



OSTBAYERISCHE  
TECHNISCHE HOCHSCHULE  
REGENSBURG

# FORMELSAMMLUNG FELDER, WELLEN UND LEITUNGEN

Sommersemester 22

Name:

Matrikelnummer:

Letzte Änderung:

Lizenz:

Die Prinzen - Alles nur geklaut

MATNR

30. Juni 2022

GPLv3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 mathematische	1
1.2 Rechenregeln	1
1.3 Schnittwinkel zweier Vektoren	1
1.4 Logarithmische Maße	1
1.5 Randbedingung	1
1.6 Begriffe	1
1.7 Vergleich/Umrechnung	2
1.8 Kartesische Koordinaten	3
1.9 Zylinderkoordinaten	3
1.10 Kugelkoordinaten	4
<b>2 Maxwell'schen Gleichungen</b>	<b>5</b>
2.1 Integralsätze	5
<b>3 Felder</b>	<b>6</b>
3.1 E-Felder an Grenzflächen	6
3.2 Elektrostatik	6
3.2.1 Potential Gleichung	6
3.2.2 Green'sche Funktionen	6
3.3 Magnetostatik	6
3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte	6
3.3.2 Biot-Savart-Gesetz	6
3.3.3 Elektrischer Dipol	7
3.3.4 Magnetischer Dipol	7
3.4 Skineffekt	7
<b>4 Wellen</b>	<b>8</b>
4.1 Ausbreitung	8
4.1.1 Allgemein	8
4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)	8
4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika	8
4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust	8
4.1.5 Im guten Leiter	8
4.2 Übergang	9
4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust	9
4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)	9
4.3.1 Leistung	9
4.3.2 Leistung nach Dämpfung	9
4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert	9
4.4 d'Alembertsche Gleichung (allg.)	9
4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)	9
4.5.1 Zeitbereich	9
4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)	9
4.6 Wellenzahl	9
4.7 Wellenlänge	9
4.8 Phasengeschwindigkeit	10
4.8.1 Gruppengeschwindigkeit	10
4.9 Polarisation	10
4.10 Verlustlose Polarisation	10
4.11 Totalreflexion	10
4.12 Grenzwinkel	10
4.13 Brewster-/Polarisationswinkel	10
4.14 Senkrechter Einfall	11
4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Dielekt.	11
4.14.2 Spezialfall Medium 1 ist Luft	11
4.14.3 Spezialfall Medium 2 ist Luft	11
4.14.4 Spezialfall beide Medien NICHT magnetisch	11
4.14.5 Spezialfall Medium 2 idealer Leiter	11
4.15 Stehwellenverhältnis	11
4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)	12
4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)	12

<b>5</b>	<b>Leitungen</b>	<b>13</b>
5.1	Leitungsparameter . . . . .	13
5.1.1	Doppelleitung: . . . . .	13
5.1.2	Koaxial Leitung . . . . .	13
5.1.3	Parallele Platten . . . . .	13
5.2	Allgemeine Lösung Leitungsgleichung . . . . .	13
5.2.1	Verlustlose Übertragungsleitung . . . . .	14
5.2.2	vernachlässigbarer Widerstandsbelag . . . . .	14
5.2.3	vernachlässigbarer Leitwertbelag . . . . .	14
5.3	Übertragungsleitung mit Last . . . . .	14
5.3.1	Vorgehen Eingangswiderstand . . . . .	14
5.3.2	Reflexionsfaktor entlang einer Leitung . . . . .	14
5.3.3	Stehwellenverhältnis . . . . .	14
5.3.4	Position von Extrema . . . . .	14
5.3.5	Spezialfall: Angepasste Leitung . . . . .	15
5.3.6	Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung . . . . .	15
5.3.7	Spezialfall: Leerlaufende Leitung . . . . .	15
5.3.8	Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung . . . . .	15
5.4	Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Smith-Diagramm</b>	<b>16</b>
6.1	Allgemein . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>17</b>
7.1	Koaxial Leiter . . . . .	17
7.1.1	Wellenwiderstand . . . . .	17
7.1.2	Dämpfung . . . . .	17
7.2	Mikrostreifenleiter . . . . .	17
7.2.1	Effektive Permittivitätszahl . . . . .	17
7.2.2	Schmale Streifen . . . . .	17
7.2.3	Breite Streifen . . . . .	17
7.3	Hohlleiter . . . . .	17
7.4	VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Antennen</b>	<b>18</b>
8.1	Herz'scher Dipol . . . . .	18
8.1.1	Allgemein . . . . .	18
8.1.2	Nahfeld . . . . .	18
8.1.3	Fernfeld . . . . .	18
8.1.4	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .	18
8.1.5	Strahlungswiderstand . . . . .	18
8.2	Magnetischer Dipol . . . . .	18
8.2.1	Fernfeld . . . . .	18
8.2.2	Abgestrahlte Leistung im Fernfeld . . . . .	18
8.2.3	Nahfeld . . . . .	18
8.3	Lineare Antenne . . . . .	18
8.3.1	Dipolantenne . . . . .	19
8.4	Antennenkenngrößen . . . . .	19
8.4.1	Abgestrahlte Leistung . . . . .	19
8.4.2	Verlustleistung . . . . .	19
8.4.3	Wirkungsgrad . . . . .	19
8.4.4	Richtcharakteristik . . . . .	19
8.4.5	Richtfunktion/Richtfaktor . . . . .	19
8.4.6	Gewinn . . . . .	19
8.4.7	Wirksame Antennenfläche . . . . .	19
8.5	Bezugsantennen . . . . .	19
8.6	Senden und Empfangen . . . . .	19
8.6.1	Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß . . . . .	20
8.6.2	Leistungspegel/Freiraumpegel . . . . .	20
8.7	Antennentabelle . . . . .	21

# 1 Grundlagen

## 1.1 mathematische

### Divergenz/Rotation/Gradient

div: Vektor  $\rightarrow$  Skalar (Quelle / Senke)

rot: Vektor auf Vektorfeld (rot = 0 für E. erhaltendes Feld)

grad: Skalar-/Gradientenfeld  $\rightarrow$  Vektorfeld (Richtung stärkster Feldänderung)

$$\operatorname{div} \vec{G} = \nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{Volumen} \\ > 0 & \Rightarrow \text{Quelle} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Senke} \end{cases}$$

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} G = \nabla \cdot G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

## 1.2 Rechenregeln

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) &= (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - (\nabla \times \vec{g}) \cdot \vec{f} \\ \nabla \cdot (f\vec{g}) &= f(\nabla \cdot \vec{g}) + \vec{g} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (f\vec{g}) &= g(\nabla \cdot \vec{f}) + f(\nabla \cdot \vec{g}) \\ \nabla \times (f\vec{g}) &= \nabla f \times \vec{g} + f(\nabla \times \vec{g}) \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= 0 \Rightarrow \text{Gradientenfeld Quellenfrei} \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} &= 0 \Rightarrow \text{Wirbelfeld Quellenfrei} \end{aligned}$$

### Nabla Operator

$$\nabla = \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right)$$

Feldänderung bei Bewegung

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z \\ &= dG = \operatorname{grad} G \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

