



OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

FORMELSAMMLUNG FWL

Wintersemester 22/23

Name:

Tony Pham

Letzte Änderung:

17. November 2022

Lizenz:

GPLv3

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Differentialoperatoren | 1 |
| 1.1.1 | Rechenregeln | 1 |
| 1.1.2 | Spezielle Vektorfelder | 1 |
| 1.2 | Vektorrechnung | 1 |
| 1.2.1 | Betrag, Richtungswinkel, Normierung | 1 |
| 1.2.2 | Skalarprodukt | 1 |
| 1.2.3 | Kreuzprodukt | 1 |
| 1.3 | Logarithmische Maße | 1 |
| 1.4 | Vergleich/Umrechnung | 2 |
| 1.5 | Randbedingung | 2 |
| 1.6 | Kartesische Koordinaten | 3 |
| 1.7 | Zylinderkoordinaten | 3 |
| 1.8 | Kugelkoordinaten | 4 |
| 2 | Maxwell-Gleichungen | 5 |
| 2.1 | Integralsätze | 5 |
| 3 | Felder | 6 |
| 3.1 | E-Felder an Grenzflächen | 6 |
| 3.2 | Elektrostatik | 6 |
| 3.2.1 | Potential Gleichung | 6 |
| 3.2.2 | Green'sche Funktionen | 6 |
| 3.3 | Magnetostatik | 6 |
| 3.3.1 | Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte | 6 |
| 3.3.2 | Biot-Savart-Gesetz | 6 |
| 3.3.3 | Elektrischer Dipol | 7 |
| 3.3.4 | Magnetischer Dipol | 7 |
| 3.4 | Skineffekt | 7 |
| 4 | Wellen | 8 |
| 4.1 | Ausbreitung | 8 |
| 4.1.1 | Allgemein | 8 |
| 4.1.2 | Im leeren Raum(Vakuum) | 8 |
| 4.1.3 | Im verlustlosen/idealen Dielektrika | 8 |
| 4.1.4 | Im Dielektrika mit geringem Verlust | 8 |
| 4.1.5 | Im guten Leiter | 8 |
| 4.2 | Übergang | 9 |
| 4.2.1 | Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust | 9 |
| 4.3 | Poyntingvektor | 9 |
| 4.3.1 | Leistung | 9 |
| 4.3.2 | Leistung nach Dämpfung | 9 |
| 4.3.3 | Leistung vom Kabel transportiert | 9 |
| 4.4 | d'Alembertsche Gleichung (allg.) | 9 |
| 4.5 | Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich) | 9 |
| 4.5.1 | Zeitbereich | 9 |
| 4.5.2 | Frequenzbereich (harmonisch) | 9 |
| 4.6 | Wellenzahl | 10 |
| 4.7 | Wellenlänge | 10 |
| 4.8 | Phasengeschwindigkeit | 10 |
| 4.8.1 | Gruppengeschwindigkeit | 10 |
| 4.9 | Polarisation | 10 |
| 4.10 | Verlustlose Polarisation | 10 |
| 4.11 | Totalreflexion | 10 |
| 4.12 | Grenzwinkel | 10 |
| 4.13 | Brewster-/Polarisationswinkel | 10 |
| 4.14 | Senkrechter Einfall | 11 |
| 4.14.1 | Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt. | 11 |
| 4.14.2 | Spezialfall Medium 1 ist Luft | 11 |
| 4.14.3 | Spezialfall Medium 2 ist Luft | 11 |
| 4.14.4 | Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch | 11 |
| 4.14.5 | Spezialfall Medium 2 idealer Leiter | 11 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.15 | Stehwellenverhältnis | 11 |
| 4.16 | Senkrechte (E-Feld) Polarisierung (H-Feld parallel) | 12 |
| 4.17 | Parallel (E-Feld) Polarisierung (H-Feld senkrecht) | 12 |
| 5 | Leitungen | 13 |
| 5.1 | Leitungsparameter | 13 |
| 5.1.1 | Parallele Platten | 13 |
| 5.1.2 | Doppelleitung: | 13 |
| 5.1.3 | Koaxial Leitung | 13 |
| 5.2 | Allgemeine Lösung Leitungsgleichung | 13 |
| 5.2.1 | Verlustlose Übertragungsleitung | 14 |
| 5.2.2 | vernachlässigbarer Widerstandsbelag | 14 |
| 5.2.3 | vernachlässigbarer Leitwertbelag | 14 |
| 5.3 | Übertragungsleitung mit Last | 14 |
| 5.3.1 | Vorgehen Eingangswiderstand | 14 |
| 5.3.2 | Reflexionsfaktor entlang einer Leitung | 14 |
| 5.3.3 | Stehwellenverhältnis | 14 |
| 5.3.4 | Leistung | 14 |
| 5.3.5 | Gleichspannungswert (=Endwert) | 14 |
| 5.3.6 | Position von Extrema | 15 |
| 5.3.7 | Spezialfall: Angepasste Leitung | 15 |
| 5.3.8 | Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung | 15 |
| 5.3.9 | Spezialfall: Leerlaufende Leitung | 15 |
| 5.3.10 | Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung | 15 |
| 5.4 | Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung | 15 |
| 5.5 | Kettenmatrix einer Leitung | 15 |
| 6 | Smith-Diagramm | 16 |
| 6.1 | Allgemein | 16 |
| 6.2 | Impedanz/Admetanz umrechnen | 16 |
| 6.3 | Zusammenschaltungen | 16 |
| 6.4 | Von Last zu Quelle | 16 |
| 7 | Wellenleiter | 17 |
| 7.1 | Koaxial Leiter | 17 |
| 7.1.1 | Wellenwiderstand | 17 |
| 7.1.2 | Dämpfung | 17 |
| 7.2 | Mikrostreifenleiter | 17 |
| 7.2.1 | Effektive Permittivitätszahl | 17 |
| 7.2.2 | Schmale Streifen | 17 |
| 7.2.3 | Breite Streifen | 17 |
| 7.3 | Hohlleiter | 17 |
| 7.4 | VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss | 17 |
| 7.5 | Lichtwellenleiter oder Glasfaser | 17 |
| 8 | Antennen | 18 |
| 8.1 | Herz'scher Dipol | 18 |
| 8.1.1 | Allgemein | 18 |
| 8.1.2 | Nahfeld | 18 |
| 8.1.3 | Fernfeld | 18 |
| 8.1.4 | Abgestrahlte Leistung im Fernfeld | 18 |
| 8.1.5 | Strahlungswiderstand | 18 |
| 8.1.6 | Verlustwiderstand | 18 |
| 8.2 | Magnetischer Dipol | 18 |
| 8.2.1 | Fernfeld | 18 |
| 8.2.2 | Abgestrahlte Leistung im Fernfeld | 18 |
| 8.2.3 | Nahfeld | 18 |
| 8.3 | Lineare Antenne | 18 |
| 8.3.1 | Dipolantenne | 19 |
| 8.4 | Antennenkenngrößen | 19 |
| 8.4.1 | Abgestrahlte Leistung | 19 |
| 8.4.2 | Verlustleistung | 19 |
| 8.4.3 | Wirkungsgrad | 19 |
| 8.4.4 | Richtcharakteristik | 19 |

