Obliczenia naukowe

Sprawozdanie z listy nr 3 na laboratoria

Oskar Makowski

Grupa wtorek parzysty 18.55-20.35

1. Zadanie 1

1.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja metody bisekcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$. Wstępnymi założeniami odnośnie funkcji f są ciągłość oraz różne znaki na końcach przedziału na którym będzie poszukiwany pierwiastek: $f(a) * f(b) < 0$, gdzie a, b to odpowiednio początek i koniec. To gwarantuje istnienie miejsca zerowego na tym przedziale na mocy twierdzenia Darboux(inna nazwa to twierdzenie o wartościach pośrednich). Z powodu skończonej precyzji reprezentacji liczb rzeczywistych wprowadzone zostają dodatkowe warunki pozwalające metodzie zakończyć się dostarczając wynik z zadaną dokładnością.

1.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $f, a, b, delta, epsilon$ będące odpowiednio: funkcją, na której zostanie przeprowadzona metoda bisekcji; początkiem przedziału poszukiwania pierwiastka; końcem przedziału poszukiwania pierwiastka; dopuszczalną odległością a i b; dopuszczalną różnicą poszukiwanego miejsca zerowego od 0.

Jeżeli już na wejściu $sgn(a) = sgn(b)$ to ustawiana jest flaga sygnalizująca błąd i metoda nie jest rozpoczynana. W przeciwnym razie startuje główna pętla. W każdym kroku iteracji przedział, na którym poszukiwany jest pierwiastek, jest zawężany. Wyznaczany jest środek bieżącego podprzedziału i wartość funkcji w tym punkcie. Jeżeli różnica końców przedziału jest mniejsza od zadanej lub wartość funkcji jest wystarczająco blisko zera, czyli jest mniejsza od zadanej dokładności, oznacza to, że zostało znalezione żądane przybliżenie wartości pierwiastka. W przypadku gdy warunki zbieżności nie zostały jeszcze spełnione następuje aktualizacja przedziału do dalszych poszukiwań. Aby to osiągnąć porównywane są znaki wartości funkcji na końcach przedziału z wartością funkcji w punkcie stanowiącym środek przedziału. Jeżeli $f(a) \neq f(środek)$ to przedział zawężany jest kierunku a, dzięki aktualizacji $b = środek$. W przeciwnym razie przedział zawężany jest w kierunku b, aktualizując $a = środek$. Zwracane są przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$, wartość w tym punkcie, liczba wykonanych iteracji i wartość flagi błędu.

1.3 Wyniki

Poniżej przedstawiony został wynik dla funkcji $f(x) = x^3 - x - 2$ na przedziale $[1, 2]$, gdzie $delta = epsilon = 0.00001$.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$
1.0	2.0	1.5	-0.125
1.5	2.0	1.75	1.609375
1.5	1.75	1.625	0.666015625
1.5	1.625	1.5625	0.252197265625
1.5	1.5625	1.53125	0.059112548828125
1.5	1.53125	1.515625	-0.034053802490234375
1.515625	1.53125	1.5234375	0.012250423431396484
1.515625	1.5234375	1.51953125	-0.010971248149871826
1.51953125	1.5234375	1.521484375	0.0006221756339073181
1.51953125	1.521484375	1.5205078125	-0.005178886465728283
1.5205078125	1.521484375	1.52099609375	-0.002279443317092955
1.52099609375	1.521484375	1.521240234375	-0.0008289058605441824

1.521240234375	1.521484375	1.5213623046875	-0.0001034331235132413
1.5213623046875	1.521484375	1.52142333984375	0.0002593542519662151
1.5213623046875	1.52142333984375	1.521392822265625	7.795631350404619e-5
1.5213623046875	1.521392822265625	1.5213775634765625	-1.2739467674549587e-5

x taki że $f(x) = 0$	$f(x)$	liczba iteracji	flaga błędu
1.5213851928710938	3.260815724592803e-5	17	0

1.4 Wnioski

Metoda gwarantuje znalezienie miejsca zerowego jeśli tylko zostały spełnione warunki początkowe, tj. funkcja jest ciągła oraz krańce przedziału określoności mają różne znaki. Z numerycznego punktu widzenia metoda wymaga sprawdzania dodatkowych warunków zbieżności z powodu skończonej precyzji arytmetyki. Jeżeli przez c_n oznaczymy środek przedziału po n-tym kroku, a przez c rozwiązanie dokładne, otrzymamy następującą nierówność: $|c_n - c| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$.