## 1.3 Schnittwinkel zweier Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{H} &= |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \frac{E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z}{|\vec{E}| \cdot |\vec{H}|} \end{aligned}$$

## 1.4 Logarithmische Maße

- dBm  $\hat{=}$  1mW
- dB $\mu$ V  $\hat{=}$  1 $\mu$ V
- dBmV  $\hat{=}$  1mV
- dBi  $\rightarrow$  Isotrop

Dezibel [dB]

$$\begin{aligned} X[\text{dB}] &= 20 \cdot \log \left( \frac{U_1}{U_2} \right) & X[\text{dB}] &= 10 \cdot \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \\ U_1 &= U_2 \cdot 10^{X/20\text{dB}} & P_1 &= P_2 \cdot 10^{X/10\text{dB}} \\ 1\text{dB} &\hat{=} & 0,1151\text{Np} \end{aligned}$$

Neper [Np]

$$\begin{aligned} X[\text{Np}] &= \ln \left( \frac{U_1}{U_2} \right) & X[\text{Np}] &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \\ U_1 &= U_2 \cdot e^X & P_1 &= P_2 \cdot e^{2X} \\ 1\text{Np} &\hat{=} & 8,686\text{dB} \end{aligned}$$

## 1.5 Randbedingung

Dirichlet-RB	Funktion nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an (Bsp.: $\rho_r = 5V$ )
Neumann-RB	Die Normalableitung der Fkt. nimmt an den Rändern einen bestimmten Wert an

## 1.6 Begriffe

	Begriff	Beschreibung
$\rho$	Raumladungsdichte	

## 1.7 Vergleich/Umrechnung

Kart.	Zyl.	Kug.
$x$	$r \cos \varphi$	$r \sin \vartheta \cos \varphi$
$y$	$r \sin \varphi$	$r \sin \vartheta \sin \varphi$
$z$	$z$	$r \cos \vartheta$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$r$	
$\arctan \frac{y}{x}$	$\varphi$	
$z$	$z$	
$dx \cos \varphi + dy \sin \varphi$	$dr$	
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$	$r d\varphi$	
$dz$	$dz$	
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$		$r$
$\arctan \frac{y}{x}$		$\varphi$
$\arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$		$\vartheta$
$dx \sin \vartheta \cos \varphi$ + $dy \sin \vartheta \sin \varphi$ + $dz \cos \vartheta$		$dr$
$dy \cos \varphi - dx \sin \varphi$		$r \sin \vartheta d\varphi$
$dx \cos \vartheta \cos \varphi$ + $dy \cos \vartheta \sin \varphi$ - $dz \sin \vartheta$		$r d\vartheta$

## 1.8 Kartesische Koordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(x; y; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Rechtssystem:

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E} = \Delta E_x \vec{e}_x + \Delta E_y \vec{e}_y + \Delta E_z \vec{e}_z \\ &= \left[ \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right] \vec{e}_x + \left[ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.9 Zylinderkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \varphi; z)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi; z) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

Linienelemente:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

Volumenelemente:

$$dv = r dr d\varphi dz$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \vec{D}_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vec{D}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{D}_z}{\partial z}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Laplace Operator:

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ \vec{E} &= \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{E_r}{r^2} \right] \vec{e}_r + \left[ \Delta E_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{E_\varphi}{r^2} \right] \vec{e}_\varphi + [\Delta E_z] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 1.10 Kugelkoordinaten

Skalarfeld:

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi)$$

Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Linienenelement:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2}$$

Volumenelement:

$$dv = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Gradient:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Divergenz:

$$\text{div } \vec{D} \equiv \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot D_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}$$

Rotation:

$$\text{rot } \vec{E} \equiv \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r E_\varphi}{\partial r} \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r E_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi$$

Laplace Operator:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Laplace Operator in Kugelkoordinaten, angewandt auf einen Vektor:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = & \left[ \Delta E_r - \frac{2}{r^2} E_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot E_\vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \Delta E_\vartheta - \frac{E_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\vartheta \\ & + \left[ \Delta E_\varphi - \frac{E_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

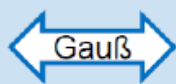
## 2 Maxwell'schen Gleichungen

### differentielle Form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

**Gaußsches Gesetz:** Das elektrische Feld ist ein Quellenfeld. Die Ladung  $Q$  bzw. die Ladungsdichte  $\rho$  ist Quelle des elektrischen Feldes.

### Integralform

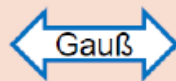


$$\oiint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \rho \cdot dV = Q(V)$$

Der (elektrische) Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  ist gleich der elektrischen Ladung in seinem Inneren.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Das magnetische Feld ist quellenfrei.  
Es gibt **keine magnetischen Monopole**.



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Der mag. Fluss durch die geschlossene Oberfläche  $\partial V$  eines Volumens  $V$  entspricht der magnetischen Ladung in seinem Inneren, nämlich Null, da es keine magnetischen Monopole gibt.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

**Induktionsgesetz:** Jede zeitlichen Änderung eines Magnetfeldes bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi_{\text{eing.}}}{dt}$$

Die induzierte Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  einer Fläche  $A$  ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

**Amperesches Gesetz:** Jeder Strom und jede zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes (Verschiebungsstrom) bewirkt ein magnetisches Wirbelfeld.



$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} + \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

Die mag. Umlaufspannung bzgl. der Randkurve  $\partial A$  der Fläche  $A$  entspricht dem von dieser Fläche eingeschlossenen Strom. (inkl. Verschiebungsstrom)

### Durchflutungssatz:

Elektrischer Strom ist Ursache für magnetische Wirbelfeld

$$\int_c \vec{H} d\vec{s} = \Theta = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \frac{d\Phi_e}{dt}$$

### Induktionsgesetz:

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld erzeugt ein Elektrisches Wirbelfeld

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = u_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

### Differentielle ohmsche Gesetz:

Bewegte elektrische Ladung erzeugt Magnetfeld

Bei isotropen Stoffen sind  $\epsilon$  u.  $\mu$  Skalare:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

### 2.1 Integralsätze

Fundamentalsatz der Analysis

Gauß: Vektorfeld das aus Oberfläche von Volumen strömt muss aus Quelle in Volumen

Stokes: innere Wirbel kompensieren  $\rightarrow$  Rand betrachten

$$\begin{aligned} \int_a^b \operatorname{grad} F \cdot d\vec{s} &= F(b) - F(a) \\ \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \cdot dV &= \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{a} \\ \iint_A \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{a} &= \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$



### 3 Felder

Materialgleichungen

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Feldunterscheidung

$$\vec{E}(x, y, z) \quad \hat{=} \quad \text{statisches Feld}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) \quad \hat{=} \quad \text{stationäres Feld}$$

$$\vec{E}(x, y, z, t) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad \hat{=} \quad \text{Welle}$$

#### 3.1 E-Felder an Grenzflächen

**Dielektrische Grenzfläche**

Querschichtung:  $D_{1n} = D_{2n}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung:  $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung:  $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