| | | |
|-------|---|----|
| 8.4.5 | Richtfunktion/Richtfaktor | 19 |
| 8.4.6 | Gewinn | 19 |
| 8.4.7 | Wirksame Antennenfläche | 19 |
| 8.5 | Bezugsantennen | 19 |
| 8.6 | Senden und Empfangen | 19 |
| 8.6.1 | Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß | 20 |
| 8.6.2 | Leistungspegel/Freiraumpegel | 20 |
| 8.7 | Antennentabelle | 21 |

| | | |
|----------|------------------|-----------|
| 9 | Einheiten | 22 |
|----------|------------------|-----------|

1 Grundlagen

1.1 Differentialoperatoren

Nabla-Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Divergenz div : Vektorfeld \rightarrow Skalar

Quelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum an, ob Feldlinien entstehen oder verschwinden.

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \\ = 0 & \Rightarrow \text{quellenfrei} \end{cases}$$

Rotation rot : Vektorfeld \rightarrow Vektorfeld

Wirbelldichte, gibt für jeden Punkt im Raum Betrag und Richtung der Rotationsgeschwindigkeit an.

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Gradient grad : Skalarfeld \rightarrow Vektor/Gradientenfeld
zeigt in Richtung steilster Anstieg von ϕ

$$\boxed{\text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

1.1.1 Rechenregeln

ϕ, ψ : Skalarfelder \vec{A}, \vec{B} : Vektorfelder

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \psi) &= \phi(\nabla \psi) + \psi(\nabla \phi) \\ \nabla \cdot (\phi \cdot \vec{A}) &= \phi(\nabla \vec{A}) + \vec{A}(\nabla \phi) \\ \nabla \times (\phi \cdot \vec{A}) &= \nabla \phi \times \vec{A} + \phi(\nabla \times \vec{A}) \end{aligned}$$

1.1.2 Spezielle Vektorfelder

quellenfreies Vektorfeld \rightarrow Vektorpotential:

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{rot } \vec{E}$$

wirbelfreies Vektorfeld \rightarrow Skalarpotential:

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad } \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } \phi$$

quellen- und wirbelfreies Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= 0 \quad \text{div } \vec{F} = 0 \\ \text{div}(\text{grad } \phi) &= \Delta \phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \text{grad } \phi \end{aligned}$$

1.2 Vektorrechnung

1.2.1 Betrag, Richtungswinkel, Normierung

Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Richtungswinkel

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Normierung, Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{e}_a| = 1$$

1.2.2 Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \cos(\varphi) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \end{aligned}$$

1.2.3 Kreuzprodukt

$$\begin{aligned} A_{Para} &= |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Logarithmische Maße

Feldgröße U_n : Spannung, Strom, Schalldruck

Leistungsgröße P_n : Energie, Intensität, Leistung

Dezibel [dB]

$$1 \text{ dB} = 0,1151 \text{ Np}$$

$$x = 20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} [\text{dB}] \quad x = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} [\text{dB}]$$

$$U_1 = U_2 \cdot 10^{\frac{x}{20 \text{ dB}}} \quad P_1 = P_2 \cdot 10^{\frac{x}{10 \text{ dB}}}$$

Neper [Np]

$$1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$$

$$x = \ln \frac{U_1}{U_2} [\text{Np}] \quad x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} [\text{Np}]$$

$$U_1 = U_2 \cdot e^x \quad P_1 = P_2 \cdot e^{2x}$$

Umrechnung

| Faktor | Energiegröße P_n | Feldgröße U_n |
|--------|--------------------|-----------------|
| 1 | | |

1.4 Vergleich/Umrechnung

| Kart. | Zyl. | Kug. |
|---|------------------|---------------------------------|
| x | $r \cos \varphi$ | $r \sin \vartheta \cos \varphi$ |
| y | $r \sin \varphi$ | $r \sin \vartheta \sin \varphi$ |
| z | z | $r \cos \vartheta$ |
| $\sqrt{x^2 + y^2}$ | r | |
| $\arctan \frac{y}{x}$ | φ | |
| z | z | |
| $dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$ | dr | |
| $dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$ | $r d\varphi$ | |
| dz | dz | |
| $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | | r |
| $\arctan \frac{y}{x}$ | | φ |
| $\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ | | ϑ |
| $dx \sin \vartheta \cos \varphi + dy \sin \vartheta \sin \varphi + dz \cos \vartheta$ | | dr |
| $dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$ | | $r \sin \vartheta d\varphi$ |
| $dx \cos \vartheta \cos \varphi + dy \cos \vartheta \sin \varphi - dz \sin \vartheta$ | | $r d\vartheta$ |

1.5 Randbedingung

| | |
|--------------|---|
| Dirichlet-RB | Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$) |
| Neumann-RB | Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an |

1.6 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.7 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[\Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.8 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[\Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[\Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[\Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

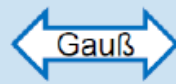
2 Maxwell-Gleichungen

differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Gaußsches Gesetz: Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung Q bzw. die Ladungsdichte ρ ist Quelle des elektrischen Feldes.

