Obliczenia naukowe

Sprawozdanie z listy nr 4 na laboratoria

Oskar Makowski

Grupa wtorek parzysty 18.55-20.35

## 1. Zadanie 1

### 1.1 Opis problemu

Zagadnieniem do rozwiązania jest problem interpolacji wielomianu. Otrzymany wielomian ma spełniać warunki interpolacji tzn.

1. $p(x_i) = f(x_i)\ dla\ 0 \leq i\ \leq n$
2. $p\ \in\ \Pi_n$

Wiadomo, że wielomian $p$ można przedstawić w postaci Newtona $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x)$, gdzie $q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$. Z faktu, że $p$ spełnia warunki interpolacji, wynika układ równań, z którego można wyznaczyć wartości $c_k$. Należy zauważyć, że $c_k$ zależy jedynie od węzłów $x_0, x_1, \dots, x_k$, co oznaczane jest przez $c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Jest to iloraz różnicowy rzędu $k$ dla funkcji $f$ i wymienionych węzłów. Ilorazy różnicowe wyższych rzędów spełniają równość $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$. Oczywiście $f[x_i] = f(x_i)$ dla $0 \leq i \leq n$.

Celem zadania jest implementacja funkcji obliczającej ilorazy różnicowe.

### 1.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $x$ oraz $f$ będące odpowiednio wektorem długości $n+1$ zawierającym węzły i wektorem długości $n+1$ zawierającym wartości interpolowanej funkcji w węzłach.

Wstępnie wartości wektora $f$ są kopiowane do osobnego wektora stanowiącego ilorazy różnicowe, jako że $f[x_i] = f(x_i)$. Rozpoczyna się zewnętrzna pętla, indeksowana przez $i$, przeprowadzająca $(n+1)(długość\ wektora) - 1(pierwsza\ kolumna\ znana) = n$ iteracji. Rozpoczyna się wewnętrzna pętla, indeksowana przez $j$, przeprowadzająca $(n+1)(długość\ wektora) - i(indeks\ poprzedniej\ pętli)$ iteracji. W każdym przebiegu wewnętrznej pętli wyznaczany jest iloraz różnicowy oparty na większej liczbie węzłów wg zależności przedstawionej w paragrafie 1.1.

Po zakończeniu wykonywania pętli zewnętrznej zwracany jest wektor zawierający kolejno wartości $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ stanowiące ilorazy różnicowe wykorzystywane do reprezentacji wielomianu w postaci Newtona.

### 1.3 Wyniki

| węzły | 3 | 1 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| wartości | 1 | -3 | 2 | 4 |
| ilorazy różnicowe | 1 | 2 | -0.375 | 0.175 |

### 1.4 Wnioski

Informacja o węzłach i ilorazach różnicowych jest całą wiedzą o wielomianie interpolacyjnym. Wartość $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ jest współczynnikiem $x^i$.

Jeśli należy policzyć możliwie dokładne ilorazy różnicowe to zaleca się porządkowanie węzłów od najmniejszego do największego(lub na odwrót) by algorytm był numerycznie poprawny(dowód – Kiełbasiński), gdyż iloraz różnicowy nie zależy od kolejności węzłów.

## 2. Zadanie 2

### 2.1 Opis problemu

Przedstawiona zostanie metoda obliczania wartości w punkcie wielomianu interpolacyjnego stopnia $n$ w postaci Newtona za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera. Algorytm spełnia następujące zależności

1. $w_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
2. $w_k(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_k] + (x - x_k)w_{k+1}(x)\ dla\ k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$
3. $p(x) = w_0(x)$

### 2.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $x,\ fx,\ t$ będące odpowiednio wektorem długości $n+1$ zawierającym węzły; wektorem długości $n+1$ zawierającym ilorazy różnicowe; punktem, w którym należy obliczyć wartość wielomianu.

Zgodnie z przedstawionym równaniem rekurencyjnym algorytm rozpoczyna pracę od wyznaczenia wartości $w_n(x)$ na podstawie wejścia. Następnie rozpoczyna się pętla, indeksowana przez i, wykonująca $(n+1)(długość\ wektora) - 1(pierwsza\ wartość\ jest\ znana)$ iteracji. Pętla wyznacza kolejne wartości „z góry na dół" zgodnie z zależnością rekurencyjną. W każdym kroku $w_k(x) = (ity\ iloraz\ różnicowy) + (t - ity\ węzeł) * w_{k+1}(x)$. Po zakończeniu pracy pętli zwracana jest wartość $w_0(x)$ będąca wartością wielomianu $p$ w punkcie $t$.

### 2.3 Wyniki

Poniżej został przedstawiony wynik dla wektora $x = [3, 1, 5, 6]$, wektora ilorazów różnicowych wyznaczonych w poprzednim zadaniu $fx = [1, 2, -0.375, 0.175]$ i kolejnych punktów $t_i = x_i$, ponieważ wartości wielomianu w tych punktach również są znane z danych wejściowych poprzedniego problemu.

| $t$ | $p(t)$ |
|---|---|
| 3 | 1 |
| 1 | -3 |
| 5 | 2 |
| 6 | 4 |

### 2.4 Wnioski

Ten schemat nazywamy uogólnionym algorytmem Hornera, ponieważ wielomian $p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)(c_3 + \dots)(c_{n-1} + (x - x_{n-1})c_n)\dots)$ może zostać przedstawiona w takiej formie, gdzie czynniki liniowe $x - x_i$ wyciągane są przed kolejne nawiasy, co pozwala w czasie liniowym wyznaczyć wartość.

## 3. Zadanie 3

### 3.1 Opis problemu

Mając dany wielomian interpolacyjny w postaci Newtona wyznaczone zostaną współczynniki dla postaci kanonicznej.

Problem można rozwiązać w czasie $O(n^2)$ jeżeli wielomian zostanie przedstawiony jak wielomian Hornera, podobnie do paragrafu 2. W tym przypadku jednak, nie mnoży się samych liczb(liczona była wartość w punkcie, więc $x$ był liczbą), a czynniki liniowe, gdzie składnik $x$ pozostaje. Wykonywany jest algorytm Hornera „wstecz", tj. zaczynając od wyrażenia najbardziej zagnieżdżonego jest ono wymnażane i sumowane z kolejnymi składnikami.

