Endliche Automaten

- Beschreiben reguläre Sprachen
- Unterschied zwischen
  - ↳ deterministisch (= Automat kann zu bestimmten Zeitpunkt nur einen Zustand)
  - ↳ nicht deterministisch (= Automat kann gleichzeitig mehrere Zustände haben)
- Produktautomat ⇒ alle mögliche Kombination an Zustandspaaren
- Beweis : $L(A_{18}) = L_{18} \{ w \mid \#_a(w) \geq 1 \text{ und } 2 \mid \#_b(w) \}$
  - ↳ Idee : Beweis per Induktion nach $|w|$, dass die intuitive Bedeutung der Zustände mit der tatsächlichen Bedeutung übereinstimmt
  - ↳ Zz. für alle $w \in \{a, b\}^*$ gilt:
    - $\delta^*(q_{0g}, w) = q_{0g} \iff \#_a(w) = 0$ und $2 \mid \#_b(w)$
    - $\delta^*(q_{0g}, w) = q_{0u} \iff \#_a(w) = 0$ und $2 \nmid \#_b(w)$
    - $\delta^*(q_{0g}, w) = q_{1g} \iff \#_a(w) \geq 1$ und $2 \mid \#_b(w)$
    - $\delta^*(q_{0g}, w) = q_{1u} \iff \#(w) \geq 1$ und $2 \nmid \#_b(w)$
  - ↳ <u>IA</u>: $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$ ✓
  - ↳ <u>IS</u>: $|w| = n + 1 > 0$
    - ⇒ Dann ist $w = u\sigma$ für ein Wort u mit $|u| = n$ und ein $\sigma \in \Sigma$
    - ⇒ Nach Induktion gilt für u die Induktionsbehauptung
    - ⇒ Fallunterscheidung (8 Fälle) je nach Wert von σ und $\delta^*(q_{0g}, u)$
      - ↳ Bsp. : $\sigma = b$, $\delta^*(q_{0g}, u) = q_{1g}$

$\Rightarrow \#_a(u) \geq 1$ und $2 \mid \#_b(u)$ (Induktion)

$\Rightarrow \#_a(u\sigma) \geq 1$ und $2 \nmid \#_b(u\sigma)$

$\Rightarrow$ Behauptung, dass $\delta(q_{ug}, b) = q_{1u}$

Deterministisch endliche Automaten

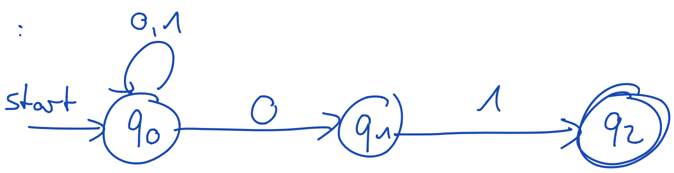
- Ein DEA besteht aus:
    1. Einer endlichen Menge an Zuständen : Q
    2. Einer endlichen Menge von Eingabesymbolen : Σ
    3. Einer Übergangsfunktion (welche ein Eingabesymbol und einen Zustand übergeben bekommt und einen Zustand zurückliefert) : δ
    4. Einen Startzustand (aus Q) : q_0
    5. Einer Menge an finaler Zustände : F

$\Rightarrow \quad A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Die Sprache des DEA ist die Menge aller Wörter, die der DEA akzeptiert
- Die erweiterte Übergangsfunktion δ^* bekommt ein Zustand q und ein Wort w übergeben
- Die Sprache eines DEA : $L(A) = \{ w \mid \delta^*(q_0, w) \text{ ist in } F \text{ enth.} \}$
- Wenn L für einen DEA A $L(A)$ ist, dann ist L eine reguläre Sprache

Nichtdeterministische endliche Automaten

- Definition analog zum DEA: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- δ^* liefert eine Menge von Zustände (! Unterschied zum DEA)
- Die Sprache eines NEA: $L(A) = \{ w \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$
- Beispiel:



Behauptung: $L = \{ w \mid w \text{ endet mit } 01 \}$

Beweis:

(1) $\delta^*(q_0, w)$ enthält für jedes Wort w den Zustand q_0

(2) $\delta^*(q_0, w)$ enthält genau dann den Zustand q_1, wenn das Wort w mit 0 endet

(3) $\delta^*(q_0, w)$ enthält genau dann den Zustand q_2 wenn das Wort w mit 01 endet

IA: (1) besagt, dass $\delta^*(q_0, w)$ den Zustand q_0 enthält, was aufgrund der Def von δ^* stimmt.
(2) besagt ε endet nicht mit 0 und nach der Def. von δ^*, dass $\delta^*(q_0, \varepsilon)$ q_1 nicht enthält.