Integralform

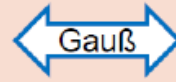


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche ∂V eines Volumens V entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Induktionsgesetz: Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A einer Fläche A ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Amperesches Gesetz: Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve ∂A der Fläche A entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

Durchflutungsgesetz:

Elek. Strom ist Ursache für ein magn. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elek. Wirbelfeld.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -j\omega\mu\vec{H}$$

Differentielle ohmsche Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind ϵ u. μ Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren \rightarrow Rand betrachten

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

3 Felder

Materialgleichungen

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E} = \left[\frac{A}{m^2} \right]} \quad \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H} = [T]} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \left[\frac{C}{m^2} \right]}$$

Feldunterscheidung

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &\hat{=} \text{ statisches Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) &\hat{=} \text{ stationäres Feld} \\ \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) &\hat{=} \text{ Welle} \end{aligned}$$

3.1 E-Felder an Grenzflächen

Dielektrische Grenzfläche

Querschichtung: $D_{1n} = D_{2n}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Grenzfläche dielektrischer Leiter

Längsschichtung: $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Querschichtung: $D_{1n} = \frac{Q}{A}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$$

Grenzfläche an magn. Feldern

Querschichtung: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung: $H_{1t} = H_{2t}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

3.2 Elektrostatik

• wirbelfreies Feld → Elektrische Ladungen sind Quellen des Feldes

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0} \quad = \operatorname{rot} \operatorname{grad} E$$

3.2.1 Potential Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

⇒ **Poisson-Gleichung** mit $\rho = 0$

→ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \varphi + \underbrace{\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi}_{=0, \text{ wenn homogen}} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

3.2.2 Green'sche Funktionen

Potential einer Punktladung

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

E-Feld einer Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right]$$

D-Feld einer Punktladung

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[\frac{As}{m^2} \right]$$

Potentialfeld einer Ladungsverteilung

mit $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

3.3 Magnetostatik

• Wirbelfeld, quellenfrei und hat immer geschlossene Feldlinien.

- Nach $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \rightarrow$ nur wirbelfrei wenn $\vec{j} = 0$
- Damit Skalarpotential φ_m existiert muss \vec{H} wirbelfrei
- keine magnetischen Monopole $\operatorname{grad} \vec{B} = 0$
- Vektorpotential \vec{A} = Maß für Φ_{magn} durch Fläche A

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0} \quad = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$$

Coulomb-Eichung

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

3.3.2 Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

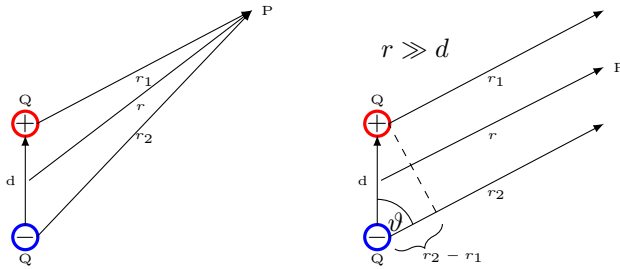
mit $\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{r} : Aufpunkt \vec{r}' : Quellpunkt

3.3.3 Elektrischer Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2}$$

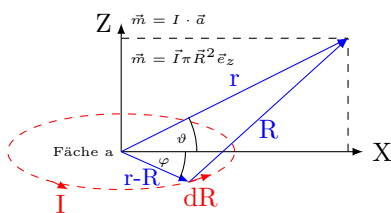
$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\varphi \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

3.3.4 Magnetischer Dipol

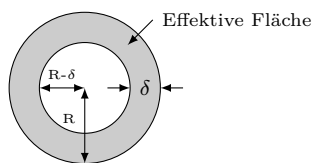


I entlang Leiter

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

3.4 Skineffekt



$$\sigma/\kappa : \text{Leitfähigkeit [A/Vm]} = [1/\Omega\text{m}]$$

Äquivalente Leiterschichtdicke (Amp: $A \cdot \frac{1}{e}$):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [m]$$

Widerstand/Oberflächenwiderstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\sigma \cdot A_{\text{eff}}}$$

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma\pi R^2}$$

$$R_F = \frac{1}{\sigma\delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für E -Feld

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Amplitude und Phase bezogen auf δ :

Amplitude: $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfung} [])$

$$\text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Effektive Fläche:

$$A_{\text{eff}} = A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2\pi - (R - \delta)^2\pi$$

$$= 2 \cdot \pi\delta \left(R - \frac{\delta}{2} \right)$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % nimmt der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

Bessel-Funktion:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{r_0}{2\delta} \quad r_0 \hat{=} \text{Außendurchmesser}$$

4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner c_0
- raumzeitlicher Vorgang $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ Einheit [S] = $\frac{W}{m^2}$
Falls $\vec{E} \perp \vec{H}$ und $\vec{S} \perp \vec{E}$ und $\vec{S} \perp \vec{H}$