3.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $x$ oraz $fx$ będące odpowiednio wektorem długości $n + 1$ zawierającym węzły i wektorem długości $n + 1$ zawierającym ilorazy różnicowe.

Współczynnik stojący przy najwyższej potędze wielomianu w postaci naturalnej jest znany na wejściu, jest to bowiem $c_n = fx[x_0, \ldots, x_n]$. Tworzona jest pomocnicza tablica $a$ zawierająca już wyznaczone częściowe wartości współczynników. Element $a_n = c_n$. Rozpoczyna się zewnętrzna pętla, indeksowana przez $i$, wykonująca $n$ iteracji. W każdym kroku wprowadza ona początkową wartość nowego współczynnika $a_i = ity\ iloraz\ różnicowy - a_{i+1} * ity\ węzeł$. Rozpoczyna się wewnętrzna pętla, indeksowana przez $j$, wykonująca $n - i$ operacji. W każdym kroku aktualizuje ona wartości poprzednich współczynników, wymnażając je przez kolejny czynnik. Aktualizacja wygląda następująco $a_j = a_j - ity\ węzeł * a_{j+1}$. Po zakończeniu pracy obu pętli w tablicy $a$ wartości $a_i$ będą odpowiadały współczynnikom wielomianu interpolacyjnego w postaci kanonicznej przy i-tej potędze.

Liczbę iteracji obu pętli można z góry ograniczyć przez $n$, toteż cały algorytm działa w czasie $O(n^2)$.

3.3 Wyniki

Dla wektora $x = [3, 4, 5, 1]$ i wektora ilorazów różnicowych $fx = [2, 2, 7, 2]$ współczynniki stojące przy kolejnych potęgach postaci naturalnej reprezentuje wektor $a = [-40, 47, -17, 2]$, czyli wielomian można przedstawić jako $p(x) = -40 + 47x - 17x^2 + 2x^3$.

3.4 Wnioski

Informacja o współczynnikach postaci naturalnej nic nie wnosi do problemu interpolacji funkcji za pomocą wielomianu interpolacyjnego. Jeżeli zachodzi potrzeba przedstawienia wielomianu w postaci naturalnej, można tego dokonać w czasie $O(n^2)$.

4. Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja metody interpolującej na przedziale $[a, b]$ funkcję $f(x)$ za pomocą wielomianu stopnia $n$ w postaci Newtona. Do interpolacji użyte zostaną węzły równoodległe. Narysowany zostanie wykres interpolowanej funkcji i wielomian interpolacyjny.

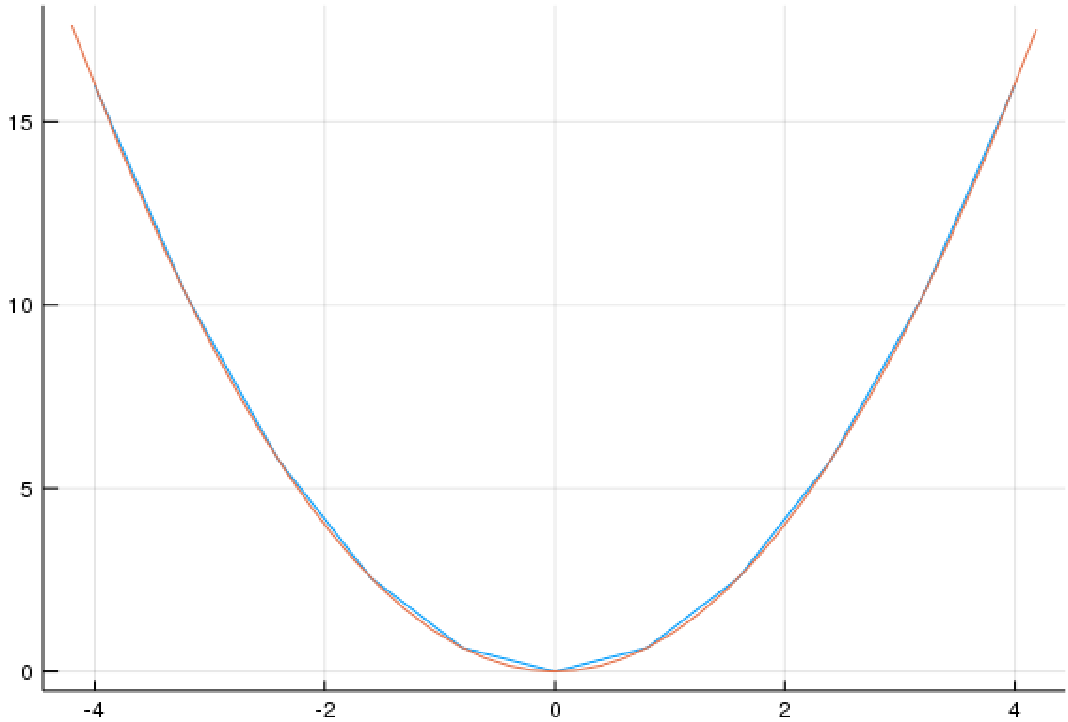
4.2 Rozwiązanie

Na wejściu dane są $f$, $a$, $b$, $n$ będące odpowiednio funkcją do interpolowania; początkiem przedziału interpolacji; końcem przedziału interpolacji; stopniem wielomianu interpolacyjnego.

Na początku obliczany jest odstęp między kolejnymi węzłami za pomocą wzoru $h = \frac{b-a}{n}$. Następnie tworzone są dwa wektory pomocnicze, przeznaczone na przechowywanie węzłów i wartości w węzłach. Rozpoczyna się pierwsza pętla. W każdym kroku wyznaczany jest węzeł $x_i = a + i * h$ oraz wartość funkcji w tym punkcie $y_i = f(x_i)$. Po skończeniu pracy pętli, wyznaczone wartości są używane do wyznaczenia ilorazów różnicowych za pomocą metody przedstawionej w paragrafie 1. Dalej pracę rozpoczyna druga pętla wyznaczająca wartości w punkcie wielomianu interpolacyjnego za pomocą metody przedstawionej w paragrafie 2. Na podstawie uzyskanych równoodległych węzłów i wartościach w węzłach rysowany jest wykres wielomianu interpolacyjnego stopnia n i interpolowanej funkcji.