2. Zadanie 2

2.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja metody Newtona(metody stycznych) rozwiązującej równanie $f(x) = 0$. Wstępnymi założeniami odnośnie funkcji są 2-krotna różniczkowalność na odcinku, w którym znajduje się pierwiastek, oraz $f'(pierwiastek) \neq 0$ (pierwiastek jest jednokrotny). Z powodu skończonej precyzji reprezentacji liczb rzeczywistych wprowadzone zostają dodatkowe warunki pozwalające metodzie zakończyć się dostarczając wynik z zadaną dokładnością.

2.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $f, pf, x0, delta, epsilon, maxit$ będące odpowiednio: funkcją, na której zostanie przeprowadzona metoda Newtona; pochodną funkcji f; początkowym przybliżeniem; dopuszczalną różnicą między kolejnymi punktami aproksymującymi pierwiastek; dopuszczalną różnicą poszukiwanego miejsca zerowego od 0; maksymalną liczbą iteracji.

Metoda rozpoczyna pracę od policzenia wartości pochodnej funkcji f w punkcie $x0$. Następnie konstruowane jest dokładniejsze przybliżenie pierwiastka dane rekurencyjnym wzorem $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. W przypadku gdy wartość pochodnej jest mniejsza niż $epsilon$ ustawiana jest flaga błędu na wartość 2 i następuje powrót. W dalszej kolejności sprawdzane są warunki zbieżności. Jeśli odległość x_k od x_{k+1} jest mniejsza niż $delta$ lub wartość funkcji dla aproksymowanego pierwiastka jest mniejsza niż $epsilon$, oznacza to, że znalezione oszacowanie miejsca zerowego spełnia wymagania. Jeśli żaden z tych warunków nie zaszedł, za x_k podstawiane jest x_{k+1}, które zostanie wykorzystane do dokładniejszego oszacowania w następnej iteracji. Gdy metoda nie znajdzie wystarczająco dokładnego przybliżenia w zadanej liczbie iteracji, flaga błędu przyjmuje wartość 1. Zwracane są przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$, wartość w tym punkcie, liczba wykonanych iteracji i wartość flagi błędu.

2.3 Wyniki

Poniżej został przedstawiony wynik dla funkcji $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, $x0 = 1.5, delta = epsilon = 10^{-5}, maxit = 100$.

k	x_k	$f(x_k)$
1	1.4166666666666667	0.006944444444444642
2	1.4142156862745099	6.007304882871267e-6
3	1.4142135623746899	4.510614104447086e-12

$x\ taki\ że\ f(x) = 0$	$f(x)$	liczba iteracji	flaga błędu
1.4142135623746899	4.510614104447086e-12	3	0

2.4 Wnioski

Metoda Newtona nie zawsze musi być zbieżna. Jest ona podatna na wstępne oszacowanie pierwiastka. Jeżeli nie znajduje on się w pewnym otoczeniu poszukiwanego miejsca zerowego, wtedy metoda może zawieść. Dla pewnych funkcji problem stanowią także punkty stacjonarne, w których pochodna równa się zeru. Dla $f(x) = x^3 - 2x + 2$ i punktu początkowego równego 0, metoda wpadnie w cykl i będzie oscylowała między 1, a 0. Widać, że idealnym rozwiązaniem jest dobranie wstępnego oszacowania leżącego „blisko” pierwiastka, które ponadto nie jest punktem stacjonarnym lub powoduje pojawienie się cyklu.

3. Zadanie 3

3.1 Opis problemu

Celem zadania jest implementacja metody siecznych rozwiązującej równanie $f(x) = 0$. Wstępnymi założeniami odnośnie funkcji są 2-krotna różniczkowalność na odcinku, w którym znajduje się pierwiastek, oraz $f'(pierwiastek) \neq 0$ (pierwiastek jest jednokrotny). Z powodu skończonej precyzji reprezentacji liczb rzeczywistych wprowadzone zostają dodatkowe warunki pozwalające metodzie zakończyć się dostarczając wynik z zadaną dokładnością.

3.2 Rozwiązanie

Na wejściu znane są $f, x0, x1, delta, epsilon, maxit$ będące odpowiednio: funkcją, na której zostanie przeprowadzona metoda Newtona; jednym z punktów początkowego przybliżenia; drugim punktem początkowego przybliżenia; dopuszczalną różnicą między kolejnymi punktami aproksymującymi pierwiastek; dopuszczalną różnicą poszukiwanego miejsca zerowego od 0; maksymalną liczbą iteracji.

