

LEHRBUCH

Erich Boeck

# Lehrgang Elektrotechnik und Elektronik

Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik  
und Elektronik mit ihren Anwendungen zur  
Analyse elektrotechnischer Prozesse



Springer Vieweg

---

## Lehrgang Elektrotechnik und Elektronik

---

Erich Boeck

# Lehrgang Elektrotechnik und Elektronik

Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik  
und Elektronik mit ihren Anwendungen zur  
Analyse elektrotechnischer Prozesse



Springer Vieweg

Dr.-Ing. Erich Boeck  
Technische Universität Hamburg-Harburg  
Institut für Technische Bildung und Hochschuldidaktik  
Hamburg, Deutschland

[www.erich-boeck.de](http://www.erich-boeck.de)  
boeck@tuhh.de

ISBN 978-3-658-10624-9  
DOI 10.1007/978-3-658-10625-6

ISBN 978-3-658-10625-6 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg  
© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017  
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature  
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH  
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Strasse 46, 65189 Wiesbaden, Germany

## Vorwort

Im vorliegenden Lehrgang werden die theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik mit ihren Anwendungen zur Analyse elektrotechnischer Vorgänge in engem Zusammenhang mit den Hauptanwendungsfeldern dargestellt, die üblicherweise fast alle nichtelektrotechnischer Art sind. Dabei erscheint es als wichtig, dass die theoretischen Grundlagen ein anerkanntes „Werkzeug“ zur Bewältigung praktischer Aufgaben darstellen.

Heute wird im Studium insbesondere ein Überblick im jeweiligen Berufsfeld und Fachgebiet zur Orientierung in den sich schnell wandelnden Technologien gegeben. Exemplarisch werden diese an einigen repräsentativen Aufgabenstellungen vertieft, um so die Grundlagen für eine vor allem selbstständige Erarbeitung fachlicher und beruflicher Inhalte zu schaffen. Der Lehrgang soll gerade dafür einmal eine Anleitung zur eigenen Orientierung bei einer Anwendung geben und zum anderen immer wieder eine Einordnung in den Gesamtzusammenhang der Theorie ermöglichen, um so die Übertragbarkeit auf weitere Aufgaben zu erreichen.

Die Inhalte entwickelten sich in der Lehrtätigkeit für Studenten nichtelektrotechnischer Fachrichtungen sowie in fast zwanzig Jahren für Lehramtsstudenten elektrotechnischer Berufe. Im Vordergrund stehen deshalb das Kennen, Einordnen und Verstehen des Zusammenwirkens der theoretischen Begriffe, das Bewerten von Inhalten der Fachliteratur sowie neuer Entwicklungsrichtungen und insbesondere das Analysieren und Aufklären der Funktionsweise von Geräten, Einrichtungen und Anlagen. Dagegen ist die eigene elektrotechnische bzw. elektronische Entwicklungstätigkeit nicht gleichermaßen erforderlich.

Es wird der Bogen von den Grundlagen – den Vorgängen in Leitern, Nichtleitern und im Magnetfeld – über die Analyse elektrischer Stromkreise bei Gleich- und zeitveränderlichen Strömen, die Analyse von Halbleiterbauelementen, analogen und digitalen Schaltungen bis zur Analyse von Signalen und Systemen, Analysen in der Regelungstechnik, der Antriebstechnik und der Leistungselektronik gespannt. Darüber hinaus wurden kurze Exkurse zur benötigten Mathematik eingebunden.

Die theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik haben sich vor allem durch experimentelle Untersuchungen und Entdeckungen entwickelt. Deren Interpretationen und insbesondere ihre zunehmende mathematische Beschreibung führten zur Herausbildung der heutigen Theorien. Die Darlegung des experimentellen Ursprungs fördert das Verstehen der Begriffe und Gesetzmäßigkeiten sowie deren mathematischen Formulierungen, die sich vielfach bewährt und somit durchgesetzt haben. In diesem Sinne erscheint die Theorie als komprimierte Erfahrung. Eine exakte Kenntnis kann somit nicht ersetzt werden. Wichtig ist aber, wie man Fragen an die Theorie stellt und die Theorie für deren Antworten entfaltet. Das soll für viele wichtige Hauptanwendungsfelder aufgezeigt werden.

Dieser kompakte Lehrgang richtet sich insbesondere an Lehramtsstudenten elektrotechnischer Berufe, an Berufsschullehrer, an Studenten nichtelektrotechnischer Fachrichtungen sowie an Praktiker (nichtelektrotechnischer Richtungen), die eine Einordnung ihrer Erfahrungen in den elektrotechnischen Hintergrund benötigen. Nach den theoretischen Grundlagen erfolgt für diese Studenten der notwendige Überblick zu vielen relevanten Anwendungsgebieten in gleichartig heruntergebrochener Abhandlung.

Über Anregungen zu Verbesserungen (oder Hinweise zu leider immer möglichen Unkorrektheiten) wäre ich sehr dankbar.

Meinen Kollegen aus dem Institut für Technik, Arbeitsprozesse und Berufliche Bildung danke ich für die Anregung und Ermutigung zu diesem Lehrbuch. Bei Dr. Hanno Kallies bedanke

ich mich für die Erprobung von Inhalten mit seinen Studenten, daraus resultierende Hinweise sowie seine Zuarbeit zu Abschnitt 21 und bei Prof. Joseph Pangalos für den Anstoß zu dieser Arbeit sowie die Hilfe zur Regelungstechnik.

Dankbar bin ich auch allen meinen Lehrern und Hochschullehrern, die ich nicht einzeln nennen möchte, für meine insgesamt solide Ausbildung.

Mein Dank gilt insbesondere meiner Frau für die Unterstützung und den fortwährenden Ansporn. Frau Helga Engel danke ich für die geduldige Durchsicht der Texte.

Rostock, Mai 2015

Erich Boeck

# Inhaltsverzeichnis

1	Einführung zu den theoretischen Grundlagen.....	1
2	Einleitung zur Elektrotechnik .....	5
2.1	Die Ladung.....	6
2.2	Die Ladung als Ausgangspunkt.....	7
3	Erster Exkurs Mathematik.....	9
3.1	Vektorrechnung.....	9
3.2	Ableitung und Integration nach Weg, Fläche und Volumen.....	10
3.3	Partielle Ableitungen* .....	11
4	Vorgänge in elektrischen Leitern.....	13
4.1	Grundbegriffe im Leiter – Strom, Spannung .....	13
4.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen .....	13
4.1.2	Messung der Größen in Leitern – Ladung, Strom, Spannung.....	17
4.1.3	Übungsaufgaben zur Verdeutlichung praktischer Größenordnungen.....	19
4.1.4	Wichtige Formen und Kenngrößen .....	20
4.1.5	Messung und Darstellung von Feldern in leitenden Medien – Feldlinien .....	21
4.2	Strom-Spannungs-Beziehung am Widerstand .....	25
4.2.1	Driftbewegung und Ohm'sches Gesetz.....	25
4.2.2	Bauformen und Kenngrößen .....	27
4.2.3	Messung von Widerständen .....	28
4.2.4	Nichtlineare Widerstände .....	29
4.2.5	Übungsaufgaben zum Widerstand .....	30
4.3	Kirchhoff'sche Sätze sowie Reihen- und Parallelschaltung .....	31
4.3.1	Knotenpunkt und Maschensatz .....	31
4.3.2	Parallel- und Reihenschaltung, Strom- und Spannungsteilung.....	32
4.3.3	Übungsaufgaben zu einigen praktischen Anwendungen .....	34
4.4	Energieumwandlung und Leistung.....	35
4.4.1	Energie, Leistung und Wirkungsgrad.....	35
4.4.2	Messung von Energie und Leistung .....	36
4.4.3	Übungsaufgaben zur Leistung.....	38
4.4.4	Anwendung in der Elektrochemie (Batterien, Akkus, Elektrolyse)* .....	39
4.4.5	Anwendung in der Wärmelehre* .....	42
4.4.6	Anwendung in der Lichttechnik* .....	44
4.4.7	Übungsaufgaben zu Chemie, Wärme, Licht * .....	46
5	Vorgänge in elektrischen Nichtleitern .....	47
5.1	Grundbegriffe im Nichtleiter – Verschiebungssfluss .....	47
5.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen .....	47
5.1.2	Messung und Darstellung von elektrostatischen Feldern.....	49
5.2	Ladung, Strom und Spannung am Kondensator.....	49
5.2.1	Zusammenhang von Ladung und Spannung sowie Strom und Spannung .....	49
5.2.2	Zeitverhalten von I und U an der Kapazität .....	53
5.2.3	Bauformen und Kenngrößen .....	54
5.2.4	Messung der Kapazität .....	54
5.2.5	Übungsaufgaben zur Kapazität .....	55
5.2.6	Messung des Zeitverlaufes mit einem Messoszilloskop .....	56
5.2.7	Anmerkungen zu Dielektrika* .....	57
5.3	Energie und Kräfte im elektrischen Feld des Nichtleiters.....	58
5.3.1	Beschreibung von Energie und Kräften .....	58
5.3.2	Anwendungsbeispiel zu Energie und Kräften.....	60
5.3.3	Übungsaufgabe zu Energie und Kräften .....	61

6	Vorgänge im Magnetfeld .....	63
6.1	Grundbegriffe: magnetische Urspannung, Fluss, Widerstand .....	63
6.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen .....	63
6.1.2	Der magnetische Kreis .....	64
6.1.3	Übungsaufgaben zum magnetischen Kreis .....	67
6.1.4	Das Durchflutungsgesetz .....	67
6.1.5	Messung und Darstellung von magnetischen Feldern – Feldlinien .....	69
6.1.6	Lorentzkraft .....	70
6.1.7	Das Induktionsgesetz .....	71
6.1.8	Übungsaufgaben zur Durchflutung und Induktion .....	74
6.2	Koppelfluss, Strom und Spannung an der Induktivität (Spule) .....	76
6.2.1	Zusammenhang zwischen Koppelfluss, Spannung und Strom .....	76
6.2.2	Anmerkungen zu magnetischen Materialien* .....	80
6.2.3	Bauformen und Kenngrößen .....	82
6.2.4	Messung der Induktivität .....	82
6.2.5	Übungsaufgaben zur Induktivität .....	83
6.2.6	Messung von Zeitverläufen an der Induktivität .....	85
6.3	Energie und Kräfte im magnetischen Feld .....	86
6.3.1	Beschreibung von Energie und Kräften .....	86
6.3.2	Anwendungen zu Kräften im Magnetfeld .....	88
6.3.3	Übungsaufgaben zu Kräften im Magnetfeld .....	89
7	Zusammenfassung und Gegenüberstellung .....	91
7.1	Gegenüberstellung der Grundgrößen .....	91
7.2	Erweiterungen zu den theoretischen Grundlagen .....	94
7.2.1	Beispiele verkoppelter Felder (Skineffekt, Wellenleitung)* .....	95
7.2.2	Zusammenfassende Aspekte der Messtechnik .....	97
7.2.3	Messoszilloskop .....	99
8	Zweiter Exkurs Mathematik .....	101
8.1	Lösung linearer Gleichungssysteme .....	101
8.2	Lösung linearer Differentialgleichungen* .....	102
9	Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke .....	105
9.1	Grundstromkreis .....	105
9.1.1	Analyse eines Grundstromkreises .....	105
9.1.2	Interpretation der Kenngrößen für verschiedene Anwendungen .....	110
9.1.3	Messungen am Grundstromkreis .....	112
9.1.4	Übungsaufgaben zu Anwendungen des Grundstromkreises .....	114
9.2	Netzwerke – verzweigte und vermaschte Schaltungen .....	115
9.2.1	Analyse verzweigter und vermaschter Schaltungen .....	115
9.2.2	Übungsaufgaben mit Beispielen zur Schaltungsberechnung .....	119
9.3	Überlagerungsprinzip .....	121
9.3.1	Schaltungsanalyse mit Hilfe des Überlagerungssatzes .....	121
9.3.2	Übungsaufgaben zu Anwendungen des Überlagerungssatzes .....	123
9.4	Ersatzzweipole (Ersatzschaltungen) .....	124
9.4.1	Schaltungsanalyse mit Hilfe von Ersatzzweipolen .....	124
9.4.2	Übungsaufgaben zur Anwendung von Ersatzzweipolen .....	125
9.5	Modellierung und Simulation .....	126
9.5.1	Grundlagen der Modellierung für Simulationsprogramme .....	126
9.5.2	Beispielaufgabe für eine Rechnersimulation .....	127
9.6	Ausblick auf weitere Analysemethoden .....	127
10	Dritter Exkurs Mathematik .....	129
10.1	Komplexe Zahlen .....	129

10.2	Rechnen mit komplexen Zahlen.....	129
10.3	Grafische Darstellung komplexer Zahlen .....	130
10.4	Fourierreihe .....	131
10.5	Unstetige Zeitfunktionen (Distributionen)* .....	133
10.6	Fouriertransformation*.....	133
10.7	Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation* .....	134
10.8	Laplacetransformation* .....	135
10.9	Rechnen mit logarithmischen Pegeln .....	137
11	Analyse bei zeitveränderlichen Signalen .....	139
11.1	Schaltungen und Geräte mit sinusförmigen Signalen .....	140
11.1.1	Behandlung mit Hilfe der komplexen Rechnung .....	140
11.1.2	Behandlung mit grafischen Methoden .....	143
11.1.3	Analyse des Frequenzverhaltens wichtiger Schaltungen .....	147
11.1.4	Parameter für elektrische Stromkreise .....	150
11.1.5	Kennwerte und Übungsaufgaben .....	152
11.1.6	Messung des Frequenzgangs eines Schwingkreises.....	154
11.2	Nichtsinusförmige periodische Signale.....	155
11.2.1	Mehrere sinusförmige Quellen.....	155
11.2.2	Behandlung mit Hilfe der Fourierreihe .....	156
11.2.3	Wichtige Testsignale zur Analyse von Schaltungen .....	157
11.2.4	Kennwerte und Übungsaufgaben .....	159
11.3	Nichtperiodische Signale.....	159
11.3.1	Behandlung mit der Fouriertransformation .....	159
11.3.2	Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation .....	160
11.4	Schalt- und Übergangsvorgänge .....	161
11.4.1	Behandlung mit Hilfe der Laplacetransformation.....	161
11.4.2	Beispiel: Analyse des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises.....	162
11.4.3	Übertragungsfunktionen von Systemen .....	168
11.4.4	Kennwerte und Aufgaben.....	170
11.4.5	Messung des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises.....	171
12	Halbleiterbauelemente.....	175
12.1	Physikalische Grundlagen für Festkörper .....	176
12.1.1	Leitungsmechanismus in Festkörpern.....	176
12.1.2	Dotierung von Halbleitermaterial.....	180
12.1.3	Kennwerte von Halbleitermaterialien und Übungsaufgaben .....	182
12.2	PN-Übergang.....	183
12.2.1	Gleichgewicht von Diffusion und Feld .....	183
12.2.2	Einfluss einer äußeren Spannung .....	185
12.2.3	Kennlinie eines PN-Übergangs .....	187
12.2.4	Metall-Halbleiter-Übergang .....	189
12.2.5	Ersatzschaltungen für eine Halbleiterdiode.....	191
12.2.6	Kennwerte und Übungsaufgaben zu Halbleiterdioden.....	192
12.2.7	Messung und Auswertung der Kennlinie von Dioden .....	194
12.3	Bipolartransistor .....	196
12.3.1	Steuerung durch Trägerinjektion.....	196
12.3.2	Kennlinie des Bipolartransistors .....	198
12.3.3	Grundschaltungen, Vierpoldarstellung und Kleinsignalverhalten .....	199
12.3.4	Kennwerte und Übungsaufgaben zum Transistor .....	203
12.3.5	Messungen am Transistorverstärker.....	205
12.4	Feldeffekttransistor.....	205
12.4.1	Trägeranreicherung und -verarmung im Kanal .....	205

12.4.2	Kennlinien, Ersatz- und Grundschatungen des FET .....	207
12.4.3	Kennwerte und Beispiele zum Feldeffekttransistor .....	208
12.5	Weitere wichtige Halbleiterbauelemente .....	209
13	Analoge Schaltungstechnik .....	211
13.1	Einteilung von Verstärkerschaltungen .....	211
13.1.1	Arbeitspunkt, Eigenschaften und Betriebsverhalten .....	211
13.1.2	Anforderungen der Anwendung .....	213
13.2	Operationsverstärkertechnik .....	213
13.2.1	Differenzverstärker, Operationsverstärker und seine Parameter .....	213
13.2.2	Prinzip der Gegenkopplung .....	217
13.2.3	Dimensionierung von Operationsverstärkerschaltungen .....	219
13.2.4	Messen von Parametern bei Operationsverstärkern .....	221
13.2.5	Schaltungsbeispiele mit Operationsverstärkern .....	222
13.3	Übungsaufgaben zum Operationsverstärker .....	225
14	Vierter Exkurs Mathematik .....	227
14.1	Mathematische Grundlagen – Zahlensysteme .....	227
14.2	Rechnen mit verschiedenen Zahlensystemen .....	229
15	Digitale Schaltungstechnik .....	231
15.1	Grundlagen digitaler Signale .....	231
15.1.1	Informationstechnische Grundlagen digitaler Signale .....	231
15.1.2	Quantisierung von Signalen und Codierung .....	233
15.1.3	Grundlagen digitaler Signalverarbeitung – Schaltalgebra .....	236
15.1.4	Übungsaufgaben zu Zahlen, Codierung und Schaltalgebra .....	238
15.2	Kombinatorische Schaltungen (Schaltnetze) .....	239
15.2.1	Entwurf kombinatorischer Schaltungen .....	239
15.2.2	Wichtige Beispiele zu Schaltnetzen .....	241
15.2.3	Übungsaufgaben und Versuch zu Schaltnetzen .....	243
15.3	Sequentielle Schaltungen (Schaltwerke) .....	243
15.3.1	Wichtige Speicheranordnungen .....	243
15.3.2	Beispiel für den Entwurf einer Ablaufsteuerung .....	247
15.3.3	Versuch zur Schrittstufe * .....	250
15.4	Richtungen der weiteren Entwicklung .....	250
16	Analyse von Signalen und Systemen .....	253
16.1	Wichtige Signale und Systeme in der Elektronik .....	255
16.1.1	Kennwerte für Audiosignale und -geräte .....	255
16.1.2	Messungen an einem analogen Mischpult .....	258
16.1.3	Kennwerte und Beispiele für Videosignale und -geräte .....	260
16.1.4	Messung der Eigenschaften an RGB-Signalen .....	263
16.2	Analyse analog modulierter Signale .....	263
16.2.1	Amplitudenmodulation .....	263
16.2.2	Frequenzumsetzung mit dem Überlagerungsverfahren .....	265
16.2.3	Frequenzmodulation .....	266
16.2.4	Phasenmodulation .....	268
16.2.5	Stereo- und Videosignalmodulation .....	268
16.2.6	Kennwerte, Übungsaufgaben und Simulation modulierter Signale .....	270
16.3	Diskrete Signale .....	272
16.3.1	Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation .....	272
16.3.2	Digitale Modulationsverfahren .....	275
16.3.3	Codierung, Kompression und Fehlerkorrektur digitaler Signale .....	277
16.3.4	Kennwerte und Übungsaufgaben für diskrete (digitale) Signale .....	280

17	Zusammenfassung zur Regelungstechnik .....	283
17.1	Wichtige Regelkreisglieder und -strategien .....	285
17.1.1	Regelstrecken .....	286
17.1.2	Regeleinrichtungen.....	286
17.1.3	Reglerstrukturen.....	288
17.2	Regelungstechnische Analyse, Entwurf und Implementierung .....	292
17.3	Übungsaufgaben zur Steuerung und Regelung .....	293
18	Fünfter Exkurs Mathematik* .....	295
18.1	Raumzeigertransformation* .....	295
18.2	Drehstrom und -felder in der Raumzeigerdarstellung* .....	295
19	Energiewandlung und Antriebe.....	297
19.1	Maschinen bei Gleichstrom.....	298
19.1.1	Aufbau und Funktion der Gleichstrommaschine .....	298
19.1.2	Schaltungen und Betrieb der Gleichstrommaschine .....	299
19.1.3	Kennwerte und Übungsaufgaben .....	304
19.1.4	Messen der Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie .....	304
19.2	Maschinen für Wechselstrom.....	305
19.2.1	Transformator als ruhende Maschine .....	305
19.2.2	Universalmotor.....	309
19.2.3	Kennwerte und Übungsaufgaben .....	310
19.2.4	Messen der Kennwerte eines Transformators .....	311
19.3	Drehfeldmaschinen.....	311
19.3.1	Dreiphasensysteme für Strom und Spannung .....	311
19.3.2	Das Drehfeld .....	315
19.3.3	Asynchronmaschine .....	316
19.3.4	Synchronmaschine .....	322
19.3.5	Parallelbetrieb eines Synchrongenerators zum Netz.....	325
19.3.6	Inselbetrieb und Betriebsverhalten der Synchronmaschine .....	327
19.3.7	Kennwerte Übungs- und Messaufgaben .....	328
19.4	Auswahl eines Motors für eine Antriebsaufgabe .....	330
19.5	Ausblick, weitere elektrische Maschinen.....	331
20	Leistungselektronische Energiewandler.....	333
20.1	Arbeitsweise von Stromrichtern.....	333
20.1.1	Grundprinzip und Eigenschaften.....	333
20.1.2	Steueralgorithmen für selbstgesteuerte Stromrichter .....	338
20.1.3	Steueralgorithmen für fremdgesteuerte Stromrichter.....	340
20.1.4	Kennwerte und Übungsaufgaben .....	341
20.2	Beispiele für Stromrichter .....	342
20.2.1	Phasenanschnittsteuerung für Wechselstromsteller .....	342
20.2.2	Messungen an einem Dimmer mit Phasenanschnitt.....	343
20.2.3	Mit Frequenzumrichter gesteuerter Asynchronmotor .....	343
20.2.4	Netzgelöschter Wechselrichter.....	344
20.2.5	Messen an einem netzgelöschten Wechselrichter .....	346
20.3	Entwicklungstrends .....	347
21	Kurzes Fazit zur Arbeit im Beruf.....	349
22	Lösungen der Übungsaufgaben .....	351
22.1	Lösungen zu Abschnitt 4.....	351
22.2	Lösungen zu Abschnitt 5.....	355
22.3	Lösungen zu Abschnitt 6.....	357
22.4	Lösungen zu Abschnitt 9.....	364
22.5	Lösungen zu Abschnitt 11.....	370

22.6	Lösungen zu Abschnitt 12.....	378
22.7	Lösungen zu Abschnitt 13.....	385
22.8	Lösungen zu Abschnitt 15.....	386
22.9	Lösungen zu Abschnitt 16.....	390
22.10	Lösungen zu Abschnitt 17.....	394
22.11	Lösungen zu Abschnitt 19.....	395
22.12	Lösungen zu Abschnitt 20.....	399
	Literaturverzeichnis.....	401
	Sachverzeichnis .....	403

# 1 Einführung zu den theoretischen Grundlagen

Jede Tätigkeit (ob bei der Facharbeit, der Ingenieurstätigkeit oder der Arbeit eines Lehrers im Unterricht) erfordert eine Verbindung von Wissen und Fähigkeiten mehrerer verschiedener Disziplinen – ist also interdisziplinär. Jede dieser Disziplinen hat ihre eigene Begrifflichkeit und damit Struktur entwickelt, die für deren Verständnis notwendig ist. Wird z.B. die Analyse der elektrotechnischen Arbeit an den Leistungen/Dienstleistungen für die Kunden des Handwerks orientiert (Häg02 S. 115-118), so ergibt sich eine Struktur zur Einteilung der Arbeit in Handlungsfelder und für einen Unterricht in Lernfelder. Eine solche Einteilung entspricht den Erfordernissen der Arbeitsprozesse in der Facharbeit. Die Erfordernisse der Arbeit eines Lehrers folgen aus der Analyse seiner Unterrichtstätigkeit und der dazu notwendigen Vorbereitung und Absicherung, die eines Ingenieurs aus der Analyse dessen Tätigkeiten in der Produktionsleitung bis zur Konstruktions-, Entwicklungs- oder Forschungstätigkeit. Die Kenntnis der verschiedenen Begriffe und Wissensstrukturen der Disziplinen ist eine Voraussetzung, um den jeweiligen Inhalt zu verstehen. Ein Ausbildungsziel sollte darin bestehen, dass die Auszubildenden unmittelbar die notwendigen **Verbindungen des Wissens der verschiedenen Disziplinen** erleben, selbst herstellen und mit ihrem jeweiligen Arbeitsprozess verknüpfen. (In der traditionellen Ausbildung wurde gerade dieses vorwiegend jedem selbst überlassen.) Mit einer solchen Erfahrung können Gestaltungsspielräume beim Lösen von Aufgaben wahrgenommen und ausgefüllt werden.

Im folgenden Lehrgang geht es um elektrotechnische Fragestellungen sowie davon ausgehende Hinweise zur erfolgreichen Anwendung bei verschiedenen praktischen Aufgaben. Zur Bewältigung dieser Fragestellungen ist elektrotechnisches Fachwissen unabdingbar. Sicher unverzichtbar, aber auch schnell vergänglich reichen einfache *Informationen*, *Informationssammlungen*<sup>1</sup> nicht, um den Einsatz zu bewerten, über örtliche Anpassungen zu entscheiden, geschweige denn ein Zusammenwirken mit vorhandenen (evtl. älteren) Teilen zu gewährleisten. Dazu sind hinreichend theoretisch fundiertes sowie anwendungsbereites aktives Wissen und somit Gestaltungsfähigkeit (in allen relevanten Disziplinen) erforderlich.

## Aktives Wissen erlaubt

- ein **Denken**, das zum Verständnis und zu der Fähigkeit einer Bewertung der betreffenden elektrotechnischen Vorgänge führt, sowie
- ein **Verstehen** der notwendigen Zusammenhänge zwischen den Vorgängen.

## Anwendungsbereites Wissen befähigt zu

- bewusstem **selbstgeführtem** praktischem Handeln sowie
- dem Erkennen und Nutzen **vorhandener** Gestaltungsmöglichkeiten.

Auch das elektrotechnische Fachwissen selbst tritt bei seinem Einsatz immer in komplexer Form und verbunden mit der Disziplin der Anwendung<sup>2</sup> auf.

Weiter kommt zum Tragen, dass seit der Herausbildung der Elektrotechnik die Tätigkeit auf diesem Gebiet von drei **Besonderheiten** dieser Technik bestimmt wird.

<sup>1</sup> z.B. Informationen

- über einsetzbare Elemente, Geräte und Anlagen sowie deren Ausstattungsmerkmale von möglichst vielen Anbietern oder
- zur Befestigung/Aufstellung, Montage und Installation der „vom Kunden“ ausgewählten Geräte oder
- über Vorschriften zur Auswahl bzw. Dimensionierung von Zuleitungen Sicherungen u.Ä.

<sup>2</sup> z.B. mechanischer Antrieb, Waschvorgang, Bildbearbeitung/-übertragung, Datenverarbeitung ...

Unabhängig von den immer schnelleren Veränderungen der Technologien sind **Vorgänge und Prozesse der Elektrotechnik**<sup>3</sup> grundsätzlich durch

- *Intransparenz*, die nur punktuell durch Messmittel aufgehoben werden kann,
- heute sogar noch stark zunehmende *Komplexität* und
- eine deutliche *Eigendynamik*

gekennzeichnet.

Diese Besonderheiten verbinden die Elektrotechnik z.B. mit der Informatik und der Prozesssteuerung sowie weiteren Bereichen (vergleiche (Dör89 S. 58 ff)).

Der Umgang mit diesen Besonderheiten verlangt in der Vorstellung von Elektrotechnikern ein **gedankliches Abbild** der Vorgänge und Prozesse<sup>3</sup> sowie einen ständigen Vergleich mit den punktuell sichtbaren Ereignissen. Nur durch dieses „**elektrotechnische Denken**“ – gepaart mit der Entwicklung der dazu notwendigen **Intuition**<sup>4</sup> – kann die tatsächliche Funktion kontrolliert, können eine Anlage in Betrieb genommen, ein Prozess gesteuert und optimiert, eine Fehlfunktion korrigiert oder gar eine Anlage geplant, projektiert und errichtet werden, d.h., kann Gestaltung (auf der elektrotechnischen Ebene) realisiert werden. Andererseits ist dazu eine **ausreichende Basis an theoretischem Wissen** erforderlich, damit die genannten gedanklichen Abbilder bei aller notwendigen Reduktion die Realität auch wiedergeben können.

Komplexität wird immer individuell wahrgenommen (Dör89 S. 58 ff) und verarbeitet, sodass jeder Lernende seinen Weg finden, seine **Intuition**<sup>4</sup> entwickeln muss. Für den Lehrenden heißt das, Komplexität bewusst zu reduzieren, Wissen entsprechend seiner inneren Logik aufzubauen und – bis die notwendige Basis geschaffen ist – schrittweise zu komplexeren Prozessen vorzudringen.

Jede Disziplin benötigt zu ihrem Verständnis (und so zur Erlangung eines aktiven Wissens) entsprechend ihrer eigenen inneren logischen Struktur eine konsequente Darstellung. So ist es nicht möglich, aus der Struktur der Elektrotechnik heraus den Arbeitsprozess und seine optimale, folgerichtige Gestaltung zu vermitteln (oder zu erkennen). Genauso ergibt sich aus der Struktur des Arbeitsprozesses kein logisches Verständnis der inneren Zusammenhänge eines Wissensgebietes und bruchstückhafte Wissensvermittlung führt unweigerlich zu Oberflächlichkeit<sup>5</sup>.

Die verschiedenen Strukturen können nur aus einem **Verständnis der Interdisziplinarität** heraus bewältigt und so alle **wichtigen Querverbindungen** erkannt werden.

Es muss deshalb gelingen, bei den Auszubildenden Verständnis und Akzeptanz des interdisziplinären Charakters und der Notwendigkeit von aktivem Wissen zu erreichen.

Welche Forderungen sind an eine Theorie und ihre Vermittlung zu stellen, damit sie für eine praktische Tätigkeit als unverzichtbares und hervorragendes „Werkzeug“ erkannt wird?

<sup>3</sup> Mit elektrotechnischen Prozessen bezeichnen wir Vorgänge und Abläufe in Systemen (Elemente, Geräte und Anlagen) einschließlich ihrer Intransparenz, Komplexität und Eigendynamik. Dieser kompakte Lehrgang ist für Studenten vorgesehen, die solche Prozesse insbesondere analysieren, verstehen und bewerten können müssen.

<sup>4</sup> Die hohe Komplexität kann heute nur damit ausreichend reduziert werden.

<sup>5</sup> Der Versuch erzeugt eine Degradierung von Wissen (es reichen ja Kurzerklärungen oder Informationssammlungen etwa von Arbeitsblättern). Dies ergibt auch eine Haltung zur Abwertung von Wissen.

- Die Theorie muss eine Plausibilitätsebene besitzen, die Anschaulichkeit und Verständlichkeit anspricht und so Vorstellungskraft und Fantasie erreicht.
- Der Formalismus der Theorie muss für die Lernenden handhabbar sein bzw. beim Umgang mit ihr werden.
- Bei der Vermittlung sind unmittelbar relevante praktische Konsequenzen und Schlussfolgerungen aufzuzeigen und die „Entfaltung der Theorie“ für eine Fragestellung der Anwendung muss selbst erlebt werden.

In meiner Ausbildung habe ich Theorien grundsätzlich immer orientiert auf praktische Anwendungen erfahren. Vielfach konnte ich dabei erleben, wie sich ganze Felder mit neuen Gestaltungsmöglichkeiten eröffneten. Ausgehend von einem Unterricht, bei dem zunehmend der gesamte Arbeitsprozess (mit angelegtem Gestaltungsspielraum) untersucht wird, kann das Nutzen dieses Freiraumes mit aktivem Wissen erlebt werden. *Das müsste einen echten Wissenserwerb fördern.*

**Praxistipp:** Physikalisch exakte Begriffe (z.B. für Strom, Spannung usw.) sind unabdingbar für ein *wirkliches Verständnis der Theorie*. Reduzierte, verkürzte „verständlichere“ Theorien nutzen niemandem.

Zur *praktischen Nutzung* bei der Arbeit sind dagegen vor allem *Erfahrungen* mit den Zahlenwerten bei ihrer Messung erforderlich (z.B.: Was sagt mir 238 V gemessene Netzspannung statt 230 V? Oder z.B. noch verständlicher: Was ziehe ich bei 83 °F an?).

Zusätzliche Aspekte für Lehrende in Bezug auf ihre eigene Tätigkeit betreffend ihrer elektrotechnischen Fachkenntnisse sind:

- Das Wissen inklusive Begriffe und Definitionen mit ihrer Entstehung und Entwicklung, welche im Unterricht vermittelt werden sollen, muss in die Zusammenhänge des Fachgebietes eingebettet und somit vom Lehrenden bewertet werden können.
- Die Fachliteratur muss ausgewertet, bewertet und zutreffende Entwicklungen müssen umgesetzt werden können.
- Technische Lernumgebungen müssen geplant, entwickelt, erprobt, realisiert und gewartet werden können.

Die theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik sind der Gegenstand des folgenden Lehrgangs. Das Ziel ist eine Vermittlung in angeführtem Sinne in sich geschlossen, zusammenhängend und in gleicher Weise für alle wichtigen Grundlagen „heruntergebrochen“.

Der Aufbau folgt der Logik des Verständnisses des Gegenstandes<sup>6</sup>. Die Theorie kann dabei nicht beschnitten werden, wird aber nicht in alle möglichen Richtungen ausdiskutiert und vertieft. (Das wäre für Spezialisten dagegen notwendig.) Ein angemessener Überblick wird nach Möglichkeit angestrebt.

An allen wichtigen Stellen sollen die Bezüge zur praktischen Nutzung dargestellt werden. Übungsaufgaben sowie ratsame Versuchsaufgaben dienen zur eigenen Vertiefung und als Beispiele zu Fragestellungen an die Theorie (sowie deren „Entfaltung“ für diese Frage). Damit wird gleichzeitig eine Diskussion von Fakten und Zusammenhängen verbunden. Im Anhang befinden sich dazu die Lösungen.

<sup>6</sup> Das ist nicht identisch mit der Systematik der Fachdisziplin, da historische und lösungsmethodische Hierarchien nicht einfließen müssen. Die Ordnung folgt vor allem didaktischen Gesichtspunkten zum Verständnis und zur besseren Verarbeitung des Stoffes. Es soll nicht um das Auswendiglernen von ein paar wichtigen Formeln gehen.

Die Abschnitte können auch nach dem gerade benötigten Wissen einzeln genutzt werden. Deshalb erfolgen vor allen Hauptabschnitten Hinweise, welche Abschnitte zum Verständnis vorher zu erarbeiten bzw. als hilfreich anzusehen sind.

Zur leichteren Wiederholung wurden mathematische Exkurse eingefügt. Ergänzende (und interessante) zum unmittelbaren Verständnis aber nicht erforderliche Teile sind mit einem „\*“ gekennzeichnet und können auch überlesen werden.

## 2 Einleitung zur Elektrotechnik

Im Altertum waren bereits die Erscheinungen der Anziehungskraft bei „geriebenem“ Bernstein oder bei einigen eisenhaltigen Mineralien bekannt. Es wird auch vermutet, dass einige Ausgrabungen auf die Möglichkeit zum Galvanisieren (Versilbern, Vergolden) hinweisen könnten (die sogenannte Batterie von Bagdad). Im 16. und 17. Jahrhundert gab es mehrere Versuche und Arbeiten zu Magnetismus und Reibungselektrizität. Exakte Untersuchungen von Ladungen unternahm insbesondere Coulomb. Dennoch begann eine systematische Untersuchung erst mit den Entdeckungen von Galvani und Volta, die in ihrer Folge verwendbare Quellen hervorbrachten.

Ein entscheidender Schritt waren die durch Faraday entwickelten Vorstellungen von Feldern und Feldlinien, verbunden mit dem Übergang zu einer Deutung durch Nahwirkungen, die zu einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Wechselwirkungen führten. Diese Vorstellungen wurden dann von Maxwell mathematisch in anerkannter Weise formuliert.

Damit wurden nun für die Physik zwei Probleme sichtbar:

- Es muss auch im Vakuum einen Träger für die Felder (die Nahwirkungen) geben, dieses führte zur Vertiefung der Äthertheorie, und
- die Felder waren nicht invariant gegenüber Galileitransformationen von einem Inertialsystem in ein anderes. D.h., das bewährte Relativitätsprinzip aus der klassischen Physik galt für die Felder nicht und dies trennte die physikalischen Theorien.

Die Problematik wurde nicht einfacher, nachdem Michelson und Morley in ihrem Versuch keinen Ätherwind nachweisen konnten und sich damit die immer komplizierter werdende Äthertheorie nicht bewährte.

Einstens Gedanke, umgekehrt vorzugehen (Ein70 S. 38 ff) und das Relativitätsprinzip der Feldtheorie, welches er in der Lorentztransformation erkannte, auf die klassische Physik anzuwenden, schuf wieder eine einheitliche Physik. Dabei ergab sich aber als „Nebeneffekt“ das ersatzlose Streichen der Äthertheorie und mit ihr vieler Vorstellungen, aus denen die Begriffswelt der Elektrotechnik z.T. hervorgegangen war. Alle physikalischen Vorgänge waren ausreichend in der mathematischen Formulierung enthalten und diese wiederum in hervorragender und vielfältiger Weise praktisch bestätigt worden (Bor69 S. 192 ff). Somit entstand aber ein „Verzicht“ auf das Verständnis der Funktionsweise der oben genannten Nahwirkung. (In der folgenden Zeit wurde durch den Übergang zu vierdimensionalen mathematischen Räumen und dem Tensorkalkül die Anschaulichkeit in der theoretischen Physik weiter „vernachlässigt“.)

In der Elektrotechnik besteht die Möglichkeit, Anschaulichkeit und Plausibilität zu erreichen, indem die Begriffe konsequent aus praktischen Beobachtungen (dem Experiment, den Messungen) dargestellt werden und die Mathematik „nur“ zur Formulierung unserer Beobachtungen herangezogen wird.

Die Berechtigung dazu ergibt sich, weil die Elektrotechnik vorrangig durch praktische und experimentelle Erfahrungen entstanden ist. Eine theoretische und mathematische Formulierung wurde vielfach anschließend auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse erstellt. (So erscheinen viele Gesetzmäßigkeiten als „mathematischer Ausdruck einer Messkurve“, z.B. das Ohm'sche Gesetz). Für die Herausbildung der Vorstellungen in der Elektrotechnik hat diese Entwicklung eine erkennbare Bedeutung gehabt.

## 2.1 Die Ladung

Experimentelle Untersuchungen, bei denen sowohl Anziehung als auch Abstoßung auftreten, führten zu der Schlussfolgerung, dass es zwei verschiedene Ladungen geben muss. Dafür haben sich zur Unterscheidung die Bezeichnungen „positiv“ bzw. „negativ“ durchgesetzt. Die Festlegung des Vorzeichens einer Ladung erfolgte relativ willkürlich. So wurde die Ladung, die beim Reiben eines Glasstabes entsteht als „positiv“ und die beim Reiben eines Hartgummistabes als „negativ“ bezeichnet. Dadurch ergab sich dann später die Ladung eines Elektrons als negativ. Weil positive und negative Ladungen ihre Wirkung gegenseitig kompensieren, erschien diese Bezeichnung als geeignet, wurde von anderen übernommen und hat sich so durchgesetzt.

Ein ungeladener Körper besteht aus positiv und negativ geladenen Teilchen in gleicher Menge (zusätzlich evtl. aus neutralen Teilchen). Ein Entzug negativer Ladungen (z.B. von Elektronen) lässt einen positiv geladenen Körper zurück; die Aufnahme negativer Teilchen ergibt einen negativ geladenen Körper.

In der Natur gibt es positive und negative Ladungen, immer in gleicher Menge, also ausgeglichen. Es kann aber zeitweilig in begrenzten Gebieten durch Ladungstrennung (z.B. durch Reibung) ein Überschuss bzw. Mangel erzeugt werden, auch wenn insgesamt der Ladungsausgleich immer bestehen bleibt. Das entspricht physikalisch einem Erhaltungssatz:

$$\sum_{\text{über alle}} \text{Ladungen} = 0 \quad (\text{in geschlossenen Systemen}).$$

**Praxistipp:** Das bedeutet, dass Ladungen weder erzeugt noch vernichtet werden können, und diese Tatsache ist für das Verständnis elektrotechnischer Gesetze sehr hilfreich.

1784 hat Coulomb mit einer Torsionswaage die Kraftwirkungen von Ladungen untersucht.

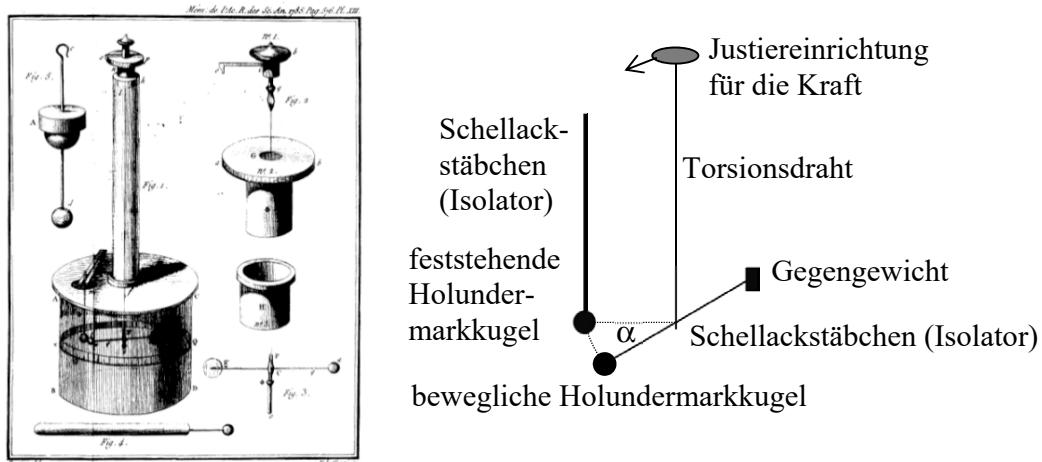


Abb. 2.1: Torsionswaage von Coulomb<sup>7</sup> sowie ihre schematische Darstellung

Durch die Verdrillung (Winkel  $\alpha$ ) des dünnen Torsionsdrahtes konnte Coulomb die kleinen Kräfte sehr genau messen. Dazu wurden beide Holundermarkkugeln durch die Justiereinrichtung so eingestellt, dass sie gerade nebeneinander lagen. Mit einem geladenen Stab wurden beide Kugeln gleichzeitig berührt und bekamen so gleiche Ladungen. Nachdem sie sich abgestoßen hatten, konnte der Winkel als Maß für die Kraft ermittelt werden. Danach wurde an der Justiereinrichtung gedreht, bis  $\alpha$  halbiert war. Die neue Zeigerstellung der

<sup>7</sup> Gemeinfreie Abbildung aus <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/Bcoulomb.png> 11.05.2009

Justiereinrichtung ergab die neue Kraft. Danach wurde  $\alpha$  wiederum halbiert. Die Auswertung der Messreihe ergab eine Abhängigkeit der Kraft mit  $1/r^2$  (das Coulomb'sche Gesetz).

**Praxistipps zur experimentellen Darstellung:** Das Kraftfeld geladener Körper lässt sich (analog zu Eisenfeilspänen beim Magnetfeld) durch kleine Dipole mit länglicher Form, die sich in den Kraftfeldern ausrichten, darstellen (Gipskristalle bei (Poh44 S. 15 ff), dünne ca. 3 mm lange Polyamidfasern bei (Pau07 S. 256) jeweils trocken oder Grießkörner aber in Rizinusöl als Isolator fixiert). Dazu werden über die mit 3 bis 10 kV (z.B. mit einem Bandgenerator) versehene Elektrodenanordnung eine Glasscheibe gelegt und darauf die Dipole gestreut. Die Spannung und die Dichte der Dipolteilchen muss erprobt werden.

## 2.2 Die Ladung als Ausgangspunkt

**Der Ausgangspunkt** der theoretischen Betrachtung soll die Ladung  $Q$  sein, weil sie als **Naturgröße** angesehen und vielfältig nachgewiesen werden kann (siehe Abschnitt 2.1).

Bei Experimenten (Faraday'sche elektrolytische Abscheidungsversuche, Versuch von Millikan 1910 zur genauen Bestimmung der Elementarladung) existiert eine kleinste Ladungsmenge – die Elementarladung „ $e$ “ oder auch „ $e^-$ “, „ $e^+$ “ bzw.  $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ <sup>8</sup>. Daraus folgt:

$$Q = N \cdot q_0 \quad N = \text{Anzahl} \quad . \quad (2.1)$$

Andererseits wird die Ladungsmenge, wenn sie nicht zur Punktladung vereinfacht werden kann, durch die Raumladungsdichte ( $\rho$  = Ladung pro Volumenelement) ausgedrückt.

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{und} \quad Q = \int_V \rho \, dV \quad (2.2)$$

Für die elektromagnetischen Vorgänge und somit die Elektrotechnik hat es sich bewährt, nach Faraday davon auszugehen, dass sich die Wirkungen der Ladung in Form einer Nahwirkung ausbreiten. Das Prinzip besteht darin, dass von der Ladung eine Wirkung nur auf ihre unmittelbare Umgebung erfolgt, diese dann die Wirkung wiederum auf ihre unmittelbare Umgebung weitergibt usw. An einem betrachteten Raumpunkt kommt die Wirkung also mit einer entsprechenden Zeitverzögerung an. Damit breiten sich für unsere Untersuchungen (in der „makroskopischen“ Elektrotechnik) von einer Ladung über eine Nahwirkung in den Raum zwei Faktoren aus, die wir beschreiben wollen; zusätzlich ist ihre Bewegung darzustellen.

1. Die Verbindung einer Ladung mit der gleichen Größe an Gegenladungen,
2. eine in jedem Punkt des Raums zu jeder Zeit messbare Kraftwirkung einer Ladung auf andere Ladungen und
3. die Bewegung der Ladungen selbst.

Die beiden ersten Faktoren sind miteinander verbunden, haben aber unterschiedliche Auswirkungen, sodass es sinnvoll ist, beide zu beschreiben. Der erste Faktor breitet sich unabhängig vom umgebenden Material im Raum aus<sup>9</sup>, der zweite wird vom umgebenden Material deutlich beeinflusst.

<sup>8</sup> Im metrischen Maßsystem hat die Ladung keine Grundmaßeinheit bekommen und wird in Amperesekunden (As) gemessen, und nach Coulomb (C) genannt.

<sup>9</sup> Die Menge der notwendigen Gegenladungen kann sich nicht durch das dazwischen liegende Material ändern. Bei praktischen Berechnungen wird deshalb in der Regel von dieser Größe ausgegangen (siehe (Lun91 S. 169)).

Die dazugehörenden Begriffe werden einmal in einem Beobachtungssystem (Koordinatensystem) untersucht, in dem die erzeugenden Ladungen ruhen.

Das ergibt das elektrostatische Feld.

Die Beschreibung der Bewegung der Ladungen führt zum Begriff des elektrischen Stromes. Die Untersuchung der entsprechenden Begriffe erfolgt in einem Beobachtungssystem, in dem die Leiter ruhen.

Das ergibt das elektrische Strömungsfeld.

Darüber hinaus sind aber auch die Effekte zu untersuchen, die durch die Bewegung der Ladungen erst erzeugt werden. Eine tiefgründige Untersuchung dieser Effekte kann erst mit der speziellen Relativitätstheorie verstanden werden (Boe12 S. 37 ff). Bei den experimentellen Untersuchungen traten sie historisch gesehen als „eigenständiges“ Feld hervor.

Das ergibt das Magnetfeld.

Mit dieser Betrachtung können letztendlich **alle von der Ladung ausgehenden Wirkungen** auf **Kräfte zwischen Ladungen** bei Beachtung des Nahwirkungsprinzips zurückgeführt werden. Das heißt auch, dass der Nahwirkung eine Existenz zukommt, auch wenn ihr Mechanismus in der „makroskopischen“ Elektrotechnik nicht untersucht wird und in der Theorie keine direkte Rolle spielt.

Da sich die Zusammenhänge am anschaulichsten beim elektrischen Strömungsfeld zeigen lassen und dabei auch die geringsten mathematischen Anforderungen auftreten, wird mit diesem begonnen. Es folgen das elektrostatische Feld und das Magnetfeld.

Im Kapitel 9 und 11 beginnen mit der „Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke“ die Anwendungen dieses Wissens zur

- Analyse von Bauelementen und Schaltungen der Elektrotechnik (Stromkreise und Netzwerke) einschließlich der Erarbeitung dazu notwendiger Methoden anhand praktisch besonders bedeutsamer Beispiele.

Diese Anwendungen werden in den folgenden Kapiteln 12 bis 20 mit der

- Analyse von Bauelementen und Schaltungen der Informationstechnik (Analog- und Digitaltechnik),
- Analyse von Schaltungen und Geräten der Audio- und Videotechnik sowie
- Analyse von Antriebsprozessen, deren Steuerung und von Prozessen der Energieumwandlung

fortgesetzt. Dazu müssen die Methoden zunehmend ausgebaut werden. Die Darstellung folgt insgesamt der Logik des Verständnisses der elektrotechnischen Vorgänge.

**Praxistipp:** Es ergibt sich *keine* Einteilung des Wissens nach Gleich- bzw. Wechselstrom usw., weil sich die Gesetze darin nicht unterscheiden. Es sind lediglich bei der Analyse der verschiedenen Prozesse die jeweils erforderlichen mathematischen Methoden anzuwenden.

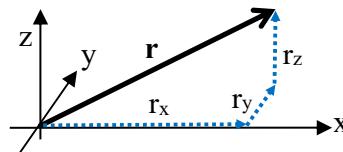
### 3 Erster Exkurs Mathematik

#### 3.1 Vektorrechnung

Größen, die durch eine Zahlenangabe und eine Richtung im Raum charakterisiert sind, werden als **Vektoren** bezeichnet. Im Weiteren werden für sie Buchstaben in fettter Schriftart verwendet (z.B. **A**, **r**, **s**...). Grafisch werden sie durch Pfeile dargestellt (Länge des Pfeils entspricht dem Betrag = Zahlenangabe, die Richtung entspricht ihrer Wirkungsrichtung). Vergleiche alle Erläuterungen mit (Bro79 S. 605-639). Im Folgenden werden wichtige Rechenregeln zusammengestellt.

##### Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} r_x + \mathbf{j} r_y + \mathbf{k} r_z$$

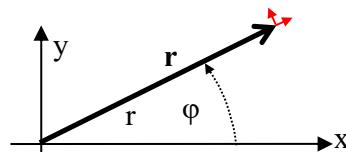


(3.1)

Dabei sind **i**, **j** und **k** Einheitsvektoren (Betrag = 1) in die Richtungen von x, y und z.

##### Darstellung in Polarkoordinaten (nur Ebene):

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} r \cos\varphi + \mathbf{j} r \sin\varphi$$

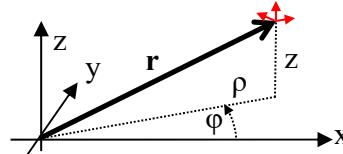


(3.2)

Die Einheitsvektoren (kleine Pfeile)  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  haben in jedem Punkt P(x,y) eine andere Richtung (Richtung von r bzw.  $\varphi$  in diesem Punkt), stehen aber immer senkrecht aufeinander und liegen in der Ebene.

##### Darstellung in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} \rho \cos\varphi + \mathbf{j} \rho \sin\varphi + \mathbf{k} z$$



(3.3)

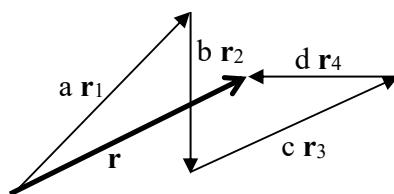
Die Einheitsvektoren (kleine Pfeile)  $\mathbf{e}_\rho$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  haben in jedem Punkt P(x,y,z) eine andere Richtung (Richtung von  $\rho$  bzw.  $\varphi$  in diesem Punkt), stehen aber immer senkrecht aufeinander sowie auf  $\mathbf{e}_z$  (dieses zeigt in z-Richtung).

##### Addition und Multiplikation mit skalaren Faktoren:

- in Vektorschreibweise,
- in Komponentenschreibweise und
- als Grafik (an der Spitze des vorigen Pfeils den Anfang des nächsten Pfeils anhängen bis zum letzten; Ergebnispfeil geht vom Anfang des ersten zur Spitze des letzten Pfeils).

$$\mathbf{r} = a \mathbf{r}_1 + b \mathbf{r}_2 + c \mathbf{r}_3 + d \mathbf{r}_4$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = & \mathbf{i} (a r_{x1} + b r_{x2} + c r_{x3} + d r_{x4}) \\ & + \mathbf{j} (a r_{y1} + b r_{y2} + c r_{y3} + d r_{y4}) \\ & + \mathbf{k} (a r_{z1} + b r_{z2} + c r_{z3} + d r_{z4}) \end{aligned}$$

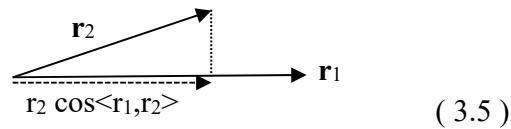


(3.4)

Dabei können, wie bei der Rechnung mit Skalaren, Faktoren ausgeklammert und Plätze vertauscht werden. (Subtraktion entspricht Addition mit umgekehrter Richtung ähnlich  $\mathbf{r}_4$ .)

### Multiplikation von Vektoren – Skalarprodukt (auch Punktprodukt):

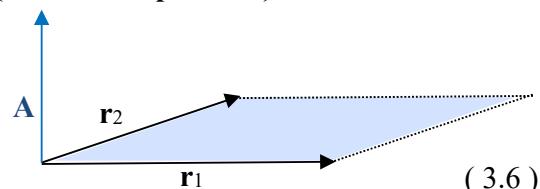
$$a = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 \cos\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$$



Das Produkt entspricht der Projektion eines Vektors auf die Richtung des anderen und der Multiplikation der entstandenen Längen. Die Plätze der Vektoren können vertauscht werden ( $a = \text{skalar}$ ).

### Multiplikation von Vektoren – Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt):

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = e_A r_1 r_2 \sin\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$$



Die Richtung von  $\mathbf{A}$  ist senkrecht sowohl auf  $\mathbf{r}_1$  als auch auf  $\mathbf{r}_2$  im Sinne eines Rechtssystems (wie x, y, z).  $|\mathbf{A}|$  entspricht der aufgespannten Fläche (Grundlinie  $r_1$  mal Höhe  $r_2 \sin\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ ). Bei Platztausch von  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  ändert sich das Vorzeichen von  $\mathbf{A}$  (d.h. die Richtung).  $e_A$  ist ein Einheitsvektor in Richtung von  $\mathbf{A}$ . Damit ist auch der Vektor einer Fläche sinnvoll definiert. Bei Mehrfachprodukten ergeben sich entsprechende Entwicklungen (Bro79 S. 605-639).

### Division durch einen Vektor:

Eine Division durch einen Vektor ist nicht definiert und kann nicht genutzt werden.

### Definition für ein Feld (skalares Feld und Vektorfeld):

Ist jedem Punkt im Raum ein Wert zugeordnet (bei Anwendung in der Physik z.B. eine Temperatur), so werden diese Werte als **skalares Feld** bezeichnet. Ist jedem Punkt im Raum ein Vektor (Wert mit Richtung; bei Anwendung in der Physik z.B. eine Strömungsgeschwindigkeit) zugeordnet, so werden diese Vektoren als **Vektorfeld** bezeichnet. Gibt es zwischen mehreren Feldern und/oder Vektorfeldern mathematische Abhängigkeiten, gelten obige Rechenregeln in jedem Punkt  $P(x,y,z)$ .

## 3.2 Ableitung und Integration nach Weg, Fläche und Volumen

Für ein Feld oder anderweitig über den Raum verteilte Größen können in jedem Punkt  $P(x,y,z)$  die Ableitung nach dem Weg, der Fläche oder dem Volumen gebildet werden (wenn es für uns physikalisch einen Sinn ergibt).

$$|\mathbf{E}| = \frac{dU(x, y, z)}{ds_{\text{Leiter}}} \quad |\mathbf{S}| = \frac{dI(x, y, z)}{dA_{\perp}} \quad \rho = \frac{dQ(x, y, z)}{dV} \quad (3.7)$$

Dabei müssen  $ds$  bzw.  $dA$  evtl. gekennzeichnet werden, wenn dafür sonst verschiedene Richtungen möglich wären (im Beispiel  $ds$  in Richtung des Leiters und so zu  $U$ ,  $dA$  senkrecht zu  $I$  und so zum Leiter; d.h., der Flächenvektor zeigt dann in Richtung von  $I$ ). Ein Vektor unter dem Bruchstrich ist nicht möglich (keine Division durch einen Vektor).

Die Umkehrungen sind Integrale über einen gegebenen Weg, eine bestimmte Fläche bzw. über ein entsprechendes Volumen. Z.B.:

$$U = \int_{s_{\text{Anfang}}}^{s_{\text{Ende}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}; I = \iint_{\text{Fläche}_{\text{Leiter}}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}; Q = \iiint_{\text{Volumen}} \rho dV; u = - \int_{\text{Länge}_{\text{Leiter}}} (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}}. \quad (3.8)$$

Hierbei werden für jedes Wegelement, Flächenelement bzw. Volumenelement des Integrationsbereiches (also kleines Stück Weg, Fläche bzw. Volumen) das entsprechende Produkt gebildet und dann für alle Elemente integriert (also aufsummiert). Das letzte Beispiel in ( 3.8 ) ist ein Mehrfachprodukt. Der Integrationsbereich ist am Integral anzugeben. Eine Sonderform sind Integrale über einen geschlossenen Weg (z.B. Kreisring) oder eine geschlossene Oberfläche (z.B. Kugeloberfläche). Wie z.B.:

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad 0 = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{oder einfach} \quad 0 = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} . \quad (3.9)$$

Die Berechnung erfolgt auf gleiche Art und Weise (vergleiche auch (Bro79 S. 605-639)).

### 3.3 Partielle Ableitungen\*

Wenn die Koordinaten x, y, und z sowie auch t voneinander unabhängig sind oder so behandelt werden, also z.B.  $x \neq x(y)$  sein soll, dann werden partielle Ableitungen genutzt. Diese sind durch ein rundes  $\partial$  darzustellen. Da die Koordinaten senkrecht aufeinander stehen, ist das bei Feldern in der Regel der Fall. Deshalb werden partielle Ableitungen in jede Koordinatenrichtung zu einem Operator zusammengefasst, der dann auf entsprechende Größen angewendet wird:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{Nabla-Operator.}$$

**Gradient** (geht in die Richtung der größten Zunahme, aus einem Skalar wird ein Vektor):

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{grad} \varphi$$

**Divergenz** (beschreibt die Differenz von Zu- und Abfluss in und aus dV, ist als Punktprodukt ein Skalar):

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{S}$$

**Rotation** (beschreibt die Größe der Verwirbelung in dV, ist als Kreuzprodukt ein Vektor)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \mathbf{rot} \mathbf{E}$$

( 3.10 )

Regeln zur Umformung und Entwicklung sich addierender und multiplizierender Ableitungen von Feldern oder Operatoren in anderen Koordinatensystemen (z.B. Zylinderkoordinaten) siehe (Bro79 S. 605-639).

Das **totale Differential** zeigt die Änderung einer Größe  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in Abhängigkeit von den Änderungen aller ihrer Variablen (bzw. Parameter), siehe (Bro79 S. 328).

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (3.11)$$

Es eignet sich besonders zur Fehlerrechnung z.B.:  $\Delta R(l, \kappa, A) = \frac{\partial R}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial R}{\partial \kappa} \Delta \kappa + \frac{\partial R}{\partial A} \Delta A$ .

## 4 Vorgänge in elektrischen Leitern

Ausgehend vom Begriff der Ladung, der entsprechend der Abschnitte 2.1 und 2.2 verstanden worden sein sollte, werden

- das elektrische Strömungsfeld – Feld und Stromdichte,
- die elektrischen Größen zur Beschreibung von Stromkreisen – Strom, Spannung und Widerstand,
- die Zusammenhänge zwischen diesen Größen sowie
- die Gesetzmäßigkeiten der Vorgänge in elektrischen Leitern

vorgestellt, welche aus vielfachen reproduzierbaren experimentellen Beobachtungen hervorgegangen sind.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in Abschnitt 3 sein.

### 4.1 Grundbegriffe im Leiter – Strom, Spannung

#### 4.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

**Der Ausgangspunkt** zur Beschreibung der Vorgänge in elektrischen Leitern ist die **Naturgröße Ladung**, wie sie in Abschnitt 2.1 gezeigt wurde.

Um die **Bewegung der Ladungen zu beschreiben** (ohne von der Bewegung ausgehende zusätzliche Wirkungen), wird die eingängige **Rechengröße** elektrischer Strom  $I^{10}$  definiert. Der Ausgangspunkt ist der Sonderfall des linienhaften Leiters (Abb. 4.1), der ruhend im Beobachtungssystem angeordnet ist.

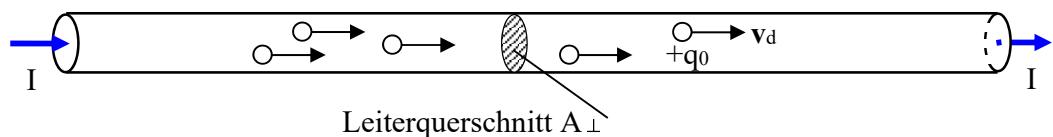


Abb. 4.1: Bewegte Ladungen und Leiterquerschnitt im Leiter

Die Ladungen  $+q_0$  bewegen sich entsprechend der technischen Stromrichtung mit der mittleren Driftgeschwindigkeit  $v_d$  in Richtung des Stromes.

**Praxistipp:** Elektronen mit  $-q_0$  würden sich mit  $-v_d$  entgegengesetzt bewegen.

Der Strom berechnet sich nun aus dem Anteil der Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt tritt.

#### Definition: elektrischer Strom I

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{und} \quad Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt \quad (4.1)$$

<sup>10</sup> Im metrischen Maßsystem erhielt der Strom die Grundmaßeinheit A, benannt nach Ampère.

Diese Größe kann praktisch nicht direkt nach dieser Definition sinnvoll gemessen werden<sup>11</sup>, sondern es werden Wirkungen des Stromes genutzt. Die Definition beschreibt aber *genau das* an diesem Vorgang, was *elektrisch wichtig und notwendig* ist. Sie hat sich bewährt, wurde von anderen Wissenschaftlern übernommen und hat sich somit durchgesetzt. Es wären andere Definitionen möglich, z.B. ähnlich wie in der Strömungslehre über die Driftgeschwindigkeit, vergleiche (4.3).

**Praxistipp:** Die Definition der Einheit des Stromes A erfolgte mit der Einführung des internationalen Maßsystems (SI-Einheiten) so, dass sich gerade  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$  ergab. Im Gauss'schen Maßsystem (cm, g, s) wurde dagegen die Ladung (sogar etwas „vereinfacht“ nach dem Coulomb'schen Gesetz  $F = Q \cdot Q/r^2$ ) allein aus den mechanischen Einheiten definiert.  $[Q] = [(F \cdot r^2)^{1/2}] = (g \text{ cm s}^{-2} \text{ cm}^2)^{1/2} = g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$

10

Zur Beschreibung der Bewegung der Ladungen (also des Stromes) in räumlich ausgedehnten Leitern nutzt man den Begriff der Stromdichte  $\mathbf{S}$ <sup>12</sup>.

### Definition: Stromdichte $\mathbf{S}$

$$|\mathbf{S}| = \frac{dI}{dA_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = |\mathbf{S}| \mathbf{e}_I \quad \text{und} \quad I = \int_{\text{Fläche Leiter}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.2)$$

Dabei wird der Anteil des Stromes durch ein kleines Flächenelement ( $dA_{\perp}$ ) senkrecht zur Stromrichtung ( $\mathbf{e}_I$ ) berechnet. Die Stromdichte kann in jedem Punkt des Leiters bestimmt (gemessen) werden (in Betrag und Richtung).

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes – dem elektrischen Strömungsfeld.

Die Darstellung der Stromdichte kann auch aus Driftgeschwindigkeit ( $v_d = ds_I/dt$ ) und der Raumladungsdichte<sup>13</sup> erfolgen.

$$\mathbf{S} = v_d \rho = \frac{ds_I}{dt} \frac{dQ}{dV} = \frac{ds}{dt} \frac{d^2Q}{ds dA_{\perp}} \mathbf{e}_I = \frac{d}{dt} \frac{dQ}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_I = \frac{dI}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_I \quad (4.3)$$

**Praxistipp:** Das entspricht unmittelbar einer Vorstellung von mit der Driftgeschwindigkeit ( $-v_d$ ) strömenden Elektronen ( $-q_0$ ) entsprechend ihrer Raumladungsdichte ( $\rho$ ). Die vielen Elektronen schieben sich dabei durch ihre Abstoßung (Abb. 4.2) gegenseitig vorwärts. Der Strom fließt so zugleich im ganzen Stromkreis und ergibt einen geschlossenen Umlauf.

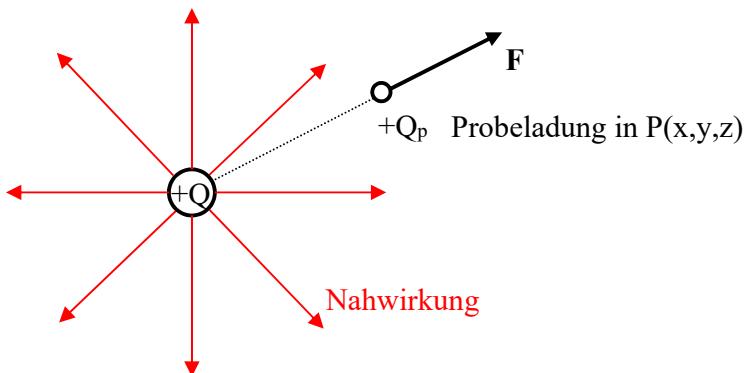
**Zur Beschreibung der Kraftwirkungen** wird in jedem Raumpunkt  $P(x,y,z)$  (und zu jeder Zeit  $t$ ) um eine ruhende Ladung mit einer ebenfalls ruhenden Probeladung<sup>14</sup> ( $Q_p$ ) die Kraft  $\mathbf{F}$  gemessen (Abb. 4.2). Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Wirkung der Ladung nach dem bewährten Prinzip der oben genannten Nahwirkung ausbreitet.

<sup>11</sup> Mit dem Faraday'schen Abscheidungsgesetz aber in günstigen Fällen möglich; war die erste Definition von A.

<sup>12</sup> Maßeinheit  $\text{A/m}^2$

<sup>13</sup> Dabei sind für die Raumladungsdichte nur die beweglichen Ladungsträger mit ihrer jeweiligen Geschwindigkeit anzusetzen (im Leiter nur die Elektronen mit  $v_d$ ).

<sup>14</sup> Die Probeladung soll so klein sein, dass sie vernachlässigbare Rückwirkungen auf das Feld ausübt. Sie dient nur zur Messung. Bei ruhenden Ladungen wird hierbei der Unterschied zur Fernwirkung noch nicht deutlich.



**Abb. 4.2: Probeladung im Feld einer Ladung**

Da diese Kraft in jedem Punkt des Raumes ermittelt werden kann, stellt sie ebenfalls als mathematische Beschreibung ein Feld dar, das in jedem Punkt einen Vektor (Betrag und Richtung) bestimmt. Weil dieses Kraftfeld von der Größe der verwendeten Probeladung abhängt, wird der Begriff des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$ <sup>15</sup> von dieser Abhängigkeit entkoppelt.

### Definition: elektrisches Feld $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_p} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = Q_p \mathbf{E} \quad (4.4)$$

Die Definition (4.4) erfolgt demzufolge aus der **messbaren Kraft auf eine Probeladung**. Es wird also nicht der Zustand des Raumes oder der Mechanismus der Nahwirkung erfasst, sondern nur deren Ergebnis, das mit der Kraft ermittelt wird. Es wird insgesamt zu sehen sein, dass dieser Begriff mit dieser Interpretation folgerichtig (und ohne Spekulationen) die experimentellen Erfahrungen wiedergibt und praktisch uneingeschränkt genutzt werden kann.

Bewegt sich die Probeladung in Abb. 4.3 auf ihrem Weg (Wegelement  $ds$ ) vom Punkt  $P_1$  nach  $P_2$ , kann die Änderung ihrer potentiellen Energie (Kraft · Weg) untersucht werden.

$$\Delta W = \int_{r(P_1)}^{r(P_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q_p \int_{r(P_1)}^{r(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.5)$$

Wird die Abhängigkeit von der verwendeten Probeladung entkoppelt und die Abgabe, also der **Verbrauch elektrischer Energie positiv definiert**, bekommt man den Begriff der elektrischen Spannung  $U$ <sup>16</sup> (auch Spannungsabfall genannt).

Nutzen wir einen absoluten Bezugspunkt (z.B. könnte die potentielle Energie im Unendlichen null gesetzt werden, d.h.  $W_\infty = \varphi_\infty = 0$ ), erhalten wir den Begriff des elektrischen Potentials  $\varphi$ <sup>16</sup>.

<sup>15</sup> Maßeinheit aus Kraft durch Ladung N/As = V/m (V siehe Spannung).

<sup>16</sup> Die Maßeinheit ergibt sich als Energie durch Ladung Nm/As oder wird nach Volta mit V benannt.

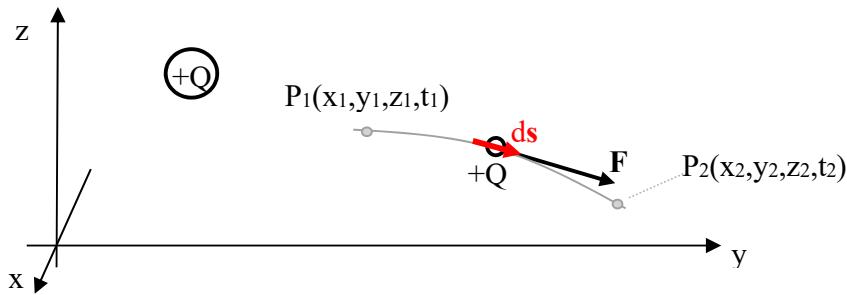


Abb. 4.3: Weg der Probeladung

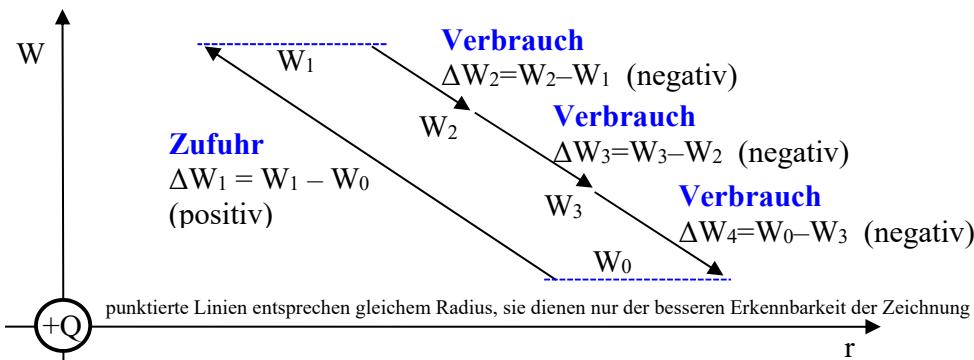
**Definition: elektrische Spannung U (und Potential φ)**

$$U = \frac{\Delta W_{\text{Abgabe}}}{Q_p} = \frac{-\Delta W}{Q_p} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \varphi = \frac{W}{Q_p} = \int_{r(P)}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \varphi_{\infty}$$

$$\Delta W = (W_{\text{Endwert}} - W_{\text{Anfangswert}}) \quad U = \varphi_{\text{Anfangswert}} - \varphi_{\text{Endwert}}$$
( 4.6 )

**Praxistipp:** D.h., die Spannung folgt aus der verbrauchten Energie, geteilt durch die dazu transportierte Ladung. Das ist für das Verständnis elektrotechnischer Gesetze wesentlich.

Wenn sich nach diesem Zusammenhang die Probeladung getrieben von der Kraft des Feldes bewegt<sup>17</sup> (d.h. Entfernung nimmt zu; siehe Abb. 4.3), nimmt ihre potentielle Energie ab. Werden W bzw. φ kleiner, steigt in gleichem Maße der Verbrauch  $\Delta W_{\text{Abgabe}}$  bzw. U (siehe schematische Darstellung in Abb. 4.4).

Abb. 4.4: Energie bei der Bewegung von  $+Q_p$  im Feld von  $+Q$  (schematisch)

Diese Energie wird in kinetische Energie, in Reibungswärme oder in andere Energieformen umgewandelt (Energieumwandlung aus dem Elektrischen ins Mechanische, in Wärme, d.h. für einen Verbraucher).

Wird dagegen durch eine äußere Kraft die Probeladung gegen die Kraft des Feldes bewegt, erhöht sich ihre potentielle Energie (Energieumwandlung vom Mechanischen usw. ins Elektrische – Spannungsquelle). Das ergibt ein positives  $\Delta W$  (d.h. ein negatives  $\Delta W_{\text{Abgabe}}$ ) und damit eine negative Spannung U. In der Literatur (z.B. (Lun91 S. 32,33 u. 51)) wird diese Spannung als Ursprungs (E<sub>0</sub> =  $\Delta W/Q_p = \Delta W_{\text{Zufuhr}}/Q_p$ ) bezeichnet.

<sup>17</sup> Bewegte Probeladungen entsprechen einem Strom, vergleiche ( 4.1 ) und ( 4.3 ).

**Praxistipp:** Man kann Bereiche mit  $\Delta W_{\text{Zufuhr}}$  „umgehen“ und den Begriff Urspannung „einsparen“, indem immer die Spannung an den Klemmen einer Quelle gemessen wird.  
(Da Urspannungen nicht direkt messbar sind, werden sie in praktisch orientierter Ausbildung in der Regel weggelassen.)

Mit dieser Definition sind entsprechende Zählpfeilregeln verbunden<sup>18</sup>.

### Zählpfeilsystem für Strom und Spannung

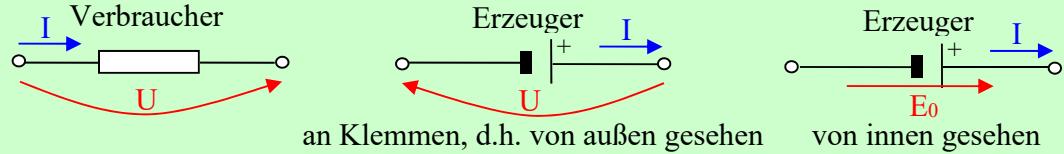


Abb. 4.5: Zählpfeilrichtungen

Natürlich kann man aus der Spannung mit Hilfe der Umkehrung von (4.6) auch das elektrische Feld berechnen ( $ds$  zeigt in die Richtung von  $I$  also  $e_1$ ).

$$E = \frac{dU}{ds} e_1 \quad (* \text{ genauer } E = \mathbf{grad} U = -\mathbf{grad} \varphi \text{ aus } U = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} \mathbf{E} \cdot ds) \quad (4.7)$$

Durch experimentelle Untersuchungen wurde mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gefunden, dass

- die Richtungen von  $S$  und  $E$  immer gleich sind<sup>19</sup>
- und sie über die Materialkonstante  $\kappa$  (Kappa – Leitfähigkeit) zusammenhängen<sup>20</sup>.

$$S = \kappa E \quad (4.8)$$

Mit diesen Begriffen können alle Vorgänge in elektrischen Leitern und genauso die räumlich ausgedehnten Vorgänge im elektrischen Strömungsfeld dargestellt werden.

## 4.1.2 Messung der Größen in Leitern – Ladung, Strom, Spannung

### Messung der Ladungsmenge

Die Messung der Ladungsmenge ist wichtig für eine Reihe von Sensoren (z.B. piezoelektrische Drucksensoren) und kann über ihre Kraftwirkung, über den Strom oder über die Spannung erfolgen.

Bei einer Messung über den Strom müssen alle Ladungen abfließen und dabei deren Summe gebildet werden. Da dieses einem Totalverlust entspricht, ist es nur zur Ermittlung von Ladungsänderungen sinnvoll.

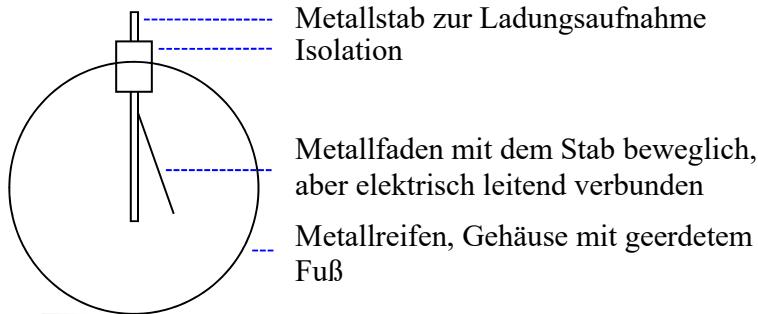
Bei einer Messung über die Spannung sollte eine möglichst geringe Menge Ladungen abfließen, es wird deren Spannung  $U = \Delta W_{\text{Abgabe}} / Q_{\text{abgeflossen}}$  gemessen und daraus die Ladung mit Hilfe von Parametern der Anordnung (siehe Abschnitte 5 und 13.2.2) ermittelt.