## 4.3 Wynik

Poniżej przedstawiony został wykres funkcji $f(x) = x^2$ na odcinku $[-4, 4]$(na czerwono) i jej interpolacja wielomianem stopnia $10$(na niebiesko).




## 4.4 Wnioski

Na podstawie wiadomości o węzłach i ilorazach różnicowych wielomianu można sporządzić jego wykres. W szczególności nie potrzeba współczynników postaci kanonicznej.

5. Zadanie 5

5.1 Opis problemu

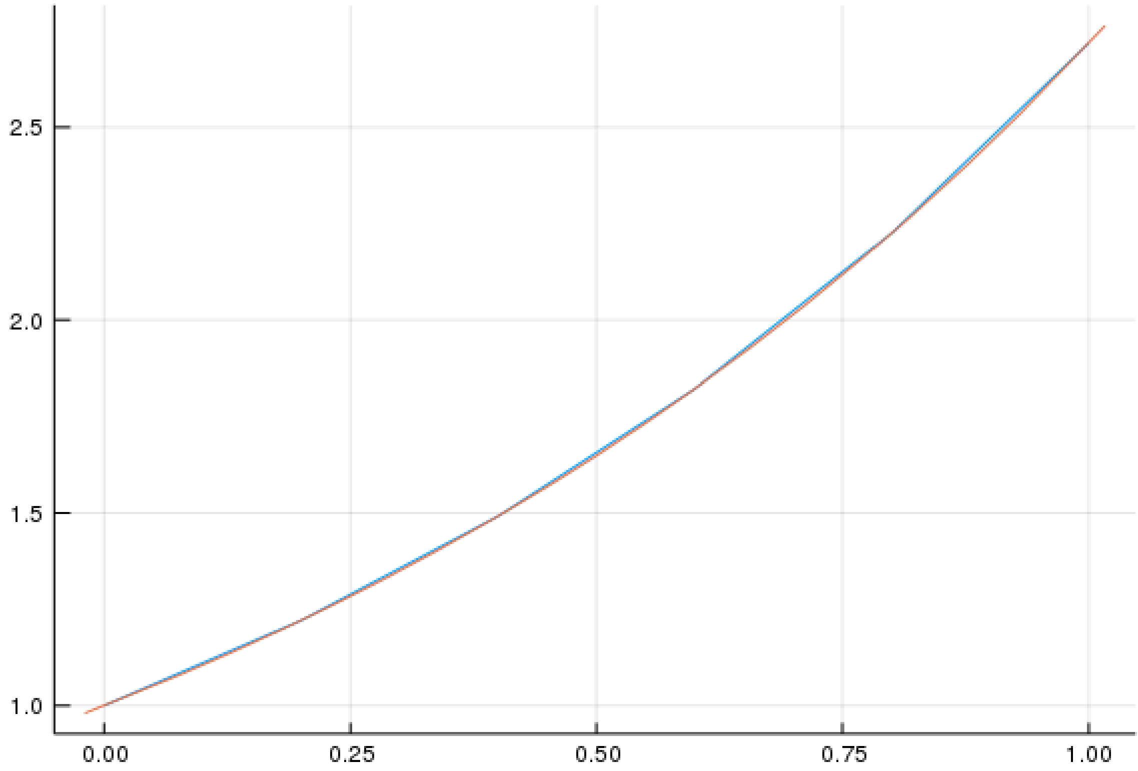
Sporządzone zostaną wykresy wielomianów różnych stopni interpolujących funkcje $e^x$ oraz $x^2 \sin x$.

5.2 Rozwiązanie

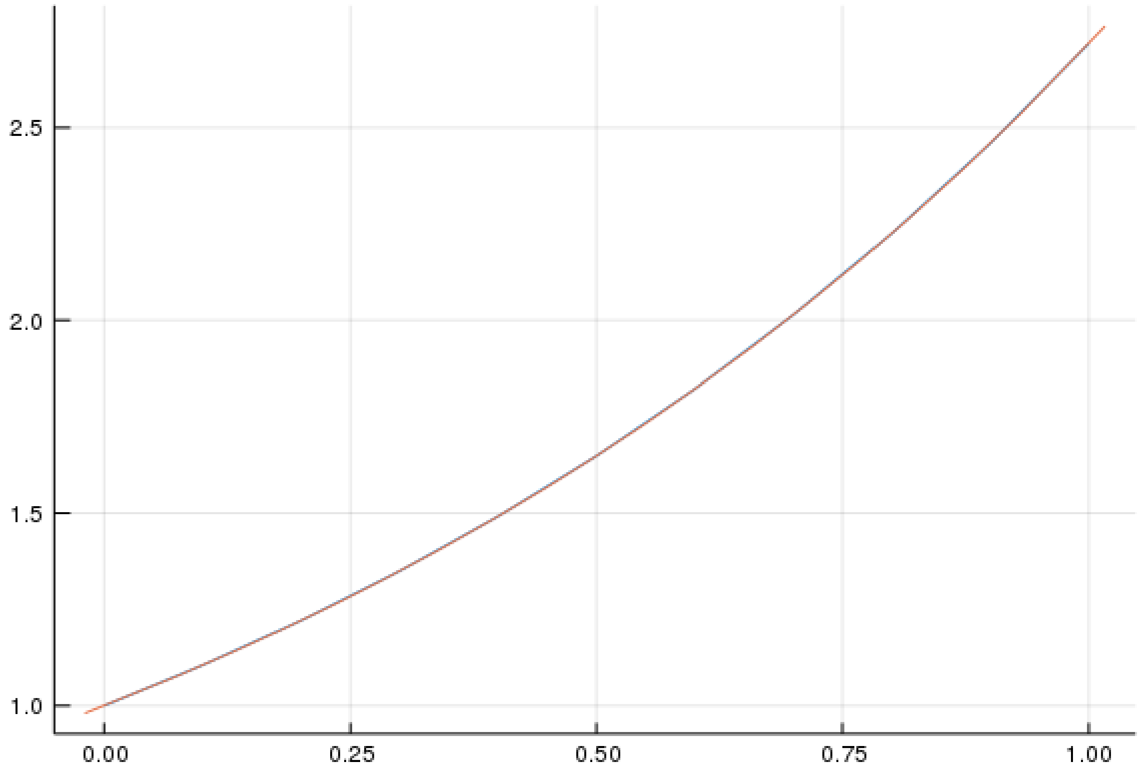
Użyta zostaje metoda przedstawiona w paragrafie 4, wywołanie następuje na rzecz różnych funkcji określonych na pewnych przedziałach z różnymi stopniami wielomianów interpolujących.

