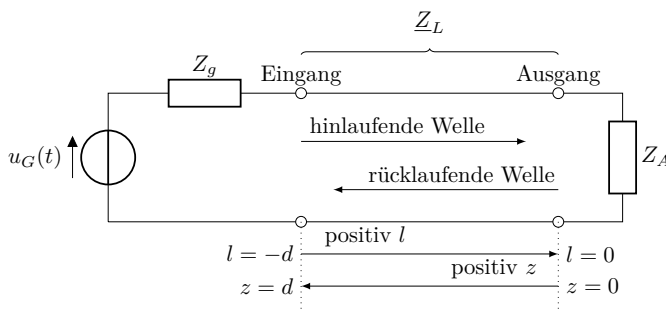
5.2.2 vernachlässigbarer Widerstandsbelag

Leitungswelle				Ebene Welle			
α	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}-1\right)}$	$G \leftrightarrow \sigma$	$C \leftrightarrow \epsilon$	α	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$	$L \leftrightarrow \mu$	
β	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}+1\right)}$			β	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$		
		Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter				
		$\sigma \ll \omega\epsilon$	$\sigma \gg \omega\epsilon$				
α	$\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$0,455 \omega\sqrt{LC}$	α	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$	
β	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{G^2}{\omega^2C^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$	$1,1 \omega\sqrt{LC}$	β	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$	
v_p	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{GL}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$	v_p	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$	

5.2.3 vernachlässigbarer Leitwertbelag

Leitungswelle				Ebene Welle			
α	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}-1\right)}$	$R \leftrightarrow \sigma$	$L \leftrightarrow \epsilon$	α	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$	$C \leftrightarrow \mu$	
β	$\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}+1\right)}$			β	$\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$		
		Verlustarmes Dielektrikum	Guter Leiter				
		$\sigma \ll \omega\epsilon$	$\sigma \gg \omega\epsilon$				
α	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$0,455 \omega\sqrt{LC}$	α	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$	
β	$\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$	$1,1 \omega\sqrt{LC}$	β	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$	
v_p	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$	$\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$	v_p	$\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$	$\omega\delta$	

5.3 Übertragungsleitung mit Last



$$\begin{aligned}U(z) &= U_h \cdot e^{\gamma z} + U_r \cdot e^{-\gamma z} = U_h \cdot e^{\gamma d} + U_r \cdot e^{-\gamma d} \\ I(z) &= I_h \cdot e^{\gamma z} + I_r \cdot e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}\end{aligned}$$

5.3.1 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$\underline{Z}_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$\underline{Z}_E = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_E} + j\omega C_E}$$

5.3.2 Reflexionsfaktor entlang einer Leitung

$$\begin{aligned}r_E &= r_A^{-2\gamma l} = r_A e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l} \\ \alpha &= -\frac{\ln(r_A)}{2l} [\text{Np/m}] \quad \beta = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2l} [\text{rad/m}]\end{aligned}$$

5.3.3 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(z)|}{1 - |r(z)|} = \frac{|U_H| + |U_R|}{|U_H| - |U_R|}$$

5.3.4 Position von Extrema

$$r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\begin{aligned}\lambda_{\min/\max} &= \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}} \\ z_{\min} &= \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}} \\ z_{\max} &= \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}} \\ z &= \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}\end{aligned}$$

Spezialfälle auf der nächsten Seiten

5.3.5 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= Z_L = Z(z) \\
 r_A &= 0 \quad \rightarrow \text{reflexionsfrei} \\
 \text{SWR} &= 1 \\
 U(z) &= U_h \cdot e^{j\beta z} \\
 I(z) &= I_h \cdot e^{j\beta z} \\
 &= \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}
 \end{aligned}$$

5.3.6 Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= 0 \\
 Z(z) &= jZ_L \cdot \tan(\beta z) \quad \rightarrow \text{rein imaginär} \\
 r_A &= -1 \\
 \text{SWR} &= \infty \\
 U(z) &= U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \quad \rightarrow U(z=0) = 0 \\
 I(z) &= U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \quad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2U_h}{Z_L}
 \end{aligned}$$

5.3.7 Spezialfall: Leerlaufende Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= \infty \\
 Z(z) &= -jZ_L \cdot \cot(\beta z) \quad \rightarrow \text{rein imaginär} \\
 r_A &= 1 \\
 \text{SWR} &= \infty \\
 U(z) &= U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \quad \rightarrow U(z=0) = 0 \\
 I(z) &= U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \quad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2 \cdot U_h}{Z_L}
 \end{aligned}$$

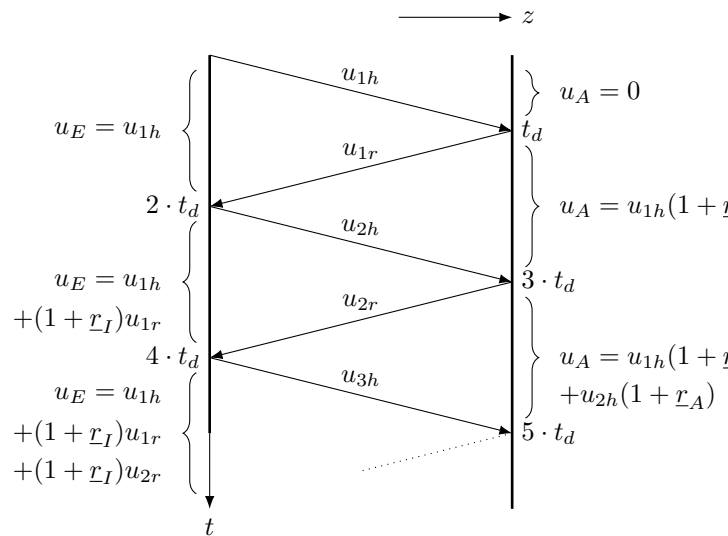
5.3.8 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