**Grenzfläche dielektrischer Leiter**

Längsschichtung:  $E_{1t} = E_{2t}$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Querschichtung:  $D_{1n} = \frac{Q}{A}$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q$$

**Grenzfläche an magn. Feldern**

Querschichtung:  $B_{1n} = B_{2n}$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$

Längsschichtung:  $H_{1t} = H_{2t}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

Schrägschichtung:  $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$

#### 3.2 Elektrostatik

• wirbelfreies Feld → Elektrische Ladungen sind Quellen des Feldes

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \rho}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = 0}$$

$$= \operatorname{rot} \operatorname{grad} E$$

##### 3.2.1 Potential Gleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

⇒ **Poisson-Gleichung** mit  $\rho = 0$

→ **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \varphi + \underbrace{\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi}_{=0, \text{ wenn homogen}} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon}$$

##### 3.2.2 Green'sche Funktionen

**Potential einer Punktladung**

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} \quad [V]$$

**E-Feld einer Punktladung**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

**D-Feld einer Punktladung**

$$\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \left[ \frac{As}{m^2} \right]$$

**Potentialfeld einer Ladungsverteilung**

mit  $\varphi(\infty) = 0$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

mit der Green'schen Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\varphi(x, y, z) = \iiint_{V'} G(\vec{r}' \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV'$$

#### 3.3 Magnetostatik

• Wirbelfeld, quellenfrei und hat immer geschlossene Feldlinien.

- Nach  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \rightarrow$  nur wirbelfrei wenn  $\vec{j} = 0$
- Damit Skalarpotential  $\varphi_m$  existiert muss  $\vec{H}$  wirbelfrei
- keine magnetischen Monopole  $\operatorname{grad} \vec{B} = 0$
- Vektorpotential  $\vec{A} =$  Maß für  $\Phi_{\text{magn}}$  durch Fläche  $A$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$= \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}$$

**Coulomb-Eichung**

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

##### 3.3.1 Vektorpotential in Abhängigkeit von der Stromdichte

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

##### 3.3.2 Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{s}'$$

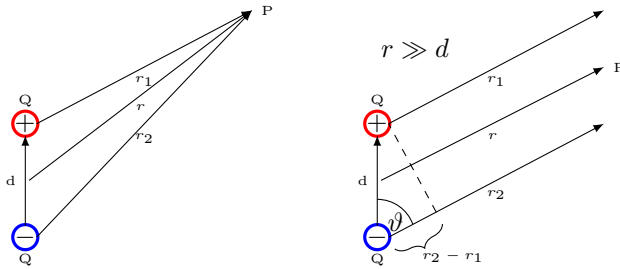
mit  $\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\vec{r}$ : Aufpunkt  $\vec{r}'$ : Quellpunkt

### 3.3.3 Elektrischer Dipol

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d}$$



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r^2}$$

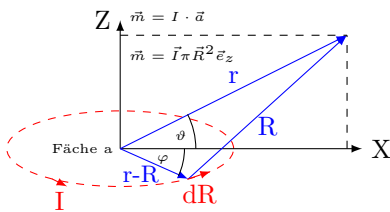
$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

$$\varphi \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

### 3.3.4 Magnetischer Dipol

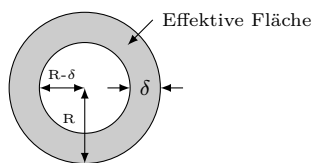


$I$  entlang Leiter

$$A(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

### 3.4 Skineffekt



$$\sigma/\kappa : \text{Leitfähigkeit [A/Vm]} = [1/\Omega\text{m}]$$

Äquivalente Leiterschichtdicke (Amp:  $A \cdot \frac{1}{e}$ ):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu\sigma f}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad [m]$$

Widerstand/Oberflächenwiderstand:

$$R_{AC} = \frac{l}{\sigma \cdot A_{\text{eff}}}$$

$$R_{DC} = \frac{l}{\sigma\pi R^2}$$

$$R_F = \frac{1}{\sigma\delta}$$

Feldstärke verglichen mit der Oberfläche:

$$H(x, t) = H_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

analog für  $E$ -Feld

Leistung verglichen mit der Oberfläche:

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \cdot E_0 \cdot e^{-x/\delta} \cdot H_0 \cdot e^{-x/\delta}$$

Amplitude und Phase bezogen auf  $\delta$ :

Amplitude:  $x = \delta \cdot \ln(\text{Dämpfung}[\ ])$

$$\text{Phase: } \varphi = -\frac{x}{\delta}$$

Effektive Fläche:

$$A_{\text{eff}} = A_{\text{ges}} - A_{\sigma} = R^2\pi - (R - \delta)^2\pi$$

$$= 2 \cdot \pi\delta \left( R - \frac{\delta}{2} \right)$$

Wenn die Länge nicht gegeben ist oder nach Wieviel % nimmt der Widerstand bei einer bestimmten Frequenz, kann dies mit der folgenden Formel berechnet werden:

Bessel-Funktion:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}x^4 & \text{für } x < 1 \\ x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{X_{AC}}{R_{DC}} = \begin{cases} x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right) & \text{für } x < 1 \\ x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{r_0}{2\delta} \quad r_0 \hat{=} \text{Außendurchmesser}$$

## 4 Wellen

- Ausbreitungsphänomen von E und H
- Ausbreitungsgeschw. kleiner  $c_0$
- raumzeitlicher Vorgang  $\cos(\omega t - \beta z)$
- Energie- ohne Materietransport
- Poyntingvektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  Einheit[S] =  $\frac{W}{m^2}$   
Falls  $\vec{E} \perp \vec{H}$  und  $\vec{S} \perp \vec{E}$  und  $\vec{S} \perp \vec{H}$

### Wellengleichung

$$\vec{E} = \underbrace{E_0}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{-\alpha z}}_{\text{Dämpfung}} \cdot \underbrace{\cos(\omega t - \beta z)}_{\substack{\text{positive z-Richtung} \\ \text{Zeit- und Raumabhängigkeit}}}$$

Analog für H-Feld

### Fortpflanzungskonstante $\gamma$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

$\alpha$  : Dämpfungskonstante [Np/m]

$\beta$  : Phasenkonstante [rad/m]

$v_p$  : Phasengeschwindigkeit [m/s]

$v_g$  : Gruppengeschwindigkeit [m/s]

$\lambda$  : Wellen [m]

## 4.1 Ausbreitung

### 4.1.1 Allgemein

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad E_2 = E_1 e^{-\alpha z}$$

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

### 4.1.2 Im leeren Raum(Vakuum)

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f}$$

$$v_p = c_0$$

$$\underline{Z}_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

### 4.1.3 Im verlustlosen/idealen Dielektrika

verlustlos:  $\sigma = 0$ , maximale Wirkleistung  
 $Z_F$  rein reel  $\rightarrow$  ebene Welle

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

### 4.1.4 Im Dielektrika mit geringem Verlust

geringer Verlust:  $0 < \sigma \ll \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{2} \cdot Z_{F0}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2}$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( 1 - \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^{-1/2} \approx Z_{F0} \left( 1 + \frac{j\sigma}{2\omega \varepsilon} \right)$$