Wellengleichung

Tatsächlicher Zeitverlauf (Realteil von $\vec{E}(z, t)$)

$$\vec{E}(z, t) = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\text{positive z-Richtung, Zeit- und Raumabhängigkeit}} \cdot \vec{e}_z$$

Komplexer Amplitudenvektor

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \vec{e}_z = E_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{j\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

Fortpflanzungskonstante γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

α : Dämpfungskonstante [Np/m]

β : Phasenkonstante [rad/m]

v_p : Phasengeschwindigkeit [m/s]

v_g : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

λ : Wellen [m]

4.1 Ausbreitung

4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

4.1.2 Im leeren Raum (Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos: $\sigma = 0$, maximale Wirkleistung
 Z_F rein reel \rightarrow ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust: $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left(1 + \frac{j\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$$

4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust: $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

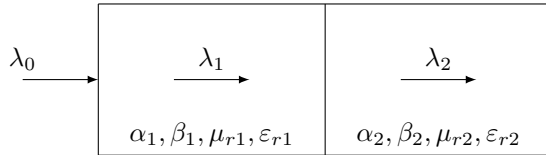
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

4.2 Übergang

4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}} \quad \beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}} \quad Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

4.3 Poyntingvektor

gibt Leistungsfluss einer EM-Welle und Richtung der Energieströmung an.

| Zeitbereich | Frequenzbereich |
|---|--|
| $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ | $\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}(\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*)$ |
| $\vec{S}_{av} = \overline{\vec{S}(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$ | $\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\}$ |
| Leistungsflussdichte $S_{av} = \vec{S}_{av} $ | |

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S_{AV} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$= \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{av} d\vec{a}$$

$$= \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$w_e = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$w_e = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$

4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \underline{\vec{E}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{E}} = \text{grad} \frac{\underline{\rho}}{\epsilon}$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \underline{\vec{E}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \underline{\vec{H}} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

keine Raumladung $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{H}$$

4.6 Wellenzahl

Im Vakuum: $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$

$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium}} \leq c_0$$

4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

$$\downarrow$$

$$E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

4.9 Polarisation

| | | |
|--------------|---|--------------|
| Lineare | wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt | H oder E |
| Elliptische | Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt | $E \neq H$ |
| Kreisförmige | der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt | $E = H$ |

4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

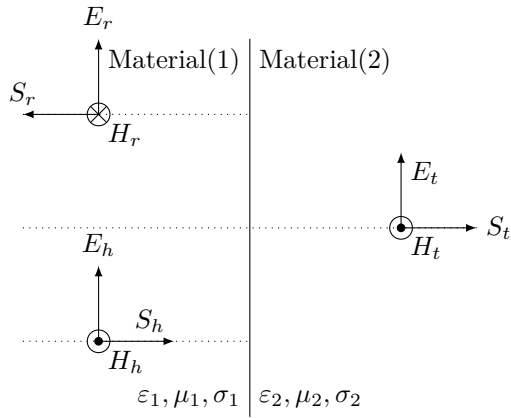
$$\boxed{\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h$$

$$E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r$$

$$t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h$$

$$t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h$$

$$H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r$$

$$\frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}}$$

$$\frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}}$$

$$t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \varepsilon_{r1} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \varepsilon_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$

4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1}$$

$$r = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

$$t = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0$$

$$r = -1$$

$$t = 0$$

$$\bar{S} = 0$$

$$E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z)$$

$$H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

StehendeWelle

$$\rightarrow H_{\max} \text{ und } E_{\min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2$$

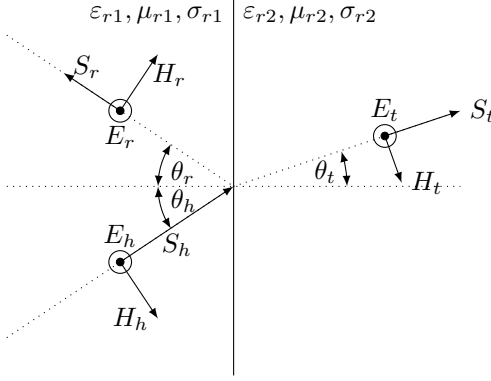
$$\rightarrow H_{\min} \text{ und } E_{\max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4$$

$$\rightarrow 90^\circ \text{ Phasenverschiebung}$$

4.15 Stehwellenverhältnis

$$\text{SWR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

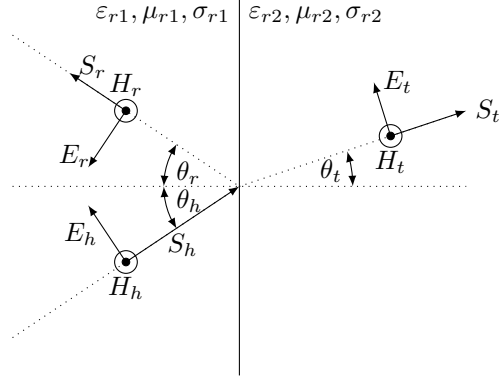
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \\ E_t &= H_t \cdot Z_{F2} \\ E_h &= H_h \cdot Z_{F1} \end{aligned}$$

5 Leitungen

| Medium | C (pF/m) | L (nH/m) | v (m/μs) | Z (Ω) | R for f ≤ 1kHz (mΩ/m) |
|----------------------------|----------|----------|----------|-------|-----------------------|
| RG58/U Coaxial Cable | 93.5 | 273 | 198 | 54 | 53 |
| RG58C/U Coaxial Cable | 101 | 252 | 198 | 50 | 50 |
| RG59B/U Coaxial Cable | 72.0 | 405 | 185 | 75 | 45 |
| CAT-5 Twisted Pair (Solid) | 49.2 | 495 | 203 | 100 | 180 |
| Vacuum | 8.85 | 1260 | 299 | 377 | |
| Water | 708 | 1260 | 34 | 42 | [3] |