5.3 Wyniki

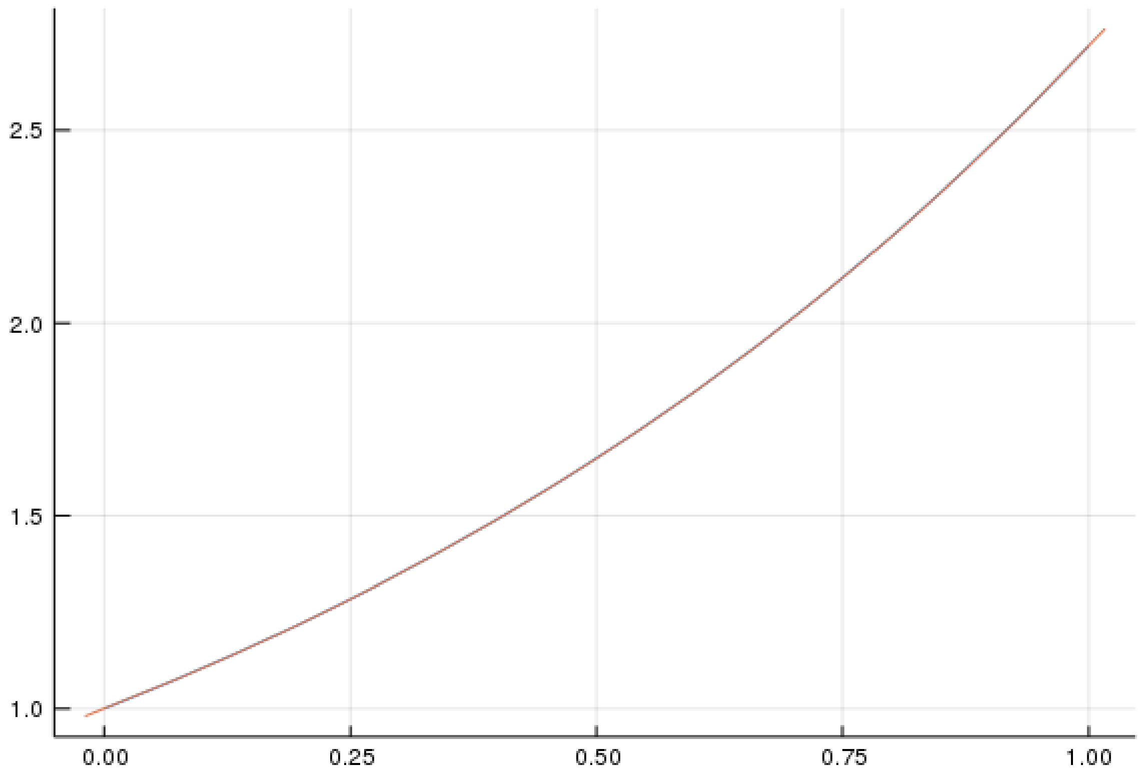
$e^x$ na przedziale $[0, 1]$, $n = 5$



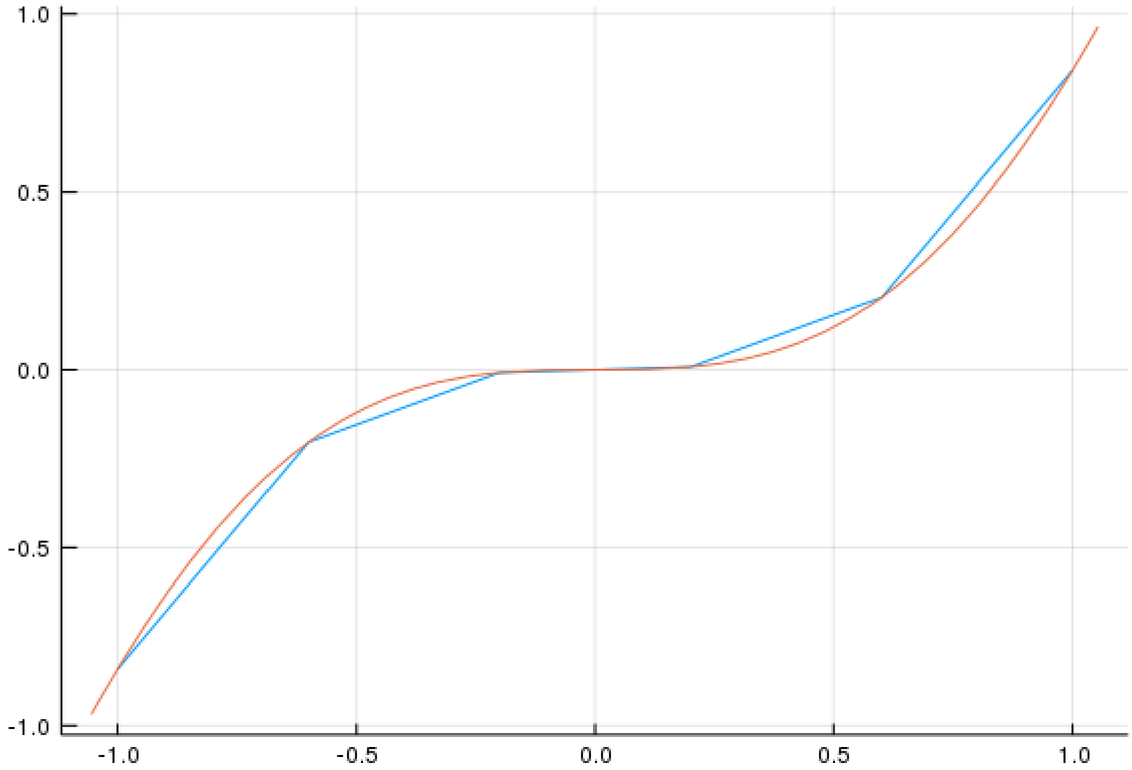
$e^x$ na przedziale $[0, 1]$, $n = 10$



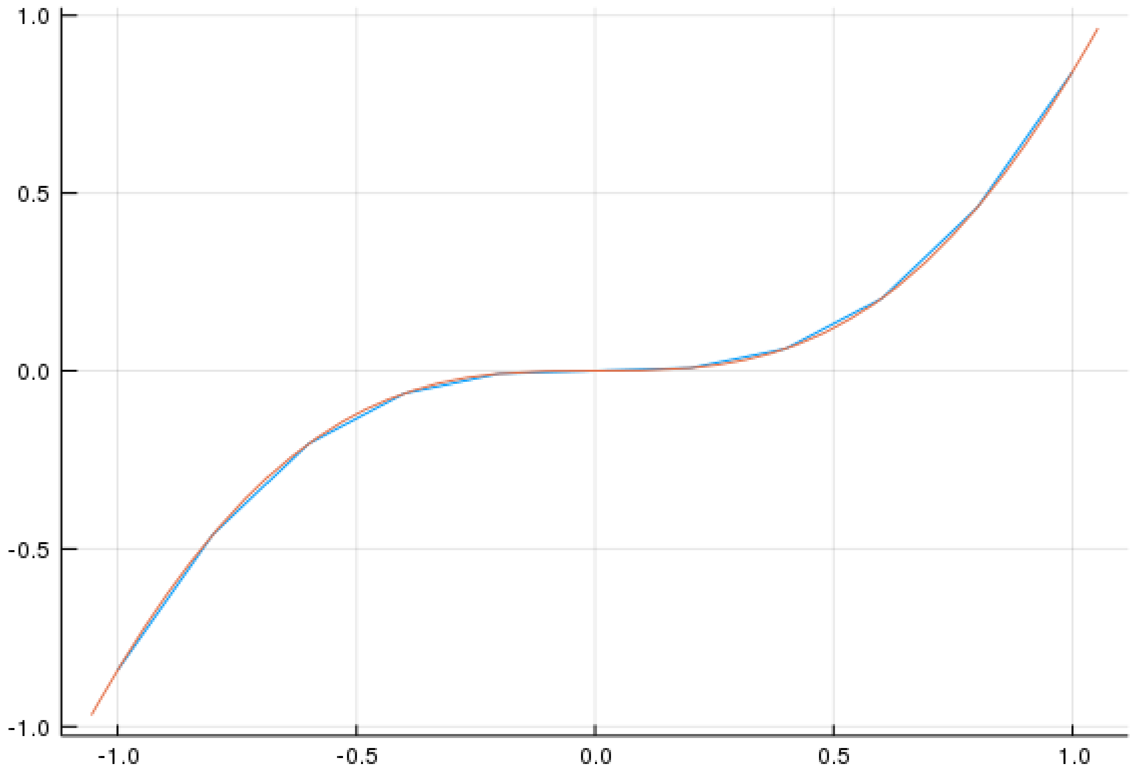

$e^x$ na przedziale $[0, 1]$, $n = 15$



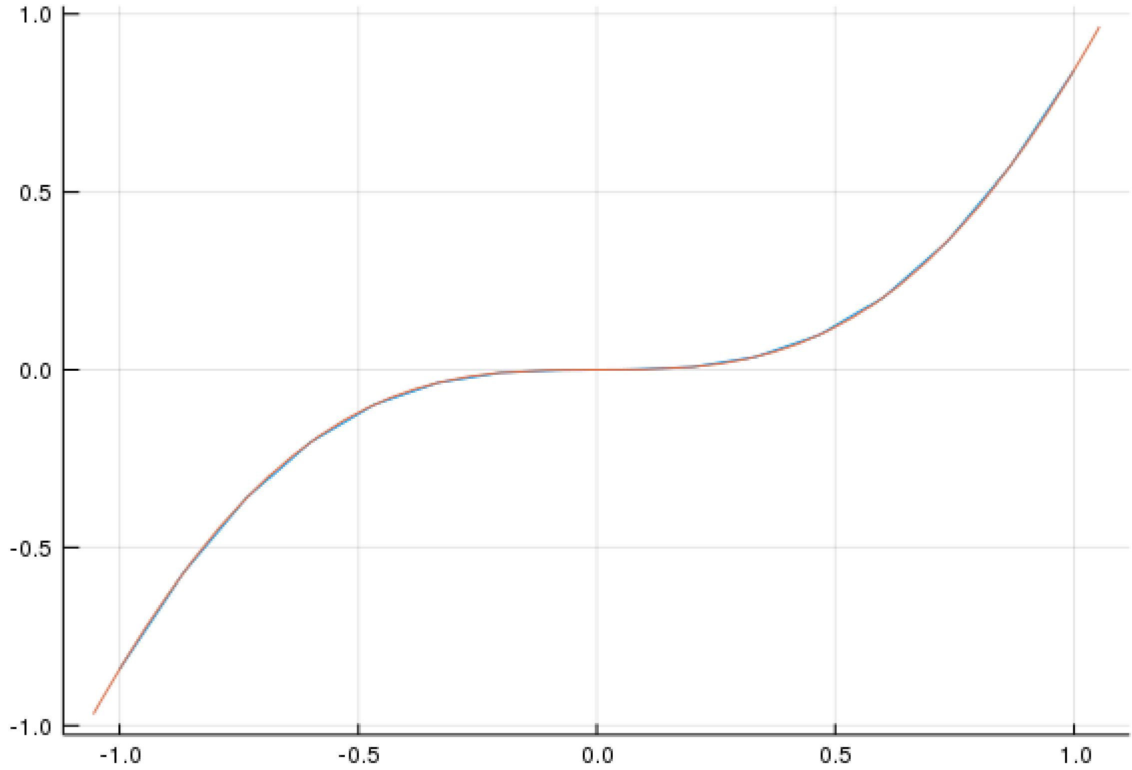
$x^2 \sin x$ na przedziale $[-1, 1]$, $n = 5$




$x^2 \sin x$ na przedziale $[-1, 1]$, $n = 10$



$x^2 \sin x$ na przedziale $[-1, 1]$, $n = 15$




5.4 Wnioski

Zwiększenie stopnia wielomianu interpolacyjnego dla podanych funkcji wpływa na dokładność ich odwzorowania. Dla $n = 15$ niebieski wykres wielomianu interpolacyjnego niemal całkowicie pokrywa się z czerwonym wykresem funkcji interpolowanej.