### 4.1.5 Im guten Leiter

geringer Verlust:  $\sigma \gg \omega\varepsilon$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \sim \sqrt{f}$$

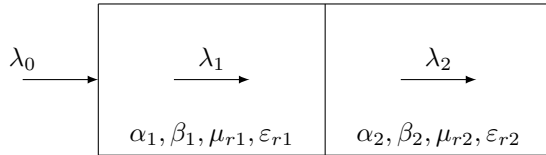
$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = 2\pi\delta$$

$$v_p = \frac{2\pi}{\beta} = \omega\delta$$

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \approx \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta}$$

## 4.2 Übergang

### 4.2.1 Zwischen Dielektrika mit geringem Verlust



$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} = \frac{\lambda_1 \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$Z_{F1} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}$$

$$Z_{F2} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

### 4.3 Energie und Poyntingvektor (Energieflussdichte)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot E \cdot H =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{Z_{F0}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot H^2 \cdot Z_{F0}$$

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

$$S = \frac{P}{A_{\text{Fläche}}}$$

#### 4.3.1 Leistung

$$P = \iint \vec{S}_{\text{av}} d\vec{a}$$

$$W_M = 1/2 \cdot \mu \cdot H^2$$

$$W_E = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$

#### 4.3.2 Leistung nach Dämpfung

$$P_1 = P_0 \cdot e^{-2\alpha z}$$

#### 4.3.3 Leistung vom Kabel transportiert

$$P = \frac{\hat{U}^2}{2 \cdot Z_L}$$

### 4.4 d'Alambertsche Gleichung (allg.)

$$\Delta \vec{E} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Isolator, ideales Dielektrikum, Nichtleiter  $\kappa = 0$

$$\Delta \vec{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

sehr gute Leiter

$$\Delta \vec{E} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} = \kappa \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

### 4.5 Helmholtz-Gleichungen (Frequenzbereich)

$$\Delta \vec{E} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{E} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{H} - (\kappa \mu \cdot j\omega - \epsilon \mu \cdot \omega^2) \cdot \vec{H} = 0$$

#### 4.5.1 Zeitbereich

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

#### 4.5.2 Frequenzbereich (harmonisch)

$$\Delta \vec{E} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Delta \vec{H} + \epsilon \mu \omega^2 \cdot \vec{H} = 0$$

Zeitabhängigkeit harmonisch:

$$\Delta \vec{H} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{H}$$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E} + \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon}$$

keine Raumladung  $\rho = 0$

$$\Delta \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - \omega^2 \epsilon \mu) \vec{E}$$

Ebene Wellen

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E}$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z^2} = j\omega \mu (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{H}$$

### 4.6 Wellenzahl

Im Vakuum:  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi f}{v_p} = |\vec{k}|$$

$$= \frac{\omega \cdot n}{c_0} = n \cdot k_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}} \cdot k_0 = k_r \cdot k_0$$

### 4.7 Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{v_p}{f} = [m]$$

$$= \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{n \cdot k_0}$$

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

## 4.8 Phasengeschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt} = v_p = c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad v_{p, \text{Medium} \leq c_0}$$

### 4.8.1 Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Wegstück der Wellengruppe}}{\text{Laufzeit der Wellengruppe}}$$

$$E_1(z, t) = E \cos((\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z)$$

$$E_2(z, t) = E \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z)$$

↓

$$E(z, t) = 2E \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t - \beta_0 z)}_{\text{Grundfrequenz } \omega} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)}_{\text{Einhüllende } \Delta\omega}$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$$

## 4.9 Polarisation

Lineare	wenn der Endpunkt des E-Vektors eine Linie beschreibt	$H$ oder $E$
Elliptische	Endpunkt des E-Vektors eine Ellipse beschreibt	$E \neq H$
Kreisförmige	der Endpunkt des E-Vektors einen Kreis beschreibt	$E = H$

## 4.10 Verlustlose Polarisation

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$r_s = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_i}$$

$$t_s = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}$$

$$r_p = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos \theta_t}$$

$$t_p = \frac{2 \cdot \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} \cdot \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_{r1}} \cdot \cos \theta_t}$$

## 4.11 Totalreflexion

$$\sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2} \mu_{r2}}}{\varepsilon_{r1} \mu_{r1}}$$

## 4.12 Grenzwinkel

$$\alpha_g = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} \right)$$

## 4.13 Brewster-/Polarisationswinkel, $r = 0$

- Snelliusche Brechungsgesetz
- Paralleler Reflexionskoeffizient:

$$\mu_{r1} = \mu_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\mu_1(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Senkrechter Reflexionskoeffizient:

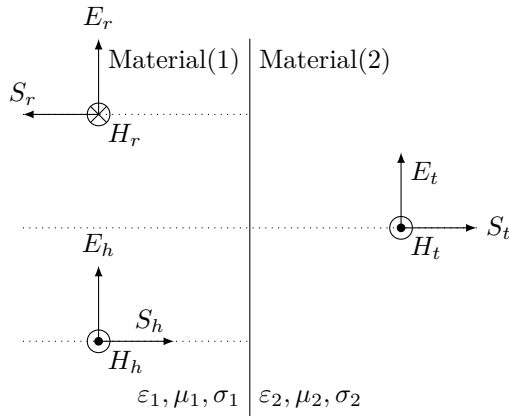
$$\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2}$$

$$\sin \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2(\mu_2 \varepsilon_1 - \mu_1 \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\mu_2^2 - \mu_1^2)}}$$

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

$$\frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} = \frac{k_h}{k_g} = \sqrt{\frac{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_{p,2}}{v_{p,1}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

#### 4.14 Senkrechter Einfall $\theta_h = 0$



$$t = \frac{2 \cdot Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} \quad r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$0 < t < 2 \quad 0 < |r| < 1$$

Elektrisches Feld:

$$E_t = t \cdot E_h \\ E_r = r \cdot E_h$$

$$E_t = E_h + E_r \\ t \cdot E_h = E_h + r \cdot E_h \\ t = 1 + r$$

Magnetisches Feld:

$$H_t = t \cdot H_h \\ H_r = r \cdot H_h$$

$$H_t = H_h + H_r \\ \frac{t \cdot E_h}{Z_{F2}} = \frac{E_h}{Z_{F1}} - \frac{r \cdot E_h}{Z_{F1}} \\ \frac{t}{Z_{F2}} = \frac{1}{Z_{F1}} - \frac{r}{Z_{F1}}$$

##### 4.14.1 Senkrechter Einfall ideales/verlustl. Di-elekt. $\sigma = 0$

$$\text{reel: } Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\text{imaginär: } \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$r = \frac{Z_{F2} - Z_{F1}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}} \\ t = \frac{2Z_{F2}}{Z_{F1} + Z_{F2}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r1}}}$$

##### 4.14.2 Spezialfall Medium1 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r1} = \epsilon_{r1} = 1} \\ r = \frac{\sqrt{\mu_{r2}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \\ t = \frac{2\sqrt{\mu_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r2}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.3 Spezialfall Medium2 ist Luft

$$\boxed{\mu_{r2} = \epsilon_{r2} = 1} \\ r = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\mu_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\mu_{r1}}} \\ t = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