5.1 Leitungsparameter

σ = Leitwert des Dielektr. σ_c = Leitwert des Leiters

5.1.1 Parallele Platten

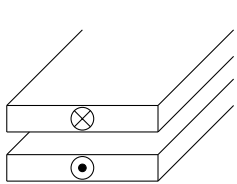
w = Platten Breite d = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

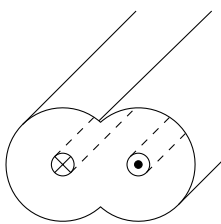


| |
|-------------------------------|
| $R = \frac{2}{w\delta\sigma}$ |
| $L = \frac{\mu d}{w}$ |
| $G = \frac{\sigma w}{d}$ |
| $C = \frac{w\epsilon}{d}$ |

5.1.2 Doppelleitung:

a = Leiter Radius d = Abstand zw. den Leitern

cosh am TR: MENU → 1; OPTN → 1 → 5



| |
|---|
| $R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$ |
| $L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$ |
| $G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$ |
| $C = \frac{\pi \epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$ |

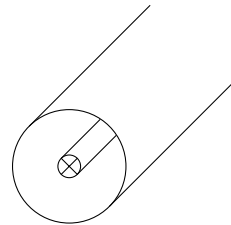
5.1.3 Koaxial Leitung

a = innen Radius b = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\hat{I}}{2\pi r} \cdot Z_{F0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(b/a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{S}_{zeit.Mittel} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\hat{I}}{2\pi r} \right]^2 \cdot Z_{F0} \cdot \vec{e}_z$$



| |
|---|
| $R = \frac{1}{2\pi\delta\sigma_c} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$ |
| $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ |
| $G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$ |
| $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$ |

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu\epsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Innere Induktivität:

$$L_i = \frac{R}{w}$$

Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!
Länge verdoppeln!!!

5.2 Allgemeine Lösung Leitungsgleichung

$$\underline{U}(z) = U_h e^{\gamma z} + U_r e^{-\gamma z} = U_h e^{\gamma d} + U_r e^{-\gamma d}$$

$$\underline{I}(z) = I_h e^{\gamma z} + I_r e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_h}{I_h} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \cdot \sqrt{\frac{RG}{j^2\omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

$$= \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$l_{\text{elektr.}} = \beta \cdot l$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \epsilon^2}} + 1 \right)}$$

5.2.1 Verlustlose Übertragungsleitung

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega\sqrt{LC} = j\beta \\ Z_L &= \frac{U_h}{U_r} = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ v_p &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{LC}} = \frac{v_p}{f} = \frac{c_0}{f\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}\end{aligned}$$

5.2.2 vernachlässigbarer Widerstandsbelag

| Leitungswelle | | | | Ebene Welle | | | |
|---------------|--|----------------------------|------------------------------|-------------|---|-------------------------|--|
| α | $\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}-1\right)}$ | $G \leftrightarrow \sigma$ | $C \leftrightarrow \epsilon$ | α | $\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$ | $L \leftrightarrow \mu$ | |
| β | $\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{G^2}{\omega^2C^2}}+1\right)}$ | | | β | $\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$ | | |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | | | v_p | $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ | | |

| | $G \ll \omega C$ | $G \gg \omega C$ | $G = \omega C$ |
|----------|--|------------------------------|--------------------------|
| α | $\frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ | $\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$ | $0,455 \omega\sqrt{LC}$ |
| β | $\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{G^2}{\omega^2C^2}\right)$ | $\sqrt{\frac{\omega GL}{2}}$ | $1,1 \omega\sqrt{LC}$ |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $\sqrt{\frac{2\omega}{GL}}$ | $\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$ |

| | Verlustarmes Dielektrikum | Guter Leiter |
|-----------------------------|---|---|
| $\sigma \ll \omega\epsilon$ | $\sigma \ll \omega\epsilon$ | $\sigma \gg \omega\epsilon$ |
| α | $\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ | $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$ |
| β | $\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$ | $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$ |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ | $\omega\delta$ |

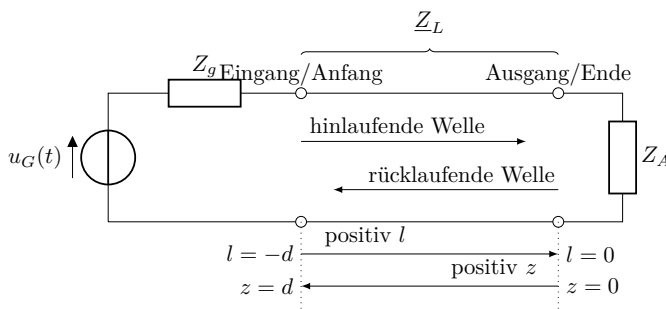
5.2.3 vernachlässigbarer Leitwertbelag

| Leitungswelle | | | | Ebene Welle | | | |
|---------------|--|----------------------------|------------------------------|-------------|---|-------------------------|--|
| α | $\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}-1\right)}$ | $R \leftrightarrow \sigma$ | $L \leftrightarrow \epsilon$ | α | $\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}-1\right)}$ | $C \leftrightarrow \mu$ | |
| β | $\omega\sqrt{\frac{LC}{2}\left(\sqrt{1+\frac{R^2}{\omega^2L^2}}+1\right)}$ | | | β | $\omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}}+1\right)}$ | | |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | | | v_p | $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ | | |

| | $R \ll \omega L$ | $R \gg \omega L$ | $R = \omega L$ |
|----------|--|------------------------------|--------------------------|
| α | $\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ | $\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$ | $0,455 \omega\sqrt{LC}$ |
| β | $\omega\sqrt{LC}\left(1+\frac{1}{8}\frac{R^2}{\omega^2L^2}\right)$ | $\sqrt{\frac{\omega RC}{2}}$ | $1,1 \omega\sqrt{LC}$ |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $\sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$ | $\frac{0,91}{\sqrt{LC}}$ |

| | Verlustarmes Dielektrikum | Guter Leiter |
|-----------------------------|---|---|
| $\sigma \ll \omega\epsilon$ | $\sigma \ll \omega\epsilon$ | $\sigma \gg \omega\epsilon$ |
| α | $\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ | $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$ |
| β | $\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1+\frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)$ | $\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta}$ |
| v_p | $\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ | $\omega\delta$ |