<sup>18</sup> Eine andere Definition würde andere Zählpfeilregeln ergeben.

<sup>19</sup> Positive Ladungen werden immer in Richtung des el. Feldes angetrieben (also auch die Stromdichte).

<sup>20</sup> Die Leitfähigkeit kann von der Temperatur und anderen Einwirkungen abhängen (siehe Abschnitt 12.1), ist aber weitgehend konstant. Ihre Maßeinheit ist  $(A/m^2)/(V/m) = A/Vm$ .

Eine Kraftmessung war historisch gesehen die entscheidende Untersuchungsmethode (Torsionswaage von Coulomb; Abb. 2.1). Auch das Elektrometer (Abb. 4.6) nutzt im Prinzip eine Kraftmessung. Es wird heute noch als Instrument bei Demonstrationsversuchen verwendet.

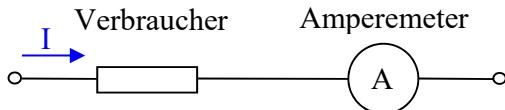


**Abb. 4.6:** Elektrometer

Die gleichartigen Ladungen auf dem Stab und dem Faden erfahren einander abstoßende Kräfte, außerdem wird der Faden von den entgegengesetzten Ladungen des Reifens angezogen. Mit den gegebenen Parametern der Anordnung lässt sich die Ladungsmenge auf dem Stab (oder die Spannung zwischen Stab und Reifen, siehe Abschnitt 5) ermitteln.

## Messung des elektrischen Stromes

Zur Messung des Stromes muss der gesamte Strom durch den Strommesser (Amperemeter) fließen. Dazu ist das Amperemeter mit dem Verbraucher in Reihe zu schalten.

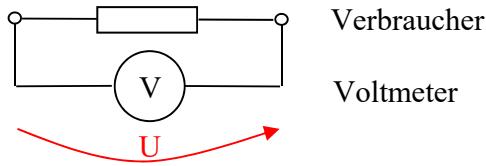


**Abb. 4.7:** Schaltung für eine Strommessung

Elektromechanische Amperemeter nutzen magnetische Kräfte des Stromes für einen Zeigerauschlag (siehe Abschnitt 6.3). Elektronische Messgeräte messen die Spannung an einem bekannten Verbraucher (Shunt), verstärken diese und zeigen in der Regel einen digitalen Stromwert an. Stromwandler und Stromzangen nutzen zusätzlich eine magnetische Übertragung und Wandlung (siehe Abschnitt 6.1.7). In jedem Fall erfolgt durch das Amperemeter ein kleiner Energieverbrauch und somit ein Spannungsverlust. Bei guten Amperemetern kann dieser Spannungsverlust aus dem angezeigten Strom und dem angegebenen Innenwiderstand des Amperemeters berechnet werden (zur Fehlerkorrektur).

## Messung der elektrischen Spannung

Zur Messung der elektrischen Spannung, die ein Verbraucher zwischen zwei Punkten abnimmt (oder abnehmen könnte), muss an diese beiden Punkte – parallel zum Verbraucher – ein Spannungsmesser (Voltmeter) angeschlossen werden.



**Abb. 4.8: Schaltung für eine Spannungsmessung**

Auch wenn durch das Voltmeter nur eine sehr kleine Ladungsmenge fließt (Strom), ergibt  $U = \Delta W_{\text{Abgabe}} / Q$  zwischen den beiden Punkten den gleichen Wert wie am Verbraucher (vergleiche Praxistipp Seite 26). Elektromechanische Voltmeter nutzen magnetische Kräfte des kleinen Stromes für einen Zeigerauswahl (siehe Abschnitt 6.3). Elektronische Messgeräte messen die Spannung, verstärken diese und zeigen in der Regel einen digitalen Spannungswert an.

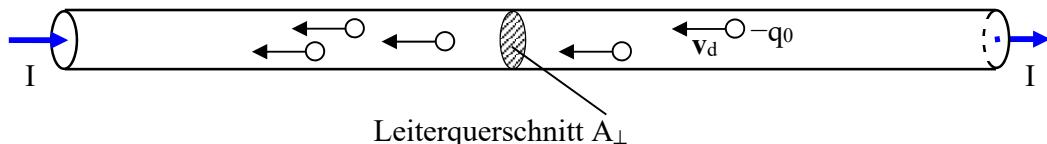
Spannungswandler nutzen zusätzlich eine magnetische Übertragung und Wandlung (siehe Abschnitt 6.1.7). In jedem Fall erfolgt durch das Voltmeter ein kleiner Energieverbrauch (hier gegenüber dem Verbraucher ein Stromverlust). Bei guten Voltmetern kann dieser Verlust aus der angezeigten Spannung und dem angegebenen Innenwiderstand des Voltmeters berechnet werden (zur Fehlerkorrektur). Heutige Multimeter haben einen Innenwiderstand ( $10 \text{ M}\Omega$ ), der bei einem Volt nur  $0,1 \mu\text{A}$  vom Strom „abzweigt“ (ein Fehler unterhalb der Messauflösung für einen Strom durch das gleiche Instrument). Bei Nutzung von Elektrometerverstärkern (siehe Abschnitt 13.2.2) kann dieser Wert  $10^6$ - bis  $10^7$ -mal kleiner sein, das ist insbesondere für Ladungsmessungen wesentlich.

#### 4.1.3 Übungsaufgaben zur Verdeutlichung praktischer Größenordnungen

Klärung interessanter und relevanter praktischer Größen bei Strom und Spannung.

##### Aufgabe 4.1

Gegeben ist ein elektrischer Leiter (Abb. 4.9) aus Kupfer, Querschnitt  $1 \text{ mm}^2$ , Strom  $1 \text{ A}$  für die Dauer von  $1 \text{ h}$ . Das entspricht mit etwas gerundeten Zahlen einer Hausinstallation für eine Leuchte mit zwei Glühlampen von je  $100 \text{ W}$  (oder  $10$  Halogenlampen mit je  $20 \text{ W}$ ).



**Abb. 4.9 Stromdurchflossener Leiter**

- Frage 1: Welche Ladungsmenge und wie viele Elektronen sind durch den Leiter geflossen?  
 Frage 2: Wie viele Elektronen stehen pro  $\text{cm}^3$  Kupfer für die Leitung zur Verfügung und wie groß ist die Raumladungsdichte?

Hinweis: Die spezifische Masse von Kupfer ist  $\gamma = 8,93 \text{ g/cm}^3$ . Die Masse eines Kupferatoms beträgt  $m_{\text{Cu}} = 106 \cdot 10^{-24} \text{ g}$  (relative Atommasse/Avogadro'sche Zahl). Bei Kupfer steht in sehr guter Näherung bei Raumtemperatur pro Atom ein Valenzelektron für eine freie Bewegung zur Verfügung.

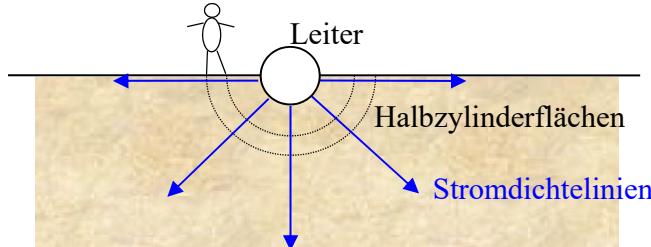
Frage 3: Wie groß ist die Stromdichte im Leiter?

Frage 4: Wie schnell driften diese Elektronen durch den Leiter?

Diskutieren Sie die erhaltenen Werte und erklären Sie deren Größenordnung für diesen alltäglichen Fall!

### Aufgabe 4.2

Eine Hochspannungsleitung 110 kV ist gerissen und liegt waagerecht auf dem Boden.



**Abb. 4.10: Querschnittzeichnung eines auf dem Erdboden liegenden Leiters**

Pro einem Meter Länge fließt ein Strom von ca. 100 A in den Boden (Leitfähigkeit für Erde  $\kappa \approx 10^{-2} \text{ A/Vm}$ , Luft nicht leitend). Das Leiterseil hat einen Durchmesser von 2 cm und ist näherungsweise zur Hälfte in den Boden eingesunken (siehe Abb. 4.10).

Frage 1: Wie groß sind die Stromdichte und die elektrische Feldstärke auf einer Halbzylinderfläche in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?

Frage 2: Wie groß ist die Schrittspannung für einen Menschen (bei 0,5 m Abstand der Füße) in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?

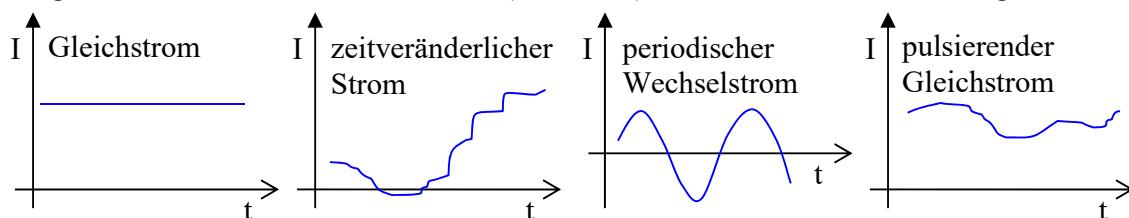
Hinweis: **S** und **E** zeigen in radiale Richtung, d.h., die Integration des Feldes ist in radialer Richtung auszuführen; auf dem Halbzylinder sind **S** und **E** konstant.

Darstellung als Diagramm über dem Radius und Diskussion der Ergebnisse!

#### 4.1.4 Wichtige Formen und Kenngrößen

##### Beispiele für häufige Stromformen

Bei der praktischen Nutzung, beim Messen und bei der mathematischen Behandlung benötigen die verschiedenen Stromformen (Abb. 4.11) ein unterschiedliches Herangehen.



**Abb. 4.11: Beispiele wichtiger Stromformen**

Zum Verständnis sind die Abschnitte 5 und 6 erforderlich. Eine ausführliche Analyse erfolgt in Abschnitt 11.

##### Beispiele für wichtige Stromkennwerte

- |              |  |
|--------------|--|
| Nennstrom    | - Strom für Normalbetrieb, für den das Gerät ausgelegt wurde.  |
| Maximalstrom | - Ein größerer Strom führt zur Überlastung und evtl. Zerstörung.<br>(Hierzu wird oft eine einzuhaltende maximale Dauer angegeben, es können auch mehrere Stromwerte mit unterschiedlicher Dauer sein.) |
| Schaltstrom  | - Strom, den ein entsprechendes Bauteil zum Schalten benötigt.   |

### Beispiele für wichtige Spannungskennwerte

- |                      |   |
|----------------------|---|
| Nennspannung         | – Spannung für Normalbetrieb, für den das Gerät ausgelegt wurde.                |
| Maximalspannung      | – Spannung, bis zu der ein Gerät betrieben werden darf.                         |
| Prüfspannung         | – Spannung, bis zu der ein Gerät auf Sicherheit geprüft wurde.                  |
| Durchschlagsspannung | – Spannung, bei der ein Bauteil durch einen Spannungsdurchschlag zerstört wird. |
| Schaltspannung       | – Spannung, bei der ein entsprechendes Bauteil seinen Schaltzustand ändert.     |

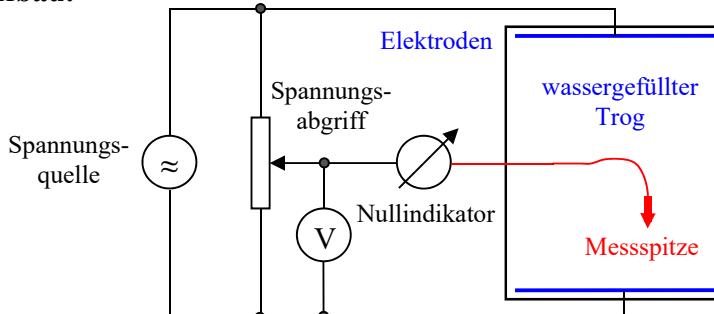
Die Beispiele sollen zeigen, dass eine genaue Kenntnis der Definition solcher Kennwerte erforderlich ist, wenn Geräte oder Bauteile beurteilt und in Betrieb genommen werden.

**Praxistipp:** Kennwerte sind in der Regel spezifisch für jedes Arbeitsgebiet.

#### 4.1.5 Messung und Darstellung von Feldern in leitenden Medien – Feldlinien

Zur Darstellung und Veranschaulichung von Feldern hat insbesondere Faraday den Begriff der Feldlinien benutzt. Hier soll dieser Begriff durch Messungen am elektrolytischen Trog verdeutlicht werden. Der elektrolytische Trog war etwa bis in die Sechzigerjahre des vorigen Jahrhunderts eine wichtige Forschungsmethode, die dann durch die Möglichkeiten der Methode der finiten Elemente in Zusammenhang mit entsprechend leistungsfähigen Rechnern in den Hintergrund trat. Heute bietet der elektrolytische Trog den einfachsten Weg, Felder mit im normalen Labor vorhandenen Messgeräten zu messen und darzustellen.

##### Versuchsaufbau:



**Abb. 4.12: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus (Draufsicht)**

Es ist darauf zu achten, dass der Trog aus nicht leitendem Material waagerecht aufgestellt wird und somit überall einen **gleichen** Wasserstand von ca. 1 cm hat. Auf dem Boden muss Millimeterpapier wasserfest angebracht sein. Als Spannungsquelle wird ein Funktionsgenerator mit einer Sinusspannung (von ca. 800 Hz und z.B. U= 6 V) genutzt.

**Praxistipps:** Leitungswasser hat eine ausreichende Leitfähigkeit. Wechselstrom vermeidet Elektrolyse. 800 Hz können gut verstärkt und mit einem Oszilloskop als Nullindikator in der Brückenschaltung angezeigt werden. Damit wird das Feld nicht verändert, denn es erfolgt keine Stromentnahme. Auf eventuelle Erdklemmen an den Geräten ist zu achten.

(Dieser Aufbau entspricht einer herausgeschnittenen Scheibe aus einer Anordnung, die nach oben und unten unendlich fortgesetzt wäre.)

### Versuchsdurchführung:

Durch den Stellwiderstand wird eine Teilspannung der Quelle abgegriffen. Mit der Messspitze werden mit Hilfe des Nullindikators auf dem Millimeterpapier Linien gleicher Spannung (Äquipotentiallinien) gesucht und in einer Zeichnung festgehalten.

**Praxistipp:** Eine Darstellung gibt nur bei ausgewählten Äquipotentiallinien ein sinnvolles Bild vom Feld der Anordnung. Ausgewählte Linien entsprechen einer Einteilung der Spannung der Quelle in eine ganze Anzahl Teilspannungen mit gleichem Spannungsabstand. Dabei sind Symmetrielinien unbedingt einzubeziehen.

Das Feld wird für folgende Elektrodenanordnungen ermittelt:

1. Parallelle Plattenelektroden
2. Parallelle Plattenelektroden mit einem leitenden Ring symmetrisch zwischen den Elektroden (Metallring)
3. Parallelle Plattenelektroden mit einer nicht leitenden Kreisscheibe symmetrisch zwischen den Elektroden
4. Einem Leiter mit einer scharfen  $90^0$ -Ecke sowie einer gerundeten  $90^0$ -Ecke
5. Einer Anordnung entsprechend Aufgabe 4.2 (Die größtmögliche Außenelektrode ist so anzutragen, dass sie einer Äquipotentiallinie entspricht, d.h. koaxialer Halbkreis zum Halbkreis des Leiterseils.)

Auf diese Weise erhält man nicht nur eindrucksvolle Darstellungen der Feldbilder, sondern man kann z.B. in der 5. Elektrodenanordnung die Schrittspannung nach den gemessenen Äquipotentiallinien direkt mit der Rechnung (Aufgabe 4.2) vergleichen.

### Praxistipp zur Vervollständigung der Feldbilder:

Da die Stromdichte in jedem Punkt des Feldbildes senkrecht auf den Äquipotentiallinien steht (Spannung fällt immer entlang des Stromes ab), können nach der Methode der quadratähnlichen Figuren ausgewählte Stromdichtelinien nach „Augenmaß“ gezeichnet werden.

Diese Methode ist am einfachsten bei der 1. Elektrodenanordnung auszuführen, weil nur parallele Geraden auftreten. (Die senkrechten Geraden der Stromdichtelinien werden in der Anzahl so gewählt, dass Quadrate entstehen. Dabei Symmetrielinien einbeziehen.) Mit etwas Übung verfährt man bei den anderen Elektrodenanordnungen sinngemäß. Je dichter die Linien gewählt werden (Äquipotentiallinien und Stromdichtelinien gleichsam z.B. verdoppeln), desto einfacher erkennt man die Quadrate. Orientierung geben „ungestörte“ Bereiche und Symmetrielinien.

### Versuchergebnisse:

Der Trog muss genau waagerecht stehen, damit das Wasser überall gleich hoch ist. Die Messspitze ist senkrecht einzutauchen. Punkte gleicher Spannung in die Zeichnung eintragen.

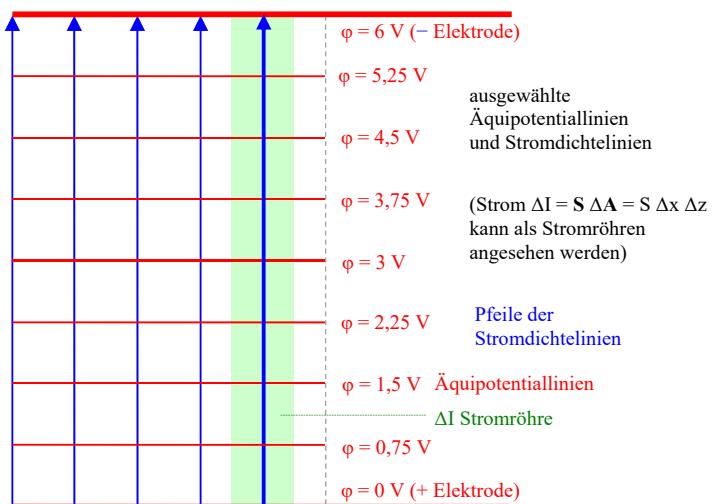


Abb. 4.13: Parallele Plattenelektroden

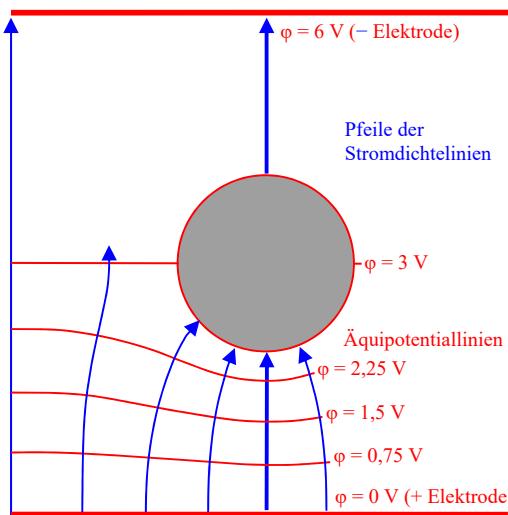


Abb. 4.14: Leitender Zylinder im vorher homogenen Feld

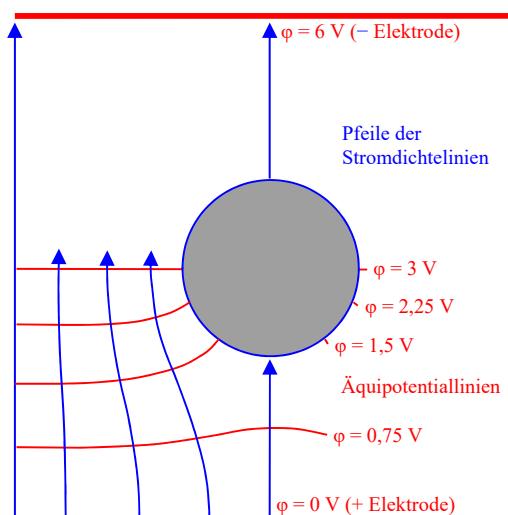


Abb. 4.15: Nichtleitender Zylinder im vorher homogenen Feld

Der leitende Zylinder zieht die Stromdichtelinien zu sich (für diese der bessere Weg) und wird selbst zur Äquipotentiallinie. Die Stromdichtelinien enden so senkrecht auf dem Zylinder.

Gut leitende Gegenstände und die Elektroden sind immer identisch mit einer Äquipotentiallinie. (Das stellen Ausgleichsströme in diesen Leitern unmittelbar her.) In dem leitenden Ring kann so keinerlei Spannungsunterschied auftreten, der Ring ist feldfrei (bekannt als Faraday'scher Käfig).

Der nichtleitende Zylinder verdrängt die Stromdichtelinien (für diese kein Weg) und seine Oberfläche wird selbst zur Stromdichtelinie. Äquipotentiallinien treffen immer senkrecht auf nicht leitende Begrenzungen. Die Begrenzungen ergeben somit immer die letzte Stromdichtelinie.

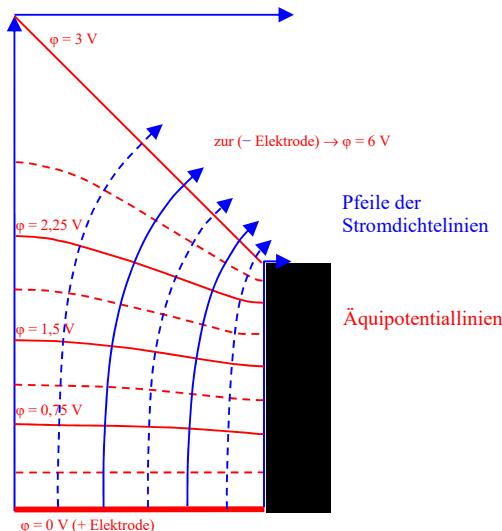


Abb. 4.16: Rechtwinklige Ecke

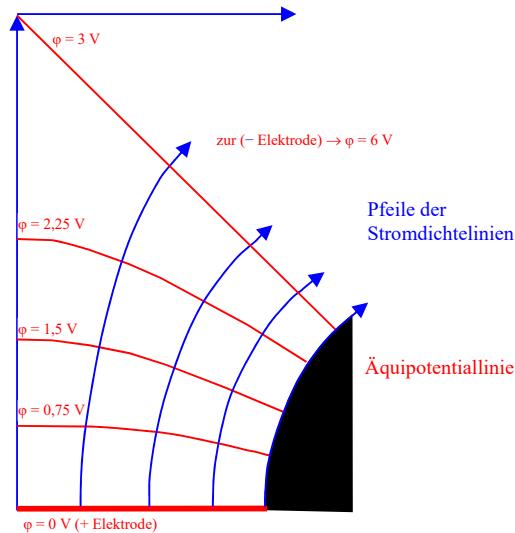


Abb. 4.17: Abgerundete Ecke

An der scharfen Ecke drängen sich die Stromdichtelinien, was auch zu dichteren Äquipotentiallinien führt. Zum besseren Zeichnen der quadratähnlichen Figuren wurden zusätzlich gestrichelte Linien jeweils in der Mitte eingefügt.

D.h., an so einer Ecke gibt es starke Strombelastungen und dichtere Spannungsabfälle, also auch hohe Feldstärken ( $dU/ds$ ).

An der abgerundeten Ecke sieht es deutlich ausgeglichener aus.

- Der Strom bevorzugt den besser leitenden und den kürzeren Weg, nutzt aber, wenn auch in geringerem Maße, alle leitenden Bereiche. Er füllt immer den gesamten zur Verfügung stehenden Raum aus.
- Bei Konstruktionen sind Anordnungen, bei denen sich der Strom (ungewollt) konzentriert, zu vermeiden. Z.B. abgerundete statt scharfe Ecken wählen.

Bei den konzentrischen Zylindern wurde die Elektrode des Innenradius  $r_i$  bei 3 cm, die des Außenradius  $r_a$  bei 14,5 cm angeordnet. U wird gegen  $U(r_a)$  gemessen.

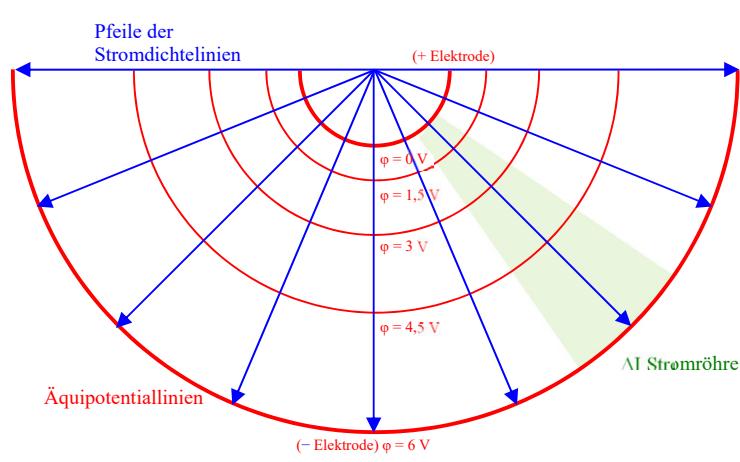


Abb. 4.18: Konzentrische Zylinder

Die theoretischen Abstände bei  $U_{\text{ges}}$ ,  $\frac{3}{4}$ -,  $\frac{1}{2}$ - und  $\frac{1}{4} U_{\text{ges}}$  sowie bei  $U = 0$  stimmen mit den gemessenen Entfernungen genau überein.

$U/U_{\text{ges}}$	$r/r_a$	$r/\text{cm}$
1	0,207	3
$\frac{3}{4}$	0,307	4,4
$\frac{1}{2}$	0,455	6,6
$\frac{1}{4}$	0,674	9,7
0	1	14,5
$\frac{U}{U_{\text{ges}}} = \frac{\ln(r/r_a)}{\ln(r_i/r_a)}$		

Ein Vergleich zeigt insgesamt eine gute Übereinstimmung und Anschaulichkeit. Diese Methode ist wegen ihrer einfachen Durchführung und der geringen Anforderungen für eine Veranschaulichung von Feldern sehr gut geeignet. Mit etwas Übung lassen sich auch die ausgewählten Stromdichtelinien nach Augenmaß vernünftig zeichnen (Methode der quadratähnlichen Figuren). Bei allen Anordnungen wurden Symmetrien ausgenutzt.

### Zusammenfassung der Versuchergebnisse:

1. Gut leitende Gegenstände und die Elektroden sind immer identisch mit einer Äquipotentiallinie .(Das stellen Ausgleichsströme in diesen Leitern unmittelbar her.) Dadurch kann in dem leitenden Ring keinerlei Spannungsunterschied auftreten, der Ring ist feldfrei (sogenannter Faraday'scher Käfig).
2. Äquipotentiallinien treffen immer senkrecht auf nicht leitende Begrenzungen. Begrenzungen ergeben somit immer die letzte Stromdichtelinie.
3. Der Strom bevorzugt den besser leitenden und den kürzeren Weg, nutzt aber, wenn auch in geringerem Maße, alle leitenden Bereiche. Er füllt immer den gesamten zur Verfügung stehenden Raum aus.
4. Bei Konstruktionen sind Anordnungen, bei denen sich der Strom (ungewollt) konzentriert, zu vermeiden (z.B. runde statt scharfe Ecken wählen).

**Praxistipp:** Feldbilder gibt es in vielen Bereichen der Physik (z.B. Temperaturfelder, Druckfelder, Strömungsfelder bei Flüssigkeiten usw.), sie sind ein wichtiges Hilfsmittel, um diese Prozesse darzustellen und zu untersuchen.

## 4.2 Strom-Spannungs-Beziehung am Widerstand

### 4.2.1 Driftbewegung und Ohm'sches Gesetz

In leitenden Materialien können bewegliche Ladungsträger (Elektronen, in Flüssigkeiten auch Ionen und bei Halbleitern auch Löcher; siehe Abschnitt 12.1.1) an der Stromleitung teilnehmen. Dazu müssen sie zwischen den feststehenden Atomen driften.

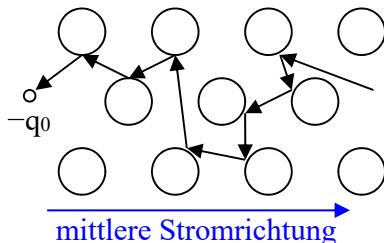
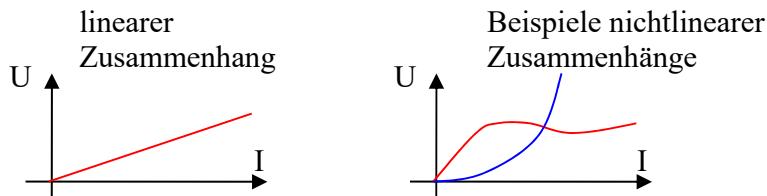


Abb. 4.19: Driftbewegung eines Elektrons im Leiter (vereinfacht)

Wie gut die Stromleitung erfolgen kann, hängt davon ab, wie viele bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen und von deren Beweglichkeit. Die Anzahl Ladungsträger wird durch Material, Temperatur, elektrische Felder, Lichteinstrahlung sowie weitere Faktoren beeinflusst. Die Beweglichkeit ist ebenfalls von Material, Temperatur und anderen Faktoren abhängig (siehe Abschnitt 12.1.1).

Aus Messungen von Strom und Spannung an Leitern verschiedener Materialien ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 4.20, linke Darstellung).



**Abb. 4.20: Beispiele gemessener Strom-Spannungs-Kurven**

Der größte Teil der technisch verwendeten Materialien hat einen linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, es gilt  $U \sim I$  oder als Geradengleichung:  $U = R \cdot I$  (mit dem Proportionalitätsfaktor  $R$ ). Dieser Proportionalitätsfaktor stellt einen Widerstand dar, den das Material dem Stromfluss entgegenstellt (größeres  $R$  mehr Energieverlust bei gleichem  $I$ ).

### Definition des elektrischen Widerstandes – Ohm'sches Gesetz

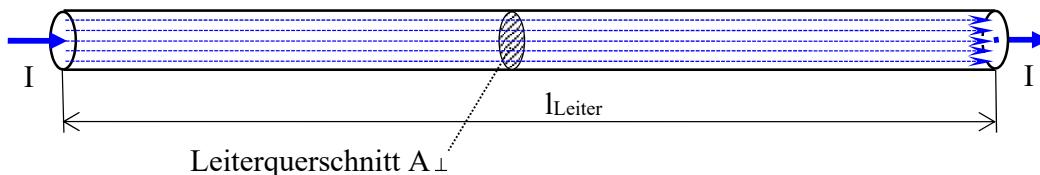
$$R = \frac{U}{I} \quad ^{21} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } U = R \cdot I \quad (4.9)$$

**Praxistipp:** Das Ohm'sche Gesetz ist die einfachste Beschreibung für  $U = f(I)$  und hat sich allgemein durchgesetzt. Bei nichtlinearem Zusammenhang muss die Funktion  $U = f(I)$  selbst oder  $R = R(U)$  bzw.  $R = R(I)$  genutzt werden (jeweils das physikalisch sinnvollere).

Für einige Anwendungsbereiche ist es üblich, auch einen **Leitwert** zu definieren:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \quad ^{22} \quad \text{nach} \quad I = G \cdot U \quad (4.10)$$

Für lineare Leiter mit homogener Stromverteilung (Abb. 4.21) kann eine Bemessungsgleichung für den Widerstand angegeben werden.



**Abb. 4.21: Leiter mit homogener Stromverteilung**

### Bemessungsgleichung des elektrischen Widerstandes

$$R = \frac{l_{\text{Leiter}}}{\kappa A_{\perp}} = \frac{\rho l_{\text{Leiter}}}{A_{\perp}} \quad \text{mit } \rho = \text{spezifischer Widerstand} \quad ^{23}$$

$$\kappa = \text{spezifischer Leitwert} \quad (4.11)$$

Liegt keine homogene Stromverteilung vor, wird der Leiter in kleine Leiterelemente unterteilt, die jeweils so klein sind, dass dort in guter Näherung die Stromverteilung homogen ist, und anschließend der Gesamtwiderstand berechnet.

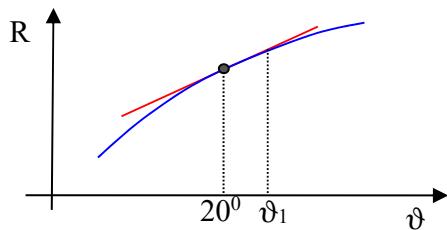
**Praxistipp:**  $\rho$  und/oder  $\kappa$  sind für viele Materialien in Tabellenwerken veröffentlicht. Für wichtige Leitermaterialien gibt es nach Abmessungen geordnete Widerstandstabellen.

Sehr oft ist die Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes zu beachten oder sie wird sogar ausgenutzt. Auch dazu wird die Beschreibung aus einer Messkurve (Abb. 4.22) abgeleitet.

<sup>21</sup> Die Maßeinheit V/A wird nach Ohm mit  $\Omega$  bezeichnet.

<sup>22</sup> Die Maßeinheit A/V=1/ $\Omega$  wird nach Siemens mit S bezeichnet.

<sup>23</sup> Die Maßeinheit von  $\rho$  wird für die praktische Anwendung sinnvoll mit  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$  angegeben.



**Abb. 4.22: Messkurve  $R = f(\vartheta)$  und Näherung durch eine Gerade**

Indem die Kurve  $R = f(\vartheta)$  um den Bezugspunkt (Temperatur =  $20^0$  C) in einer Taylorreihe entwickelt und diese nach der ersten Ordnung abgebrochen wird, ergibt sich eine Näherung durch eine Gerade (Tangente im Bezugspunkt).

### Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

$$R_\vartheta = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta \vartheta) \quad \text{mit} \quad \Delta \vartheta = \vartheta_1 - 20^0 \quad (4.12)$$

Darin sind  $R_{20}$  der Widerstandswert und  $\alpha_{20}$  der Temperaturkoeffizient (steht für den Anstieg der Geraden) und sie werden jeweils im Bezugspunkt bei  $20^0$  C bestimmt. Für einige Anwendungen ist es sinnvoll, einen anderen Bezugspunkt zu wählen. Bei sehr großen Temperaturbereichen wird die zweite Ordnung der Taylorreihe ( $\beta_{20}\Delta\vartheta^2$ ) hinzugezogen. ( $\beta_{20}$  steht für die Änderung des Anstieges im Bezugspunkt.)

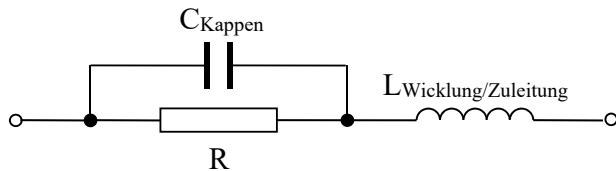
**Praxistipp:** Die Temperaturkoeffizienten sind für viele Materialien in Tabellenbüchern gesammelt.

#### 4.2.2 Bauformen und Kenngrößen

Widerstände müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Widerstandswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite ist die Leistung, die als Wärme abgeführt werden muss (bei einigen Bauformen steht an dieser Stelle auch die maximale Strombelastung).

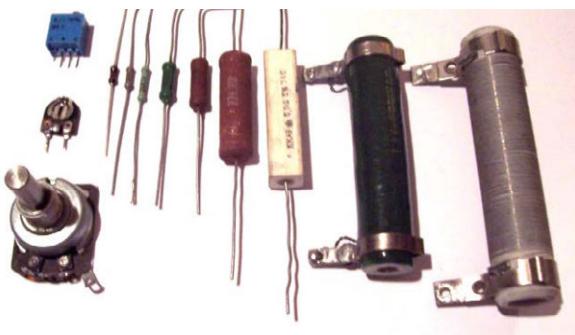
Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität
- Baugröße und -form
- Kapazität der Kappen und Wicklungen oder Induktivität von Wicklung und Leitungen (siehe Abschnitte 5 und 6) Abb. 4.23
- Spannungsfestigkeit bei Hochspannungseinsatz oder
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen



**Abb. 4.23: Ersatzschaltbild Widerstand mit parasitärer Kapazität und Induktivität**

In Abb. 4.24 sind einige Beispiele für grundlegende Bauformen abgebildet.



**Abb. 4.24: Verschiedene Widerstände**

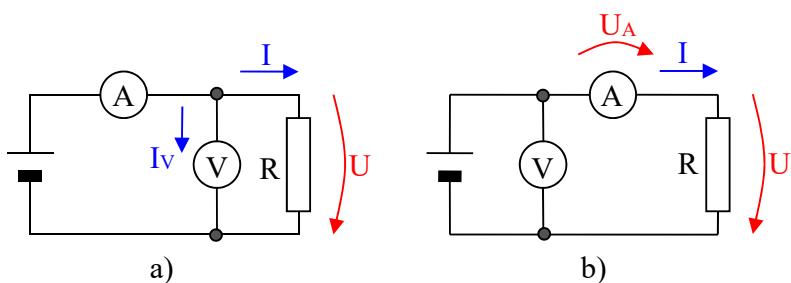
Links von oben nach unten: Präzisionseinstellregler, Miniatureinstellregler, Potentiometer,  
weiter von links nach rechts: 1/20 bis 1/2 W Kohleschichtwiderstände 4 Größen  
1 bis 12 W Drahtwiderstände (teils nicht umhüllt)

Als Beispiel für Spezialbauformen seien Vierleiterwiderstände genannt. Bei diesen befinden sich unmittelbar am justierten Teil des Widerstandes zwei zusätzliche Anschlussdrähte für eine genaue belastungsunabhängige Spannungsmessung (z.B. bei Shunts und Präzisionsmesswiderständen).

**Praxistipp:** Es existieren für Widerstände komplette Baureihen mit verschiedener Fehlertoleranz und Belastbarkeit. Die Fehlerbereiche der einzelnen Widerstandswerte liegen direkt aneinander, sodass es praktisch bei der Herstellung keinen Ausschuss gibt.

### 4.2.3 Messung von Widerständen

Der Widerstandswert kann durch eine Messung von Strom und Spannung ermittelt werden (entsprechend seiner Definitionsgleichung).



**Abb. 4.25: Strom- und Spannungsmessung**

Die Darstellung (Abb. 4.25) zeigt, dass im Fall

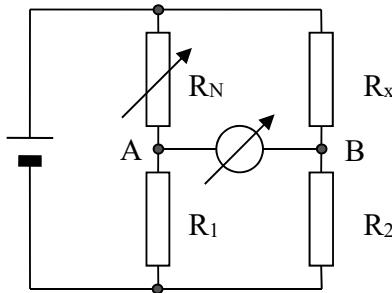
- der Strom  $I_m = Iv + I$  gemessen wird, aber die Spannung U richtig gemessen wird,
- der Strom I richtig gemessen wird, aber die Spannung  $U_m = U_A + U$  gemessen wird.

**Praxistipps:** Man wählt die Schaltung von beiden, für die entweder  $I_V$  oder  $U_A$  zu einem vernachlässigbaren Fehler führt. Wird der Fehler zu groß, kann bei

- aus dem richtig gemessenen  $U$  (bei bekanntem Widerstand  $R_V$  des Voltmeters)  $I_V$  errechnet und der Strom korrigiert werden ( $I = I_m - U/R_V$ ) bzw. bei
- aus dem richtig gemessenen  $I$  (bei bekanntem Widerstand  $R_A$  des Amperemeters)  $U_A$  errechnet und die Spannung korrigiert werden ( $U = U_m - I R_A$ ).

Die einfache Widerstandsmessung mit Multimetern sollte nur der „Orientierung“ dienen.

Eine in der Regel genauere (aber aufwändigere) Variante stellt die Vergleichsmethode dar. Dazu kann eine Wheatston'sche Brückenschaltung benutzt werden (Abb. 4.26).



**Abb. 4.26: Wheatston'sche Messbrücke**

Mit Hilfe des Normalwiderstandes  $R_N$  und des empfindlichen Messinstruments wird der Brückenstrom auf null abgeglichen. Fließt kein Strom zwischen A und B, kann zwischen A und B kein Spannungsunterschied bestehen und es gilt:

$$\frac{R_N}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \quad \text{d.h.} \quad R_x = R_2 \frac{R_N}{R_1} . \quad (4.13)$$

Das Verhältnis von  $R_1$  und  $R_2$  ist bekannt, der Normalwiderstand kann genau abgelesen werden. Die Genauigkeit hängt nur von der Exaktheit des Normalwiderstands und des Widerstandsverhältnisses  $R_2/R_1$  ab.

**Praxistipp:** Diese Schaltung eignet sich auch zur elektronischen Auswertung widerstandsabhängiger Sensoren (z.B. Thermowiderstände, Dehnmessstreifen ...).

#### 4.2.4 Nichtlineare Widerstände

Widerstände haben infolge einer Reihe physikalischer Einflüsse einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen  $U$  und  $I$ . Neben äußeren Einflüssen (wie Licht, Temperatur...) können auch  $U$  bzw.  $I$  selbst die Leitfähigkeit beeinflussen. Spätestens seitdem Halbleiterbauelemente (siehe Abschnitt 12) ihre Bedeutung erlangt haben, muss mit nichtlinearen Kennlinien gearbeitet werden. Das kann entweder

- durch eine Bauelementelinearisierung (Kombination mit einer möglichst genau gegenläufigen Kennlinie im gewünschten Arbeitsbereich),
- durch Linearisierung über eine Kleinsignalbetrachtung (siehe Abschnitt 12.3.3) oder
- durch vollständige Berücksichtigung der Kennlinie  $U = f(I)$  oder  $R = R(U, I)$  erfolgen.

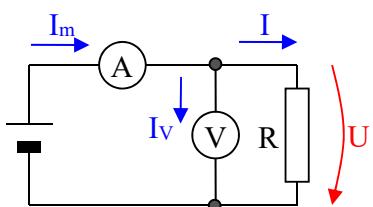
Methodisch wird entweder direkt mit den grafischen Darstellungen der betreffenden Widerstandsbauelemente (z.B. mittels grafischer Verfahren) gearbeitet oder es wird ein geeignetes Modell für eine Rechnersimulation genutzt (siehe Abschnitt 9.5).

**Praxistipp:** Bei nichtlinearen Kennlinien lohnt sich fast immer eine Rechnersimulation.

### 4.2.5 Übungsaufgaben zum Widerstand

#### Aufgabe 4.3

Mit der Schaltung von Abb. 4.27 werden folgende Werte gemessen:



$$\begin{aligned}I_m &= 0,11 \text{ A} \\U &= 100 \text{ V} \\ \text{Gegeben ist zusätzlich:} \\R_v &= 10 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

Frage: Wie groß sind R und G?

Abb. 4.27: Messanordnung

#### Aufgabe 4.4

Zwei Adern eines Telefonkabels mit einem Durchmesser von je 0,3 mm bestehen aus Kupfer mit  $\kappa = 56 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$  und haben einen Kurzschluss bei einem Widerstand von  $2 \text{ k}\Omega$ .

Frage: Wie lang ist eine Ader, in welcher Entfernung liegt der Fehler?

#### Aufgabe 4.5

Die Temperatur verändert sich von  $20^\circ$  auf  $40^\circ$ . Für Kupfer ist  $\alpha_{20} = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ .

Frage 1: Wie ändert sich der Widerstand von Aufgabe 4.4 bei gleicher Entfernung?

Frage 2: Welche Entfernungs differenz entsteht mit dem gemessenen Widerstandswert  $2 \text{ k}\Omega$ , wenn statt  $40^\circ$  bei Berechnung der Entfernung  $20^\circ$  angenommen wird?

#### Aufgabe 4.6

Das gleiche Kabel von Aufgabe 4.4 wird zum Anschluss eines Lautsprechers mit  $4 \Omega$  benutzt, der 50 m von der Bühne entfernt ist.

Frage: Welcher Widerstand kommt zu den  $4 \Omega$  dazu und verringert damit den Strom?

#### Aufgabe 4.7

Als Beispiel für eine Spannungsteilung mit einem nichtlinearen Widerstand ist eine einfache Spannungsstabilisierung zu untersuchen. Mehrere IC sollen aus einer 6 V Batterie mit 5 V versorgt werden. Je nach Zuständen benötigen die IC unterschiedlich viel Strom (maximal jedoch 65 mA). Es soll eine Z-Diode (mit 5,1 V Nenn-Z-Spannung und 100 mA Maximalstrom) eingesetzt werden. (Schwankungen der Batteriespannung sollen in diesem einfachen Beispiel erst einmal nicht berücksichtigt werden.)

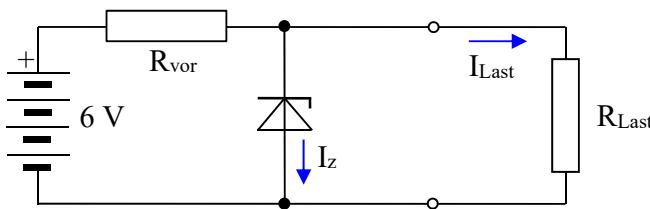
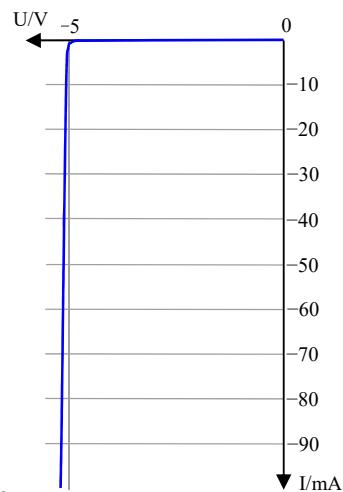


Abb. 4.29: Schaltung mit einer Z-Diode

U / V	I <sub>Z</sub> / mA
0,00	0,00
-4,80	-0,10
-4,90	-0,30
-5,00	-1,00
-5,04	-3,00
-5,07	-10,00
-5,10	-30,00
-5,20	-100,00

Abb. 4.28: Kennlinie Z-Diode



Frage 1: Wie groß muss  $R_{\text{vor}}$  sein, damit die Z-Diode nicht überlastet wird?

Hinweis:  $I_Z$  wird für  $I_{\text{Last}} = 0$  am größten, da der gesamte Strom nur durch die Diode geht.

Frage 2: Welcher maximale Strom  $I_{\text{Last}}$  kann entnommen werden, wenn die Spannung an  $R_{\text{Last}}$  nicht unter 4,9 V sinken soll? Reicht es für die IC?

Hinweis:  $I_Z$  muss mindestens 1(4,9 V) bleiben. Der Rest des in diesem Fall fließenden Stromes kann durch die Last fließen.

Zusatzfrage: Wie ergeben sich  $R_{\text{vor}}$  und  $I_{\text{Last max}}$  (im ungünstigsten Fall), wenn die Batteriespannung von frisch 6,3 V bis zum Entladestand 5,9 V genutzt werden soll? Reicht es auch im ungünstigsten Fall für die IC?

Hinweis: Zuerst den jeweils ungünstigsten Fall abklären; sonst wie Frage 1 und 2 lösen.

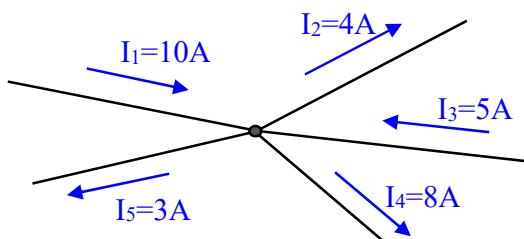
## 4.3 Kirchhoff'sche Sätze sowie Reihen- und Parallelschaltung

### 4.3.1 Knotenpunkt und Maschensatz

Der Strom war in ( 4.1 ) als Ladung pro Zeiteinheit definiert worden. Da Ladungen in der Natur weder „erschaffen“ werden noch „verschwinden“ können, müssen so viele Ladungen, wie zu einem Ort hinfliessen, auch wieder abfliessen (1. Praxistipp Abschnitt 2.1). In Anordnungen, die Ladungen speichern können, kann zusätzlich eine Änderung der gespeicherten Ladungsmenge auftreten. An einem Verbindungspunkt elektrischer Leiter (Knotenpunkt), wo normalerweise keine Ladungen gespeichert werden, kann demzufolge als Bilanz aufgestellt werden:

#### Knotenpunktsatz von Kirchhoff

$$\sum_{\uparrow} I_v = \sum_{\downarrow} I_u \quad I_v \text{ alle zufließenden und } I_u \text{ alle abfließenden Ströme} \quad (4.14)$$



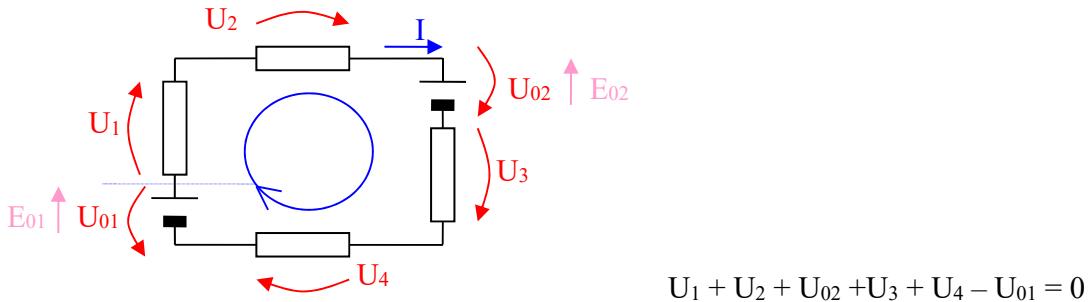
$$15 \text{ A} = I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 = 15 \text{ A}$$

Abb. 4.30: Beispiel für einen Knotenpunkt (Teil einer Schaltung)

Eine weitere Bilanz kann nach den Darlegungen zu Abb. 4.4 aufgestellt werden. So muss entlang eines geschlossenen Kreislaufes die Summe aller Spannungsabfälle ( $U = \Delta W_{\text{Abgabe}} / Q_p$ ) zu null werden. (Bzw. Summe der Urspannungen ist gleich Summe der Spannungsabfälle; das entspricht dem Satz der Energieerhaltung.)

### Maschensatz von Kirchhoff

$$\sum U_v = 0 \quad \text{mit } U_v \text{ alle Spannungsabfälle in gleichem Umlaufsinn}$$
( 4.15 )



**Abb. 4.31: Beispiel für eine Masche (Teil einer Schaltung)**

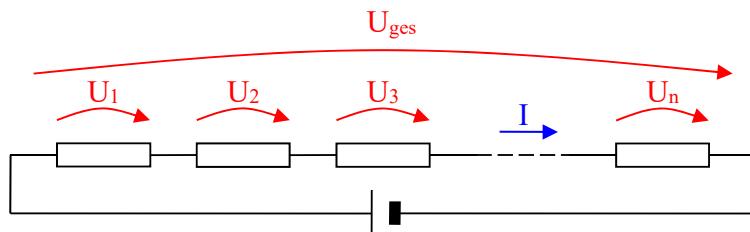
In Richtung des Umlaufsinns (im Beispiel von Abb. 4.31 skizziert) wird die Masche von einem Anfangspunkt an genau einmal umlaufen. Dabei werden alle Spannungen, deren Richtung mit dem Umlaufsinn übereinstimmt, positiv, die anderen negativ (im Beispiel nur  $U_{01}$ ) summiert. ( $U_{01}$  und  $U_{02}$  werden an den Klemmen der Quelle außen gemessen.)

**Praxistipp:** Die beiden Kirchhoff'schen Sätze gelten *ohne jede Einschränkung*. Sie werden oft vorteilhaft zur Schaltungsberechnung genutzt.

### 4.3.2 Parallel- und Reihenschaltung, Strom- und Spannungsteilung

Bei einer Reihenschaltung (Abb. 4.32) fließt durch alle Widerstände **derselbe Strom**.

**Praxistipp:** Das Vorhandensein desselben Stroms kann zum Test benutzt werden, ob eine reine Reihenschaltung vorliegt.



**Abb. 4.32: Reihenschaltung von Widerständen**

Für denselben Strom kann mit dem Maschensatz geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U_{\text{ges}} &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad | :I \\ R_{\text{ges}} &= R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \end{aligned} \quad (\text{mit } R = U / I)$$
( 4.16 )

und ferner  $I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} = \dots = \frac{U_n}{R_n} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} .$  ( 4.17 )

Aus ( 4.16 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung von Widerständen:

### Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \sum_{\nu} R_{\nu} . \quad ( 4.18 )$$

Aus ( 4.17 ) kann die Aufteilung der Spannung auf die Widerstände einer Reihenschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

### Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} \quad ( 4.19 )$$

In ( 4.19 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $U_1$  zu  $U_{\text{ges}}$  gezeigt.

**Praxistipp:** Die Spannungen teilen sich im Verhältnis der Widerstände auf.

Bei einer Parallelschaltung (Abb. 4.33) liegt an allen Widerständen **dieselbe Spannung**.

**Praxistipp:** Das Vorhandensein derselben Spannung kann wiederum zum Test benutzt werden, ob eine reine Parallelschaltung vorliegt.

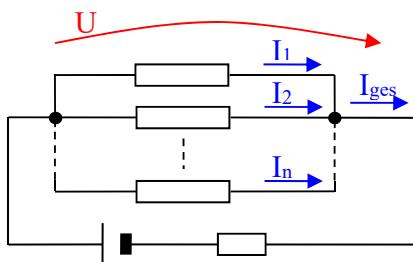


Abb. 4.33: Parallelschaltung von Widerständen

Für dieselbe Spannung kann mit dem Knotenpunktsatz geschrieben werden:

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \quad | : U \\ G_{\text{ges}} &= G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n \end{aligned} \quad (\text{mit } G = 1 / R = I / U) \quad ( 4.20 )$$

und ferner  $U = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \frac{I_3}{G_3} = \dots = \frac{I_n}{G_n} = \frac{I_{\text{ges}}}{G_{\text{ges}}} .$  ( 4.21 )

Aus ( 4.20 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Widerständen:

### Parallelschaltung von Widerständen

$$G_{\text{ges}} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{R_{\nu}} = \sum_{\nu} G_{\nu} . \quad ( 4.22 )$$

Aus ( 4.21 ) kann die Aufteilung des Stromes auf die Widerstände einer Parallelschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

### Stromteilerregel bei Parallelschaltung

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \quad (4.23)$$

In ( 4.23 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $I_1$  zu  $I_{\text{ges}}$  gezeigt.

**Praxistipp:** Die Ströme teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Widerstände auf.

Die hier gezeigten Zusammenhänge entstanden durch die Anwendung des Maschen- und des Knotenpunktsatzes auf die beiden einfachsten Schaltungsvarianten.

**Praxistipp:** Die Gleichungen ( 4.18 ), ( 4.19 ), ( 4.22 ) sowie ( 4.23 ) spielen eine sehr wichtige Rolle bei der Berechnung elektrischer Schaltungen und Netzwerke.

Da zu ihrer Ableitung das Ohm'sche Gesetz genutzt wurde, ist die Anwendung auf **lineare Bauelemente** beschränkt, d.h. nur für diese sinnvoll.

### 4.3.3 Übungsaufgaben zu einigen praktischen Anwendungen

#### Aufgabe 4.8

Es soll die Zeitfunktion einer Spannung mit einem Maximalwert von 3000 V mit einem Oszilloskop dargestellt werden (z.B. bei einer Funkenentladung). Das Oszilloskop kann eine maximale Eingangsspannung von 400 V darstellen und hat dabei einen Eingangswiderstand von  $10 \text{ M}\Omega$ .

Frage 1: Welcher Widerstand muss in Reihe zum Eingang geschaltet werden, damit am Eingang des Oszilloskops nur 300 V anliegen?

Frage 2: Vorhandene  $10 \text{ M}\Omega$  Widerstände haben eine Bauform mit einer Länge von ca. 1 cm. Es sollen, um einen Überschlag sicher zu vermeiden, mindestens 8 cm für den Spannungsabfall zur Verfügung stehen. Welche Schaltung und räumliche Anordnung sind zu wählen?

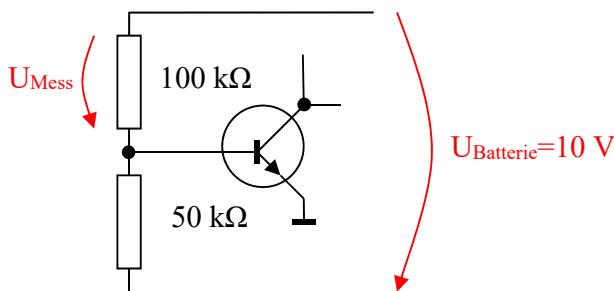
#### Aufgabe 4.9

Für einen Test zur Entladung einer Autobatterie von 12 V soll als Verbraucher ein Widerstand von  $6 \Omega$  eingesetzt werden. Vorhanden sind  $4 \Omega$  Widerstände, die im Dauerbetrieb Wärme bis zu einem Maximalstrom von 1 A abführen können.

Frage: Welche Schaltung ist zu wählen und wie viele Widerstände werden benötigt?

#### Aufgabe 4.10

Bei einer Schaltung (Schaltungsdetail in Abb. 4.34) soll am  $100 \text{ k}\Omega$  Widerstand die Spannung gemessen werden. Es steht ein Multimeter (ein etwas älterer Typ) mit  $10 \text{ k}\Omega/\text{V}$  Eingangswiderstand und einem 10-V-Messbereich zur Verfügung.

**Abb. 4.34: Schaltungsdetail**

Frage 1: Welcher Messfehler ist zu erwarten?

Hinweis: Zuerst die Spannung ohne Messgerät berechnen, dann mit Messgerät.

Frage 2: Welcher Messfehler ist mit einem Multimeter mit messbereichsunabhängigem Eingangswiderstand von  $10 \text{ M}\Omega$  (heute Standard) zu erwarten?

## 4.4 Energieumwandlung und Leistung

### 4.4.1 Energie, Leistung und Wirkungsgrad

Die Energie, die an einem elektrischen Verbraucher umgewandelt wird, folgt direkt aus der Umkehrung der Definition der Spannung ( 4.6 ).

#### Verbrauch elektrischer Energie

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} U dQ = \int_{t_1}^{t_2} U I dt \quad ^{24} \quad \text{oder} \quad W = U I t_{12} \quad \text{für } U \text{ und } I \text{ const .} \quad (4.24)$$

Wird an den Klemmen einer Quelle wie an einem Verbraucher gemessen, wird die Energie negativ (z.B. Batterie oder Straßenbahnmotor, der beim Bremsen als Generator fungiert). Das entspricht der Richtungsumkehr der Energieumwandlung (vergleiche Abb. 4.4).

Die Leistung als Arbeit pro Zeit (Energie pro Zeit) ist in der Elektrotechnik eine der wichtigsten Kenngrößen.

#### Verbrauch elektrischer Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = U I \quad ^{25} \quad \text{auch als } p(t) = u(t) i(t) \quad (4.25)$$

Zusammen mit dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich für einen Widerstand mit zeitkonstantem  $U$  und  $I$  (ansonsten zu jedem Zeitpunkt):

$$P = I^2 R = U^2 / R$$

Mit der Leistung ist eine weitere wichtige technische Kenngröße verbunden: der Wirkungsgrad. Darin beschreibt  $P_{ab}$  die abgegebene Leistung, die genutzt werden kann, und  $P_{zu}$  die Leistung, die zugeführt werden muss. Beide Leistungen sind in der Regel von verschiedenen Energieformen (z.B. mechanisch → elektrisch, elektrisch → Wärme usw.).

<sup>24</sup> Die Maßeinheit ist Nm=Ws=VAs.

<sup>25</sup> Die Maßeinheit ist Nm/s=W nach Watt benannt.

## Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

( 4.26 )

**Praxistipp:** Ein sehr großer Teil der Aufgaben der Elektrotechnik besteht immer in einer Energieumwandlung. Dabei lässt sich Elektroenergie sehr elegant in praktisch jede andere Energieform wandeln. Um diese Prozesse richtig verstehen und handhaben zu können, müssen auch entsprechende Kenntnisse der anderen Energieformen und deren Messung, deren Problemstellungen, deren Handhabung usw. vorliegen. Das umfasst z.B.:

- Handhabung von Batterien, Akkus bzw. Elektrolyse bei chemischer Energie,
- Fragen der Wärmespeicherung, -strahlung und -leitung bei der Wärmeenergie,
- Fragen und Aufgaben der Beleuchtungstechnik beim Licht,
- Antriebsaufgaben bei der mechanischen Energie usw.

(siehe z.B. (Lun91 S. 102-127) und die Abschnitte 4.4.4, 4.4.5, 4.4.6 sowie 19).

### 4.4.2 Messung von Energie und Leistung

Sind Strom und Spannung zeitkonstant, reichen eine Strommessung, eine Spannungsmessung und eine Zeitmessung, um Energie, Leistung und Wirkungsgrad zu ermitteln.

In der Regel sind die Bedingungen ungünstiger.

Zur Messung der **Energie** muss dann das Integral von ( 4.24 ) gebildet werden. Das leistet jeder Energiezähler im Haushalt (neue Geräte elektronisch, ältere elektromechanisch).

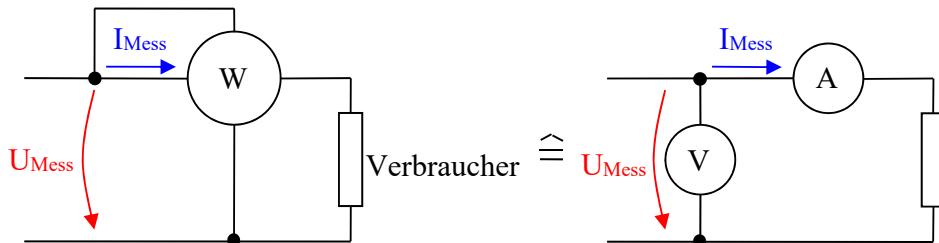
Soll die **Leistung** P gemessen werden, muss das Produkt in ( 4.25 ) gebildet werden.

**Praxistipp:** Eine Leistungsmessung realisieren ebenfalls neue Geräte elektronisch, ältere elektromechanisch.

Bei p(t) werden in der Regel Mittelwerte über eine definierte Zeit gemessen, ansonsten kann z.B. ein Zweikanal-Oszilloskop mit Multiplikationsfunktion genutzt werden.

Sowohl bei der Leistungsmessung als auch bei der Energiemessung muss das Messgerät gleichzeitig Strom und Spannung auswerten, es ist also wie ein Strommesser **und** ein Spannungsmesser anzuschließen (Abb. 4.35).

#### Messung der elektrischen Leistung



**Abb. 4.35: Anschluss eines Wattmeters und Einzeldarstellung des Strom- und Spannungspfades für diese Schaltung**

Die gezeigte Schaltung entspricht also einer stromrichtigen Messung. Die Eichung des Wattmeters berücksichtigt aber diesen Fehler.

## Messung der elektrischen Energie

**Praxistipp:** Ein Energiezähler wird genauso angeschlossen wie der Leistungsmesser, nur dass er intern noch das Zeitintegral bildet (oder eben zählt).

Weil  $p(t)$  zu jedem Zeitpunkt einen anderen Wert besitzt und damit wenig aussagefähig ist, wurden für wichtige Stromarten andere Parameter geschaffen. Für periodische, so auch für rein sinusförmige Ströme und Spannungen (wie im Energienetz) wird die mittlere Leistung (genannt Wirkleistung) genutzt. Gemittelt wird über eine Periode der Spannung.

### Wirkleistung (physikalisch real)

$$P_w = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt \quad (4.27)$$

Diesen Mittelwert bilden elektromechanische Messgeräte aufgrund ihrer mechanischen Trägheit gleich mit, bei elektronischen wird dieses zusätzlich realisiert. Die Wirkleistung kann aber null werden, obwohl Ströme fließen und Spannungen anliegen, sie reicht zur Bewertung also nicht immer aus. Bei **rein sinusförmigen Strömen** tritt dies z.B. ein, wenn die Sinusfunktionen von Strom und Spannung um genau  $90^\circ$  verschoben sind (Abb. 4.36). Die Rechnung zeigt:

$$P_w = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \sin(\omega t) \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos \varphi \quad (4.28)$$

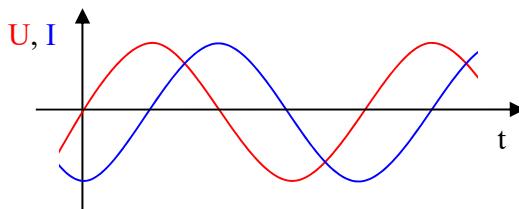


Abb. 4.36: Sinusförmige Spannung und um  $90^\circ$  verschobener Strom

Dabei ist  $\cos(90^\circ) = 0$ . Es wäre für diesen Fall aber  $\sin(90^\circ) = 1$ .

Eine mit  $\sin \varphi$  definierte Blindleistung entspricht einer Leistung, die ständig zwischen Quelle und Verbraucher hin und her gespeichert wird, ohne verbraucht zu werden (jeweils  $90^\circ$  sind Strom und Spannung gleich gepolt und die nächsten  $90^\circ$  entgegengesetzt, siehe Abb. 4.36). Das ist eine nützliche Kenngröße.

### Definition von Blindleistung und Scheinleistung

$$P_b = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \sin \varphi \quad \text{und} \quad P_s = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \quad \text{mit} \quad P_s^2 = P_w^2 + P_b^2 \quad (4.29)$$

**Praxistipp:** Hierbei gibt die Scheinleistung Auskunft über die maximal auftretende Belastung bezüglich Strom und Spannung.

Da  $\cos \varphi$  gerade den Anteil der Wirkleistung wiedergibt, folgt daraus der Leistungsfaktor<sup>26</sup>.

### Definition des Leistungsfaktors

$$\cos \varphi = \cos \langle u(t), i(t) \rangle \quad (4.30)$$

<sup>26</sup> Für nichtsinusförmige periodische Größen werden ähnliche erweiterte Definitionen bereitgestellt.

**Praxistipp:** Zu beachten ist, dass Blindleistung, Scheinleistung und  $\cos\varphi$  nur für rein sinusförmige Ströme und Spannungen definiert und so nur dafür anwendbar sind sowie entsprechende Messgeräte nur dafür aussagefähig sind oder benutzt werden können<sup>26</sup>.

Die Wirkleistung gibt uns die Möglichkeit, für periodische (und auch für rein sinusförmige) Ströme und Spannungen bessere Kennwerte zu definieren. Diese sollen eine *äquivalente Aussagefähigkeit* haben wie die Messwerte von Gleichstrom *in Bezug auf die Leistung* (bei gleich großen Werten für U bzw. I). Dazu dient der quadratische Mittelwert.

### Definition des Effektivwertes

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

und für Sinusspannung  $U_{\text{eff}} = \hat{U}/\sqrt{2}$

und für Sinusstrom  $I_{\text{eff}} = \hat{I}/\sqrt{2}$

( 4.31 )

Es werden:

$P_s = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$	$= \hat{U} \hat{I} / 2$	bei Sinusform,
$P_w = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$	$= (\hat{U} \hat{I} / 2) \cos\varphi$	bei Sinusform und
$P_b = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$	$= (\hat{U} \hat{I} / 2) \sin\varphi$	bei Sinusform.

**Praxistipp:** Heute gibt es preisgünstige Messgeräte, die diese Definitionen elektronisch realisieren. Ältere Geräte haben nur den arithmetischen Mittelwert des gleichgerichteten Zeitverlaufs gebildet (mittels der mechanischen Trägheit oder elektronisch mit einem Tiefpass) und nur für reine Sinusform die Skala auf die Effektivwerte geeicht.

Es gibt auch elektromechanische Messgeräte (Dreheisenmesswerk), die einen echten Effektivwert bilden (in der Regel nur für  $U > 10$  V bzw.  $I > 1$  A).

### 4.4.3 Übungsaufgaben zur Leistung

#### Aufgabe 4.11

Auf dem Typenschild eines Asynchronmotors sind u.a. folgende Angaben:

Nennspannung : 220/380 V

Nennstrom : 1,6/0,93 A

$\cos\varphi$  : 0,78

Leistung : 0,33 kW

Frage: Wie groß sind die Wirkleistung (elektrisch), die Blindleistung und der Wirkungsgrad?

Hinweis: Alle Angaben sind Effektivwerte, die Leistung ist die nutzbare mechanische

Leistung, die Rechnung müsste bei 220 V bzw. 380 V im Rahmen der

Messgenauigkeit gleiche Ergebnisse liefern. Beachte die drei Phasen

$3 \times 220V \cdot 0,93A$  oder  $\sqrt{3} \times 220V \cdot 1,6A$  oder  $\sqrt{3} \times 380V \cdot 0,93A$ , vergleiche Abschnitt 19.3.1.

#### Aufgabe 4.12

Ein Widerstand von  $470 \Omega$  ist für eine Wärmeabgabe von  $1/8$  W im Dauerbetrieb ausgelegt.

Frage 1: Wie groß ist der maximale Strom in einer Gleichstromschaltung?

Frage 2: Wie groß ist der Effektivwert des maximalen Stromes bei Wechselstrom?

Hinweis: Für einen Widerstand gilt  $\cos\varphi=1$ .

**Aufgabe 4.13**

Eine 100 W Glühlampe hat einen Wirkungsgrad von 5 % und soll durch eine Energiesparlampe mit gleicher Lichtleistung ersetzt werden.

Frage: Welche elektrische Leistung muss die Energiesparlampe haben, wenn sie einen Wirkungsgrad von 25 % besitzt?

Zusatzfrage: Welche Leistung müsste ein LED-Array mit  $\eta=40\%$  haben?

**Aufgabe 4.14**

Ein Audioverstärker hat eine Ausgangsspannung von  $U_{eff} = 20 \text{ V}$ . Es kann ein Lautsprecher mit einem Widerstand  $R_L \geq 4 \Omega$  angeschlossen werden.

Frage 1: Welche Leistung kann maximal entnommen werden?

Frage 2: Welche Leistung kann von einem Lautsprecher mit  $8 \Omega$  entnommen werden?

Frage 3: Wie sind zwei Lautsprecher mit je  $8 \Omega$  anzuschließen?

**4.4.4 Anwendung in der Elektrochemie (Batterien, Akkus, Elektrolyse)\***

In Batterien und Akkumulatoren wird **chemische in elektrische Energie** gewandelt.

Bei Primärzellen (Batterien) findet eine irreversible Wandlung chemischer in elektrische Energie statt. Bei Sekundärzellen (Akkumulatoren oder Akkus) sind beide Richtungen der Energiewandlung möglich (reversible Wandlung).

Nach den Versuchen von Galvani und den Diskussionen um die Deutung der Ergebnisse erfand Volta um 1800 die sogenannte Volta'sche Säule – die erste funktionierende Batterie. 1803 hat Ritter als erster das Prinzip eines Akkumulators (Ritter'sche Säule) entwickelt. Erst die Kohle-Zink-Batterie (besser die Zink-Braunstein-Zelle<sup>27</sup>), die als Weiterentwicklung des Leclanché-Elements von 1866 entstand, sowie der Bleiakkku, der auf Entwicklungen von Sinsteden um 1854 zurückgeht, konnten umfassend genutzt werden und sich z.T. bis heute durchsetzen. Gegenwärtig laufen wieder weltweit intensive Forschungen zu effektiveren Batterien/Akkumulatoren.

Das Grundprinzip besteht in einer **Redoxreaktion**. Reduktion und Oxidation erfolgen räumlich getrennt an jeweils einer Elektrode.

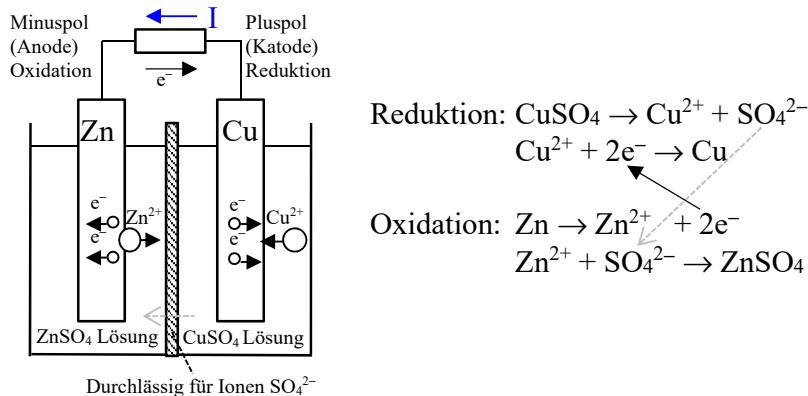
An den Elektrodenoberflächen stellt sich dabei (wie an allen Grenzschichten) ein **Gleichgewicht** ein. In diesem Fall besteht es zwischen dem **Lösungsdruck** (Bestreben der Metallatome, als Ionen in Lösung zu gehen) und dem **Abscheidungsdruck**<sup>28</sup> (Bestreben der Metallionen der Lösung, sich als Atome an der Oberfläche anzulagern). Zusätzlich ziehen die im Metall verbleibenden Elektronen die positiven Metallionen zurück und die Metallionen in der Lösung bremsen einen weiteren Ionenaustritt<sup>29</sup>.

Die Atome der unedleren Metalle werden so in Lösungen, die Ionen edlerer Metalle enthalten, zu Ionen oxidiert, die in Lösung gehen. Die Ionen des edleren Metalls werden reduziert und die Atome an der Elektrode abgeschieden (siehe Abb. 4.37).

<sup>27</sup> Braunstein ist Mangandioxid.

<sup>28</sup> Wurde auch z.B. von Nernst mit dem osmotischen Druck verglichen.

<sup>29</sup> Zuerst zur Berechnung der Gleichgewichtspotentiale untersucht von Nernst (Nernst-Gleichung).



**Abb. 4.37: Daniell-Element (schematisch)**

**Praxistipp:** Positive Ladungen bewegen sich **innerhalb** der Zelle von der Anode (hier  $\text{Zn}^{2+}$ ) zur Katode (hier  $\text{Cu}^{2+}$ ). Daraus resultieren die Bezeichnungen. So ergibt sich **außen** an der Katode der **Pluspol** ( $e^-$  fließen hinein) und an der Anode der **Minuspol** ( $e^-$  fließen heraus). Die Verwirrung wird vermieden, wenn nur von Plus- und Minuspol gesprochen wird.

Entsprechend ihres Verhaltens bei Redoxreaktion können Metalle und andere Materialien in einer elektrochemischen Spannungsreihe dargestellt werden.

Oxidations Form ( $e^-$ -Abgabe) $\rightleftharpoons$	$\rightleftharpoons$	Reduktions Form ( $e^-$ -Aufnahme) (Pluspol)	Spannung gegen die Normalelektrode
$\text{Li}^+ + e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Li}$	$E_0 = -3,04 \text{ V}$
$\text{Na}^+ + e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Na}$	$E_0 = -2,71 \text{ V}$
$\text{Zn} + 4 \text{OH}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-} + 2 e^-$	$E_0 = -1,20 \text{ V}$
$\text{Fe}(\text{OH})_2 + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Fe} + 2 \text{OH}^-$	$E_0 = -0,89 \text{ V}$
$\text{Cd} + 2 \text{OH}^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cd}(\text{OH})_2 + 2 e^-$	$E_0 = -0,81 \text{ V}$
$\text{Zn}^{2+} + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Zn}$	$E_0 = -0,76 \text{ V}$
$\text{PbSO}_4 + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Pb} + \text{SO}_4^{2-}$	$E_0 = -0,36 \text{ V}$
$2 \text{H}^+ + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{H}_2$ (Normalwasserstoffelektrode)	$E_0 = \pm 0,00 \text{ V}$
$\text{Cu}^{2+} + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Cu}$	$E_0 = +0,34 \text{ V}$
$\text{O}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} + 4 e^-$	$\rightleftharpoons$	$4 \text{OH}^-$	$E_0 = +0,40 \text{ V}$
$\text{NiO}(\text{OH}) + \text{H}_2\text{O} + e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ni}(\text{OH})_2 + \text{OH}^-$	$E_0 = +0,49 \text{ V}$
$\text{Ag}^+ + e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Ag}$	$E_0 = +0,79 \text{ V}$
$\text{MnO}_2 + 4 \text{H}^+ + e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{Mn}^{3+} + 2 \text{H}_2\text{O}$	$E_0 = +0,95 \text{ V}$
$\text{O}_2 + 4 \text{H}^+ + 4 e^-$	$\rightleftharpoons$	$2 \text{H}_2\text{O}$	$E_0 = +1,23 \text{ V}$
$\text{PbO}_2 + \text{SO}_4^{2-} + 4 \text{H}_3\text{O}^+ + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$\text{PbSO}_4 + 6 \text{H}_2\text{O}$	$E_0 = +1,67 \text{ V}$
$\text{F}_2 + 2 \text{H}^+ + 2 e^-$	$\rightleftharpoons$	$2 \text{HF}$	$E_0 = +3,05 \text{ V}$

**Tabelle 4.1: Elektrochemische Spannungen einiger ausgewählter Materialien** <sup>30</sup>

Für Materialkombinationen können nach Tabelle 4.1 die theoretischen Gesamtspannungen ermittelt werden <sup>31</sup>. Die angegebene Nennspannung hängt in der Praxis noch von den tatsächlichen momentanen Konzentrationen der Elektrolytlösungen, von Verunreinigungen, von weiteren Parametern (pH-Wert, Temperatur usw.) und der vorgesehenen Stromentnahme ab.

<sup>30</sup> Es gibt durchweg leicht differierende Angaben. Dabei unterscheiden sich die Reaktionswege sowie die Messgenauigkeit der Angaben. Hier soll nur ein Überblick gegeben werden.