##### 4.14.4 Spezialfall beideMedien NICHT magnetisch

$$\boxed{\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1} \\ r = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} - \sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}} \\ t = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} + \sqrt{\epsilon_{r2}}}$$

##### 4.14.5 Spezialfall Medium2 idealer Leiter

$$Z_{F2} = 0 \\ r = -1 \\ t = 0 \\ \bar{S} = 0 \\ E_1 = -2j \cdot E_h \cdot \sin(\beta_1 z) \\ H_1 = 2 \cdot H_h \cdot \cos(\beta_1 z)$$

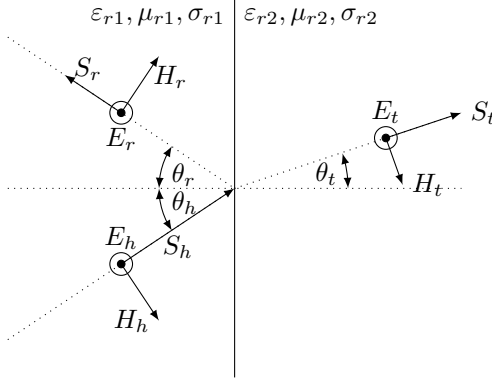
##### StehendeWelle

$$\rightarrow H_{max} \text{ und } E_{min} \text{ bei } n \cdot \lambda/2 \\ \rightarrow H_{min} \text{ und } E_{max} \text{ bei } (2n-1) \cdot \lambda/4 \\ \rightarrow 90^\circ \text{ Phasenverschiebung}$$

#### 4.15 Stehwellenverhältnis

$$SWR = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{E_h + E_r}{E_h - E_r} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad 1 < s < \infty$$

#### 4.16 Senkrechte (E-Feld) Polarisation (H-Feld parallel)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

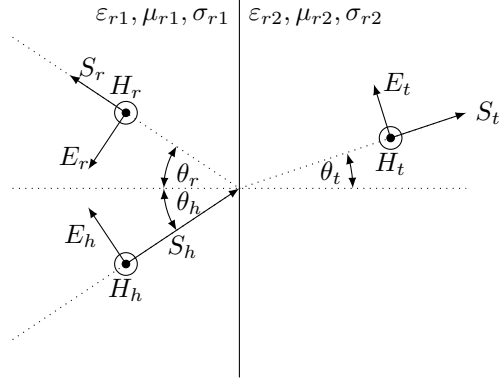
$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_s &= r_{es} = r_{ms} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h - Z_{F1} \cdot \cos \theta_t}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= \frac{\cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h}{\cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}} - \sin^2 \theta_h} \\ t_{ms} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 - r_s) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} \cdot t_{es} \\ t_{es} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_h + Z_{F1} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 + r_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_s \cdot E_h \\ E_t &= t_{es} \cdot E_h \\ H_r &= r_s \cdot H_h \\ H_t &= t_{ms} \cdot H_h \end{aligned}$$

#### 4.17 Parallel (E-Feld) Polarisation (H-Feld senkrecht)



$$\text{mit } Z_{F0} = 120\pi \approx 377\Omega$$

$$Z_{Fn} = Z_{F0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{rn}}}$$

$$\frac{Z_{F1}}{Z_{F2}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

$$n : \text{Brechungsindex} \quad ; \quad \theta_h = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_h} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \cdot \sin \theta_h$$

- magnetischer/elektrischer Reflexionsfaktor [1]
- magnetischer Transmissionsfaktor [1]
- elektrischer Transmissionsfaktor [1]

$$\begin{aligned} r_p &= r_{ep} = r_{mp} = \\ &= \frac{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t - Z_{F1} \cdot \cos \theta_h}{Z_{F2} \cdot \cos \theta_t + Z_{F1} \cdot \cos \theta_h} = \\ &= \frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_h - \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h}{\epsilon_{r2} \cos \theta_h + \sqrt{\epsilon_{r2}\epsilon_{r1}} - \epsilon_{r1}^2 \sin^2 \theta_h} \\ t_{mp} &= Z_{F1} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= 1 - r_p \\ t_{ep} &= Z_{F2} \cdot \frac{2 \cdot \cos \theta_h}{Z_{F1} \cdot \cos \theta_h + Z_{F2} \cdot \cos \theta_t} \\ &= (1 + r_p) \cdot \frac{\cos \theta_h}{\cos \theta_t} \\ &= \frac{Z_{F2}}{Z_{F1}} \cdot t_{mp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_r &= r_p \cdot E_h \\ E_t &= t_{ep} \cdot E_h \\ H_r &= r_p \cdot H_h \\ H_t &= t_{mp} \cdot H_h \end{aligned}$$

## 5 Leitungen

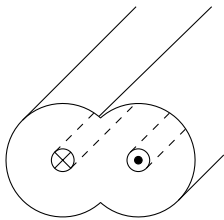
Medium	C (pF/m)	L (nH/m)	v (m/μs)	Z (Ω)	R for f ≤ 1kHz (mΩ/m)
RG58/U Coaxial Cable	93.5	273	198	54	53
RG58C/U Coaxial Cable	101	252	198	50	50
RG59B/U Coaxial Cable	72.0	405	185	75	45
CAT-5 Twisted Pair (Solid)	49.2	495	203	100	180
Vacuum	8.85	1260	299	377	
Water	708	1260	34	42	[3]

### 5.1 Leitungsparameter

$\sigma$  = Leitwert des Dielektr.       $\sigma_c$  = Leitwert des Leiters

#### 5.1.1 Doppelleitung:

$a$  = Leiter Radius       $d$  = Abstand zw. den Leitern



$R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$
$G = \frac{\pi \sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$
$C = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$

#### 5.1.3 Parallele Platten

$w$  = Platten Breite       $d$  = Abstand zw. Platten

Für Sinus-Anregung:

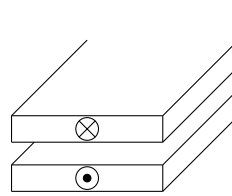
$$I = \frac{U}{Z_L} = \underbrace{\frac{U_0}{Z_L}}_{I_0} \cdot e^{-j\beta z} \cdot e^{j\omega t}$$

$$U = \int \vec{E} d\vec{s} \stackrel{w \gg d}{\approx} E \cdot d \rightarrow E = \frac{U_0}{d} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

$$I = \oint \vec{H} d\vec{s} = H \cdot w \rightarrow H = \frac{I_0}{w} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{I}{2\pi r} \cdot Z_F \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(2b/2a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$



$R = \frac{2}{w \delta \sigma}$
$L = \frac{\mu d}{w}$
$G = \frac{\sigma w}{d}$
$C = \frac{w \varepsilon}{d}$