5.3 Übertragungsleitung mit Last



$$\begin{aligned}U(z) &= U_h \cdot e^{\gamma z} + U_r \cdot e^{-\gamma z} = U_h \cdot e^{\gamma d} + U_r \cdot e^{-\gamma d} \\ I(z) &= I_h \cdot e^{\gamma z} + I_r \cdot e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}\end{aligned}$$

5.3.1 Vorgehen Eingangswiderstand

Wenn mit Smithdiagramm gearbeitet wird liefert dieses Schritte 3 und 4

1. Lastimpedanz

$$Z_A = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + j\omega C_A}$$

2. Reflexion am Leitungsende

$$\underline{r}_A = \underline{r}(z=0) = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L}$$

3. Reflexion am Leitungsanfang

$$\underline{r}_E = \underline{r}(z=d) = \underline{r}_A \cdot e^{-j2\beta d}$$

4. Bestimmung der Impedanz

$$Z_E = Z_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_E}{1 - \underline{r}_E}$$

5. Eingangswiderstand

$$Z_E = \frac{1}{\frac{1}{Z_E} + j\omega C_E}$$

5.3.2 Reflexionsfaktor entlang einer Leitung

$$\begin{aligned}r_E &= r_A^{-2\gamma l} = r_A e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l} \\ \alpha &= -\frac{\ln(r_A)}{2l} [\text{Np/m}] \quad \beta = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2l} [\text{rad/m}]\end{aligned}$$

5.3.3 Stehwellenverhältnis

siehe auch Kap. 6.1

$$\begin{aligned}\text{SWR} &= \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1 + |r(z)|}{1 - |r(z)|} = \frac{|U_H| + |U_R|}{|U_H| - |U_R|} \\ &= \frac{R_{\max}}{Z_L} \\ \text{SWR}^{-1} &= \frac{R_{\min}}{Z_L} \quad |r_A| = \frac{\text{SWR} + 1}{\text{SWR} - 1}\end{aligned}$$

5.3.4 Leistung

$$\begin{aligned}P_A &= P_H - P_R \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_r^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\hat{U}_h^2}{\text{Re}\{Z_L\}} \cdot (1 - r^2) \\ &= P_{\max} \cdot (1 - r^2) \\ &= U_A \cdot I_A^* \\ P_V &= P_q - P_A \\ I(z) &= \hat{I} \cdot e^{-\alpha z} \angle \beta z\end{aligned}$$

5.3.5 Gleichspannungswert (=Endwert)

$$U_A = U_q \cdot \frac{R_A}{R_i + R_A}$$

5.3.6 Position von Extrema

$$r_A = |r_A| \cdot e^{-j\theta_r} \rightarrow \theta_r \text{ in rad}$$

$f_{\min} \rightarrow$ Minimum(Knoten) der Spannungen

$f_{\max} \rightarrow$ Maximum(Bäuche) der Spannungen

$$\lambda_{\min/\max} = \frac{c_0}{f_{\min/\max} \sqrt{\mu_{r1} \epsilon_{r1}}}$$

$$z_{\min} = \frac{-n \cdot \lambda_{\min}}{2} \rightarrow n = -\frac{2z}{\lambda_{\min}}$$

$$z_{\max} = \frac{-(2n+1)\lambda_{\max}}{4} \rightarrow n = -\frac{4z + \lambda_{\max}}{2 \cdot \lambda_{\max}}$$

$$z = \frac{\lambda_{\min} \cdot \lambda_{\max}}{4(\lambda_{\min} - \lambda_{\max})}$$

5.3.7 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$Z_A = Z_L = Z(z)$$

$$r_A = 0 \rightarrow \text{reflexionsfrei}$$

$$\text{SWR} = 1$$

$$U(z) = U_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$I(z) = I_h \cdot e^{j\beta z}$$

$$= \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}$$

5.3.8 Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung

$$Z_A = 0$$

$$Z(z) = jZ_L \cdot \tan(\beta z) \rightarrow \text{rein imaginär}$$

$$r_A = -1$$

$$\text{SWR} = \infty$$

$$U(z) = U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \rightarrow U(z=0) = 0$$

$$\hat{U}_E = \hat{U}_{\text{generator}} \cdot \frac{Z_E}{Z_{\text{generator}} + Z_E}$$

$$I(z) = U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2U_h}{Z_L}$$

5.3.9 Spezialfall: Leerlaufende Leitung

$$Z_A = \infty$$

$$Z(z) = -jZ_L \cdot \cot(\beta z) \rightarrow \text{rein imaginär}$$

$$r_A = 1$$

$$\text{SWR} = \infty$$

$$U(z) = U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \rightarrow U(z=0) = 0$$

$$I(z) = U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2 \cdot U_h}{Z_L}$$