<sup>31</sup> Das gilt für den statischen Gleichgewichtszustand, bei dem alle Ladungen im statistischen Mittel ausgeglichen (sowie alle Ströme null) sind (Differenz  $E_0 \text{ Pluspol} - E_0 \text{ Minuspol}$ ).

Name	positive Elektrode (e <sup>-</sup> -Aufnahme, red. Form)	negative Elektrode (e <sup>-</sup> -Abgabe, oxid. Form)	Spannung in V theoretisch	Nennspannung
Daniell-Element	Cu	Zn	0,34 + 0,76	ca. 1,1
Leclanché-Element	MnO <sub>2</sub>	Zn	0,95 + 0,76	ca. 1,5
Alkali-Mangan-Element	MnO <sub>2</sub>	Zn	0,95 + 0,76	ca. 1,5
Zink-Luftsauerstoff-Element	O <sub>2</sub>	Zn(OH) <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	0,40 + 1,20	ca. 1,6
Nickel-Cadmium-Akku	NiO(OH)	Cd(OH) <sub>2</sub>	0,49 + 0,81	ca. 1,2
Bleiakku	PbO <sub>2</sub>	Pb	1,67 + 0,36	ca. 2,0
Lithium-Polymer-Akku z.B.	Graphit (C)	LiCoO <sub>2</sub>		ca. 3,6
Brennstoffzelle z.B. <sup>32</sup>	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	1,23 + 0,00	ca. < 1,0

Tabelle 4.2: Beispiele für Primär- und Sekundärelemente<sup>30 33</sup>

**Praxistipp:** Die Messung der Leerlaufspannung zeigt in der Regel nur einen sehr groben Anhaltspunkt über den Entladezustand. Es muss eine Messung bei Belastung vorgenommen werden (bei kleinen Batterien oder Akkus sogar eine kurzzeitige Kurzschlussstrommessung). Es sind dazu Erfahrungswerte bzw. Herstellerangaben erforderlich. Z.B. haben gute frische AA-Alkaline-Batterien einen Kurzschlussstrom größer 7 A.

Eine Wandlung **elektrischer in chemische Energie** wird vor allem für technologische Zwecke verwendet (Elektrolyse). Dabei geht es um Stofftrennung (z.B. Aluminiumherstellung, Wasserstofferzeugung, Herstellung von Reinstkupfer ...) oder galvanisches Beschichten usw. Grundlage ist wiederum die gleiche Spannungsreihe. Das Faraday'sche Abscheidungsgesetz gibt Auskunft über den Stromverbrauch  $Q = I \cdot t$  für die elektrolytische Abscheidung der Masse m.

$$m = \frac{M Q}{z F} = (96485)^{-1} \frac{A}{z} (Q/\text{As}) \text{ g} \quad (4.32)$$

Dabei bedeuten:

M = molare Masse – entspricht der relativen Molekül- bzw. Atommasse in g/mol,

A = relative Molekül- bzw. Atommasse,

z = Ladungszahl des Ions,

F = Faraday'sche Konstante mit  $F = 96485 \text{ As mol}^{-1} = N_A q_0$ ,

$N_A$  = Avogadro'sche Zahl (entspricht Teilchenanzahl pro mol) mit  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,

An den Elektroden entsteht durch **Polarisation** eine Gegenspannung. Die Ionen bilden um die Elektrode eine zusätzliche Grenzschicht (z.B. eine Wasserstoffhülle). Die so veränderte Grenzschichtstruktur bildet entsprechend der Spannungsreihe eine Gegenspannung  $U_g$ <sup>34</sup>. Bei einer Elektrolyse fließt dann nach Anlegen der Spannung U der Strom

$$I = (U - U_g)/R_{\text{Aufbau}}. \quad (4.33)$$

Die für  $I \cdot U_g$  aufzubringende Energie entspricht der zur Stofftrennung notwendigen Energie und ist somit bei Elektrolyse unvermeidbar<sup>35</sup>. Dagegen ist die Polarisationsschicht bei Spannungsquellen unerwünscht und wird durch eine Bindung mit chemischen Mitteln verhindert (z.B. durch Braunstein beim Leclanché-Element).

<sup>32</sup> Durch ständige Zufuhr von O<sub>2</sub> und H<sub>2</sub> ist ein ununterbrochener Betrieb möglich. Das Prinzip ist umkehrbar.

<sup>33</sup> Hier sind die Ausgangsstoffe an den Elektroden aufgeführt. Deren Reaktionen sind in Tabelle 4.1 bei Beachtung der Richtung für Oxidation bzw. Reduktion zu finden.

<sup>34</sup> Z.B. bildet sich um eine Platinenelektrode in verdünnter Säure ein Überzug aus Wasserstoff und wirkt entsprechend der Spannungsreihe als Element gegen die angelegte Spannung.

<sup>35</sup> Ist in (4.33) U kleiner als U<sub>g</sub>, fließt nur kurz ein Strom, bis die Polarisationsschicht aufgebaut ist.

**Praxistipp:** Bei der praktischen Nutzung sind natürlich Erfahrungen zur Gestaltung aller technologischen Bedingungen für ein effektives Ergebnis erforderlich bzw. zu erproben. So wird abhängig von Spannung, Konzentration des Elektrolyten und eventuellen Zusätzen z.B. eine feste Schicht bis zu einer nadelartigen Struktur abgeschieden.

Für weitere Ausführungen siehe z.B. (Lun91 S. 119 ff).

#### 4.4.5 Anwendung in der Wärmelehre\*

Eine **Umformung elektrischer Energie in Wärme** erfolgt immer bei Stromfluss durch ohmsche Widerstände sowohl unerwünscht (das muss entsprechend berücksichtigt werden) als auch technologisch gewollt. Dabei wird Wärme sowohl im Aufbau gespeichert als auch durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung von ihm wieder abgeführt. Damit ergibt sich eine Temperaturerhöhung, bis ein Gleichgewicht zwischen Wärmezufuhr und -abfuhr erreicht ist.

Die **Wärmemenge**  $Q_{th}$  entspricht der Wärmeenergie (in J – Joule). Der **Wärmestrom**

$$\dot{Q} = dQ_{th}/dt \quad (4.34)$$

(entspricht der Wärmeleistung in W) beschreibt den *Wärmefluss von einem Ort mit höherer zu einem Ort mit tieferer Temperatur* (und nur in diese Richtung, gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik). Als Zustandsgröße wird die **Temperatur** T (in K – Kelvin) eingeführt. Die Wärmemenge ist mit der Wärmekapazität  $C_{th} = m c$  (Masse m, spezifische Wärmekapazität c in J/(kg K))

$$Q_{th} = C_{th} T = c m T .$$

Eine **Erhöhung der Wärmemenge** (z.B. durch Zufuhr elektrischer Leistung  $P_{el} = dQ_{th}/dt$ ) ergibt demnach im Zeitintervall dt die Temperaturerhöhung  $d\vartheta$  (mit der Wärmekapazität  $C_{th}$ ).

$$\dot{Q} = C_{th} d\vartheta/dt = c m d\vartheta/dt \quad ^{36} \quad (4.35)$$

**Wärmeabgabe** erfolgt durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung.

Ein Wärmefluss von einem Ort mit höherer ( $T_1$ ) zu einem Ort mit tieferer Temperatur ( $T_2$ ) erfolgt bei **Wärmeleitung** entsprechend der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  in W/(m K).

$$\dot{Q} = \frac{\lambda A}{l} \vartheta \quad \text{mit } \vartheta = \Delta T = T_1 - T_2 \quad ^{37} \quad (4.36)$$

Dabei kann  $l/(\lambda A)$  als **Thermischer Widerstand** betrachtet werden (Länge l, Fläche A).

Bei **Konvektion** wird ein Wärmestrom von einer Oberfläche A (mit der Temperatur  $T_O$ ) entsprechend dem Wärmeübergangskoeffizienten k in W/(K m<sup>2</sup>) an ein Medium (Luft, Wasser) der Umgebung (Temperatur  $T_U$ ) abgegeben.

$$\dot{Q} = k A \vartheta \quad ^{37} \quad \text{mit } \vartheta = T_O - T_U \quad (4.37)$$

<sup>36</sup> Vergleiche mit  $i = C du/dt$  bei  $C_{th} = c m$ .

<sup>37</sup> Vergleiche mit  $I = (1/R) U$  bei  $R_{th L} = l/(\lambda A)$  bzw.  $R_{th K} = 1/(k A)$ .

Durch **Strahlung** wird nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ein Wärmestrom mit dem Emissionsgrad  $\varepsilon$ <sup>38</sup> und der Boltzmann-Konstante  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  von der Oberfläche A (mit der Temperatur  $T_0$ ) abgestrahlt.

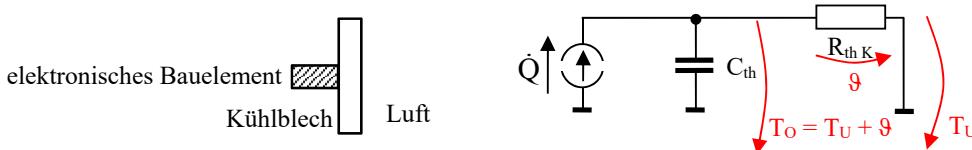
$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma A T_0^4$$

Die gleiche Oberfläche absorbiert aber auch Strahlung aus der Umgebung (Temperatur  $T_U$ ) nach diesem Gesetz und der tatsächlich abgegebene Wärmestrom wird

$$\dot{Q} = \varepsilon \sigma A (T_0^4 - T_U^4) \quad ^{39}.$$

(4.38)

**Praxistipp:** Eine Analogie zu elektrischem Strom und Spannung ist sichtbar und für Berechnungen nutzbar, aber es gibt keinen geschlossenen Wärmestromkreis (vergleiche zweiter Hauptsatz der Thermodynamik).  $\dot{Q}$  ist eine Leistung und T eine Zustandsgröße.



**Abb. 4.38: Elektronisches Bauelement mit Kühlblech und Ersatzschaltung**

Abb. 4.38 zeigt schematisch ein elektronisches Bauelement, das einem Kühlblech seine Verlustleistung als Wärme ( $P_{el} = \dot{Q}$ ) zuführt. Von der Oberfläche des Kühlblechs wird die Wärme über Konvektion an die vorbeiströmende Luft abgegeben. (In der Ersatzschaltung wurden Massepunkte dargestellt, um den nicht stattfindenden Rückfluss zur Quelle anzudeuten.) Der Knotenpunktsatz ergibt:

$$\dot{Q}_{Zufuhr} = \dot{Q}_{Speicher} + \dot{Q}_{Konvektion} = C_{th} d\vartheta/dt + (1/R_{th,K}) \vartheta \quad ^{40}.$$

Mit der Lösung für die Anfangsbedingung  $\theta(t=0) = 0$  (d.h., es ist noch  $T_0 = T_U$ ) wird

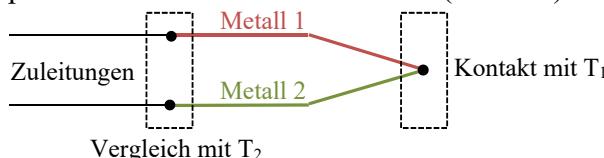
$$\vartheta = P_{el} R_{th,K} (1 - e^{-t/\tau_{th}}) \quad \text{mit } R_{th,K} = 1/(k A) \text{ und } \tau_{th} = C_{th} R_{th,K} = c m/(k A).$$

Nachdem die Erwärmung des Kühlbleches abgeschlossen ist, folgt letztendlich die Temperatur aus  $\dot{Q}_{Zufuhr} = \dot{Q}_{Konvektion}$ .

Parallel zur Konvektion könnte eine Wärmeabgabe durch Strahlung  $R_{th,St}$  berücksichtigt werden, dann ist eine nichtlineare Gleichung zu lösen.

**Praxistipp:** Die Wärmeabgabe kann verbessert werden durch eine größere Oberfläche (evtl. Kühlkörper mit Lamellen), eine Erhöhung des Luftstroms (Ventilator) oder eine Schwärzung der Oberfläche zur Erhöhung der abgegebenen Strahlung.

Eine **Umformung von Wärme in elektrische Energie** kann mit Thermoelementen erfolgen. Dabei wird an den Enden von zwei verbundenen Metallen nach dem Seebeck-Effekt eine elektrische Spannung erzeugt, wenn zwischen der Kontaktstelle und den Vergleichsenden eine Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_1 - T_2$  mit ( $T_1 > T_2$ ) besteht.



**Abb. 4.39: Thermoelement**

<sup>38</sup> Dabei liegt  $\varepsilon$  zwischen 0 (perfekter Spiegel) und 1 (idealer schwarzer Körper nach dem planckschen Strahlungsgesetz).

<sup>39</sup> Das könnte auch als nichtlinearer Widerstand  $R_{th,St} = 9/[\varepsilon \sigma A (T_0^4 - T_U^4)]$  aufgefasst werden.

<sup>40</sup> Beachte, dass  $d\theta/dt = dT_0/dt$  ist, da  $T_U$  als konstant anzusehen ist.

Die Spannung hängt von der Kombination der Metalle und der Temperaturdifferenz ab. Die Metalle lassen sich in einer Thermoelektrischen Spannungsreihe ordnen.

Metall / Legierung	Seebeckkoeffizient $\alpha$ in $\mu\text{V/K}$ (bei 273 K)
Bismut	-72
Konstantan	-35
Nickel	-15
Platin	+0 als Vergleichsmetall definiert
Aluminium	+3,5
Kupfer	+6,5
Wolfram	+7
Eisen	+19
Nickelchrom	+22

**Tabelle 4.3: Thermoelektrische Spannungsreihe**

Die Kennlinie eines Thermoelements ist nichtlinear (d.h.,  $\alpha$  ist temperaturabhängig). So kann z.B. ein Thermoelement aus Nickelchrom und Nickel von  $-270$  bis  $1372\text{ }^\circ\text{C}$  mit einer Spannung zwischen  $-6458\text{ }\mu\text{V}$  bei  $-270\text{ }^\circ\text{C}$  und  $54886\text{ }\mu\text{V}$  bei  $1372\text{ }^\circ\text{C}$  eingesetzt werden.

Die Spannung ergibt sich entsprechend der genutzten Kombination bei kleinem  $\Delta T$  ( $\alpha$  etwa konstant) nach  $U = (\alpha_{M1} - \alpha_{M2}) \Delta T$ .

**Praxistipp:** Als Messwandler ist die Materialkombination einzusetzen, die im Bereich der vorgesehenen Temperatur eine möglichst hohe Spannung bei geringem Fehler liefert.

Mit dem Peltier-Effekt existiert immer auch die Umkehrung. Durch einen Stromfluss wird dabei eine Temperaturdifferenz zwischen Kontakt- und Vergleichsseite erreicht und Wärme z.B. von der Kontakt- zur Vergleichsseite transportiert.

**Praxistipp:** Mit Halbleitermaterialien lassen sich heute deutlich höhere Spannungen und auch höhere Temperaturdifferenzen bzw. Wärmeströme erreichen. Entsprechende Bauelemente werden insbesondere zur Kühlung angeboten (Peltier-Elemente).

Für weitere Ausführungen siehe z.B. (Lun91 S. 103 ff).

#### 4.4.6 Anwendung in der Lichttechnik\*

In der Lichttechnik geht es um die Eigenschaften von Lichtquellen, deren Anwendung und Bewertung. Dazu wurden einerseits entsprechende physikalische und andererseits mit der Augenempfindlichkeit<sup>41</sup> bewertete Größen definiert. Für technische Vorgänge sind die Ersteren und für jegliche Beleuchtung die Letzteren zuständig. Als Grundeinheit wurde die Candela in das Internationale Einheitensystem aufgenommen<sup>42</sup>. Die Größen repräsentieren jeweils eine andere Betrachtungsweise.

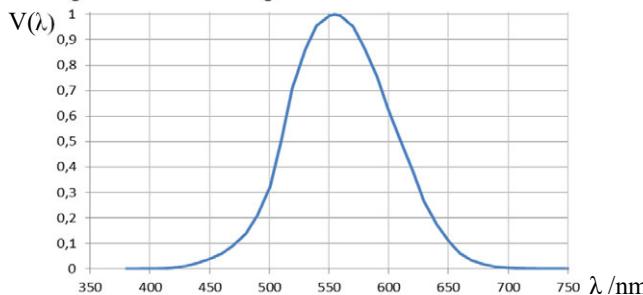
<sup>41</sup> Dafür hat die Internationale Beleuchtungskommission (Commission Internationale de l'Éclairage, CIE) die empirisch 1924 ermittelte sogenannte  $V(\lambda)$ -Kurve weiterentwickelt und genormt.

<sup>42</sup> Candela ist die Lichtstärke in eine Richtung einer Strahlungsquelle der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$ , deren Strahlstärke in dieser Richtung  $1/683$  Watt pro Steradian beträgt.

physikalische Größen	Einheit	$V(\lambda)$ bewertete Größen	Einheit
Strahlungsleistung $\Phi_s$	W	Lichtstrom	$\Phi = I \Omega$ lm=cd sr (Lumen)
Strahlungsstärke $I_s$	W/sr <sup>43</sup>	Lichtstärke	$I$ cd=lm/sr (Candela)
Bestrahlungsstärke $E_s$	W/m <sup>2</sup>	Beleuchtungsstärke $E = \Phi/A$	Lux=lm/m <sup>2</sup>
Emissionsdichte $I_s/A$	W/(sr m <sup>2</sup> )	Leuchtdichte	$L = I/A$ cd/m <sup>2</sup>

**Tabelle 4.4: Lichttechnische Größen mit Einheiten**

Die Bewertung nach der  $V(\lambda)$ -Kurve soll von Abb. 4.40 verdeutlicht werden. Das Lichtspektrum jeder Lichtquelle ist mit dieser Kurve zu multiplizieren, um den sichtbaren Anteil der Strahlung für unsere Augen zu ermitteln.

**Abb. 4.40: Die  $V(\lambda)$ -Kurve des Tagsehens**

**Praxistipp:** Anforderungen an die **Beleuchtungsstärke** (z.B. an Arbeitsplätzen oder in Räumen) sind in Normen und Arbeitsschutzvorschriften festgelegt. Der **Lichtstrom** ist zur Gesamtbeschreibung von Lichtquellen, die **Lichtstärke** bei richtungsabhängiger Strahlung und die **Leuchtdichte** für die Helligkeit einer leuchtenden Fläche notwendig.

Durch die Bewertung mit der  $V(\lambda)$ -Kurve kann ein Temperaturstrahler mit  $T = 6500 \text{ }^{\circ}\text{C}$  (dessen Maximum entspricht dem Maximum der Augenempfindlichkeit) gerade eine Lichtausbeute  $a = 96 \text{ lm/W}$  erreichen (der größere Teil der Strahlung liegt außerhalb des sichtbaren Lichts).

Eine Glühlampe erreicht bei ca.  $3000 \text{ }^{\circ}\text{C}$  von ca.  $13 \text{ lm/W}$  (bei einer Kryptonlampe) bis zu ca.  $20 \text{ lm/W}$  (bei einer Halogenlampe). D.h., bei  $100 \text{ W}$  werden ca.  $1300 \dots 2000 \text{ lm}$  (damit nur etwa 5 % Licht) abgegeben. Energiesparlampen erreichen  $40 \dots 75 \text{ lm/W}$  und weiße LED-Lampen  $45 \dots 85 \text{ lm/W}$  (teilweise schon deutlich über  $100 \text{ lm/W}$ ).

**Praxistipp:** Energiesparlampen erreichen eine etwa fünffach höhere, LED mehr als die sechsfache Lichtausbeute einer Glühlampe.

Bei der Beurteilung der Qualität von Beleuchtungssystemen muss auch das Farbspektrum untersucht werden.

Alle sichtbaren Farben wurden von der CIE <sup>44</sup> 1931 nach empirischen Untersuchungen in einem **Normvalenzsystem** für einen Normalbeobachter erfasst und sind seitdem die Grundlage der **Farbmehrmetrik** und von Farbräumen (siehe auch Abschnitt 16.1.3).

**Praxistipp:** Die Farbmehrmetrik und Farbräume werden insbesondere in der Videotechnik und deren Signalverarbeitung, in der Bildbearbeitung sowie in der Drucktechnik benötigt.

Nach einer Farbqualitätsskala vom NIST <sup>45</sup> wurde ein **Farbwiedergabeindex** definiert, der neue Lichtquellen mit den klassischen Glühlampen (oder dem Tageslicht) vergleicht. Dabei

<sup>43</sup> Steradian ist die Maßeinheit des Raumwinkels  $\Omega$ . Auf einer Kugel mit  $r = 1 \text{ m}$  umschließt 1 sr eine Kugeloberfläche von  $1 \text{ m}^2$ .

<sup>44</sup> Internationale Beleuchtungskommission (Commission Internationale de l'Éclairage, CIE)

<sup>45</sup> National Institute of Standards and Technology (NIST)

erhält eine Lichtquelle eine Bewertung zwischen 0 und 100 entsprechend der Vermessung ihrer spektralen Lichtverteilung. So wird die Farbwiedergabe mit einer Referenzquelle verglichen und beurteilt.

Auf diese Weise erhält eine Glühlampe einen Wert von ca. 100 (sie ist nahe am schwarzen Strahler). Eine weiße LED liegt bei 80...95 und eine weiße Leuchtstofflampe bei 70...84.

**Praxistipp:** Das Farbspektrum wirkt sich auf die Beurteilung der Farbe von Objekten aus. Damit beeinflusst es auch die individuelle Empfindung als angenehmes Licht.

Für weitere Ausführungen siehe z.B. (Lun91 S. 112 ff).

#### 4.4.7 Übungsaufgaben zu Chemie, Wärme, Licht \*

##### Aufgabe 4.15

Aus einer Silbernitratlösung wird mit 1A eine Stunde lang Silber abgeschieden.

Frage: Welche Masse Silber wird an welcher Elektrode abgeschieden?

Hinweis:  $A_{Ag} = 107,9$  und  $z = 1$

##### Aufgabe 4.16

Bei einer Si-Leistungsdiode (mit 20 A bei einer Durchlassspannung von 0,85 V) soll die Sperrsichttemperatur 150 °C nicht überschreiten. Der thermische Widerstand innerhalb der Diode (d.h. bis zum Kühlkörper) ist 2 K/W, der Wärmeübergangskoeffizient für Konvektion eines vorgesehenen Kühlblechs ist  $10^{-3}$  W cm<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. Der thermische Widerstand des Kühlblechs soll vernachlässigt werden, sodass es überall die gleiche Temperatur hat.

Frage 1: Wie sieht die Ersatzschaltung für den stationären Fall aus (alle Speichervorgänge sind abgeschlossen)?

Frage: Wie groß muss die Fläche des Kühlblechs sein (Temperatur der Luft 25 °C)?

##### Aufgabe 4.17

Eine etwa punktförmige LED (4 W, 80 lm/W) strahlt halbkugelförmig etwa konstant hell.

Frage 1: Wie groß ist der gesamte Lichtstrom?

Frage 2: Welche Höhe über dem Arbeitstisch darf die LED-Lampe haben, damit 500 Lux zum Lesen erreicht werden?

## 5 Vorgänge in elektrischen Nichtleitern

Ausgehend von den Begriffen, die entsprechend der Abschnitte 2 und 4 verstanden worden sein sollten, werden

- das elektrostatische Feld – Feld und Verschiebungsflussdichte,
- die elektrischen Größen zur Beschreibung von Vorgängen in elektrischen Nichtleitern – Verschiebungsfluss, Spannung und Kapazität
- die Zusammenhänge zwischen diesen Größen sowie
- die Gesetzmäßigkeiten für elektrische Nichtleiter – Energie und Kräfte

vorgestellt, die wiederum aus vielfachen reproduzierbaren experimentellen Beobachtungen hervorgegangen sind.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in Abschnitt 3 sein.

### 5.1 Grundbegriffe im Nichtleiter – Verschiebungsfluss

#### 5.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

**Der Ausgangspunkt** zur Beschreibung der Vorgänge in elektrischen Nichtleitern ist ebenfalls die **Naturgröße Ladung**, wie sie in Abschnitt 2.1 gezeigt wurde.

Im Nichtleiter können sich keine Ladungen bewegen, folglich werden die Vorgänge in einem Beobachtungssystem untersucht, in dem die Anordnung ruht.

Da sich am Rande eines Nichtleiters (Abb. 5.1) immer gleich viele positive und negative Ladungen „ansammeln“, muss es eine Verbindung zwischen ihnen geben. Der Schlüssel ist die Überlegung zur Nahwirkung in Abschnitt 2.

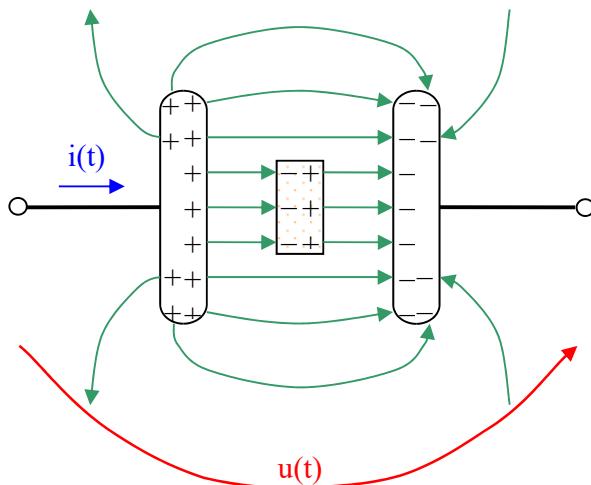


Abb. 5.1: Verbindung der Ladungen in einem Nichtleiter

Die Ladungen auf den Plattenelektroden teilen nach dem Prinzip der Nahwirkung ihren Gegenladungen ihre Ladungsmenge mit. Das erfolgt unabhängig vom dazwischen liegenden Nichtleitermaterial. Diese Mitteilung kann durch Influenz nachgewiesen und gemessen werden (Lun91 S. 102-127) <sup>46</sup>.

In einem leitenden Influenzkörper (in Abb. 5.1 in der Mitte abgebildet) wandert die entsprechende Menge Ladungen (z.B. bewegliche Elektronen) zur Oberfläche (je gegenüber der positiven bzw. negativen Platte) und es entsteht durch Überschuss bzw. Mangel jeweils eine Oberflächenladung.

Weil in Influenzkörpern Ladungen verschoben <sup>47</sup> werden, wird die Weitergabe dieser Mitteilung auch heute noch Verschiebungsfluss genannt.

Der gesamte von einer Ladung ausgehende Verschiebungsfluss  $\Psi$  enthält genau die Information über die Menge der Ladung, von der er ausgeht bzw. an der er endet. Der Verschiebungsfluss besitzt eine Quelle (positive Ladungen) und eine Senke (negative Ladungen) und ergibt sich zu:

### Definition des Verschiebungsflusses $\Psi$ mit

$$\Psi_{\text{ges}} = Q \quad ^{48} . \quad (5.1)$$

Der nicht unbedingt gleichmäßige Verschiebungsfluss in den Raum wird durch die Definition einer Verschiebungsflussdichte  $\mathbf{D}$  beschrieben (Linien zwischen den Platten in Abb. 5.1):

### Definition der Verschiebungsflussdichte

$$|\mathbf{D}| = \frac{d\Psi}{dA_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = |\mathbf{D}| \mathbf{e}_{\Psi} . \quad (5.2)$$

Dabei erfasst der Vektor  $\mathbf{D}$  den Anteil des Flusses  $\Psi$ , der durch ein senkrecht zu ihm stehendes Flächenelement ( $dA_{\perp}$ , Richtung  $\mathbf{e}_{\Psi}$ ) tritt, und hat die Richtung der Ausbreitung der *Nahwirkung, welche hier als Fluss erscheint*. Es gilt demnach der Zusammenhang

$$\oint_{\text{Hüllfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \Psi_{\text{gesamt}} \equiv Q , \quad (5.3)$$

welcher zusätzlich zu (5.2) die Vorstellung über den Verschiebungsfluss im Sinne von (5.1) festlegt. In dieser Fassung des Verschiebungsflusses ist nicht enthalten, wie die Nahwirkung im Detail funktioniert. Es werden aber die räumliche Verteilung und die Verbindung jeder Ladung mit der gleichen Menge Gegenladungen wiedergegeben (in Betrag und Richtung in jedem Raumpunkt).

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes – dem elektrostatischen Feld.

Zur Beschreibung der *Kraftwirkungen* wird auch hier das *elektrische Feld* verwendet, wie es in Abschnitt 4.1.1 mit Gleichung (4.4) definiert wurde.

Auch der Begriff der *elektrischen Spannung* (und des Potentials) kann aus Abschnitt 4.1.1 Gleichung (4.6) übernommen werden.

Der Charakter der Spannung ist hierbei aber etwas anders zu sehen, weil sich keine Ladungen von Punkt  $P_1$  nach  $P_2$  bewegen (vergleiche Abb. 4.3). Dennoch haben zwei Probeladungen,

<sup>46</sup> Da diese Methode nicht sehr praktikabel ist, erfolgt die Messung normalerweise über das Feld nach (5.4).

<sup>47</sup> Zu Zeiten der Äthertheorie waren mit Verschiebung weitere Vorstellungen verbunden.

<sup>48</sup> Damit wird auch die Maßeinheit von  $\Psi$  identisch mit der der Ladung As.

die jeweils in Punkt  $P_1$  und  $P_2$  ruhen, eine verschiedene potentielle Energie. Aus der Energiedifferenz wird die Spannung wie in Gleichung ( 4.6 ) definiert.

Die Verschiebungsflussdichte und das elektrische Feld beschreiben zusammen die Vorgänge im elektrostatischen Feld. Sie haben die gleiche Richtung – die Ausbreitungsrichtung der Nahwirkung – und hängen über die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  (eine Materialkonstante ähnlich wie  $\kappa$ ) unmittelbar zusammen. In jedem Punkt des Raumes gilt:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} . \quad ( 5.4 )$$

Dieses experimentelle Ergebnis bestätigt die Möglichkeit zur Definition von  $\Psi$  und  $D$  nach ( 5.1 ) und ( 5.2 ).

Die Dielektrizitätskonstante kann für jedes Material ermittelt werden. Sie wird in der Regel als Faktor ( $\epsilon_r$  = relative Dielektrizitätskonstante) bezogen auf die Dielektrizitätskonstante für Vakuum ( $\epsilon_0=8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ <sup>49</sup>) angegeben<sup>50</sup>. Der experimentell belegte Zusammenhang ist plausibel, da die Verschiebungsflussdichte unabhängig vom Material die Menge der Ladung übermitteln muss, die Kraftwirkung auf eine Probeladung aber durchaus vom umgebenden Material beeinflusst werden kann.

### 5.1.2 Messung und Darstellung von elektrostatischen Feldern

Bei der **Messung einer Spannung** im elektrostatischen Feld mit einem Voltmeter (oder ähnlich wie die Äquipotentiallinien in Abschnitt 4.1.5) müsste eine zumindest geringe Ladungsmenge abfließen. Wenn das nicht geht, da keine beweglichen Ladungen vorhanden sind, bricht die Spannung zwischen den Messspitzen sofort zusammen. Damit verändern aber die Messspitzen das Feld so stark, dass eine Messung mit akzeptablem Fehler so einfach nicht möglich ist. Eine Messung von Elektrode zu Elektrode ist dagegen mit ausreichend kleiner Ladungsentnahme möglich.

Eine **Darstellung von elektrostatischen Feldern** gelingt mit Hilfe kleiner Dipolteilchen (2. Praxistipp Abschnitt 2.1).

## 5.2 Ladung, Strom und Spannung am Kondensator

### 5.2.1 Zusammenhang von Ladung und Spannung sowie Strom und Spannung

Aus Messungen von Ladung und Spannung an den Elektroden einer Anordnung mit verschiedenen nichtleitenden Materialien ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 5.2).

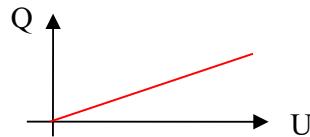


Abb. 5.2: Beispiel einer Messung von Ladung und Spannung

Der größte Teil der technisch verwendeten Materialien ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung, d.h.  $Q \sim U$  oder als Geradengleichung:  $Q = C \cdot U$  mit dem

<sup>49</sup> Dieser Wert ergibt sich im metrischen Maßsystem; im Gauß'schen Maßsystem wäre  $\epsilon_0 = 1$  eine einfache Zahl.

<sup>50</sup> Anisotrope Materialien mit Richtungsabhängigkeiten müssen gesondert betrachtet werden.

Proportionalitätsfaktor C. Der Proportionalitätsfaktor stellt die Kapazität dar, die diese Anordnung mit ihrem nicht leitenden Material zur Aufnahme von Ladungen besitzt.

### Definition der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad ^{51} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } Q = C U \quad (5.5)$$

Bei nichtlinearem Zusammenhang muss die Funktion  $Q = Q(U)$  oder eine Funktion  $C = C(U)$  bzw.  $C = C(Q)$  gefunden werden (je nachdem, was physikalisch sinnvoller ist).

**Praxistipp:** Die Kapazität wurde aus dem *statischen* Verhalten (Abb. 5.2) definiert.

Das ist insbesondere beim Messen von Kapazitäten zu beachten, weil das meist mit einer Wechselspannung nach (5.7) erfolgt. Das stimmt nur bei linearen Kapazitäten überein.

Für Anordnungen mit homogenem Feld (siehe Abb. 5.3) kann eine Bemessungsgleichung für die Kapazität angegeben werden ( $d$  = Elektrodenabstand,  $A$  = Elektrodenfläche).

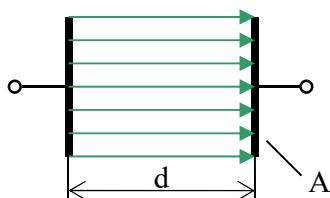


Abb. 5.3: Kapazität mit homogenem Feld

### Bemessungsgleichung der Kapazität

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad \text{mit } \epsilon = \text{Dielektrizitätskonstante} \quad (5.6)$$

Liegt kein homogenes Feld vor und können Randfelder nicht aufgrund ihres geringen Beitrages vernachlässigt werden, wird der Nichtleiter in kleine Teile unterteilt (jeweils so kleine, dass dort in guter Näherung ein homogenes Feld vorliegt) und anschließend die Gesamtkapazität berechnet.

Wenn die Ladungen auf den Platten (z.B. in Abb. 5.1) zu- oder abnehmen, dann müssen auf jeder Seite durch die Anschlüsse gleich viel Ladungen zu- bzw. abfließen. Wird für diesen Leitungsstrom ( $i(t) = dQ/dt$ ) die Ladung Q durch die Beziehung  $Q = CU$  ersetzt, ergibt sich der Zusammenhang des Stromes in den Zuleitungen (auch Verschiebungsstrom) mit ihrer Klemmenspannung. Die Spannung zwischen den Platten stimmt mit der Spannung an den Klemmen überein.

### Strom und Spannung an der Kapazität

$$i_c(t) = \frac{dQ_c}{dt} = \frac{d(CU_c)}{dt} = C \frac{dU_c}{dt} \quad \text{Letzteres nur für } C = \text{const} \quad (5.7)$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz in der Leitwertform (4.10) zeigt deutliche Ähnlichkeit, aber bei der Kapazität ist zusätzlich eine Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen.

**Praxistipp:** Ist C nichtlinear  $C = C(u)$  oder  $C = C(i)$ , dann hängt C durch u oder i auch von der Zeit ab. Die Differentiation muss in diesem Fall nach der Produktenregel erfolgen. Das ist z.B. bei allen Kapazitäten von Halbleiterbauelementen der Fall.

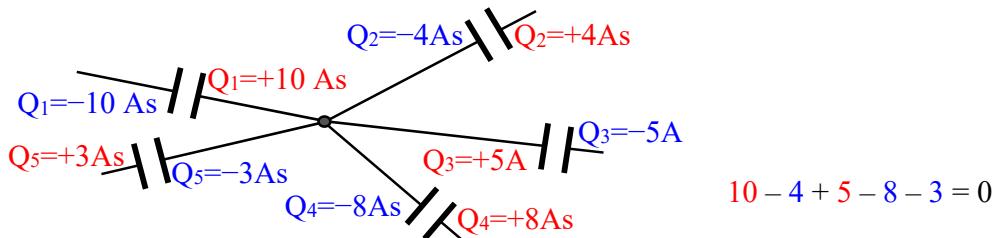
<sup>51</sup> Die Maßeinheit As/V wird nach Faraday mit F bezeichnet.

Oft wird auch die Umkehrung benötigt:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_c(t=0) . \quad (5.8)$$

Den Gleichungen ( 5.7 ) bzw. ( 5.8 ) liegt das Verbraucherpeilsystem zugrunde, d.h., beim Aufladen ergibt sich in Abb. 5.1 ein positiver und beim Entladen ein negativer Strom.

Auch bei Kapazitäten gelten Bilanzgleichungen entsprechend den Kirchhoff'schen Sätzen.



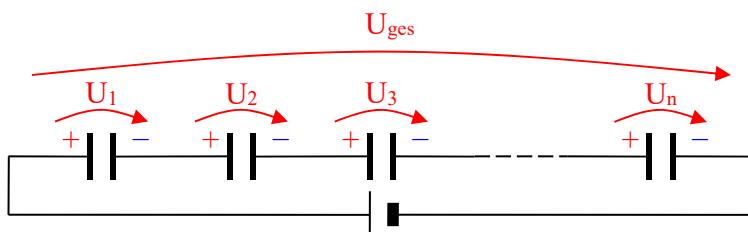
**Abb. 5.4: Beispiel für einen Knotenpunkt mit Kapazitäten**

Die Ladungen auf den Platten zum Knotenpunkt erfüllen eine analoge Bilanz wie der Knotenpunktsatz (zu jedem Zeitpunkt und natürlich auch statisch).

### Ladungsbilanz an einem Knotenpunkt

$$\sum_v Q_v = 0 \quad (5.9)$$

Bei Beachtung der Ladungsbilanz ergibt sich die **Reihenschaltung** von Kapazitäten.



**Abb. 5.5: Reihenschaltung von Kapazitäten**

**Praxistipp:** Dieselbe Ladung kann als Test auf eine reine Reihenschaltung genutzt werden.

Für **dieselbe Ladung** kann mit dem Maschensatz ( 4.15 ) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U_{\text{ges}} &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad | :Q \\ 1/C_{\text{ges}} &= 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \dots + 1/C_n \quad (\text{mit } C = Q / U) \end{aligned} \quad (5.10)$$

und ferner  $Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = C_3 U_3 = \dots = C_n U_n = C_{\text{ges}} U_{\text{ges}}$ .

$$(5.11)$$

Aus ( 5.10 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung von Kapazitäten:

### Reihenschaltung von Kapazitäten

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{C_{\nu}} . \quad ( 5.12 )$$

**Praxistipp:** Bei Reihenschaltung addieren sich die Kehrwerte der Kapazitäten.

Aus ( 5.11 ) folgt die Aufteilung der Spannung auf die Kapazitäten einer Reihenschaltung.

### Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{C_{\text{ges}}}{C_1} \quad ( 5.13 )$$

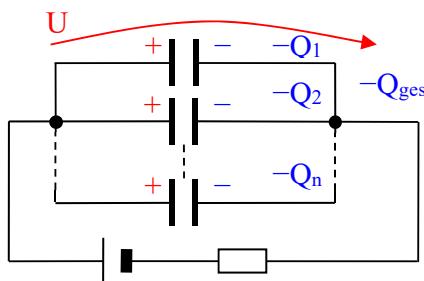
Die Aufteilung kann daraus für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

In ( 5.13 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $U_1$  zu  $U_{\text{ges}}$  gezeigt.

**Praxistipp:** Die Spannungen teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Kapazitäten auf.

Bei einer **Parallelschaltung** (Abb. 5.6) liegt an allen Kapazitäten **dieselbe Spannung**.

**Praxistipp:** Dieselbe Spannung dient zum Test auf eine reine Parallelschaltung .



**Abb. 5.6: Parallelschaltung von Kapazitäten**

Für dieselbe Spannung kann mit der Ladungsbilanz ( 5.9 ) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Q_{\text{ges}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad | : U \\ C_{\text{ges}} &= C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \end{aligned} \quad (\text{mit } C = Q / U) \quad ( 5.14 )$$

und ferner  $U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = \dots = \frac{Q_n}{C_n} = \frac{Q_{\text{ges}}}{C_{\text{ges}}} .$

$$( 5.15 )$$

Aus ( 5.14 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Kapazitäten:

### Parallelschaltung von Kapazitäten

$$C_{\text{ges}} = \sum_v C_v . \quad ( 5.16 )$$

**Praxistipp:** Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten selbst.

Aus ( 5.15 ) kann die Aufteilung der Ladungen auf die Kapazitäten einer Parallelschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

### Ladungsaufteilung bei Parallelschaltung

$$\frac{Q_1}{Q_{\text{ges}}} = \frac{C_1}{C_{\text{ges}}} \quad ( 5.17 )$$

In ( 5.17 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $Q_1$  zu  $Q_{\text{ges}}$  gezeigt.

**Praxistipp 1:** Die Ladungen teilen sich wie das Verhältnis der Kapazitäten auf.

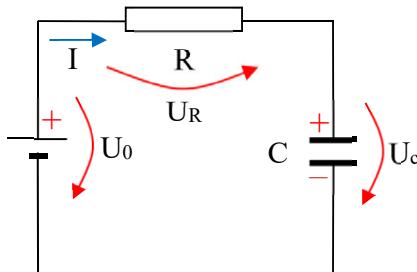
**Praxistipp 2:** Da zur Herleitung von ( 5.12 ), ( 5.13 ), ( 5.16 ) und ( 5.17 ) Gleichung ( 5.5 ) genutzt wurde, ist die Anwendung auf **lineare Bauelemente** beschränkt bzw. nur für diese sinnvoll.

## 5.2.2 Zeitverhalten von I und U an der Kapazität

An einer Kapazität besteht nach ( 5.7 ) zwischen I und U eine Beziehung mit einer Zeitabhängigkeit. Nach dieser würde ein Spannungssprung (z.B. Umschalten eines Schalters) einen unendlich hohen Strom ergeben, was technisch nicht möglich ist.

**Praxistipp:** Praktisch gibt es immer strombegrenzende Widerstände in Reihe zur Kapazität.

Betrachtet man eine Kapazität mit einem Reihenwiderstand, so kann z.B. der Einschaltvorgang berechnet werden.



Maschengesetz:

$$U_0 = U_R + U_C$$

mit  $U_R = I R$  und  $I = I_C = C dU_C/dt$

wird:

$$U_0 = RC dU_C/dt + U_C$$

Lösung der DGL (siehe Abschnitt 8.2):

$$U_C = U_0(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{mit } U_C(0) = 0$$

**Abb. 5.7: Schaltung nach dem Einschalten von C und R bei t = 0**

Für weitere Untersuchungen wird auf die Übungsaufgaben (Aufgabe 5.2, Aufgabe 5.3) sowie auf den Versuch im Abschnitt 5.2.6 verwiesen.

**Praxistipp:** In der Zeitfunktion für das Schalten einer Spannung an der Kapazität steht der wichtige und bestimmende Parameter  $RC = \tau$  als Zeitkonstante dieses Vorgangs.

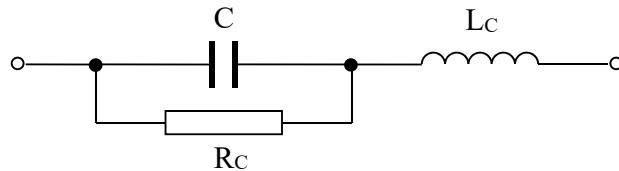
### 5.2.3 Bauformen und Kenngrößen

Kondensatoren müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Kapazitätswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite ist die Durchbruchsspannung, die die Isolation des Dielektrikums gewährleistet.

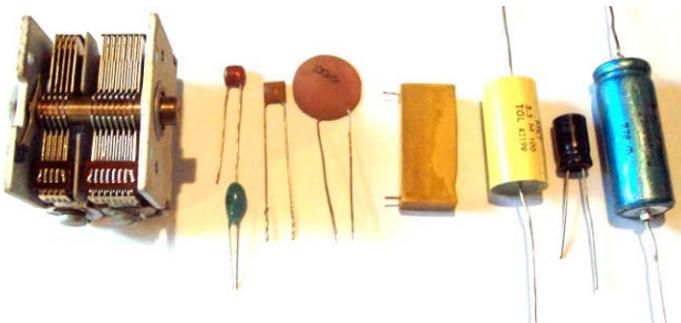
In Fällen, wo Leistung eine Rolle spielt, müssen die Elektroden (in der Regel dünne Folien) auch entsprechende Ströme und die damit zusammenhängende Wärme vertragen. Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität,
- Baugröße und -form,
- Leckwiderstand oder Induktivität von Wickelkondensatoren und Zuleitungen (siehe Abschnitt 6),
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen.

Für technische („reale“) Kapazitäten kann eine einfache Ersatzschaltung angegeben werden (siehe Abb. 5.8).



**Abb. 5.8: Einfache Ersatzschaltung für einen Kondensator**



Von links nach rechts:

- Drehkondensator
- Scheibenkondensatoren  
(4 Ausführungen)
- Wickelkondensatoren  
(2 Ausführungen)
- Elektrolytkondensatoren  
(2 Ausführungen)

**Abb. 5.9: Verschiedene Bauformen von Kondensatoren**

**Praxistipp:** Es existieren für Kondensatoren komplette Baureihen mit verschiedener Fehlertoleranz, Spannungsbelastbarkeit und verschiedenen Bauformen.

### 5.2.4 Messung der Kapazität

Bei der Messung der Kapazität müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Messung der statischen Kapazität entsprechend ( 5.5 ).
2. Messung der dynamischen Kapazität entsprechend ( 5.7 ).

Die statische Kapazität muss durch Messung von Ladungsmenge und Spannung erfolgen.

Die dynamische Kapazität beinhaltet einmal die wirksame Größe bei Wechselstrom einer bestimmten Frequenz (für viele Materialien ist  $\epsilon$  frequenzabhängig) und zum anderen bei nichtlinearen Kapazitäten nur die kleine Wechselstromaussteuerung um den Gleichstromarbeitspunkt.

Für lineare frequenzunabhängige Kapazitäten ergeben beide Messungen ein gleiches Ergebnis.

Multimeter mit Kapazitätsmessung können nur dynamische Kapazitäten im Arbeitspunkt  $U_0 = 0$  und bei einer geräteabhängigen festen Frequenz messen.

Kapazitätsmessbrücken arbeiten nach einem Vergleichsprinzip und realisieren oft verschiedene wählbare Messbedingungen. Auch sie messen die dynamische Kapazität.

**Praxistipp:** Multimeter mit Kapazitätsmessung geben gewöhnlich nur eine Orientierung.

## 5.2.5 Übungsaufgaben zur Kapazität

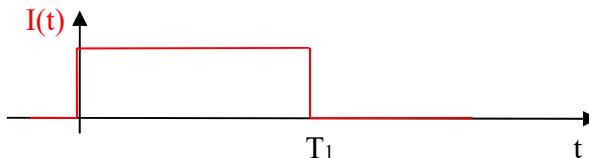
### Aufgabe 5.1

Eine Spannungsquelle mit 30 V soll geglättet werden. Dazu werden 2000  $\mu\text{F}$  benötigt. Es stehen aber nur Kondensatoren von 2000  $\mu\text{F}$  mit einer Spannungsfestigkeit von 20 V zur Verfügung.

Frage: Wie sieht die Schaltung für eine Realisierung aus?

### Aufgabe 5.2

Gegeben ist der Stromverlauf durch eine Kapazität in Abb. 5.10.



**Abb. 5.10: Zeitverlauf des Stromes an einer Kapazität**

Frage: Wie sieht der Spannungsverlauf an der Kapazität aus? (In die Abbildung einzeichnen!)

### Aufgabe 5.3

Untersuchen Sie den Ein- und Ausschaltvorgang für den Versuch in Abschnitt 5.2.6!

1. Aufgabe: Berechnen Sie den Ein- und den Ausschaltvorgang (Auf- und Entladen von  $C$  über  $R$ )!

Hinweis: Vereinfachen Sie die Schaltung (Abb. 5.11) für den Einschaltvorgang so, dass nur eine konstante Quelle, der Widerstand und der Kondensator einen Stromkreis bilden. Vereinfachen Sie die Schaltung für den Ausschaltvorgang so, dass nur der Widerstand und der Kondensator einen Stromkreis bilden. Berechnen Sie beide Vorgänge einzeln. Stellen Sie jeweils den Maschensatz auf und setzen Sie die Strom-Spannungs-Beziehung einmal für  $u_R$  und dann noch einmal für  $i_C$  ein. Für die DGL 1. Ordnung kann die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen gelöst werden. Die inhomogene Lösung ist identisch mit  $u_C(t \rightarrow \infty)$  und die Anfangsbedingung ist  $u_C(t=0)$ , d.h. 0 bzw.  $\hat{U}$ . Der Beginn wird für beide Fälle mit  $t=0$  gewählt.

2. Aufgabe: Klären Sie den Begriff der Zeitkonstanten  $\tau = RC$  anhand der 1. Aufgabe und vergleichen Sie mit Abschnitt 5.2.2!

Darstellung: Zeichnen Sie Spannung und Strom als  $f(t)$  in einem Diagramm!

Zusatzfrage: Wie kann  $\tau$  aus einer gemessenen Kurve, die dieser Rechnung entspricht, bestimmt werden?

#### Aufgabe 5.4

Mit einem Elektrolytkondensator von  $10 \mu\text{F}$  soll für eine Lichterkette eine Zeitkonstante von  $10 \text{ s}$  realisiert werden.

Frage 1: Wie groß muss der Widerstand gewählt werden?

Frage 2: Welchen Fehler verursacht der Leckwiderstand des Elektrolytkondensators von ca.  $10 \text{ M}\Omega$ ?

#### Aufgabe 5.5 \*

Zur Messung der Dicke  $d_f$  ( $d_{fsoll} = 0,2 \text{ mm}$ ) läuft eine Polyäthylenfolie ( $\epsilon_r = 2,4$ ) durch zwei parallele Platten ( $A = 0,1 \times 1 \text{ m}^2$ ) eines Luftkondensators (Plattenabstand  $d = 0,5 \text{ mm}$ ).

Frage: Wie groß ist die Kapazität in Abhängigkeit von der Foliendicke und bei Solldicke?

Hinweis: Die Berechnung kann über die Felder ausgehend von  $\mathbf{D}$  erfolgen oder als zwei Kapazitäten in Reihe ( $C_1$  mit  $A, d-d_f, \epsilon_r = 1$  und  $C_2$  mit  $A, d_f, \epsilon_r = 2,4$ ).

#### 5.2.6 Messung des Zeitverlaufes mit einem Messoszilloskop

Es sollen im Messlabor die Zeitverläufe von Strom und Spannung am Kondensator untersucht werden. Zum Messoszilloskop siehe Abschnitt 7.2.3.

**Versuchsaufbau:**

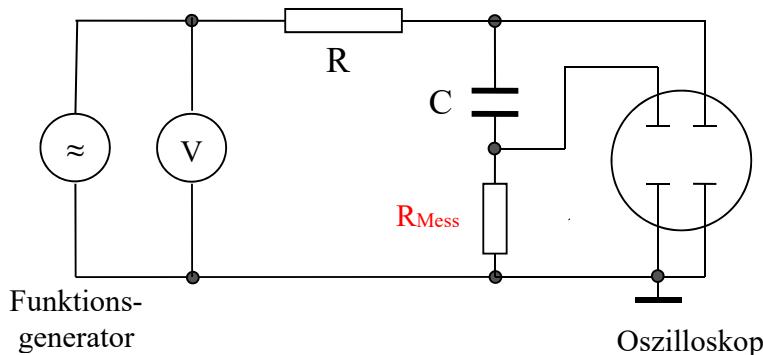


Abb. 5.11: Schaltung des Versuchsaufbaus

**Praxistipp:** Als Messwiderstand ( $R_{\text{Mess}}$ ) zur Strommessung wird ca. 1 % von  $R$  (d.h.  $1 \text{ k}\Omega$ ) eingesetzt. Damit ergibt sich auch nur ein Fehler von ca. 1 %.

Alle Spannungen sind am besten als Spitz-Spitze-Werte vom Oszilloskop abzulesen.

**Versuchsdurchführung:**

Eine Rechteckspannung vom Funktionsgenerator bewirkt ein Laden (Einschaltvorgang,  $U_{\text{Quelle}}$  wird  $\hat{U}$ ) und Entladen (Ausschaltvorgang,  $U_{\text{Quelle}}$  wird 0, d.h. fast ein Kurzschluss) des

Kondensators über den Widerstand. Auf dem Oszilloskop werden gleichzeitig Strom und Spannung (Zweikanalbetrieb) dargestellt.

Die Kurven können einem PC übergeben und ausgewertet werden. Aus den gemessenen Zeitverläufen sind die Zeitkonstanten zu ermitteln und mit den Bauteilparametern zu vergleichen.

**Praxistipp:** Die Frequenz ist so zu wählen, dass die Vorgänge etwa ihren jeweiligen Endzustand erreichen – Richtwert 300 Hz.

Bei 4. ist eine Sinusspannung einzustellen.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:  
 $U_{ss} = 5 \text{ V}$  mit  $R = 100 \text{ k}\Omega$  und  $C = 1 \text{ nF}$ ,  $3,3 \text{ nF}$  und  $10 \text{ nF}$
2. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:  
 $U_{ss} = 5 \text{ V}$  mit  $R = 100 \text{ k}\Omega$  und  $C = 3,3 \text{ nF}$  und  $1 \text{ nF} \parallel 2,2 \text{ nF}$
3. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:  
 $U_{ss} = 5 \text{ V}$  und  $2,5 \text{ V}$  mit  $R = 100 \text{ k}\Omega$  und  $C = 3,3 \text{ nF}$
4. Darstellung der Zeitverläufe bei sinusförmiger Spannung:  
 $U_{ss} = 5 \text{ V}$  bei  $f = 1 \text{ kHz}$   $R = 100 \text{ k}\Omega$  und  $C = 3,3 \text{ nF}$   
Es sind Amplitude und Zeitverschiebung zu untersuchen.

Zusatzuntersuchung: Vergleichen der Zeitverläufe (z.B. bei 1.) nach Umschalten des Tastkopfes des Oszilloskops von 1:1 auf 1:10 (und dabei von  $1 \text{ M}\Omega$  auf  $10 \text{ M}\Omega$ )!

### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass sich die Spannung erst langsam aufbaut, indem durch den Strom Ladungen auf den Kondensator fließen, bzw. abbaut, wenn Ladungen abfließen.
2. Je größer der Kondensator ist, desto länger müssen Ladungen fließen, damit die Spannung steigt bzw. abnimmt.
3. Der Zeitverlauf (die Dauer, die Zeitkonstante) hängt bei gleicher Kapazität nicht von der Anzahl zusammengeschalteter Kondensatoren und auch nicht von der Endspannung ab.
4. Bei sinusförmiger Spannung läuft der Strom genau  $\frac{1}{4}$  Periodendauer ( $90^\circ$ ) gegenüber der Spannung am Kondensator voraus.
5. Eine mathematische Auswertung erfolgte mit Aufgabe 5.3.
6. Die entscheidende Kenngröße ist die Zeitkonstante  $\tau = R C$ .
7. Auch beim Anschluss eines Oszilloskops entstehen Messfehler.

**Praxistipp:** Der Tastkopf eines Oszilloskops fügt dem Messobjekt (Parallelschaltung) einmal seinen Eingangswiderstand und genauso seine Eingangskapazität hinzu.

### 5.2.7 Anmerkungen zu Dielektrika\*

Wird zwischen zwei aufgeladenen Platten ein Dielektrikum eingebracht, verändert sich das elektrische Feld. Bei gleichbleibender Ladung verringert sich dabei die Klemmenspannung. Laut  $Q = C U$  muss demzufolge die Kapazität anwachsen.

Der Zusammenhang  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  (siehe auch ( 5.6 )) wird (mit der relativen Dielektrizitätskonstanten oder der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  und mit der Suszeptibilität  $\chi = \epsilon_r - 1$ ) zu

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} .$$

Die Polarisation  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$  ergibt sich durch die polarisierende Wirkung des Feldes auf die Moleküle des Isolators. Einerseits entsteht durch **Deformationspolarisation** bei den Atomen bzw. Molekülen des Isolators infolge des Feldes  $\mathbf{E}$  eine Verschiebung der Elektronenhülle, sodass der positive und der negative Ladungsschwerpunkt auseinanderfallen. Andererseits können Moleküle einen permanenten Dipol darstellen, wenn sie nicht völlig symmetrisch aufgebaut sind. In diesem Fall bewirkt das Feld  $\mathbf{E}$  eine Ausrichtung der ansonsten statistisch verteilten und sich in der Summe aufhebenden Dipole – **Orientierungspolarisation**.

Beide Formen fallen unter die **Paraelektrika**.

Bei einigen Isolatoren ist es möglich, eine Orientierungspolarisation im statistischen Mittel festzuhalten (**Elektrete**).

Bei **Ferroelektrika** können sich die Dipole der Moleküle bei genügend tiefen Temperaturen (wie magnetische Dipole bei ferromagnetischen Materialien) parallel ausrichten. Nachfolgend einige Beispiele.

Dielektrikum	$\epsilon_r$	Dielektrikum	$\epsilon_r$
Vakuum	1,0	Gummi	2,5–3
Luft	1,00059	Porzellan	2–6
Papier	1–4	Glas	6–8
Paraffin	2,2	Tantalpentoxid	27
Polyethylen (PE)	2,4	Bariumtitanat	103–104

**Tabelle 5.1: Beispiele für  $\epsilon_r$  bei 18 °C und 50 Hz**

Eine detaillierte Untersuchung erfordert eine Behandlung mit der Quantenmechanik, da sich die Vorgänge in atomaren Größenordnungen abspielen. Vertiefende Darlegungen sind z.B. in (Reb99 S. 546 ff) zu finden.

**Praxistipp:** Superkondensatoren besitzen kein herkömmliches Dielektrikum. Die hohen Faradwerte ergeben sich infolge zweier hochkapazitiver Speicherprinzipien (einmal eine Speicherung elektrischer Energie in elektrochemischen Doppelschichten, zum anderen durch Ladungstausch mit Hilfe von Redoxreaktionen bzw. eine Kombination beider).

Übungsaufgabe siehe Abschnitt 5.2.5 Aufgabe 5.5 zu mehrschichtigem Dielektrikum.

## 5.3 Energie und Kräfte im elektrischen Feld des Nichtleiters

### 5.3.1 Beschreibung von Energie und Kräften

Die **Energie** für die Aufladung einer Kapazität ergibt sich ebenfalls nach ( 4.24 ) zu:

$$W = \int_0^t u_C(t) i_C(t) dt . \quad ( 5.18 )$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an den Klemmen des Kondensators ( 5.7 ) wird daraus:

$$W = \int_0^{U_C} u_C(t) C du_C = C \frac{U_C^2}{2} \quad (\text{für } C = \text{const}) \text{ und mit } Q = C U \text{ wird}$$

$$W = \frac{C U_C^2}{2} = \frac{Q_C U_C}{2} = \frac{Q_C^2}{2 C}$$

( 5.19 )

**Praxistipp:** Diese Energie ist im Kondensator **gespeichert**, wenn er mit der Ladung  $Q_C$  auf die Spannung  $U_C$  aufgeladen worden ist.

Wenn die mittlere **Leistung** über Auf- und Entladevorgänge berechnet wird, ergibt dies  $\bar{P} = \overline{u_C(t) i_C(t)} = 0$ , d.h., es wird keine Leistung umgesetzt. Es erfolgt nur ein Hin- und Herspeichern von Leistung. Bei der Aufladung wird Energie im Kondensator gespeichert (potentielle Energie der Ladungen im elektrischen Feld) und bei der Entladung wird diese Energie zurückgegeben. Lediglich der Transport durch die Leitungen führt durch deren Widerstand zu Verlusten.

**Praxistipp:** Heute kann dieser Effekt mit sogenannten Goldcaps oder Supercaps zur Speicherung von kleinen (evtl. mittleren) Energiemengen als Ersatz für Batterien genutzt werden. Durch den Leckwiderstand sind Kondensatoren ansonsten nicht für eine Energiespeicherung geeignet (außer für sehr kurze Zeiten, z.B. zur Glättung in Netzteilen oder in der Leistungselektronik).

Im elektrischen Feld existieren zwei Erscheinungsformen für **Kraftwirkungen**

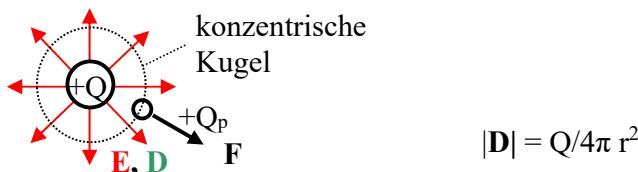
1. Kräfte auf Ladungen und
2. Kräfte auf Grenzflächen verschiedener Materialien (insbesondere Leiter – Nichtleiter).

Für **Kräfte auf Punktladungen** ist die Definition des elektrischen Feldes ( 4.4 ) zu nutzen.



**Abb. 5.12: Kraft auf eine positive und eine negative Punktladung im Feld**

Wenn das Feld von einer zweiten Punktladung erzeugt wird, kann dieses aus ( 5.2 ) mit ( 5.4 ) ermittelt werden.



**Abb. 5.13: Punktladung im Feld einer Punktladung**

Auf der konzentrischen Kugelfläche ist aus Symmetriegründen überall  $|D|$  konstant, deshalb kann für  $d\Psi/dA_{\perp}$  auch  $\Psi_{\text{ges}}/A_{\text{Kugel}} = Q/A_{\text{Kugel}}$  gesetzt werden. Damit wird:

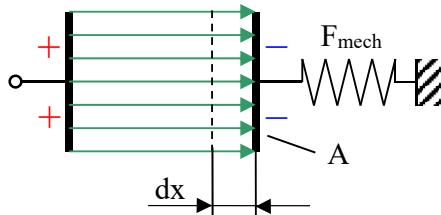
$$|\mathbf{F}| = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon r^2}, \quad \text{das Coulomb'sche Gesetz in heutiger Form.} \quad (5.20)$$

**Praxistipp 1:** Bei Kräften auf Ladungen wird immer *eine Ladung im ungestörten Feld der anderen Ladung* betrachtet. Es werden nicht zuerst die Veränderungen des Feldes durch die zweite Ladung berücksichtigt. Das entspricht der Sichtweise und Definition des elektrischen Feldes.

Für Felder besteht das *Superpositionsprinzip*, d.h., Felder mehrerer Quellen addieren sich.

**Praxistipp 2:** Diese Kraft wird vielfältig zur Beschleunigung und auch zur Ablenkung von geladenen Teilchen genutzt (Braun'sche Röhre, Teilchenbeschleuniger).

**Kräfte auf Grenzflächen** werden günstiger aus der Energieerhaltung bestimmt.



**Abb. 5.14: Kräftegleichgewicht mechanische – elektrische Kraft auf die Elektrode**

Die Kraft des elektrischen Feldes der positiv geladenen Elektrode auf die negativ geladene Elektrode verkürzt den Abstand der Elektroden, bis die Kraft gleich der Federkraft ist. Nun gilt folgende Energiebilanz, wenn  $Q$  konstant bleibt (für  $W$  ist ( 5.19 ), für  $C$  ist ( 5.6 ) einzusetzen):

verringerte elektrische Energie = mechanisch in der Feder gespeicherte Energie

$$\Delta W_{\text{el}} = (Q^2/2\epsilon A) dx = F_{\text{mech}} dx .$$

Damit ergibt sich mit  $D = Q/A$  und  $D = \epsilon E$  der Betrag der Kraft auf die Grenzfläche zu:

$$F = \frac{D^2}{2\epsilon} A = \frac{D E}{2} A = \frac{\epsilon E^2}{2} A .$$

(5.21)

**Praxistipp:** Die **Richtung der Kraft** ergibt sich immer so, dass sich die Verschiebungsflussdichtelinien in einem für sie schlechterem Medium verkürzen.

Im Falle einer Grenzschicht zwischen zwei Dielektrika muss die Differenz von  $\Delta W_{\text{el}}$  des ersten und des nächsten eingesetzt werden. (In und hinter der Elektrode ist kein Feld mehr.)

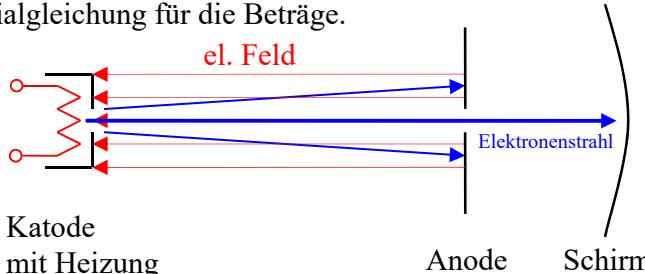
**Praxistipp:** Diese Kraft, die früher nur als Störung bekannt war, wird heute in der Mikromechanik genutzt.

### 5.3.2 Anwendungsbeispiel zu Energie und Kräften

Elektrische Felder dienen vielfach zur Beschleunigung elektrisch geladener Teilchen. Im Oszilloskop wird sowohl für die Strahlbeschleunigung als auch zur präzisen Ablenkung ein elektrisches Feld genutzt. Das soll deshalb als Beispiel untersucht werden.

### Strahlerzeugung

Durch das elektrische Feld zwischen Anode und Katode (siehe Abb. 5.15) erfahren die Elektronen eine Beschleunigung ( $\mathbf{a} = \mathbf{F} / m_{el} = -q_0 \mathbf{E} / m_{el}$ ), daraus entsteht eine Differentialgleichung für die Beträge.



**Abb. 5.15: Erzeugung des Elektronenstrahls in der Bildröhre (Prinzip)**

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q_0}{m_{el}} \frac{dU}{ds} \quad ds \frac{dv}{dt} = \frac{q_0}{m_{el}} dU \quad \int_0^{v_0} v \, dv = \frac{q_0}{m_{el}} \int_0^{U_A} dU$$

Nach Trennung der Variablen und Integration der Geschwindigkeit von 0 bis  $v_0$  bzw. der Spannung von 0 bis  $U_A$  folgt:

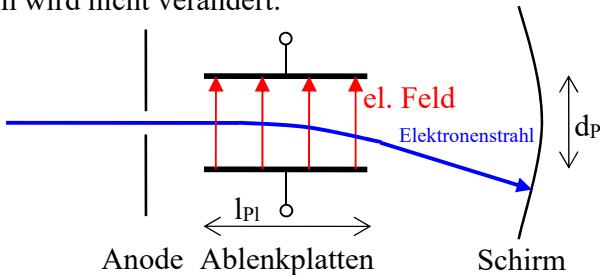
$$v_0 = \sqrt{\frac{2 q_0}{m_{el}} U_A} \quad v_0 / \text{km s}^{-1} = 593 \sqrt{U_A / \text{V}} . \quad (5.22)$$

Natürlich ist diese Rechnung nur gültig, solange die Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit bleiben. Für ein Oszilloskop liegt  $U_A$  zwischen 8000 und 15000 V.

### Strahlablenkung

Für die Strahlablenkung sind (siehe Abb. 5.16) zwischen Anode und Schirm Ablenkplatten angeordnet.

Das Feld zwischen den Platten wird aus dem Zeit- bzw. dem Messsignal durch Verstärkung abgeleitet. Die Beschleunigung erfolgt dabei senkrecht zur ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h., es kommt eine senkrechte Geschwindigkeitskomponente dazu; die Geschwindigkeit in Richtung Schirm wird nicht verändert.



**Abb. 5.16: Strahlablenkung in der Bildröhre**

Die Elektronen befinden sich somit für die Ablenzeit  $t_{Ab} = l_{Pl} / v_0$  im Feld zwischen den Platten (siehe hierzu Aufgabe 5.7).

### 5.3.3 Übungsaufgabe zu Energie und Kräften

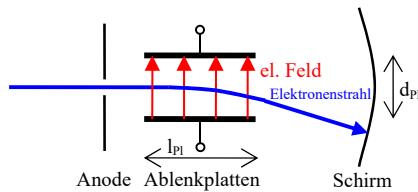
#### Aufgabe 5.6

Ein Blitzgerät hat einen Kondensator  $C = 250 \mu\text{F}$  und lädt diesen auf  $U = 500 \text{ V}$  auf. Frage: Welche elektrische Energie wird dann an den Lichtblitz abgegeben, wenn der Kondensator vollständig entladen wird?

**Aufgabe 5.7**

Für die Strahlablenkung befinden sich zwischen Anode und Schirm Ablenkplatten, die die Ablenkspannung  $U_{Ab}$  erhalten.

Die Beschleunigung erfolgt dabei senkrecht zur konstanten Geschwindigkeit  $v_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  (entspricht ca.  $U_A = 1000 \text{ V}$ ), d.h., es kommt nur eine senkrechte Geschwindigkeitskomponente dazu.



**Abb. 5.17: Strahlablenkung in der Bildröhre**

Die Elektronen befinden sich somit für die Ablenkleitung  $t_{Ab} = l_{Pl} / v_0$  im Feld zwischen den Platten ( $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ).

Frage 1: Wie groß ist zum Ende der Ablenkung ( $l_{Pl} = 2 \text{ cm}$ ) die Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  bei der Ablenkspannung  $U_{Ab} = 20 \text{ V}$  und einem Abstand der Platten  $d_{Pl} = 2 \text{ mm}$ ?

Frage 2: Wie groß ist der Ablenkwinkel?

Hinweis: Nutzen Sie die Komponenten der Geschwindigkeit.

# 6 Vorgänge im Magnetfeld

In Analogie zu den Begriffen, die entsprechend der Abschnitte 4 und 5 verstanden worden sein sollten, werden

- die Größen zur Beschreibung von magnetischen Kreisen – magnetische Ursprungsspannung, magnetische Spannung, magnetischer Fluss und magnetischer Widerstand,
- die Größen zur Beschreibung von Vorgängen im Magnetfeld – magnetische Flussdichte und magnetisches Feld,
- die Zusammenhänge zwischen magnetischen Größen,
- deren Zusammenhang mit elektrischen Größen – Induktion und Induktivität sowie
- die Gesetzmäßigkeiten in magnetischen Anordnungen – Energie und Kräfte

vorgestellt.

Diese Modellvorstellungen sind ebenfalls aus vielfachen reproduzierbaren experimentellen Beobachtungen hervorgegangen, haben sich durchgesetzt und werden mit Erfolg angewandt.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in Abschnitt 3 sein.

## 6.1 Grundbegriffe: magnetische Ursprungsspannung, Fluss, Widerstand

### 6.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

Bei Versuchen stellte Ørsted zufällig fest, dass eine Magnethnafel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters ausschlägt. Damit war das erste Mal ein Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen erkannt worden. Der Raum um einen stromdurchflossenen Leiter musste sich also genauso wie der um einen Permanentmagneten in einem „besonderen Zustand“ befinden. Das wurde aus entsprechenden Kraftwirkungen (Ausschlag einer Magnethnafel, Ausrichtung von Eisenfeilspänen) gefolgt.

Diese wichtige Erkenntnis eines Zusammenhangs zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen hat die theoretische Entwicklung stark beeinflusst. Wie das elektrische Feld konnte auch das magnetische Feld erfolgreich beschrieben werden. Da diese **Beschreibung in der Form eines Modells als Analogie zum elektrischen Strom und dem elektrischen Feld** besonders einfach ist, hat sie sich durchgesetzt und wird bis heute so gelehrt.

\* Heute können **Kräfte zwischen bewegten Ladungen** unter Einbeziehung der speziellen **Relativitätstheorie** untersucht werden. Damit wurde klar, dass es nicht zwei Felder oder zwei miteinander verbundene Erscheinungen gibt, sondern **ein einheitliches Feld** (Bor69 S. 255 ff).

Bei einer Unterteilung der Wirkung zwischen bewegten Ladungen in

- einerseits einen Anteil entsprechend dem von ruhenden Ladungen und
- andererseits einen zusätzlichen Anteil durch die Bewegung

können die

- ersten mit den in ruhenden Beobachtungssystemen (Abschnitt 4 und 5) behandelten Vorgängen und
- die letzteren mit den Vorgängen im Magnetfeld

beschrieben werden. Bei dieser formalen Unterteilung in zwei Felder kann die **bewegte Ladung als Ursache und Ausgangspunkt magnetischer Erscheinungen** nicht adäquat deutlich gemacht werden (wie die Ladung als Ausgangspunkt elektrischer Erscheinungen). Lediglich der Strom bewirkt die magnetische Ursprungsspannung (also deren bewegte Ladungen). Weitere Überlegungen dazu können Interessierte, die eine kompliziertere mathematische Untersuchung nicht scheuen, in (Boe12 S. 37 ff) nachvollziehen.

### 6.1.2 Der magnetische Kreis

**Der Ausgangspunkt** zur Beschreibung der Vorgänge im Magnetfeld ist die **Analogie** zu elektrischem Strom, der Spannung und insgesamt dem elektrischen Feld.

Dazu gehen wir von einem einfachen magnetischen Kreis und zum Vergleich von einem elektrischen Stromkreis aus (siehe Abb. 6.1).

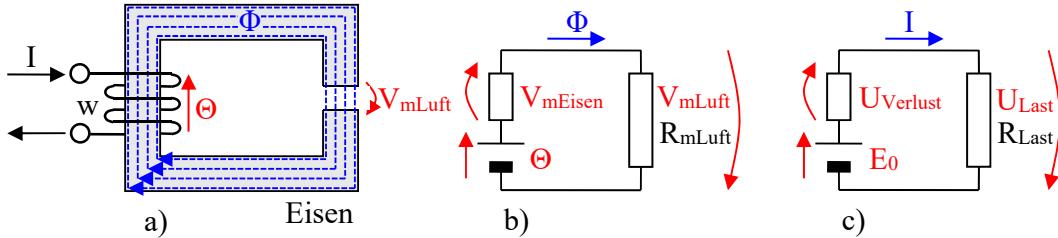


Abb. 6.1: a) Skizze, b) symbolischer magnetischer Kreis aus Eisen, c) Stromkreis

Der elektrische Strom  $I$  fließt in  $w$  Windungen um den Eisenkern, der zusätzlich einen kleinen Luftspalt hat. Die bewegten Ladungen des Stromes bewirken eine magnetische Urspannung  $\Theta$ . Es kann experimentell gefunden werden, dass  $\Theta \sim I$  und  $\Theta \sim w$  ( $w$  = Anzahl Windungen) ist. Durch entsprechende Wahl der Maßeinheit kann der Proportionalitätsfaktor = 1 festgelegt werden:

#### magnetische Ursprungsspannung oder Durchflutung

$$\Theta = I w \quad ^{52} \quad (6.1)$$

**Praxistipp:** Auch Permanentmagnete besitzen eine magnetische Urspannung. Schon Ampère hat darauf hingewiesen, dass molekulare Ströme diese erzeugen (also ebenfalls bewegte Ladungen). In der Regel heben sich alle molekularen Ströme (z.B. um die Atomkerne kreisende Elektronen) gegenseitig auf. Nur bei wenigen Materialien kann hier ein Ungleichgewicht durch Magnetisierung hervorgerufen werden (z.B. bei Eisen, Kobalt oder Nickel).

Durch die magnetische Urspannung „angetrieben“ wird ein magnetischer Fluss  $\Phi$  in einem geschlossenen Kreislauf fließen. Als eine **Vorstellung** analog zum elektrischen Strom können damit magnetische Vorgänge einfach und **bildhaft beschrieben** und Größen richtig ermittelt werden, auch wenn hier nichts wirklich fließt. Wegen des geschlossenen Kreislaufs muss auch für diesen Fluss ein Knotenpunktsatz analog (4.14) gelten.

#### magnetischer Fluss

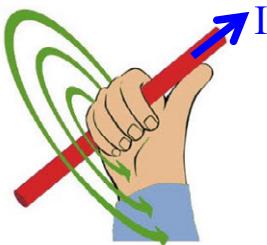
$$\Phi \quad ^{53} \quad (6.2)$$

Weil Eisen den magnetischen Fluss ca. 1000-mal besser leitet als Luft, wird fast der gesamte Fluss im Eisenkreis und damit ebenfalls um die stromführenden Leiter herumfließen (der kleine Luftspalt ändert dies nicht wesentlich).

<sup>52</sup> Die Maßeinheit lautet nach dem Strom A, wird aber in der Regel Amperewindungen genannt (wegen der dimensionslosen Anzahl der Windungen und der besseren Unterscheidung).

<sup>53</sup> Die Maßeinheit ist Vs (erst nach Abschnitt 6.1.7 verständlich) oder wird nach Weber Wb genannt.

**Praxistipp:** Ein stromführender Leiter wird je nach Stromrichtung rechts- oder linksherum umflossen. Die Festlegung erfolgte in *mathematisch positivem Sinn* und wird am besten mit der Rechten-Hand-Regel ermittelt.



Der Daumen der rechten Hand zeigt in die Richtung des Stromes. Die Fingerspitzen weisen dann in die Richtung des Umfließens durch den magnetischen Fluss.

**Abb. 6.2: Rechte-Hand-Regel**

Für einen räumlich verteilten Fluss wird zur Beschreibung wieder eine Flussdichte analog zur Stromdichte definiert, in welchem der Anteil des Flusses durch ein kleines Flächenelement ( $dA_{\perp}$ ) senkrecht zur Flussrichtung ( $e_{\Phi}$ ) berechnet wird.