IS: w sei def. als xa, dann folgt aus $|w| = n+1$
$|x| = n$

(1) $\delta^*(q_0, x)$ enthält q_0. Da sowohl mit 0 als auch mit 1 ein Übergang nach q_0 möglich ist folgt daraus, dass $q_0 \in \delta^*(q_0, w)$. Damit ist (1) für w bewiesen.

(2) Wenn $a = 0$ dann gilt $q_1 \in \delta^*(q_0, w)$. Wenn $q_1 \in \delta^*(q_0, w)$, dann kann der Automat nur dann den Zustand q_1 annehmen, wenn die Eingabefolge w die Form $x0$ hat.

(3) Wenn $w = xa$ und w endet mit 01, dann ist $a = 1$ und x endet mit 0. (2) besagt, dass $q_1 \in \delta^*(q_0, x)$. Da für die Eingabe 1 ein Übergang von q_1 nach q_2 definiert ist, folgt daraus $q_2 \in \delta^*(q_0, w)$. Wenn $q_2 \in \delta^*(q_0, w)$, dann ist der Übergang in den Zustand q_2 nur dann möglich, wenn w die Form $x1$ hat, wobei $q_1 \in \delta^*(q_0, x)$. Die Anwendung von (2) ergibt, dass x mit 0 endet. Folglich endet w mit 01.

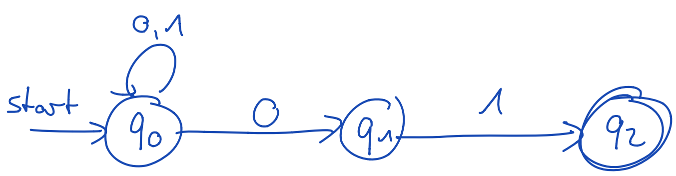
Äquivalenz von NEAs und DEAs

NEA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ und DEA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

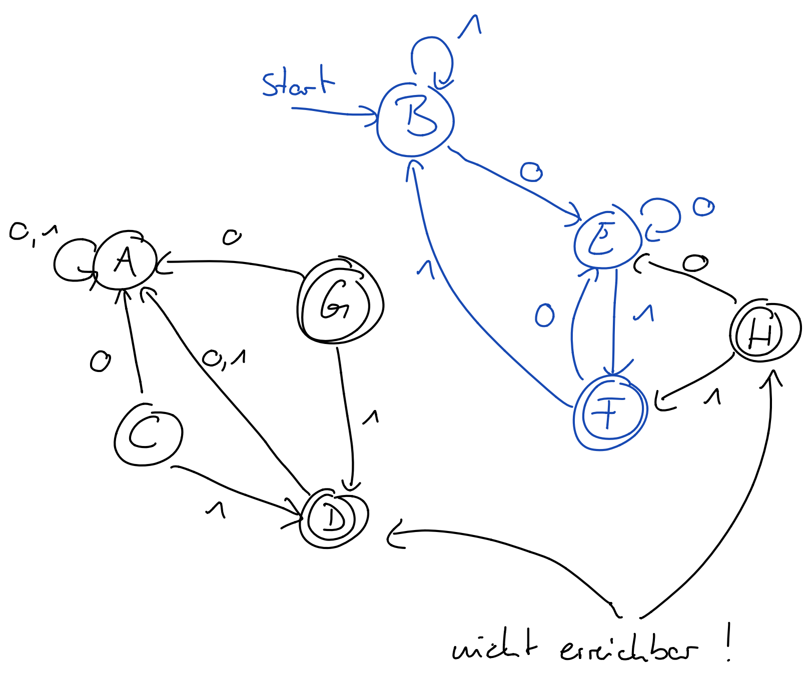
$\Rightarrow$ zu zeigen: $L(N) = L(D)$

$\Rightarrow$ Teilmengenkonstruktion / Potenzmengenkonstruktion

Beispiel:



	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q^2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$



	0	1
A	A	A
$\rightarrow$ B	E	B
C	A	D
* D	A	A
E	E	F
* F	E	B
* G	A	D
* H	E	F

ε - Übergänge

- Formale Beschreibung des ε-NEA A:

  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Alles außer δ wird wie beim NEA interpretiert
- Die Übergangsfunktion akzeptiert folgende Argumente:

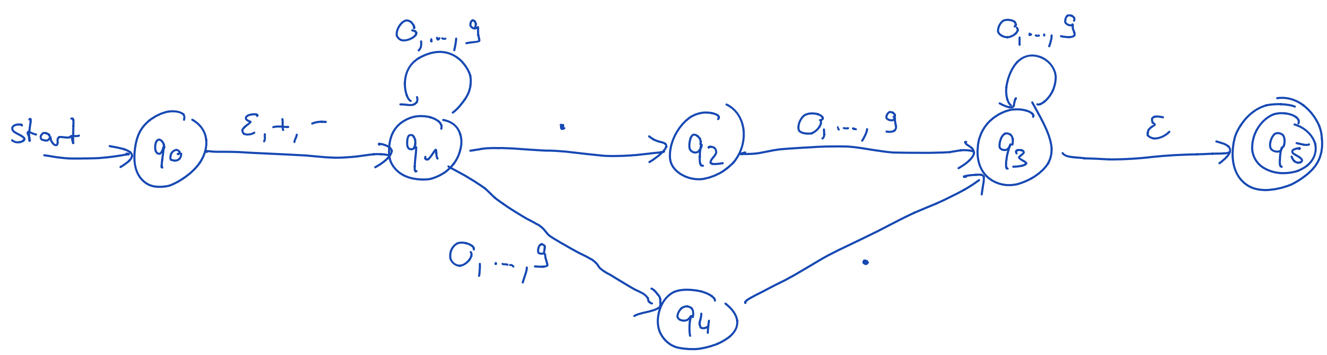
  1. Einen in Q enthaltenen Zustand

  2. Ein Element aus $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$

     ↳ d.h. entweder ein Eingabesymbol aus Σ oder das Symbol ε

     ↳ ε darf kein Element von Σ sein!

- Beispiel:



- Der NEA wird formal angegeben mit

$$E = (\{q_0, \dots, q_5\}, \{\cdot, +, -, 0, \dots, 9\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

wobei δ definiert wird durch

	ε	$+,-$	$\cdot$	$0,\dots,9$
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Epsilon - Hüllen

= Folge aller ε-Übergänge aus einem Zustand q (mit rekursivem Aufruf aller gefundenen Zustände)

=> Formale Definition per Induktion:

IA: Zustand q ist in ε-Hülle(q) enthalten

IS: Wenn p in ε-Hülle(q) enthalten ist und ein Übergang von p in einen Zustand r mit der Beschriftung ε existiert, dann ist auch r in ε-Hülle(q) enthalten.

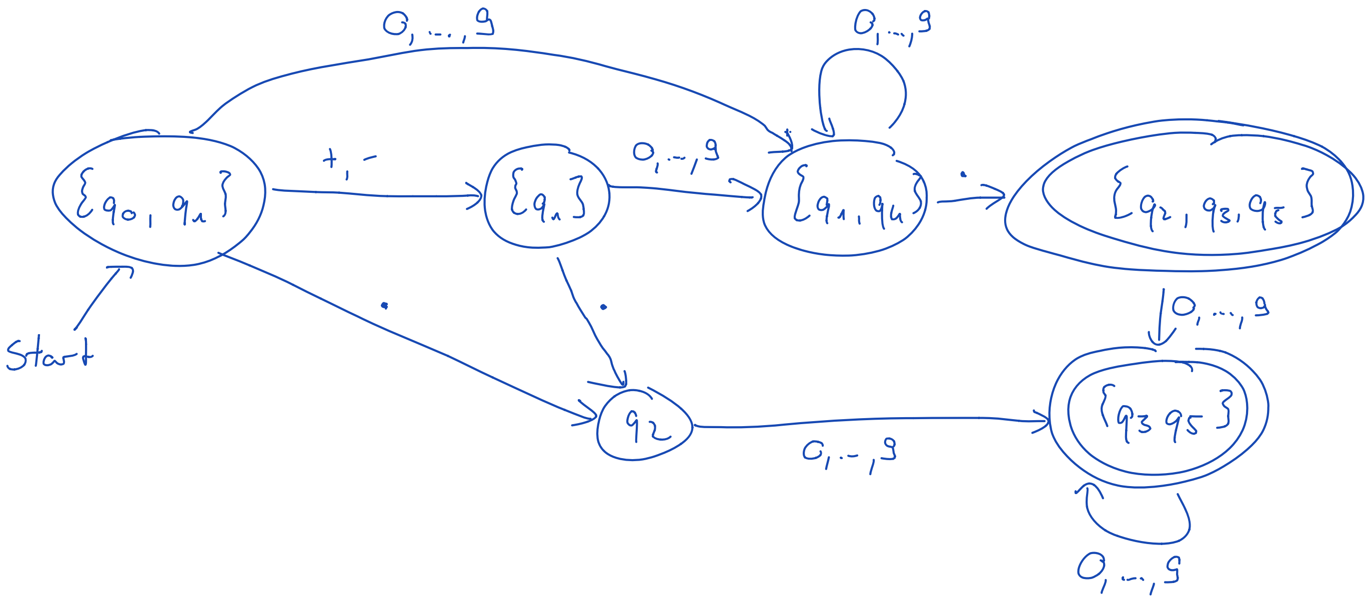
ε - NEAs

- Die Sprache eines ε-NEA $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:

$$L(E) = \{ w \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

- Zu jedem ε-NEA lässt sich ein DEA konstruieren, welcher die gleiche Sprache akzeptiert