5.3.10 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

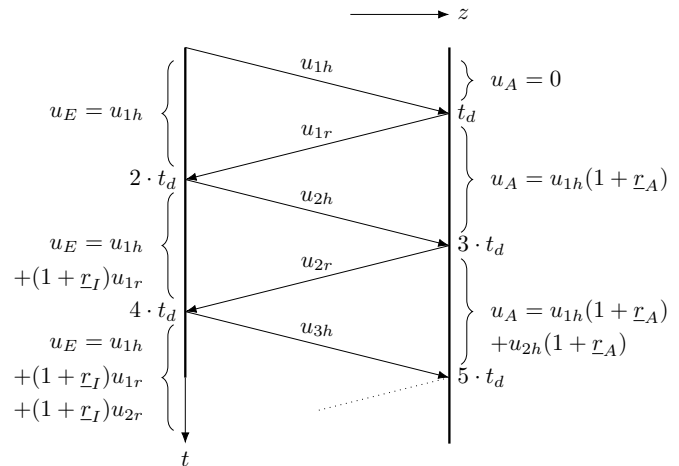
$$R_A > Z_L \rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ}$$

$$\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

$$R_A < Z_L \rightarrow \theta_r = \pi$$

$$\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n$$

5.4 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung

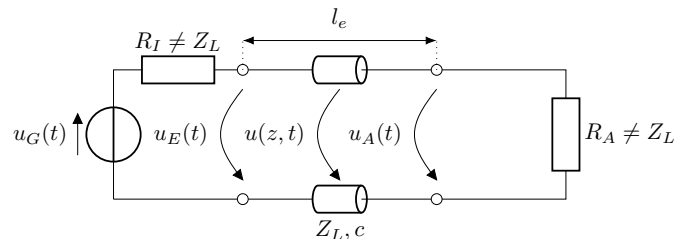


$$u_{1r} = r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2h} = r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h}$$

$$u_{2r} = r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$

$$u_{3h} = r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Hinlaufende Welle: } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

$$\text{Signallaufzeit: } t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{l}{v_p}$$

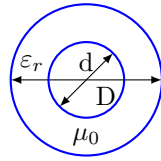
5.5 Kettenmatrix einer Leitung

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_L \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_L} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix}$$

7 Wellenleiter

7.1 Koaxial Leiter

7.1.1 Wellenwiderstand



D = Außendurchmesser
 d = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

7.1.2 Dämpfung

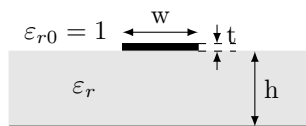
Ohm'sche Verluste $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0} \sim f$$

7.2 Mikrostreifenleiter



w := Leiterbahnbreite
 h := Substratbreite

7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit \rightarrow Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer $\frac{w}{h}$ desto mehr nähert sich $\epsilon_{r,\text{eff}}$ an ϵ_r und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

7.2.2 Schmale Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

7.2.3 Breite Streifen (ca 20-200Ω)

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

VSWR

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s + 1}$$

Return Loss

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Missmatch Loss

$$\text{ML} = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

7.5 Lichtwellenleiter oder Glasfaser

APF := All Plastic Fiber

POF := Polymerfaser

LWL := Lichtwellenleiter

$B \cdot l$:= Bandbreitenlängenprodukt

Dispersion:

Die von der Frequenz des Lichts abhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in Medien. Dies hat zur Folge, dass Licht an Übergangsflächen unterschiedlich stark gebrochen wird. Somit verflacht sich beispielsweise ein (Dirac-)Impuls zu einer Gauß'schen Glocke.

Stufenprofil:

Multimode: leichtes Einkoppeln, geringes $B \cdot l$ wegen Modendispersion

Single/Monomode: schwieriges Einkoppeln, großes $B \cdot l$, keine Modendispersion

Gradientenprofil:

Multimode: Kompromiss beim Einkoppeln und Reichweite mit $B \cdot l$

Bandbreitenlängenprodukt:

$$B' = B \cdot l \left[\frac{\text{MHz}}{\text{km}} \right] = \text{konstant}$$

$$B \sim \frac{1}{l} \text{ und } l \sim \frac{1}{B}$$

Bandbreite ist gegen Übertragungslänge austauschbar, so lange Dämpfung keine Rolle spielt.

8 Antennen

8.1 Herz'scher Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$

8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da E zu H 90° phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**, \vec{S} nach außen somit Kugelwelle

mit $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left(\frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.1.5 Strahlungswiderstand

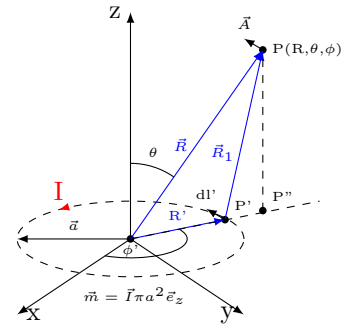
$$R_S = \frac{2}{3} \pi Z_F \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \Omega \left(\frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2$$

8.1.6 Verlustwiderstand

$$R_v = \frac{l}{\sigma \cdot A_\delta}$$

8.2 Magnetischer Dipol

$$\vec{m} = \vec{I} \pi a^2 \vec{e}_z \quad m = I \cdot A$$



$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left(\frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left(\frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[\beta \left(\frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

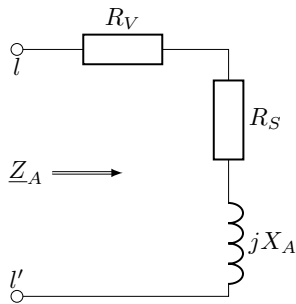
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$\begin{aligned} P_S &= \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left(\cos\left(\frac{\beta L}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta \\ &= \int_A S_{AV} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{\Phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta=0}^{\pi} S_{AV} R^2 \sin\Theta \cdot d\Theta \cdot d\Phi \end{aligned}$$

8.4 Antennenkenngrößen



Z_A := Antennenimpedanz
 R_V := Verlustwiderstand
 R_S := Strahlungswiderstand
 X_A := Antennenblindwiderstand
 D := Directivity/Richtfaktor
 G := Gain/Gewinn
 A_{eff} := Wirksame Antennenfläche

8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \hat{=}$ isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\vartheta, \varphi)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben!