### magnetische Flussdichte

$$|\mathbf{B}| = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}} \quad ^{54} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = |\mathbf{B}| e_{\Phi} \quad \text{und} \quad \Phi = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.3)$$

Die Flussdichte kann in jedem Punkt des Leiters in Betrag und Richtung bestimmt (gemessen) werden (vergleiche Abschnitt 6.1.6).

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes – dem Feld der magnetischen Flussdichte.

Weiterhin wird in Analogie zum Spannungsabfall des elektrischen Stromkreises ein magnetischer Spannungsabfall  $V_m$  ebenfalls in Flussrichtung (entlang eines Wegabschnittes des Flusses) definiert.

### magnetischer Spannungsabfall

$$V_m \quad ^{55} \quad (6.4)$$

Daran anknüpfend kann auch der Begriff einer Feldgröße analog zu (4.7) definiert werden.

### magnetisches Feld

$$\mathbf{H} = \frac{dV_m}{ds} e_{\Phi} \quad ^{56} \quad (* \text{ genauer } \mathbf{H} = \mathbf{grad} V_m \quad \text{und} \quad V_m = \int_{\text{Weg}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \quad (6.5)$$

**Praxistipp:** Selbstverständlich gelten auch analoge Zählpfeilrichtungen für magnetischen Fluss, Spannungsabfall und Ursprung wie für elektrischen Strom und Spannung (Abschnitt 4.1.1).

<sup>54</sup> Die Maßeinheit lautet A/m<sup>2</sup> oder wird nach Tesla T genannt.

<sup>55</sup> Die Maßeinheit ist die gleiche wie für die magnetische Ursprung, d.h. A.

<sup>56</sup> Die Maßeinheit ergibt sich zu A/m.

Durch experimentelle Untersuchungen wurde mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gefunden, dass

- die Richtungen von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  immer gleich sind<sup>57</sup>
- und sie über die Materialkonstante  $\mu$  (Permeabilität) zusammenhängen<sup>58</sup>.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (6.6)$$

**Praxistipp:** Die Permeabilität kann von einer Sättigung, der Temperatur und anderen Einwirkungen abhängen. Sie ist gerade bei den technisch interessanten Materialien nicht konstant (vergleiche Abschnitt 6.2.2).

Die Permeabilität kann für jedes Material ermittelt werden. Sie wird in der Regel als Faktor ( $\mu_r$  = relative Permeabilität) bezogen auf die Permeabilität für Vakuum ( $\mu_0=1,256 \cdot 10^{-6}$  Vs/Am =  $= 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am<sup>59</sup>) angegeben<sup>60</sup>.

In gleicher Weise kann jetzt ein magnetischer Widerstand  $R_m$  (analog zum Ohm'schen Gesetz) definiert werden.

### magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} \quad ^{61} \text{ aus der Definitionsgleichung } V_m = R_m \Phi \quad (6.7)$$

### Bemessungsgleichung des magnetischen Widerstands

$$R_m = \frac{1}{\mu A} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r A} \quad (6.8)$$

Liegt kein homogenes Feld vor und können Randfelder nicht aufgrund ihres geringen Beitrages vernachlässigt werden, wird das Feld in kleine Teile (jeweils so klein, dass dort in guter Näherung ein homogenes Feld vorliegt) eingeteilt und anschließend der Gesamtwiderstand berechnet.

**Praxistipp:** Für Schaltungen der Elektronik ist die Induktivität (Abschnitt 6.2.1) wichtiger.

**Mit diesen Begriffen können alle Vorgänge im Magnetfeld dargestellt werden.**

\* Für eine mit  $\mathbf{v}$  bewegte Punktladung folgt bei Nutzung der Relativitätstheorie (alle Größen außer  $\mathbf{v}$  am Ort ihrer Bestimmung/Messung erfasst).

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad \Phi = \int_{\text{Fläche}} d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad V_m = \int_{\text{Weg}} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

Sind mehrere bewegte Ladungen (oder ein Strom) vorhanden, müssen zusätzlich die Wirkungen aller im Wirkungsbereich befindlichen Ladungen addiert werden. Damit ist zwar deutlicher zu sehen, dass nur ein einheitliches Feld besteht, aber die mathematische Komplexität ist ebenfalls unübersehbar. Die Wirkungen dieser vielen Ladungen lassen sich nicht einzeln, deren Summe aber über  $\mathbf{B}$  genau messen (Abschnitt 6.1.6). Diese mathematischen Ausdrücke „fließen“ natürlich nicht, sie ändern sich nur gemäß Ort und Zeit.

<sup>57</sup> Das folgt auch aus der analogen Definition zum elektrischen Feld.

<sup>58</sup> Die Maßeinheit ist  $(\text{Vs}/\text{m}^2)/(\text{A}/\text{m}) = \text{Vs}/\text{Am}$ .

<sup>59</sup> Dieser Wert ergibt sich im metrischen Maßsystem; im Gauß'schen Maßsystem wäre  $\mu_0 = 1$  eine einfache Zahl.

<sup>60</sup> Anisotrope Materialien mit Richtungsabhängigkeiten müssen gesondert betrachtet werden.

<sup>61</sup> Die Maßeinheit wird  $\text{A}/\text{Vs}$ .

### 6.1.3 Übungsaufgaben zum magnetischen Kreis

#### Aufgabe 6.1

Für die Darstellung in Abb. 6.3 (vereinfachte Anordnung wie bei einem kleinen Kern eines Transformators, bei Gleichstrom auch Ersatz durch Permanentmagnet) sind weiter gegeben:

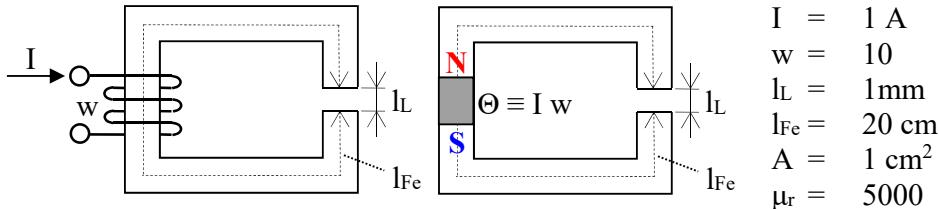


Abb. 6.3: Darstellung der Abmessungen des magnetischen Kreises

Frage 1: Wie groß ist  $\Theta$  für den elektrisch erregten Fall?

Frage 2: Wie groß sind die magnetischen Widerstände  $R_{mL}$  und  $R_{mFe}$ ?

Frage 3: Wie groß sind der magnetische Fluss und die Flussdichte?

Frage 4: Wie groß sind  $H_L$ ,  $H_{Fe}$ ,  $V_{mL}$  und  $V_{mFe}$ ?

Hinweis: Die Inhomogenität der Ecken vernachlässigen, d.h., skizzierte mittlere Länge nutzen. Für den kleinen Luftspalt das Feld nach außen vernachlässigen.

#### Aufgabe 6.2

Eine lange einlagige Luftspule (siehe Abb. 6.4) mit 1000 Windungen, 50 cm Länge und 5 cm Durchmesser wird von 1 A durchflossen.



Abb. 6.4: Lange einlagige Luftspule

Frage: Wie groß sind der magnetische Widerstand und die Flussdichte?

Hinweis: Eine lange Spule hat innen näherungsweise ein homogenes Feld und das äußere Feld ist von vernachlässigbarem Einfluss.

#### 6.1.4 Das Durchflutungsgesetz

Analog zur elektrischen Spannung kann auch für magnetische Spannungsabfälle und Urspannungen ein Maschensatz experimentell bestätigt werden; vergleiche ( 4.15 ). Dieser hat für das Magnetfeld aber eine weiterreichende Bedeutung.

**Praxistipp:** Das Durchflutungsgesetz stellt die Wandlung oder den Übergang von den elektrischen zu den magnetischen Größen dar.

$$\Theta_{\text{ges}} = \sum I_{\text{umfasst}} = \sum \Theta_v = \sum V_{m\mu} \quad \text{in gleichem Umlaufsinn gezählt} \quad (6.9)$$

Anstelle  $\Theta = I w$  kann verallgemeinert die Summe aller durch den Weg des Flusskreislaufes umfassten Ströme angesetzt werden (Umfassen heißt durch einen geschlossenen Kreislauf). Damit wird auch berücksichtigt, dass Ströme in verschiedener Richtung umlaufen können. Hierbei gilt wieder die Rechte-Hand-Regel (mathematisch positive Richtung, siehe Abb. 6.2).

Wird  $V_m$  nach ( 6.5 ) durch  $\mathbf{H}$  ersetzt (für einen geschlossenen Umlauf), folgt das Durchflutungsgesetz als allgemeinste Form von ( 6.9 ) (Durchflutung als Begriff für Antrieb magnetischer Flüsse):

### Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum I_{\text{umfasst}} \quad (6.10)$$

Magnetische Spannungsabfälle oder die Umlaufsumme (Ringintegral) können mit einer Rogowskispule nachgewiesen werden (Lun91 S. 217, 230ff).

**Praxistipp:** Die Rogowskispule besteht aus einem Lederriemen, der dicht und gleichmäßig mit einer Lage Windungen versehen ist. Dadurch lassen sich ein oder mehrere (auch verschiedenen Strom führende Leiter) einmal bzw. mehrere Male umfassen.

Die Auswertung der Ergebnisse bestätigt Gleichung ( 6.10 ) (vergleiche Abb. 6.5).

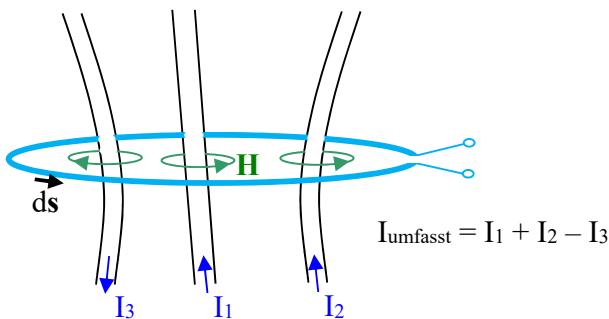


Abb. 6.5: Drei Leiter werden einmal von einer Rogowskispule umfasst

Das Durchflutungsgesetz kann vorteilhaft zur Berechnung von Magnetfeldern eingesetzt werden. Dazu soll das Feld eines unendlich langen geraden Leiters (in der Praxis viel länger als interessierende Entfernung vom Leiter) untersucht werden. Mit diesem Beispiel werden auch Magnetfelder und ihre Ausdehnung für Leitungen und Kabel demonstriert. Bei einem Leiter wie in Abb. 6.6 gibt es keinen Grund für das Magnetfeld, sich nicht vollkommen

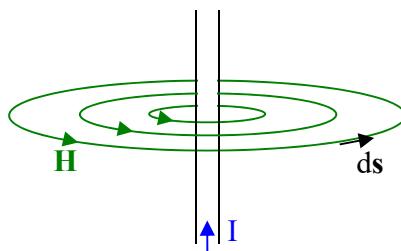
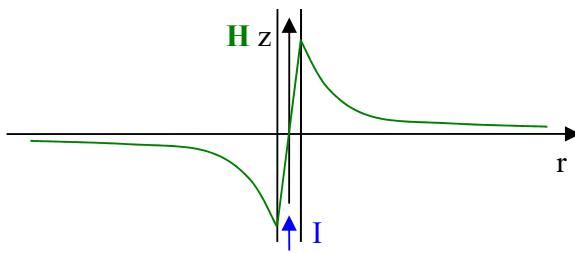


Abb. 6.6: Gerader Leiter mit Magnetfeld

zylindersymmetrisch auszudehnen, denn es gibt in der Ebene senkrecht zum Leiter keine Vorzugsrichtung. Somit muss auf einem konzentrischen Kreis um den Leiter der Betrag von  $\mathbf{H}$  konstant sein. Wird das Ringintegral ( 6.10 ) auf einem konzentrischen Kreis in Richtung des Feldes berechnet, können die Beträge von  $\mathbf{H}$  und  $d\mathbf{s}$  eingesetzt, das konstante  $\mathbf{H}$  vor das Integral gezogen und entlang des Kreisumfangs integriert werden.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H \oint d\mathbf{s} = H 2\pi r = I \quad \text{d.h.} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad (6.11)$$

Achtung: Für einen Kreis innerhalb des Leiters wird nur ein anteiliger Strom umfasst, sodass ein linearer Zusammenhang entsteht (Anteil  $\pi r^2/\pi r^2_{\text{Leiter}} \rightarrow H = I r/(2\pi r^2_{\text{Leiter}})$ ).



**Abb. 6.7:** Ergebnis  $H = f(r)$  grafisch dargestellt

**Praxistipp:** Durch die Gültigkeit des Superpositionsprinzips können durch Addition die Felder mehrerer Leiter (mit gleich- oder entgegengerichteten Strömen) bestimmt werden.

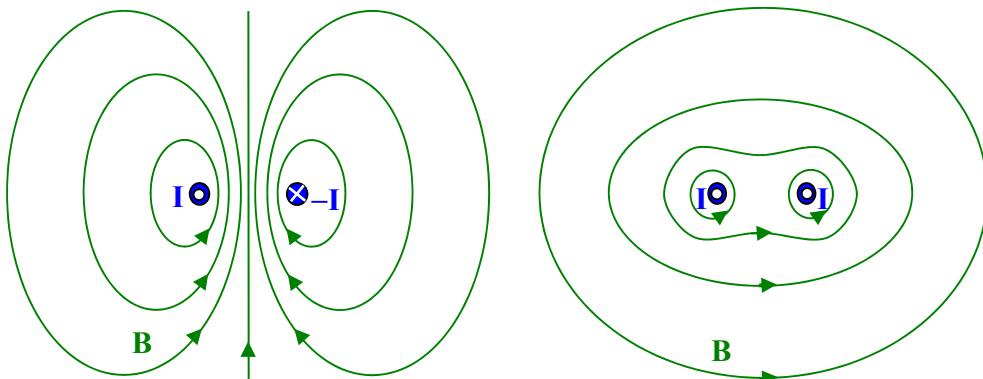
Ist die Symmetrie nicht so günstig, bleibt zwar ( 6.10 ) richtig, das Integral ist aber kaum lösbar. In diesem Falle müssen das Biot-Savart'sche Gesetz oder Gleichungen des Vektorpotentials genutzt werden (Weiterführendes dazu siehe in (Lun91 S. 217, 230ff)).

### 6.1.5 Messung und Darstellung von magnetischen Feldern – Feldlinien

Bei der **Messung magnetischer Größen** (Flussdichte  $B$ , evtl. magnetischer Spannungsabfall  $V_m$  zwischen den beiden Enden einer Rogowskispule<sup>62</sup>) kann die Messung mit kleinen Messspulen, Hallsensoren oder magnetoresistiven Sensoren durchgeführt werden, welche genügend kleine Fehler hinterlassen.

**Praxistipp:** Eine sehr anschauliche **Darstellung von Magnetfeldern** gelingt mit Eisenfeilspänen. Die Teilchen werden auf eine dünne unmagnetische Platte über einer Anordnung von Magneten gestreut. Sie ordnen sich entsprechend der Feldlinien und ergeben ein eindrucksvolles Bild. Für eine solche Illustration reichen einfache Permanent- oder Elektromagnete, die Späne dürfen nicht zu fein und nicht zu rund sein.

Feldbilder verwendete schon Faraday als einfache Form zur qualitativen Darstellung von Vorgängen im Magnetfeld. Dazu werden einige ausgewählte geschlossene Flussdichtelinien vom Nord- zum Südpol bzw. um die Leiter gezeichnet. Als Regel gilt, dass sich diese Feldlinien nie schneiden oder kreuzen, sie müssen sich den Platz teilen. In Abb. 6.8 sind je zwei parallele Leiter mit entgegen- bzw. gleichgerichtetem Strom im Querschnitt dargestellt. Eine quantitative Darstellung kann analog ( 6.11 ) oder durch eine punktweise Addition von je zwei Kurven (mit entsprechendem Vorzeichen) gemäß Abb. 6.7 erreicht werden.



**Abb. 6.8:** Feldbilder von zwei parallelen Leitern

<sup>62</sup> Die Messung geht aber genau genommen auch auf die Flussdichte  $B$  (Induktionsspannung mit  $dB/dt$ ) zurück.

Sehr deutlich ist erkennbar, wie sich die Feldlinien bei entgegengerichteten Strömen zwischen den Leitern verdichten. Dagegen wird der Raum zwischen gleichgerichteten Strömen vom Feld verdünnt.

**Praxistipp:** Aus dieser Tatsache können anschaulich Kraftwirkungen abgeleitet werden.

- Wo Feldlinien verdichtet sind, entstehen Kräfte, die diese auseinanderdrücken.
- Wo Feldlinien verdünnt sind, entstehen Kräfte, die diese zusammendrücken.
- Kräfte versuchen immer, Feldlinien im ungünstigeren Material zu verkürzen.

Das ist nur möglich, wenn die stromführenden Leiter oder die Magnete auseinander- bzw. zusammengedrückt werden.

### 6.1.6 Lorentzkraft

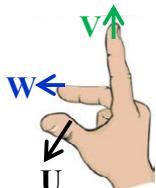
\* Befinden sich in einem Beobachtungssystem S eine bewegte Ladung **sowie** eine bewegte Probeladung, kann mit Hilfe der Lorentztransformation in entsprechend mitbewegte Beobachtungssysteme S' und S'' transformiert werden, sodass die Kraft einer ruhenden Ladung im elektrischen Feld nach ( 4.4 ) angewendet werden kann (siehe z.B. (Boe12 S. 18 ff)). Nach der Rücktransformation ergibt sich infolge beider Bewegungen für die Kraft ein zusätzlicher Anteil zu dem von zwei ruhenden Ladungen.

Die Kraft zwischen zwei bewegten Ladungen wurde von Lorentz gefunden und entspricht der Kraft einer bewegten Probeladung im Magnetfeld (z.B. von sich bewegenden Ladungen) <sup>63</sup>.

#### Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = Q_p \mathbf{v}_p \times \mathbf{B} \quad (6.12)$$

Das Kreuzprodukt besagt dabei, dass  $\mathbf{v}_p$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{F}$  im Sinne eines Rechtssystems aufeinander senkrecht stehen (siehe Abb. 6.9).



Daumen  
Zeigefinger  
Mittelfinger (abgewinkelt)

– Ursache  
– Vermittlung  
– Wirkung

in ( 6.12 )  $\mathbf{v}_p$   
in ( 6.12 )  $\mathbf{B}$   
in ( 6.12 )  $\mathbf{F}$

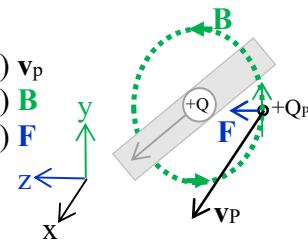


Abb. 6.9: UVW-Regel mit der rechten Hand

Vermittlung bedeutet hierbei, die magnetische Flussdichte vermittelt (entsprechend ihrer Größe und Richtung), bewirkt aber keine Energieänderung. Das ist darin begründet, dass die Kraft immer senkrecht auf der momentanen Bewegungsrichtung steht.

**Praxistipp:** Wenn keine weiteren Kräfte  $Q_p$  beeinflussen, kann somit durch die Lorentzkraft (d.h. durch ein Magnetfeld) keine Energieänderung erfolgen. Gibt es eine weitere Beeinflussung (z.B. einen mechanischen Antrieb oder einen Strom), müssen diese für jegliche Energieänderung bzw. -wandlung sorgen.

Wichtige Anwendungen erfolgen in der Induktion elektrischer Spannungen im Generator (Stromerzeugung nach dem „Dynamoprinzip“) sowie im Elektromotor. Weitere praktische Auswirkungen siehe Abschnitt 6.1.7.

<sup>63</sup> Damit kann  $\mathbf{B}$  über die Kraft auf eine bewegte Probeladung direkt gemessen werden (Induktion, Hallsensor).

### 6.1.7 Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz tritt bei experimentellen Untersuchungen in zwei Formen auf. Die **Bewegungsinduktion** beruht auf der Bewegung eines Leiters im zeitkonstanten Magnetfeld und die **Ruheinduktion** erfolgt durch ein zeitveränderliches Magnetfeld ohne bewegte Teile.

Das **Prinzip der Bewegungsinduktion** zeigt Abb. 6.10.

In dem Leiter, der sich mit  $v_x$  nach vorn im Bereich der zeitkonstanten magnetischen Flussdichte  $B_y$  bewegt, erfahren positive Ladungsträger<sup>64</sup> die Lorentzkraft  $F_z$  und werden nach oben gedrückt. Die Festlegung der Richtung der Spannung  $u_{\text{ind}}$  erfolgte in Abb. 6.10 nach der Rechten-Hand-Regel.

**Praxistipp:** Ein magnetischer Fluss erzeugt je nach Richtung rechts- oder linksherum eine Spannung. Zeigt der Daumen in Flussrichtung, dann zeigen die um diese gekrümmten Finger (von der Anfangsklemme um den Fluss herum mit den Fingerspitzen zur Zielklemme) an den Klemmen die Spannungsrichtung an (analog Abb. 6.2).

Damit wird der Spannungsabfall (und der Strom) an den Klemmen in Abb. 6.10 negativ<sup>65</sup>, denn die Lorentzkraft drückt positive Ladungsträger im Leiter nach oben.

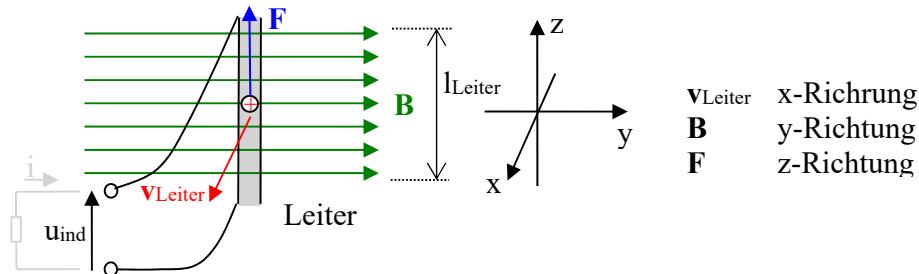


Abb. 6.10: Leiter bewegt sich im Magnetfeld nach vorn

Nach ( 4.7 ) wird also (Energie = Kraft mal Weg mit genanntem negativem Vorzeichen):

$$u_{\text{ind}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}} \quad \text{mit } U = W/Q_p \text{ und } \mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p .$$

Bei konstanter Geschwindigkeit sowie Flussdichte folgt mit dem Weg  $\mathbf{l}_z = k l_z$  entsprechend der Länge des Leiters (in z-Richtung; nur im Bereich der magnetischen Flussdichte):

#### Induktionsgesetz der Bewegungsinduktion

$$u_{\text{ind}} = -(\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_z = -v_x B_y l_z \quad (\text{Letzteres wenn alles } \perp \text{ zueinander steht}). \quad (6.13)$$

**Praxistipp:** Durch diese Richtungsfestlegungen ist die Lenz'sche Regel unmittelbar erfüllt. Nach Schließen des Stromkreises an den Klemmen mit einem Widerstand wird durch den Stromfluss ( $u_{\text{ind}}$  und damit  $i$  sind negativ) in Kraftrichtung die Gegenkraft  $\mathbf{F}_{\text{gegen}} = Q_p \mathbf{v}_{\text{Strom}} \times \mathbf{B}$  entstehen (UVW-Regel) und der Bewegung des Leiters ( $\mathbf{v}_{\text{Leiter}}$  ist die Ursache) entgegenwirken (also in die negative x-Richtung).

66

Eine Umformung von ( 6.13 ) kann mit  $B_y l_z v_x = B_y l_z dx/dt = B_y (-dA_{LS}/dt) = -d\Phi_{LS}/dt$ <sup>67</sup> erfolgen. Die **Bewegung** des Leiters nach **vorn** wird den Fluss, der durch die Leiterschleife

<sup>64</sup> Elektronen erfahren eine umgekehrte Kraft. Das bedeutet aber (infolge der negativen Ladung) gleiche Spannung und gleicher Strom.

<sup>65</sup> Ein Vergleich mit Abb. 4.5 ergibt die Zählpfeilrichtungen eines Erzeugers.

<sup>66</sup> Bei einer Bewegung nach hinten mit einer Vergrößerung des Flusses ergibt sich das entsprechende Ergebnis.

<sup>67</sup>  $l_z \cdot dx$  ist ein Streifen der genannten Leiterschleife, der deren Fläche durch  $v_x$  verkleinert. Deshalb folgt  $-dA_{LS}$ . Weiter ist  $B \cdot A = \Phi$ .

hindurchtritt, verkleinern ( $-d\Phi_{LS}$ ). Die Leiterschleife  $A_{LS}$  besteht aus Leiter, Zuleitungen und Widerstand, die nach vorn außerhalb des Flusses laufen und allen Fluss innerhalb umfassen.

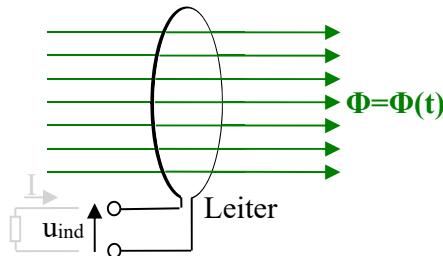
$$u_{ind} = - \left( -\frac{d\Phi_{LS}}{dt} \right) = \frac{d\Phi_{LS}}{dt} \quad ^{68} \quad (6.14)$$

Dabei ist  $\Phi$  der Fluss innerhalb der Leiterschleife. Die Richtung von  $u_{ind}$  wird unverändert nach der Rechten-Hand-Regel festgelegt (in Abb. 6.10 wurde  $\Phi$  kleiner).

Wichtig ist, dass zur Berechnung einer Anordnung nur entweder ( 6.13 ) oder ( 6.14 ) genutzt werden darf. Deshalb muss vorher der Betrachtungsstandpunkt genau geklärt werden.

**Praxistipp:** Entweder wird der Standpunkt ruhend zum konstanten Magnetfeld eingenommen, dann folgen ein bewegter Leiter und Gleichung ( 6.13 ), **oder** der Standpunkt ruhend zum Leiter, es folgen eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes durch  $A_{LS}$  und Gleichung ( 6.14 ).

Das **Prinzip der Ruheinduktion** benötigt ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld, z.B. von einem sich zeitlich ändernden Strom. Das Prinzip kann aus ( 6.14 ) gefolgert werden. Es wurde von Faraday experimentell gefunden. Eine entsprechende Anordnung zeigt Abb. 6.11.



**Abb. 6.11: Leiterschleife in einem zeitveränderlichen Magnetfeld**

Die Richtungsfestlegung des Spannungsabfalls erfolgte in Abb. 6.11 wieder nach der Rechten-Hand-Regel.

**Praxistipp:** Die Lenz'sche Regel ist wiederum unmittelbar erfüllt. Nach Schließen des Stromkreises an den Klemmen durch einen Widerstand wird durch den Stromfluss entsprechend  $u_{ind}$  ein dem Anstieg des Flusses  $B(t)$  (der Ursache) entgegenwirkender Fluss erzeugt.

69

Für die Ruheinduktion kann auf dieser Denkweise nur der Standpunkt ruhend zum Leiter eingenommen werden. Wird anstelle der Leiterschleife eine Spule mit  $w$  Windungen eingesetzt, entsteht  $u_{ind}$  für jede Windung und es wird insgesamt:

### Induktionsgesetz der Ruheinduktion

$$u_{ind} = w \frac{d\Phi}{dt} \quad . \quad (6.15)$$

Liegt eine Bewegung in einem zeitveränderlichen Feld vor, sind beide Teile zu beachten.

<sup>68</sup> Hier erklärt sich die Maßeinheit von  $\Phi$  zu Vs.

<sup>69</sup> Ein Vergleich mit Abb. 4.5 ergibt ebenfalls die Zählpfeilrichtungen eines Erzeugers.

### Induktionsgesetz insgesamt

$$u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi_{\text{LS}}}{dt} - (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{\text{aller Leiter}} \quad (6.16)$$

**Praxistipp:** Der Betrachtungsstandpunkt ist immer eindeutig zu wählen, um keine Anteile doppelt zu erfassen.

\* Bei Einbeziehung der speziellen Relativitätstheorie ergibt sich für einen zeitveränderlichen Strom in einem Beobachtungssystem S', das sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stromänderung (Lichtgeschwindigkeit des Leitermaterials  $c_{\text{Kupfer}}$ ) mitbewegt, ein zeitkonstantes Feld. Auf diese Weise lässt sich auch die Ruheinduktion auf die Lorentzkraft zurückführen. Die Ladungsträger einer Leiterschleife, die zum Leiter in S ruhend angeordnet ist, bewegen sich mit  $c_{\text{Kupfer}}$  in S' in umgekehrter Richtung wie das System. Es kann sinngemäß entsprechend der konkreten Verhältnisse mit (6.13) gerechnet und mit der Lorentztransformation zurücktransformiert werden (siehe (Boe12 S. 28 ff)). Damit entsteht die Wirkung der Ruheinduktion ebenfalls aus einer Kraft auf bewegte Ladungsträger, nur ist hierbei das Prinzip der Stromausbreitung im Leiter konkret zu berücksichtigen.

Für die meisten Anwendungen ist es hilfreich, die Ruheinduktion in Selbst- und Gegeninduktion zu unterteilen. Bei der **Selbstinduktion** Abb. 6.12 wird das Magnetfeld von dem Strom durch die Leiterschleife (oder Spule mit w Windungen) erst selbst erzeugt (Rechte-Hand-Regel).

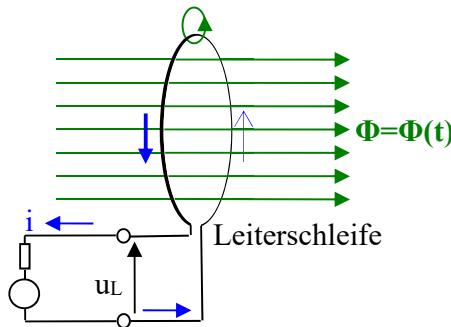


Abb. 6.12: Leiterschleife mit selbst erzeugtem Magnetfeld

Für den Fall eines zeitveränderlichen Stromes wird die Leiterschleife demzufolge von einem zeitveränderlichen magnetischen Fluss  $\Phi(t)$  durchsetzt. Damit entsteht mit mathematisch positiver Richtungsdefinition (Rechte-Hand-Regel) an den Klemmen die Spannung  $u_L$ .

$$u_L = w \frac{d\Phi(i)}{dt} \quad (6.17)$$

Zur Darstellung der **Gegeninduktion** und ihrer **vollen Verkopplung** wird eine zweite Leiterschleife (oder Spule mit  $w_2$  Windungen) gezeichnet (Abb. 6.13). Durch Leiterschleife 1

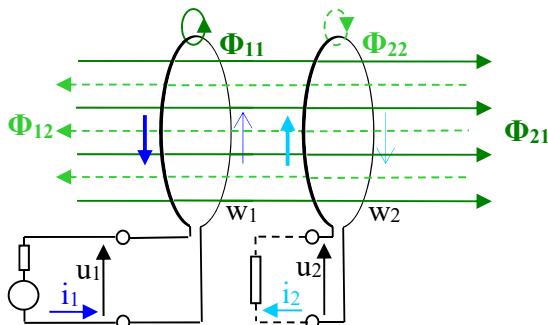


Abb. 6.13: Verkopplung von Selbst- und Gegeninduktion

fließt der Strom  $i_1$  und erzeugt den magnetischen Fluss  $\Phi_{11}$ , der natürlich vollständig durch diese Schleife strömt. Ein etwas geringerer Teil dieses Flusses  $\Phi_{21}$  durchströmt Leiterschleife 2. Daraus folgen die induzierten Spannungen:

$$u_{\text{ind}11} = w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}21} = w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} .$$

Beide zeigen nach der Rechten-Hand-Regel in Richtung von  $u_1$  und  $u_2$ . Wird an die Klemmen von Leiterschleife 2 ein Widerstand angeschlossen, fließt infolge  $u_{\text{ind}2}$  der Strom  $i_2$  und erzeugt den Fluss  $\Phi_{22}$ , der wiederum vollständig durch Leiterschleife 2 geht, aber etwas geringer ( $\Phi_{12}$ ) durch Leiterschleife 1 (jeweils noch zusätzlich). Daraus folgen die induzierten Spannungen:

$$u_{\text{ind}12} = w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}22} = w_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} .$$

Beide zeigen nach der Rechten-Hand-Regel entgegen der Richtung von  $u_1$  und  $u_2$  (vergleiche auch Lenz'sche Regel). Für  $u_1$  und  $u_2$  folgt insgesamt:

$$u_1 = u_{\text{ind}11} - u_{\text{ind}12} \quad \text{und} \quad u_2 = u_{\text{ind}21} - u_{\text{ind}22}$$

und daraus werden die Vierpolgleichungen (vier Klemmen vergleiche Abschnitt 12.3.3):

$$u_1 = w_1 \frac{d\Phi_{11}(i_1)}{dt} - w_1 \frac{d\Phi_{12}(i_2)}{dt} \quad \text{und} \quad u_2 = w_2 \frac{d\Phi_{21}(i_1)}{dt} - w_2 \frac{d\Phi_{22}(i_2)}{dt} , \quad (6.18)$$

welche Strom und Spannung von beiden Klemmen in Beziehung zueinander setzen. Diese Gleichungen sind die Grundlage für den Transformator (siehe 19.2.1).

**Praxistipp:** Werden die magnetischen Flüsse mit  $\Phi = \Theta/R_m$  und  $\Theta = wI$  auf die Ströme zurückgeführt, können die Bauelemente mit ihren Strom-Spannungs-Beziehungen an den Klemmen ohne alle Magnetfelder betrachtet werden.

## 6.1.8 Übungsaufgaben zur Durchflutung und Induktion

### Aufgabe 6.3

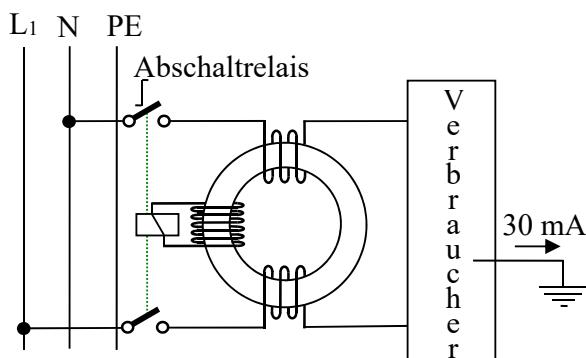


Abb. 6.14: Schematischer Aufbau eines FI-Schalters

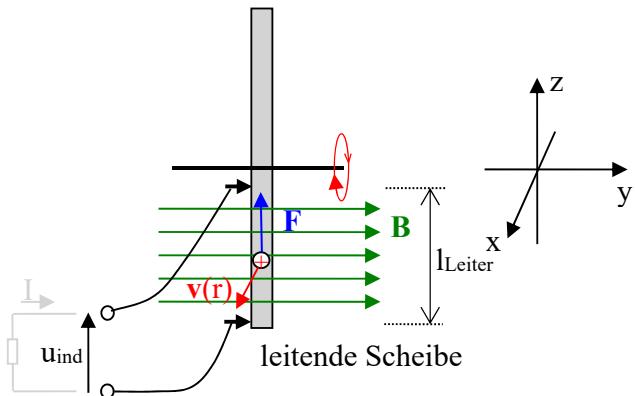
Ein FI-Schalter nutzt das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz (Abb. 6.14). Er schaltet z.B. bei einem Fehlerstrom von 0,03 A den Stromkreis ab.

Frage 1: Wie ist die Funktionsweise eines FI-Schalters?

Frage 2: Welche magnetische Urspannung steht zur Verfügung, wenn 30 mA über die Erde zurückfließen (je  $w = 5$ ), und wird mit der Auslösespule gemessen?

**Aufgabe 6.4**

Eine angetriebene Kupferscheibe rotiert in einem konstanten Magnetfeld (Unipolarmaschine). Zwei Schleifkontakte (bei  $r_{\text{innen}}$  und  $r_{\text{außen}}$  mit  $r_{\text{außen}} - r_{\text{innen}} = l_{\text{Leiter}}$ ) stellen eine Verbindung zu den Klemmen her (Abb. 6.15).

**Abb. 6.15: Rotierende Scheibe im Magnetfeld**

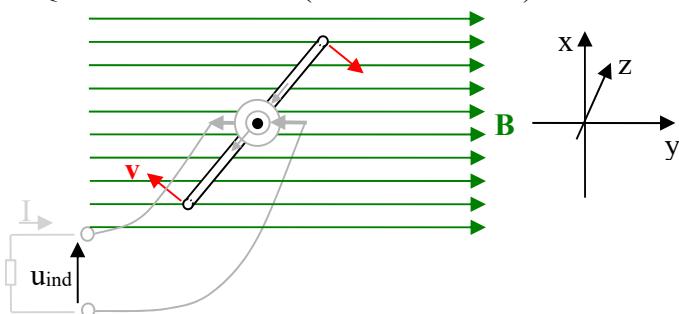
Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese konkrete Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung  $u_{\text{ind}}$ ?

Hinweis: Da der Betrag  $|v(r)|$  von  $r$  abhängt, ist für jedes „dr“ zu berechnen und zu integrieren.

**Aufgabe 6.5**

In einem konstanten Magnetfeld rotiert eine dünne Spule von  $w$  Windungen. Die induzierte Spannung wird über Schleifringe abgenommen (Abb. 6.16, die grauen Pfeile zeigen die Rechte-Hand-Regel). Die  $w$  Leiterschleifen zeigen nach hinten (z-Richtung, Länge  $l_z$ ) und sind im Querschnitt zu sehen (Durchmesser  $2 r_s$ ).

**Abb. 6.16: Dünne Spule rotiert im Magnetfeld (Querschnitt)**

Frage 1: Welche Standpunkte sind für diese Anordnung möglich?

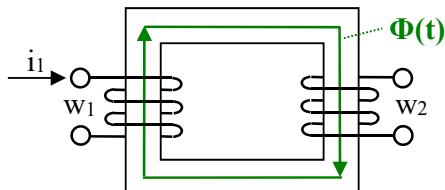
Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung  $u_{\text{ind}}$  jeweils für diese Standpunkte?

Hinweis: Nur die senkrecht zu  $\mathbf{B}$  stehende Komponente von  $v$  liefert einen Beitrag. Kräfte, die senkrecht zum Leiter wirken, können nicht zur induzierten Spannung beitragen. Nur die senkrechte Komponente der Fläche der Spule ergibt den Fluss, der durch die Spule fließt.

**Aufgabe 6.6**

In einem Eisenkreis erzeugt  $i_1$  (Wechselstrom) einen zeitveränderlichen magnetischen Fluss (Abb. 6.17). Dieser induziert sowohl in  $w_1$  als auch in  $w_2$  Spannungen. Gegeben sind folgende Werte und Parameter:

$$i_1 = (1 \text{ A}) \sin(2\pi 50 \text{ Hz} \cdot t), w_1 = 10, w_2 = 100, l_{\text{Fe}} = 20 \text{ cm}, A = 1 \text{ cm}^2, \mu_r = 5000 .$$



**Abb. 6.17: Spule in einem zeitveränderlichen Magnetfeld**

Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung  $u_{\text{ind}}$  an  $w_2$  (Richtung und Größe)?

Hinweis: Siehe Aufgabe 6.1. Alle Flüsse außerhalb des Eisenkerns werden vernachlässigt.

### Aufgabe 6.7 Zusatzaufgabe

Warum sind Ruhe- **und** Bewegungsinduktion erforderlich? Erläutern Sie in Auswertung von Aufgabe 6.4 bis Aufgabe 6.6!

### Aufgabe 6.8

In einem zeitveränderlichen magnetischen Störfluss  $B = 0,002 \text{ Vs/m}^2 \sin(2\pi 50 \text{ Hz } t)$  befinden sich über die Länge  $l=10 \text{ m}$  eine parallele Zweidrahtleitung (Abstand  $d=1 \text{ mm}$ ), eine verdrillte Zweidrahtleitung (Abstand  $d$ , Länge einer Verdrillung 3 cm) und ein Koaxialkabel (Durchmesser  $2d$ ).  $B$  entspricht ca. einer direkt daneben liegenden Energieleitung mit 10 A.

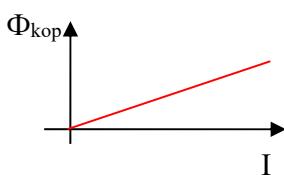
Frage: Welche Störspannungen werden bei ungünstigster Orientierung induziert?

Hinweis: Von der verdrillten Zweidrahtleitung befinden sich im ungünstigsten Fall eine ungerade Zahl Verdrillungen im Bereich des Feldes. Das Koaxialkabel kann in viele Leiterschleifen als Kreissegmente da gedacht werden, deren Spannungen „parallel“ geschaltet sind. Die Dicken der Leiter werden vernachlässigt.

## 6.2 Koppelfluss, Strom und Spannung an der Induktivität (Spule)

### 6.2.1 Zusammenhang zwischen Koppelfluss, Spannung und Strom

Der Koppelfluss ist der Fluss einschließlich seiner Verkopplung mit den entsprechenden Windungen. Bei 100 % Kopplung ist der Fluss mit allen  $w$  Windungen vollständig verkoppelt, d.h., es gilt  $\Phi_{\text{kop}} = w \Phi$ . Aus Messungen des Koppelflusses und des Stromes an den Klemmen einer Spule ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 6.18).



**Abb. 6.18: Beispiel einer Messung von Koppelfluss und Strom**

Nur ein Teil der technisch verwendeten Materialien ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen Koppelfluss und Strom, d.h.  $\Phi_{\text{kop}} \sim I$  oder als Geradengleichung:  $\Phi_{\text{kop}} = L \cdot I$  mit dem Proportionalitätsfaktor  $L$ . Der Proportionalitätsfaktor stellt die Induktivität dar, mit der diese Anordnung einer Stromänderung entgegenwirkt.

## Definition der Induktivität

$$L = \frac{\Phi_{\text{kop}}}{I} \quad ^{70} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } \Phi_{\text{kop}} = L \cdot I \quad (6.19)$$

**Praxistipp:** Wie C wird die Induktivität aus einem statischen Zusammenhang definiert.

Bei nichtlinearem Zusammenhang muss entweder die Funktion  $\Phi_{\text{kop}} = \Phi_{\text{kop}}(I)$  oder  $L = L(I)$  bzw.  $L = L(\Phi_{\text{kop}})$  gefunden werden (je nachdem, was physikalisch sinnvoller ist). Das führt bei ferromagnetischen Materialien zur Hysteresekurve (Weiterführendes siehe Abschnitt 6.2.2, vergleiche (Lun91 S. 218,219)).

**Praxistipp:** In der Praxis wird fast immer der lineare Bereich der Hysteresekurve genutzt.

Auch hier kann eine Bemessungsgleichung für die Induktivität angegeben werden.

## Bemessungsgleichung der Induktivität

$$L = \frac{w^2}{R_m} \quad \text{mit } R_m \text{ nach (6.8)} \quad \Phi_{\text{kop}} = w\Phi = \frac{w\Theta}{R_m} = \frac{w^2}{R_m} I \quad (6.20)$$

Ändert sich der Strom an den Klemmen (Zunahme oder Abnahme), muss sich die Spannung entsprechend der Selbstinduktion einstellen. Wird für  $u(t) = w \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_{\text{kop}}}{dt}$  der Koppelfluss durch die Beziehung  $\Phi_{\text{kop}} = L I$  ersetzt, ergibt sich der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Klemmen.

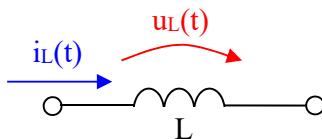


Abb. 6.19 Strom und Spannung an den Klemmen der Induktivität

## Strom und Spannung an der Induktivität

$$u_L(t) = \frac{d(L i_L)}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{Letzteres für } L = \text{const} \quad (6.21)$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz (4.9) zeigt deutliche Ähnlichkeit, aber bei der Induktivität ist zusätzlich eine Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen.

**Praxistipp:** Ist  $L$  nichtlinear,  $L = L(u)$  oder  $L = L(i)$ , dann hängt es durch  $u$  oder  $i$  auch von der Zeit ab. Die Differentiation muss in diesem Fall nach der Produktenregel erfolgen. Das ist z.B. bei speziellen Anwendungen mit Ferromagneten notwendig.

Oft wird auch die Umkehrung benötigt:

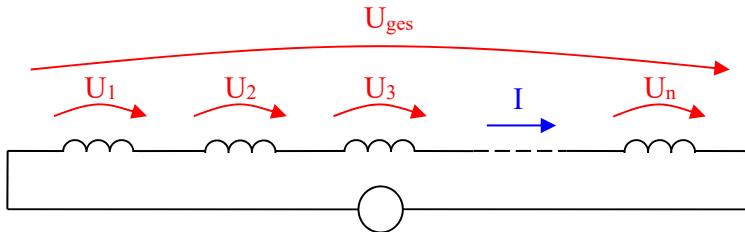
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(t=0) . \quad (6.22)$$

<sup>70</sup> Die Maßeinheit Vs/A wird nach Henry mit H bezeichnet.

Die Gleichungen ( 6.21 ) bzw. ( 6.22 ) legen das Verbraucherpfeilsystem zugrunde, d.h., bei Stromanstieg ergibt sich eine positive und bei Stromabnahme eine negative Spannung.

Auch bei Induktivitäten gelten Bilanzgleichungen entsprechend der Kirchhoff'schen Sätze. Die Ströme erfüllen zu jedem Zeitpunkt den Knotenpunktsatz und die Spannungen den Maschensatz.

**Praxistipp:** **Achtung!** Das Folgende gilt bei rein elektrischer Zusammenschaltung, es darf keine zusätzliche magnetische Verkopplung vorliegen! D.h., mehrere Spulen sind so anzurorden, dass die Magnetfeldlinien nicht wechselseitig durch die Windungen laufen.



**Abb. 6.20: Reihenschaltung von Induktivitäten**

**Praxistipp:** Derselbe Strom kann als Test auf eine reine Reihenschaltung genutzt werden.

Für **denselben Stromanstieg** kann mit dem Maschensatz ( 4.15 ) für lineare Bauelemente (es muss ( 6.21 ) mit  $L = \text{const}$  gelten) geschrieben werden<sup>71</sup>:

$$\begin{aligned} u_{\text{ges}} &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad | : di/dt \\ L_{\text{ges}} &= L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \end{aligned} \quad ( 6.23 )$$

und ferner  $\frac{di}{dt} = \frac{u_1}{L_1} = \frac{u_2}{L_2} = \frac{u_3}{L_3} = \dots = \frac{u_n}{L_n} = \frac{u_{\text{ges}}}{L_{\text{ges}}} .$  ( 6.24 )

Aus ( 6.23 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung:

### Reihenschaltung von Induktivitäten

$$L_{\text{ges}} = \sum_{\nu} L_{\nu} . \quad ( 6.25 )$$

**Praxistipp:** Bei Reihenschaltung addieren sich die Induktivitäten.

Aus ( 6.24 ) kann die Aufteilung der Spannung zu jedem Zeitpunkt bei Reihenschaltung linearer Bauelemente für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

### Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

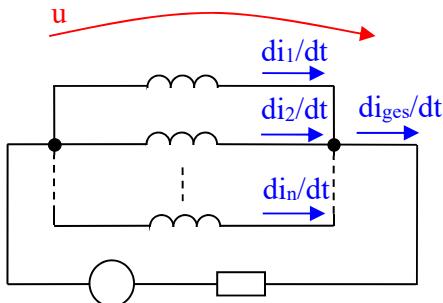
$$\frac{u_1}{u_{\text{ges}}} = \frac{L_1}{L_{\text{ges}}} \quad ( 6.26 )$$

<sup>71</sup> Eine Darstellung über  $\Phi_{\text{kop}} = L I$  (also statisch) ist genauso möglich, aber hier umständlicher und ebenfalls nur für lineare Bauelemente gültig.

**Praxistipp:** Die Spannungen teilen sich wie das jeweilige Verhältnis der Induktivitäten auf.  
In ( 6.26 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $u_1$  zu  $u_{\text{ges}}$  gezeigt.

Bei einer Parallelschaltung Abb. 6.21 liegt an allen Induktivitäten **dieselbe Spannung**.

**Praxistipp:** Dieselbe Spannung kann als Test auf eine Parallelschaltung genutzt werden.



**Abb. 6.21: Parallelschaltung von Induktivitäten**

Für dieselbe Spannung kann bei linearen Bauelementen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{di_{\text{ges}}}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} + \dots + \frac{di_n}{dt} \quad | :u \\ \frac{1}{L_{\text{ges}}} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \end{aligned} \quad ( 6.27 )$$

$$\text{und ferner } u = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_3 \frac{di_3}{dt} = \dots = L_n \frac{di_n}{dt} = L_{\text{ges}} \frac{di_{\text{ges}}}{dt}. \quad ( 6.28 )$$

Aus ( 6.27 ) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Induktivitäten:

### Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_v \frac{1}{L_v} . \quad ( 6.29 )$$

**Praxistipp:** Bei Parallelschaltung werden die Kehrwerte der Induktivitäten addiert.

Aus ( 6.28 ) kann die Aufteilung der Stromansteige und wegen der linearen Bauelemente auch der Ströme zu jedem Zeitpunkt für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

### Aufteilung bei Parallelschaltung

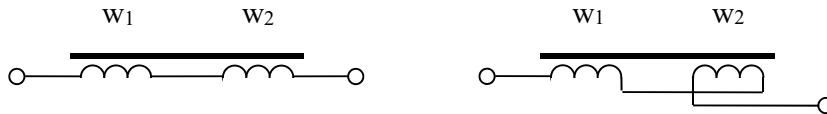
$$\frac{i_1}{i_{\text{ges}}} = \frac{L_{\text{ges}}}{L_1} \quad ( 6.30 )$$

In ( 6.30 ) wird als Beispiel das Verhältnis von  $i_1$  zu  $i_{\text{ges}}$  gezeigt.

**Praxistipp:** Die Ströme teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Induktivitäten auf.

Bei nichtlinearen Bauelementen können keine einfachen Beziehungen angegeben werden, es müssen z.B. die Kennlinien entsprechend **derselben Spannung** (bzw. sogar  $\Phi_{\text{kop}} = \int u dt$ ) oder **dieselben Stromes** (bzw. sogar  $\Theta = i w$ ) addiert werden.

Wesentlich komplexer werden die Verhältnisse, wenn zusätzlich eine magnetische Verkopplung vorliegt. Hier sollen nur zwei wichtige Beispiele einer Kopplung von 100 % untersucht werden.



**Abb. 6.22: Zwei 100 % verkoppelte Spulen in Reihenschaltung**

In Abb. 6.22 sind die Wicklungen mit gleichem und entgegengesetztem Wicklungssinn in Reihe geschaltet. Bei 100 % Verkopplung verhalten sich diese wie *eine* Wicklung.

$$L_{\text{ges}} = \frac{(w_1 \pm w_2)^2}{R_m} = \left( \frac{w_1}{\sqrt{R_m}} \pm \frac{w_2}{\sqrt{R_m}} \right)^2 = (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2 \quad (6.31)$$

**Praxistipp:** Die Windungszahlen addieren sich bei gleichem und subtrahieren sich bei entgegengesetztem Wicklungssinn. Das kann praktisch als Hilfe dienen, um bei Spulen oder Transformatoren allein durch *Hinzufügen* von weiteren Windungen die Wicklungen anzupassen. Abwickeln ist dagegen normalerweise nicht zu empfehlen.

## 6.2.2 Anmerkungen zu magnetischen Materialien\*

Wird ein Material in ein Magnetfeld eingebracht, verändert sich das magnetische Feld. Bei gleichbleibender magnetischer Urspannung  $\Theta$  vergrößert oder verkleinert sich dabei der magnetische Fluss. Laut  $\Phi = \Theta/R_m$  muss demzufolge der magnetische Widerstand kleiner oder größer werden. (Nach  $L = w^2/R_m$  verhält sich eine Induktivität entsprechend.)

Der Zusammenhang  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$  (siehe auch (6.6), mit der relativen Permeabilitätskonstanten  $\mu_r$  bzw. der magnetischen Suszeptibilität  $\kappa = \mu_r - 1$ ) wird zu

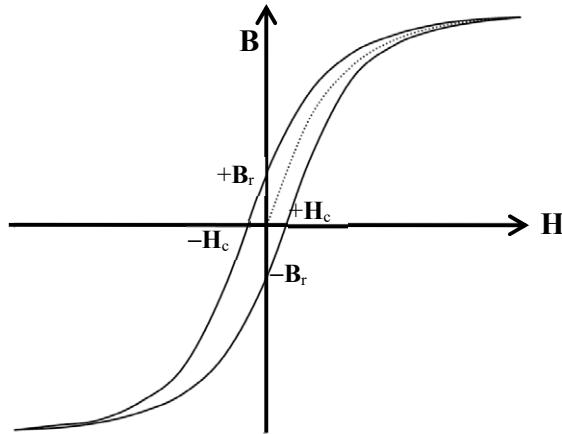
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 (\mu_r - 1) \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \kappa \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Die Magnetisierung  $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$  ergibt sich durch die Wirkung des magnetischen Feldes auf die Atome bzw. Moleküle. Einerseits werden dadurch **atomare bzw. molekulare Ringströme** in den Atomen bzw. Molekülen induziert und somit entstehen magnetische Momente, die nach der Lenz'schen Regel dem magnetischen Feld entgegenwirken – **Diamagnetismus**.

Andererseits können **vorhandene magnetische Momente** (des Spin- sowie Bahndrehimpulses) durch das Magnetfeld im statistischen Mittel (also nicht permanent) ausgerichtet werden und verstärken das magnetische Feld – **Paramagnetismus**. Sind die magnetischen **Momente nicht unabhängig** voneinander, richten sich diese parallel zueinander aus und bilden sogenannte **Weiss'sche Bezirke**. Diese sind im Normalfall statistisch verteilt – **Ferromagnetismus**. Die Weiss'schen Bezirke werden durch ein Magnetfeld ausgerichtet und behalten diese Ausrichtung (unterhalb der Curie-Temperatur) auch nach Wegfall des Feldes bei. Eine andere Möglichkeit entsteht bei zwei ungleichen magnetischen Bezirken, die sich antiparallel ausrichten – **Ferrimagnetismus**. Ein ähnliches Verhalten, bei dem aber mit steigender Temperatur die antiparallele Ausrichtung wegfällt, ergibt eine weitere Variante – **Antiferromagnetismus**.

Bei ferromagnetischen Materialien erfolgt die Ausrichtung der Weiss'schen Bezirke in einem erstmalig zunehmenden Magnetfeld, bis alle Bezirke ausgerichtet sind. Danach tritt eine Sättigung ein und bei weiter steigendem Feld kann der Fluss nur noch wie in Luft zunehmen (Neukurve in Abb. 6.23 punktiert). Bei einer Verringerung des Feldes werden zuerst  $+B_r$  (Remanenz) und dann  $-H_c$  (Koerzitivfeldstärke) durchlaufen sowie danach die negative Sättigung erreicht. Wird das Feld wieder erhöht, werden zuerst  $-B_r$  und dann  $+H_c$  durchlaufen sowie danach die positive Sättigung erreicht. Die Remanenz ist der Fluss, eines Permanentmagneten. Der Flächeninhalt der Hysteresekurve zeigt die Ummagnetisierungsverluste.

**Praxistipp:** Bei „Weichmagneten“ ist die Fläche fast null und die Kurven fallen zusammen.



**Abb. 6.23: Hysteresekurve mit Neukurve (schematisch)**

Material	$\mu_r$
diamagnetisch	$\mu_r < 1$
Kupfer	$1 - 6,4 \cdot 10^{-6}$
Wasserstoff	$1 - 2,1 \cdot 10^{-9}$
Vakuum	1
paramagnetisch	$\mu_r > 1$
Luft	$1 + 0,4 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$1 + 2,2 \cdot 10^{-5}$
Platin	$1 + 2,6 \cdot 10^{-4}$
ferromagnetisch	$\mu_r \gg 1$
Kobalt	80...200
Eisen	300...10 000
Ferrite	4...15 000
Mumetall (NiFe)	50 000...140 000

**Tabelle 6.1: Beispiele für einige magnetische Materialien**

Eine detaillierte Untersuchung erfordert eine Behandlung mit der Quantenmechanik, da sich die Vorgänge in atomaren Größenordnungen abspielen. Vertiefende Darlegungen sind z.B. in (Reb99 S. 614 ff) zu finden.

**Praxistipp:** Die meisten verwendeten Materialien haben eine nichtlineare Kennlinie (Hysterese). Wird insbesondere bei Weichmagneten die Kurve nur mit ausreichendem Abstand zur Sättigung genutzt, ist sie in guter Näherung linear.

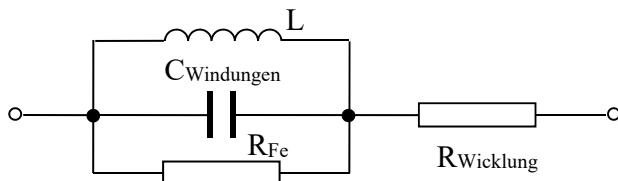
Aufgabe 6.14 verdeutlicht die Verhältnisse an einer nichtlinearen Induktivität.

### 6.2.3 Bauformen und Kenngrößen

Induktivitäten müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Induktivitätswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite ist die Strombelastbarkeit der Wicklungen bezüglich Wärmeabfuhr und bei allen Spulen mit Eisenkernen unbedingt auch der Sättigung. Es darf nur der lineare Bereich unterhalb der Sättigung genutzt werden<sup>72</sup>. Bei Hochspannungseinsatz spielt die Isolation des Wickeldrahtes und die zwischen den Lagen eine bedeutende Rolle. Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität (insbesondere bei Eisen die Sprungtemperatur),
- Baugröße und -form sowie notwendiger Abstand zu anderen magnetischen Materialien oder eigene Streufelder,
- Wicklungswiderstand oder Kapazität zwischen den Windungen sowie die Eisenverluste,
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen.

Für technische („reale“) Induktivitäten (Spulen) kann eine einfache Ersatzschaltung angegeben werden (siehe Abb. 6.24).



**Abb. 6.24: Einfache Ersatzschaltung für einen Spule**

Dabei stellt der „Eisenwiderstand“ einen elektrischen **Ersatzwiderstand** für die Verluste im Eisen dar (durch Wirbelstromverluste und Ummagnetisierungsverluste im Eisen). Er ist somit nur aus dem Gesamtverhalten ermittelbar.

**Praxistipp:** Leider sind die parasitären Elemente einer realen Spule meistens nicht zu vernachlässigen. Deshalb findet man bei Spulen in Schaltungsunterlagen oft keine konkreten Angaben. (Es sind die Originalteile zu verwenden.)

Es gibt eine Normung für die unterschiedlichsten Kerne (von Trafoblechen für 50 Hz bis zu verschiedenen Ferriten für Hochfrequenz) und für Wicklungsmaterial (von verschiedenen Stärken Kupferlackdraht für unterschiedliche Strombelastung bis zu Litzen für hohe Frequenzen).

**Praxistipp:** Es gibt nicht wie bei Widerständen und Kondensatoren komplett genormte Bauelementereihen, sondern nur konkrete anwendungsbezogene Elemente.

### 6.2.4 Messung der Induktivität

Bei der Messung der Induktivität müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Messung der statischen Induktivität entsprechend ( 6.19 ). Das ist bei nichtlinearen Induktivitäten zur Kennlinienermittlung erforderlich, wie sie z.B. zur Simulation benötigt wird.
2. Messung der dynamischen Induktivität entsprechend ( 6.21 ).

<sup>72</sup> Oberhalb der Sättigung geht  $\mu$  gegen  $\mu_0$  von Luft und  $L$  wird deutlich kleiner (fast wie  $L$  einer Luftspule).

Die statische Induktivität muss durch Messung von  $\Phi_{\text{kop}} = \int u_L dt$  und dem Strom erfolgen. Daraus ergeben sich  $\Phi_{\text{kop}} = \Phi_{\text{kop}}(I)$  oder  $L = L(I)$  und über  $\Theta = Iw$  auch die Kennlinie für den magnetischen Widerstand  $\Phi_{\text{kop}} = f(\Theta)$  sowie über Querschnittsflächen und Längen die der Permeabilität  $B = f(H)$ . Zur Integration kann die Messkurve dem PC übermittelt und dort mit entsprechenden Auswertungsprogrammen bearbeitet werden. (Es ist auch eine grafische Integration oder die Nutzung einer entsprechenden elektronischen Schaltung möglich.)

Die dynamische Induktivität beinhaltet einmal die wirksame Größe bei Wechselstrom einer bestimmten Frequenz (für viele Materialien ist  $\mu$  frequenzabhängig, insbesondere bei Eisen) und zum anderen bei nichtlinearen Induktivitäten nur die Wechselstromaussteuerung um den Gleichstromarbeitspunkt. Beides ist z.B. für Weicheisenkerne und eine Aussteuerung, die nicht in den Sättigungsbereich reicht, eine brauchbare Näherung.

Mit Multimetern können dynamische Induktivitäten durch eine Strom-Spannungs-Messung mit einer sinusförmigen Wechselspannung ermittelt werden. Ein zusätzliches Oszilloskop sollte dabei den Aussteuerbereich kontrollieren.

Wird auch der Eisenwiderstand benötigt, muss die Phasenverschiebung zwischen  $U$  und  $I$  ebenfalls bestimmt werden. Sind Wicklungskapazitäten zu berücksichtigen, muss bei zwei Frequenzen gemessen werden (bei noch mehr Frequenzen, wenn auch noch eine Frequenzabhängigkeit der Permeabilität vorliegt).

Weiterhin kann der Wicklungswiderstand durch eine Widerstandsmessung bei Gleichstrom ermittelt werden.

**Praxistipp:** Die Messschaltung entspricht der bei Widerständen (Abschnitt 4.2.3) mit einer Wechselspannung ( $U_{\text{eff}}$ ,  $I_{\text{eff}}$ ). Ein zusätzliches Wattmeter ( $P_w = U_{\text{eff}}I_{\text{eff}}\cos\phi$ ) gibt den  $\cos\phi$ .

**Induktivitätsschaltungen** arbeiten nach einem Vergleichsprinzip und realisieren oft verschiedene wählbare Messbedingungen.

## 6.2.5 Übungsaufgaben zur Induktivität

### Aufgabe 6.9

Gegeben ist der Stromverlauf an einer Induktivität in Abb. 6.25.

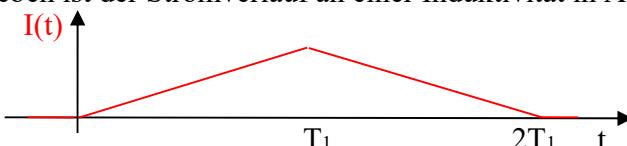


Abb. 6.25: Zeitverlauf des Stromes an einer Induktivität

Frage: Wie sieht der Verlauf der Spannung aus? (In Abbildung einzeichnen!)

### Aufgabe 6.10

Zur Herstellung einer Induktivität wurden auf den gewählten Spulenkern 10 Windungen gewickelt und danach eine Induktivität von  $5 \mu\text{H}$  gemessen.

Frage: Wann reicht so ein Verfahren, um die notwendige Windungszahl zu ermitteln und wie viele Windungen werden in diesem Fall für 1 mH benötigt?

### Aufgabe 6.11

Berechnen Sie den Ein- und den Ausschaltvorgang für den Versuch in Abschnitt 6.2.6!

Hinweis: Vereinfachen Sie die Schaltung für den Einschaltvorgang so, dass nur eine konstante Quelle, der Widerstand und die Induktivität einen Stromkreis bilden. Für den Ausschaltvorgang sollen nur der Widerstand und die Induktivität einen Stromkreis bilden. Berechnen Sie beide Vorgänge einzeln. Stellen Sie jeweils den Maschensatz auf und setzen die Strom-Spannungs-Beziehung einmal für  $u_R$  und dann noch einmal für  $i_L$  ein. Für die DGL 1. Ordnung kann die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen gelöst werden. Die inhomogene Lösung ist  $i_L(t \rightarrow \infty)$  und die Anfangsbedingung ist  $i_L(t=0)$ , d.h. 0 bzw.  $\hat{U}/R$ . Der Beginn wird für beide Fälle mit  $t=0$  gewählt.

Darstellung: Spannung und Strom in einem Diagramm!

Zusatzfrage: Wie kann  $\tau$  aus einer gemessenen Kurve, die dieser Rechnung entspricht, bestimmt werden?

### Aufgabe 6.12

Eine Leuchtstofflampe hat in gezündetem Zustand ca. 30 V. Mit einer Induktivität soll der Strom auf 0,4 A begrenzt werden (entspricht 12 W).

Frage: Wie sieht die Schaltung aus und welche Größe hat L?

Hinweis:  $i = \sqrt{2} 0,4 \text{ A} \sin(2\pi 50 \text{ Hz } t)$ ,  $u = \sqrt{2} (230-30 \text{ V}) \cos(2\pi 50 \text{ Hz } t)$  (d.h.  $90^\circ$  vor)

### Aufgabe 6.13

Für eine Spule mit einem sehr kleinen Wicklungswiderstand soll der Eisenwiderstand ermittelt werden. Bei 200 V wird ein Strom von 0,4 A gemessen und der Strom läuft  $87^\circ$  nach.

Frage: Wie groß sind Induktivität und Eisenwiderstand?

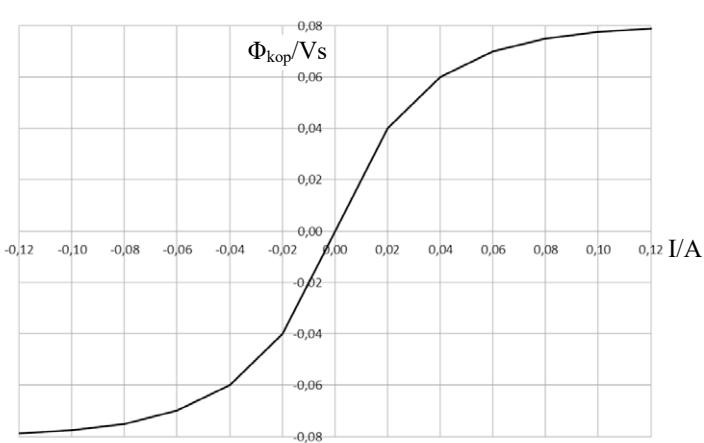
Hinweis: Mit der speziellen Form der Additionstheoreme

$a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t = (a^2 + b^2)^{1/2} \cos(\omega t - \varphi)$  bei  $\tan \varphi = b/a$  bzw.  $\cos \varphi = a/(a^2 + b^2)^{1/2}$  ergeben a, b und  $(a^2 + b^2)^{1/2}$  ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel  $\varphi$ . Damit kann der Strom in einen Anteil mit  $-90^\circ$  (d.h. Strom durch L) und einen mit  $0^\circ$  (d.h. Strom durch R) Verschiebung zu  $u(t)$  aufgeteilt werden (Thaleskreis).

### Aufgabe 6.14

Die Hysteresekurve eines Trafokerns wurde gemessen (siehe Tabelle und Skizze). Für sehr gutes Weicheisen fallen hierbei der aufsteigender und absteigender Ast in der Darstellung zusammen.

$\Phi_{\text{kop}}/\text{Vs}$	I/A
$-7,88 \cdot 10^{-02}$	$-1,20 \cdot 10^{-01}$
$-7,75 \cdot 10^{-02}$	$-1,00 \cdot 10^{-01}$
$-7,50 \cdot 10^{-02}$	$-8,00 \cdot 10^{-02}$
$-7,00 \cdot 10^{-02}$	$-6,00 \cdot 10^{-02}$
$-6,00 \cdot 10^{-02}$	$-4,00 \cdot 10^{-02}$
$-4,00 \cdot 10^{-02}$	$-2,00 \cdot 10^{-02}$
$0,00 \cdot 10^{+00}$	$0,00 \cdot 10^{+00}$
$4,00 \cdot 10^{-02}$	$2,00 \cdot 10^{-02}$
$6,00 \cdot 10^{-02}$	$4,00 \cdot 10^{-02}$
$7,00 \cdot 10^{-02}$	$6,00 \cdot 10^{-02}$
$7,50 \cdot 10^{-02}$	$8,00 \cdot 10^{-02}$
$7,75 \cdot 10^{-02}$	$1,00 \cdot 10^{-01}$
$7,88 \cdot 10^{-02}$	$1,20 \cdot 10^{-01}$



Frage 1: Wie groß ist im linearen Bereich  $-0,02 \text{ A} < I < 0,02 \text{ A}$  die Induktivität?

Frage 2: Wie groß ist im Sättigungsbereich die dynamische Induktivität (nutzen Sie die beiden obersten Messpunkte)?

Hinweis: Aus ( 6.21 ) folgt  $d\Phi_{\text{kop}}/dt = d(L i)/dt$  und mit Differenzen  $\Phi_{\text{kop}} = L(I) \Delta I$ .

Frage 3: Welche Konsequenzen sind daraus abzuleiten?

### 6.2.6 Messung von Zeitverläufen an der Induktivität

Es sollen im Messlabor die Zeitverläufe von Strom und Spannung an einer Spule untersucht werden (Vorschaltgerät einer Hochdrucklampe 300 mH bei 50 Hz).

#### Versuchsaufbau:

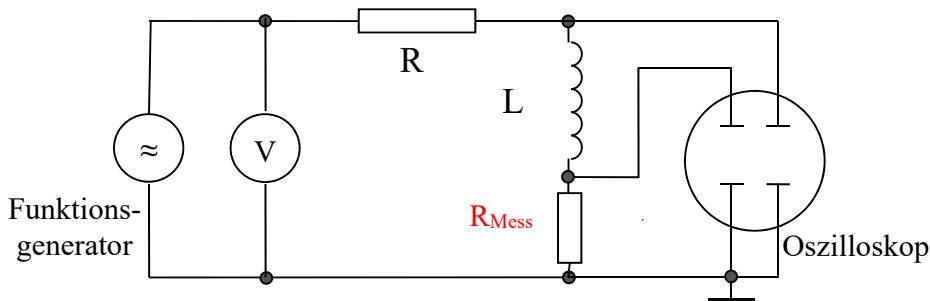


Abb. 6.26: Schaltung des Versuchsaufbaus

**Praxistipp:** Als Messwiderstand ( $R_{\text{Mess}}$ ) zur Strommessung wird ca. 1 % von  $R$  (d.h.  $10 \Omega$ ) eingesetzt. Damit ergibt sich auch nur ein Fehler von ca. 1 %.

Alle Spannungen sind am besten als Spitze-Spitze-Werte vom Oszilloskop abzulesen.

#### Versuchsdurchführung:

Eine Rechteckspannung vom Funktionsgenerator bewirkt einen Stromanstieg (Einschaltvorgang,  $U_{\text{Quelle}}$  wird  $\hat{U}$ ) und Stromabfall (Ausschaltvorgang,  $U_{\text{Quelle}}$  wird 0, d.h. Kurzschluss) der Induktivität über den Widerstand. Auf dem Oszilloskop werden gleichzeitig Strom und Spannung (Zweikanalbetrieb) dargestellt.

Die Kurven können einem PC übergeben und ausgewertet werden. Aus den gemessenen Zeitverläufen sind die Zeitkonstanten zu ermitteln und mit den Bauteilparametern zu vergleichen.

**Praxistipp:** Die Frequenz ist so zu wählen, dass die Vorgänge etwa ihren jeweiligen Endzustand erreichen – Richtwert 300 Hz.

Bei 3. ist eine Sinusspannung einzustellen.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:  
 $U_{\text{ss}} = 5 \text{ V}$  mit  $R = 1 \text{ k}\Omega$  und  $3,3 \text{ k}\Omega$
2. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:  
 $U_{\text{ss}} = 5 \text{ V}$  und  $2,5 \text{ V}$  mit  $R = 1 \text{ k}\Omega$
3. Darstellung der Zeitverläufe bei sinusförmiger Spannung:  
 $U_{\text{ss}} = 5 \text{ V}$  bei  $f = 1 \text{ kHz}$   $R = 1 \text{ k}\Omega$   
Es sind Amplitude und Zeitverschiebung zu untersuchen.

### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass sich der Strom erst langsam aufbaut. Dagegen hat die Spannung sofort die volle Größe und nimmt in gleichem Maße ab. Bzw. der Strom wird abgebaut, während die Spannung sofort die volle Größe in die negative Richtung annimmt und ihr Betrag wiederum in gleichem Maße abnimmt.
2. Je größer der Widerstand (bzw. die Induktivität) ist, desto kürzer (bzw. länger) dauert der Stromanstieg bzw. -abfall. Der Zeitverlauf (die Dauer, die Zeitkonstante) hängt nicht von der Spannung der Quelle ab, sondern nur der Strom bei  $t \rightarrow \infty$ .
3. Bei sinusförmiger Spannung läuft der Strom genau  $\frac{1}{4}$  Periodendauer ( $90^\circ$ ) gegenüber der Spannung an der Induktivität hinterher.
4. Eine mathematische Auswertung erfolgt mit Aufgabe 6.11.
5. Die entscheidende Kenngröße ist die Zeitkonstante  $\tau = L/R$ .
6. Die Induktivität von 300 mH wird bei 300 Hz bis 1000 Hz von diesem Kernmaterial nicht erreicht.

**Praxistipp:** Dass die Induktivität von 300 mH bei 300 Hz bis 1000 Hz nicht erreicht wird, zeigt die Bedeutung der Auswahl des richtigen Kernmaterials.

## 6.3 Energie und Kräfte im magnetischen Feld

### 6.3.1 Beschreibung von Energie und Kräften

Die **Energie** für den Stromanstieg einer Induktivität ergibt sich ebenfalls nach ( 4.24 ) zu:

$$W = \int_0^t u_L(t) i_L(t) dt . \quad (6.32)$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an den Klemmen der Induktivität ( 6.21 ) wird daraus:

$$W = \int_0^{I_L} i_L(t) L di_L = L \frac{I_L^2}{2} \quad (\text{für } L = \text{const} \text{ und mit } \Phi_{\text{kop}} = L I \text{ wird})$$

$$W = \frac{L I_L^2}{2} = \frac{\Phi_{\text{kop}} I_L}{2} = \frac{\Phi_{\text{kop}}^2}{2 L} \quad (6.33)$$

**Praxistipp:** Diese Energie ist in der Induktivität **gespeichert**, wenn sie  $\Phi_{\text{kop}}$  und  $I_L$  erreicht hat.

Wenn die mittlere **Leistung** über Anstieg und Abfall des Stromes berechnet wird, ergibt dies  $\bar{P} = \overline{u_L(t) i_L(t)} = 0$ , d.h., es wird keine Leistung umgesetzt. Es erfolgt nur ein Hin- und Herspeichern von Leistung. Beim Anstieg wird magnetische Energie im Feld der Induktivität gespeichert und beim Abfall wird diese Energie zurückgegeben. (Lediglich der Transport durch die Leitungen und natürlich  $R_L$  führen durch deren Widerstand zu Verlusten.)

**Praxistipp:** Heute wird dieser Effekt für eine kurzzeitige Energiespeicherung insbesondere in der Leistungselektronik, aber auch in Schaltnetzteilen genutzt.

Im magnetischen Feld existieren zwei Erscheinungsformen für **Kraftwirkungen**

1. Kräfte auf **bewegte** Ladungen und
2. Kräfte auf Grenzflächen verschiedener Materialien (insbesondere Eisen – Luft).

Für **Kräfte auf bewegte Punktladungen** ist die Lorentzkraft ( 6.12 ) zu nutzen.

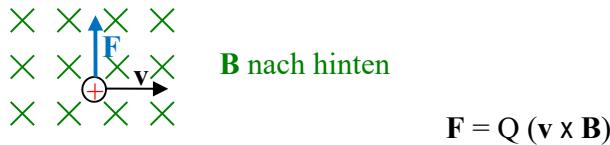


Abb. 6.27: Kraft auf eine positive Punktladung im magnetischen Feld

Wenn die bewegte Ladung ein Strom  $I_2$  ist, wird für  $I_2 = S_2 \cdot A = \rho v_2 \cdot A = (Q/l_{\text{Leiter}})v_2$ . Somit folgt  $Q v_2 = I_2 l_{\text{Leiter}}$  und (siehe Abb. 6.28 links):

$$\mathbf{F} = I_2 l_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}_1 = B_1 I_2 l_{\text{Leiter}} \quad \text{mit Richtung } \mathbf{l}_{\text{Leiter}} = \text{Richtung von } I_2 . \quad (6.34)$$

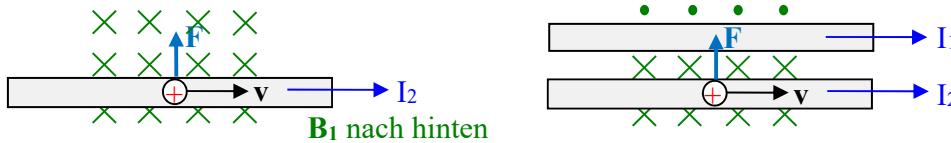


Abb. 6.28: Strom  $I_2$  im Feld  $B_1$  bzw. im Feld des Stromes  $I_1$

Wenn das Feld ferner vom Strom  $I_1$  erzeugt wird (siehe Abb. 6.28 rechts), folgt der Betrag der Kraft mit ( 6.11 )

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} l_{\text{Leiter}} \quad \text{mit } |B_1| = \mu I_1 / 2\pi r . \quad (6.35)$$

Die gleiche Kraft wirkt natürlich auch auf den anderen Leiter. Deshalb ist ( 6.35 ) auch symmetrisch für beide Ströme.