Metoda rozpoczyna pracę od policzenia wartości w punktach stanowiących przybliżenie początkowe. Rozpoczyna się główna pętla. Jeśli wartość funkcji w punkcie x_{n-1} jest większa niż w punkcie x_n, punkty i ich wartości zamieniane są ze sobą. Następnie obliczane jest wyrażenie $\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{1}{f'(x_n)}$ potrzebne do dokładniejszego oszacowania pierwiastka. Wtedy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. W dalszej kolejności sprawdzane są warunki zbieżności. Jeśli odległość x_k od x_{k+1} jest mniejsza niż $delta$ lub wartość funkcji dla aproksymowanego pierwiastka jest mniejsza niż $epsilon$, oznacza to, że znalezione oszacowanie miejsca zerowego spełnia wymagania. Gdy metoda nie znajdzie wystarczająco dokładnego przybliżenia w zadanej liczbie iteracji, flaga błędu przyjmuje wartość 1. Zwracane są przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$, wartość w tym punkcie, liczba wykonanych iteracji i wartość flagi błędu.

3.3 Wyniki

Poniżej został przedstawiony wynik dla funkcji $f(x) = x^2 - 612$, $x0 = 10$, $x1 = 30$, $dela = epsilon = 10^{-10}$, $maxit = 100$.

k	x_k	$f(x_k)$
1	22.8	-92.15999999999997
2	24.545454545454547	-9.520661157024733
3	24.746543778801843	0.3914289961562645
4	24.73860275369709	-0.0015337947706939303
5	24.738633748750722	-2.4517180463590194e-7
6	24.738633753705965	1.1368683772161603e-13

x *taki że* $f(x) = 0$	$f(x)$	liczba iteracji	flaga błędu
24.738633753705965	1.1368683772161603e-13	6	0

3.4 Wnioski

Metoda siecznych nie jest zbieżna globalnie, toteż wybór punktów, które początkowo aproksymują pierwiastek ma wpływ na wynik pracy algorytmu. Metoda nie wymaga wyznaczania pochodnej funkcji, zamiast tego używa jej aproksymacji.

4. Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Wyznaczony zostanie pierwiastek równania $f(x) = \sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ za pomocą przedstawionych metod: bisekcji, Newtona i siecznych. Dla każdej metody zadane zostały parametry wejściowe.

4.2 Rozwiązanie

Po za zadanym równaniem wyznaczona została także jego pochodna $f'(x) = \cos(x) - x$ używana przez metodę Newtona. Metody uruchamiane są z następującymi parametrami wejściowymi: metoda bisekcji - $(f(x),\ a = 1.5,\ b = 2,\ delta = 0.5 * 10^{-5},\ epsilon = 0.5 * 10^{-5})$, metoda Newtona – $(f(x),\ f'(x),\ x0 = 1.5,\ delta = 0.5 * 10^{-5},\ epsilon = 0.5 * 10^{-5},\ maxit = 100)$, metoda siecznych – $(f(x),\ x0 = 1,\ x1 = 2,\ delta = 0.5 * 10^{-5},\ epsilon = 0.5 * 10^{-5},\ maxit = 100)$.

4.3 Wyniki

metoda	x *taki że* $f(x) = 0$	$f(x)$	liczba iteracji	flaga błędu
metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
metoda Newtona	1.933749984135789	4.995107540040067e-6	13	0
metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

4.4 Wnioski

Wszystkie metody zakończyły się pomyślnie odnajdując pierwiastek. Najwięcej iteracji potrzebowała metoda bisekcji. Najmniej iteracji potrzebowała metoda siecznych, co może dziwić, gdyż jej wykładnik zbieżności jest mniejszy niż dla metody Newtona, której odnalezienie pierwiastka zajęło aż 13 iteracji. Ma to związek z krotnością miejsca zerowego. Gdy jest ona większa niż 1, wtedy metody nie gwarantują swojego wykładnika zbieżności, bowiem nie zostają spełnione założenia danej metody. Ogólnie, wykładnik zbieżności dla poszczególnych metod wynosi