Für beliebige Leitergeometrie gelten folgende Zusammenhänge:

$$LC = \mu \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

**Leitungen gehen HIN und ZURÜCK!!!  
Länge verdoppeln!!!**

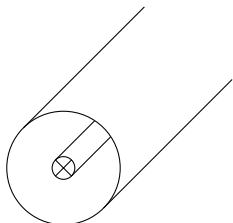
#### 5.1.2 Koaxial Leitung

$a$  = innen Radius       $b$  = außen Radius

$$\vec{H}(r, z) = \frac{I}{2\pi r} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(r, z) = \frac{I}{2\pi r} \cdot Z_F \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{\hat{U}}{r \cdot \ln(2b/2a)} \cdot e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_r$$



$R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]$
$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$
$G = \frac{2\pi \sigma}{\ln(b/a)}$
$C = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln(b/a)}$

### 5.2 Allgemeine Lösung Leitungsgleichung

$$\underline{U}(z) = U_h e^{\gamma z} + U_r e^{-\gamma z} = U_h e^{\gamma d} + U_r e^{-\gamma d}$$

$$\underline{I}(z) = I_h e^{\gamma z} + I_r e^{-\gamma z} = \frac{U_h}{Z_L} e^{\gamma d} - \frac{U_r}{Z_L} e^{-\gamma d}$$

$$\underline{Z}_L = \frac{U_h}{I_h} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{1 + \frac{RG}{j^2 \omega^2 LC} + \frac{G}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega L} + 1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

$$l_{\text{elektr.}} = \beta \cdot l$$

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \cdot \varepsilon^2}} + 1 \right)}$$





### 5.3.5 Spezialfall: Angepasste Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= Z_L = Z(z) \\
 r_A &= 0 \quad \rightarrow \text{reflexionsfrei} \\
 \text{SWR} &= 1 \\
 U(z) &= U_h \cdot e^{j\beta z} \\
 I(z) &= I_h \cdot e^{j\beta z} \\
 &= \frac{U_h}{Z_L} \cdot e^{j\beta z}
 \end{aligned}$$

### 5.3.6 Spezialfall: Kurzgeschlossene Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= 0 \\
 Z(z) &= jZ_L \cdot \tan(\beta z) \quad \rightarrow \text{rein imaginär} \\
 r_A &= -1 \\
 \text{SWR} &= \infty \\
 U(z) &= U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \quad \rightarrow U(z=0) = 0 \\
 I(z) &= U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \quad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2U_h}{Z_L}
 \end{aligned}$$

### 5.3.7 Spezialfall: Leerlaufende Leitung

$$\begin{aligned}
 Z_A &= \infty \\
 Z(z) &= -jZ_L \cdot \cot(\beta z) \quad \rightarrow \text{rein imaginär} \\
 r_A &= 1 \\
 \text{SWR} &= \infty \\
 U(z) &= U_h \cdot 2 \cos(\beta z) \quad \rightarrow U(z=0) = 0 \\
 I(z) &= U_h \cdot 2j \sin(\beta z) \quad \rightarrow I(z=0) = I_A = \frac{2 \cdot U_h}{Z_L}
 \end{aligned}$$

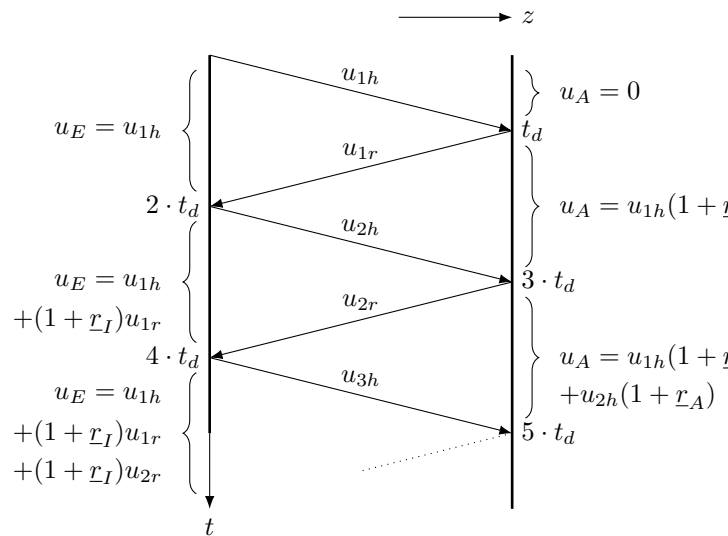
### 5.3.8 Spezialfall: Ohm'sch abgeschlossene Leitung

$$r_A = \text{reell}$$

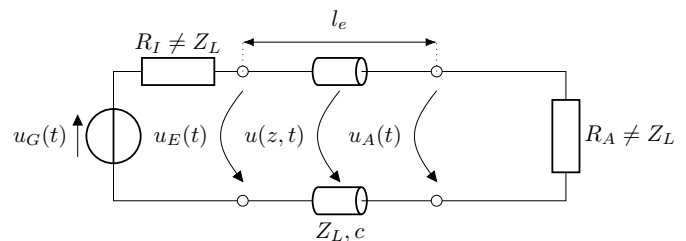
$$\begin{aligned}
 \underline{R_A > Z_L} &\rightarrow \theta_r = 0 \rightarrow r_A \text{ ist negativ} \\
 &\rightarrow z_{\max} = \frac{\lambda}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{R_A < Z_L} &\rightarrow \theta_r = \pi \\
 &\rightarrow z_{\min} = \frac{\lambda}{2} \cdot n
 \end{aligned}$$

## 5.4 Mehrfachreflexionen bei fehlender Anpassung



$$\begin{aligned}
 u_{1r} &= r_A \cdot u_{1h} \\
 u_{2h} &= r_I \cdot u_{1r} = r_I \cdot r_A \cdot u_{1h} \\
 u_{2r} &= r_A \cdot u_{2h} = r_I \cdot r_A^2 \cdot u_{1h} \\
 u_{3h} &= r_I \cdot u_{2r} = r_I^2 \cdot r_A^2 \cdot u_{1h}
 \end{aligned}$$



$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsanfang: } r_I = \frac{R_I - Z_L}{R_I + Z_L}$$

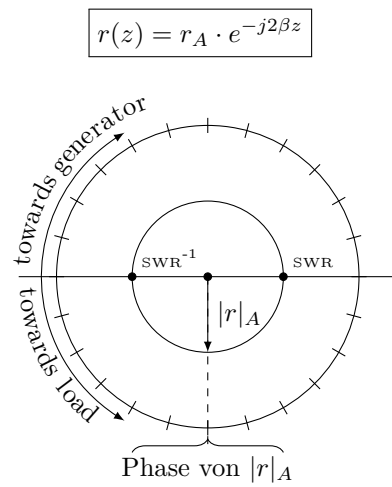
$$\text{Reflexionsfaktor Leitungsende: } r_A = \frac{R_A - Z_L}{R_A + Z_L}$$

$$\text{Signallaufzeit: } t_d = \frac{l}{c_0} \cdot \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

$$\text{Hinlaufende Welle } u_{1h} = \hat{u}_G \cdot \frac{Z_L}{Z_L + R_I}$$

## 6 Smith-Diagramm

### 6.1 Allgemein



$$\underline{z}_n = \frac{\underline{Z}_n}{Z_L}$$

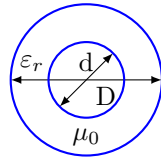
$$\underline{r}_n = \frac{\underline{Z}_n - Z_L}{\underline{Z}_n + Z_L} = \frac{\underline{z}_n - 1}{\underline{z}_n + 1} = \frac{1 - \underline{y}_n}{1 + \underline{y}_n}$$

$$m = \frac{1 - |\underline{r}|}{1 + |\underline{r}|}$$

## 7 Wellenleiter

### 7.1 Koaxial Leiter

#### 7.1.1 Wellenwiderstand



$D$  = Außendurchmesser  
 $d$  = Innendurchmesser

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \ln \frac{D}{d}$$

#### 7.1.2 Dämpfung

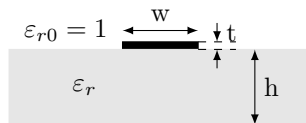
Ohm'sche Verluste  $R \ll \omega L$

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{\frac{f \cdot \mu}{\pi \cdot \sigma}}}{120\Omega} \cdot \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{D} \cdot \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