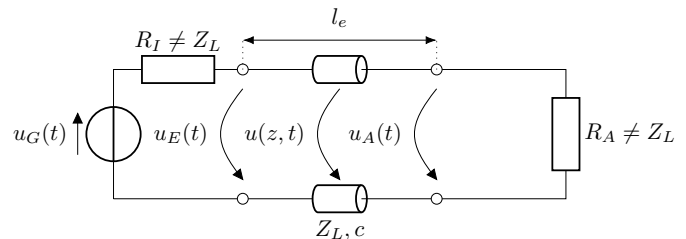
$$\begin{aligned}
 \underline{R_A > Z_L} &\rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ} \\
 &\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{R_A < Z_L} &\rightarrow \theta_r = \pi \\
 &\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

5.4 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$\begin{aligned}
 u_{1r} &= r_A \cdot u_{1h} \\
 u_{2h} &= r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h} \\
 u_{2r} &= r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h} \\
 u_{3h} &= r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}
 \end{aligned}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Signallaufzeit: } t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

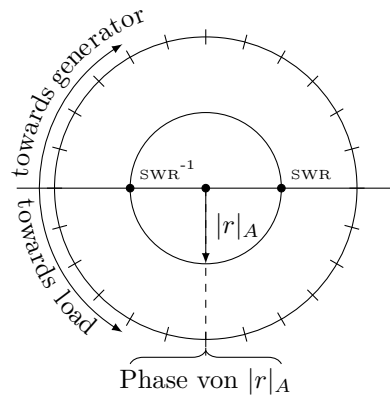
$$\text{Hinlaufende Welle } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

6 Smith-Diagramm

6.1 Allgemein

$$r(z) = r_A \cdot e^{-j2\beta z}$$

$$Z(z) = Z_L \cdot \frac{Z_A + jZ_L \cdot \tan(\beta z)}{Z_L + jZ_A \cdot \tan(\beta z)}$$



$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{Z_L}$$

$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$

$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|} s = \frac{1}{m}$$

6.2 Kurzgeschlossene Leitung $\underline{z}_A = 0$

$$\underline{Z} = j \cdot Z_L \cdot \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right)$$

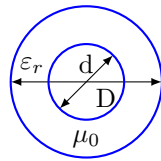
$$|\hat{U}_1(l)| = U_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right)$$

$$\hat{U}_E = \hat{U}_{generator} \cdot \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_{generator} + \underline{Z}_E}$$

7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser
 d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

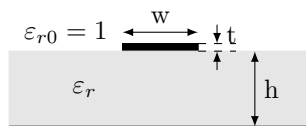
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite
 h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit \rightarrow Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer $\frac{w}{h}$ desto mehr nähert sich $\epsilon_{r,\text{eff}}$ an ϵ_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[\frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

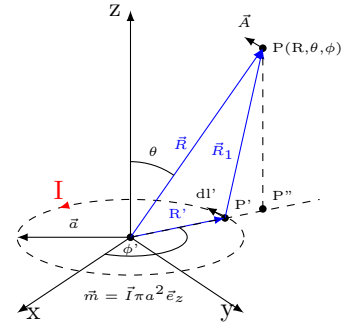
8 Antennen

8.2 Magnetischer Dipol

8.1 Herz'scher Dipol

8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$



8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, \vec{S} nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

$$\begin{aligned}R_S &= \frac{2}{3} \pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ &= 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

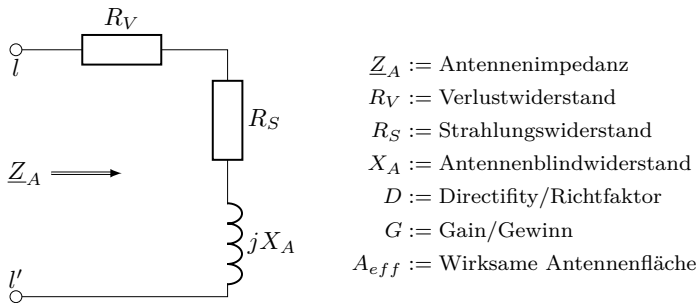
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

8.4 Antennenkenngrößen



8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \triangleq$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) [\text{dB}]$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G → Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{ dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{ dBi}$$

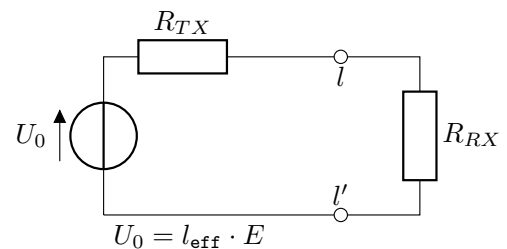
EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned} \frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{eff}}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2} \cdot \sin^2 \theta}^{D_{i,\theta}}$$

$$P_{RX} = S_{RX} \cdot A_{\text{eff}}$$

$$= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \lg \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left(\frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$L = 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]$$

8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1: (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	l	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	h	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28: (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	40Ω		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	73Ω		
λ -Dipol		2,41: (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	200Ω		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	290Ω		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28: (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, n -Windungen, beliebige Form		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12\lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzischen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25\lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	ab	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l\lambda$	—	—	—		