**Praxistipp 1:** Bei Kräften auf eine bewegte Ladung oder einen Strom werden diese wiederum *im ungestörten Feld der anderen bewegten Ladung* (des anderen Stromes) betrachtet. Es werden nicht zuerst die Veränderungen des Feldes berücksichtigt. Das entspricht der Sichtweise und Definition der Felder.

Für Felder besteht das *Superpositionsprinzip*. D.h. Felder mehrerer Ströme addieren sich.

**Praxistipp 2:** Diese Kraft wird vielfältig zur Ablenkung von geladenen Teilchen genutzt (Bildröhren, Teilchenbeschleuniger). Eine Vergrößerung von  $|v|$  ist damit nicht möglich.

Die Kraft auf bewegte Ladungen ist auch die Ursache der Strahlungsgürtel in der Erdatmosphäre (Aufgabe 6.15).

Gleichung ( 6.34 ) ist eine wesentliche Grundlage für elektrische Maschinen.

Auf der Basis von ( 6.35 ) können elektromechanische Messinstrumente gebaut werden, die ein Produkt ( $u \cdot i$ ,  $i^2$ ,  $u^2$ ) benötigen.

**Kräfte auf Grenzflächen** werden günstiger aus der Energieerhaltung bestimmt.

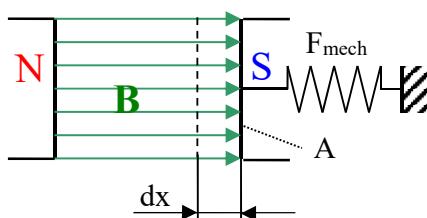


Abb. 6.29: Kräftegleichgewicht: mechanische – magnetische Kraft

Die Kraft des magnetischen Feldes auf den Südpol verkürzt den Abstand der Pole, bis die Federkraft gleich ist. Nun gilt folgende Energiebilanz, wenn  $\Phi$  konstant bleibt (mit ( 6.33 ) für die magnetische Energie, für  $L$  wird ( 6.20 ) und für  $R_m$  ( 6.8 ) eingesetzt):

verringerte magnetische Energie = mechanisch in der Feder gespeicherte Energie

$$\Delta W_{\text{magn}} = \frac{\Phi_{\text{kop}}^2}{2 w^2 \mu_0 A} \left( \frac{1}{\mu_{r\text{Luft}}} - \frac{1}{\mu_{r\text{Fe}}} \right) = F_{\text{mech}} dx .$$

Damit ergibt sich mit  $B = \Phi/A$ ,  $\Phi_{\text{kop}}/w = \Phi$  und  $\mu_{r\text{Fe}} \gg \mu_{r\text{Luft}}$  der Betrag der Kraft auf die Grenzfläche zu:

$$F = \frac{B^2}{2 \mu_0} A = \frac{B H}{2} A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A .$$

( 6.36 )

Im Falle einer Grenzschicht zwischen zwei ähnlichen Materialien muss die Differenz von  $\Delta W_{\text{magn}}$  des vorherigen und des nachherigen Materials belassen werden.

**Praxistipp:** Die **Richtung der Kraft** ist immer so, dass sich die Flussdichtelinien im für den Fluss schlechteren Medium verkürzen.

Diese Kraft ist die Grundlage für eine breite technische Nutzung (vom Relais bis zum Kraftmagneten oder auch für spezielle Motoren).

### 6.3.2 Anwendungen zu Kräften im Magnetfeld

Ein **elektrodynamisches Messinstrument** (Leistungsmesser) besteht aus zwei Spulen ohne Eisen.

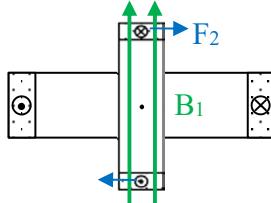


Abb. 6.30: Elektrodynamisches Messinstrument (Schnittdarstellung)

Die innere Spule  $w_2$  ist drehbar. Ihre stromführenden Leiter befinden sich im Feld der äußeren Spule  $w_1$ . Nach ( 6.34 ) bzw. ( 6.35 ) ergibt sich eine Kraftwirkung, die zu einem Zeigerausschlag genutzt wird<sup>73</sup>. Dieser erfolgt mit dem Produkt von  $I_1 \cdot I_2$  (mit  $I_1 = U_1/R_{w1}$ ).

Ein **Dreheiseninstrument** benutzt ein bewegliches Weicheisenteil und eine Spule  $w$ . Es wird die Kraft auf Grenzflächen ( 6.36 ) für einen Zeigerausschlag genutzt.

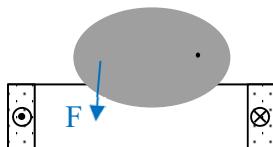


Abb. 6.31: Dreheiseninstrument (schematisch)

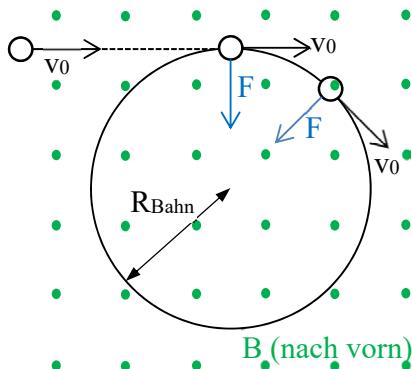
<sup>73</sup> Die mechanische Trägheit bewirkt die Mittelwertbildung über die Zeit (Rückstellfeder, Zeiger weggelassen).

Das Magnetfeld zieht das Weicheisenteil in die Spule. Die Kraft ist mit  $B^2$  proportional zu  $I^2$  bzw.  $(U/R_w)^2$  (infolge  $B = \Phi/A$  und  $\Phi = \Theta/R_m = Iw/R_m$ ). Damit kann der Effektivwert von  $U$  bzw.  $I$  gemessen werden<sup>73</sup>. (Es gibt verschiedene aufgebauten Instrumente.) Weitere Anwendungen werden in den folgenden Übungsaufgaben diskutiert.

### 6.3.3 Übungsaufgaben zu Kräften im Magnetfeld

#### Aufgabe 6.15

Berechnung der Bahn einer bewegten Punktladung (Proton) im Magnetfeld der Erde (Strahlungsgürtel).



$$\begin{aligned} m_{\text{Proton}} &= 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g} \\ Q_{\text{Proton}} &= +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \\ v_0 &= 200.000 \text{ km/s entspricht ca. } 100 \text{ MeV} \\ B_{\text{Erde}} &= 48 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/m}^2 \end{aligned}$$

Für den Hinweis:

$$Q_{\text{Prot}} v_0 B_{\text{Erde}} = m_{\text{Prot}} \frac{v_0^2}{R} \quad (\text{alles senkrecht aufeinander})$$

**Abb. 6.32: Bahn eines Protons im Strahlengürtel der Erde**

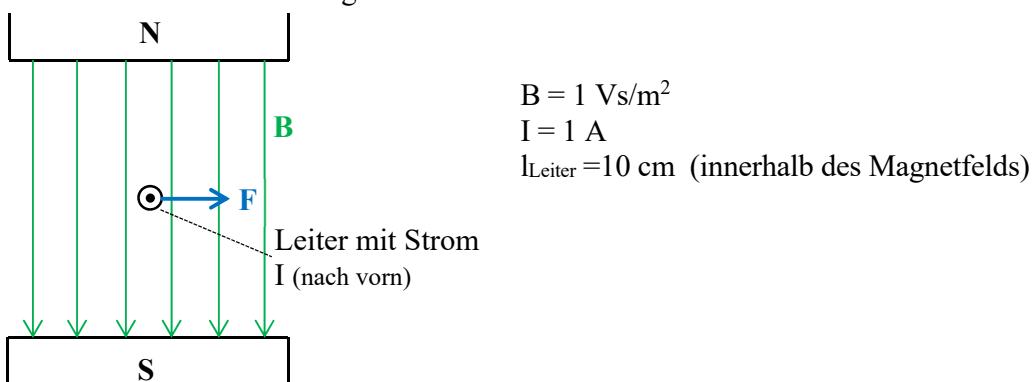
Frage: Wie groß ist der Radius der Kreisbahn?

Hinweis: Der Radius folgt aus dem Kräftegleichgewicht einer Kreisbahn:  
Lorentzkraft (= Beschleunigungskraft zum Zentrum) = Fliehkraft.

#### Aufgabe 6.16

Berechnung der Kraft eines Leiterstabes (z.B. vom Anker eines Motors) im Feld eines Permanentmagneten (z.B. Stator eines Motors).

Hinweis: Alles steht senkrecht aufeinander. Daher können  $Qv = \rho Vv = \rho vV$  in der Lorentzkraft durch Stromdichte  $\cdot$  Länge  $\cdot$  Fläche sowie  $S \cdot A$  durch  $I$  ersetzen werden.



**Abb. 6.33: Leiterstab im Magnetfeld**

Frage: Wie groß ist die Kraft, die auf diesen einen Stab (Leiter) wirkt?

**Aufgabe 6.17**

Kraft auf einen Magnetpol in der Anordnung von Abb. 6.33 (Polfläche nach hinten  $1 \text{ cm}^2$  und  $\mu_{\text{Luft}} \text{ ca. } \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$  sowie  $1/\mu_{\text{Fe}}$  ca. null).

Frage: Wie groß ist die Kraft auf die Grenzfläche Luft – Pol?

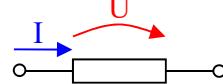
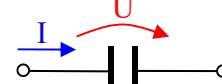
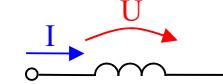
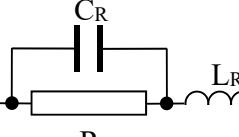
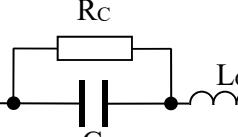
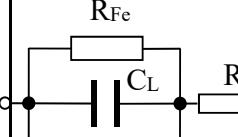
# 7 Zusammenfassung und Gegenüberstellung

## 7.1 Gegenüberstellung der Grundgrößen

Bezeichnung	Vorgänge im elektrischen Leiter (Strömungsfeld)	Vorgänge im elektrischen Nichtleiter (elektrostatisches Feld)	Vorgänge im Magnetfeld
<b>Ladung</b> Naturgröße	$Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt$	$Q = N \cdot q_0 = \int_V \rho dV$ $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ $[Q] = C = \text{As}$	
<b>Fluss- bzw. Stromgröße</b>	$I$ $I = dQ/dt$ $I = \int_{\text{Fläche}} S \cdot dA$ $[I] = A$	$\Psi$ $\Psi_{\text{ges}} = Q$ $\Psi = \int_{\text{Fläche}} D \cdot dA$ $[\Psi] = \text{As}$	$\Phi$ $\Phi_{\text{kop}} = W \Phi$ $\Phi = \int_{\text{Fläche}} B \cdot dA$ $[\Phi] = \text{Wb} = \text{Vs}$
Knotenpunkt-satz	$\oint S \cdot dA = 0$	$\oint D \cdot dA = Q_{\text{innerhalb}}$	$\oint B \cdot dA = 0$
<b>Flussdichte bzw. Stromdichte</b>	$S$ $ S  = dI/dA_{\perp}$ $S = v_d \rho$ $[S] = A/m^2$	$D$ $ D  = d\Psi/dA_{\perp}$ $[D] = \text{As}/m^2$	$B$ $ B  = d\Phi/dA_{\perp}$ $[B] = T = \text{Vs}/m^2$
<b>Feldstärke</b>	$E = F/Q_p$ $ E  = dU/dl$ $[E] = V/m$	$E = F/Q_p$ $ E  = dU/dl$ $[E] = V/m$	$H$ $ H  = dV_m/dl$ $[H] = A/m$
<b>Spannungs-größe, Urspannung</b>	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_0 = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} E \cdot ds$ $[U] = V$	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_0 = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} E \cdot ds$ $[U] = V$	$V_m$ $\Theta = I_w = \sum I_{\text{umf}}$ $V_m = \int_{\text{Weg}} H \cdot ds$ $[V_m] = A$
Maschensatz	$\oint E \cdot ds = E_0$	$\oint E \cdot ds = E_0$	$\oint H \cdot ds = \Theta = \sum I_{\text{umf}}$ Durchflutungsgesetz
<b>Beziehung Flussdichte und Feldstärke</b>	$S = \kappa E$	$D = \epsilon E$	$B = \mu H$
Materialkonstante	$\kappa = \text{spez. Leitwert}$ , $\rho = \text{spez. Widerstand}$	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

<b>Beziehung Flussgr. und Spannungsggr.</b>	$U = R I$ $I = G U$	$U = (1/C) Q$ $Q = C U$	$V_m = R_m \Phi$ $\Phi = (1/R_m) V_m$
<b>Definition:</b>	$R = U/I$ $[R] = \Omega = V/A$	$C = Q/U$ $[C] = F = A_s/V$	$R_m = V_m/\Phi$ $[R_m] = A/V_s$
<b>Bemessung:</b> homogene Verhältnisse	$R = \frac{1}{\kappa A} = \frac{\rho}{A}$	$C = \frac{\varepsilon A}{d}$	$R_m = \frac{1}{\mu A}$
<b>Bez. Flussgr. mit el. Größe</b>	$(I = G U)$	$Q = C U$	$\Phi_{kop} = w \Phi = L I$
<b>Induktion</b> Def. Induktivität: Bemessung Induktivität:			$u_{ind} = w d\Phi/dt - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$ $L = \Phi_{kop}/I$ $L = w^2/R_m$ $[L] = H = V_s/A$
<b>Energie</b>	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ Verlustenergie $W_{12} = U I t_{12}$ für $u, i = \text{const}$ $[W] = W_s = VAs$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ gespeichert bei $Q, U$ $[W] = W_s = VAs$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{\Phi_{kop} I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi_{kop}^2}{2L}$ gespeichert bei $\Phi_{kop}, I$ $[W] = W_s = VAs$
<b>Leistung</b>	$p(t) = dW/dt = u i$ $P = UI = U^2/R = I^2R$ für $u, i = \text{const}$ $[P] = W = VA$	$p(t) = u i$	$p(t) = u i$
<b>Kräfte auf Ladungen bzw. Strom bzw. zwischen <math>Q</math> bzw. <math>I</math> auf Grenzflächen</b>	nicht direkt	$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}$ $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon r^2}$ Coulomb'sches Gesetz $F = \frac{Q^2}{2A} \left( \frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$ $= \frac{D^2}{2\epsilon_0} A = \frac{DE}{2} A = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} A$	$\mathbf{F} = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ Lorentzkraft $F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r}$ $F = \frac{\Phi^2}{2A} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right)$ $= \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{BH}{2} A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A$

## Für linienhafte Anordnungen:

<b>Knotenpunktsatz</b>	$\sum_{\uparrow} I_v = \sum_{\downarrow} I_{\mu}$	$\sum_{+} Q_v = \sum_{-} Q_{\mu}$	$\sum_{\uparrow} \Phi_v = \sum_{\downarrow} \Phi_{\mu}$
<b>Maschen-</b> <b>satz</b>	$\sum_{\text{O}} U_v = \sum E_{0\mu}$ bzw. 0	$\sum_{\text{O}} U_v = \sum E_{0\mu}$ bzw. 0	$\sum_{\text{O}} V_{m v} = \sum \Theta_{\mu}$
<b>Teilung</b> <b>Fluss</b>	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ Bedingung: $U=\text{const}$	$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$ Bedingung: $U=\text{const}$	$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}}$ Bedingung: $V_m=\text{const}$
<b>Teilung</b> <b>Spannung</b>	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$ Bedingung: $I=\text{const}$	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ Bedingung: $Q=\text{const}$	$\frac{V_{m1}}{V_{m2}} = \frac{R_{m1}}{R_{m2}}$ Bedingung: $\Phi=\text{const}$
<b>Reihenschaltung</b>	$R_{\text{ges}} = \sum_{\nu} R_{\nu}$	$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{C_{\nu}}$	$R_{m\text{ ges}} = \sum_{\nu} R_{m\nu}$ $L_{\text{ges}} = \sum_{\nu} L_{\nu}$
<b>Parallelschaltung</b>	$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{R_{\nu}}$	$C_{\text{ges}} = \sum_{\nu} C_{\nu}$	$\frac{1}{R_{m\text{ ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{R_{m\nu}}$ $\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{L_{\nu}}$
<b>Symbol</b>			
<b>Beziehung an den Klemmen des idealen Bauelementes</b>	$u = i R$ $i = u / R$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$
<b>technisches Bauelement</b> einfache Ersatzschaltung	 $C_R$ Kappenkapazität $L_R$ Wicklungsinduktivität	 $R_C$ Verlustwiderstand des Dielektrikums $L_C$ Wickelinduktivität	 $R_{Fe}$ Verlustwiderstand Eisen $L$ Drahtwiderstand $R_L$ Windungskapazität

**Praxistipp:** Beachte die gleiche Struktur und die „kleinen“ Unterschiede in den drei Spalten.

## 7.2 Erweiterungen zu den theoretischen Grundlagen

In den Abschnitten 2, 4, 5, und 6 wurden die theoretischen Grundlagen dargelegt, wie sie für Anwendungen in der Elektrotechnik und Elektronik benötigt werden. Dazu gehören

- ein grundlegendes Verständnis von Feldern und ihren Eigenschaften,
- Verständnis und Kenntnisse zu Spannungs- bzw. Stromquellen,
- Verständnis und Kenntnisse über die passiven Bauelemente Widerstand, Kapazität und Induktivität,
- Verständnis und Kenntnisse über die Vorgänge in elektrischen Stromkreisen und deren Berechnung und
- Verständnis und Kenntnisse der Messung der betreffenden Größen.

Weiterführende Darstellungen und Untersuchungen sind der Literatur (insbesondere (Lun91)) zu entnehmen.

Die Felder wurden für ein grundlegendes Verständnis nur einzeln und vorwiegend stationär behandelt. Für Vorgänge mit Gleichstrom und niedrige Frequenzen ist das vertretbar. Bei Stromkreisen mit höheren Frequenzen (z.B. mit Problemen der Wellenleitung in Kabeln von Kommunikationsnetzen) und insbesondere bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen müssen die Felder in ihrer gegenseitigen Verkopplung betrachtet werden. Das wird in der Regel im Lehrfach „Theoretische Elektrotechnik“ oder mehr physikalisch orientiert in „Elektrodynamik“ vorgenommen und erfordert eine aufwendige mathematische Darstellung mit Hilfe der Vektor- oder sogar Tensoranalysis.

Die Gleichungen in Abschnitt 7.1 (zur Definition von Ladung und Verschiebungsfuss, die Knotenpunktsätze, die Maschensätze und die Induktion) können zu den vier **Maxwell'schen Gleichungen**<sup>74</sup> (partielle Differentialgleichungen) „komprimiert“ werden und enthalten *prinzipiell* die gesamte Elektrotechnik.

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{S} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

Interessierte finden dazu z.B. in (Kar11 S. 30 ff), (Nol12 S. 51 ff) oder (Reb99 S. 369 ff) eine sehr tiefgehende und vollständige Darlegung. Einige Autoren stellen die vier Maxwell'schen Gleichungen als eine Art Axiome an den Anfang und leiten daraus alle theoretischen Grundlagen ab (Phi76 S. 17). In (Boe12 S. 9) wird eine axiomatische Ableitung aller Grundbegriffe der Elektrotechnik aus verallgemeinerten abstrahierten Erfahrungen zu den Kraftwirkungen, der Ladungserhaltung und dem geschlossenen Stromkreis vorgeschlagen. Die Vorgehensweise in den Abschnitten 2, 4, 5, und 6 entspricht dem letztendlich.

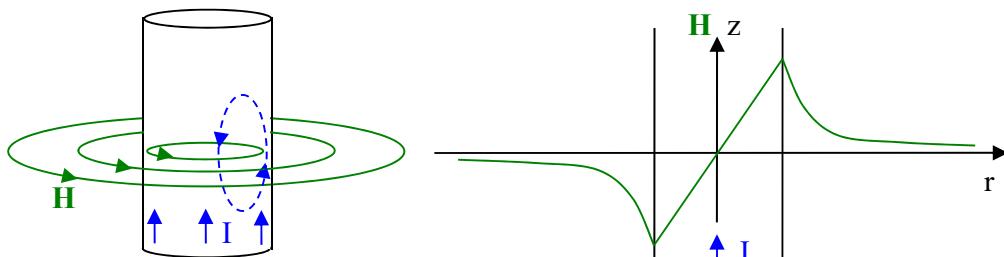
Die Anwendung der oben aufgelisteten Kenntnisse in elektrischen Stromkreisen, Schaltungen und Netzwerken werden in den folgenden Abschnitten 9 sowie 11 vertieft. Aktive Bauelemente und ihre Anwendungen (Halbleiterbauelemente, analoge und digitale Schaltungen) folgen in den Abschnitten 12, 13 und 15, eine Analyse von Signalen und Systemen im Abschnitt 16, elektrische Maschinen und Leistungselektronik in den Abschnitten 19 und 20.

<sup>74</sup> Von Maxwell mit einem mechanischen Modell als Analogievorstellung entwickelt, vergleiche (Max76). Die Schreibweise wurde allerdings der heutigen Zeit angepasst.

### 7.2.1 Beispiele verkoppelter Felder (Skineffekt, Wellenleitung)\*

Das Magnetfeld infolge eines Stromes wurde für einen geraden Leiter mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes ( 6.10 ) in Abb. 6.6 sowie Abb. 6.7 dargestellt (vergleiche ( 6.11 )).

$$H = \frac{I}{2\pi r} \text{ für } r \geq r_{\text{Leiter}} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r_{\text{Leiter}}^2} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{r}{r_{\text{Leiter}}^2} \text{ für } r \leq r_{\text{Leiter}}$$



**Abb. 7.1: Magnetfeld in einem geraden Leiter ( $l \gg d$ )**

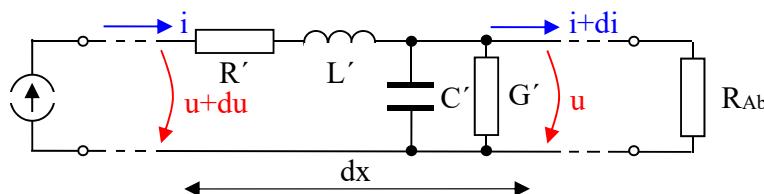
Wird ein sinusförmiger Wechselstrom verwendet, werden auch  $H$  und  $B = \mu H$  sinusförmig. Damit ergibt sich durch die Ruheinduktion ( 6.15 ) eine induzierte Spannung, deren Strom im Leiter der Ursache – dem Strom  $I$  – entgegenwirkt (gestrichelt in Abb. 7.1, vergleiche die Richtung des Wirbelstromflusses um die Feldlinien mit Abb. 6.11). So wird innen der Strom unterdrückt und kann nur an der Außenseite des Leiters fließen. Durch diesen Stromverdrängungseffekt fließt der Strom im Wesentlichen an der Haut des Leiters; das wird **Skineffekt** genannt. Der Skineffekt vergrößert den Widerstand eines Leiters.

**Praxistipp:** Der Skineffekt kann nützlich sein. So sorgt er für einen größeren Widerstand des Kurzschlusskäfigs einer Asynchronmaschine beim Anlauf und begrenzt den Anlaufstrom (höhere Differenzgeschwindigkeit zwischen dem stehendem Läufer und dem Ständerdrehfeld → größeres  $\omega$ ). Insbesondere bei HF-Anordnungen stört der Skineffekt und wird durch Versilbern der Oberfläche sowie durch Litze anstatt Volldraht verringert.

Eine vollständige Berechnung ist z.B. in (Reb99 S. 646 ff) zu finden. Dazu muss zu Differentialgleichungen übergegangen werden, welche durch Besselfunktionen gelöst werden können.

Ein weiteres Beispiel für die gegenseitige Verkopplung elektrischer und magnetischer Felder wird in der **Wellenleitung** sichtbar. Dazu werden z.B. in (Reb99 S. 696 ff) wiederum die entsprechenden Differentialgleichungen gelöst.

Für eine ebene Zweidrahtleitung mit konstanten Parametern  $\epsilon$ ,  $\mu$  und  $\kappa$  ergeben sich die sogenannten Telegrafengleichungen<sup>75</sup>. An Stelle der Differentialgleichungen kann anschaulicher eine **Ersatzschaltung mit verteilten Parametern** (Bauelementen) genutzt werden.



**Abb. 7.2: Ersatzschaltung einer langen Paralleldrahtleitung (Telerafenleitung)**

<sup>75</sup> Für Telefonübertragungen über lange Distanzen wurde das Problem zuerst erkannt und behandelt.

In jedem differentiellen Stück  $dx$  der Leitung sind die auf die Länge bezogenen Parameter  $R'$  (Leiterwiderstand pro Länge),  $L'$  (Induktivität pro Länge),  $C'$  (Kapazität zwischen den Leitern pro Länge) und  $G'$  (evtl. Isolationswiderstand pro Länge) anzusetzen. Am Eingang erfolgt die Stromeinspeisung, am Ende befindet sich ein Abschlusswiderstand.

Strom und Spannung verändern sich in jedem  $dx$  um eine differentielle Größe (Abb. 7.2).

Die Lösung erfolgt mit Hilfe der komplexen Rechnung für sinusförmige Spannung und Strom (siehe Abschnitt 11.1.1). Sie erfolgt mit einem Maschensatz und einem Knotenpunktsatzes für jedes  $dx$  (vergleiche Abschnitt 9.2.1).

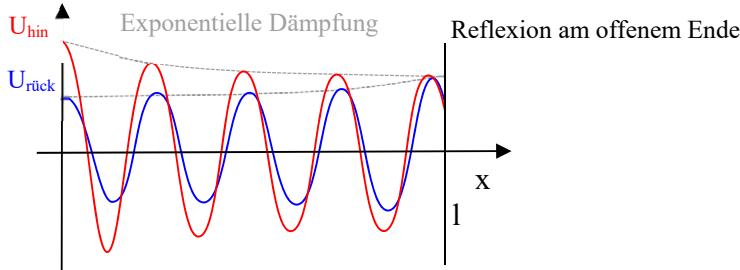
Die Lösung ergibt eine vom Anfang zum Ende der Leitung **hinlaufende Welle** mit exponentiell kleiner werdender Amplitude und eine vom Ende zum Anfang **zurücklaufende Welle** (genauso kleiner werdend). Zu jedem Zeitpunkt addieren sich an jedem Ort beide Wellen.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_{\text{Anfang}} \exp(-\delta x) \cos(\omega t - kx) + u_{\text{Ende}} \exp(+\delta x) \cos(\omega t + k(x-l)) \\ i(x,t) &= (u_{\text{Anfang}}/Z_0) \exp(-\delta x) \cos(\omega t - kx + \varphi_i) - (u_{\text{Ende}}/Z_0) \exp(+\delta x) \cos(\omega t + k(x-l) + \varphi_i) \end{aligned}$$

Dabei sind  $Z_0$  der Wellenwiderstand

$$Z_0 = \sqrt{L'/C'} \text{ für } R' \approx 0, G' \approx 0$$

(somit auch  $\delta \approx 0$ ),  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz der sinusförmigen Spannung bzw. des Stromes,  $\delta$  die Dämpfungskonstante und  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl entlang der Länge  $x$  (mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  und der Wellenlänge  $\lambda$ ). Der erste Term zeigt jeweils die hinlaufende und der zweite die zurücklaufende Welle<sup>76</sup>.



**Abb. 7.3: Hin- und zurücklaufende Welle zum Zeitpunkt  $t = 0$** <sup>77</sup>

Die Summe wäre punktweise zu bilden, ist aber zur besseren Übersichtlichkeit nicht dargestellt. An einem offenen Ende muss der Strom null sein, dagegen muss an einem kurzgeschlossenen Ende die Spannung Null sein. Ist der Abstand von Anfang bis Ende der Leitung ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$ , ergeben sich stehende Wellen. Die Maxima/Minima sowie die Nulldurchgänge sind dann zu jeder Zeit am gleichen Ort, wenn auch mit zeitlich wechselnder Amplitude.

In der Form der Lecher-Leitung wurde die Wellenleitung anfangs zur HF-Frequenzmessung genutzt, heute spielt es noch zu Demonstrationszwecken eine Rolle. Im UHF-Bereich werden mit Wellenleitung günstig Filter realisiert (z.B. Streifenleitertechnik). In vielen Fällen werden aber auch Signale durch Reflexionen gestört.

**Praxistipp:** Zur Vermeidung der Reflexion wird die Leitung genau mit  $R_{\text{Ab}} = Z_0$  abgeschlossen. Das ist identisch mit einer bis ins Unendliche weiterreichenden Leitung. Das erfolgt bei allen Signalübertragungen (ISDN, Ethernet bis HF-Anwendungen), ist entweder bereits in den Anschluss integriert oder muss selbst angeschlossen werden.

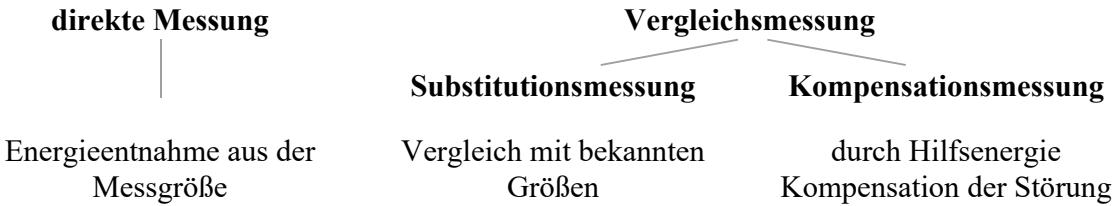
Eine tiefgehende Untersuchung ist z.B. in (Küp84 S. 404 ff) zu finden.

<sup>76</sup> Eine ungedämpfte Welle hat die Form  $A(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx)$ . Das ist eine Sinusschwingung, die sich entlang der x-Richtung ausbreitet.

<sup>77</sup> Offenes Ende heißt  $R_{\text{Ab}} = \infty$ . Bei  $t = 0$  ist  $\omega t = 0$  und so folgt in x-Richtung die Funktion  $\cos(kx)$ .

### 7.2.2 Zusammenfassende Aspekte der Messtechnik

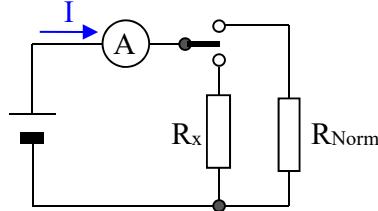
Je nach Aufgabe stehen für eine Messung verschiedene Verfahren mit unterschiedlichen Eigenschaften und Anwendungsbedingungen zur Verfügung.



Eine **direkte Messung** (z.B. von Strom oder Spannung) erfordert das Einfügen eines Messgerätes in den Aufbau. Dieser Eingriff in die Anordnung bedingt (neben dem Einbau selbst) grundsätzlich zumindest den Entzug einer geringen Menge Energie und kann die Funktion verändern (durch R, C und L des Messgerätes). Das kann oft durch eine Fehlerbetrachtung behoben werden (vergleiche Abschnitte 4.2.3, 4.4.2 oder 5.2.6).

**Praxistipp:** Die direkte Messung ist in der Regel die einfachste Messmethode.

Bei einer **Vergleichsmessung** können Fehlereinflüsse bezüglich der Messgenauigkeit besser beherrscht werden. Bei einigen Messgrößen kann entweder eine Substitutionsmethode oder eine Kompensationsmethode genutzt werden. Ein Beispiel zur **Substitutionsmethode** zeigt Abb. 7.4.

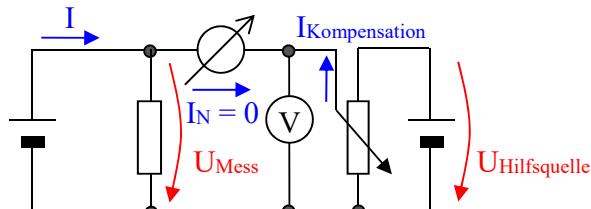


**Abb. 7.4: Widerstandsmessung mit Substitutionsmethode**

Es wird der Normalwiderstand so lange vergrößert, bis in beiden Schalterstellungen der gleiche Strom fließt. Ein weiteres Beispiel ist die Wheatston'sche Brückenschaltung (vergleiche Abschnitt 4.2.3).

**Praxistipp:** Es ist aber in der Regel zumindest eine Teildemontage notwendig.

Ein Beispiel zur **Kompensationsmethode** zeigt Abb. 7.5.



**Abb. 7.5: Spannungsmessung mit Kompensationsmethode**

Der Kompensationsstrom wird mittels Potentiometer so lange erhöht, bis  $I_N$  am Nullindikator zu Null wird. Dann ist der ursprüngliche Stromkreis ungestört und das Voltmeter zeigt die exakte Spannung  $U_{\text{Mess}}$  an. Die Hilfsspannungsquelle kompensiert dazu die Energieentnahme.

**Praxistipp 1:** Das ist für die Messung von Gleichspannung (und analog für Gleichstrom) gut und genau realisierbar. Bei zeitveränderlichen Größen muss eine schnelle Regelschaltung die Kompensation zu jedem Zeitpunkt gewährleisten.

**Praxistipp 2:** Spannungs- und Stromwandler (auch Stromzangen) können sowohl zur direkten Messung als auch zur Kompensationsmessung gebaut werden.

Bei der direkten Messung wird nach dem Prinzip eines Transformators etwas Energie entnommen. Dabei können nie Gleichgrößen gemessen werden.

Wird das Magnetfeld des Stromes im Wandler mit einer Regelschaltung durch ein Gegenfeld ständig zu null kompensiert, erfolgt eine Kompensationsmessung. Der Frequenzbereich hängt in diesem Fall vom Magnetfeldsensor (Nullindikator) und der Regelschaltung ab und kann so auch Gleichgrößen umfassen.

Bei der **direkten Messung** nichtelektrischer Größen entnehmen Messwandler ebenfalls Energie (z.B. müssen Flüssigkeitsthermometer oder Thermowiderstände erwärmt werden). Es sind auch **indirekte Messverfahren** möglich (z.B. die Messung der Schallgeschwindigkeit mit einer leistungsarmen Ultraschallstrecke und anschließende Auswertung der Temperatur und/oder der Strömungsgeschwindigkeit des Mediums).

**Praxistipp:** Dazu ist immer eine Hilfsenergie erforderlich und diese sollte die Messgröße selbst nicht beeinflussen (z.B. bei schwacher Ultraschall- oder Lichtstrahlung der Fall).

Es existieren beim Messen **immer Messfehler** mit unterschiedlichen Auswirkungen.

systematische Messfehler	statistische Messfehler	grobe Messfehler
z.B. Spannungsabfall am Amperemeter, Strom durch das Voltmeter	Klasse des Messinstruments, nicht erfassbare Einflüsse auf das Messinstrument (z.B. Temperatur, Luftdruck...)	falsches Ablesen, Messbereich verwechselt, schräges Ablesen
<b>Korrigierbar!</b> Ist durch Umrechnen immer möglich (z.B. in Abb. 4.25 mit $U = U_m - I R_A$ oder mit $I = I_m - U/R_V$ ).	<b>Praxistipp:</b> <b>Nicht korrigierbar!</b> Wahrscheinlichkeit oder maximale Fehlergröße kann angegeben werden. Besseres Messgerät nutzen.	<b>Keine Aussage möglich!</b> Messung muss wiederholt werden!
<b>Messung unrichtig</b>	<b>Messung unsicher</b>	<b>Messung falsch</b>
	objektive Fehler	subjektive Fehler

**Tabelle 7.1: Einteilung der Messfehler**

**Praxistipp:** Der Fehler wird in Prozent des Endwertes des Messbereichs angegeben und ist bei geringem Messwert in diesem Bereich relativ groß. Analoges gilt genauso bei digitalen Messgeräten.

Die **Prozess- und die Labormesstechnik** unterscheiden sich vor allem durch die bestehenden Umgebungsbedingungen. Nicht alle physikalischen Messprinzipien sind für beide Einsatzfälle gleich gut geeignet.

**Praxistipp:** Im Labor kann immer von klimatisierten Räumen und der Möglichkeit zur ständigen Pflege und evtl. Kalibrierung der Messmittel ausgegangen werden.

In der Prozessmessstechnik sind generell die bestehenden Umgebungsbedingungen, eine hohe Robustheit und eine lange Betriebsdauer ohne jede Wartung zu berücksichtigen.

Die **Sensortechnik** hat sich zu einem eigenen Zweig entwickelt. Dabei spielen neben den Umgebungsbedingungen, einer hohe Robustheit und einer lange Betriebsdauer ohne Wartung auch die **Schnittstellen** für die Messsignale und die Energieversorgung des Sensors eine wichtige Rolle. (Teilweise werden im weiten Sinn auch alle Messwandler als Sensoren bezeichnet.)

**Praxistipp:** Schnittstellen sind vor allem für SPS und Feldbussysteme genormt.

Ausführlicheres sollte der jeweils aktuellen Spezialliteratur entnommen werden, weil auf diesem Gebiet die technologische Entwicklung ein hohes Tempo hat.

### 7.2.3 Messoszilloskop

#### Funktionsprinzip eines Oszilloskops

**Praxistipp:** Bei zeitveränderlichen Spannungen ist das Oszilloskop nach wie vor das wichtigste Messinstrument zur Erfassung, Darstellung und Auswertung der Vorgänge. Heute in der Regel mit digitaler Anzeige, ist doch das Funktionsprinzip auch bei digitaler Verarbeitung immer noch im Wesentlichen das Gleiche.

Aufbau und Wirkungsweise eines Oszilloskops können an der Prinzipdarstellung (Abb. 7.6) erläutert werden.

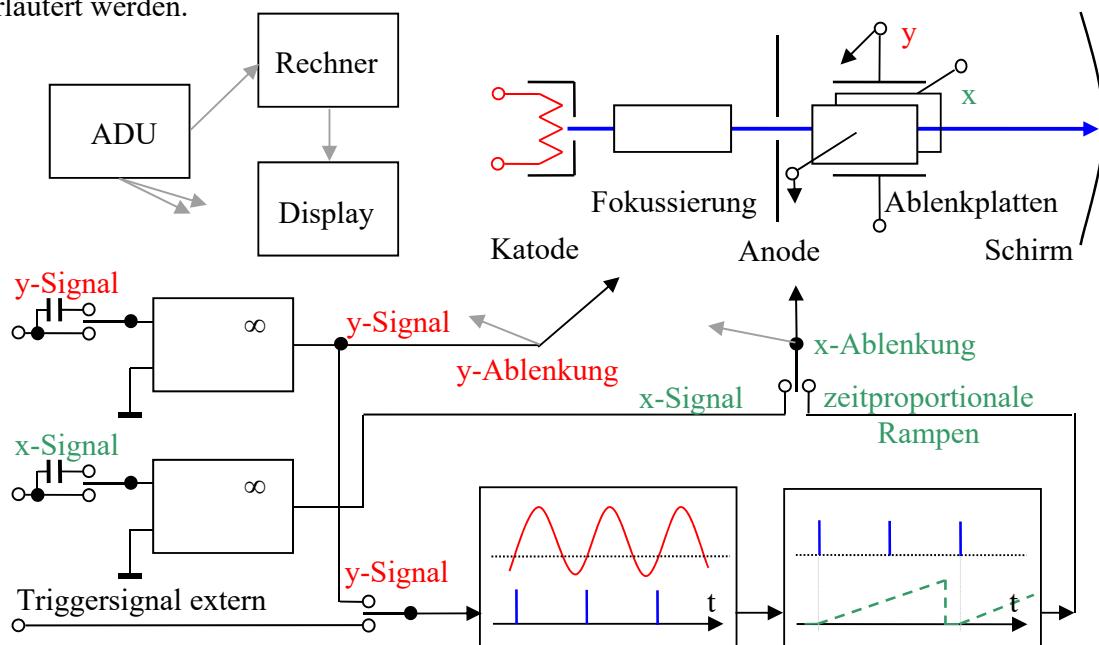


Abb. 7.6: Grundprinzip eines Oszilloskops

An den Eingangssignalverstärkern kann eine Signalspannung entweder direkt oder über eine Kapazität (Gleichanteil fällt weg) angeschlossen werden. Das verstärkte Eingangssignal vom y-Verstärker (y-Signal) wird an die y-Ablenkung und zugleich an die Synchronisationseinheit angeschlossen (bzw. an den Analog-Digital-Umsetzer gegeben). Für die Synchronisation

vergleicht ein Komparator das Signal mit einem Schwellwert und leitet daraus einen Synchronimpuls ab (in Abb. 7.6 als Impulse dargestellt).

Bei einem Synchronimpuls beginnt eine zeitproportionale Rampenspannung (in Abb. 7.6 gestrichelt dargestellt). Hat diese ihren Endwert erreicht (Zeitablenkung in x-Richtung ist ganz rechts auf dem Bildschirm), wird bis zum nächsten Synchronimpuls gewartet und dann neu begonnen. Dazwischen liegende Synchronimpulse werden ignoriert. Auf diese Weise entsteht bei periodischen Signalen ein stehendes Bild. (Ein Rechner behandelt das Signal auf die gleiche Weise.)

Für spezielle Darstellungen kann die Synchronisation aus einem externen Signal stammen oder ein zweites Eingangssignal (ein x-Signal) wird zur x-Ablenkung (bzw. vom Analog-Digital-Umsetzer) genutzt.

Mehrkanaloszilloskope benutzen normalerweise im Timesharing mehrere Eingangssignale für die gleiche y-Ablenkung. So erscheinen sie quasi gleichzeitig und sind gemeinsam auszuwerten.

Durch die Einstellung der Verstärkungsfaktoren und die Anstiegszeit der Rampe kann eine optimale Bildschirmdarstellung erreicht werden.

Das Grundprinzip ist auch bei modernen Oszilloskopen gleich, aber die Einstellung erfolgt über Menüs und die Verarbeitung wird teilweise vollständig von einem Rechner übernommen bzw. gesteuert. Außerdem werden zunehmend moderne farbige Displays und eine digitale Speicherung genutzt.

Genaueres sollte den jeweiligen Bedienungsanleitungen entnommen werden, da es in den Details zu viele Unterschiede gibt.

## 8 Zweiter Exkurs Mathematik

### 8.1 Lösung linearer Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit m Unbekannten lautet:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3m}x_m &= b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \quad (8.1)$$

Sind im Gleichungssystem (8.1) alle  $a_{ik}$  konstant, alle n Gleichungen voneinander linear unabhängig<sup>78</sup>,  $n = m$  und mindestens ein  $b_i \neq 0$ , hat das System immer eine eindeutige Lösung. Andernfalls ist es nicht bzw. nicht eindeutig lösbar.

**Praxistipp:** Reale elektrische Schaltungen mit linearen Bauelementen ergeben immer ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem.

Die Lösung erfolgt

- durch Vertauschen zweier Gleichungen, Multiplikation einer Gleichung mit einer Konstanten und Addition zweier Gleichungen (intuitiv so oft, bis eine Unbekannte explizit auftritt),
- durch den Gauß'schen Algorithmus oder
- durch die Cramer'sche Regel.

Die letzten beiden stellen einen immer ausführbaren klaren Algorithmus dar.

Gauß'scher Algorithmus:

- Die erste Gleichung wird jeweils mit  $a_{i1}/a_{11}$  multipliziert und von den nächsten Gleichungen (mit  $2 \leq i \leq n$ ) subtrahiert. Dann stehen bei diesen vor  $x_1$  immer 0 und vor  $x_2 \dots x_m$  neue Koeffizienten (z.B.  $a'_{22} \dots a'_{2m}$ ).
- Die neue zweite Gleichung wird jeweils mit  $a'_{i2}/a'_{22}$  multipliziert und wieder von den nächsten Gleichungen (mit  $3 \leq i \leq n$ ) subtrahiert. Dann stehen bei diesen vor  $x_1$  und  $x_2$  immer 0 und vor  $x_3 \dots x_m$  neue Koeffizienten (z.B.  $a''_{33} \dots a''_{3m}$ ).
- Der Algorithmus wird fortgesetzt, bis in der n. Gleichung nur noch vor  $x_m$  keine 0 steht. Das geht auf, wenn  $n = m$  unabhängige Gleichungen vorliegen.
- Dann können rückwärts die Lösungen eingesetzt werden, bis alle Lösungen vorliegen.

Cramer'sche Regel

- Die Gleichungen werden in die Matrizenform umgewandelt (Beispiel  $n = m = 3$ ).

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Dabei stehen links der Spaltenvektor der bekannten Werte und rechts die Koeffizientenmatrix multipliziert mit dem Spaltenvektor aus den unbekannten Werten.

- Aus der Koeffizientenmatrix kann die Koeffizientendeterminante geschrieben und ausgerechnet werden (gut zu erkennen bei Verlängerung um die ersten zwei Spalten).

<sup>78</sup> D.h., jede Gleichung beinhaltet zusätzliche Informationen, die noch nicht in den anderen vorkommen.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12} \quad (8.3)$$

Dafür werden die Elemente der drei von links nach rechts abfallenden Diagonalen multipliziert und die Produkte addiert, anschließend die der drei ansteigenden Diagonalen multipliziert und die Produkte subtrahiert<sup>79</sup>.

- In der Koeffizientendeterminante wird die i-te Spalte durch die bekannten Werte ersetzt und es folgt die Determinante  $D_i$  (mal ohne Verlängerung, Beispiel  $i = 2$ ).

$$D_i = D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{31} b_2 a_{13} - b_3 a_{12} a_{11} - a_{33} a_{21} b_1 \quad (8.4)$$

Die Unbekannten ergeben sich dann zu (Beispiel  $i = 2$ )

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{31} b_2 a_{13} - b_3 a_{12} a_{11} - a_{33} a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}}. \quad (8.5)$$

Ist  $n = m = 2$ , gibt es nur eine abfallende und eine ansteigende Diagonale. Für  $n = m > 3$  müssen die Determinanten so lange zu Unterdeterminanten entwickelt werden, bis nur noch Dreier-Determinanten berechnet werden müssen.

**Praxistipp:** Es kann das Verfahren gewählt werden, welches individuell am schnellsten und sichersten zum Ziel führt.

Vergleiche mit (Bro79 S. 207 ff).

## 8.2 Lösung linearer Differentialgleichungen\*

Eine lineare Differentialgleichung (DGL) der Ordnung  $n$  mit konstanten Koeffizienten  $a_i$  lautet allgemein:

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + \dots + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = b. \quad (8.6)$$

Dafür ergibt sich die **homogene DGL**, indem  $b = 0$  gesetzt wird (kein Term ohne ein  $y$ ). Für die homogene DGL sind so viele unabhängige Lösungen zu suchen, wie die Ordnung ( $n$ ) angibt. Diese Lösungen sind jeweils mit einer Konstanten zu multiplizieren und zur Gesamtlösung zu addieren.

Dazu ist weiter eine **inhomogene Lösung** nach Einsetzen der homogenen Lösungen in (8.6) zu ermitteln und zu addieren.

Eine homogene DGL 1. Ordnung ( $n = 1$ ) hat eine Lösung und kann am besten durch Trennung der Variablen berechnet werden (ohne Einschränkung wird  $a_1 = 1$  und  $a_0 = a$  gesetzt sowie als Integrationskonstante  $\ln C_1 \equiv \text{const}$ ).

<sup>79</sup> Beachte, dass die Produkte sowohl Nullen als auch negative Koeffizienten enthalten.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + ay = 0 &\rightarrow \frac{dy}{dx} = -ay \rightarrow \frac{dy}{y} = -adx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = -a \int dx \rightarrow \\ \ln y = -ax + \ln C_1 &\rightarrow y = C_1 e^{-ax} \end{aligned} \quad (8.7)$$

**Praxistipp:** Die inhomogene Lösung stimmt in der Elektrotechnik bei realen Vorgängen immer mit dem Zustand für  $t \rightarrow \infty$  überein und kann daraus bestimmt werden.

Damit  $y(t \rightarrow \infty)$  in (8.7) z.B. den Wert  $C_2$  annimmt, wird  $C_2$  hinzuaddiert:  $y = C_1 e^{-ax} + C_2$ .

**Praxistipp:** Es wird eine Randbedingung benötigt, um die Konstante  $C_1$  zu bestimmen.

Die Konstante  $C_1$  ist aus der **Randbedingung** (z.B. für  $x=0$ ) bei Ableitung nach der Zeit der **Anfangsbedingung** (z.B. für  $t=0$ ) zu ermitteln. Soll z.B.  $y(x=0)=0$  sein, folgt aus  $0 = C_1 + C_2$ , dass  $C_1 = -C_2$  wird. Die Lösung der homogenen DGL kann auch mit dem Lösungsansatz  $y = C_1 e^{-ax}$  erfolgen. Dann ergibt sich  $\alpha$  nach Einsetzen des Lösungsansatzes in die homogenen DGL.

Eine homogene DGL 2. Ordnung ( $n = 2$ ) hat zwei unabhängige Lösungen. Diese können am besten durch einen Lösungsansatz gefunden werden. Dazu kann mit  $y = \exp(\delta x)$  versucht werden, Lösungen zu finden. Zuerst werden die Ableitungen gebildet

$$\frac{d}{dx}\{\exp(\delta x)\} = \delta \exp(\delta x) \text{ und } \frac{d^2}{dx^2}\{\exp(\delta x)\} = \delta^2 \exp(\delta x)$$

und diese in die DGL eingesetzt (ohne Einschränkung wird  $a_2 = 1$  gesetzt).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = \delta^2 \exp(\delta x) + \delta a_1 \exp(\delta x) + a_0 \exp(\delta x) = 0$$

Danach kann  $\delta$  durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

$$\delta^2 + \delta a_1 + a_0 = 0$$

$$\delta_{1,2} = -a_1 / 2 \pm \sqrt{a_1^2 / 4 - a_0}$$

In diesem Fall gibt es die zwei gesuchten Lösungen und die homogene Lösung lautet:

$$y_h = C_1 \exp(\delta_1 x) + C_2 \exp(\delta_2 x) \quad (8.8)$$

Bei der Lösung (8.8) sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $a_1^2/4 > a_0$  ergibt zwei reelle verschiedene  $\delta$ . Die homogene Lösung entspricht der Summe aus zwei Exponentialfunktionen.
- $a_1^2/4 = a_0$  ergibt zwei reelle gleiche  $\delta$ . Das entspricht einem Grenzfall. Der Grenzübergang für die DGL führt zu  $y_{h\text{Grenz}} = C_1 \exp(\delta_1 x) + C_2 x \exp(\delta_1 x)$ .
- $a_1^2/4 < a_0$  ergibt zwei konjugiert komplexe  $\delta$ . Das entspricht der Summe aus zwei konjugiert komplexen Exponentialfunktionen und kann mit der Euler'schen<sup>80</sup> Formel zu gedämpften Schwingungen umgeformt werden.

**Praxistipp 1:** Die inhomogene Lösung stimmt in der Elektrotechnik bei realen Vorgängen immer mit dem Zustand für  $t \rightarrow \infty$  überein und kann auch hier daraus bestimmt werden.

**Praxistipp 2:** Es werden zwei Randbedingungen benötigt, um  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen.

<sup>80</sup>  $\exp(j\alpha x) = \cos(\alpha x) + j \sin(\alpha x)$

Weitere Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten werden vorteilhaft mit der Laplacetransformation erreicht (siehe Abschnitt 10.8 und 11.4.1) oder mit Hilfe der komplexen Rechnung umgangen (siehe Abschnitte 10.1 und 11.1.1).

In (Bro79 S. 466 ff) werden für viele Fälle Wege gezeigt. Aber es gibt nicht für alle DGL Verfahren zur Lösung, d.h., Suchen oder Probieren sind erforderlich.

# 9 Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke

Die Abschnitte 4, 5 und 6 sollten verstanden worden sein. Es werden

- als Ausgangspunkt der Grundstromkreis untersucht und dessen Verhalten für die Hauptanwendungsfälle bewertet,
- elektrische Stromkreise insbesondere bei Gleichstrom analysiert,
- die Methoden zur Berechnung von elektrischen Netzwerken an Beispielen vorgestellt, verglichen und diskutiert,
- die Gesetzmäßigkeiten in elektrischen Stromkreisen untersucht sowie
- die Ergebnisse mit Messungen verglichen.

Hilfreich können die Wiederholung der mathematischen Formalismen in Abschnitt 8 sowie die Zusammenfassung in Abschnitt 7.1 sein.

## 9.1 Grundstromkreis

### 9.1.1 Analyse eines Grundstromkreises

Ein **Grundstromkreis** besteht jeweils aus dem einfachsten aktiven und passiven Zweipol.

**Aktive Zweipole** sind eine Zusammenschaltung mehrerer Bauelemente einschließlich Spannungs- und/oder Stromquellen (aber mit mindestens einer) an zwei äußeren elektrischen Anschlussklemmen.

**Praxistipp:** Der *einfachste* aktive Zweipol besteht aus einer *idealen Quelle* ( $U_0$ ) und einem Element zur Darstellung der inneren Verluste, dem *Innenwiderstand* ( $R_i$ ).

**Passive Zweipole** sind eine Zusammenschaltung mehrerer Bauelemente ohne Spannungs- und/oder Stromquellen an zwei äußeren elektrischen Anschlussklemmen.

**Praxistipp:** Der *einfachste* passive Zweipol besteht aus einem Element zur Darstellung der Energieumwandlung, dem Lastwiderstand oder *Außenwiderstand* ( $R_a$ ).

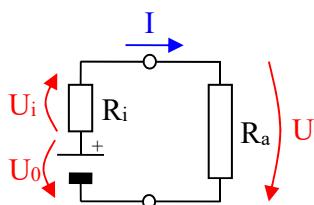
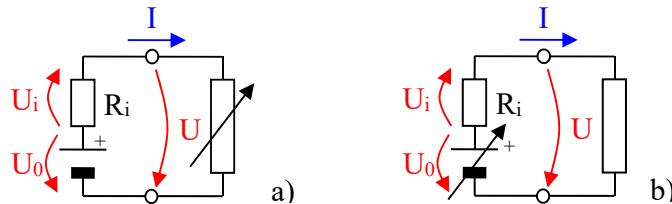


Abb. 9.1: Grundstromkreis

Eine Analyse des Grundstromkreises (Abb. 9.1) verdeutlicht in repräsentativer Weise viele Zusammenhänge und Probleme aller Stromkreise der verschiedensten Anwendungen und wird deshalb an den Anfang gestellt.

**Praxistipp:** **Kennlinien** stellen die Betriebszustände eines Elementes, Gerätes oder einer Anlage besonders anschaulich dar.



**Abb. 9.2: Messanordnung für die Kennlinien eines a) aktiven und b) passiven Zweipols**  
Kennlinie und Parameter des aktiven Zweipols

Nach Abb. 9.2 a) folgt die Kennlinie durch Verändern der Testlast im Bereich der zulässigen Belastung (im Idealfall von  $0 \leq R_a < \infty$ ). Der Maschensatz (Umlauf im Uhrzeigersinn) wird

$$0 = U_i + U - U_0$$

und mit  $U_i = R_i I$  ergibt sich die **Kennlinie des aktiven Zweipols** zu:

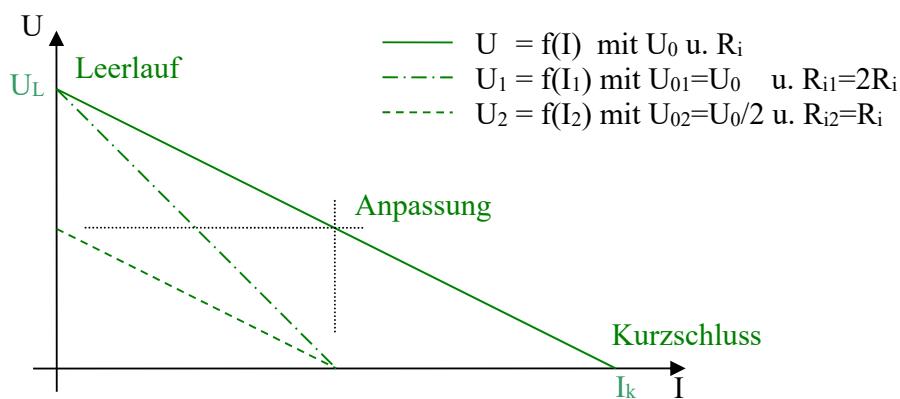
$$U = U_0 - R_i I. \quad (9.1)$$

**Praxistipp:** In (9.1) treten drei besondere Fälle auf (siehe auch Abb. 9.3).

- Für  $I = 0$  (kein Laststrom,  $R_a = \infty$ ), d.h. *Leerlauf*, wird die Klemmenspannung zur Leerlaufspannung  $U_L = U(I=0) = U_0$  (größtmögliche Klemmenspannung,  $R_a = \infty$ ).
- Für  $U = U_i$  (bei  $R_a = R_i$ ), d.h. *Anpassung* (gleich große innere Verluste wie der Umsatz am Lastwiderstand), wird  $U = U_0/2$  und  $I = I_k/2$ .
- Für  $I = I_k$  (Kurzschlussstrom, größtmöglicher Laststrom,  $R_a = 0$ ), d.h. *Kurzschluss*, wird die Klemmenspannung zu  $U(I=I_k) = 0$ .

Dabei sind drei Parameter des aktiven Zweipols ( $U_0$ ,  $R_i$  und  $I_k$ ) erkennbar. Zwei dieser Parameter sind unabhängig, während sich der jeweils dritte aus den beiden anderen ergibt (gemäß  $U_0 = R_i I_k$ ).

**Praxistipp:** Der aktive Zweipol wird durch **zwei Parameter** eindeutig gekennzeichnet.



**Abb. 9.3: Kennlinie des aktiven Zweipols**

In Abb. 9.3 wurden zur Verdeutlichung des Einflusses von  $U_0$  und  $R_i$  auf den Kurvenverlauf die Kennlinien mit  $U_0/2$  bzw.  $2R_i$  zusätzlich dargestellt.

### Kennlinie und Parameter des passiven Zweipols

Nach Abb. 9.2 b) folgt die Kennlinie durch Verändern der Spannung einer Testquelle im Bereich der zulässigen Belastung des passiven Zweipols (von  $0 \leq U \leq U_{\max}$  oder  $U(I=I_{\max})$ ). Am Widerstand  $R_a$  wird nach dem Ohm'schen Gesetz die **Kennlinie des passiven Zweipols**:

$$U = I R_a . \quad (9.2)$$

**Praxistipp:** Mit  $R_a$  wird der passive Zweipol durch **einen Parameter** eindeutig bestimmt.

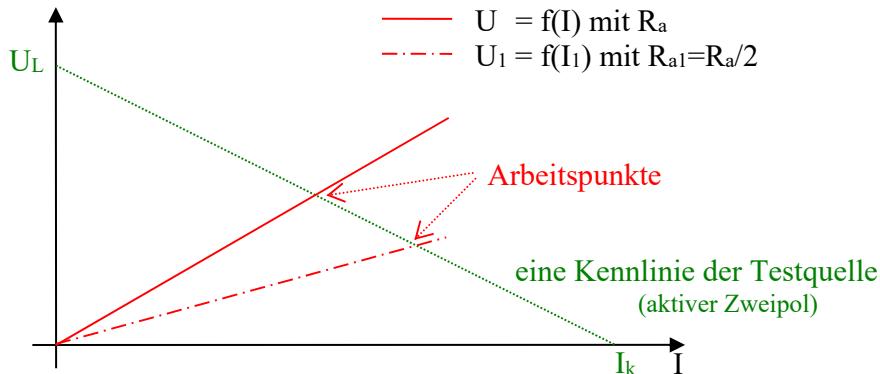
Der *Schnittpunkt* der Kennlinien eines passiven und eines aktiven Zweipols erfüllt beide Gleichungen, d.h. (9.1) und (9.2). Er kennzeichnet den **Arbeitspunkt**, der sich beim Zusammenschalten dieser beiden Zweipole infolge des Gleichgewichts zwischen ihnen einstellt (siehe Abb. 9.4).

**Praxistipp:** **Arbeitspunkt** realisiert das Gleichgewicht von aktivem und passivem Zweipol.

Zur Messung der Kennlinie wird durch Variation des Arbeitspunktes (Verändern der Testlast bzw. der Testquelle) die Kennlinie durchlaufen und folglich ermittelt.

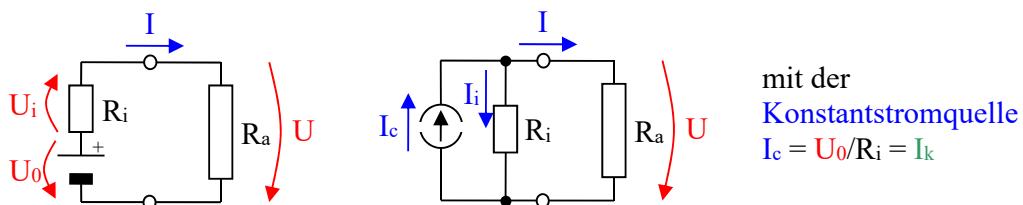
**Praxistipp:** Im Fall, dass die Kennlinien Geraden sind, reichen minimal zwei Messpunkte aus. Praktisch wird durch weitere Messpunkte die Kennlinie überprüft. Dabei sollten die drei besonderen Fälle so exakt wie möglich enthalten sein.

Zu weiteren Gesichtspunkten siehe Abb. 9.7.



**Abb. 9.4: Kennlinie des passiven Zweipols**

Die Kennlinie von  $R_a/2$  verdeutlicht den Einfluss von  $R_a$  auf den Kurvenverlauf. Entsprechend dem Verhalten an den Klemmen (siehe Gleichung (9.1) bzw. Abb. 9.3) kann ein *aktiver Zweipol* durch zwei **elektrisch gleichwertige Ersatzschaltungen** dargestellt werden.



**Abb. 9.5: Die zwei Ersatzschaltungen des aktiven Zweipols**

Auch hier sind drei Parameter des aktiven Zweipols ( $I_c$ ,  $R_i$  und  $U_L$ )<sup>81</sup> erkennbar. Genauso sind nur zwei dieser Parameter unabhängig, während sich der jeweils dritte aus den beiden anderen ergibt (gemäß  $U_L = R_i I_c$ ).

**Praxistipp:** Beide elektrisch an ihren Klemmen nicht unterscheidbaren Ersatzschaltungen sind *nicht gleichwertig* bezüglich der **Energiewandlung**.

Wie in Abb. 9.5 zu erkennen ist, ergibt sich für die Spannungsquellen-Ersatzschaltung bei Leerlauf ( $R_a = \infty$ ) keine Verlustleistung an  $R_i$ . Dagegen folgt für die Stromquellen-Ersatzschaltung an  $R_i$  die Verlustleistung  $P_v = U_L I_i = U_L I_c$ , die durch die Energiewandlung (z.B. aus dem Mechanischen) aufgebracht werden muss. Umgekehrt ist es im Fall des Kurzschlusses ( $P_v = U_i I_k = U_0 I_k$  bzw.  $P_v = 0$ ).

In der Praxis vorkommende Quellen entsprechen zum größten Teil der Spannungsquellen-Ersatzschaltung (z.B. chemische Batterien, Akkus, Generatoren). Es existieren aber auch Quellen, die mehr der Stromquellen-Ersatzschaltung entsprechen. Das praktisch wichtigste Beispiel ist die Solarbatterie<sup>82</sup> (siehe Abschnitt 12.2.5, vergleiche (Boe78 S. 991)), aber auch der Bandgenerator und die Influenzmaschine<sup>83</sup> gehören dazu.

**Praxistipp:** Auch im praktischen Einsatz von Quellen werden von den dargestellten einfachsten Ersatzschaltungen die wesentlichen Eigenschaften wiedergegeben. Es kommen aber Effekte wie Selbstentladung, Alterung, Temperaturabhängigkeit u.Ä. dazu. Darüber hinaus gibt es Quellen mit nichtlinearen Kennlinien (z.B. die Solarbatterie).

### Analyse des Verhaltens des aktiven Zweipols in Abhängigkeit vom Lastwiderstand

Werden die verschiedenen Größen des Grundstromkreises ( $U_0$ ,  $U_i$ ,  $U$ ,  $I$ ,  $P_i$ ,  $P_a$  und  $\eta$ ) über dem Lastwiderstand  $R_a$  dargestellt, sind eine Reihe grundlegender Zusammenhänge deutlich zu erkennen. Die Messschaltung entspricht Abb. 9.2 a.

I =	U <sub>0</sub> /(R <sub>i</sub> +R <sub>a</sub> )	= U/R <sub>a</sub> = U <sub>i</sub> /R <sub>i</sub>
U =	I R <sub>a</sub> = U <sub>0</sub> R <sub>a</sub> /(R <sub>i</sub> +R <sub>a</sub> )	oder U/U <sub>0</sub> = R <sub>a</sub> /(R <sub>i</sub> +R <sub>a</sub> )
U <sub>i</sub> = U <sub>L</sub> -U =	I R <sub>i</sub> = U <sub>0</sub> R <sub>i</sub> /(R <sub>i</sub> +R <sub>a</sub> )	oder U <sub>i</sub> /U <sub>0</sub> = R <sub>i</sub> /(R <sub>i</sub> +R <sub>a</sub> )

( 9.3 )

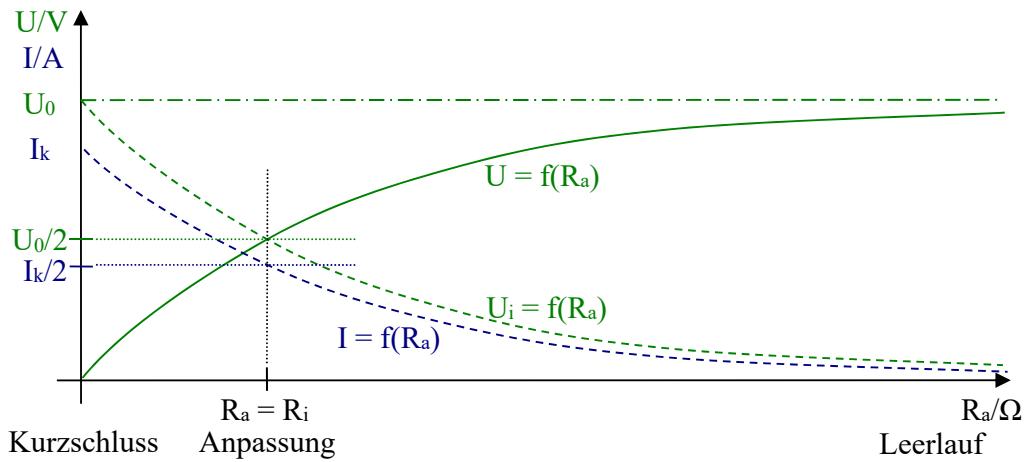
aus Messwerten      aus Berechnung

Aus dem Maschensatz und dem Ohm'schen Gesetz folgen die Gleichungen (9.3). Die Größen können direkt aus den Messwerten ( $U$ ,  $U(I=0)$  und  $I$ ) ermittelt bzw. aus den Bauelementeparametern berechnet werden (Darstellungen in Abb. 9.6).

<sup>81</sup> Beachte, dass  $U_0 = U_L$  und  $I_c = I_k$  gelten (entspr. der Bauelemente- bzw. der gemessenen Kennlinienparameter).

<sup>82</sup> Die Solarbatterie nimmt auch im Leerlauf alle Lichtleistung auf und erwärmt sich entsprechend. Sie kann im Gegensatz zu anderen Quellen immer auch im Kurzschluss (kaum innere Verluste) betrieben werden.

<sup>83</sup> Beide werden nur noch bei Demonstrationsexperimenten eingesetzt.



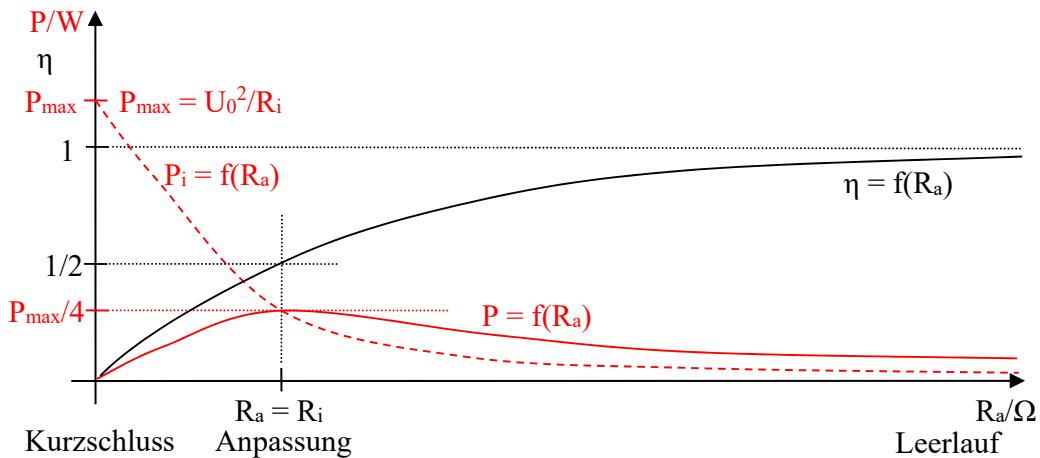
**Abb. 9.6: Aktiver Zweipol in Abhängigkeit vom Lastwiderstand (Diagramme U, I)**

Nach ( 4.25 ) und ( 4.26 ) können die Verlustleistungen am Innenwiderstand, die abgegebene Leistung am Außenwiderstand sowie der Wirkungsgrad bestimmt werden. Diese werden einmal direkt aus den Messwerten ( $U$ ,  $U(I=0)$  und  $I$ ) ermittelt bzw. zum anderen aus den Bauelementeparametern berechnet, siehe Gleichungen ( 9.4 ).

$$\begin{array}{ll}
 P & = I U \\
 P_i = I U_i & = I (U_L - U) \\
 \eta = P/(P+P_i) & = U/U_L
 \end{array} \quad
 \begin{array}{ll}
 = U_0^2 R_a / (R_i + R_a)^2 \\
 = U_0^2 R_i / (R_i + R_a)^2 \\
 = R_a / (R_i + R_a)
 \end{array} \quad (9.4)$$

aus Messwerten      aus Berechnung

**Praxistipp:** Die Messkurven sollten nur direkt aus den Messwerten ermittelt werden.



**Abb. 9.7: Aktiver Zweipol in Abhängigkeit vom Lastwiderstand (Diagramme P, η)**

Die Darstellungen in Abb. 9.7 ermöglichen folgende grundlegende Feststellungen:

- Bei **Kurzschluss** erfolgt der größte Leistungsumsatz (aber ausschließlich als Verlust). An der Last ist die Leistung null und der Wirkungsgrad wird  $\eta = 0$ .
- Bei **Anpassung** sind die Verlustleistung und die Leistung an der Last gleich groß (je  $P_{\max}/4$ ). An  $R_a$  ergibt sich für die Last die maximal mögliche Leistung und der Wirkungsgrad wird  $\eta = 50\%$ .

- In der Nähe des **Leerlaufs** strebt die Verlustleistung stärker gegen Null als die Leistung an der Last und der Wirkungsgrad geht gegen  $\eta = 100\%$ <sup>84</sup>.
- (Bei einer Stromquelle wären die Aussagen zum Kurzschluss und Leerlauf auszutauschen.)

**Praxistipp:** Zur Darstellung der Kurven in Abb. 9.7 sollten bei praktischen Messungen zum besseren Erkennen des Maximums der Leistung (bei Anpassung) rechts und links ein bis zwei weitere Messpunkte (U und I) ermittelt werden (das Maximum ist relativ flach).

Diese Verhältnisse müssen nun für verschiedene Anwendungsfälle ausgewertet und interpretiert werden.

### 9.1.2 Interpretation der Kenngrößen für verschiedene Anwendungen

**Praxistipp:** Die drei dargestellten besonderen Fälle entsprechen drei ausgewählten Betriebszuständen, deren Bewertung je nach Anwendung von „Hauptanwendung“ bis zu „Havariefall“ variiert. Dazu die folgenden Ausführungen.

Anwendung	Informationstechnik	Mess- u. Sensortechnik	Energietechnik
<b>Kurzschluss</b> $I=I_k=I_{max}$ , $U=0$ , $P_a=0$ , $P_i=P_{max}$ bzw. $P_i=0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Schaltungsausgang kann einer Stromquelle entsprechen.</li> <li>• <b>Kurzschlussfestigkeit</b> von Ein- bzw. Ausgängen sichern.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Messwandler entspricht einer <i>Stromquelle</i>, die in der Nähe des Kurzschlusses den größten Ausgangstrom hat (z.B. Fotoelement).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Havariefall</i></li> <li>• Muss durch Sicherheitsmaßnahmen verhindert werden.</li> </ul>
<b>Anpassung</b> $I=I_k/2$ , $U=U_L/2$ , $P_a= P_{max}/4$ , $P_i= P_{max} / 4$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Hauptanwendung der Informationstechnik</i></li> <li>• Bei der Signalübertragung, Signalverstärkung usw. liegen die höchste Signalleistung und somit das <i>beste Signal-Rausch-Verhältnis</i> bzw. der <i>beste Störabstand</i> vor.</li> <li>• (Rauschen und andere Störsignale wirken immer als Leistung.)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Messwandler entspricht einem <i>Leistungswandler</i>, der bei Anpassung die größte Ausgangsleistung abgibt (z.B. Messempfänger).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ist <i>unbrauchbar</i>, weil <math>\eta = 50\%</math> völlig unakzeptabel ist.</li> <li>• (Leistung bei Anpassung liegt im Normalfall weit über der Nennleistung und über der in der Konstruktion realisierten maximalen Belastbarkeit.)</li> </ul>
<b>Leerlauf</b> In der Nähe des Leerlaufs: $I \approx 0$ , $U=U_L$ , $P_a \geq 0$ , $P_i \approx 0$ , bzw. $P_i \approx P_{max}$ (für Stromquelle)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Schaltungsausgang kann einer Spannungsquelle entsprechen.</li> <li>• Anwendung zur <i>rückwirkungsfreien (belastungsfreien) Kopplung</i> zwischen Baustufen.</li> <li>• Leerlaufkennwerte von Schaltungen (z.B. Leerlaufverstärkung).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Messwandler entspricht einer <i>Spannungsquelle</i>, die in der Nähe des Leerlaufs die größte Ausgangsspannung hat (z.B. Tachogenerator, Thermoelement).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Hauptanwendung der Energietechnik</i>.</li> <li>• Der <i>Wirkungsgrad</i> in der Nähe des Leerlaufs erreicht die notwendigen hohen Werte.</li> <li>• <i>Leerlauffestigkeit</i> von Ein- bzw. Ausgängen sichern.</li> </ul>

<sup>84</sup> In der Nähe des Leerlaufs ist die Leistung noch nicht null, sondern erst bei  $R_a = \infty$ .

Folgende Begriffe sind in diesem Zusammenhang zu verdeutlichen:

- **Kurzschlussfestigkeit** Bei Kurzschluss soll *keine Zerstörung* (durch zu große Ströme) eintreten. Dazu sind oft besondere Schaltungsmaßnahmen notwendig.
- **Größter Ausgangsstrom** Größter *erreichbarer* Ausgangsstrom
- **Maximaler Ausgangsstrom** Maximal *zulässiger* Ausgangsstrom
- **Havariefall** Ein Kurzschluss kann den Ausfall eines Gerätes, die *Zerstörung* einer Anlage bis zu einem Kraftwerksunfall auslösen.
- **Rauschen und Störsignale** Werden als stochastische Signale durch Zufallsfunktionen beschrieben. Die *mittlere Leistung hat einen definierten Wert*. Das häufigste und leider immer vorhandene Störsignal ist Rauschen.  
*Signalleistung / Rauschleistung*  
Angabe in *Dezibel* für Signalleistung / Rauschleistung bzw. Signalleistung / Störleistung
- **Signal-Rausch-Verhältnis** Größte *erreichbare* Leistung
- **Störabstand** Leistung für den Nennbetrieb *entsprechend der konstruktiven Auslegung*
- **Größte Ausgangsleistung** Maximal *zulässige* Leistung
- **Nennleistung** Der Anschluss an den Ausgang ist belastungslos und hat somit *keinen Einfluss* (Rückwirkung) auf das Betriebsverhalten.
- **Maximale Belastbarkeit** Kennwerte bei ausgangsseitigem Leerlauf stellen in der Regel Idealwerte dar (z.B. Leerlaufverstärkung).
- **Rückwirkungsfreie Kopplung** Bei Leerlauf ( $I < I_{min}$ ) tritt *keine Zerstörung* (durch zu hohe Spannungen z.B. bei leistungselektronischen Stromwandlern und Schaltnetzteilen) ein, auch dazu sind bei einigen Schaltungen besondere Maßnahmen notwendig.
- **Leerlaufkennwerte** Größte *erreichbare* Ausgangsspannung
- **Leerlauffestigkeit** Maximal *zulässige* Ausgangsspannung  
Da die Leistungen ohnehin gering sind, *spielt der Wirkungsgrad in der Informationstechnik keine Rolle*. Hier geht es nur um die Qualität der Signalverarbeitung. (*Ausnahme*: Endverstärker mit hohen Ausgangsleistungen sind nur mit gutem Wirkungsgrad akzeptabel.)  
*In der Energietechnik die entscheidende Kenngröße.*
- **Größte Ausgangsspannung**
- **Maximale Ausgangsspannung**
- **Wirkungsgrad**

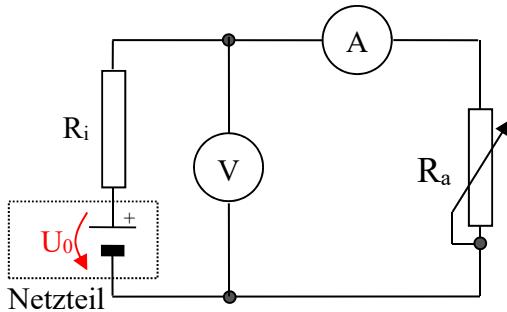
Durch die sehr unterschiedliche Bewertung der Betriebszustände insbesondere aus der Sicht der Informationstechnik (und Elektronik) und der Energietechnik (und Leistungselektronik) kann keine einheitliche Betrachtung erfolgen und es gibt keine einheitliche Denkweise. Das trug mit zur Spezialisierung und zu verschiedenen Fachrichtungen in der Elektrotechnik bei.