Dielektrische Verluste  $G \ll \omega C, \tan \delta = (G/\omega C)$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\epsilon_r} \cdot \tan \delta \cdot \frac{f}{c_0}$$

### 7.2 Mikrostreifenleiter



#### 7.2.1 Effektive Permittivitätszahl

Unterschiedliche Phasengeschwindigkeit  $\rightarrow$  Dispersion

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2\sqrt{1 + 10 \cdot \frac{h}{w}}}$$

Je größer  $\frac{w}{h}$  desto mehr nähert sich  $\epsilon_{r,\text{eff}}$  an  $\epsilon_r$  und

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}} \cdot \mu_{r,\text{eff}}}}$$

#### 7.2.2 Schmale Streifen

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right)$$

#### 7.2.3 Breite Streifen

$$Z_L = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \cdot \frac{1}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)^6}$$

### 7.3 Hohlleiter

$$f_c = \frac{c_0}{2a}$$

### 7.4 VSWR (Voltage Standing Wave Ratio) und Return Loss

$$s = \text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \geq 1$$

$$|r| = \frac{s - 1}{s} + 1$$

$$\alpha_r = -20 \log(r) \text{ dB}$$

Mismatch Loss

$$ML = -10 \log(1 - r^2) \text{ dB}$$

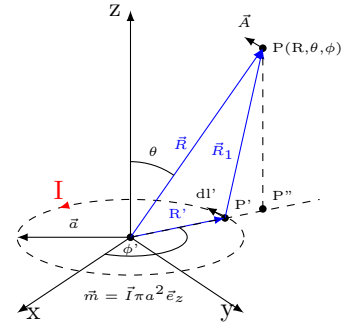
## 8 Antennen

### 8.2 Magnetischer Dipol

#### 8.1 Herz'scher Dipol

##### 8.1.1 Allgemein

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{2\pi} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{Z_F I_0 \Delta l' \beta^2}{4\pi} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta\end{aligned}$$



##### 8.1.2 Nahfeld(Fresnel-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \gg 1 \text{ oder } \beta R \ll 1$$

Überwiegend **Blindleistungsfeld**, da  $E$  zu  $H$   $90^\circ$  phasenverschoben

$$\begin{aligned}\vec{H} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi R^2} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &\approx \frac{I_0 \Delta l'}{2\pi j\omega \epsilon R^3} \cos \theta \cdot \vec{e}_R \\ &\quad + \frac{I_0 \Delta l'}{4\pi j\omega \epsilon R^3} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

##### 8.1.3 Fernfeld(Fraunhofer-Zone):

$$\frac{\lambda}{2\pi R} \ll 1 \text{ oder } \beta R \gg 1$$

Überwiegend **Wirkleistungsfeld**,  $\vec{S}$  nach außen somit Kugelwelle

mit  $\eta = Z_{F0}$

$$\begin{aligned}H &\approx j \frac{\beta I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ E &\approx j \frac{\beta Z_F I_0 \Delta l'}{4\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

##### 8.1.4 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_{F0} I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{12\pi} \\ &= \frac{I_0^2 Z_F \pi}{3} \cdot \frac{\Delta l'^2}{\lambda^2} \\ &= 40\pi^2 \Omega \cdot \left( \frac{I_0 \Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F I_0^2 \beta^2 (\Delta l')^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

##### 8.1.5 Strahlungswiderstand

$$\begin{aligned}R_S &= \frac{2}{3} \pi Z_F \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2 \\ &= 80\pi^2 \Omega \left( \frac{\Delta l'}{\lambda} \right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu m}{4\pi R^2} (1 + j\beta R) e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ \Delta l &\rightarrow \beta \pi a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{2\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \cos \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_R \\ &= -\frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi Z_{F0}} e^{-j\beta R} \cdot \sin \theta \left( \frac{1}{(j\beta R)} + \frac{1}{(j\beta R)^2} + \frac{1}{(j\beta R)^3} \right) \vec{e}_\theta \\ \vec{E} &= \frac{j\omega \mu \beta^2 m}{4\pi} e^{-j\beta R} \sin \theta \left( \frac{1}{j\beta R} + \frac{1}{(j\beta R)^2} \right) \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

##### 8.2.1 Fernfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx -\frac{\beta m \omega \mu}{4\pi R Z_{F0}} e^{-j\beta R} \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

##### 8.2.2 Abgestrahlte Leistung im Fernfeld

$$\begin{aligned}P_{\text{rad}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{12\pi} \\ &= \frac{m^2 \mu \omega^4}{12\pi v_p^3} \\ S_{\text{av}} &= \frac{Z_F \beta^4 m^2}{32\pi^2 R^2} \cdot \sin^2 \theta \cdot \vec{e}_R \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}\end{aligned}$$

##### 8.2.3 Nahfeld

$$\begin{aligned}E &\approx -\frac{j m \omega \mu}{4\pi R^2} \sin \theta \cdot \vec{e}_\phi \\ H &\approx \frac{m}{4\pi R^3} (2 \cos \theta \cdot \vec{e}_R + \sin \theta \cdot \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

### 8.3 Lineare Antenne

$$I(z') = I_0 \cdot \sin \left[ \beta \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right]$$

### 8.3.1 Dipolantenne

$$\vec{H} = j \cdot \frac{I_0}{2\pi R} \cdot e^{-j\beta R} \cdot \frac{\cos\left[\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cos\theta\right] - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\vec{E} = H \cdot Z_F \cdot \vec{e}_\theta$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_{Send}}{R_S}}$$

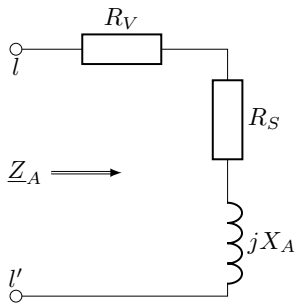
Die mittlere Strahlungsleistungsdichte

$$\vec{S}_{av} = \frac{Z_F I_0^2}{8\pi^2 R^2} \left( \frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\sin\theta} \right)^2 \cdot \vec{e}_R$$