metoda	wykładnik
metoda bisekcji	1
metoda Newtona	2
metoda siecznych	≈ 1,618

5. Zadanie 5

5.1 Opis problemu

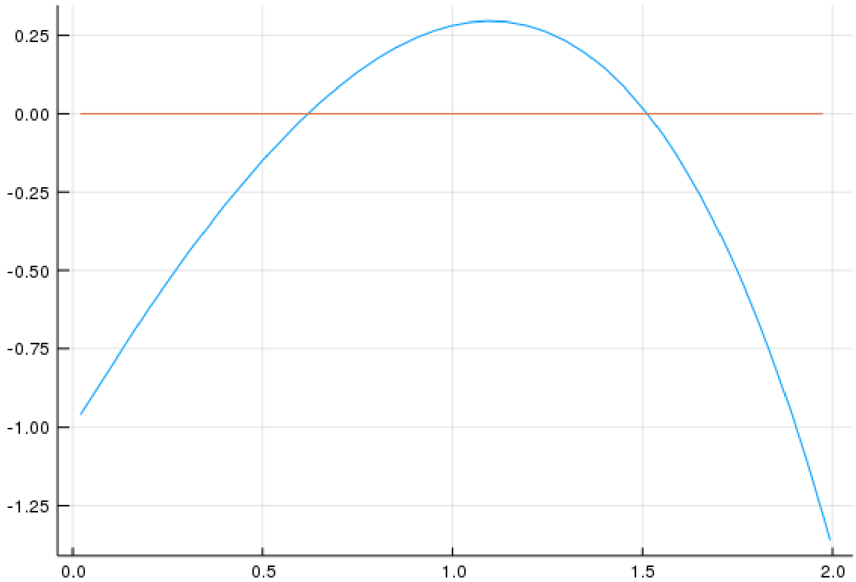
Za pomocą metody bisekcji zostanie znaleziony punkt przecięcia funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$.

5.2 Rozwiązanie

Aby znaleźć punkt przecięcia należy rozwiązać równanie $3x = e^x$ co prowadzi do otrzymania następującego warunku $f(x) = 3x - e^x = 0$. Potrzebne jest oszacowanie przedziału na którym znajduje się pierwiastek lub pierwiastki, toteż najpierw narysowany został wykres funkcji. Na jego podstawie dobrane zostały przedziały, na których metoda bisekcji pracuje. Przyjęta dokładność to $delta = 10^{-4}$, $epsilon = 10^{-4}$.

5.3 Wyniki

Wykres $f(x) = 3x - e^x$ i $g(x) = 0$ na przedziale $[0, 2]$.



przedział	x $taki$ $że$ $f(x) = 0$	$f(x)$	liczba iteracji	flaga błędu
$[0, 1]$	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	0
$[1, 2]$	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	0

5.4 Wnioski

Metoda bisekcji jest zbieżna globalnie, jednakże warto oszacować liczbę miejsc zerowych funkcji i uruchamiać metodę na mniejszych podprzedziałach, żeby wyznaczyć je wszystkie. W tym przypadku funkcja posiadała dwa miejsca zerowe, a przedziały, które je zawierały, zostały dobrane na podstawie wykresu.

6. Zadanie 6

6.1 Opis problemu

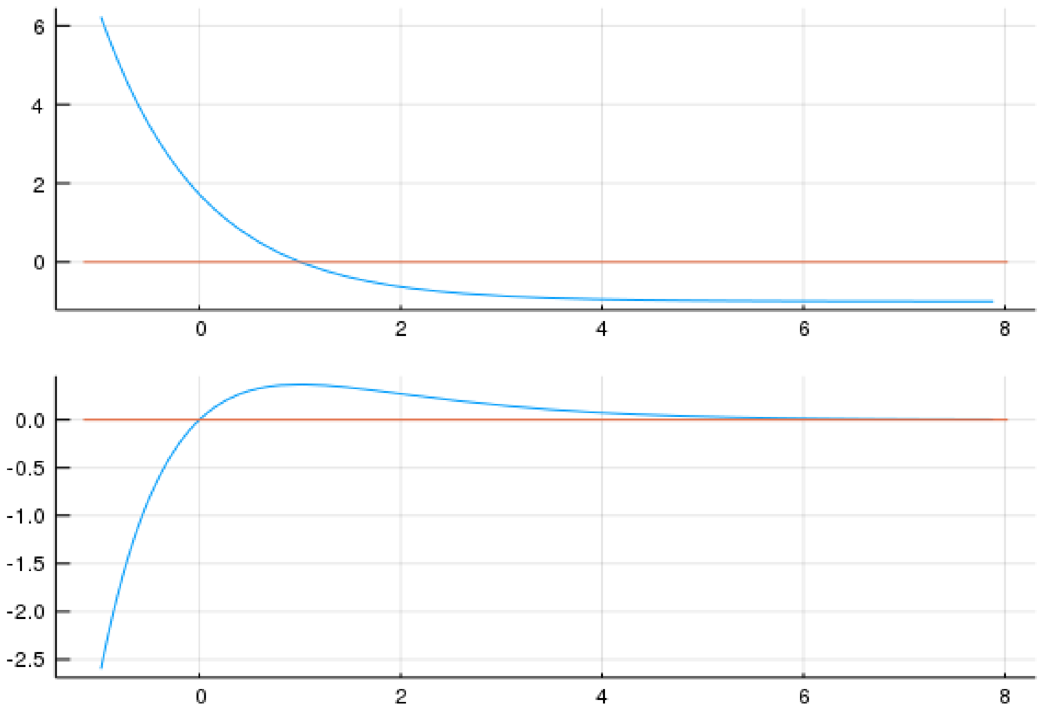
Dzięki metodzie bisekcji, Newtona i siecznych obliczone zostaną miejsca zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$.