### 9.1.3 Messungen am Grundstromkreis

#### Messung 1

Es soll im Messlabor die Kennlinie eines aktiven Zweipols ermittelt werden. Der aktive Zweipol wird zur Verdeutlichung des prinzipiellen Verhaltens in diesem Versuch durch ein geregeltes Netzteil ( $R_i$  wird durch die Regelung null) und einen zusätzlichen Innenwiderstand simuliert.

#### Versuchsaufbau:



**Abb. 9.8: Schaltung des Versuchsaufbaus**

Hinweis: Betrachten Sie den Widerstand des Amperemeters als Bestandteil von  $R_a$ . Es ist zu berücksichtigen, dass aber **nur**  $R_a$  selbst zu null geregelt werden kann.

#### Versuchsdurchführung:

Für das Netzteil wird die vorgesehene Spannung als  $U_0$  eingestellt. (Die Strombegrenzung ist so zu wählen, dass sie während des Versuches nicht einsetzt.) Den vorgegebene Innenwiderstand ist außen anzuschließen.

Folgende Messungen und Aufgaben sind durchzuführen:

1. Messen von Klemmenspannung und -strom bei  $U_0 = 10 \text{ V}$  und  $R_i = 50 \Omega$ .
2. Grafische Darstellung der Kennlinie  $U = f(I)$  aus den Messwerten.
3. Grafische Darstellung von  $U$ ,  $I$ ,  $U_i$ ,  $P_a$ ,  $P_i$  und  $\eta$  als Funktion des Außenwiderstandes durch Berechnung aus den Messwerten (inklusive der Berechnung von  $R_a$ ).
4. Vergleich der beiden Darstellungen mit aus Bauelementparametern berechneten Kurven.
5. Erläutern Sie, welche Messpunkte der Kennlinie in diesem Versuch direkt ermittelt werden können und welche Genauigkeit dabei erreicht wird. Welche Fehlereinflüsse sind relevant?

Zusatzuntersuchung: Vergleich mit Kennlinien bei kleinerem  $U_0$  und bei größerem  $R_i$ .

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass die Kennlinie  $U = f(I)$  eine Gerade ist.
2. Die Ergebnisse bestätigen die in Abschnitt 9.1.1 gezeigten Zusammenhänge.
3. Die Lehrlaufspannung kann mit modernen Messgeräten praktisch ohne Fehler bestimmt werden. Der Kurzschlussstrom ist durch den Spannungsabfall am Amperemeter nur kurz vor einem vollständigen Kurzschluss zu ermitteln. Die Kurve darf aber bis zum völligen Kurzschluss weiter interpoliert werden.

## Messung 2

Es sollen im Messlabor die Kennlinien verschiedener realer aktiver und passiver Zweipole ermittelt werden.

### Versuchsaufbau:

Entwerfen Sie die jeweilige Messschaltung

Hinweis: Erkunden Sie vor Messbeginn notwendige und einschränkende Parameter.

### Versuchsdurchführung:

Als Testquelle kann das Netzteil genutzt werden. (Die Strombegrenzung ist so zu wählen, dass eine Schutzfunktion für Bauelemente und Messgeräte entsteht.) Als Testlast werden veränderbare Ohm'sche Widerstände eingesetzt.

Folgende Messungen und Aufgaben sind durchzuführen:

1. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie  $U = f(I)$  und  $P = f(I)$  eines Audioverstärkers (ca. 5 bis 7 Messpunkte gleichmäßig bis zum Nennstrom verteilen)  
 Hinweis: Der Nennstrom errechnet sich aus dem minimalen Lautsprecherwiderstand bei Nennausgangsleistung laut „Technischer Daten“. Für das Testeingangssignal wird ein Funktionsgenerator mit ca. 300 Hz genutzt. Die Größe des Testeingangssignals ist entsprechend dem Bereich der Eingangsspannung laut „Technischer Daten“ zu wählen. Die Eingangsspannung sowie die Stellung des Lautstärkereglers müssen für die Kennlinie konstant gehalten werden.  
 Zusatzuntersuchung: Vergleich der Kennlinie mit der einer geringeren Eingangssignalaussteuerung
2. Messung und grafische Darstellung der Kennlinien  $U = f(I)$  und  $P = f(I)$  eines Solarpanels (ca. 7 Messpunkte von Kurzschluss bis Leerlauf, davon drei nahe am Maximum-Power-Point MPP)  
 Hinweis: Das Feststellen des MPP ist während der Messung durch sofortige Leistungsberechnung erreichbar. Die Beleuchtung ist während der Messung konstant zu halten.  
 Zusatzuntersuchung: Vergleich der Kennlinie mit der einer geringeren Beleuchtung
3. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie  $U = f(I)$  einer 6-V-Glühlampe (ca. 5 bis 7 Messpunkte bis zur Nennspannung gleichmäßig verteilen)  
 Hinweis: Die Temperaturveränderung abwarten; sie tritt sehr schnell ein. Nicht unnötig hoch- und herunterregeln.
4. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie  $U = f(I)$  einer Halbleiterdiode mit der Nennbelastung  $I_{\text{nenn}} = 3A$  (nur Durchlassbereich, ca. 5 bis 7 Messpunkte bis zum Nennstrom gleichmäßig verteilen)

### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist offensichtlich, dass diese Kennlinien z.T. große Nichtlinearitäten aufweisen.
2. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass Kennlinien das Betriebsverhalten günstig darstellen und somit ein wichtiges Hilfsmittel sind, um einen optimalen Einsatz zu erreichen.

### 9.1.4 Übungsaufgaben zu Anwendungen des Grundstromkreises

#### Aufgabe 9.1

Eine Starterbatterie (Bleiakkumulator) hat eine Leerlaufspannung von 12 V. Während des Startvorgangs fließen 160 A und die Klemmenspannung fällt auf 11 V ab (Zahlen leicht gerundet).

Frage 1: Wie groß ist der Innenwiderstand der Ersatzschaltung für diese Quelle?

Frage 2: Wie sieht die vollständige Kennlinie aus (grafische Darstellung)?

Frage 3: Welcher Bereich der Kennlinie ist praktisch nutzbar, wenn 200 A nicht überschritten werden dürfen?

Frage 4: Wo liegt dieser Bereich in der Darstellung für P und  $P_i$  als  $f(R_a)$  in Bezug auf  $P_{max}$ ?

#### Aufgabe 9.2

An den Klemmen einer Blockbatterie werden  $U_1 = 7,5$  V und  $I_1 = 0,3$  A bei Belastung mit  $R_1$  gemessen. Bei Belastung mit  $R_2$  werden  $U_2 = 8,5$  V und  $I_2 = 0,1$  A gemessen.

Frage 1: Wie groß sind die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Ersatzschaltung der Blockbatterie?

Frage 2: Warum reichen die zwei Messpunkte, um Frage 1 zu beantworten?

#### Aufgabe 9.3

An einem Audioverstärker kann mit Lautsprechern von  $4 \Omega$  eine Nennleistung von 80 W pro Kanal erreicht werden. Bei Betrieb mit Lautsprechern von  $8 \Omega$  können nur 50 W entnommen werden.

Frage 1: Wie groß ist der Innenwiderstand eines Ausgangs des Audioverstärkers, wenn dieser im betrachteten Bereich konstant ist?

Frage 2: Wie groß wäre die Ausgangsleistung bei  $8 \Omega$ , wenn die Ausgangsspannung wie bei  $4 \Omega$  auch bei  $8 \Omega$  noch vorhanden wäre (ähnlich unmittelbarer Leerlaufnähe)?

#### Aufgabe 9.4

Ein Netzgerät ist auf die Spannung  $U_0 = 10$  V und die Strombegrenzung  $I_{max} = 0,5$  A eingestellt. Die Regelung bewirkt, dass für  $I < I_{max}$  die Klemmenspannung konstant gehalten wird. Danach erfolgt eine Umschaltung der Regelung, es wird  $I = I_{max}$  konstant gehalten und die Spannung nimmt bei einer weiteren Verkleinerung des Belastungswiderstandes ab.

Frage: Wie sieht die Kennlinie aus (grafische Darstellung)?

#### Aufgabe 9.5

An einem Solarpaneel wurden die folgenden Messpunkte ermittelt.

U/V	21,7	20,5	19	17,5	10	5	0
I/A	0	0,5	1,5	3,0	3,2	3,3	3,4

Frage 1: Wie sieht die Kennlinie  $U = f(I)$  aus (grafische Darstellung)?

Frage 2: Wie sieht die Kennlinie  $P = f(I)$  aus (in die grafische Darstellung einfügen)?

Frage 3: Wo liegt der Maximum-Power-Point (MPP) und welche Bedeutung ist aus der Kennlinie für ihn abzulesen?

## 9.2 Netzwerke – verzweigte und vermaschte Schaltungen

### 9.2.1 Analyse verzweigter und vermaschter Schaltungen

Verzweigte und vermaschte Schaltungen besitzen *mehrere Knotenpunkte* (Verzweigungen) **und** somit *mehrere Maschen* (geschlossene Stromkreise).

Zur Berechnung dieser Schaltungen (oder auch Netzwerke) ist es für die Auswahl der günstigsten Methode sinnvoll, folgende Aspekte zu betrachten:

1. Besitzt das Netzwerk eine oder mehrere Quellen?
2. Erfordert die Lösung der Aufgabe die Berechnung von Strom und/oder Spannung an einem oder mehreren bzw. allen Elementen der Schaltung?

Aus den Kapiteln 4 bis 6 stehen folgende Gesetze und Gleichungen für diese Berechnungen zur Verfügung:

1. Gesetze, die *ohne Einschränkungen* gelten, sind
  - die Kirchhoff'schen Sätze – Maschensatz und Knotenpunktsatz sowie
  - die Strom-Spannungs-Beziehung an den Bauelementen R, C und L (gegebenenfalls einschließlich ihrer Nichtlinearitäten).
2. Gesetze, die *nur für lineare Bauelemente* gelten bzw. abgeleitet wurden, sind
  - die Stromteilerregel,
  - die Spannungsteilerregel und
  - die Gleichungen zur Reihen- und Parallelschaltung von Elementen.

Darüber hinaus können weitere Denkweisen zusätzliche Möglichkeiten erschließen, z.B.

- das Überlagerungsprinzip (siehe Abschnitt 9.3),
- die Zusammenfassung zu Ersatzschaltungen (siehe Abschnitt 9.4),
- die Einführung von Maschenströmen bzw. Knotenspannungen (siehe Abschnitt 9.6) oder
- die Rechnersimulation (siehe Abschnitt 9.5).

Im Netzwerk bedeuten

- Zweige: Schaltungsteil von einem Knoten zu dem nächsten
- Maschen: ein beliebiger einfacher geschlossener Umlauf über verschiedene Zweige

**Praxistipp:** Sind mehrere Quellen vorhanden und sollen alle Ströme und Spannungen ermittelt werden, bietet sich eine **Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen** an.

Die Vorgehensweise soll an einem Beispiel dargestellt werden.

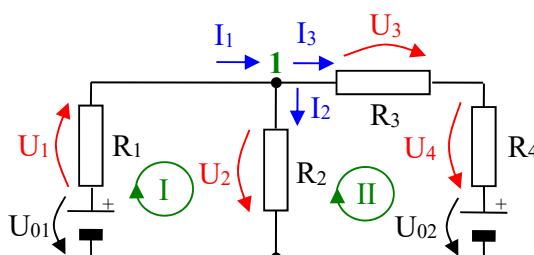


Abb. 9.9: Beispiel für ein Netzwerk

In Abb. 9.9 könnte vereinfacht der Vorgang bei der Starthilfe für einen PKW dargestellt sein. Dann wären  $R_2$  der Widerstand des Anlassers,  $R_3$  der Widerstand des Starthilfekabels sowie rechts und links die beiden PKW-Akkus.

Gegeben (bekannt) sind die Schaltung und ihre Bauelemente mit ihren Parameter (in Abb. 9.9 als  $U_{0x}$  und  $R_x$  dargestellt).

- Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen gewählt und bezeichnet werden<sup>85</sup>. (In Abb. 9.9 mit geraden und gebogenen Pfeilen geschehen.)  
**Achtung:** An einem Bauelement kann nur entweder der Strom oder die Spannung gewählt werden; die jeweils andere Größe ist danach durch die Zählpfeilregeln festgelegt!

**Praxistipp:** In jedem Zweig den Strom wählen und danach alle Spannungen in diesem Zweig nach den Zählpfeilregeln hinzufügen.

- Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Knoten bestimmt werden. Diese ergeben sich aus der Anzahl der wirklichen Knoten minus Eins. Wirkliche Knoten sind solche, von denen nur Zweige mit wenigstens einem Element ausgehen.

**Praxistipp:** Aus Gründen der Zeichnung angeordnete Knoten, die mit einem Kurzschluss direkt verbunden sind, zusammenfassen!

In Abb. 9.9 sind zwei Knoten, folglich ist nur ein Knoten unabhängig.

- Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Maschen bestimmt werden.

**Praxistipp:** Deren Anzahl folgt am einfachsten aus der Anzahl der Zweige (zwischen wirklichen Knoten) minus der Anzahl der unabhängigen Knoten.

In Abb. 9.9 gibt es drei Zweige minus einen unabhängigen Knoten gleich zwei unabhängige Maschen<sup>86</sup>.

- Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Knoten und Maschen gewählt, bezeichnet und die Gleichungen aufgestellt werden. In Abb. 9.9 wurden der gewählte Knoten durch eine „1“ und die gewählten Maschen mit I und II sowie Umlaufrichtung gekennzeichnet. Es hätte genauso gut der andere Knoten gewählt werden können, dann fließen alle Ströme an dem Knoten in die entgegengesetzte Richtung (ergibt dieselbe Gleichung, deshalb nur ein unabhängiger Knoten). Genauso gut könnte die große Masche anstelle einer der anderen gewählt werden.

**Praxistipp:** Richtlinie ist lediglich, dass die Gleichungen so wenige Terme wie möglich beinhalten sollten.

$$\begin{array}{rcl} 1 & I_1 & = I_2 + I_3 \\ I & 0 & = U_1 + U_2 - U_{01} \\ II & 0 & = U_3 + U_4 + U_{02} - U_2 \end{array} \quad (9.5)$$

Durch Einsetzen der Ströme entsprechend der jeweiligen Strom-Spannungs-Beziehung und Ordnen nach den unbekannten Strömen folgt ein lineares eindeutig lösbares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (bei linearen Bauelementen)<sup>87</sup>.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 0 & = I_1 - I_2 - I_3 \\ I & U_{01} & = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ II & U_{02} & = R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 \end{array} \quad (9.6)$$

<sup>85</sup> Die Namensgebung kann beliebig erfolgen, muss aber eindeutig sein.

<sup>86</sup> Tiefergehende Darlegungen sind der Literatur, z.B. (Lun91 S. 50-94), zu entnehmen.

<sup>87</sup> Beachte, dass bei der erfolgten Namensgebung  $U_4 = R_4 I_3$  ist.

5. **Schritt der Berechnung:** Lösen des Gleichungssystems mit aus der Mathematik bekannten Verfahren. In diesem Beispiel soll die Kramer'sche Regel angewendet werden, weil sie einen eindeutigen Algorithmus besitzt. Dazu wird (9.6) in Matrizendarstellung umgeformt (vergleiche Abschnitt 8.1).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U_{01} \\ U_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Dabei stehen links der Spaltenvektor der bekannten Werte und rechts die Koeffizientenmatrix multipliziert mit dem Spaltenvektor aus den unbekannten Werten. Aus der Koeffizientenmatrix kann die Koeffizientendeterminante geschrieben und ausgerechnet werden (siehe Abschnitt 8.1).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{vmatrix} = -R_2(R_3 + R_4) + 0 - R_1R_2 - 0 - 0 - (R_3 + R_4)R_1$$

Wird in der Koeffizientendeterminante die zweite Spalte durch die bekannten Werte ersetzt, folgt die Determinante  $D_2$ .

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U_{01} & 0 \\ 0 & U_{02} & -(R_3 + R_4) \end{vmatrix} = -U_{01}(R_3 + R_4) + 0 - R_1U_{02} - 0 - 0 - 0$$

Die Unbekannte  $I_2$  ergibt sich aus

$$I_2 = \frac{D_2}{D}, \quad (9.8)$$

und  $I_2$  wird im vorliegenden Beispiel

$$I_2 = \frac{-U_{01}(R_3 + R_4) - U_{02}R_1}{-R_2(R_3 + R_4) - R_1R_2 - R_1(R_3 + R_4)} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}. \quad (9.9)$$

Die anderen Ströme werden auf analoge Weise berechnet.

War der Strom am Anfang in die falsche Richtung gewählt worden, ergibt sich ein negativer Zahlenwert, was exakt dem richtigen Ergebnis entspricht.

**Praxistipp:** Auf keinen Fall sollte während der Rechnung die Wahl geändert werden, das führt fast sicher zu Fehlern.

Die Spannungen können anschließend einfach durch die jeweilige Strom-Spannungs-Beziehung bestimmt werden.

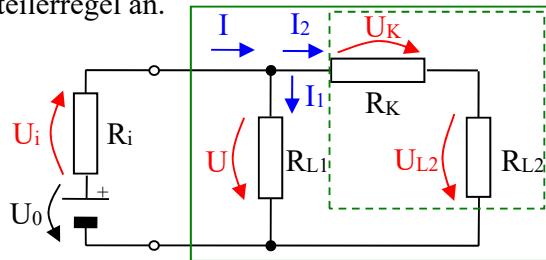
Im Falle von nichtlinearen Koeffizienten ist im Allgemeinen nur eine Lösung mit Rechnersimulation (siehe Abschnitt 9.5) Erfolg versprechend.

Bei zeitabhängigen Größen ergibt sich ein Differentialgleichungssystem, was dementsprechend gelöst werden muss (siehe Abschnitt 11).

**Praxistipp:** Ist nur eine Quelle vorhanden und nur ein interessierender Strom bzw. eine Spannung zu ermitteln, bietet sich eine **Berechnung mit den Teilerregeln, den Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie den Strom-Spannungs-Beziehungen** an. Dazu müssen diese eventuell mehrfach angewendet werden.

Ein Beispiel soll das Vorgehen verdeutlichen.

In Abb. 9.10 könnte vereinfacht an einen Audioverstärker ( $U_0$  und  $R_i$ )<sup>88</sup> ein Lautsprecher ( $R_{L1}$ ) direkt und ein zweiter ( $R_{L2}$ ) über ein längeres Kabel ( $R_K$ ) angeschlossen sein. Gegeben (bekannt) sind die Schaltung und ihre Bauelemente mit ihren Parametern (in Abb. 9.10 als  $U_0$  und  $R_x$  dargestellt). Gesucht wird die Spannung an  $R_{L2}$ . Dazu bietet sich die Spannungsteilerregel an.



**Abb. 9.10: Beispiel für ein Netzwerk mit einer Quelle**

1. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden<sup>89</sup>.

**Praxistipp:** Bei nur einer Quelle wird am sinnvollsten physikalisch richtig bezeichnet.

(In Abb. 9.10 mit geraden und gebogenen Pfeilen geschehen.)

2. **Schritt der Berechnung:** Es wird entweder ausgehend vom gesuchten Element oder von der Quelle eine reine Reihenschaltung ermittelt. (In Abb. 9.10 ist ausgehend vom gesuchten Element die reine Reihenschaltung mit einem gestrichelten Kasten versehen worden.) Dafür gilt:

$$\frac{U_{L2}}{U} = \frac{R_{L2}}{R_{L2} + R_K}.$$

**Praxistipp:** Nur die Elemente der reinen Reihenschaltung teilen die an ihnen anliegende Spannung unter sich auf.

3. **Schritt der Berechnung:** Es kann, da die Aufteilung zwischen  $R_K$  und  $R_{L2}$  geklärt ist, der mit einem Kasten umrandete Schaltungsteil zu einem Widerstand zusammengefasst und noch einmal die Spannungsteilung angewandt werden.

$$\frac{1}{R_{L1KL2}} = \frac{1}{R_{L1}} + \frac{1}{R_K + R_{L2}} \quad R_{L1KL2} = \frac{R_{L1}(R_K + R_{L2})}{R_{L1} + R_K + R_{L2}}$$

Nun liegt wieder eine reine Reihenschaltung von  $R_i$  und  $R_{L1KL2}$  vor und es werden

$$\frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1KL2}}{R_i + R_{L1KL2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{U_{L2}}{U_0} = \frac{U_{L2}}{U} \frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1}R_{L2}}{R_iR_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}.$$

(9.10)

**Praxistipp:** Die Berechnung kann auch mit der Stromteilerregel erfolgen.

<sup>88</sup> Da die Frequenz im Beispiel unwichtig ist, reicht eine Gleichstromuntersuchung.

<sup>89</sup> Die Namensgebung kann wiederum beliebig erfolgen, muss aber eindeutig sein.

1. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden (wie oben).
2. **Schritt der Berechnung:** Es wird der gestrichelte Schaltungsteil zusammengefasst ( $R_{KL2} = R_K + R_{L2}$ ), er stellt dann eine reine Parallelschaltung mit  $R_{L1}$  dar.

**Praxistipp:** Nur die Elemente der reinen Parallelschaltung teilen den durch sie fließenden Strom unter sich auf.

$$\frac{I_2}{I} = \frac{R_{L1} \| R_{KL2}}{R_{KL2}} = \frac{R_{L1} \| R_{KL2}}{R_{KL2}}$$

3. **Schritt der Berechnung:** Aus der Sicht der Quelle wird  $R_{ges}$  und damit dann  $I$  berechnet.

$$R_{ges} = R_i + R_{L1} \| R_{KL2}$$

und

$$I = \frac{U_0}{R_{ges}} = \frac{U_0(R_{L1} + R_K + R_{L2})}{R_i R_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an  $R_{L2}$  wird  $U_{L2}$  bestimmt.

$$U_{L2} = I_2 R_{L2} = I \frac{I_2}{I} R_{L2} = \frac{U_0 R_{L1} R_{L2}}{R_i R_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}$$

Das Ergebnis stimmt mit ( 9.10 ) überein. Ist  $R_i$  vernachlässigbar klein, wird

$$U_{L2} = \frac{U_0 R_{L2}}{R_K + R_{L2}} , \text{ dagegen } U_{L1} = U_0 .$$

Daraus ist zu erkennen, dass der Kabelwiderstand möglichst klein gegenüber dem Lautsprecherwiderstand sein muss, damit Lautsprecher zwei gleich „laut“ sein kann.

**Praxistipp:** Lautsprecherwiderstände bewegen sich heute zwischen 2 und 4  $\Omega$ , somit müssen für Lautsprecher sehr gute Kabel benutzt werden.

Diese Art der Berechnung erfordert mehr elektrotechnisches Verständnis, dagegen etwas weniger mathematische Kenntnisse und Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme.

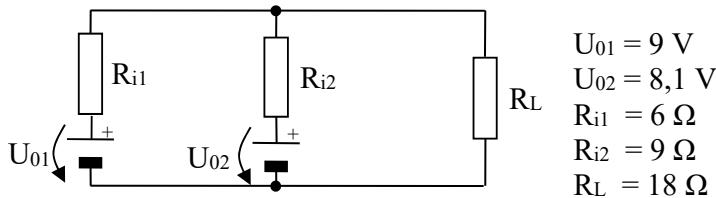
Die Rechnung müsste, wenn mehrere Ströme und Spannungen gesucht werden, dafür jedes Mal fast komplett wiederholt werden. (Nur lineare Elemente!)

Ersatzweise kann auch **vielfach hintereinander die Strom-Spannungs-Beziehung** auf Widerstände und zusammengefasste Widerstände verwendet werden, um abwechselnd einen Strom oder eine Spannung zu bestimmen, bis man am Ziel ist.

## 9.2.2 Übungsaufgaben mit Beispielen zur Schaltungsberechnung

### Aufgabe 9.6

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $R_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich.

**Abb. 9.11: Schaltung für Aufgabe 9.6**

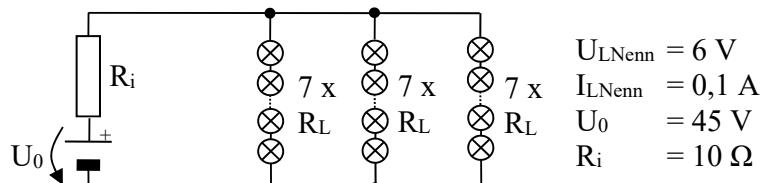
Frage 1: Wie groß ist der Strom durch R<sub>L</sub>; welchen Anteil liefern beide Quellen?

Frage 2: Welche Ströme liefern die Batterien, wenn beide 9 V und R<sub>i</sub> = 6 Ω hätten?

Hinweis: Berechnen Sie mit den Kirchhoff'schen Sätzen alle drei Ströme.

### Aufgabe 9.7

Eine Außenlichterkette besteht aus drei parallel geschalteten Reihen von je sieben Lampen und ist an eine Quelle angeschlossen.

**Abb. 9.12: Schaltung der Lichterkette**

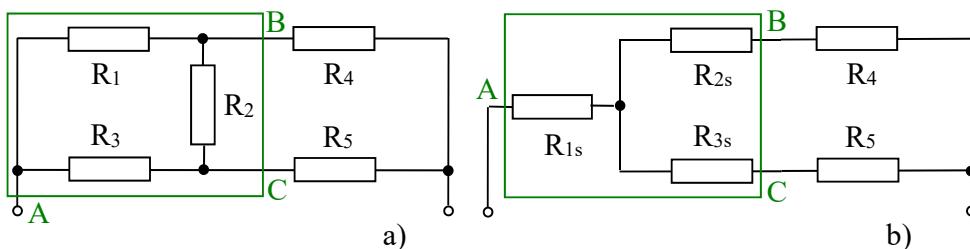
Frage 1: Wie groß ist R<sub>L</sub>; welcher Strom fließt durch jede Lampe im Normalfall?

Frage 2: Wie ändert sich der Strom, wenn in einer Reihe zwei Lampen ausfallen (bei guten Ketten erhalten die Lampen dabei einen Kurzschluss, die restlichen Lampen leuchten weiter und zeigen so die ausgefallenen an.)

Hinweis: Benutzen Sie die Stromteilerregel.

### Aufgabe 9.8

Bei Schaltungen, in denen Brückenzweige enthalten sind, gibt es keine reinen Reihen- oder Parallelschaltungen. Diese Schaltungen wären nur mit den Kirchhoff'schen Sätzen berechenbar. Abhilfe schafft die Stern-Dreieck-Umformung<sup>90</sup>.

**Abb. 9.13: a) Brückenschaltung als Dreieckschaltung; b) Sternschaltung**

In Abb. 9.13 a) können keine reinen Reihen- und Parallelschaltungen angegeben werden, in b) sind diese nach Umformung in Sternschaltung deutlich sichtbar.

<sup>90</sup> Dreieck- und Sternschaltung sind zwei mögliche Anordnungen von Bauelementen zwischen drei Anschlüssen. Sie sind keineswegs an Drehstrom gebunden.

Frage: Wie lauten  $R_{1s}$ ,  $R_{2s}$  und  $R_{3s}$  bei gegebenen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ ?

Hinweis: Alle Ströme in die Klemmen A, B und C sowie alle Spannungen zwischen je zwei Klemmen müssen bei beiden Schaltungsvarianten stets gleich sein (nur dann sind die Schaltungen austauschbar). Durch Gleichsetzen der Widerstandswerte beider Varianten gesehen von A und B mit offenem C, von B und C mit offenem A sowie von C und A mit offenem B sind drei Gleichungen mit den drei unbekannten  $R_{1s}$ ,  $R_{2s}$  und  $R_{3s}$  zu gewinnen.

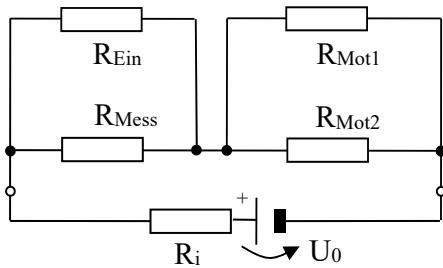
### Aufgabe 9.9

Zur Veränderung des Messbereiches eines Amperemeters wird ein Widerstand (Shunt) parallel geschaltet, damit nur ein definierter Teil des Gesamtstromes durch das Amperemeter fließt. Das Amperemeter hat einen Endausschlag von  $50 \mu\text{A}$  und dabei einen Spannungsabfall von  $100 \text{ mV}$ .

Frage: Wie groß muss ein Shunt sein, wenn der Endausschlag  $1 \text{ A}$  betragen soll?

### Aufgabe 9.10

Zwei Motoren (Widerstände  $R_{\text{Mot}1}$  und  $R_{\text{Mot}2}$  von je  $200 \Omega$ ) steuern eine Kamerabewegung. Zum Schutz wird der Motorstrom mit einem Messwiderstand ( $R_{\text{Mess}} = 20 \Omega$ ) gemessen, an den ein Messverstärker (Eingangswiderstand  $R_{\text{Ein}} = 10 \text{ k}\Omega$ ) angeschlossen ist. Die Versorgung übernimmt eine Quelle mit  $U_0 = 24 \text{ V}$  und  $R_i = 0,1 \Omega$ .



**Abb. 9.14: Schaltung der Stromversorgung für die Kamerasteuerung (vereinfacht)**

Frage: Wie groß ist der Gesamtwiderstand von  $U_0$  aus gesehen und welchen Strom muss die Quelle liefern?

Hinweis: Widerstände mit geringerem Einfluss als 1% können vernachlässigt werden. Das ist zu begründen.

**Praxistipp:** Die Aufgaben verdeutlichen, dass eine Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen immer möglich ist, wenn mathematische Methoden zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems zur Verfügung stehen.

Nur unter Einbeziehung der Stern-Dreieck-Umformung können alle Schaltungen mit Hilfe der Teilerregeln, der Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie der Strom-Spannungs-Beziehungen, solange diese linear sind, berechnet werden.

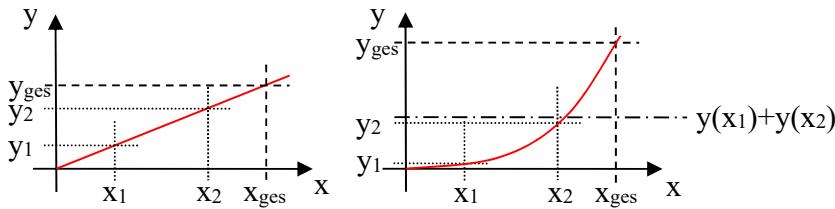
(Für Strom-Spannungs-Beziehungen mit Differentialen werden im Abschnitt 11 entsprechende Methoden behandelt.)

## 9.3 Überlagerungsprinzip

### 9.3.1 Schaltungsanalyse mit Hilfe des Überlagerungssatzes

Dem Überlagerungssatz liegt die **Denkweise** zugrunde, die *Wirkungen* jeder Quelle *einzelnen zu berechnen und anschließend zur Gesamtwirkung zu addieren*.

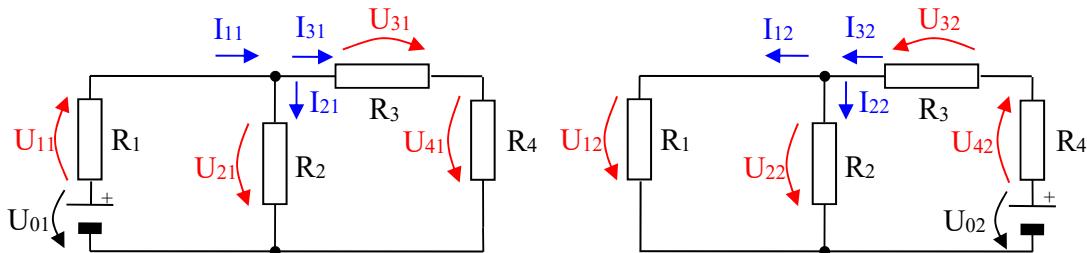
**Praxistipp:** Das ist immer möglich, solange nur Bauelemente mit linearen Strom-Spannungs-Beziehungen vorliegen.



**Abb. 9.15: Linearer und nichtlinearer Zusammenhang**

Für einen linearen Zusammenhang gilt  $y_{\text{ges}} = y(x_{\text{ges}}) = y(x_1+x_2) \equiv y(x_1) + y(x_2)$ , für einen nichtlinearen Zusammenhang wird stets  $y(x_1+x_2) \neq y(x_1) + y(x_2)$ ; vergleiche Abb. 9.15.

Die Vorgehensweise soll zum besseren Vergleich an dem entsprechenden Beispiel für  $I_2$  dargestellt werden, das auch in Abschnitt 9.2.1 Abb. 9.9 berechnet wurde.



**Abb. 9.16: Aufteilung in Schaltungen für jede Quelle**

1. **Schritt der Berechnung:** Die Schaltung muss in Schaltungen für jede Quelle aufgeteilt werden (siehe Abb. 9.16).

**Praxistipp:** Die jeweils anderen idealen *Spannungsquellen* werden *durch einen Kurzschluss* bzw. die jeweils anderen idealen *Stromquellen* *durch einen Leerlauf* ersetzt.

2. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden.

**Praxistipp:** Bei nur einer Quelle wird am sinnvollsten physikalisch richtig bezeichnet.

(In Abb. 9.16 mit geraden und gebogenen Pfeilen geschehen.)

3. **Schritt der Berechnung:** Mit den Teilerregeln, den Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie den Strom-Spannungs-Beziehungen wird für beide Schaltungen einzeln die jeweils gesuchte Größe berechnet (hier  $I_2$ ). Dabei ist zu kennzeichnen, von welcher Quelle der Anteil stammt.

$$\frac{I_{21}}{I_{11}} = \frac{\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}{R_2} = \frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4} \quad I_{11} = \frac{U_{01}}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}$$

$$\frac{I_{22}}{I_{32}} = \frac{\frac{R_2R_1}{R_1+R_2}}{R_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2} \quad I_{32} = \frac{U_{02}}{R_3 + R_4 + \frac{R_2R_1}{R_1+R_2}}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Die berechneten Anteile von jeder Quelle müssen entsprechend ihrer Richtungen addiert werden. In unserem Beispiel haben  $I_{21}$  und  $I_{22}$  die gleiche Richtung, sodass auch  $I_2$  in diese Richtung zeigt.

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4)}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + \frac{U_{02}R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (9.11)$$

Das Ergebnis stimmt mit (9.9) überein. Auch hier ist zu sehen, dass diese Art der Berechnung mehr elektrotechnisches Verständnis, dagegen etwas weniger Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme erfordert.

**Praxistipp:** Diese Denkweise ermöglicht darüber hinaus eine genaue Zuordnung der Wirkungen zu den Ursachen und insbesondere bei Quellen mit verschiedenen Frequenzen (z.B. Gleichstrom zur Versorgung und NF-Signale) eine getrennte Betrachtung und getrennte Optimierung der Schaltung.

### 9.3.2 Übungsaufgaben zu Anwendungen des Überlagerungssatzes

#### Aufgabe 9.11

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $R_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich.

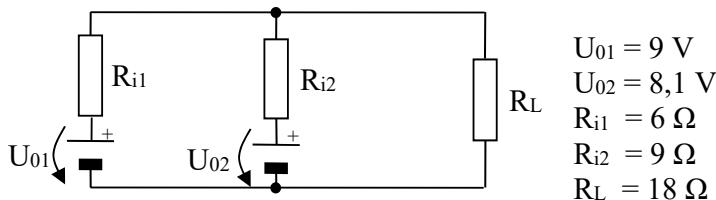


Abb. 9.17: Schaltung von Aufgabe 9.6

Frage 1: Wie groß ist der Strom durch  $R_L$ ; welchen Anteil liefern beide Quellen?

Frage 2: Welche Ströme liefern die Batterien, wenn beide 9 V und  $R_i = 6 \Omega$  hätten?

Hinweis: Berechnen Sie nach dem Überlagerungssatz beide Anteile.

#### Aufgabe 9.12

Gegeben ist die Schaltung einer Transistorverstärkerstufe. Die Kondensatoren haben für die vorliegende Signalfrequenz einen Widerstand von  $\approx 0$  und für Gleichstrom von  $\infty$ .

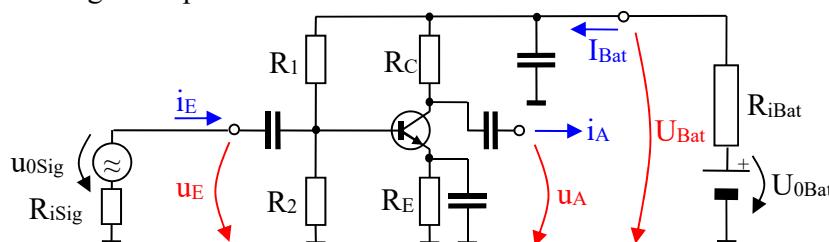


Abb. 9.18: Transistorverstärkerstufe mit Batteriespannung und Signalen

Frage: Wie sehen jeweils die Schaltungen für die Gleichstromversorgung (Quelle  $U_{0\text{Bat}}$ ) und die Signalverstärkung (Quelle  $U_{0\text{Sig}}$ ) aus?

Hinweis: Kondensatoren mit einem Widerstand von  $\approx 0$  durch „Kurzschluss“ ersetzen.

Kondensatoren mit einem Widerstand von  $\infty$  führen zum Wegfall des Zweiges, in dem kein Strom fließen kann.

## 9.4 Ersatzzweipole (Ersatzschaltungen)

### 9.4.1 Schaltungsanalyse mit Hilfe von Ersatzzweipolen

Der Nutzung von Ersatzschaltungen liegt die **Denkweise** zugrunde, *Schaltungsteile zusammenzufassen*, deren Details gerade nicht interessieren.

**Praxistipp:** Die Zusammenfassung zu einer Schaltung mit zwei Klemmen ergibt im Allgemeinen einen aktiven Zweipol, der bei linearen Bauelementen dem einfachsten aktiven Zweipol entspricht.

Die Vorgehensweise soll zum besseren Vergleich wiederum an dem Beispiel für  $I_2$  dargestellt werden, wie in Abschnitt 9.2.1 Abb. 9.9 und in Abschnitt 9.3.1 Abb. 9.16 berechnet.

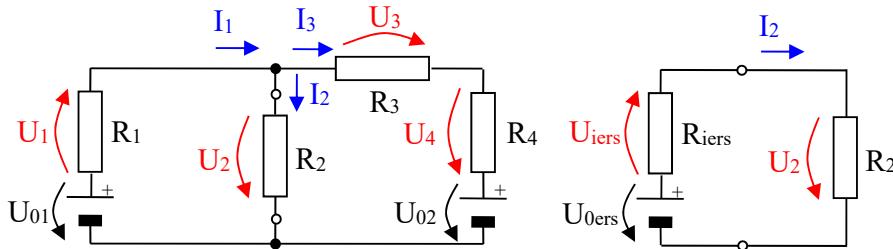


Abb. 9.19: Zusammenfassung zu einem Ersatzzweipol

- Schritt der Berechnung:** Die Schaltung, deren Teile zusammengefasst werden sollen, muss gekennzeichnet werden (z.B. durch Klemmen wie in Abb. 9.19). Für den Ersatzzweipol sind die beiden Parameter  $R_{iers}$  und  $U_{0ers}$  beziehungsweise alternativ für einen davon  $I_{kers}$  zu bestimmen.
- Schritt der Berechnung:** Bestimmung der Ersatzspannungsquelle  $U_{0ers}$  aus der Leerlaufspannung an den Klemmen (d.h.,  $R_2$  wird  $\infty$  gesetzt).

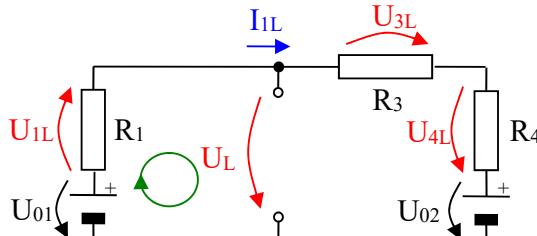


Abb. 9.20: Schaltung zur Bestimmung von  $U_L$

Es fließt im Beispiel nur ein Strom in diesem Kreis. Dabei wird  $I_L$  durch  $U_{01}$  angetrieben und durch  $U_{02}$  gebremst.

$$I_L = \frac{U_{01} - U_{02}}{R_1 + R_3 + R_4}$$

Aus einem kleinen Maschensatz (dargestellter Umlauf) folgt  $U_L$ .

$$0 = U_{IL} + U_L - U_{01} \quad U_L = U_{01} - I_L R_1$$

$$U_L = U_{0ers} = U_{01} - \frac{(U_{01} - U_{02})R_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1 + R_3 + R_4}$$

3. **Schritt der Berechnung:** Bestimmung des Ersatzzweipolwiderstandes  $R_{\text{iers}}$  durch Berechnung des Gesamtwiderstandes von den Klemmen aus gesehen. Dabei werden ideale Spannungsquellen durch einen Kurzschluss bzw. ideale Stromquellen durch einen Leerlauf ersetzt.

$$R_{\text{iers}} = R_1 \parallel (R_3 + R_4) = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Bestimmung von  $I_2$  in dem entstandenen Grundstromkreis.

$$I_2 = \frac{U_{0\text{ers}}}{R_{\text{iers}} + R_2} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (9.12)$$

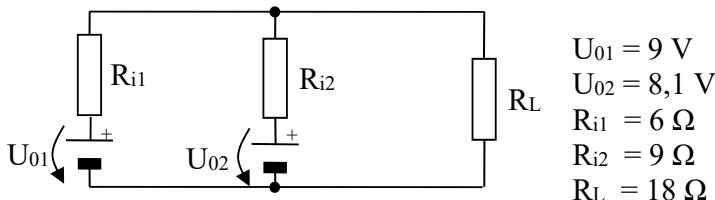
Das Ergebnis stimmt natürlich wieder mit (9.9) und (9.11) überein. Hier ist ebenfalls zu sehen, dass diese Art der Berechnung mehr elektrotechnisches Verständnis erfordert.

**Praxistipp:** Solches Vorgehen ist besonders nützlich, wenn der Ersatzzweipol mehrfach wieder verwendet werden kann.

## 9.4.2 Übungsaufgaben zur Anwendung von Ersatzzweipolen

### Aufgabe 9.13

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $R_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich.



$$\begin{aligned} U_{01} &= 9 \text{ V} \\ U_{02} &= 8,1 \text{ V} \\ R_{i1} &= 6 \Omega \\ R_{i2} &= 9 \Omega \\ R_L &= 18 \Omega \end{aligned}$$

Abb. 9.21: Schaltung von Aufgabe 9.6

Frage 1: Wie groß ist der Strom durch  $R_L$ ?

Frage 2: Welcher Strom fließt, wenn beide Batterien 9 V und  $R_i = 6 \Omega$  hätten?

Hinweis: Berechnen Sie diesmal mit Hilfe eines Ersatzzweipols für beide Batterien.

### Aufgabe 9.14

Die Bestimmung von Ersatzzweipolen für den Ein- und Ausgang der Transistorverstärkerstufe in Bezug auf die Signalquelle (entspr. Aufgabe 9.12) zeigt Abb. 9.22. Die Ersatzquelle für den Eingang kann vernachlässigt werden. Am Ausgang erscheint für den Transistor eine gesteuerte Stromquelle mit  $I_c = \beta i_E$  ( $\beta$  Stromverstärkungsfaktor,  $i_E$  Eingangsstrom). (Im Beispiel sind  $R_{i\text{Ein}} = R_1 \parallel R_2 \parallel r_{BE} = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $\beta = 200$  und  $R_{i\text{Aus}} = R_C \parallel r_{BE} = 5 \text{ k}\Omega$ .)



Abb. 9.22: Ersatzschaltungen für Ein- und Ausgang der Transistorverstärkerstufe

Frage 1: Wie groß sind die Eingangsspannung  $u_E$ , die Leerlaufausgangsspannung  $u_A$  und die Verstärkung  $v_0 = u_A/u_E$  bei  $i_E = 10 \mu\text{A}$ ?

Frage 2: Wie groß ist die Ausgangsspannung, wenn ein Widerstand von  $10 \text{ k}\Omega$  den Ausgang zusätzlich belastet (z. B. eine zweite Verstärkerstufe)?

## 9.5 Modellierung und Simulation

### 9.5.1 Grundlagen der Modellierung für Simulationsprogramme

Die Möglichkeiten der numerischen Lösung von Gleichungssystemen einschließlich von Differentialgleichungssystemen und nichtlinearen Bauelementen führte zur Entwicklung einer Vielzahl von Simulationsprogrammen. Diese Programme unterscheiden sich insbesondere durch die Art der Eingabe. Da auch das Aufstellen der formalen Gleichungssysteme von den Programmen mit übernommen wird, erfolgt die Eingabe in Form eines für das Programm verständlichen Modells.

Das **Modell** für ein Simulationsprogramm muss mit einer *formalen Sprache* erstellt werden. Dazu eignen sich elektrische *Schaltzeichnungen*, *Block-* oder *Funktionsdiagramme*, *Petrinetze* (jeweils mit genau festgelegten Zeichnungselementen) oder *Hardwarebeschreibungssprachen*.

Die Aufgabe besteht nun darin, ein widerspruchsfreies Modell mit den für das Programm verständlichen Sprachen zu formulieren, das der elektrischen Anlage so entspricht, als ob mit ihr experimentiert werden soll.

**Praxistipp:** Dafür gelten folgende Aspekte:

1. Das Modell muss stets physikalisch widerspruchsfrei sein.
2. Die Anlage sollte so stark wie möglich vereinfacht und auf die wesentlichen Funktionen beschränkt werden, indem alles, was irgendwie vertretbar ist, vernachlässigt oder zusammengefasst wird. (Solange Punkt 1. dabei nicht verletzt wird.) *Es müssen alle im Modell vorhandenen Parameter variiert werden, wodurch sehr schnell bei anderem Vorgehen eine unübersehbare Datenflut entsteht.*
3. An den Stellen der elektrischen Anlage, die genauer untersucht werden müssen, wird schrittweise das Modell verfeinert. Jede Veränderung (Ursache) muss der entstehenden Wirkung zugeordnet werden können.
4. Das Entscheidende ist die Simulationsstrategie. (Die Simulation entspricht einem „Experiment“ und alles, was nicht erprobt wird, bleibt unbekannt.) Die Strategie muss so geplant werden, dass ein vollständiger Überblick über das Verhalten der Anlage entsteht. Das Verhalten kann z.B. in Form von grafischen Darstellungen (analog zu Messkurven) beschrieben werden. Dagegen entstehen mathematische Zusammenhänge (analog zu Formeln) lediglich als Annäherung zu Messkurven.

Physikalisch widerspruchsfrei bedeutet z.B., dass Folgendes beachtet werden muss:

- Eine ideale Spannungsquelle, eine Kapazität und ein Schalter können nicht miteinander in irgendeiner Kombination parallel angeschlossen werden.
- Eine ideale Stromquelle, eine Induktivität und ein Schalter können nicht in irgendeiner Kombination zueinander in Reihe liegen.
- Eine Zeitkonstante  $\tau = 0$  in rückgekoppelten Kreisen führt zu Stabilitätsproblemen bei der Berechnung.
- Es sollte die Funktion einer Schaltung nicht nur durch „zufällig“ nicht vernachlässigte parasitäre oder Verlustelemente (z.B. einen Innenwiderstand der Quelle) gegeben sein.

Schon diese wenigen Bemerkungen machen deutlich, dass auch die Simulation mit einem Rechner ein *sehr gutes elektrotechnisches Verständnis* und einige *Erfahrungen* voraussetzt. Nicht zuletzt müssen die Ergebnisse *auf Plausibilität hin geprüft* und zur Nutzung *interpretiert* werden können.

(Weitergehende Darlegungen sind den Anleitungen der Programme zu entnehmen.)

Die Vorgehensweise bei der Modellierung und Simulation sollte im Weiteren praktisch kennengelernt werden.

### 9.5.2 Beispielaufgabe für eine Rechnersimulation

#### Aufgabe 9.15

Ein Akku und ein Generator arbeiten parallel (z.B. im PKW), um eine Last ohne Unterbrechung zu versorgen. Durch die ungleiche Konstruktion sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $\omega_1 L_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich (etwas erweiterte Aufgabe 9.6).

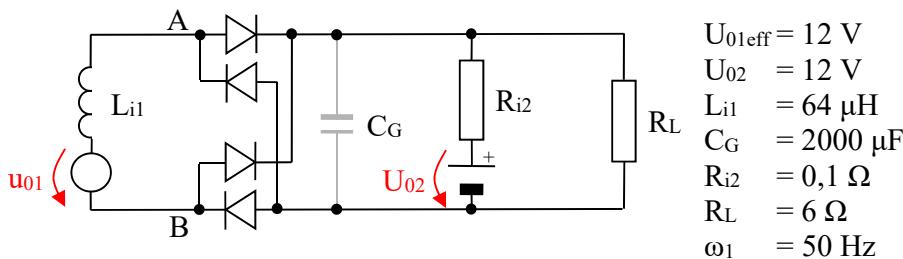


Abb. 9.23: Schaltung ähnlich Aufgabe 9.6

Frage 1: Wie sehen Strom und Spannung von  $R_L$  und bei den Punkten A und B über der Zeit aus?

Frage 2: Welche Veränderung gibt es, wenn ein Glättungskondensator  $C_G$  eingefügt wird?

Hinweis: Ideale Dioden einsetzen. Im Falle der Simulation geht der Rechner davon aus, dass im Startmoment die Quellen eingeschaltet werden.

## 9.6 Ausblick auf weitere Analysemethoden

Die dargestellten Methoden stellen die Basis für alle Netzwerkberechnungen dar. Sie werden durch weitere *mathematische Verfahren für die Lösung* der Gleichungssysteme sowie bei linearen Bauelementen zur *Reduzierung der Differentialbeziehungen* auf einfache algebraische Zusammenhänge ergänzt (siehe Abschnitt 10).

Modifikationen der Vorgehensweise bei der Lösung mit Hilfe der Kirchhoff'schen Sätze spielen heute keine Rolle mehr. So könnte die Anzahl der entstehenden Gleichungen auf die Anzahl der unabhängigen Knoten mit der Knotenspannungsanalyse (auch Knotenpotentialanalyse) oder auf die Anzahl der unabhängigen Maschen mit der Maschenstromanalyse verringert werden (siehe Abb. 9.24).

Bei der *Knotenspannungsanalyse* wird jedem unabhängigen Knoten eine Spannung gegen den (übrig gebliebenen günstig gewählten) Bezugsknoten zugeordnet. Die Knotensätze werden nur mit den Strom-Spannungs-Beziehungen und diesen Spannungen aufgestellt. Das ergibt in Abb. 9.24 eine Gleichung.

Bei der *Maschenstromanalyse* wird jeder unabhängigen Masche ein Strom, der diese Masche umfließt, zugeordnet. Die Maschensätze werden nur mit den Strom-Spannungs-Beziehungen und der jeweiligen Summe der Ströme durch den Zweig aufgestellt. (Das ergibt in Abb. 9.24 zwei Gleichungen.)

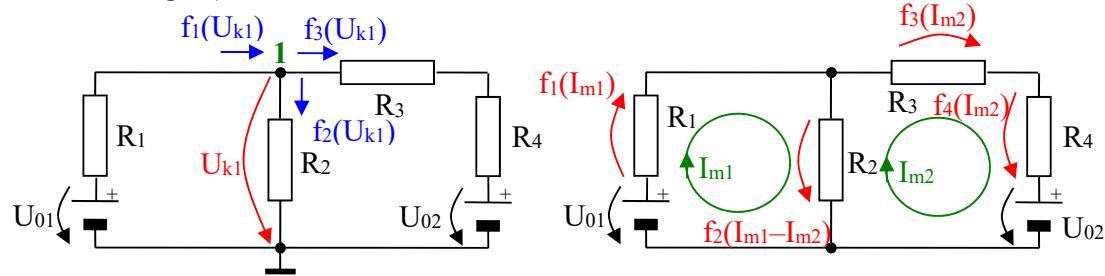


Abb. 9.24: Knotenspannungs- und Maschenstromanalyse

Die *Knotenspannungsanalyse* ist in formalisierter Form mit Matrizen in der Regel die *Grundlage der Simulationsprogramme*. (Ursprünglich waren sie wegen der geringeren Anzahl entstehender Gleichungen interessant.)

Weiterführende Darlegungen sind der Literatur (z.B. (Lun91 S. 50-94)) zu entnehmen.

# 10 Dritter Exkurs Mathematik

## 10.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlbereichs dar. Dazu wird die im reellen nicht lösbare  $\sqrt{-1}$  als Grundlage der neuen Zahlen genutzt. In der Elektrotechnik wird dafür die **imaginäre Einheit  $j=\sqrt{-1}$**  eingeführt<sup>91</sup>. Komplexe Größen sollen im Folgenden mit einem Unterstrich gekennzeichnet werden. Eine komplexe Zahl und die dazu konjugiert komplexe Zahl lauten:

$$\begin{aligned}\underline{z} &= x + jy \quad \text{komplexe Zahl} \\ \underline{z}^* &= x - jy \quad \text{dazu konjugiert komplexe Zahl}\end{aligned}\tag{10.1}$$

Mit dem Realteil  $\operatorname{Re}(z) = x$  und Imaginärteil  $\operatorname{Im}(z) = y$  wird

$$\underline{z} = \operatorname{Re}(x + jy) + j \operatorname{Im}(x + jy) = x + jy.$$

Eine weitere wichtige Darstellungsform erfolgt in **Polarkoordinaten**:

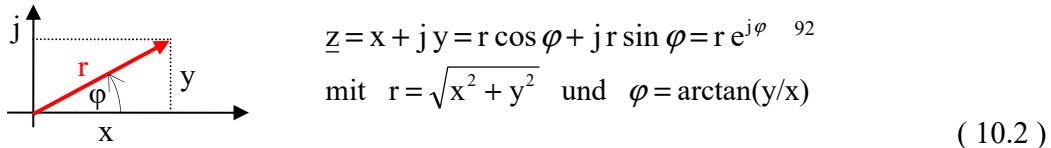


Abb. 10.1: Darstellung einer komplexen Zahl in kartesischen und Polarkoordinaten

## 10.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Bei einer **Addition/Subtraktion** komplexer Zahlen addieren/subtrahieren sich die Realteile zum Realteil der Summe/Differenz und gleichermaßen die Imaginärteile.

$$z = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) - (x_3 + jy_3) = (x_1 + x_2 - x_3) + j(y_1 + y_2 - y_3)$$

Die Addition/Subtraktion kann wie bei Vektoren auch grafisch erfolgen.

Bei einer **Multiplikation** folgt<sup>93</sup>

$$z = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1x_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2.$$

Insbesondere wird das Produkt aus komplexer mit ihrer konjugiert komplexen Zahl:

$$z = (x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 + y^2.$$

Bei einer **Division** kann mit dem konjugiert komplexen Nenner erweitert werden, um den Realteil und den Imaginärteil explizit zu erhalten.

$$z = (x_1 + jy_1)/(x_2 + jy_2) = [(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)]/[(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)]$$

$$z = [(x_1x_2 + y_1y_2) + j(-x_1y_2 + x_2y_1)]/(x_2^2 + y_2^2)$$

$$z = (x_1x_2 + y_1y_2)/(x_2^2 + y_2^2) + j(-x_1y_2 + x_2y_1)/(x_2^2 + y_2^2)$$

<sup>91</sup> In der Mathematik wird als Zeichen der Buchstabe i genutzt. (In der Elektrotechnik ist i anders belegt.)

<sup>92</sup> Mit der Euler'schen Formel  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ . Beim  $\arctan(y/x)$  ist für den Winkel zu beachten, in welchem Quadranten y und x liegen.

<sup>93</sup> Beachte, dass  $j \cdot j = j^2 = -1$  gilt.

**Praxistipp:** Realteil und Imaginärteil ergeben sich genauso explizit, indem Zähler und Nenner in Polarkoordinatenform geschrieben und die Exponenten der gleichen Basis zusammengefasst werden. Das ist bei Zeitfunktionen wie  $e^{j(\omega t + \varphi)}$  besonders vorteilhaft.

$$\underline{z} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}{r_2} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (10.3)$$

**Differentiation und Integration** einer komplexen Zahl in Polarkoordinatenform werden mit der Exponentialfunktion besonders einfach.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) &= j\omega e^{j\omega t} \quad \text{d.h.} \quad \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \quad \text{und} \\ \int e^{j\omega t} dt &= (1/j\omega) e^{j\omega t} \quad \text{d.h.} \quad \int dt \rightarrow 1/j\omega \end{aligned} \quad (10.4)$$

**Praxistipp:** Das kann für alle sinusförmigen Ströme und Spannungen ausgenutzt werden.

Weitere detaillierte Angaben sind z.B. in (Bro79 S. 558 ff) zu finden.

### 10.3 Grafische Darstellung komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen werden in einer **komplexen Ebene** als **Zeiger**<sup>94</sup> dargestellt. Die Ebene ist bezüglich der in ihr dargestellten Größe zu kennzeichnen. Beide Achsen dieser Ebene müssen den gleichen Maßstab haben, weil sonst Winkel verzerrt werden. (Natürlich können mehrere gleiche Größen zusammen dargestellt werden.)

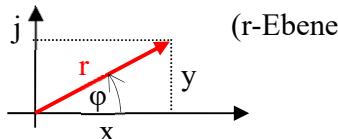


Abb. 10.2: Darstellung einer komplexen r-Ebene

Komplexe Größen können in diesen Ebenen wie bei Vektoren addiert und subtrahiert werden. Durch eine entsprechende Umwandlung werden Größen in die Ebenen anderer Größen transformiert. Z.B. wird bei der Umwandlung für eine inverse Ebene aus der Größe  $r \exp \varphi$  die inverse Größe  $1/(r \exp \varphi) = (1/r) \exp(-\varphi)$ .

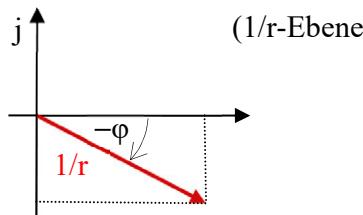
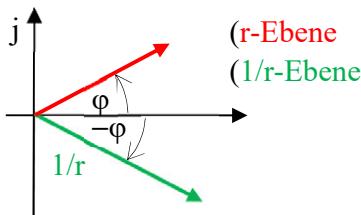


Abb. 10.3: Darstellung in der komplexen 1/r-Ebene, der inversen zur r-Ebene

Außerdem ist es günstig, mehrere Ebenen übereinander zu legen, um Winkel zu vergleichen bzw. zueinander auszurichten. Jede Ebene hat dabei ihren eigenen Maßstab je für ihre beiden Achsen.

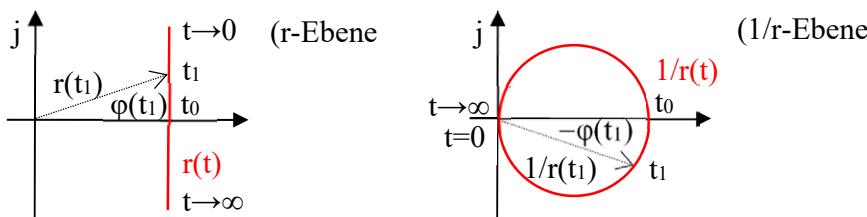
<sup>94</sup> Der Begriff verweist auf den Unterschied zu den reellen Vektoren.



**Abb. 10.4: Eine r-Ebene und eine 1/r-Ebene übereinander**

**Praxistipp:** Das kann in der Wechselstromrechnung sehr anschaulich genutzt werden, auch ohne dabei direkt auf komplexe Größen verweisen zu müssen.

In einer komplexen Ebene werden nicht nur einzelne Größen, sondern auch Kurven wie z.B.  $r(t)$  dargestellt. Dabei verbindet die Kurve die Zeigerspitzen der Zeiger für jeden Parameter (z.B. bei  $r(t)$  den Parameter  $t$ ). Der Wert des Parameters sollte an der Kurve vermerkt werden.



**Abb. 10.5: Ortskurve  $r(t)$  (links) und deren inverse Kurve (rechts)**

In Abb. 10.5 wurde jeweils der Zeiger  $r(t_1)$  zur Veranschaulichung des Verfahrens skizziert. Bei der Invertierung von Kurven können folgende Regeln verwendet werden:

- Die Länge eines Zeigers wird zum Kehrwert der Länge. Damit wird der längste Zeiger in der invertierten Darstellung zum kürzesten (in Abb. 10.5 erhalten die unendlich langen Zeiger für  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$  jeweils die Länge null) und der kürzeste Zeiger wird zum längsten (bei  $t_0$ ).
- Winkel bekommen das entgegengesetzte Vorzeichen (in Abb. 10.5 für den Parameter  $t_1$  zu sehen). D.h. auch, ein rein reeller Zeiger (z.B. bei  $t_0$ ) bleibt rein reell.
- Kreise werden in der invertierten Darstellung wieder Kreise. Dabei ist eine Gerade ein Kreis mit dem Durchmesser unendlich.

**Praxistipp:** Mit einer solchen Darstellung sind Abhängigkeiten oft deutlicher erkennbar als bei einer einzelnen Darstellung der Kurven  $x(t)$  und  $y(t)$  bzw.  $r(t)$  und  $\varphi(t)$ .

## 10.4 Fourierreihe

Periodische Funktionen können recht komplizierte Formen haben. Fourier hat gezeigt, dass alle beschränkten **periodischen Funktionen** als Summe reiner Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden können. Besteht die Funktion  $f(t)$  im ganzen Bereich  $-\infty \leq t \leq \infty$  aus einer periodischen Wiederholung der Grundfunktion  $f_p(t)$ , die im Grundintervall  $-T/2 \leq t \leq T/2$  mit der Periodendauer  $T$  gegeben ist, so lautet die Entwicklung in einer **Fourierreihe**:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.5)$$

oder äquivalent

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad \text{mit } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad ^{95}. \quad (10.6)$$

Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  ergeben sich aus den Anteilen der Schwingungen von  $\cos(n\omega t)$  und  $\sin(n\omega t)$  an  $f(t)$  im Grundintervall (dieses kann auf  $x$  auch wahlfrei angeordnet werden).

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.7)$$

Die beiden Koeffizienten  $a_n$  für  $\cos(n\omega t)$  und  $b_n$  für  $\sin(n\omega t)$  realisieren zusammen die Phasenverschiebung für die  $n$ -te Schwingung entsprechend ihres Anteils in  $f(x)$ . Deshalb kann dafür auch die Form in (10.6) verwendet werden.

Eine neuere Schreibweise stellt eine Fourierreihe mit komplexen Größen zur Verfügung:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{mit } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad \text{für } -\infty \leq n \leq \infty. \quad (10.8)$$

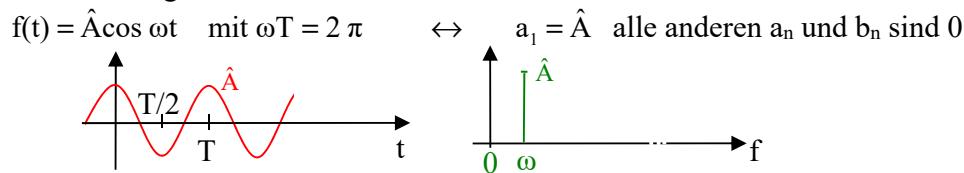
Dabei werden die  $c_n$  für  $n < 0$  zu  $(a_{-n} + jb_{-n})/2$ , für  $n = 0$  zu  $a_0/2$  und für  $n > 0$  zu  $(a_n - jb_n)/2$ . Diese Form ist kompatibel zu der heute verwendeten Fouriertransformation sowie der diskreten Fouriertransformation. Weiter detaillierte Angaben sind z.B. in (Bro79 S. 659 ff).

**Praxistipp:** Nach dem Übergang von  $f(t)$  zu ihrer Fourierreihe kann jede vorhandene Schwingung einzeln behandelt werden.

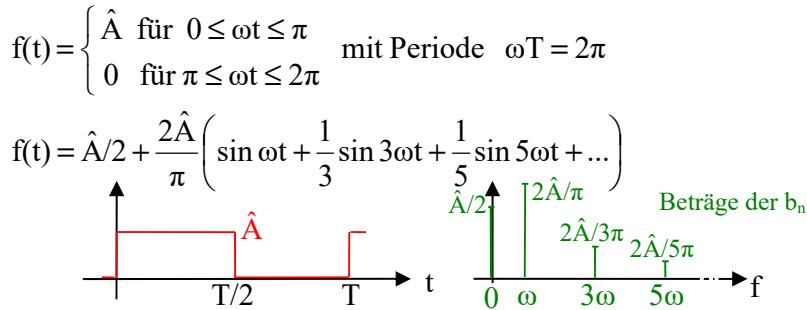
Für wichtige Funktionen sind die Reihenentwicklungen in Tabellen veröffentlicht.

### Beispiele für wichtige Signale:

#### 1. Cosinussignal



#### 2. Rechtecksignal

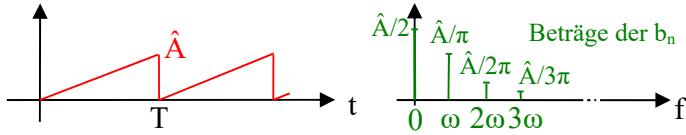


<sup>95</sup> Beim  $\arctan(b_n/a_n)$  ist für den Winkel zu beachten, in welchem Quadranten  $a_n$  und  $b_n$  liegen.

## 3. Sägezahnsignal

$$f(t) = \hat{A} t/T \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$f(t) = \frac{\hat{A}}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$



## 10.5 Unstetige Zeitfunktionen (Distributionen)\*

Bei den folgenden Transformationen werden spezielle unstetige Zeitfunktionen benötigt.

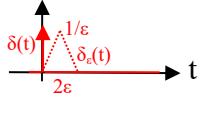
1.



**Sprungfunktion:** (Sprich: „Eins von t“)

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

2.

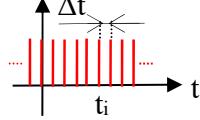


**Stoßfunktion:** mit der Definition: **Fläche = 1**

(Dreiecksfläche  $A_\Delta = \frac{1}{2} 2\epsilon \cdot 1/\epsilon = 1$ ), auch für  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

3.



**Abtastfunktion:**

$$f_{Ab}(i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)$$

Die Stoßfunktion entsteht definitionsgemäß durch Differentiation der Sprungfunktion<sup>96</sup>. Die Darstellung der Stoßfunktion durch ein Dreieck und den Grenzübergang mit  $\epsilon \rightarrow 0$  ist eine stark vereinfachte Form. Sprung oder Stoß erfolgt immer, wenn  $(t)$  bzw.  $(t - t_i)$  zu null wird.

## 10.6 Fouriertransformation\*

Die Weiterentwicklung hat gezeigt, dass alle beidseitig begrenzten Funktionen<sup>97</sup> durch unendlich viele reine Sinus- und Cosinusfunktionen dargestellt werden können. Dafür gilt, dass für  $x \rightarrow \pm \infty$  jeweils  $f(x) \rightarrow 0$  gehen und die Funktion selbst beschränkt sein muss ( $F_g$  steht für den geraden Anteil und  $F_u$  für den ungeraden).

$$f(t) = \int_0^\infty (F_g(\omega) \cos(\omega t) + F_u(\omega) \sin(\omega t)) d\omega \quad \text{mit}$$

$$F_g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad F_u(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

(10.9)

<sup>96</sup> Dafür könnte  $1(t)$  durch die Funktionsstücke  $1(t) = x^2/2\epsilon^2$  für  $0 \leq x \leq \epsilon$  und  $1(t) = 2x/\epsilon - x^2/(2\epsilon^2) - 1$  für  $\epsilon \leq x \leq 2\epsilon$  ersetzt werden und anschließend der Grenzübergang mit  $\epsilon \rightarrow 0$  erfolgen (entsprechend der vereinfachten Form für  $\delta(t)$ ).

<sup>97</sup> Sie können als Grenzfall einer periodischen Funktion mit  $T \rightarrow \infty$  aufgefasst werden.

Heute wird vor allem die komplexe Form der **Fouriertransformation** mit einem komplexen Spektrum genutzt.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = FT^{-1}\{F(\omega)\} \quad \text{und} \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = FT\{f(t)\} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Anstatt dieser unsymmetrischen Darstellung mit ungleichen Vorfaktoren, die insbesondere bei der Signalanalyse verwendet wird, werden auch gleiche Vorfaktoren genutzt<sup>98</sup>. In (10.10) bleibt die Signalleistung erhalten. In der Literatur gibt es weitere Formen der Definition der Fouriertransformation auch mit anderen oder mehreren Variablen.

Bei reellen Funktionen lässt sich aus (10.9) für gerade Funktionen ( $f(-t) = f(t)$ ) die Cosinus- sowie für ungerade ( $f(-t) = -f(t)$ ) die Sinustransformation ableiten.

### Einige Rechenregeln:

Addition und Multiplikation	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega) \quad c_i \text{ reell}$
Ähnlichkeitssatz	$f(ct) \leftrightarrow (1/c) F(\omega/c)$
Verschiebung im Originalbereich	$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Verschiebung im Bildbereich	$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$
Differentiation im Originalbereich	$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$
Integration im Originalbereich	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$
Faltungssatz	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
	$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow (1/2\pi) F_1(\omega) * F_2(\omega)$

Vergleiche (Fri85 S. 36 ff) und (Bro79 S. 670 ff).

**Praxistipp:** Für wichtige Funktionen sind die Transformationen in Tabellen veröffentlicht, dabei ist aber immer exakt auf die dabei verwendete Definition zu achten.

Da alle praktisch realen Vorgänge zu endlicher Zeit beginnen und enden, kann diese Transformation prinzipiell immer zu Analysen genutzt werden.

## 10.7 Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation\*

Diskrete Signale entstehen z.B. durch Messwertabtastung oder A/D-Wandlung. Mathematisch wird dafür die Multiplikation mit einer Folge von Stoßfunktionen<sup>99</sup> genutzt.

$$u(t_i) = u(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)$$

Damit verändert sich die Fouriertransformation zur Diskreten Fouriertransformation (DFT) und aus dem Integral wird eine Summe<sup>100</sup>.

<sup>98</sup> Nach Einsetzen von  $F(\omega)$  in  $f(t)$  bleibt das Produkt beider Vorfaktoren immer gleich. Außerdem fällt bei Übergang von  $\omega \cdot t$  zu  $2\pi f \cdot t$  der Vorfaktor gegen die  $2\pi$  von  $d\omega = d(2\pi f)$  weg.

<sup>99</sup> Zur Stoßfunktion siehe Abschnitt 10.5, vergleiche auch mit der Abtastfunktion.

<sup>100</sup> Definitionsgemäß wird für jeden Zeitpunkt  $t_i$  das  $\int \delta(t - t_i) dt = 1$ . Zu allen anderen Zeiten ist  $\delta(t - t_i) = 0$ .

Praktisch können dabei nur  $n$  Abtastwerte berücksichtigt werden (das entspricht einem rechteckigen Fenster; oft werden aber geeigneteren Fensterfunktionen verwendet).

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(f_k) e^{-jk\frac{2\pi i}{n}} = DFT^{-1}\{F(f_k)\} \text{ mit } t_i = i \Delta t \text{ und } T_0 = n \Delta t \\ \text{also } \omega_0 t_i &= 2\pi f_0 t_i = \frac{2\pi t_i}{T_0} = 2\pi i/n \quad \text{und} \quad f_i = i f_0 = \frac{i}{n \Delta t} \\ F(f_i) &= \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k) e^{-jk\frac{2\pi i}{n}} = DFT\{x(t_k)\} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (10.11)$$

**Praxistipp:** Bei vielen Programmen zur Signalanalyse sind komfortable Algorithmen der DFT mit Fensterfunktionen implementiert. In der Regel wird der Algorithmus der Schnellen Fouriertransformation FFT verwendet. Dafür muss die Anzahl Abtastwerte  $n$  eine ganze Zweierpotenz sein ( $n = 2^N$ ).

Bei der FFT werden Symmetrien zur Vereinfachung für den Algorithmus der numerischen Berechnung von (10.11) genutzt.

## 10.8 Laplacetransformation\*

Durch Erweiterung von  $j\omega$  in (10.10) um einen Realteil, der eine Dämpfung bewirkt, entsteht ein Laplace-Integral und die danach genannte **Laplacetransformation**.

Anstatt einer rein imaginären wird die komplexe Variable  $p = \delta + j\omega$  verwendet<sup>101</sup>. Mit der Dämpfung ist das Integral immer konvergent, wenn  $f(t)$  beschränkt ist und erst zu einer endlichen Zeit beginnt. In der komplexen  $p$ -Ebene ergibt der Integrationsweg eine zur imaginären Achse parallele Gerade.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = L^{-1}\{F(p)\} \quad \text{und} \quad F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = L\{f(t)\} \quad (10.12)$$

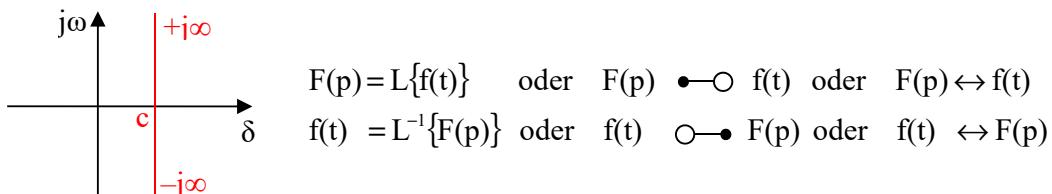


Abb. 10.6: Integrationsweg der Rücktransformation und Schreibweisen

**Einige Rechenregeln** (alle Zeitfunktionen beginnen bei  $t = 0$ ):

Addition und Multiplikation	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$	$c_i$ reell
Ähnlichkeitssatz	$f(ct) \leftrightarrow (1/c) F(p/c)$	
Verschiebung im Originalbereich	$f(t-t_0) \cdot 1(t-t_0) \leftrightarrow F(p) e^{-pt_0}$	
Verschiebung im Bildbereich	$f(t)e^{pt_0} \leftrightarrow F(p-p_0)$	

$$\text{Differentiation im Originalbereich} \quad \frac{d^n}{dt^n} f(t) \leftrightarrow p^n F(p) - \sum_{i=1}^n p^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

<sup>101</sup> In der Mathematik wird zur Bezeichnung  $s$  benutzt, dagegen in der Elektrotechnik meist  $p$ .

Integration im Originalbereich  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p)$

Faltungssatz  $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$   
 $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow (1/2\pi j) F_1(p) * F_2(p)$

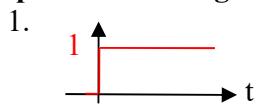
Die Aufstellung zeigt die Ähnlichkeit zur Fouriertransformation.

**Praxistipp:** Für die Transformation und die Rücktransformation können umfangreiche Korrespondenztabellen genutzt werden. In der Praxis liegen meist *rationale Funktionen* vor. Zur Aufbereitung vorliegender Funktionen in jeweils zur Tabelle passende Formen sind obige *Rechenregeln* sowie die *Partialbruchzerlegung* rationaler Funktionen sehr hilfreich. Darüber hinaus steht auch der *Residuensatz* zur Lösung komplexer Wegintegrale zur Verfügung.

Eine Anwendung erfolgt für Schalt- und Übergangsvorgänge und in der Regelungstechnik.

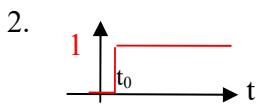
Weitere Transformationen für elektrotechnische Probleme sind die Z-Transformation für abgetastete Signale oder die Hilberttransformation für komplexe Zeitsignale, vergleiche (Fri85 S. 36 ff) und (Bro79 S. 670 ff).

### Beispiele für wichtige Signale:



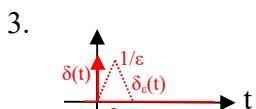
**Sprungfunktion:**

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t) dt = \frac{1}{p}$$



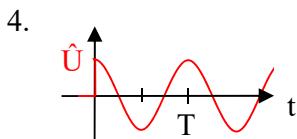
**Verschobene Sprungfunktion:**<sup>102</sup>

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < t_0 \\ 1 & \text{für } t > t_0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t - t_0) dt = \frac{1}{p} e^{-pt_0}$$



**Stoßfunktion:**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1$$



**Bei t = 0 beginnender Cosinus:**

$$\hat{U} \cos \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

5.

**Bei t = 0 beginnender Sinus:**

$$\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

6.

**Bei t = T/4 beginnender Sinus:**  $\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t - T/4) =$

$$\hat{U} \cos \omega(t - T/4) \cdot 1(t - T/4) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} e^{-pT/4} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$
<sup>103</sup>

<sup>102</sup> Es wird der Verschiebungssatz verwendet.

<sup>103</sup> Kurve von 4. insgesamt um T/4 nach rechts verschoben. Es wird der Verschiebungssatz eingesetzt.