- Beispiel

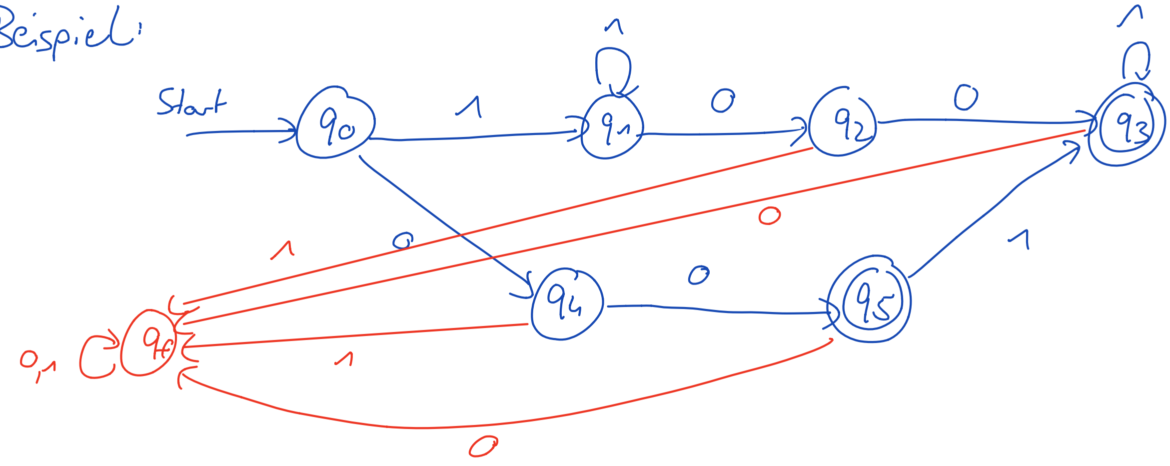


Minimierungsalgorithmus

- Für DEAs

  ↳ Automat muss vollständig sein

  Beispiel:



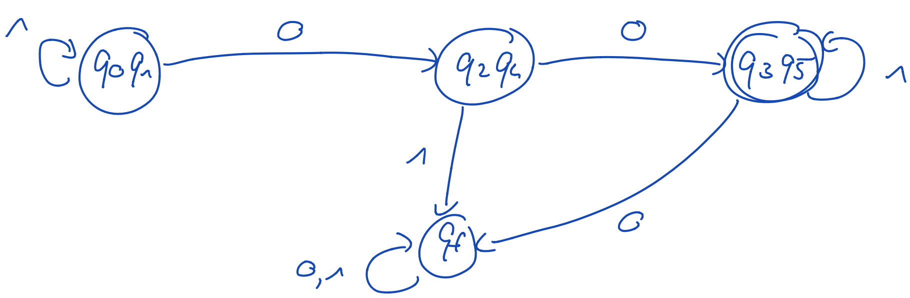
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_f
q_0							
q_1							
q_2	1	1					
q_3	0	0	0				
q_4	1	1		0			
q_5	0	0	0		0		
q_f	2	2	1	0	1	0	

$q_0 \equiv q_1$

$q_2 \equiv q_4$

$q_3 \equiv q_5$

$\Downarrow$



Nerode Rechtskongruenz

$u \sim_L v \;:\Longleftrightarrow\; \forall w \in \Sigma^* :$ uw und vw sind beide in L
oder beide nicht in L

↳ Äquivalenzrelation $\sim_L$ auf Σ^*
↳ Index von $\sim_L$: Anzahl der Äquivalenzklassen
↳ kanonischer DEA zu L

$\Rightarrow$ Satz von Myhill und Nerode:
$L \subseteq \Sigma^*$ ist erkennbar $\Longleftrightarrow$ $\sim_L$ hat endlichen Index

Beispiel: $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat mehr } b \text{ als } a \}$

$$\left.\begin{array}{l} b^n \in L \\ b^k \in L \end{array}\right\} k < n,\ k \neq n,\ (k, n) \in \mathbb{N}$$

$$b^n a^k \in L$$
$$b^k a^k \notin L$$

$\Rightarrow b^n \not\sim_L b^k$
$(b^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind unendlich viele paarweise nicht äquiv. Wörter
$\Rightarrow |\sim_L| = \infty$
$\Rightarrow L$ ist nicht erkennbar

Synthese endlicher Automaten

↳ Produktautomat