6. Zadanie 6

6.1 Opis problemu

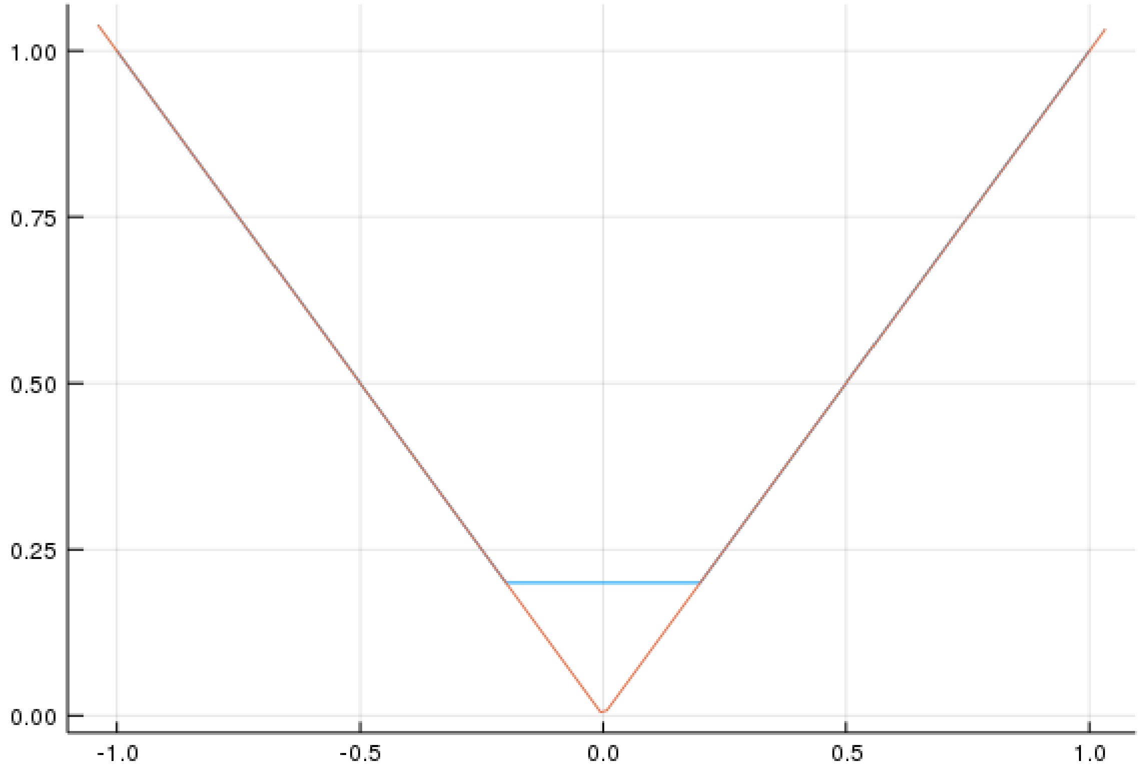
Sporządzone zostaną wykresy wielomianów różnych stopni interpolujących funkcje $|x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$. Zbadane zostanie zjawisko Runge'go.

6.2 Rozwiązanie

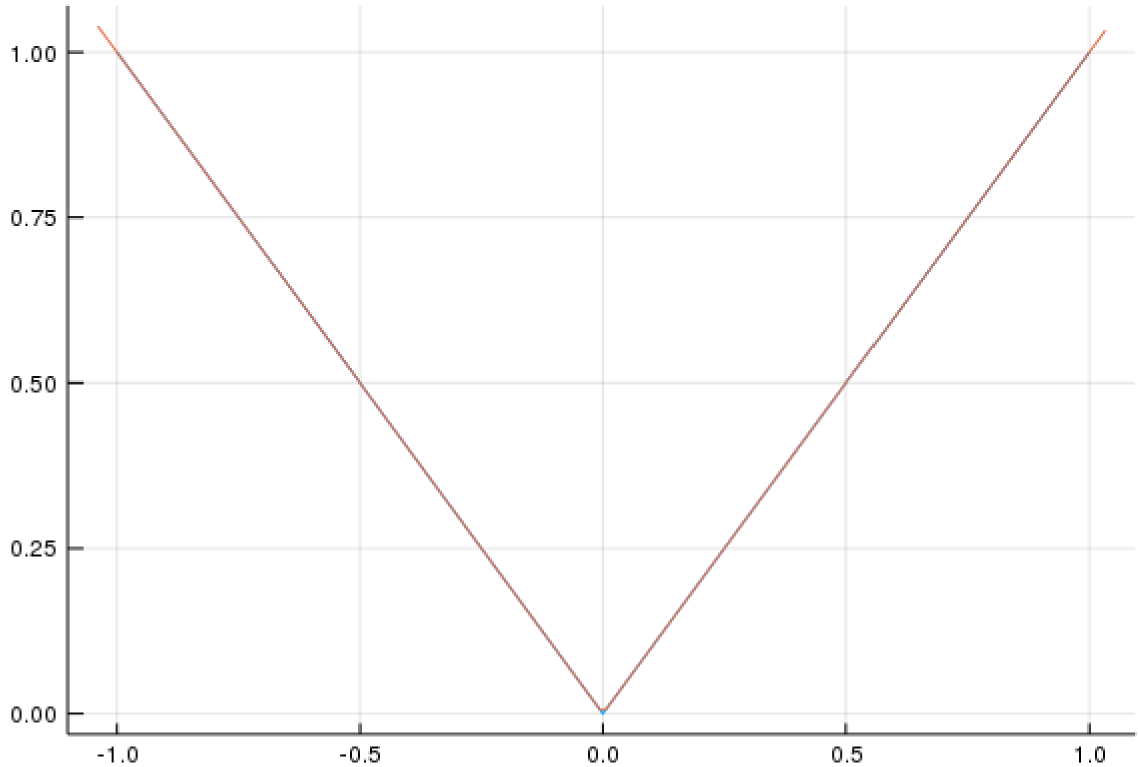
Użyta zostaje metoda przedstawiona w paragrafie 4, wywołanie następuje na rzecz różnych funkcji określonych na pewnych przedziałach z różnymi stopniami wielomianów interpolujących.