$f(t)$ immer mit $1(t)$	$F(p)$	$f(t)$ immer mit $1(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
1	$\frac{1}{p}$	$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+\alpha)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}\sin(at)$	$\frac{1}{p^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$	$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-at}-e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha}e^{-\beta t}\sin(at)$	$\frac{1}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha e^{-at}-\beta e^{-\beta t})$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$e^{-\beta t}\left(\cos(at)-\frac{\beta}{\alpha}\sin(at)\right)$	$\frac{p}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta+\beta e^{-at}-\alpha e^{-\beta t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[1-e^{-\beta t}\left(\cos(at)+\frac{\beta}{\alpha}\sin(at)\right)\right]$	$\frac{1}{p[(p+\beta)^2+\alpha^2]}$

**Tabelle 10.1: Korrespondenztabelle der Laplacetransformation**

Weitere Korrespondenzen sind z.B. in (Bro79 S. 689 ff).

## 10.9 Rechnen mit logarithmischen Pegeln

Nach den Rechenregeln mit Logarithmen werden *Multiplikationen und Divisionen* besonders einfach ( $u_0$  als Bezugswert, v und k sind bereits dimensionslos).

$$u_A = v \cdot u_E \rightarrow \log(u_A/u_0) = \log(v \cdot u_E/u_0) = \log(v) + \log(u_E/u_0)$$

$$u_A = u_E/k \rightarrow \log(u_A/u_0) = \log(u_E/u_0 \cdot 1/k) = \log(u_E/u_0) - \log(k)$$

Dagegen müssen bei einer *Addition oder Subtraktion* die Originalgrößen verwendet werden. Liegen die Werte als Logarithmus vor, sind zuerst die Umkehrfunktionen<sup>104</sup> zu bilden, danach zu addieren und anschließend die Summe wieder zu logarithmieren.

$$u_A = u_1 + u_2 \rightarrow \log(u_A/u_0) = \log(u_1/u_0 + u_2/u_0) = \log(10^{\log(u_1/u_0)} + 10^{\log(u_2/u_0)})$$

Beim Rechnen mit logarithmischen Pegeln  $U_{db} = 20 \log(u/u_0)$  sind darüber hinaus die Vorfaktoren zu beachten (analog für Leistungspegel mit dem Vorfaktor 10).

$$U_{ges\ db} = 20 \log(u_1/u_0 + u_2/u_0) = 20 \log(10^{U_{1db}/20} + 10^{U_{2db}/20})$$

$$U_{2db} = 20 \log(u_{ges}/u_0 - u_1/u_0) = 20 \log(10^{U_{ges\ db}/20} - 10^{U_{1db}/20})$$

<sup>104</sup> Zu  $a = \log b$  gehört die Umkehrfunktion  $b = 10^a$  und es wird  $b = 10^{\log b}$ .

# 11 Analyse bei zeitveränderlichen Signalen

Die Abschnitte 4, 5, 6 und 9 sollten verstanden worden sein. Es werden

- Stromkreise bei Wechselstrom und weiteren zeitveränderlichen Signalen (periodische Signale, nichtperiodische Signale, Signale bei Schalt- und Übergangsvorgängen) analysiert und das Vorgehen erörtert,
- die Methoden zur jeweiligen Berechnung der verschiedenen zeitveränderlichen Signale an Beispielen vorgestellt,
- einige wichtige Anordnungen untersucht, dazu wichtige Begriffe und Parameter erarbeitet und bewertet,
- entsprechende Gesetzmäßigkeiten untersucht sowie
- die Ergebnisse mit Messungen verglichen.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in Abschnitt 10 sein.

## Vorbemerkungen

**Der Ausgangspunkt** zur Behandlung elektrischer Schaltungen mit zeitveränderlichen Signalen sind die Methoden zur Analyse elektrischer Netzwerke (Abschnitt 9).

Durch die Strom-Spannungs-Beziehungen an der Kapazität und der Induktivität führt die Behandlung elektrischer Schaltungen (Systeme) bei zeitveränderlichen Strömen und Spannungen (Signalen) zu Differentialgleichungen. Zur Lösung der Differentialgleichungen sind je nach Zeitfunktion verschiedene Methoden erarbeitet worden. Durchgesetzt haben sich insbesondere solche Methoden, die es gestatten, die Behandlung auf die Art und Weise von Gleichstrom und Spannung zurückzuführen.



Abb. 11.1: Schema zur Lösung mittels Transformation

Das Schema zeigt, welche Wege möglich sind; dabei ist auf der unteren Ebene (Bildbereich oder transformierter Bereich) eine Behandlung nach der Art und Weise wie bei Gleichstrom und -spannung durchführbar.

Entsprechend der notwendigen Methoden (Transformationen) ist eine Einteilung der Signale nach ihrem Zeitverlauf erforderlich:

1. **Sonderfall:** periodische Signale (stationär in  $-\infty \leq t \leq \infty$ )
  - a Spezialfall: sinusförmige Signale
  - b andere Fälle: nichtsinusförmige periodische Signale
2. **Sonderfall:** nichtperiodische Signale
  - a Spezialfall: endliche Zeitvorgänge (einmalige Signale, Anfang und Ende sind im Endlichen)
  - b Spezialfall: Zeitvorgänge, die bei  $t_0$  (insbesondere  $t_0 = 0$ ) beginnen (Schaltvorgänge, Übergangsvorgänge)
3. **Sonderfall:** Stochastische Signale  
Rauschen: weißes, rosa, rotes oder farbiges Rauschen

**Praxistipp:** Es gibt leider keine Methode für beliebige Zeitsignale. Praktisch haben aber alle Signale jeweils Anfang und Ende im Endlichen (jedenfalls alle Nutzsignale). Einige Fälle sind somit *Idealisierungen*, die praktisch erfolgreich angewandt werden können.

Sinusförmigen Signalen kommt einmal durch die Energieversorgung mit Wechselstrom und zum anderen als wichtigstes Testsignal eine besondere Bedeutung zu. Weiterhin wird bei deren Behandlung das generelle Vorgehen bei zeitveränderlichen Signalen deutlich.

## 11.1 Schaltungen und Geräte mit sinusförmigen Signalen

### 11.1.1 Behandlung mit Hilfe der komplexen Rechnung

**Der Ausgangspunkt** zur Behandlung sinusförmiger Signale sind die Eigenschaften der Cosinusfunktion, die Erweiterung nach (10.2) sowie deren Differentiation und Integration.

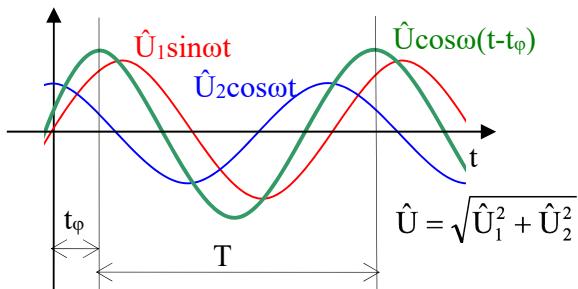


Abb. 11.2: Beispiel für Sinus, Cosinus und ihre Summe

Da jede Summe aus Sinus- und Cosinusfunktionen gleicher Frequenz allgemein durch eine gegenüber dem Nullpunkt verschobene Cosinusfunktion (genauso Sinusfunktion) dargestellt werden kann, wird in der Elektrotechnik die Cosinusfunktion<sup>105</sup> vereinbart.

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t - \varphi) \quad \left\{ = \hat{U} \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) \right\} \text{ mit } \varphi = \omega t_\varphi, \omega = 2\pi/T \quad (11.1)$$

Wenn die *tatsächlich vorhandene* Cosinusfunktion durch eine *imaginäre* Sinusfunktion erweitert wird, folgt nach Abschnitt 10.1 und 10.2.

$$\begin{aligned} \cos \omega t + j \sin \omega t &= e^{j \omega t} \quad \text{mit } j = \sqrt{-1} \\ \frac{d}{dt} (e^{j \omega t}) &= j \omega e^{j \omega t} \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\frac{d}{dt} \rightarrow j \omega} \quad \text{genauso} \\ \int e^{j \omega t} dt &= \frac{1}{j \omega} e^{j \omega t} \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\int dt \rightarrow \frac{1}{j \omega}} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Anstatt einer Differentiation bzw. Integration würde somit lediglich der **Faktor**  $j\omega$  bzw.  $1/j\omega$  erscheinen, d.h., es entstehen lineare algebraische Gleichungen wie bei Gleichstrom.

Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit diese Methode entsprechend dem Schema in Abb. 11.1 angewandt werden kann?

<sup>105</sup> Der entscheidende Grund liegt in der notwendigen imaginären Sinusfunktion.

- Es müssen lineare Bauelemente vorhanden sein<sup>106</sup>.
- Die Frequenz wird von linearen Bauelementen und bei linearen mathematischen Operationen nicht verändert, ist somit konstant.
- Der hinzugefügte Imaginärteil bleibt „separat“ und kann nach der Lösung wieder abgetrennt werden.

Ferner ergibt die Transformation<sup>107</sup> der Strom-Spannungs-Beziehungen (vergleiche auch (Lun91a S. 60 und 127 bis 221) mit

$$\begin{aligned} u = R i &\rightarrow \underline{u} = R \underline{i} \\ u = \frac{1}{C} \int i dt &\rightarrow \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i} = j \frac{-1}{\omega C} \underline{i} \quad ^{108} \\ u = L \frac{di}{dt} &\rightarrow \underline{u} = j\omega L \underline{i} \end{aligned} \quad (11.3)$$

die Möglichkeit, Widerstandswerte analog dem Ohm'schen Gesetz zu definieren.

### Definition: komplexer Widerstand $\underline{Z}$ und Leitwert $\underline{Y}$

$$\begin{aligned} R &= R & X_C &= \frac{-1}{\omega C} & X_L &= \omega L \\ G &= G & B_C &= \omega C & B_L &= \frac{-1}{\omega L} \quad ^{109} \\ \underline{Z} &= R + jX & \text{bzw.} & \underline{Y} &= G + jB \end{aligned} \quad (11.4)$$

Damit sind folgende konkrete Lösungsstrategien für sinusförmige Vorgänge möglich:



Abb. 11.3: Schema zur Lösung mittels komplexer Rechnung

Ein Beispiel zeigt die praktische Vorgehensweise und deren Vorteile bei der Rechnung.

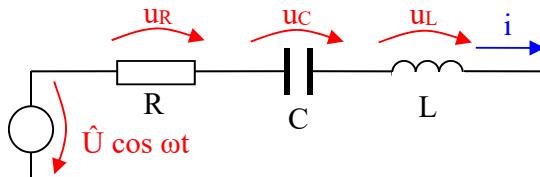


Abb. 11.4: Reihenschaltung von R, C und L mit einer Sinusspannung

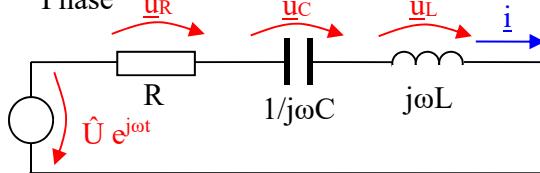
<sup>106</sup> Nichtlineare Elemente ergeben ohnehin nichtlineare Differentialgleichungen, die im Allgemeinen nur numerisch lösbar sind.

<sup>107</sup> Komplexe Größen sollen durch einen Unterstrich gekennzeichnet werden (z.B.:  $\underline{u}$  oder  $\underline{i}$ ).

<sup>108</sup> Nach Erweitern mit  $j$  entsteht im Nenner  $j^2 = -1$ .

<sup>109</sup> Bei den Beträgen fallen die negativen Vorzeichen natürlich weg.

- 1. Schritt:** Umwandlung der Schaltung mit ( 11.3 ) und für die Spannungsquelle durch Hinzufügen eines imaginären Sinusanteils gleicher Amplitude, Frequenz und Phase



**Abb. 11.5: Schaltung im Komplexen für die Reihenschaltung von R, C und L**

Wie bei Gleichstromschaltungen wird der Strom nach dem Zusammenfassen der drei Widerstände entsprechend einer Reihenschaltung mit dem Ohm'schen Gesetz berechnet.

$$i = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + 1/j\omega C + j\omega L}$$

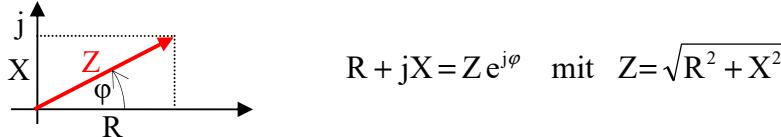
Damit liegt die Lösung im Komplexen bereits vor.

- 2. Schritt:** Umformen in eine Schreibweise, die eine einfache Trennung in Real- und Imaginärteil ermöglicht.

Dazu werden jeweils Zähler und Nenner so umgeformt, dass Realteil und Imaginärteil vorliegen (kartesische Koordinaten). Reine Faktoren und  $e^{jx}$ -Funktionen werden belassen, weil sie den nächsten Schritt begünstigen.

$$i = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad ^{110}$$

- 3. Schritt:** Umformen der kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten



**Abb. 11.6: kartesische und Polarkoordinaten**

$$i = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j\varphi}} \quad \text{mit} \quad \tan \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

- 4. Schritt:** Zusammenfassen aller als Produkte und Quotienten vorhandenen  $e^{jx}$ -Funktionen entsprechend der Regeln der Potenzrechnung.

Nach ( 11.2 ) kann dann von  $e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$  der Realteil durch Weglassen des  $j \sin \psi$  bestimmt werden.

$$i(t) = \frac{\hat{U} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (11.5)$$

Damit liegt die Lösung endgültig vor.

**Praxistipp:** Mit der Lösung kann z.B. untersucht werden, wie sich die Schaltung bei interessierenden stationären Frequenzen verhält (nicht einer sich zeitlich ändernden Frequenz).

<sup>110</sup> Der Zähler wird hier belassen, da er bereits dem nächsten Schritt entspricht.

**Der Preis für diese einfache Art der Rechnung ist der Umgang mit komplexen Zahlen.**

An der Lösung ( 11.5 ) ist zu sehen, dass sich weitere Vereinfachungen anbieten. So kann diese in zwei Teile zerlegt werden, von denen einer die *Amplitude* und der andere die *Phasenlage* bestimmt.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\hat{U}}{|Z|} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{Z}$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi = \varphi_u - \arctan \frac{\text{Im}[Z]}{\text{Re}[Z]} = -\arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (11.6)$$

Dabei sind I sowie U Effektivwerte<sup>111</sup>,  $Z = |Z|$  und im obigen Beispiel  $\varphi_u = 0$ . Das lässt sich zu einer *Amplituden-* bzw. *Betragsrechnung* und einer *Phasenrechnung* verallgemeinern. Um das auch bei komplizierteren Schaltungen zu realisieren, bieten sich die folgenden grafischen Hilfsmittel oder Methoden an.

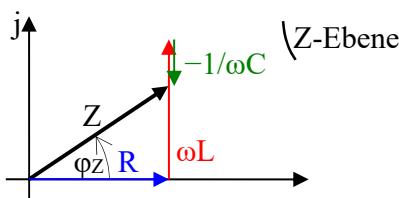
### 11.1.2 Behandlung mit grafischen Methoden

Nach Abschnitt 10.3 können alle sinusförmigen Ströme, Spannungen, Widerstände und Leitwerte als entsprechende **Zeiger** in einer komplexen Ebene abgebildet werden.

Diese Zeiger sind als Vektoren in einer komplexen Ebene aufzufassen.

**Praxistipp:** Insbesondere bei Strömen und Spannungen werden die Achsen in der Regel nicht explizit gezeichnet, da eine Größe als Bezugsrichtung gewählt wird und die anderen sukzessiv danach und zueinander ausgerichtet werden.

Für das Beispiel aus Abb. 11.4 und Abb. 11.5 können die Widerstände der Reihenschaltung in einer *Widerstandsebene* (Z-Ebene) addiert werden (Zeiger mit ihren Richtungen jeweils aneinanderhängen).



**Abb. 11.7: Addition von Widerständen mit Zeigern**

**Praxistipp:** Aus dieser Zeichnung können Z und  $\varphi_Z$  entweder bei exakter *maßstäblicher* Zeichnung durch Messen der Länge von Z und des Winkels  $\varphi_Z$  ermittelt oder gemäß der Beziehungen im Dreieck nach Pythagoras und einer Winkelfunktion berechnet werden.

$$Z^2 = R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 \quad \text{und} \quad \tan \varphi_Z = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$$

<sup>111</sup> Für Sinusform  $I = \hat{I}/\sqrt{2}$  und  $U = \hat{U}/\sqrt{2}$  (siehe Abschnitt 4.4.2).

Nun können  $I$  und  $\varphi_i$  berechnet werden<sup>112</sup>.

$$I = U/Z = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi_z = -\arctan \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} \quad 113$$

**Praxistipp:** Die Darstellung aller Ströme und Spannungen kann in diesem Beispiel am einfachsten mit dem Strom als Bezugsrichtung erfolgen (bei Reihenschaltung derselbe Strom an allen Elementen). Dabei werden die Ebenen des Stromes und die der Spannungen ohne Koordinatenachsen übereinander gelegt (vergleiche Abschnitt 10.3).

(Es kann natürlich für beide Ebenen ein jeweils günstiger Maßstab gewählt werden.)

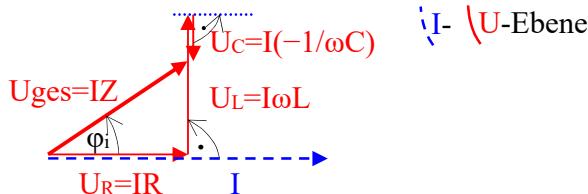


Abb. 11.8: Darstellung des Stromes und der Spannungen als Zeiger

Es ist zu erkennen, dass  $U_L$  um  $90^\circ$  gegenüber  $I$  vorausläuft, dagegen  $U_C$  um  $90^\circ$  dem Strom hinterherläuft (im mathematisch positiven Umlaufsinn – gegen den Uhrzeiger).

Bei einer Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Leitwerte, das kann in einer **Leitwertebene** realisiert werden. Treten gemischte Schaltungen auf, wird wie bei Gleichstrom schrittweise berechnet.

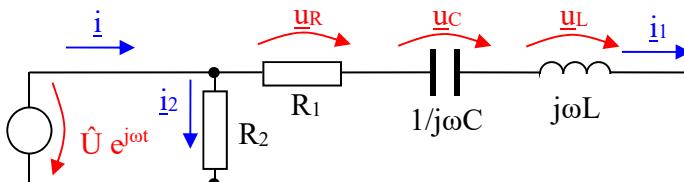


Abb. 11.9: Beispiel: Reihen und Parallelschaltung

Zur Berechnung des komplexen Gesamtwiderstandes von Abb. 11.9 kann in der Z-Ebene begonnen werden. Das ergibt Abb. 11.7. Das Ergebnis wird in eine Y-Ebene invertiert (entsprechend  $\underline{Y} = 1 / \underline{Z}$  werden  $Y = 1 / Z$  und  $\varphi_Y = -\varphi_Z$ ).

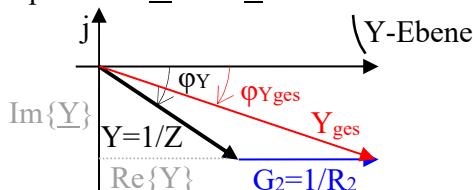


Abb. 11.10 Parallelschaltung in der Y-Ebene

$Y_{\text{ges}}$  kann wieder nach den erkennbaren Dreiecksbeziehungen berechnet werden. Dazu bietet sich das Dreieck mit den Seiten  $\text{Im}\{\underline{Y}\}$ ,  $(\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)$  und  $Y_{\text{ges}}$  an.

$$Y_{\text{ges}} = \sqrt{\text{Im}\{\underline{Y}\}^2 + (\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_{Y_{\text{ges}}} = \frac{\text{Im}\{\underline{Y}\}}{\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2}$$

<sup>112</sup> Die Winkel des Zählers werden addiert und die des Nenners subtrahiert (wegen der Regeln der Potenzrechnung).

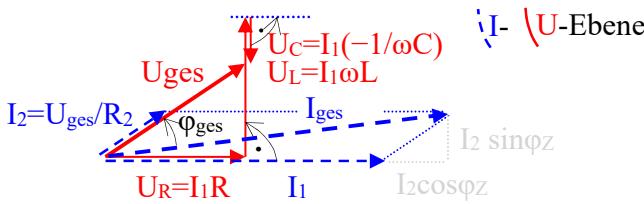
<sup>113</sup> Der Strom läuft also der Gesamtspannung hinterher – gegen den Uhrzeigersinn gesehen.

Dabei sind natürlich  $\operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = \operatorname{Re}\{1/\underline{Z}\} = (1/Z)\cos\varphi_Z$ ,  $\operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = \operatorname{Im}\{1/\underline{Z}\} = (1/Z)\sin(-\varphi_Z)$  und  $G_2 = 1/R_2$ . Somit wird

$$Y_{\text{ges}} = \sqrt{\left(\frac{1}{Z}\sin(-\varphi_Z)\right)^2 + \left(\frac{1}{Z}\cos\varphi_Z + \frac{1}{R_2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_{\text{ges}} = \frac{\frac{1}{Z}\sin(-\varphi_Z)}{\frac{1}{Z}\cos\varphi_Z + \frac{1}{R_2}}.$$

Man kann weiter umformen<sup>114</sup>, bis nur noch  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\omega L$  und  $1/\omega C$  in  $Y_{\text{ges}}$  enthalten sind.

Soll der Strom bestimmt werden, bietet sich eine Darstellung der Ströme und Spannungen an. Ausgehend von  $i_1$  können alle Spannungen bis zur Gesamtspannung durch Addition konstruiert werden, nach dieser kann dann  $i_2$  (Richtung von  $U_{\text{ges}}$ ) eingezeichnet und danach  $i_{\text{ges}}$  ermittelt werden.



**Abb. 11.11: Darstellung der Ströme und der Spannungen als Zeiger**

Dafür ergibt sich mit dem Dreieck ( $I_1 + I_2 \cos\varphi_Z$ ),  $I_2 \sin\varphi_Z$ ,  $I_{\text{ges}}$  ein Ausdruck entsprechend  $I_{\text{ges}} = U_{\text{ges}} Y_{\text{ges}}$  und ein vergleichbarer für  $\varphi_{\text{ges}}$ .

**Praxistipp:** Es ist feststellbar, dass auch für kompliziertere Schaltungen Zeigerbilder leicht konstruierbar sind. Eine *Vorgehensweise*, bei der Zeiger *nur addiert* werden (wie in den Beispielen Abb. 11.8 und Abb. 11.11), ist dabei immer vorzuziehen.

115

Die Zerlegung eines Zeigers in Zeiger gleicher Richtung ist gangbar und für Zeiger, die senkrecht aufeinander stehen, mit dem Thaleskreis durchführbar.

**Praxistipp:** Wenn das *Zeigerbild nur zur qualitativen Analyse* benötigt wird, können auch relativ komplexe Schaltungen schnell untersucht werden.

Für eine *quantitative Analyse* entstehen durch die vielfältigen Winkelfunktionen recht schnell Ausdrücke, die bezüglich ihrer Parameter nur noch numerisch ausgewertet werden können (numerische Kurvendarstellung oder sogar mit Simulationsverfahren siehe Abschnitt 9.5).

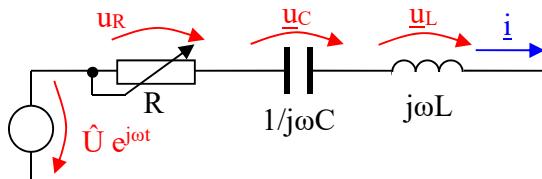
Bei einer durchgängigen komplexen Rechnung besteht das gleiche Problem. Immer bleibt aber bei *maßstäblicher Zeichnung* die einfache Variante des direkten Messens von Länge und Winkel.

Eine Erweiterung der Zeigerdarstellung zu **Ortskurven** führt zu einer grafischen Methode, die insbesondere bei der Auswertung von Parametervariationen hilft.

<sup>114</sup> Mit  $\sin\varphi_Z = \tan\varphi_Z / (1 + \tan\varphi_Z)^{1/2}$  und  $\cos\varphi_Z = 1 / (1 + \tan\varphi_Z)^{1/2}$  sowie durch Einsetzen von  $Z = \sqrt{R_1^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ .

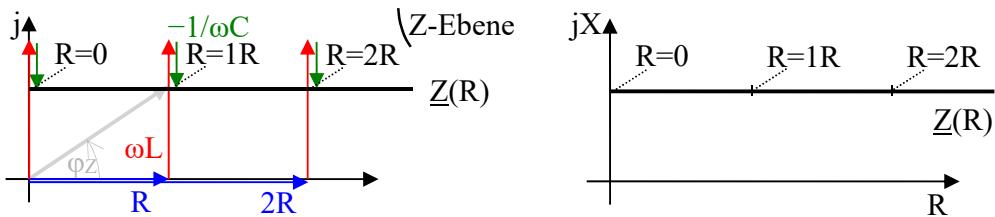
<sup>115</sup> Muss dazu mit einem unbekannten Zeiger begonnen werden und der bekannte ist die Summe, wird eine Länge angenommen und der Maßstab erst nach dem Ergebnis festgelegt.

Der zu verändernde Parameter kann z.B. ein Widerstand (Potentiometer) sein. Am häufigsten wird die Frequenz (Kreisfrequenz  $\omega$ ) variiert<sup>116</sup>. Das Beispiel aus Abb. 11.5 wird mit einem Potentiometer zu Abb. 11.12 verändert.



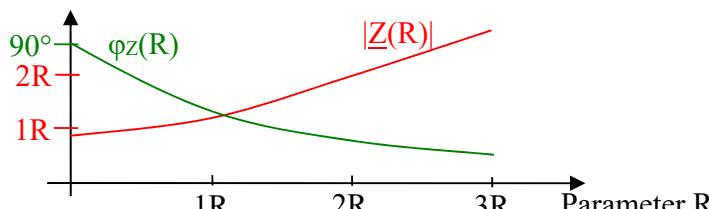
**Abb. 11.12: Schaltung für die Reihenschaltung von variablem R sowie C und L**

Die grafische Konstruktion erfolgt wie ein Zeigerbild für jeden gewünschten Parameter. Oft ist der Kurvenverlauf nach wenigen Parameterpunkten zu erkennen. Die *Ortskurve* ist nun die Kurve, die die *Spitzen der Ergebnisseiger* verbindet. An den entsprechenden Punkten der Kurve sollte der Parameter verzeichnet sein.



**Abb. 11.13: Konstruktion einer Ortskurve und die Ortskurve**

Eine Ortskurve kann immer aus der komplexen Ebene herausgeholt und über dem *Parameter* einmal als Kurve für den *Betrag* sowie zum anderen als Kurve für die *Phase* dargestellt werden. Bei einer maßstäblichen Zeichnung erfolgt das wiederum durch Messen von Länge und Winkel. Andernfalls sind die Formeln nach  $|Z(\text{Parameter})|$  und  $\varphi_z(\text{Parameter})$  umzuformen.



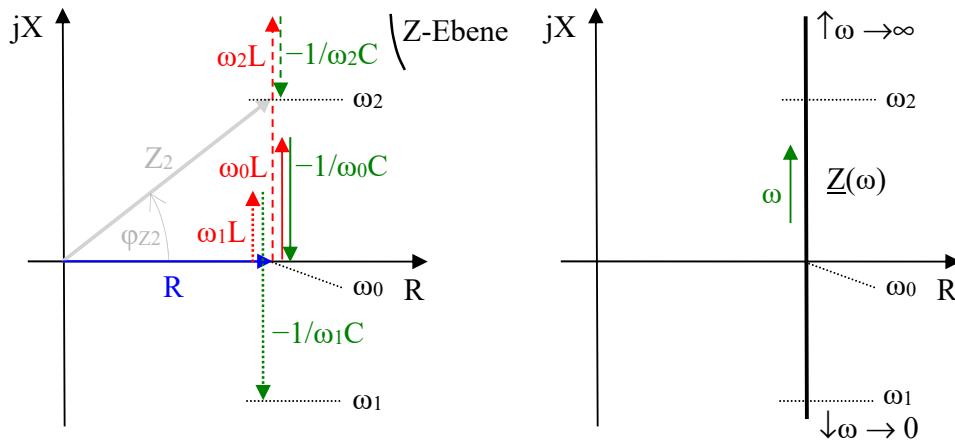
**Abb. 11.14: Darstellung von  $|Z(R)|$  und  $\varphi_z(R)$  über dem Parameter R**<sup>117</sup>

**Praxistipp:** Ortskurven sind insbesondere sehr gut für *qualitative Darstellungen* geeignet.

<sup>116</sup> Es geht immer um stationäre Prozesse, d.h., nach einer Parameteränderung wird gewartet, bis alle Übergangsvorgänge vorbei sind (siehe auch Abschnitt 11.4).

<sup>117</sup> In der Darstellung entspricht  $\omega L - 1/\omega C \approx 0,8 \text{ R}$ .

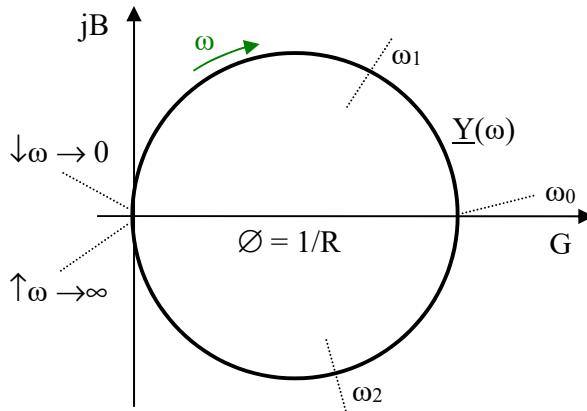
Als Beispiel werden  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  von Abb. 11.5 in Abhängigkeit vom Parameter  $\omega$  dargestellt.



**Abb. 11.15:  $\underline{Z}$ -Ortskurve der Reihenschaltung von R, L und C als  $f(\omega)$**

In Abb. 11.15 ist für  $\omega = \omega_1$  der Betrag  $1/\omega_1 C > \omega_1 L$  und somit hat das Ergebnis von  $\underline{Z}(\omega_1)$  einen negativen Imaginärteil. Bei  $\omega = \omega_0$  wird der Betrag  $1/\omega_0 C = \omega_0 L$  und  $\underline{Z}(\omega_0) = R$  rein reell. Für  $\omega = \omega_2$  wird der Betrag  $1/\omega_2 C < \omega_2 L$  und  $\underline{Z}(\omega_2)$  hat einen positiven Imaginärteil. Die Kurve von  $\underline{Z}(\omega)$  ist eine Gerade von  $R - j\infty$  (für  $\omega = 0$ ) bis  $R + j\infty$  (für  $\omega = \infty$ ).

Eine *Invertierung* der Ortskurve  $\underline{Z}(\omega)$  zu einer Ortskurve  $\underline{Y}(\omega)$  erfolgt mit den Regeln aus Abschnitt 10.3.



**Abb. 11.16:  $\underline{Y}$ -Ortskurve der Reihenschaltung von R, L und C als  $f(\omega)$**

$\underline{Y}(\omega)$  ist ein Kreis mit dem Durchmesser  $1/R$  als größter Zeiger bei  $\omega_0$  (in Abb. 11.15 war  $R$  der kleinste Zeiger). Was in Abb. 11.15 bei dem negativen Imaginärteil lag, liegt hier bei dem positivem.

### 11.1.3 Analyse des Frequenzverhaltens wichtiger Schaltungen

An den vorigen Abschnitt schließt sich gut die Analyse des Reihenschwingkreises an – eine Reihenschaltung von R, L und C an einer stationären Spannungsquelle nach Abb. 11.5.

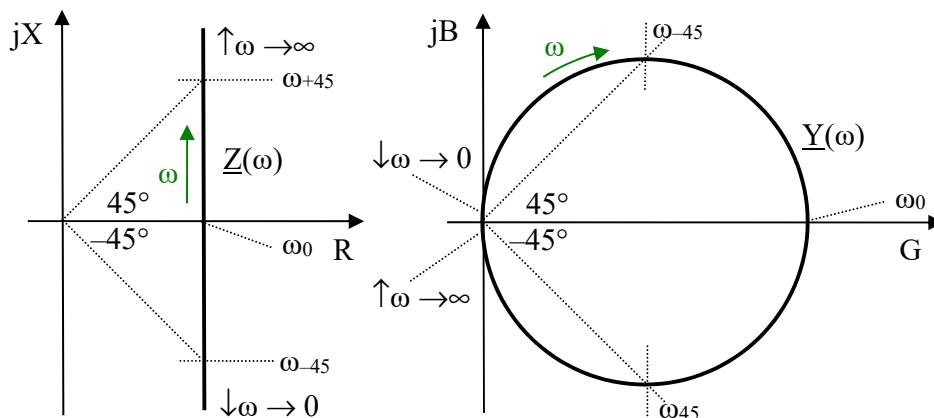
In den Kurven Abb. 11.15 und Abb. 11.16 sind *drei besondere Parameter* (Kurvenpunkte) des Reihenschwingkreises vorhanden (vergleiche auch (Lun91a S. 127 ff)). Diese Parameter befinden sich bei (siehe Abb. 11.17)<sup>118</sup>

- dem *Imaginärteil Null* (d.h.  $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ ), daraus folgt die **Definition der Resonanzfrequenz**

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} , \quad (11.7)$$

- und dem *Betrag des Imaginärteils gleich dem Realteil* (d.h.  $|\omega_{\pm 45} L - 1/\omega_{\pm 45} C| = R$ ), daraus folgen die zwei Punkte  $\omega_{+45}$  und  $\omega_{-45}$  (siehe Abb. 11.17).

$$\omega_{\pm 45} = \pm R/2L + \sqrt{(R/2L)^2 + 1/LC} .$$



**Abb. 11.17: Besondere Parameter der Ortskurven  $Z(\omega)$  und  $Y(\omega)$**

Aus den beiden Kreisfrequenzen  $\omega_{+45}$  und  $\omega_{-45}$  ergibt sich die

**Definition der Bandbreite des (idealen) Reihenschwingkreises**

$$\Delta\omega_B = \omega_{+45} - \omega_{-45} = R/L = \omega_0^2 RC = \omega_0 R \sqrt{C/L} = \omega_0 / Q . \quad (11.8)$$

Die Definition der Bandbreite in (11.8) ist sinnvoll, weil sie *mehrere interessante Aspekte* erfüllt.

- Betrag des Imaginärteils gleich dem Realteil,
- $Z = \sqrt{2} R$  (bzw.  $Y = 1/\sqrt{2} \cdot 1/R$ ) und
- diese  $\sqrt{2}$  (bzw. die Verringerung auf  $1/\sqrt{2}$ ) entspricht im logarithmischen Dämpfungsmaß gerade 3 dB. Eine Dämpfung von 3 dB nimmt aber ein normales menschliches Ohr gerade noch nicht wahr.

Der Faktor  $Q$  gibt die Güte, Resonanzschärfe oder auch Resonanzüberhöhung an (Verhältnis der induktiven  $\omega_0 L$  oder kapazitiven  $1/\omega_0 C$  Komponente zum Wirkwiderstand  $R$ ). Danach wird bei Resonanzfrequenz  $U_L = U_C = QUR$ .

**Praxistipp:** Analog zu Abb. 11.14 können aus Abb. 11.17 ein *Frequenzgang* und der *Phasengang* dargestellt werden.

Frequenzgang und Phasengang können selbstverständlich auch *messtechnisch* ermittelt und aus diesen beiden danach umgekehrt die *Ortskurve* gezeichnet werden.

Hier sollen  $I = U/Z (=UY)$  bezogen auf den Maximalwert bei  $\omega_0$  sowie  $\varphi_I = \varphi_Y = -\varphi_Z$  abgebildet werden (zusätzlich  $U_L = I \omega L$ ,  $U_C = I/\omega C$ ,  $U_R = IR$  und  $U_{ges} = U$  bezogen auf  $U_{ges}$ ).

<sup>118</sup> Für  $Z(\omega)$  und  $Y(\omega)$  folgen aus diesen Definitionen die gleichen Kreisfrequenzen.

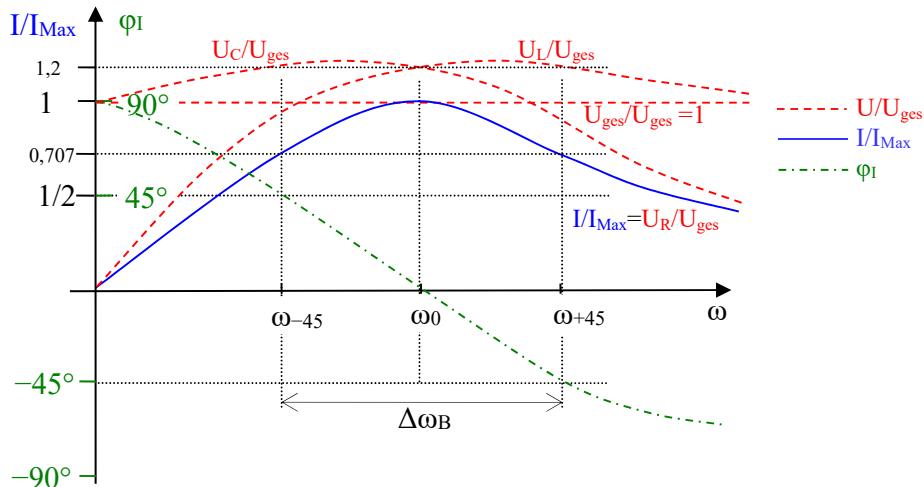


Abb. 11.18: Darstellung von  $I/I_{\text{Max}}$  und  $\varphi_I$  über Kreisfrequenz  $\omega$

In Abb. 11.18 hat  $Q = \omega_0/\Delta\omega_B$  einen recht kleinen Wert (ca 1,2). Für einen hohen Wert von  $Q$  wäre die Kurve  $I/I_{\text{Max}}$  sehr viel schmäler und steiler ( $\Delta\omega_B$  sehr klein), d.h. hohe Resonanzschärfe und somit starke Überhöhung von  $U_{C\text{Max}}$  und  $U_{L\text{Max}}$  gegenüber  $U_{\text{ges}}$ .

**Praxistipp:** Die Spannungen  $U_{C\text{Max}}$  und  $U_{L\text{Max}}$  sind also bei  $\omega_0$  um den Faktor  $Q$  größer als die Spannung der Quelle und die direkten Maxima liegen noch vor oder hinter  $\omega_0$ . Das ist bei der Auswahl der Bauelemente für C und L unbedingt zu beachten. In der Praxis ist etwa ein Q von 80 erreichbar.

$U_C$  und  $U_L$  heben sich gegenseitig zum Teil oder ganz auf. Die gesamte Spannung fällt bei  $\omega = 0$  an C, bei  $\omega = \omega_0$  an R ( $U_C = -U_L$ ) und bei  $\omega \rightarrow \infty$  an L ab. Alle drei Spannungen ergeben in der Summe immer  $U_{\text{ges}}$ .

Weitere wichtige Standardschaltungen (Parallelschwingkreis, Tiefpass und Hochpass) sind in den Übungsaufgaben zu analysieren (siehe Abschnitt 11.1.5).

Hier soll noch ein *Reihenschwingkreis mit realen Verlusten* analysiert werden.

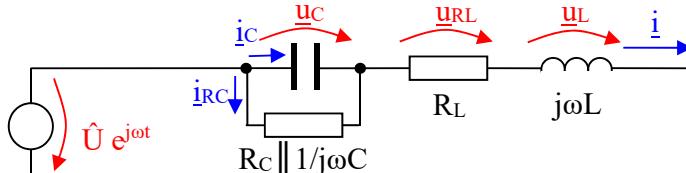


Abb. 11.19: Beispiel: Reihenschwingkreis mit verlustbehafteten Elementen

Zu Beginn wird in einer Y-Ebene die Ortskurve der Parallelschaltung bestimmt.

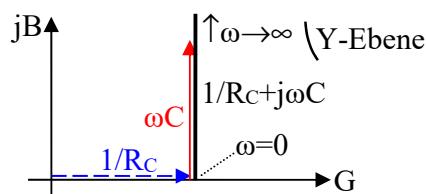


Abb. 11.20: Addition der Leitwerte  $1/R_C$  und  $j\omega C$

Die *halbe Gerade* von  $0 \leq B \leq \infty$  ergibt bei der Invertierung in die Z-Ebene einen *Halbkreis*. Der kürzeste Zeiger  $1/R_C$  wird zum längsten  $R_C$  (Durchmesser des Halbkreises). Wegen

$\varphi_Z = -\varphi_Y$  liegt der Halbkreis nach unten. Dazu wird  $R_L$  (durch Verschiebung der imaginären Achse nach links) und für jeden Kurvenpunkt  $\omega L$  addiert (senkrechte Pfeile).

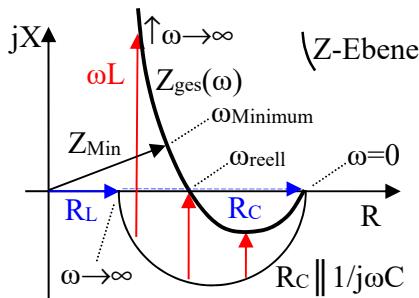


Abb. 11.21: Addition der Widerstände  $R_L$ ,  $R_C \parallel 1/j\omega C$  und  $j\omega L$

Bei diesem Beispiel wird deutlich, dass  $\omega_0$  zu  $\omega_{\text{reell}}$  und  $\omega_{\text{Minimum}}$  auseinanderfällt. Normalerweise ist  $R_L$  recht klein und  $R_C$  sehr groß, sodass der Halbkreis einen sehr großen Durchmesser hat (der Punkt für  $\omega = 0$  befindet sich dann weit rechts außerhalb der Darstellung).

**Praxistipp:** Mit  $R_C \gg \omega C$  liegen  $\omega_{\text{reell}}$  und  $\omega_{\text{Minimum}}$  sehr dicht nebeneinander und die Kurve ist in ihrer Nähe etwa eine Gerade. Infolgedessen sehen auch der Frequenzgang und der Phasengang (außer in der Nähe von  $\omega = 0$ ) wie in Abb. 11.18 aus.

Dieser reale Schwingkreis würde beim Einsatz in einer Oszillatorschaltung (ohne weitere äußere Einflüsse) bei  $\omega_{\text{Minimum}}$  schwingen (größter Betrag des Stromes mit  $I = U/Z_{\text{Min}}$ ).

#### 11.1.4 Parameter für elektrische Stromkreise

Außer dem Verhalten bei verschiedenen Frequenzen ist vor allem die **Leistung** bei sinusförmigen Strömen und Spannungen unterschiedlicher Phase zu untersuchen.

Die Leistung kann zu jedem *Zeitpunkt*  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$  berechnet werden (Abschnitt 4.4.1).

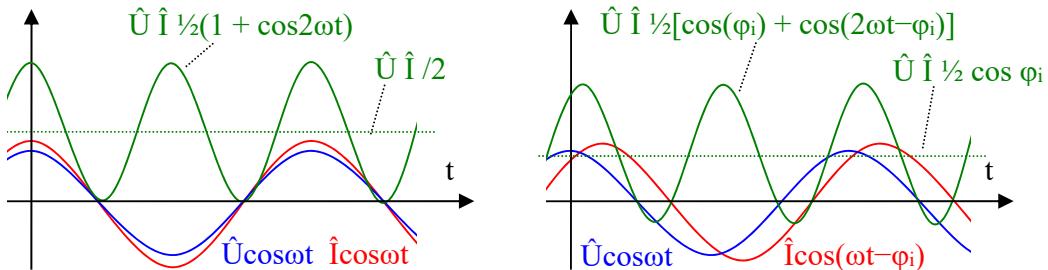


Abb. 11.22: Spannung und Leistung ohne und mit Phasenverschiebung

Mit  $u(t) = \hat{U} \cos \omega t$  und  $i(t) = \hat{I} \cos \omega t$  wird

$$p(t) = \hat{U} \hat{I} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t);$$

mit  $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi_i)$  ergibt sich

$$p(t) = \hat{U} \hat{I} \frac{1}{2} [\cos\{\varphi_u - (-\varphi_i)\} + \cos\{2\omega t + \varphi_u + (-\varphi_i)\}]^{119}.$$

Bei  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pm 90^\circ$  hat die Leistung den Mittelwert null.

<sup>119</sup>  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ , in Abb. 11.22 ist  $\varphi_u = 0$ .

**Praxistipp:** Eine positive Leistung entspricht einer Leistungsaufnahme und eine negative Leistung einer Leistungsabgabe. Es wird also bei  $\cos\varphi \neq 1$  ein Teil der Energie während jeder Periode nur hin- und hergespeichert.

Eine kompaktere und somit *aussagekräftigere Information über den Leistungsverbrauch* ergibt der Mittelwert.

$$\bar{P} = \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi \quad ^{120} \text{ mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Das entspricht dem Produkt der Spannung mit der Projektion des Stromes auf deren Richtung.

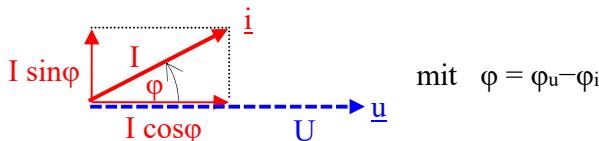


Abb. 11.23: Aufteilung des Stromes parallel und senkrecht zu U

Das Zeigerbild in Abb. 11.23 verdeutlicht, dass bei der Zerlegung des Stromes in zwei Komponenten der Anteil parallel zur Spannung die *Wirkleistung*  $P_w$  ergibt und der Anteil senkrecht zur Spannung genau den Teil der Leistung, der während jeder Periode hin- und hergespeichert wird. Dieser Anteil der Leistung wird als *Blindleistung*  $P_b$  bezeichnet<sup>121</sup>. Die Summe der Leistungszeiger wird *Scheinleistung* genannt (Abb. 11.24). Der Faktor  $\cos\varphi$  gibt den Anteil der Wirkleistung an und wird deshalb *Leistungsfaktor*  $\cos\varphi$  genannt.

#### Definition: Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung und Leistungsfaktor

$$P_w = \bar{P} = U I \cos \varphi \quad P_b = U I \sin \varphi \quad P_s = \sqrt{P_w^2 + P_b^2} = U I \quad \cos \varphi \quad (11.9)$$

Eine Zeigerdarstellung für die drei Leistungskenngrößen folgt in Abb. 11.24.

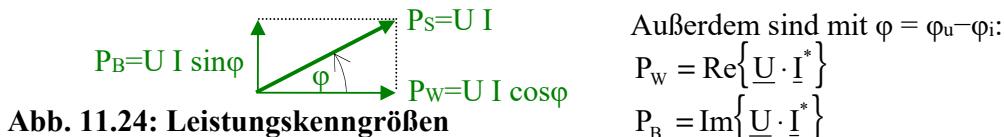


Abb. 11.24: Leistungskenngrößen

Läuft der Strom der Spannung voraus, sind kapazitive Anteile vorhanden und es wird  $1 > \cos \varphi \geq 0$ . Läuft dagegen die Spannung voraus, sind induktive Anteile vorhanden und es wird  $1 > \cos \varphi \geq 0$ <sup>122</sup>. An  $\cos\varphi$  ist also die Richtung nicht allein erkennbar.

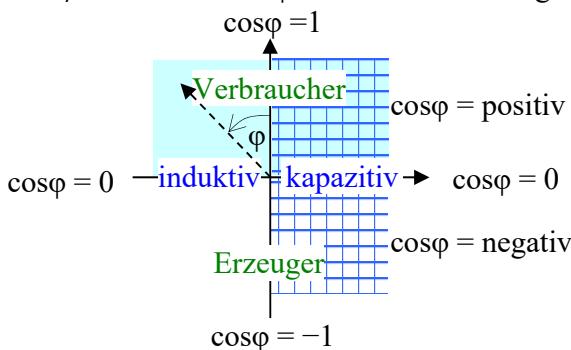


Abb. 11.25: Bedeutung von  $\varphi$  (vom Strom zur Spannung  $\varphi_u - \varphi_i$ ) und von  $\cos\varphi$

<sup>120</sup>  $U = \hat{U}/\sqrt{2}$  und  $I = \hat{I}/\sqrt{2}$  sind Effektivwerte für die Sinusform (siehe Abschnitt 4.4.2).

<sup>121</sup>  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  definiert das Vorzeichen von  $P_b$ .

<sup>122</sup> Da  $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$  ist.

**Praxistipp:** Alle drei Leistungskenngrößen und  $\cos\varphi$  sind *integrale Kennwerte und nur für Sinusform definiert* (11.9), das muss bei entsprechenden Messgeräten beachtet werden. Eine **einfache** Erweiterung auf nichtsinusförmige Größen ist nur für  $P_w$  mit  $\bar{P}$  gegeben.

(Siehe auch (Lun91a S. 127 ff.))<sup>123</sup> Eine Anwendung auf Dreiphasensysteme ist ohne Weiteres möglich und wird in Abschnitt 19.3.1 behandelt.

### 11.1.5 Kennwerte und Übungsaufgaben

Kennwerte sinusförmiger Ströme und Spannungen:

- Spitzenwert               $\hat{U}, \hat{I}$       in V, A
- Effektivwert               $U, I$       in V, A
- Frequenz                 $f$       in Hz
- Kreisfrequenz             $\omega$       in 1/s
- Phasenwinkel (el.)       $\varphi = \omega t_\varphi$  in Bogenmaß oder Grad

Kennwerte einiger Grundschaltungen bei sinusförmigen Strömen und Spannungen:

- Tiefpass                  $\omega_{go} = 2\pi f_{go} = 1/\tau = 1/RC$
- Hochpass                 $\omega_{gu} = 2\pi f_{gu} = 1/\tau = R/L$
- Reihenschwingkreis     $\omega_0 = 2\pi f_0 = (LC)^{-1/2}$      $\omega_{\pm 45} = 2\pi f_{\pm 45}$      $\Delta\omega_B = 2\pi\Delta f_B = \omega_0/Q_R$   
 $Q_R = 1/(R\sqrt{C/L})$  der Reihenschaltung
- Parallelschwingkreis    $\omega_0 = 2\pi f_0 = (LC)^{-1/2}$      $\omega_{\pm 45} = 2\pi f_{\pm 45}$      $\Delta\omega_B = 2\pi\Delta f_B = \omega_0/Q_P$   
 $Q_P = R\sqrt{C/L}$       der Parallelschaltung

Kennwerte für Leistung bei sinusförmigen Strömen und Spannungen:

- Wirkleistung               $P_w$       in W
- Blindleistung               $P_B$       in var      (volt-ampere-reaktiv)
- Scheinleistung             $P_s$       in VA
- Leistungsfaktor            $\cos\varphi$

#### Aufgabe 11.1

Ein Tiefpass soll für  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$  und  $U = 5 \text{ V}$  analysiert werden.

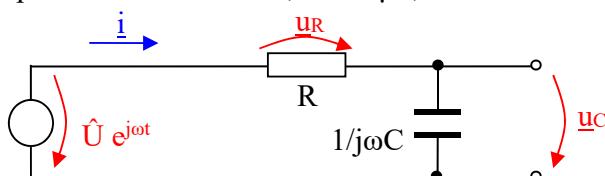


Abb. 11.26: Tiefpass ohne Last

Frage 1: Wie arbeitet diese Schaltung physikalisch?

Frage 2: Wie sieht das maßstäbliche Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?

Frage 3: Wie wären Betrag und Phase von  $u_c$  aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?

Frage 4: Wie groß ist die obere Grenzfrequenz  $f_{go}$ ?

Frage 5: Wie sieht die Ortskurve  $U_c(\omega)$  für  $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$  aus, wie der Frequenz- und Phasengang von  $u_c$ ?

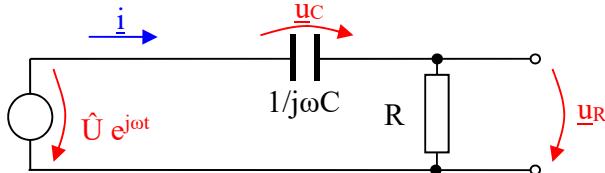
Hinweis: Tabelle für  $f$ ,  $\omega$ ,  $U_c$  und  $\varphi_c$  mit ca. 5 Punkten anlegen (davon 2 vor, 2 nach  $f_{go}$ ).

Zusatzfrage: Wie sieht die Schaltung eines Tiefpasses mit  $R$  und  $L$  aus?

<sup>123</sup> Zur Erweiterung auf nichtsinusförmige periodische Größen siehe (Heu91 S. 94).

**Aufgabe 11.2**

Ein Hochpass soll für  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$  und  $U = 5 \text{ V}$  analysiert werden.



**Abb. 11.27: Hochpass ohne Last**

Frage 1: Wie arbeitet diese Schaltung physikalisch?

Frage 2: Wie sieht das maßstäbliche Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?

Frage 3: Wie sind Betrag und Phase von  $u_R$  aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?

Frage 4: Wie groß ist die untere Grenzfrequenz  $f_{gu}$ ?

Frage 5: Wie sieht die Ortskurve  $\underline{U}_R(\omega)$  für  $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$  aus, wie der Frequenz- und Phasengang von  $u_R$ ?

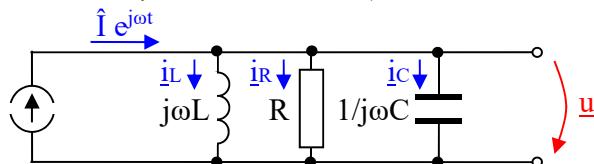
Hinweis: Tabelle für  $f$ ,  $\omega$ ,  $U_R$  und  $\varphi_R$  mit ca. 5 Punkten anlegen (davon 2 vor, 2 nach  $f_{gu}$ ).

Zusatzfrage: Wie sieht die Schaltung eines Hochpasses mit R und L aus?

**Aufgabe 11.3**

Ein Parallelschwingkreis soll für  $f = 100 \text{ Hz}$  und  $I = 2,5 \text{ mA} = \text{const}$  analysiert werden.

( $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  und  $L = 40 \text{ mH}$ )



**Abb. 11.28: Parallelschwingkreis ohne Last**

Frage 1: Wie sieht das qualitative Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?

Frage 2: Wie wären Betrag und Phase von  $u$  aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?

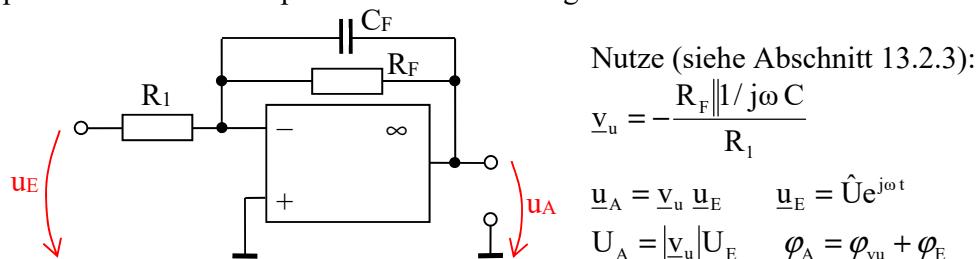
Frage 3: Wie groß sind die Resonanzfrequenz  $f_0$  und die Bandbreite  $\Delta f_B$ ?

Frage 4: Wie sieht die Ortskurve  $\underline{U}(\omega)$  für  $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$  aus, wie der Frequenz- und Phasengang von  $u$ ?

Hinweis: Tabelle für  $f$ ,  $\omega$ ,  $U$  und  $\varphi_U$  mit ca. 7 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach  $f_0$ ,  $f_0$  und  $f_{\pm 45}$ ).

**Aufgabe 11.4**

Ein Tiefpass wird mit einem Operationsverstärker aufgebaut.



Nutze (siehe Abschnitt 13.2.3):

$$\underline{v}_u = -\frac{R_F \| 1/j\omega C}{R_1}$$

$$\underline{u}_A = \underline{v}_u \underline{u}_E \quad \underline{u}_E = \hat{U} e^{j\omega t}$$

$$U_A = |\underline{v}_u| U_E \quad \varphi_A = \varphi_u + \varphi_E$$

**Abb. 11.29: Tiefpass mit Operationsverstärker**

Frage 1: Wie kann  $C$  bei  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  und  $R_F = 100 \text{ k}\Omega$  für  $f_{go} = 1 \text{ kHz}$  bestimmt werden?

Frage 2: Wie sehen der Frequenzgang und der Phasengang für  $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$  aus?

Hinweis: Tabelle für  $f$ ,  $\omega$ ,  $U_A$  und  $\varphi_A$  mit ca. 5 Punkten anlegen (davon 2 vor, 2 nach  $f_{go}$ ).

**Aufgabe 11.5**

Auf dem Typenschild eines Asynchronmotors befinden sich u.a. folgende Angaben (vergleiche Aufgabe 4.11):

Nennspannung : 220/380 V

Nennstrom : 1,6/0,93 A

$\cos\varphi$  : 0,78

Leistung : 0,33 W (mechanisch)

Frage 1: Wie groß sind die Wirkleistung (elektrisch), Blindleistung, Scheinleistung und der Wirkungsgrad (beachte die drei gleichen Wicklungen)?

Frage 2: Als sehr einfaches Ersatzschaltbild ist eine Reihenschaltung von R und L möglich. Wie groß sind diese bei Nennbetrieb (vergleiche Abschnitt 19.3.3)?

Frage 3: Welche Größe C muss ein paralleler Kompensationskondensator haben, damit keine Blindleistung aus dem Netz entnommen wird?

Hinweis: Die Leistung ist die nutzbare mechanische Leistung, die Rechnung müsste sowohl bei 220 als auch bei 380 V im Rahmen der Messgenauigkeit gleiche Ergebnisse liefern. Die Frequenz beträgt  $f = 50$  Hz.

**11.1.6 Messung des Frequenzgangs eines Schwingkreises**

Es werden die Spannungen an Widerstand, Induktivität und Kapazität bei verschiedenen Frequenzen gemessen.

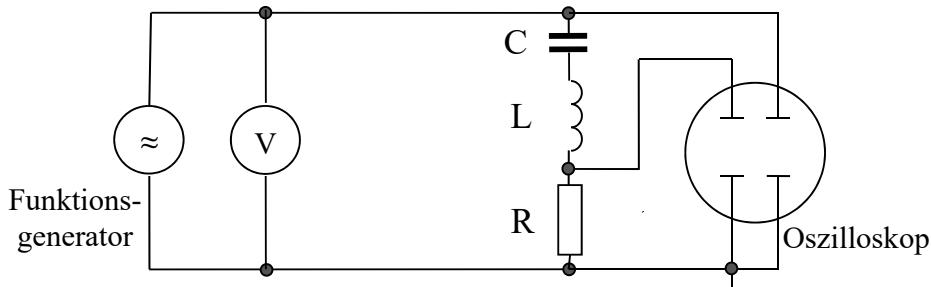
**Versuchsaufbau:**

Abb. 11.30: Schaltung des Versuchsaufbaus

Hinweis: Zur Messung die Position von R, L und C tauschen. Resonanz- und  $45^\circ$ -Frequenzen suchen und zusätzlich zwei weitere Messpunkte auf jeder Seite anordnen.  
(Achtung: Phase liegt nur einzeln gegenüber der Gesamtspannung vor.)

**Versuchsdurchführung:**

Messung der Spannungen mit einem Oszillografen, Nutzung einer Sinusspannung, Übergabe der Kurven an einen PC und Auswertung, Vergleich mit berechneten Verläufen und Parametern.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Messen bei  $U = 5$  V,  $L = 300$  mH,  $C = 0,22$   $\mu$ F und  $R = 300 \Omega$  sowie  $30 \Omega$ , Darstellen des Frequenz- und Phasengangs (doppeltlogarithmisch bis 10 kHz),
2. Darstellen der Ortskurve in einer Z-Ebene,
3. Bestimmen von R, L und C aus den Messwerten.

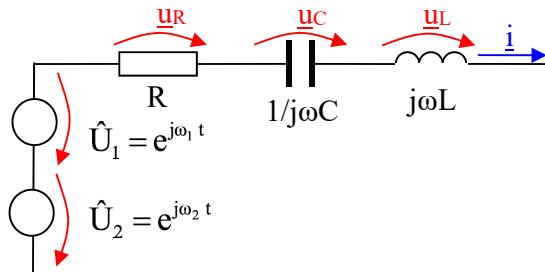
### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Die dargestellten Kurven stimmen mit dem theoretischen Verlauf sehr gut überein.
2. Die aus den Kurven ermittelten Parameter entsprechen recht gut den Werten der eingesetzten Bauelemente. Nur die Induktivität der Spule weicht deutlich vom Typenschild ab. Die eingesetzte Spule (Vorschaltgerät für eine Hochdrucklampe) war für 50 Hz vorgesehen (Material des Kerns), im Versuch ist  $\omega_0/2\pi$  aber ca. 800 Hz.

## 11.2 Nichtsinusförmige periodische Signale

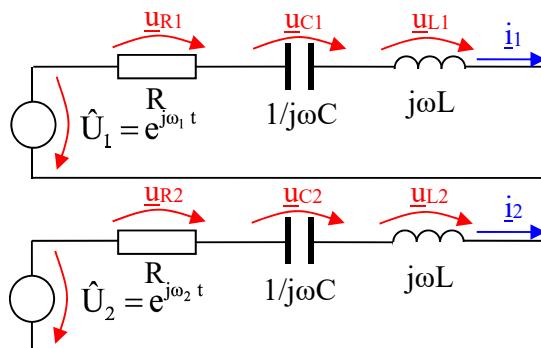
### 11.2.1 Mehrere sinusförmige Quellen

Schon die Addition von zwei sinusförmigen Signalen unterschiedlicher Frequenz ergibt ein nichtsinusförmiges aber periodisches Signal (genauso von mehreren Signalen).



**Abb. 11.31: Schaltung mit zwei Quellen unterschiedlicher Frequenz**

Weil mit der komplexen Rechnung (und den von ihr abgeleiteten Methoden) nur Schaltungen mit linearen Bauelementen behandelt werden können, ist dann auch grundsätzlich der **Überlagerungssatz** anwendbar. Die Schaltung in Abb. 11.31 wird dazu in eine Ersatzschaltung für jede Quelle aufgeteilt.



**Abb. 11.32: Zwei Schaltungen für den Überlagerungssatz**

**Praxistipp:** Beide Schaltungen werden mit Methoden aus Abschnitt 11.1 berechnet. Das Gesamtergebnis ist die *richtungsrichtige Addition* (z.B.  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$  für Abb. 11.31). Das Vorgehen ist auch mit vielen Quellen möglich, aber besser wäre dann eine Simulation.

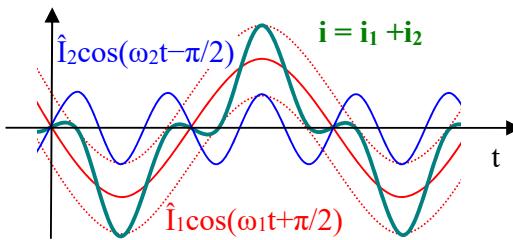


Abb. 11.33: Beispiel für ein mögliches Ergebnis im Zeitbereich<sup>124</sup>

Bei fast gleichen Frequenzen ergäbe sich für das Beispiel aus Abb. 11.31 ein typischer *Schwebungsvorgang*, der von einer Multiplikation zweier Frequenzen durch deren Phasensprünge unterschieden werden kann.

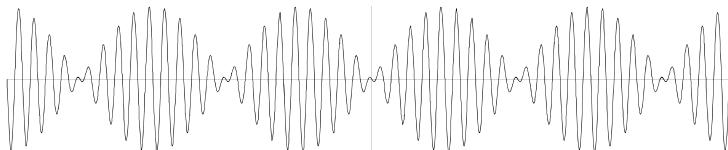


Abb. 11.34: Beispiel einer Schwebung

*Mehrere Frequenzen ergeben immer nichtsinusförmige periodische Signale.*

### 11.2.2 Behandlung mit Hilfe der Fourierreihe

**Praxistipp:** Alle periodischen Signale können durch Zerlegung in eine *Fourierreihe* zu einer *Summe von Sinussignalen* umgeformt werden. Jeder Summand wird dann einzeln (wie in Abschnitt 11.2.1) behandelt und danach die Summe gebildet.

Die Bestimmung der Fourierreihe erfolgt nach Abschnitt 10.4. Im allgemeinen Fall entstehen *unendlich viele Summanden*. Alle vorkommenden Frequenzen sind immer genau ganze Vielfache der Grundfrequenz (*Oberschwingungen*).

**Praxistipp:** Praktisch kann immer nach einer *endlichen Anzahl Summanden* abgebrochen werden, weil alle realen Systeme eine endliche Bandbreite haben. Zwei Parameter für jede vorkommende Frequenz ( $U_n$  und  $\varphi_n$  bzw.  $U_{an}$  und  $U_{bn}$ ) beschreiben dann das Signal.

In *Umkehrung* werden gewünschte Signale aus mehreren Sinussignalen zusammengesetzt.

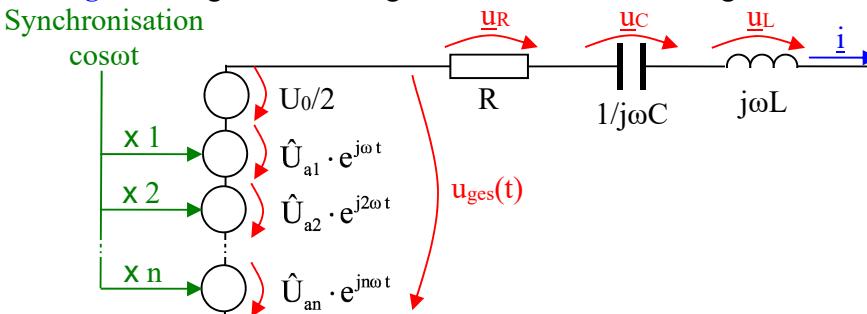


Abb. 11.35: Signal aus vielen Quellen für Oberschwingungen

Da das menschliche Ohr keine Phasenlage wahrnimmt und somit die Synchronisation entfallen kann, wird insbesondere im Audiobereich und bei Musikinstrumenten (z.B. Register der Orgel, elektronische Register ...) diese Methode genutzt.

<sup>124</sup>  $\omega_2 = 3 \omega_1$ ;  $\omega_2$  hier kapazitiv ( $i \rightarrow 90^\circ$  vor),  $\omega_1$  induktiv ( $i \rightarrow 90^\circ$  nach) je gegenüber  $u(t)$  als cos mit  $\varphi_u=0$ .

**Praxistipp:** Die Zeitfunktion  $u(t)$  und die Darstellung des Frequenzspektrums ( $U_{an}$ ,  $U_{bn}$  oder  $U_{cn}$ ,  $\varphi_n$  z.B. als Balkendiagramme) haben völlig äquivalente Informationen.

Bei der Arbeit mit Spektren lassen sich mehrere Regeln erkennen und anwenden.

**1. Symmetrie der Zeitfunktion gegenüber der y-Achse im Zeitnullpunkt**

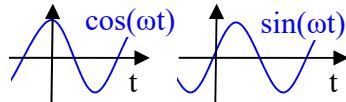


Abb. 11.36: Symmetrie gegenüber der y-Achse

Liegt Spiegelsymmetrie  $f(-t) = f(t)$  gegenüber der y-Achse im Zeitnullpunkt vor, können nur *cos-Funktionen* (also  $a_n$ ) vorhanden sein (alle  $b_n=0$ ).

Bei Asymmetrie  $f(-t) = -f(t)$  können dagegen nur *sin-Funktionen* (also  $b_n$ ) vorhanden sein (alle  $a_n=0$ ).

**2. Symmetrie der Zeitfunktion bezüglich ihrer Kurvenform**

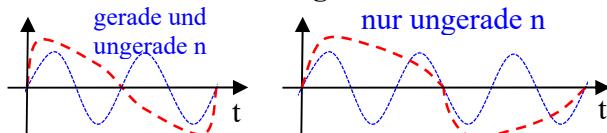


Abb. 11.37: Symmetrie gegenüber der Kurvenform

Gilt für die gestrichelte Kurven  $f(-t) = f(t)$  oder  $f(-t) = -f(t)$  **und**  $f(t+T/2) = -f(t)$  (Periodendauer  $T$ ), können zusätzlich zu Punkt 1. nur *ungeradzahlige* Oberschwingungen auftreten ( $n = 3, 5, 7, 9 \dots$ ; vergleiche mit punktiertem Sinus für  $n=3$ ).

**3. Es können natürlich beide Fälle kombiniert** (addiert) **existieren** und/oder zusätzlich ein Gleichanteil vorhanden sein.

**Praxistipp:** Beide Regeln sind sowohl zur *Kontrolle der Plausibilität von Messungen* unerlässlich als auch zur *Aufwandsreduzierung* bei Berechnungen sehr hilfreich.

### 11.2.3 Wichtige Testsignale zur Analyse von Schaltungen

Natürlich ist ein *sinusförmiges Signal* das wichtigste Testsignal sowohl bei der messtechnischen Analyse wie bei einer Simulation als auch bei einer analytischen Untersuchung.

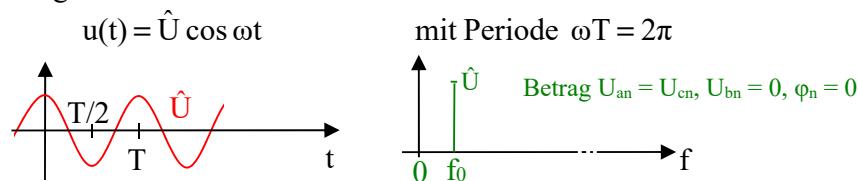


Abb. 11.38: Beispiel für ein sinusförmiges Signal und dessen Spektrum

Ein System wird mit sinusförmigen Signalen des gesamten interessierenden Frequenzbereiches getestet. Die Ergebnisse geben ein umfassendes Bild über die Eigenschaften dieses Systems.

Ein **Rechtecksignal** wird insbesondere eingesetzt, um die Dauer von Anstiegs- und Abfallflanken ( $t_{an/ab}$  von 0,1 bis 0,9· $T$ ) sowie das Überschwingen mit einem Oszilloskop zu analysieren.

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} & \text{für } 0 \leq \omega t \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U}/2 + \frac{2\hat{U}}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

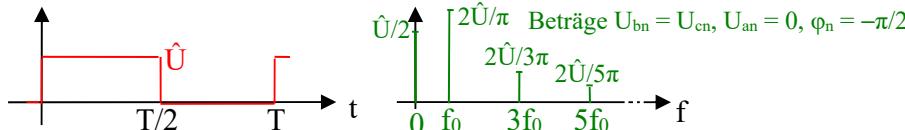


Abb. 11.39: Beispiel für ein Rechtecksignal und dessen Spektrum

Die Anstiegs- und Abfallflanken können auch aus dem Frequenzgang bestimmt werden.

Ein **Dreiecksignal** kann genutzt werden, um die Linearität von Systemen zu analysieren. Diese gibt es als symmetrisches Dreieck und als „Sägezahn“.

$$u(t) = \hat{U} t/T \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad \text{mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U}/2 - \frac{\hat{U}}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

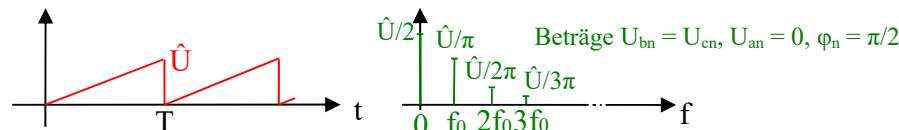


Abb. 11.40: Beispiel für ein Dreiecksignal und dessen Spektrum

Dazu wird eine genügend langsam steigende Flanke erzeugt (für vernachlässigbare Übergangseffekte). Bei nichtlinearen Verzerrungen treten außerdem zusätzliche Frequenzen auf, die das Spektrum verändern.

Ein **Weißes Rauschen** kann als Testsignal genutzt werden<sup>125</sup>, um den Betrag des Frequenzganges schnell zu ermitteln oder die Übertragungsfunktion von Systemen zu analysieren. Eine Beschreibung (siehe Abschnitt 10.6) erfolgt mit der Fouriertransformation.

$$u(t) = U_{\text{Rausch}} \quad \text{für } -\infty \leq t \leq +\infty$$

$$F(\omega) = \text{const} \quad \text{für } -\infty \leq \omega \leq +\infty$$

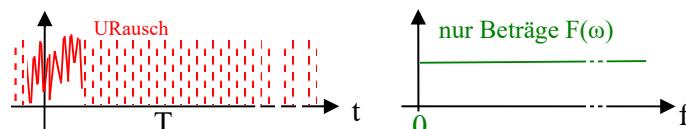


Abb. 11.41: Beispiel für ein Rauschsignal und dessen Spektrum

Ausschlaggebend ist, dass alle Frequenzen vorhanden sind und praktisch den gleichen Betrag haben. Die Eigenschaft, eine *zeitkonstante Leistung* zu besitzen ( $p(t) = \text{const}$ ), kennzeichnet Rauschsignale. Mit Spektralanalysatoren können Rauschsignale heute ausgewertet werden. (Rauschen mit ungleichem Spektrum wird farbiges Rauschen (rosa, rot ...) genannt).

<sup>125</sup> Es soll hier als ein Beispiel für stochastische Signale aufgeführt werden. Auch wenn dieses nichtperiodisch ist, existiert es aber von  $-\infty$  bis  $+\infty$ .

### 11.2.4 Kennwerte und Übungsaufgaben

Kennwerte eines Signals sind stark abhängig von der Signalform, z.B.

- Sinussignal:  $\hat{U}$ ,  $\omega$  und evtl.  $\varphi$
- Rechtecksignal:  $\hat{U}_{ss}$ ,  $U_{Offset}$  (oder  $\hat{U}_-$  und  $\hat{U}_+$ ), Tastverhältnis, Periodendauer und evtl. Anstiegszeit der Flanke<sup>126</sup>
- Dreiecksignal:  $\hat{U}_{ss}$ ,  $U_{Offset}$  (oder  $\hat{U}_-$  und  $\hat{U}_+$ ), Anstiegzeit und Abfallzeit (zusammen Periodendauer)

Kennwerte eines Frequenzspektrums (gemessen oder nach der Fourierreihe).

- Amplitudenwerte von  $n \cdot \omega$  als  $U_{cn}$  (oder die Beträge von  $U_{an}$  und  $U_{bn}$ )
- Phasenlage von  $n \cdot \omega$  als  $\varphi_n$  (oder als Vorzeichen der  $U_{an}$  und  $U_{bn}$ )

#### Aufgabe 11.6

Addition der Teilschwingungen des Rechtecksignals aus Abb. 11.39 z.B. mit einem Simulationsprogramm bei  $\hat{U} = 5$  V,  $T = 2$  ms.

Frage 1: Wie sehen die Grund- und die ersten Oberschwingungen ( $n = 3, 5, 7$ ) einzeln aus?

Frage 2: Wie sieht das Signal bei schrittweiser Addition der Oberschwingungen (von der 3. bis zur 7.) aus?

Frage 3: Wie sehen das Amplituden- und das Phasenspektrum aus ( $U_{cn}$  und  $\varphi_n$ )?

#### Aufgabe 11.7

Für eine Simulation ist das Rechtecksignals (mit  $\hat{U} = 5$  V,  $T = 2$  ms) aus Abb. 11.39 um  $-\pi/4$  und  $-\pi/2$  zu verschieben.

Frage 1: Wie verändert sich jeweils das Spektrum ( $U_{an}$  und  $U_{bn}$  sowie  $U_{cn}$  und  $\varphi_n$ )?

Frage 2: Ändert sich dabei auch die Kurvenform?

## 11.3 Nichtperiodische Signale

### 11.3.1 Behandlung mit der Fouriertransformation

Sind nichtperiodische Signale von endlicher Länge, kann mit der **Fouriertransformation** eine Zerlegung in ein kontinuierliches endliches Frequenzspektrum erfolgen.

Die Reihen- wird dabei zu einer Integralform (siehe Abschnitt 10.6). Gilt für das endliche Signal  $u(t) = 0$  für  $t < t_{Anfang}$  und  $t > t_{Ende}$ , liegt eine endliche Signaldauer vor und die Integrale sind konvergent. Im Unterschied zur Reihe treten *alle Frequenzen* auf (nicht nur ganze Vielfache der Signaldauer  $T = t_{Ende} - t_{Anfang}$ ).

**Praxistipp: Beachte:** Alle Frequenzen sind stationär im Zeitraum von  $-\infty < t < \infty$  vorhanden, heben sich bis  $t_{Anfang}$  und nach  $t_{Ende}$  gegenseitig völlig auf und ergeben nur während der Signaldauer gerade in ihrer Summe das Signal.

Das *Frequenzspektrum* ist also *zeitkonstant* in Beträgen und Phase. Dieses ist nicht wie in Abb. 11.35 messtechnisch nachvollziehbar<sup>127</sup>, sondern als rein *mathematischer Bildbereich* aufzufassen. Das Frequenzspektrum selbst ist dennoch von großer praktischer Bedeutung.

<sup>126</sup> von 0,1 bis 0,9  $\hat{U}$

<sup>127</sup> Das ging nur durch die Abstraktion als „periodisches Signal“ (alle realen Signale haben Anfang und Ende).

Auch hier gilt, dass zwei *mathematisch* äquivalente Betrachtungs/Darstellungsweisen für Signale und Systeme – die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung** – bestehen.