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{\text{eff}}^2$$

8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) \text{dB}$$

mit P_0 : Eingangsleistung der Antenne

G→Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{dBi}$$

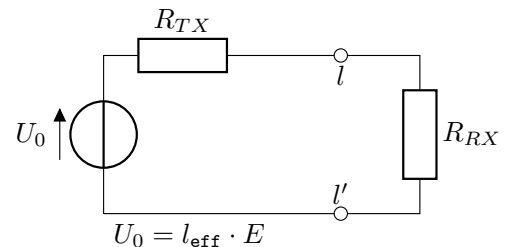
EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dBi}]$$

ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned}
\frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{\text{eff},RX} \cdot A_{\text{eff},TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\
&= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \\
\boxed{A_{\text{eff}}(\theta) &= G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2}}^{D_{i,\theta}} \cdot \sin^2 \theta} \\
P_{RX} &= S_{RX} \cdot A_{\text{eff}} \\
&= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2
\end{aligned}$$

8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß

$$\begin{aligned}
F &= \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1] \\
a_0 &= 20 \lg \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left(\frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]
\end{aligned}$$

8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel

$$\begin{aligned}
L &= 10 \lg \left(\frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}] \\
L_{RX} &= L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]
\end{aligned}$$

8.7 Antennentabelle

| Antennenart | Darstellung, Belegung | Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB) | wirksame Antennenfläche | effektive Höhe | Strahlungs-Widerstand | vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich) | horizontales Richtdiagramm |
|---|-----------------------|---|--|--------------------------------------|--|---|----------------------------|
| isotrope Antenne | fiktiv | 1: (0 dB) | $\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$ | — | — | | |
| Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität | | 1,5: (1,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$ | l | $80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$ | | |
| kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$ | | 3: (4,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$ | h | $160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$ | | |
| kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$ | | 3: (4,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$ | $\frac{h}{2}$ | $40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$ | | |
| $\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene | | 3,28: (5,1 dB) | $0,065\lambda^2$ | $\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$ | 40Ω | | |
| kurzer Dipol $l \ll \lambda$ | | 1,5: (1,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$ | $\frac{l}{2}$ | $20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$ | | |
| $\lambda/2$ -Dipol | | 1,64: (2,1 dB) | $0,13\lambda^2$ | $\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$ | 73Ω | | |
| λ -Dipol | | 2,41: (3,8 dB) | $0,19\lambda^2$ | $\gg \lambda$ | 200Ω | | |
| $\lambda/2$ -Schleifendipol | | 1,64: (2,1 dB) | $0,13\lambda^2$ | $\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$ | 290Ω | | |
| Schlitzantenne in Halbraum strahlend | | 3,28: (5,1 dB) | $0,26\lambda^2$ | — | $\approx 500\Omega$ | | |
| kleiner Rahmen, n -Windungen, beliebige Form | | 1,5: (1,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$ | $\frac{2\pi n A}{\lambda}$ | $\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$ | | |
| Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$ | | 1,5: (1,8 dB) | $\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$ | $\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$ | $19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$ | | |
| Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$ | | $\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$ | $\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12 l\lambda$ | — | — | | |
| Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$ | | $\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$ | $\frac{l\lambda}{4} = 0,25 l\lambda$ | — | — | | |
| einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$ | | $\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$ | ab | — | — | | |
| Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren | | $\approx 5 \cdot 10 / l\lambda$ | — | — | — | | |

9 Einheiten

| Symbol | Größe | Einheit |
|------------------|-------------------------------|--|
| A, W | Arbeit, Energie | $J = VAs = Ws$ |
| \vec{A} | mag. Vektorpotenzial | $\frac{Vs}{m} = \frac{T}{m} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$ |
| \vec{B} | mag. Flussdichte | $T = \frac{Vs}{m^2}$ |
| C | Kapazität | $F = \frac{As}{V}$ |
| \vec{D} | dielek. Verschiebung/Erregung | $\frac{As}{m^2}$ |
| e, q, Q | (Elementar-)ladung | $C = As$ |
| \vec{E} | elek. Feldstärke | $\frac{V}{m}$ |
| \vec{H} | mag. Feldstärke/Erregung | $\frac{A}{m}$ |
| \vec{J} | Stromdichte | $\frac{A}{m^2}$ |
| \vec{J}_F | Flächenstromdichte | $\frac{A}{m}$ |
| \vec{M} | Drehmoment | $J = Nm = VAs$ |
| F | Kraft | $\frac{kgm}{s} = N$ |
| R_{mag} | mag. Widerstand | $\frac{S}{s} = \frac{A}{Vs}$ |
| \vec{S} | Poynting-Vektor | $\frac{W}{m^2}$ |
| Z | Wellenwiderstand | Ω |
| δ_s | Eindringtiefe | m |
| ε | Dielektrizitätskonstante | $\frac{As}{Vm}$ |
| φ | elek. Skalarpotenzial | V |
| φ_m | mag. Skalarpotenzial | A |
| ρ | Raumladungsdichte | $\frac{As}{m^3}$ |
| ρ | spez. Widerstand | $\frac{\Omega}{m} = \frac{VA}{m}$ |
| κ, σ | elek. Leitfähigkeit | $\frac{S}{m} = \frac{A}{Vm}$ |
| λ | Wellenlänge | m |
| μ | Permiabilitätskonstante | $\frac{Vs}{Am}$ |
| Φ_e | elek. Fluss | $C = As$ |
| Φ_m | mag. Fluss | $Wb = \frac{T}{m^2}$ |