6.2 Rozwiązanie

Po za zadanymi funkcjami wyznaczone zostały ich pochodne używane przez metodę Newtona: $f_1'(x) = -e^{1-x}$, $f_2'(x) = (x-1) * -e^{-x}$. Potrzebne jest oszacowanie przedziału na którym znajduje się pierwiastek lub pierwiastki funkcji, toteż najpierw sporządzone zostały ich wykresy. Na ich podstawie zostały dobrane parametry początkowe. Przyjęta dokładność to $delta = 10^{-5}$, $epsilon = 10^{-5}$.

6.3 Wyniki

Na górze wykres funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $g(x) = 0$, na dole wykres funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$ oraz $g(x) = 0$. Obie funkcje wyznaczone na przedziale $[-1, 8]$.



Wyniki dla $f_1(x)$

metoda	przedział/punkt początkowy	pierwiastek	wartość funkcji	liczba iteracji	flaga błędu
bisekcji	$[0, 3]$	1.0000076293945312	-7.6293654275305656e-6	17	0
	$[-10, 20]$	1.0000038146972656	-3.814689989667386e-6	20	0
Newtona	0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
	3	0.9999999710783241	2.892167638712806e-8	9	0
	7	0.9999999484165362	5.15834650549607e-8	401	0
	20	-1.7848227996318725e8	Inf	1	2
siecznych	$[0, 2]$	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	0
	$[-10, 10]$	9.99966600720658	-0.999876548971044	3	0

Wyniki dla $f_2(x)$

metoda	przedział/punkt początkowy	pierwiastek	wartość funkcji	liczba iteracji	flaga błędu
bisekcji	$[-1, 2]$	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17	0
	$[-10, 20]$	(-9.5367431640625e-6	-9.53683411396636e-6	20	0
Newtona	0.5	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
	-1	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
	2	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	0
	1	Inf	NaN	1	2
siecznych	$[-1, 1]$	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18	0
	$[-4, 4]$	14.653147280851735	6.34088545874634e-6	14	0

6.4 Wnioski

Dla funkcji pierwszej metoda bisekcji zawsze znajdowała pierwiastek, jednakże nawet dla niewielkiego przedziału zajmowało to sporą liczbę iteracji. W metodzie Newtona szczególnie interesujące są przypadki oddalania się ze wstępnym oszacowaniem w stronę nieskończoności. Dla $x0 = 7$ metoda potrzebowała aż 401 iteracji. W tym punkcie pochodna jest już bliska zeru, przez co metoda robi niewielkie kroki w stronę miejsca zerowego. Dla $x0 = 20$ metoda wykonuje zaledwie 1 operację i ustawia flagę błędu na 2, co oznacza, ze pochodna znalazła się zbyt bisko 0. Metoda siecznych zawsze znajdowała pierwiastek i robiła to w niewielkiej liczbie iteracji.

Dla funkcji drugiej metoda bisekcji zawsze znajdowała pierwiastek, jednakże czyniła to w sporej liczbie iteracji. Metoda Newtona dla $x0 = 1$ nie daje rozwiązania, ponieważ pochodna w tym punkcie jest równa 1. Ponadto dla $x0 > 1$ metoda nie zbiega do właściwego miejsca zerowego. Zamiast tego znajduje punkt, który znajduje się w pobliżu zera z zadaną dokładnością, jednak nie jest pierwiastkiem. Metoda siecznych dla zbyt „szerokiego” przedziału również nie zbiegła do właściwego miejsca zerowego. Widać, że wstępne oszacowanie przedziału startowego wpływa na wynik działania metody.