Die gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{Z_F I_0^2}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\left( \cos\left(\frac{\beta L}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\beta L}{2}\right) \right)^2}{\sin\theta} \cdot \vec{e}_\theta$$

## 8.4 Antennenkenngrößen



$Z_A$  := Antennenimpedanz  
 $R_V$  := Verlustwiderstand  
 $R_S$  := Strahlungswiderstand  
 $X_A$  := Antennenblindwiderstand  
 $D$  := Directivity/Richtfaktor  
 $G$  := Gain/Gewinn  
 $A_{eff}$  := Wirksame Antennenfläche

### 8.4.1 Abgestrahlte Leistung

$$P_S = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_S$$

### 8.4.2 Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{2} \cdot I_A^2 \cdot R_V$$

### 8.4.3 Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V}$$

### 8.4.4 Richtcharakteristik

$C_i \triangleq$  isotroper Kugelstrahler als Bezugsgröße in Hauptabstrahlrichtung

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_{\max}} = \frac{U(\varphi, \vartheta)}{U_{\max}} \quad 0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$$

$$C_i(\vartheta, \varphi) = \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_i} = \frac{H(\vartheta, \varphi)}{H_i} \quad C_i > 1$$

### 8.4.5 Richtfunktion/Richtfaktor

In [dB] angeben !

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_i}$$

$$D = \max\{D(\vartheta, \varphi)\} = \frac{S_{\max}}{S_i}$$

$$D(\vartheta, \varphi) = C_i^2(\vartheta, \varphi) = D \cdot C^2(\vartheta, \varphi)$$

### 8.4.6 Gewinn

$$G = \eta \cdot D \quad [\text{dB}]$$

### 8.4.7 Wirksame Antennenfläche

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G = \frac{Z_{F0}}{4R_S} \cdot l_{eff}^2$$

## 8.5 Bezugsantennen

$$g = 10 \cdot \log(G) [\text{dB}]$$

mit  $P_0$  : Eingangsleistung der Antenne

### G → Bezugsantenne:

Elementardipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,50 \rightarrow g = 1,76 \text{ dBi}$$

Halbwellendipol zu Kugelstrahler

$$D = 1,64 \rightarrow g = 2,15 \text{ dBi}$$

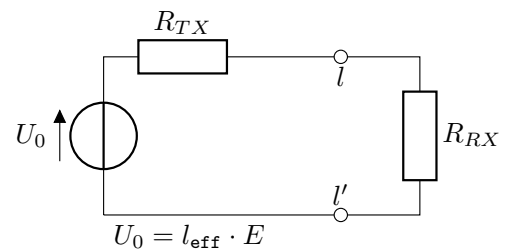
### EIRP: Equivalent Isoropic Radiated Power

$$\text{EIRP} = P_0 \cdot G_i [\text{dB}]$$

### ERP: Equivalent Radiated Power (verlustloser Halbwellendipol)

$$\text{ERP} = P_0 \cdot G_d [\text{dBd}]$$

## 8.6 Senden und Empfangen



Senden = transmit = TX

Empfangen = receive = RX

$$\begin{aligned} \frac{P_{RX}}{P_{TX}} &= A_{eff,RX} \cdot A_{eff,TX} \cdot \frac{1}{\lambda^2 r^2} \\ &= D_{i,RX} \cdot \eta_{RX} \cdot D_{i,TX} \cdot \eta_{TX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \end{aligned}$$

$$A_{eff}(\theta) = G_{RX} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \overbrace{\frac{3}{2} \cdot \sin^2 \theta}^{D_{i,\theta}}$$

$$P_{RX} = S_{RX} \cdot A_{eff}$$

$$= P_{TX} \cdot G_{TX} \cdot G_{RX} \cdot \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2$$

**8.6.1 Freiraumdämpfung/Freiraumdämpfungsmaß**

$$F = \frac{P_{TX}}{P_{RX}} \cdot \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad [1]$$

$$a_0 = 20 \lg \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) = 20 \lg \left( \frac{4\pi df}{c_0} \right) \quad [\text{dB}]$$

**8.6.2 Leistungspegel/Freiraumpegel**

$$L = 10 \lg \left( \frac{P}{1\text{mW}} \right) \quad [\text{dBm}]$$

$$L_{RX} = L_{TX} + g_{TX} + g_{RX} - a_0 \quad [\text{dB}]$$

## 8.7 Antennentabelle

Antennenart	Darstellung, Belegung	Richtfaktor, Gewinn linear; (in dB)	wirksame Antennenfläche	effektive Höhe	Strahlungs-Widerstand	vertikales Richtdiagramm (3-dB-Bereich)	horizontales Richtdiagramm
isotrope Antenne	fiktiv	1: (0 dB)	$\frac{\lambda^2}{4\pi} = 0,08\lambda^2$	—	—		
Hertzscher Dipol, Dipol mit Endkapazität		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$l$	$80 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne mit Dachkapazität auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$h$	$160 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
kurze Antenne auf leitender Ebene $h \ll \lambda$		3: (4,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{16\pi} = 0,06\lambda^2$	$\frac{h}{2}$	$40 \left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/4$ -Antenne auf leitender Ebene		3,28: (5,1 dB)	$0,065\lambda^2$	$\frac{\lambda}{2\pi} = 0,16\lambda$	$40\Omega$		
kurzer Dipol $l \ll \lambda$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{l}{2}$	$20 \left(\frac{\pi l}{\lambda}\right)^2 \Omega$		
$\lambda/2$ -Dipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{\lambda}{\pi} = 0,32\lambda$	$73\Omega$		
$\lambda$ -Dipol		2,41: (3,8 dB)	$0,19\lambda^2$	$\gg \lambda$	$200\Omega$		
$\lambda/2$ -Schleifendipol		1,64: (2,1 dB)	$0,13\lambda^2$	$\frac{2\lambda}{\pi} = 0,64\lambda$	$290\Omega$		
Schlitzantenne in Halbraum strahlend		3,28: (5,1 dB)	$0,26\lambda^2$	—	$\approx 500\Omega$		
kleiner Rahmen, $n$ -Windungen, beliebige Form		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{2\pi n A}{\lambda}$	$\frac{31000 n^2 (A/m)^2}{(\lambda/m)^4}$		
Spulenantenne auf langem Ferritstab $l \gg D$		1,5: (1,8 dB)	$\frac{3\lambda^2}{8\pi} = 0,12\lambda^2$	$\frac{\pi^2 n \mu_r D^2}{2\lambda}$	$19100 n^2 \mu_r^2 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^4$		
Linie aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{4}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{8} \approx 0,12\lambda$	—	—		
Zeile aus Hertzschen Dipolen $l \gg \lambda$		$\approx \frac{8}{3} \frac{l}{\lambda}$	$\frac{l\lambda}{4} = 0,25\lambda$	—	—		
einseitig strahlende Fläche $a \gg \lambda, b \gg \lambda$		$\approx \frac{6,5 \cdot 10^6 ab}{\lambda^2}$	$ab$	—	—		
Yagi-Uda-Antenne mit 4 Direktoren		$\approx 5 \cdot 10 / l\lambda$	—	—	—		