6.3 Wyniki

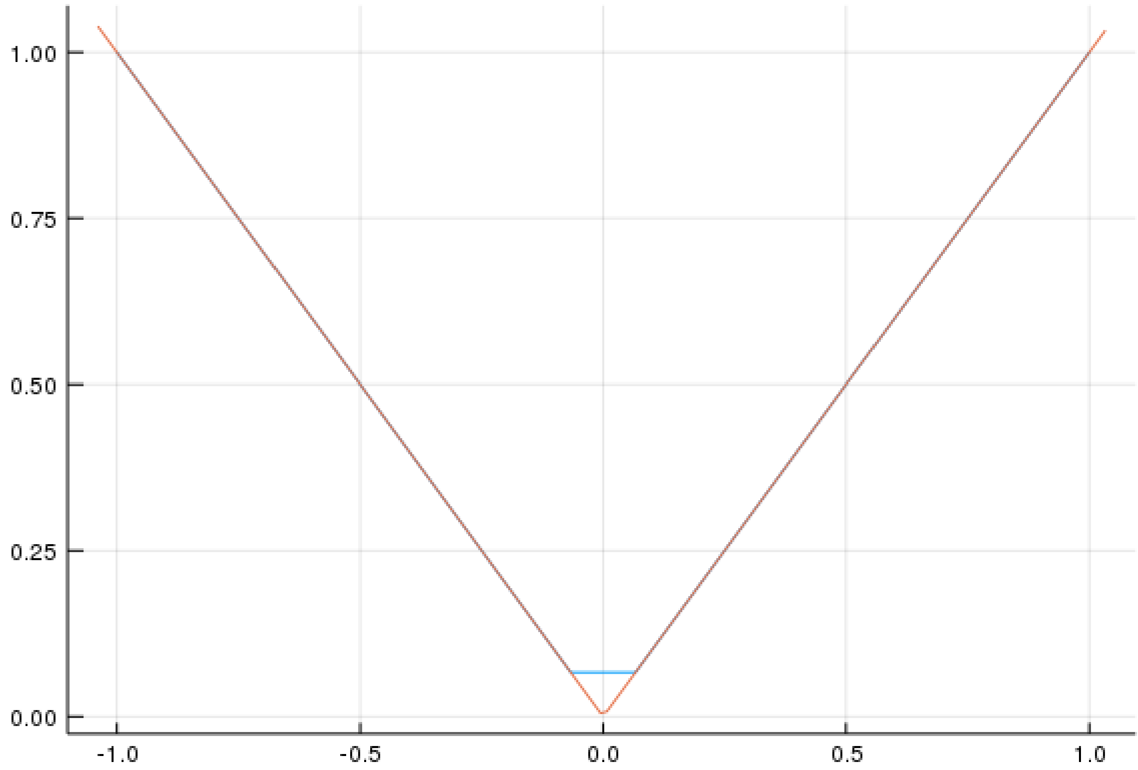
$|x|$ na przedziale $[-1,1]$, $n=5$



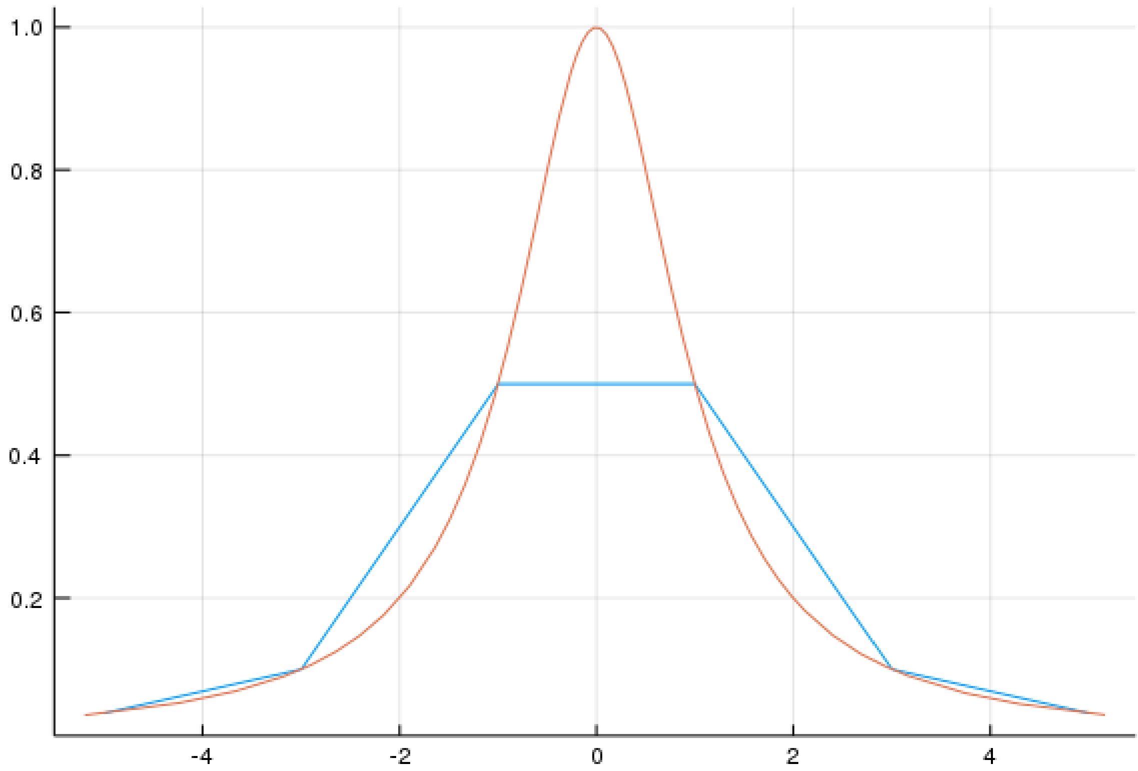

$|x|$ na przedziale $[-1,1]$, $n=10$



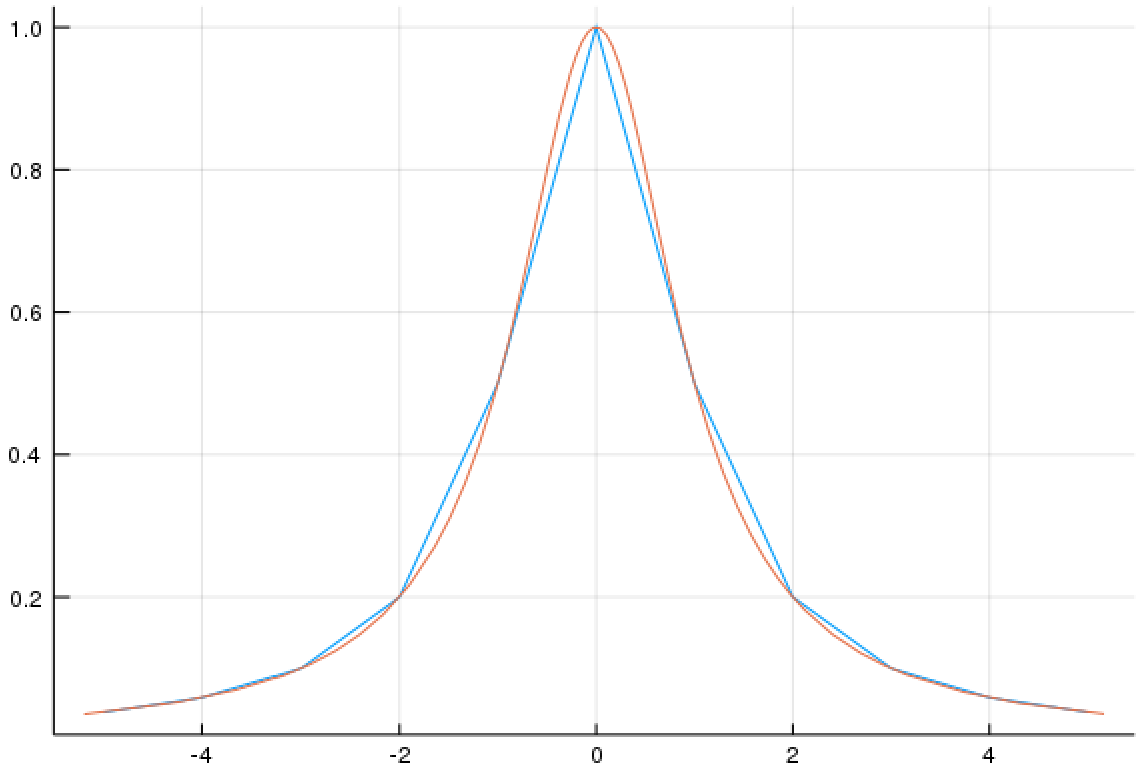
$|x|$ na przedziale $[-1, 1]$, $n = 15$



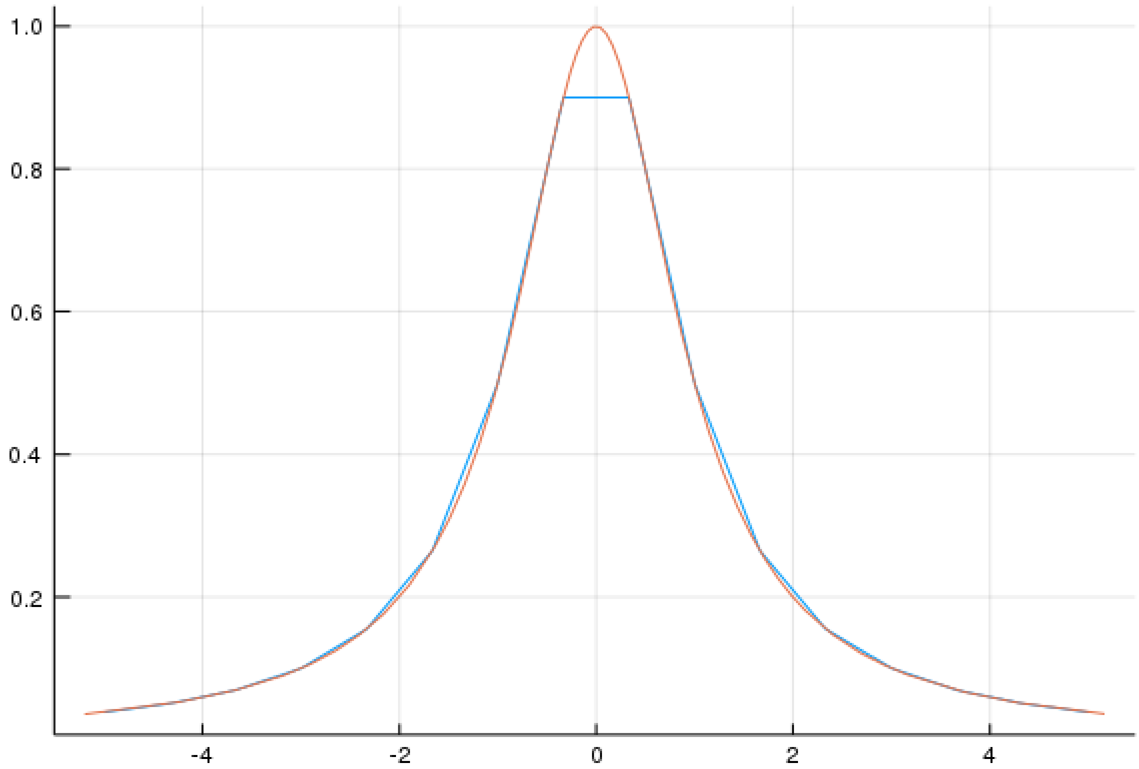

$\frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5, 5]$, $n = 5$



$\frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5,5]$, $n = 10$




$\frac{1}{1+x^2}$ na przedziale $[-5,5]$, $n = 15$



## 6.4 Wnioski

Dla danych funkcji zwiększenie stopnia wielomianu interpolacyjnego poprawia dokładność odwzorowania funkcji tylko do pewnego momentu. Dalsze zwiększanie stopnia pogarsza interpolację. Jest to przykład zjawiska Runge'go. Problem stanowi równa odległość między kolejnymi węzłami. Rozwiązaniem tego problemu może być zagęszczenie węzłów na końcach przedziału określoności. Można to osiągnąć np. przez dobór węzłów jako miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa n-tego stopnia.