Alle wichtigen Signale sind in Tabellen aufgeführt. Es gibt *andere Schreibweisen* für die Fouriertransformation (weitere Formen, siehe Abschnitt 10.6). Besonders genutzt werden heute numerische Programme (insbesondere die FFT – Fast-Fourier-Transformation).

**Praxistipp:** Auch für derartige Signale kann eine Berechnung nach dem *Überlagerungssatz* erfolgen; das Ergebnis stellt aber in der Regel kein Standardsignal dar und muss grafisch ausgewertet werden. Ein Simulationsprogramm ist hier also vorzuziehen.

Die Hauptanwendung liegt in der informationstheoretischen *Signalanalyse*. Dazu ist eine Reihe weiterer Transformationen oder Verfahren entwickelt worden (z.B. die diskrete Fouriertransformation, zeitabhängige Kurzzeitspektren, die Hilberttransformation oder die Korrelationsanalyse), siehe auch Spezialliteratur z.B. (Fri85 S. 36 ff).

Zur Nutzung für eine Schaltungsberechnung siehe Praxistipp Abschnitt 11.2.1.

### 11.3.2 Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation

Diskrete Signale haben nur zu diskreten Zeitpunkten  $t_i$  einen von Null verschiedenen Wert.

Sie entstehen z.B. durch Messwertabtastung oder A/D-Wandlung. Mathematisch wird dafür die Multiplikation mit einer Folge von Stoßfunktionen<sup>128</sup> genutzt. Eine Einordnung und ihre Eigenschaften werden im Abschnitt 16.3.1 untersucht.

**Praxistipp:** Die *diskreten periodischen Signale* sind der eigentliche *Gegenstand der diskreten Fouriertransformation (DFT)*. Aus den Abtastwerten der Grundperiode des Signals  $-T/2 \leq t < T/2$  lassen sich aber auch andere Signale analysieren.

129

Die Transformation erfolgt nach Abschnitt 10.7 Gleichung ( 10.11 ). Diese können mit Hochsprachen leicht in Algorithmen für Rechner umgesetzt werden.

**Praxistipp:** Für die praktische Anwendung müssen einige Bedingungen beachtet werden. Siehe dazu Abschnitt 16.3.1.

In vielen Analyseprogrammen sind komfortabel zu nutzende Algorithmen implementiert, die in der Regel keine Fehlbenutzung (insbesondere eine falsche Abtastung) mehr zulassen. Als Algorithmus wird überwiegend die FFT (Fast Fouriertransformation) verwendet.

**Praxistipp:** Bei allen Untersuchungen zeitabhängiger Signale zeigt sich, dass zwei äquivalente Betrachtungs- bzw. Darstellungsweisen für Signale und Systeme bestehen:

**Zeitdarstellung und Frequenzdarstellung**

<sup>128</sup> Zur Stoßfunktion siehe Abschnitt 10.5.

<sup>129</sup> Es müssen **exakt** eine/mehrere Periode/n oder eine Fensterfunktion sein, die zeitlich aber auch beliebig liegen können.

## 11.4 Schalt- und Übergangsvorgänge

#### 11.4.1 Behandlung mit Hilfe der Laplacetransformation

In der Elektrotechnik müssen oft *Übergangsvorgänge* insbesondere beim *Ein- oder Ausschalten* untersucht werden. Das wird entsprechend Abb. 11.1 vereinfacht.

Mit der *Laplacetransformation* (siehe Abschnitt 10.8) können bei  $t = 0$  oder  $t = t_A$  beginnende Signale (Spannungen, Ströme ...) transformiert sowie die Differentiation und Integration zu einfachen algebraischen Operationen umgeformt werden. Das zeigt Abb. 11.42.



Abb. 11.42: Schema zur Lösung mittels Laplacetransformation

Die Transformation einer Differentialgleichung erfolgt mit dem Differentiationssatz. Dabei sind die Anfangsbedingungen bei einem „energielosen“ Anfang (z.B. Einschaltvorgang) null.

Bei „energielosem“ Anfang werden die *Strom-Spannungs-Beziehungen*:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow U_L(p) = L[pI(p) - i(0)] = pL I(p)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \leftrightarrow I_C(p) = C[pU(p) - u(0)] = pC U(p).$$

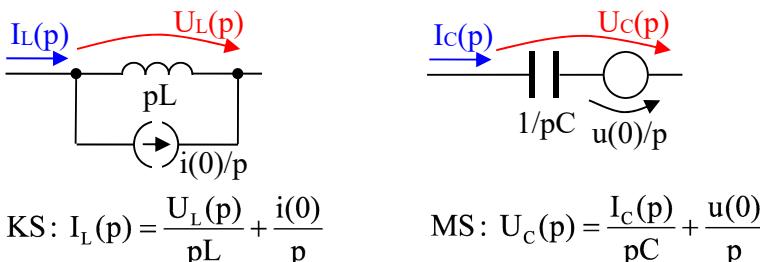
Damit können auch *Schaltungen in den Laplacebereich transformiert werden*:

### Festlegung: Widerstände im Laplacebereich

$$\begin{array}{l} R \leftrightarrow R \\ L \leftrightarrow pL \\ C \leftrightarrow 1/pC \end{array}$$

( 11.10 )

Da alle Vorgänge anfangsseitig begrenzt sein müssen, können eigentlich nur Einschaltvorgänge behandelt werden. Für *Ausschalt- und Übergangsvorgänge* erfolgt die Berechnung so, dass zu Beginn des Vorganges durch Quellen (multipliziert mit  $1(t - t_{\text{Beginn}})$ ) der entsprechende Anfangszustand „zwangsweise“ hergestellt wird (damit ist der Differenziationssatz vollständig). Somit müssen dann für L und C die Schaltungen entsprechend Abb. 11.43 genutzt werden.



**Abb. 11.43:** Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

In Abb. 11.43 beginnen alle Ströme und Spannungen bei  $t = 0$ ; das muss bei der Transformation von  $I(p)$  und  $U(p)$  berücksichtigt werden. Bei  $i(0)$  und  $u(0)$  ist dies (wegen  $1(t) \leftrightarrow 1/p$ ) schon berücksichtigt. (Beginnen die Vorgänge nicht bei  $t = 0$ , muss zusätzlich der Dämpfungssatz benutzt werden.) Der Knotenpunkt- und der Maschensatz ergeben dann in Abb. 11.43 gerade den jeweiligen Differentiationssatz.

**Praxistipp:** Die Berechnungen werden wiederum so einfach wie bei Gleichstrom. Die Rücktransformation kann meist mit der Korrespondenztabelle erfolgen.

### 11.4.2 Beispiel: Analyse des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises

In Abschnitt 5.2.6 und 6.2.6 wurden das Ein- und Ausschalten einer RC- und einer RL-Schaltung untersucht. Jetzt können mit akzeptablem Aufwand die Schaltvorgänge an einem Reihenschwingkreis untersucht werden. Dazu wird der Schalter in Abb. 11.44 bei  $t = 0$  einmal von unten nach oben und zum anderen von oben nach unten bewegt. Wir gehen von einem idealen Schalter  $R_{\text{Ein}} = 0$ ,  $R_{\text{Aus}} = \infty$  und  $t_{\text{Schalt}} = 0$  aus<sup>130</sup>.

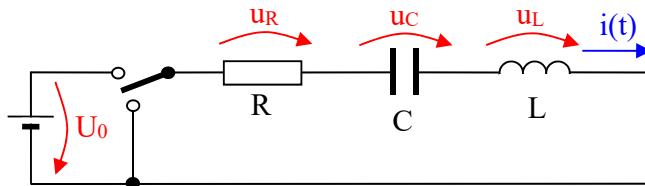


Abb. 11.44: Ein- und Ausschalten einer Reihenschaltung von R, C und L

Die in den Laplacebereich transformierte Schaltung für das **Einschalten** entsteht, wenn für die *Gleichspannungsquelle und den Schalter* eine Quelle  $U_0 \cdot 1(t)$  eingesetzt wird.

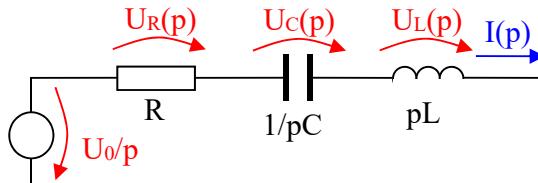


Abb. 11.45: Reihenschaltung von R, C und L im Laplacebereich für das Einschalten

Der Strom folgt sofort aus dem *Ohm'schen Gesetz*:

$$\begin{aligned} I(p) &= \frac{U_0/p}{R + 1/pC + pL} = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + R/2L)^2 + 1/LC - (R/2L)^2} \\ I(p) &= \frac{U_0/L}{(p + \delta)^2 + \omega_e^2} \end{aligned}$$

Die letzte Form entspricht der Korrespondenz in Tabelle 10.1 (rechte Spalte, dritte Zeile von unten) mit der **Dämpfung**  $\delta = R/2L$  ( $=\beta$ ) und der **Eigenkreisfrequenz**  $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \delta^2$  ( $=\alpha^2$ )<sup>131</sup>. Dabei sind für  $\omega_e$  drei Fälle zu unterscheiden:

1. **Periodischer Fall:**  $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$   
Dieser führt zu einer gedämpften Schwingung mit der Eigenfrequenz  $\omega_e$ .
2. **Aperiodischer Grenzfall:**  $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$   
Dieser führt zu dem schnellsten Übergangsvorgang ohne Nachschwingen.
3. **Aperiodischer Fall:**  $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$   
Dieser führt zu einem langen gedämpften Übergangsvorgang (ohne Schwingen).

<sup>130</sup> Das kann durch einen Schalttransistor mit Freilaufdiode näherungsweise realisiert werden.

<sup>131</sup>  $\omega_0$  nach ( 11.7 . )

Für den **periodischen Fall** wird nach Tabelle 10.1 (rechte Spalte, dritte Zeile von unten)

$$i(t) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\omega_e} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot l(t) = \frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot l(t).$$

Das entspricht einer *Sinusschwingung*, die bei  $t = 0$  beginnt und *deren Amplitude*  $U_0 e^{-\delta t} / \omega_e L$  mit der Zeit *abnimmt*.

Die Spannungen an R, L und C folgen aus deren Strom-Spannungs-Beziehungen ( 11.10 )<sup>132</sup>.

$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot l(t) \quad u_L(0) = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \left( 1 - e^{-\delta t} \left( \cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \right) \cdot l(t) \quad u_C(\infty) = U_0$$

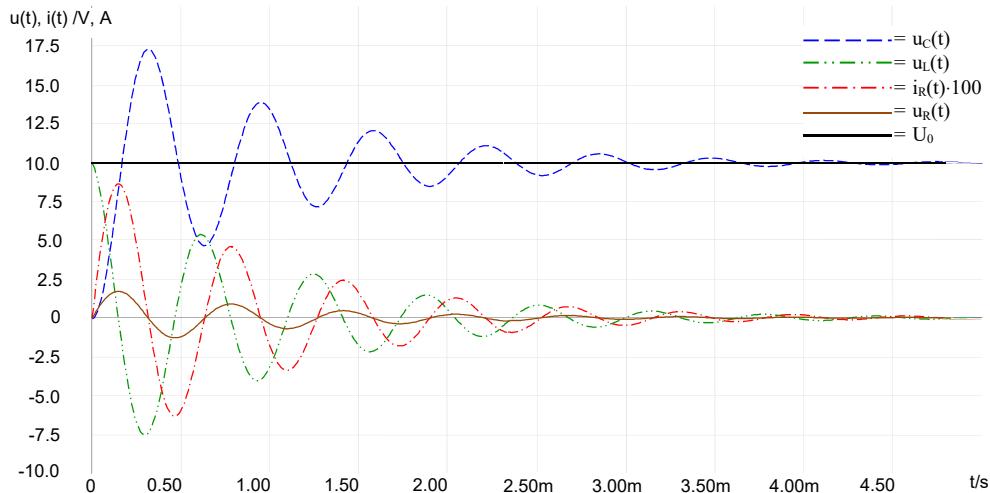


Abb. 11.46: Periodischer Fall  $R=20 \Omega$ ,  $C=1 \mu F$ ,  $L=10 \text{ mH}$

Für den **aperiodischen Grenzfall** wird nach Tabelle 10.1 (rechte Spalte, oberste Zeile)<sup>133</sup>

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot l(t).$$

Das ergibt einen linearen *Anstieg*, der *schnell zu null abgedämpft* wird.

$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = U_0 (1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

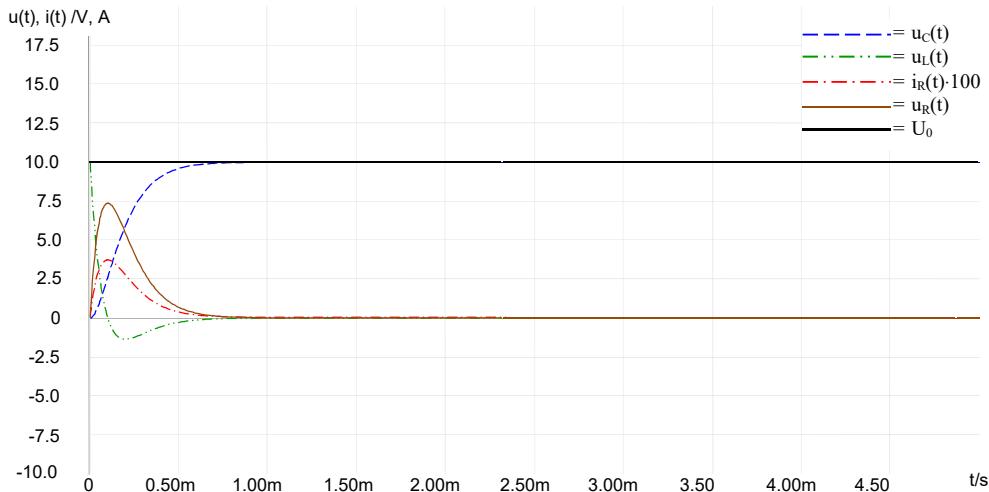
$$u_C(t) = U_0 (1 - (1 + \delta t) e^{-\delta t}) \cdot l(t)$$

$$u_L(0) = U_0$$

$$u_C(\infty) = U_0$$

<sup>132</sup> Die entsprechenden Korrespondenzen sind ebenfalls in Tabelle 10.1 enthalten.

<sup>133</sup> Ansonsten müsste der Grenzwert für  $\omega_e \rightarrow 0$  von  $\sin \omega_e t / \omega_e$  berechnet werden.



**Abb. 11.47: Aperiodischer Grenzfall**  $R=200 \Omega$ ,  $C=1 \mu F$ ,  $L=10 mH$

Und für den **aperiodischen Fall** wird nach Linearfaktorzerlegung<sup>134</sup> die Form entsprechend Tabelle 10.1 (linke Spalte, dritte Zeile von unten) erreicht.

$$I(p) = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + \delta_1)(p + \delta_2)}$$

mit  $p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 \rightarrow p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta_{1,2}$

Danach ergibt sich der Strom zu

$$i(t) = \frac{U_0/L}{\delta_1 - \delta_2} (e^{-\delta_2 t} - e^{-\delta_1 t}) \cdot l(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot l(t)$$
<sup>135</sup>.

Es ist zu sehen, dass  $\delta_1$  relativ klein (*langamer Vorgang*), dagegen  $\delta_2$  relativ groß (*schneller Vorgang*) ist und sich *zu Beginn beide genau aufheben*.

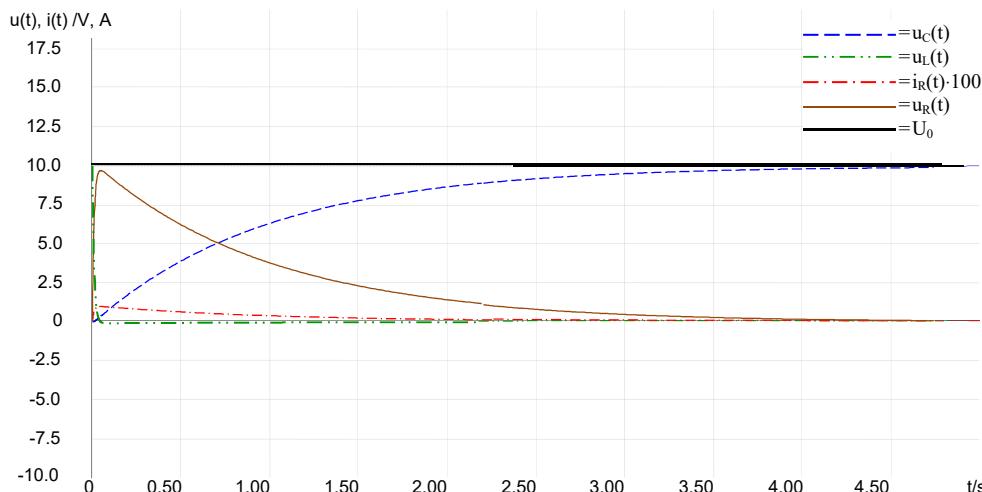
$$u_R(t) = U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot l(t) \quad u_L(0) = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_1 (e^{-\delta_2 t} - 1) - \delta_2 (e^{-\delta_1 t} - 1)] \cdot l(t) \quad u_C(\infty) = U_0$$

<sup>134</sup> Ansonsten müsste für ein imaginäres  $\omega_e$  über  $\sin j\omega_e t$  und dessen Exponentialform gewandelt werden.

<sup>135</sup>  $\delta_1 - \delta_2 = -2 \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Abb. 11.48: Aperiodischer Fall  $R=1000 \Omega$ ,  $C=1 \mu F$ ,  $L=10 \text{ mH}$ 

**Praxistipp:** In allen drei Fällen liegt die Spannung  $U_0$  für  $t \approx 0$  an L und für  $t \rightarrow \infty$  an C. Der Strom ist sowohl bei  $t \approx 0$  (weil L keine schnellen Änderungen zulässt) als auch bei  $t \rightarrow \infty$  (weil C keinen Gleichstrom zulässt) null. Da bei  $t = 0$  der Strom nur beginnt anzusteigen, kann die Spannung am Kondensator erst verzögert beginnen. (Bei Vergrößerung der Kurven ist zu sehen, dass bei  $t = 0$  der Spannungsanstieg  $duc/dt = 0$  ist.)

Die in den Laplacebereich transformierte Schaltung für das **Ausschalten** entsteht, wenn für die *Gleichspannungsquelle und den Schalter ein Kurzschluss eingesetzt wird*. Zusätzlich muss der Anfangswert am Kondensator berücksichtigt werden (Abb. 11.43). Der Kondensator wurde durch den *Einschaltvorgang* auf  $U_0$  aufgeladen.

Abb. 11.49 ergibt die gleiche Schaltung wie beim Einschalten (Abb. 11.45), nur die *Quelle ist umgepolt*. Außerdem muss  $U_C(p) = U_0/p + I(p)/pC$  gerechnet werden (siehe Abb. 11.43).

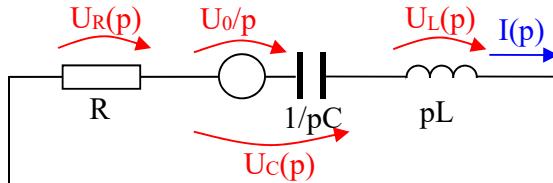


Abb. 11.49: Reihenschaltung von R, C und L im Laplacebereich für das Ausschalten

Da die Rechnung vollkommen gleich erfolgt, werden nur die Ergebnisse angegeben.

Für den **periodischen Fall** werden:

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot l(t)$$

$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot l(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \left( \cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot l(t)$$

$$u_C(\infty) = 0$$

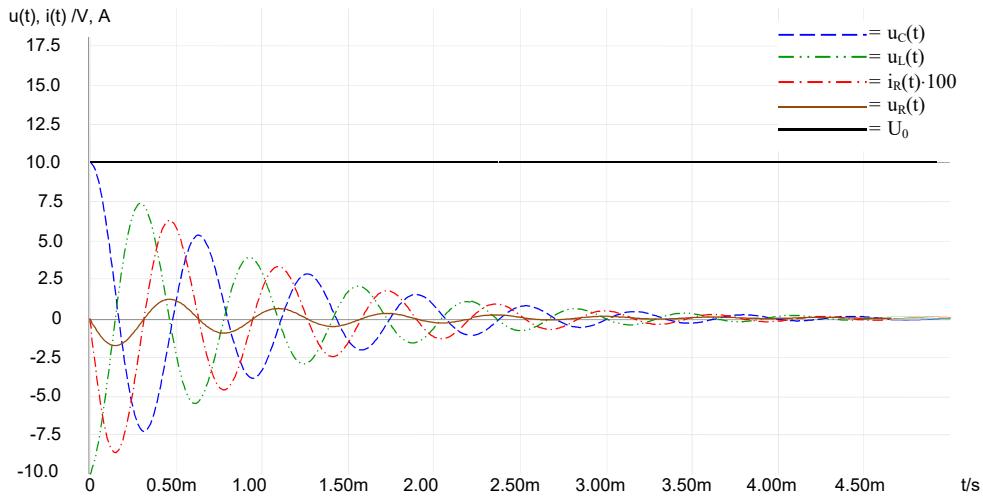


Abb. 11.50: Periodischer Fall  $R=20 \Omega$ ,  $C=1 \mu F$ ,  $L=10 \text{ mH}$

Der Strom sowie die Spannungen an R und L beginnen im Negativen. Nach *Abschluss* des Ausschaltvorgangs ist wieder ein *energieloser Zustand* erreicht. Das wird auch bei den beiden anderen Fällen zu sehen sein.

Für den **aperiodischen Grenzfall** wird:

$$i(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = -U_0(1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

$$u_C(t) = U_0(1 + \delta t) e^{-\delta t} \cdot l(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(\infty) = 0$$

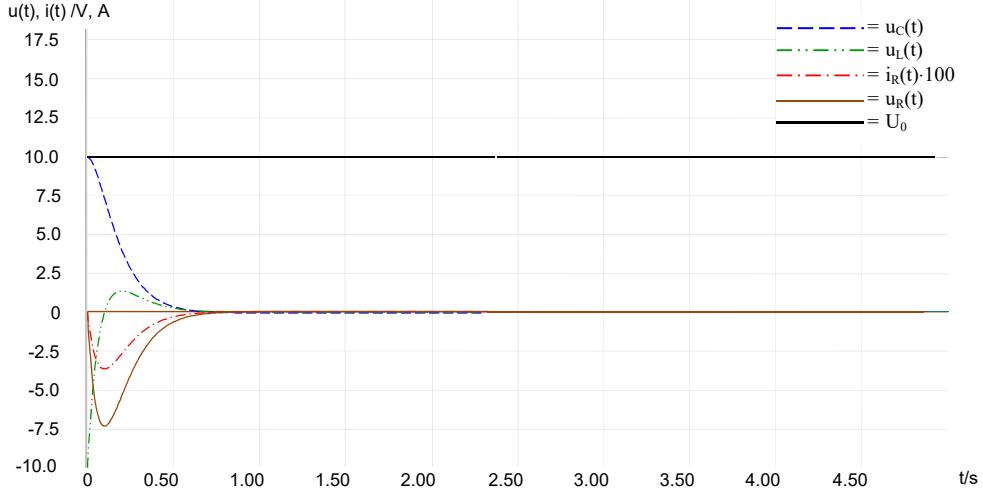


Abb. 11.51: Aperiodischer Grenzfall  $R=200 \Omega$ ,  $C=1 \mu F$ ,  $L=10 \text{ mH}$

Und für den **aperiodischen Fall** wird:

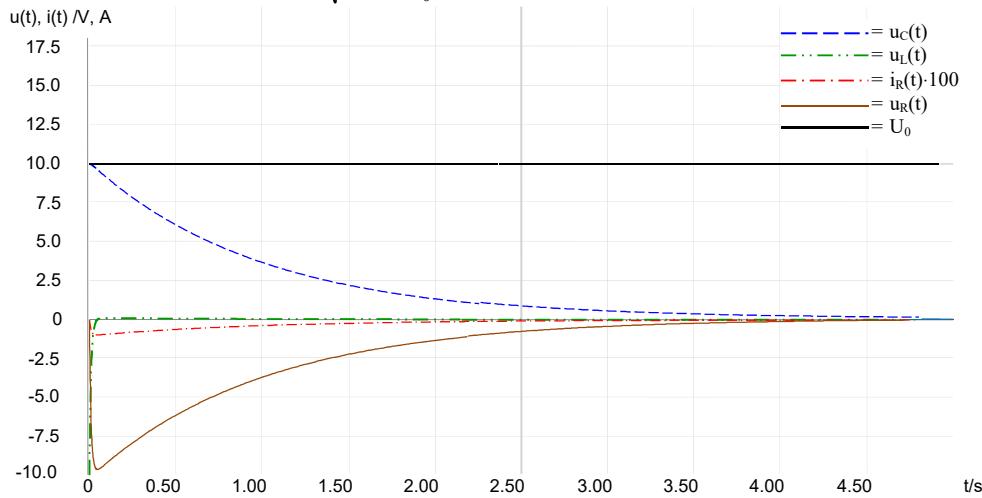
$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot l(t)$$

sowie

$$u_R(t) = -U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot l(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot l(t) \quad u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}] \cdot l(t) \quad u_C(\infty) = 0$$



**Abb. 11.52: Aperiodischer Fall R=1000 Ω, C=1 μF, L=10 mH**

In Abb. 11.52 sind deutlich zu Beginn der schnelle Anstieg ( $\delta_2$ ) und danach das langsame Ausklingen ( $\delta_1$ ) zu erkennen. Dabei geht  $u_L$  etwas ins Positive.

**Praxistipp:** Aus den gemessenen Kurven können die Parameter  $U_0$ ,  $\delta$  und  $\omega_e$  (bzw.  $\delta_1$  und  $\delta_2$ ) bestimmt werden ( $\omega_0$  ist damit ebenfalls festgelegt).

Heute<sup>136</sup> ist es sinnvoll, mit den Kursorfunktionen des Oszilloskops für drei markante Punkte der Kurven die Werte  $u$  bzw.  $i$  und  $t$  genau zu erfassen. Die Punkte sind günstig zu wählen, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Z.B. könnte in Abb. 11.47 oder Abb. 11.50  $u_C(t \rightarrow \infty)$  oder  $u_C(t=0)$  als Punkt zur Bestimmung von  $U_0$  dienen. Vom Strom können die ersten<sup>137</sup> beiden Maxima in gleiche Richtung einmal zur Bestimmung von  $\omega_e = 2\pi/(t_{Max 2} - t_{Max 1})$  genutzt werden. Nach Einsetzen von  $\omega_{etMax 1} = \pi/2$  des ersten sowie  $\omega_{etMax 2} = 2\pi + \pi/2$ <sup>138</sup> des zweiten Maximums in die Gleichung für den Strom erhalten wir zum anderen  $\delta$  und können danach  $\omega_0$ ,  $L$ ,  $C$  und  $R$  berechnen.

$$\frac{i(t_{Max 1})}{i(t_{Max 2})} = e^{-\delta t_{Max 1}} / e^{-\delta t_{Max 2}} = e^{-\delta(t_{Max 1} - t_{Max 2})}$$

$$\delta = \frac{1}{t_{Max 2} - t_{Max 1}} \ln \left( \frac{i(t_{Max 1})}{i(t_{Max 2})} \right)$$

<sup>136</sup> Früher wurden grafische Methoden mit logarithmischem Papier angewandt.

<sup>137</sup> Sie sind am größten und unterscheiden sich am deutlichsten.

<sup>138</sup> Der Sinus wird somit eins.

Beim aperiodischen Grenzfall und dem periodischen Fall können ebenfalls die Punkte  $u_C(t \rightarrow \infty)$  oder  $u_C(t=0)$  und darüber hinaus Maxima der Kurven genutzt werden. Z.B. folgt für den aperiodischen Grenzfall:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} i(t) \right|_{t_{\max}} &= \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \right) \right|_{t_{\max}} = \frac{U_0}{L} \left( e^{-\delta t_{\max}} + t_{\max} (-\delta) e^{-\delta t_{\max}} \right) = 0 \\ \rightarrow \delta t_{\max} &= 1 \rightarrow \delta = \omega_0 = 1/t_{\max} \quad \text{und} \quad i(t_{\max}) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\delta e} \end{aligned}$$

Damit können außer  $U_0$  auch  $\delta$  und  $\omega_0$  abgelesen sowie anschließend  $\omega_e$ ,  $L$ ,  $C$  und  $R$  berechnet werden.

Beim aperiodischen Fall kann es sehr ungenau werden, wenn die Maxima recht flach verlaufen. So hat der Strom bei  $t_{\max}$  ein Maximum und die Spannung an der Spule wird gerade bei  $2t_{\max}$  maximal.

$$\begin{aligned} i(t_{\max}) &= \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\omega_0} e^{-\delta t_{\max}} \quad \text{und} \quad i(2t_{\max}) = 2(i(t_{\max}))^2 \frac{R}{2U_0} \\ \text{sowie } u_L(2t_{\max}) &= -U_0 e^{-\delta 2t_{\max}} \end{aligned}$$

Daraus lassen sich  $\delta$  und  $R$ , danach  $L$ ,  $\omega_0$  sowie anschließend  $\omega_e$  und  $C$  bestimmen.

Somit können *alle Parameter ausschließlich aus der Messkurve* ermittelt werden.

**Praxistipp:** Eine *besondere technische Anwendung* hat der *aperiodische Grenzfall* als schnellster Übergangsvorgang ohne ein Überschwingen. Das ist im Alltag sehr gut bei Türschließern sichtbar. Bei Anwendungen, für die ein kleines Überschwingen möglich ist, kann mit der Einstellung  $\delta = 0,8 \omega_0$  noch etwas schneller der Endzustand erreicht werden (z.B. oft bei Rechtecksignalübertragungen angewandt).

**Systeme zweiter Ordnung** (z.B. mit  $L$  und  $C$  oder mit Feder und Masse) kommen in der Technik vielfältig vor. Sie werden immer durch die *Parameter  $\delta$  und  $\omega_0$  bzw.  $\omega_e$*  beschrieben.

**Praxistipp:** Die *Schwingneigung* muss dabei beherrscht werden. Das ist ausschließlich durch eine entsprechende *Dämpfung* (in elektrischen Schaltungen nur durch einen Widerstand) möglich. Lediglich bei gewollter Schwingungserzeugung muss die Dämpfung hingegen kompensiert werden (in elektrischen Schaltungen mit aktiven Bauelementen).

### 11.4.3 Übertragungsfunktionen von Systemen

Alle *realen Signale* beginnen immer zu einer endlichen Zeit und somit kann von einem *energielosen Anfangszustand* ausgegangen werden.

Mit der Laplacetransformation hat sich für **lineare rückwirkungsfreie Vierpole** die Methode der **Übertragungsfunktionen** zur Signal- und Systembeschreibung durchgesetzt.

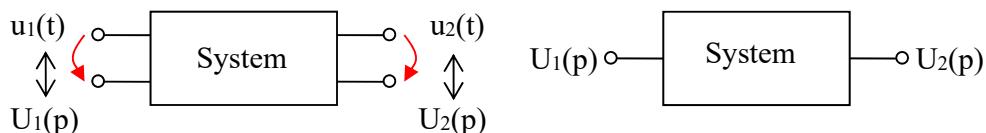


Abb. 11.53: Vierpol und dessen vereinfachte Darstellung

**Definition der Übertragungsfunktion**

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \leftrightarrow g(t)$$

( 11.11 )

Die Übertragungsfunktion beschreibt lineare rückwirkungsfreie<sup>139</sup> Systeme vollständig und so ergeben sich die Ausgangssignale direkt aus dem Eingangssignal.

$$U_2(p) = H(p) \cdot U_1(p) \leftrightarrow u_2(t) = g(t) * u_1(t) = \int_0^{\infty} g(t-\tau) u_1(\tau) d\tau \quad ( 11.12 )$$

In ( 11.12 ) steht „\*“ als Symbol für die Faltung mit dem Faltungsintegral und  $g(t)$  für die Gewichtsfunktion des Systems. Es ist leicht zu sehen, dass die *einfache Multiplikation* (vergleiche Multiplikationssatz) im Laplacebereich neben den *einfachen Funktionen für die Signale* (vergleiche Beispiele Seite 153) erst den Sinn dieser Methode ausmacht.

Zur **Messung der Übertragungsfunktionen** werden insbesondere die *Sprungfunktion* und – wenn technisch genügend genau realisierbar – ebenso die *Stoßfunktion* verwendet (es kann auch ein im interessierenden Bereich weißes Rauschen verwendet werden). Dabei erfolgt die Bestimmung direkt nach der Definition ( 11.11 ). Im Falle der Stoßfunktion ( $\delta(t) \leftrightarrow 1$ ) oder des Rauschens ( $F_{Rausch}(p) = 1$ ) ist  $u_2(t)$  unmittelbar die Gewichtsfunktion  $g(t)$  bzw.  $U_2(p)$  die Übertragungsfunktion.

**Praxistipp:** Durch einen formalen *Übergang von p zu jω* wird aus der Übertragungsfunktion direkt der *Frequenzgang des Systems* mit Betrag und Phase. Somit ist die Übertragungsfunktion für die Signalverarbeitung eines Systems sehr aussagefähig.

Beispiel: Tiefpass als Vierpol (vergleiche Aufgabe 11.4 und Abb. 11.29)

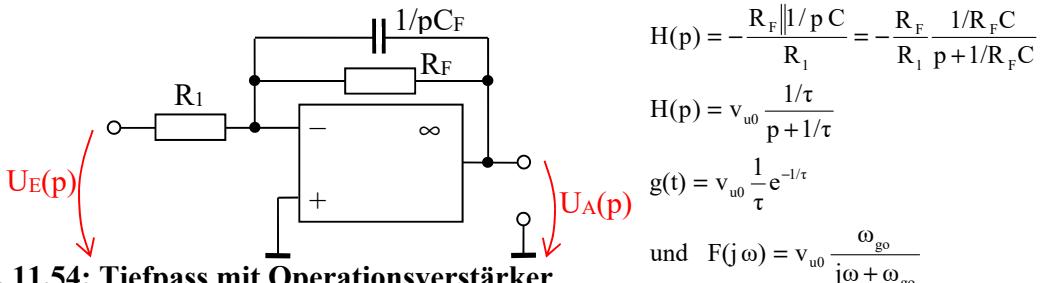


Abb. 11.54: Tiefpass mit Operationsverstärker

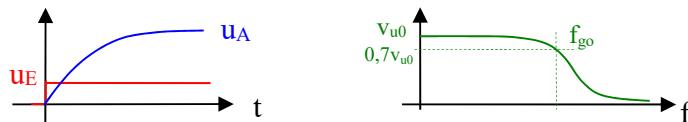


Abb. 11.55: Ein-, Ausgangssignal sowie Betrag des Frequenzgangs von Abb. 11.54

Sehr vorteilhaft ist die Nutzung von Übertragungsfunktionen bei den vorwiegend in der Signalverarbeitung und Regelungstechnik vorkommenden **Kettenschaltungen**.

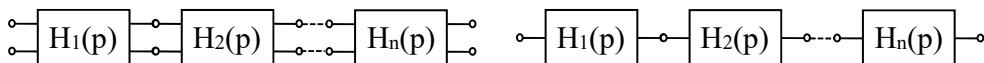


Abb. 11.56: Kettenschaltung von Übertragungsgliedern

Dafür wird:

$$H_{ges}(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdots H_n(p)$$

<sup>139</sup> Rückwirkungsfrei bedeutet, dass eine Belastung des Ausgangs zu keiner Beeinflussung des Systemverhaltens führt. Das ist z.B. bei Operationsverstärkern die Regel. Notfalls sind Operationsverstärker als Trennverstärker einzusetzen.

**Praxistipp:** Viele *Untersuchungen* insbesondere in der Regelungstechnik sind auch *ohne eine Rücktransformation* möglich.

#### 11.4.4 Kennwerte und Aufgaben

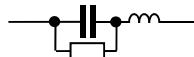
Parameter einiger wichtiger *Schwingkreisschaltungen*:

Reihenschwingkreis



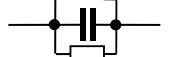
$$\delta = R/2L \quad \omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

realer Reihenschwingkreis



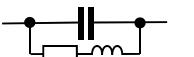
$$\delta = 1/2CR \quad \omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

Parallelschwingkreis



$$\delta = 1/2CR \quad \omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

realer Parallelschwingkreis



$$\delta = R/2L \quad \omega_0 = (LC)^{-1/2}$$

Einige wichtige *Übertragungsglieder*:

P – Proportionalglied

$$u_2 = k u_1 \quad \leftrightarrow H(p) = k$$

I – Integrierglied

$$u_2 = 1/T \int u_1 dt \quad \leftrightarrow H(p) = 1/pT$$

D – Differenzierglied

$$u_2 = T du_1 / dt \quad \leftrightarrow H(p) = pT$$

PI – Proportional- + Integrierglied

$$u_2 = k (u_1 + 1/T \int u_1 dt) \quad \leftrightarrow H(p) = k(1 + pT)/pT$$

pT<sub>1</sub> – Verzögerungsglied (1. Ordnung)

$$T du_2 / dt + u_2 = k u_1 \quad \leftrightarrow H(p) = k/(1 + pT)$$

T<sub>t</sub> – Totzeitglied

$$u_2 = k u_1(t - T_t) \quad \leftrightarrow H(p) = k \exp\{-pT_t\}$$

#### Aufgabe 11.8

In Abb. 11.57 sind zwei Signalverläufe dargestellt.

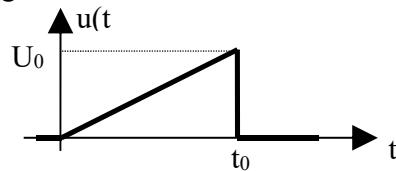
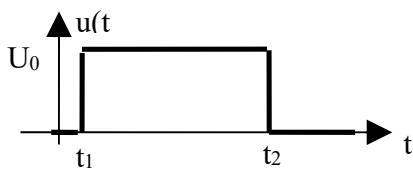


Abb. 11.57: Signalverläufe

Frage: Wie lautet die jeweilige Transformation in den Laplacebereich?

Hinweis: Zusammensetzen der Signale durch Addition einfacher Signale, die zu verschiedenen Zeiten beginnen.

#### Aufgabe 11.9

Ein idealer Parallelschwingkreis wird von einer Stromquelle I<sub>c</sub>·1(t) gespeist.

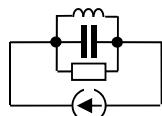


Abb. 11.58: Parallelkreis an einer Stromquelle

Frage: Wie sehen die Spannung und die drei Ströme aus?

Hinweis: Bei Nutzung von Leitwerten sind alle Rechenschritte und Ausdrücke analog dem Reihenkreis mit „vertauschten“ Strömen und Spannungen.

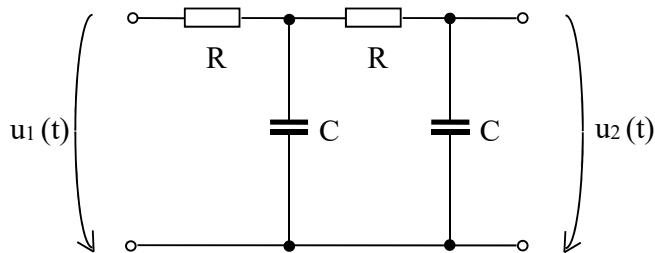
**Aufgabe 11.10**

Gegeben ist eine Kapazität  $C = 200 \mu\text{F}$ , die auf  $500 \text{ V}$  aufgeladen ist. Der Wickel der Kapazität stellt eine Reiheninduktivität von  $L = 60 \mu\text{H}$  dar.

Frage: Wie groß muss der Reihenwiderstand zur Entladung für den aperiodischen Grenzfall sein?

**Aufgabe 11.11**

Ein Tiefpass 2. Ordnung soll ein Signal glätten.



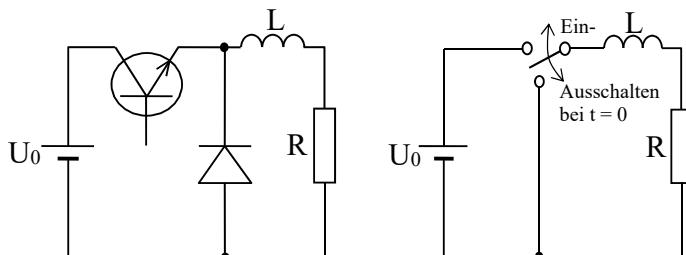
**Abb. 11.59: Tiefpass 2. Ordnung**

Frage 1: Wie verläuft die Ausgangsspannung der dargestellten Schaltung, wenn die Eingangsspannung bei  $t = 0$  von 0 auf  $U_0$  springt?

Frage 2: Wie lautet die Übertragungsfunktion  $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ ?

**Zusätzliche Aufgabe 11.12**

Ein DC-DC-Wandler nach Abb. 11.60 mit  $L = 100 \text{ mH}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $U_0 = 10 \text{ V}$ ,  $t_E + t_A = 1 \text{ ms}$ ,  $t_E/(t_E + t_A) = 0,1; 0,5$  und  $0,9$



**Abb. 11.60: DC-DC-Wandler Schaltung und Prinzipschaltung**

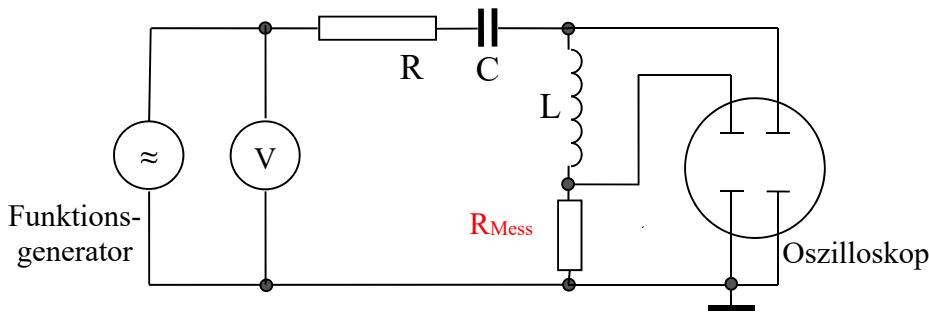
Frage 1: Wie ist das Verhältnis der Leistungen der Quelle und des Verbrauchers?

Frage 2: Wie groß sind die Mittelwerte von  $U_R$ ,  $i_R$  und  $i_{\text{Eingang}}$ ?

Hinweis: Näherung:  $di/dt = \text{const}$  (entspricht dem Anfang der Exponentialfunktion).

**11.4.5 Messung des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises**

Es sind die Zeitverläufe von Strom und Spannungen an der Induktivität bzw. der Kapazität darzustellen, die Abhängigkeit der Parameter der Zeitverläufe beim Ein- und Ausschalten von der Größe der Induktivität, der Kapazität, des Widerstandes und der Spannung zu untersuchen.

**Versuchsaufbau:****Abb. 11.61: Schaltung des Versuchsaufbaus**

Hinweis: Als Messwiderstand ( $R_{\text{Mess}}$ ) zur Strommessung werden  $10 \Omega$  eingesetzt.

**Versuchsdurchführung:**

Messung und Darstellung von Strom und Spannungen mit einem Oszilloskop, Nutzung einer Rechteckspannung für den Ein- und Ausschaltvorgang, Übergabe der Kurven an einen PC und Auswertung, Vergleich mit berechneten Verläufen und Parametern.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Ein- und Ausschaltvorgänge bei  $U = 5 \text{ V}$ ,  $L = 300 \text{ mH}$ ,  $C = 0,22 \mu\text{F}$  sowie veränderlichem Widerstand. Darstellen des periodischen Falls, des aperiodischen Falls und des Grenzfalls, Ermitteln des Widerstands für den Grenzfall mit Hilfe des Kurvenverlaufes.
  - 1.1. Bestimmen der Dämpfung, der Eigenfrequenz und der Resonanzfrequenz für  $R = 300 \Omega$ ,
  - 1.2. Bestimmen des Widerstands und der Dämpfung für den Grenzfall,
  - 1.3. Bestimmen der beiden Zeitkonstanten bei  $R = 5000 \Omega$ ,
  - 1.4. Darstellen der logarithmischen Spirale und des aperiodischen Grenzfall dabei (dazu die Signale an den y- und an den x-Eingang legen).
2. Bestimmen von  $R$ ,  $L$  und  $C$  aus den Messkurven.

**Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:**

1. Die dargestellten Kurven stimmen mit Abb. 11.46 bis Abb. 11.48 sowie Abb. 11.50 bis Abb. 11.52. sehr gut überein.
2. Die aus den Kurven ermittelten Parameter entsprechen recht gut den Werten der eingesetzten Bauelemente. Nur die Induktivität der Spule weicht deutlich vom Typenschild ab. Die eingesetzte Spule (Vorschaltgerät für eine Hochdrucklampe) ist für 50 Hz vorgesehen (Material des Kerns),  $\omega_e/2\pi$  ist aber ca. 800 Hz.
3. Beim aperiodischen Fall ist die Messgenauigkeit auch bei exakter Messdurchführung nicht sehr hoch. Das zeigt eine Fehlerrechnung.

$$u_L(2t_{\text{Max}}) = -U_0 e^{-\delta 2t_{\text{Max}}} \text{ nach } \delta \text{ aufgelöst ergibt den Fehler}$$

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{\delta_{\text{Mess}} - \delta_{\text{Soll}}}{\delta_{\text{Soll}}} = -\frac{\Delta t_{\text{Max}}}{t_{\text{Max}}} + \left( \frac{\Delta U_0}{U_0} - \frac{\Delta u_L(2t_{\text{Max}})}{u_L(2t_{\text{Max}})} \right) \ln^{-1} \left( \frac{U_0}{-u_L(2t_{\text{Max}})} \right)^{140}$$

<sup>140</sup> Der Fehler wird z.B. mit dem totalen Differential berechnet.

Bei  $U_0 = 5 \text{ V}$  und  $u_L(2t_{\text{Max}}) \approx -100 \text{ mV}$  wird  $\ln^{-1}(\cdot) \approx 0,25$ . Das Hauptproblem ist die Kurvenauflösung, wenn bei  $u_L(2t_{\text{Max}})$  ein Pixel Unterschied für den Kursor ca. 50 mV ausmachen.

Nach Abklingen des schnellen Vorgangs könnte  $\delta_2$  genauer bestimmt werden. Für technische Zwecke kann bei genügend großem  $\delta_1$  der Vorgang in der Regel als Verzögerung 1. Ordnung allein mit  $\delta_2$  genähert werden.

## 12 Halbleiterbauelemente

Hilfreich für das Verständnis sind die Abschnitte 2, 4, 5 und 6. Es werden

- die physikalischen Grundlagen – Leitungsmechanismen, Bändermodell, Dotierung und PN-Übergang,
- der Aufbau und die Arbeitsweise von Halbleiterbauelementen – Bauelemente aus nur einem Halbleitermaterial, Diode, Transistor, Feldeffekttransistor und Vierschichtbauelemente,
- das Prinzip der Kleinsignalsteuerung und die Vierpolersatzschaltungen,
- die Kennlinien, Schaltungsberechnung und Konfiguration für Grundschaltungen mit diesen Bauelementen sowie
- einige Anwendungen

vorgestellt.

### Vorbemerkungen

Der Beginn der Halbleiterbauelemente kann im „Kristalldetektor“ (vorwiegend aus Bleiglanz oder Pyrit) und seiner Nutzung (insbesondere in der Amateurtechnik) zu Beginn des 20. Jahrhunderts gesehen werden. Es folgten Selengleichrichter und Germanium-Spitzendioden. 1948 fanden John Bardeen, Walter Houser Brattain und William Shockley beim Experimentieren mit Mehrfach-Spitzendioden einen Verstärkungseffekt und im Weiteren den Transistor.

Tabelle 12.1 soll die Innovationsgeschwindigkeit dieser Entwicklung<sup>141</sup> darstellen.

	Elektronenröhre	Transistor	integrierter Transistor	Entwicklung
Beginn der Nutzung	ca. 1920	ca. 1960	ca. 1970	
Volumen der Standardelemente	20 cm <sup>3</sup> (Ø 2, H 6 cm)	40 mm <sup>3</sup> (4·5·2 mm <sup>3</sup> )	1970: 0,02 mm <sup>3</sup> (0,2·0,2·0,5 mm <sup>3</sup> ) heute: 2·10 <sup>-9</sup> mm <sup>3</sup> (0,1·0,1 μm <sup>2</sup> ·0,2 mm)	10 <sup>-6</sup> 10 <sup>-13</sup>
Lebensdauer entsprechend der Ausfallrate	ca. 1 a	1000 a	10 <sup>8</sup> a	10 <sup>8</sup>
Preis der Standardelemente	5 €	0,5 €	1970: 0,05 Cent heute: 1/1000 Cent (400€/40 Mio Tr.)	10 <sup>-4</sup> 5·10 <sup>-5</sup>

**Tabelle 12.1: Innovationsgeschwindigkeit der Entwicklung**

(Eine derartige Entwicklung bei PKW ergäbe heute einen Preis von einigen Cents und einen praktisch ewig reparatur- und wartungsfreien Betrieb – allerdings bei einem Volumen von etwa 1 ml.)

Historisch liegt die Nutzung der Gasentladung (Glimmlampe, ..., Quecksilberdampfgleichrichter und Thyratron) und der Vakuumröhre (Diode, Triode, ..., Spezialröhren) vor der Halbleitertechnik. Da diese Bauelemente heute in der Elektronik eine untergeordnete Rolle spielen oder ganz verschwunden sind, wird für Interessenten auf die diesbezügliche Literatur

<sup>141</sup> Die Entwicklung geht mit hoher Geschwindigkeit weiter.

verwiesen (Grundlegende physikalische Effekte siehe z.B. in (Mie70 S. 42 ff, 66 ff und insgesamt)).

Es wird versucht, in die wichtigsten Denkweisen und Modellvorstellungen vor allem mit grafischen Hilfsmitteln einen Einblick zu ermöglichen sowie viele Bezüge zu praktischen Fragen aufzuzeigen.

## 12.1 Physikalische Grundlagen für Festkörper

### 12.1.1 Leitungsmechanismus in Festkörpern

**Als Ausgangspunkt** zur Beschreibung der Vorgänge in Festkörpern soll ein einfaches **Atommodell** (etwa nach Niels Bohr) dienen, wie es vereinfacht aus dem Coulomb'schen Gesetz, verbunden mit den Bedingungen für stabile erlaubte Bahnen, folgt.

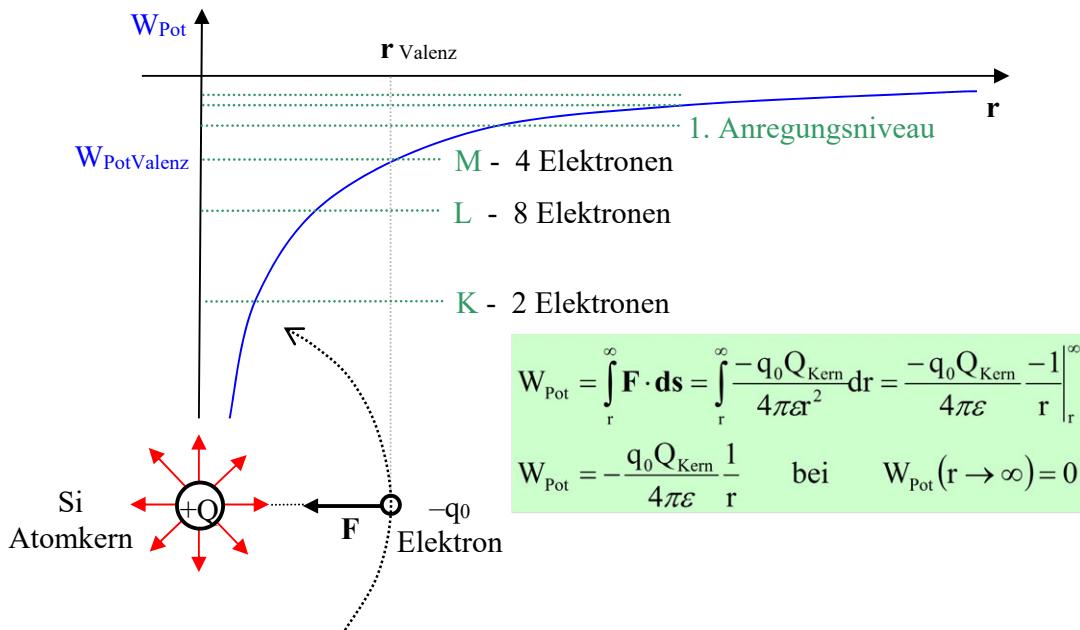


Abb. 12.1: Potentielle Energie  $W_{\text{Pot}} = f(r)$  im Atommodell (Silicium)

Auch wenn nach dem Coulomb'schen Gesetz für jeden Abstand „ $r$ “ eine potentielle Energie bestimmt werden kann, nehmen die Elektronen nur *diskrete Zustände* ein (Abstände bzw. Bahnradien oder *Energieniveaus* bzw. potentielle Energien). Die Kreisbewegung einer Ladung entspricht einer beschleunigten Bewegung (somit einem „hochfrequenten Strom“) und müsste zu einer Energieabstrahlung führen. Es können also nur solche Zustände stabil und damit *erlaubt* sein, bei denen die Energie in „sich selbst zurückreflektiert“ wird. Das wird oft – in einer sehr vereinfachten Vorstellung – mit einer stehenden Welle entlang des Bahnumfangs entsprechend einem ganzen Vielfachen der Materiewellenlänge des Elektrons veranschaulicht<sup>142</sup>.

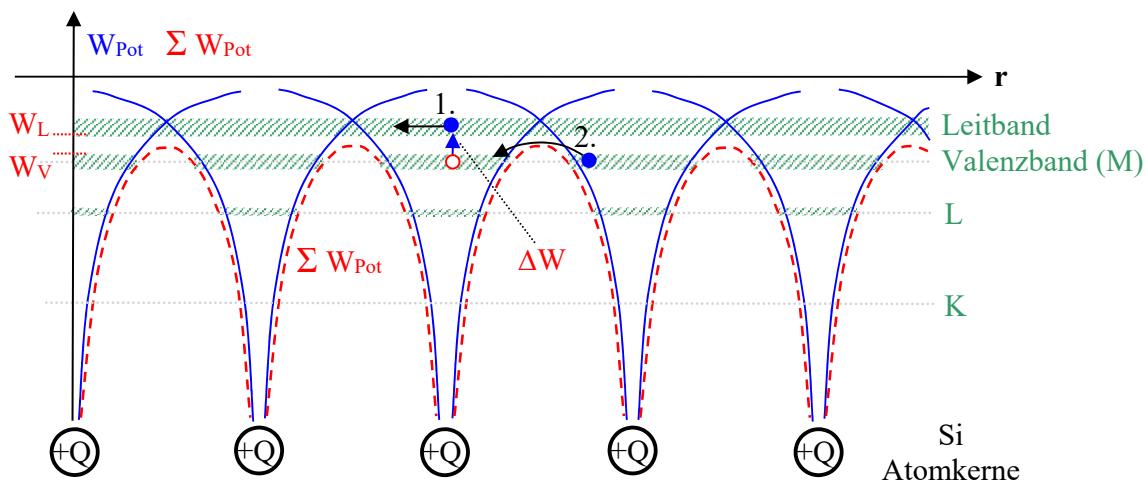
In Abb. 12.1 ergeben die Schalen K, L und M für ihre jeweilige Elektronenbelegung (gemäß der Haupt- und Nebenquantenzahlen) stabile Zustände.

Nur durch die Aufnahme der notwendigen Energiedifferenz kann ein Elektron auf ein höheres Energieniveau steigen (z.B. auf das 1. Anregungsniveau, entspricht einem größeren erlaubten

<sup>142</sup> Bohr'sches Atommodell siehe z.B. in (Mie70 S. 42 ff). Eine genauere Untersuchung erfolgt durch die Quantenmechanik, vergleiche auch (Reb05 S. 25 ff).

Radius). Da dieses Anregungsniveau nicht die günstigste Bahn des Elektrons ist, wird es bei der geringsten Störung unter Abgabe der Energiedifferenz wieder auf sein Grundniveau (Valenzniveau) zurückfallen.

Der Übergang zu einer periodischen Anordnung von Atomen im Kristall ergibt eine anschauliche Darstellung der Leitungsmechanismen in Festkörpern.



**Abb. 12.2: Periodische Anordnung der Atome im Kristall (schematisch)**

In Abb. 12.2 überlagern (addieren) sich die Kurven (Linien) der potentiellen Energien für die Elektronen von jedem einzelnen Ion zur Summenpotentialkurve aller Ionen (gestrichelte Linien). Die erlaubten Niveaus verbreitern sich überdies durch Quantenwechselwirkungen der dichten Ionen<sup>143</sup> zu *Bändern* (schraffiert). Die verbotenen Zonen zwischen den erlaubten Bändern können nur mit der entsprechenden Energiezufuhr  $\Delta W$  übersprungen werden.

**Praxistipp:** Durch Anregungsenergie  $\Delta W$  (Wärme, Licht, Stoß – senkrechter Pfeil) gelangen Elektronen (volle Kreise) ins Leitband und lassen so im Valenzband eine unbesetzte Stelle (Loch – hohler Kreis) zurück.

Es sind zwei mögliche Leitungsmechanismen in Abb. 12.2 zu erkennen:

1. **Elektronenleitung im Leitband** – Elektronen im Leitband (1. Anregungsniveau) können sich ohne Energieveränderung bewegen; sie sind somit nicht mehr an ein Siliciumion gebunden. D.h., negative Ladungsträger können durch ein elektrisches Feld gegen die Feldrichtung bewegt werden. Diese Leitung hängt von der *Anzahl der Elektronen* pro Volumen „ $n$ “ im Leitband und deren *Beweglichkeit* <sup>144</sup> „ $b_n$ “ ab.
2. **Löcherleitung im Valenzband** – Elektronen im Valenzband können über die geringe Energiebarriere auf eine unbesetzte Stelle springen. Das ist im Effekt damit identisch, dass die unbesetzte Stelle (das *Loch*) in entgegengesetzte Richtung springt. D.h., positive Ladungsträger können durch ein elektrisches Feld in Feldrichtung bewegt werden. Diese Leitung hängt von der *Anzahl der Löcher* pro Volumen „ $p$ “ im Valenzband und deren *Beweglichkeit* „ $b_p$ “ ab.

<sup>143</sup> Eine genauere Untersuchung erfolgt durch die Quantenmechanik (siehe z.B. (Spe65 S. 4-30 und 247-390) oder (Pau74 S. 78-125)) im „ $k$ -Raum“ ( $k$  = Wellenvektor  $\sim$  Impulsvektor).

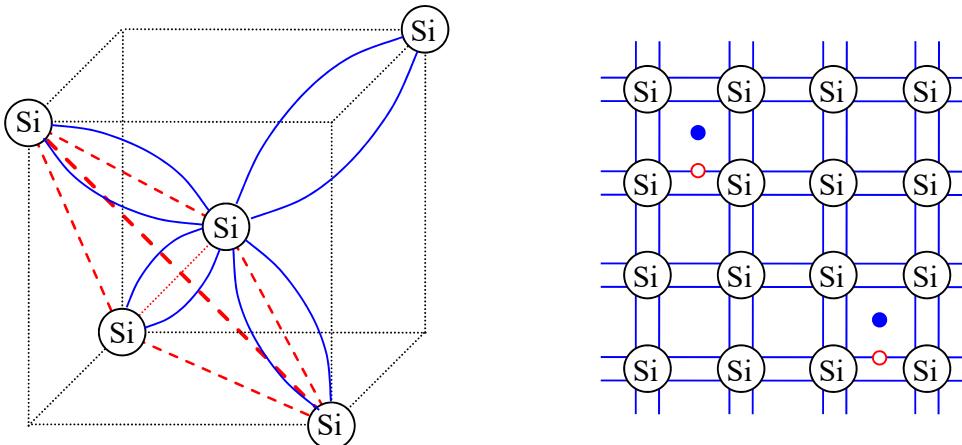
<sup>144</sup> Maßeinheit  $\text{cm}^2/\text{Vs} = \text{cm}/\text{s}$  pro  $\text{V}/\text{cm} = [\text{Geschwindigkeit}]$  pro [elektrisches Feld]

Beide Leitungsmechanismen tragen zur elektrischen Leitfähigkeit bei:

**Leitfähigkeit:**  $\kappa = q_0 (b_n n + b_p p)$

(12.1)

In hochreinen Einkristallen ist die periodische Anordnung der Atome ideal realisiert, aber auch bei nicht idealen Kristallen (z.B. aneinandergefügten Kristalliten wie in Metallen) werden so die Eigenschaften im Wesentlichen bestimmt, solange nicht die Wirkungen von Kristallfehlern und Verunreinigungen überwiegen. Bei Halbleitern, die von sich aus eine geringe Leitfähigkeit haben, dominieren Kristallfehler und Verunreinigungen sehr schnell, sodass unbedingt *hochreine Einkristalle* erforderlich sind.



**Abb. 12.3: Tetraedrische Bindung von Silicium und vereinfachte ebene Darstellung**

Die Grundstruktur des Einkristalls von Silicium mit seinen tetraedrischen  $sp^3$ -Bindungen ergibt ein *kubisches Kristallsystem* (Diamantstruktur aus vier Tetraedern in Abb. 12.3, eins davon gestrichelt<sup>145</sup>).

**Praxistipp:** Die vereinfachte ebene Darstellung in Abb. 12.3 rechts eignet sich gut zur Erläuterung der Kristallbindung (Verbindungslien).

Die jeweils vier Valenzelektronen werden paarweise gemeinsam genutzt und damit die ideale Achterbelegung erreicht.

Im Fall der *Eigenleitung* sind bei einer Temperatur größer null einige Kristallbindungen wegen der thermischen Anregungsenergie unbesetzt (hohle Kreise) und genau die gleiche Anzahl Elektronen (volle Kreise) bewegt sich frei zwischen den Atomen in der Art eines Gases (*Elektronengas*). (Vergleiche auch mit der Darstellung der potentiellen Energie nach Abb. 12.2.) Dieser Vorgang ist dynamisch zu sehen, unbesetzte Stellen werden wieder besetzt und mit der Energie kann ein anderes Elektron frei werden.

Bei Temperaturen größer Null dient den Elektronen im Valenzband die Wärmeenergie als Anregungsenergie und sie gelangen ins Leitband. Da sie dabei eine unbesetzte Stelle zurücklassen, entsteht immer ein Elektron und ein Loch als Paar – *Generation*. Fällt umgekehrt ein Elektron ins Valenzband zurück, wird immer auch ein Loch (unbesetzte Stelle) beseitigt – *Rekombination*. Durch ständige Generations- und Rekombinationsprozesse ist je nach Temperatur im Mittel eine entsprechende Anzahl Elektronen und Löcher vorhanden. Genauso führen Photonen (Lichtenergie) und elastische Stöße (kinetische mechanische Energie) zur Generation von Elektronen-Loch-Paaren. Bei einer Rekombination kann die überschüssige Energie als *Photon oder als Phonon*<sup>146</sup> (Gitterschwingungs- oder akustischer Quant) abgegeben werden, was erneut zur Generation führen kann.

<sup>145</sup> Siehe Weitergehendes in (Wei81 S. 88).

<sup>146</sup> Eine genauere Untersuchung erfolgt durch die Quantenmechanik (siehe z.B. (Spe65 S. 4-30 und 247-390)

Die Beschreibung dieses dynamischen Prozesses und damit der *Dichten*  $n$  und  $p$  (Anzahl freier Elektronen bzw. Löcher pro Volumen) des Elektronengases erfolgt durch eine *statistische Methode*, die von Fermi (siehe (Mie70 S. 69-70) oder (Spe65 S. 247-390)) dafür abgeleitet wurde.

$$\text{Fermi-Verteilung: } f_F = \{1 + \exp[(W - W_F)/kT]\}^{-1}$$

(12.2)

**Praxistipp:** Generations- und Rekombinationsprozesse bestimmen die Eigenschaften und das Verhalten von Halbleitern. Das Bändermodell zeigt dafür qualitativ die Besetzungen.

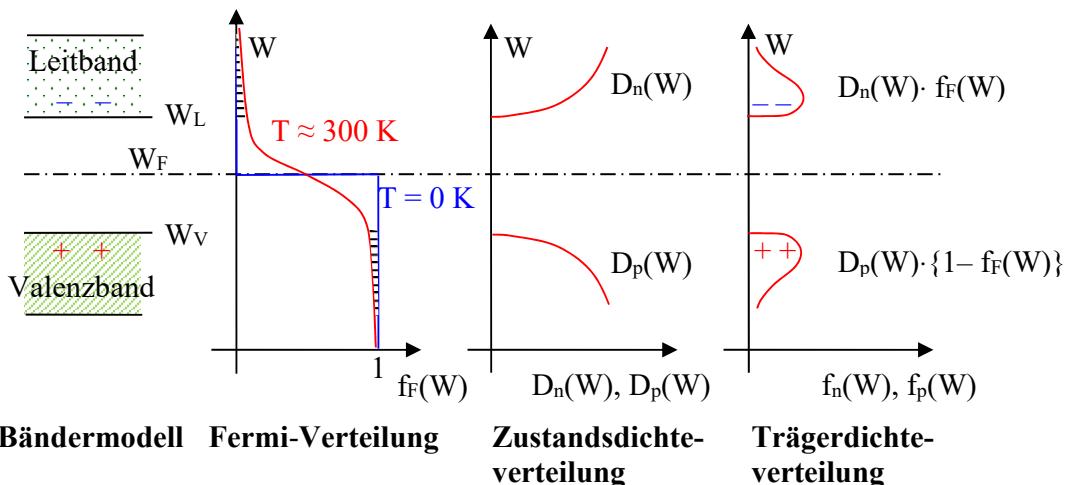


Abb. 12.4: Bändermodell mit Trägern nach der Fermi-Verteilung

In Abb. 12.4 bedeuten  $D_n$  und  $D_p$  die quantenmechanisch möglichen Zustände für die Energieniveaus von  $W$  bis  $W+dW$ . Bei Eigenleitung ( $n = p$ ) folgt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronen  $f_n(W)$  aus der Fermi-Verteilung  $f_F(W)$  und  $D_n$ , die der Löcher  $f_p(W)$  aus den im Valenzband fehlenden Elektronen  $1 - f_F(W)$  und  $D_p$ . Bei  $T = 0 \text{ K}$  ist die Wahrscheinlichkeit für Elektronen im Leitband null (demnach auch für Löcher im Valenzband).

Das **Ferminiveau**  $W_F$  wird im thermischen Gleichgewicht aus der Neutralitätsbedingung bestimmt. Die Gesamtanzahl Elektronen oberhalb von  $W_F$  (freie Elektronen) muss gleich der Gesamtanzahl Löcher (entspricht den festen Ionen) unterhalb  $W_F$  sein (in Abb. 12.4 annähernd durch die gestrichelten Flächen verdeutlicht). Sind weitere Ladungsträger (z.B. von Störstellen) zu beachten, gehen diese in die Neutralitätsbedingung ein. Liegt kein reines thermisches Gleichgewicht vor (z.B. bei Stromfluss infolge einer äußeren Spannung), wird das Ferminiveau entsprechend „verbogen“.

Die *Beweglichkeit*  $b_n$  der Elektronen im Elektronengas zwischen den Atomen ergibt sich aus ihrer *freien Weglänge*, bis sie durch einen Zusammenstoß mit anderen Elektronen oder mit Atomen abgelenkt, gebremst oder auch mal beschleunigt werden. Aus dieser Vorstellung ist plausibel, dass die freie Weglänge im Mittel umso kürzer ist,

- je mehr Elektronen vorhanden sind,
- je dichter die Atome im Kristall angeordnet sind oder
- je stärker die Atome um ihre Gitterposition durch ihre Wärme schwingen.

Die *Beweglichkeit* der Löcher hängt ferner insbesondere auch von der zu überspringenden Energiebarriere ab und ist deutlich geringer als die der Elektronen.

Damit kann die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit von (12.1) aber sehr verschieden ausfallen. Überwiegt bei höherer Temperatur die Zunahme von freien Elektronen ( $n$ ) und Löchern ( $p$ ), so steigt die Leitfähigkeit. Überwiegt dagegen die Abnahme der Beweglichkeit ( $b_n, b_p$ ), wird die Leitfähigkeit geringer. Bei Metallen, die sehr viele freie Elektronen besitzen,

überwiegt die Abnahme der Beweglichkeit (also wird  $\kappa$  kleiner). Für Halbleiter, die wenige freie Elektronen und Löcher haben, dominiert deren Zunahme (also wird  $\kappa$  größer). Nach dieser Überlegung ergibt sich auch der Grund, weshalb Legierungen (die in der Regel durch die unterschiedlichen Atomgrößen eine dichtere Atomanordnung erreichen) meist schlechter leiten als die Ausgangsmaterialien.

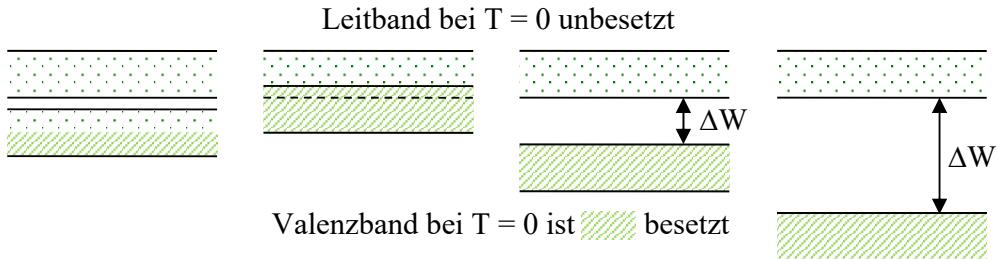


Abb. 12.5: Bändermodell für Leiter, Halbleiter und Isolator

**Praxistipp:** Nach diesen Darlegungen kann eine Möglichkeit der Einteilung elektrischer Materialien in Leiter, Halbleiter und Isolatoren (siehe Abb. 12.5) entsprechend der Breite der verbotenen Zone  $\Delta W$  zwischen der Valenzbandoberkante  $W_V$  und der Leitbandunterkante  $W_L$  angegeben werden.

### 12.1.2 Dotierung von Halbleitermaterial

Das Bändermodell ermöglicht den Einfluss von Dotierungen (gewollten Störstellen) des Einkristalls zu untersuchen.

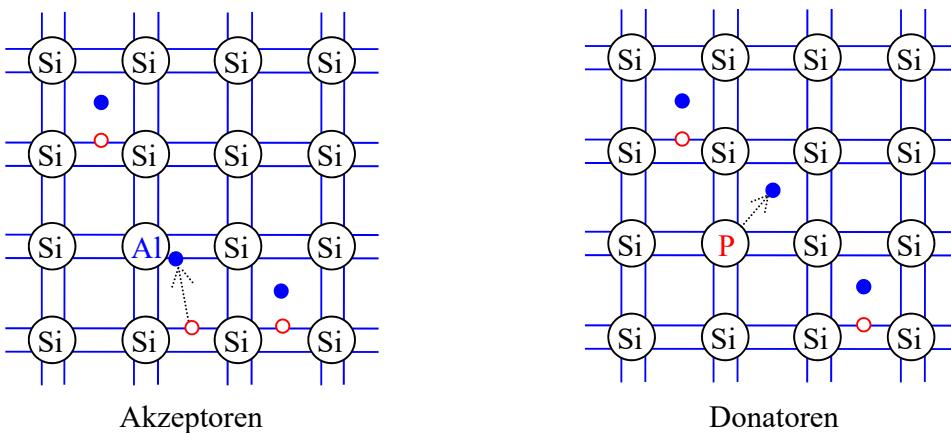


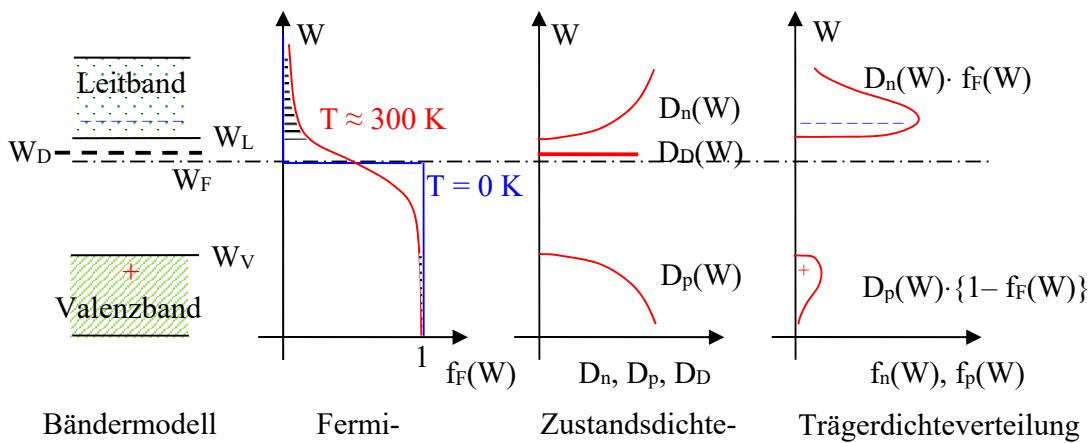
Abb. 12.6: Dotierung in der ebenen Darstellung eines Siliciumkristalls

Die dreiwertigen Aluminiumatome ziehen ein Elektron zu sich, um eine Achterbelegung zu erreichen. Der fünfwertige Phosphor gibt ein „überflüssiges“ Elektron frei. Somit entstehen mehr Löcher bzw. Elektronen für die elektrische Leitfähigkeit und ihre Anzahl wird ungleich.

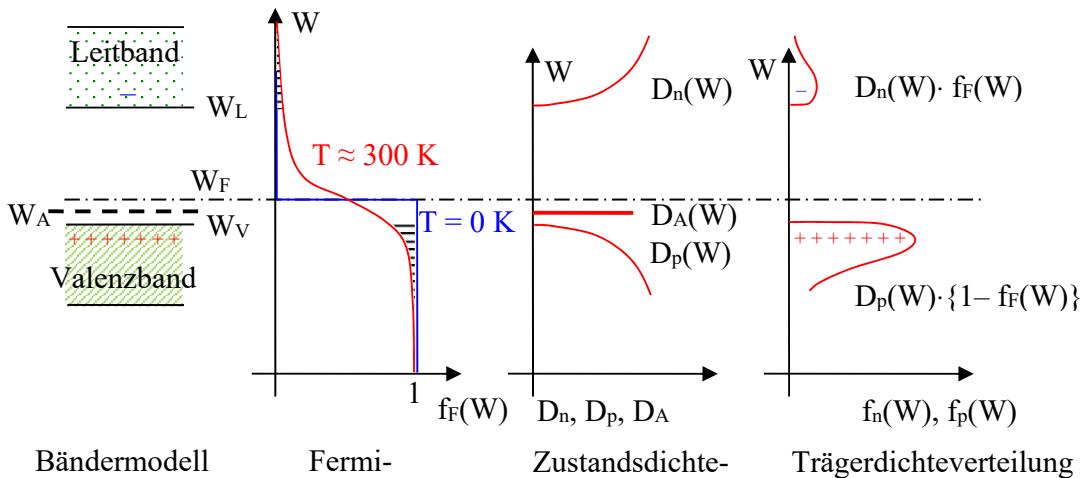
Das Bändermodell zeigt es differenzierter. Durch die sehr große „energetische Nähe“ der **Donatoren** (P in Abb. 12.6) zum Leitband bzw. der **Akzeptoren** (Al in Abb. 12.6) zum

Valenzband geben die Donatoren ihre Elektronen praktisch vollständig ins Leitband ab bzw. alle Akzeptoren nehmen je ein Elektron aus dem Valenzband auf. Die Störstellen selbst sind nicht dicht genug, um miteinander Elektronen auszutauschen, und ergeben deshalb kein eigenes Band (d.h., ihre Ladungen sind nicht beweglich und tragen nicht direkt zur Leitfähigkeit bei, deshalb eine gestrichelte Linie).

In Abb. 12.7 und Abb. 12.8 geht die Gesamtzahl der Donatoren ( $N_D$ , positiv geladen) bzw. der Akzeptoren ( $N_A$ , negativ geladen) in die Neutralitätsbedingung zusätzlich zu den gestrichelten Flächen ein. Dadurch verschiebt sich das Fermi niveau  $W_F$  in Richtung des Störstellenniveaus (es kann bei starker Dotierung zwischen Störstellen und Bandkante liegen). Bei Dotierung mit Donatoren überwiegt die *Elektronenleitung im Leitband* (in der Praxis um viele Größenordnungen). Bei Dotierung mit Akzeptoren überwiegt die *Löcherleitung im Valenzband* (in der Praxis ebenfalls um viele Größenordnungen). Das Ergebnis sind zwei Materialien von unterschiedlichem Leitfähigkeitsotyp.



**Abb. 12.7: Bändermodell mit Donatoren (mit Fermi-Verteilung)**



**Abb. 12.8: Bändermodell mit Akzeptoren (mit Fermi-Verteilung)**

Die Bilanz der Trägerkonzentrationen wird als *Massenwirkungsgesetz* des Halbleiters bezeichnet.

$$n p = n_i^2 \quad \text{bei Eigenleitung ist} \quad n_0 p_0 = n_i^2 \quad (12.3)$$

Zusätzlich gilt die Ladungsbilanz für jede Position:

$$n + N_A^- = p + N_D^+ \quad (12.4)$$

Dabei sind  $n_0$  und  $p_0$  die Trägerdichten für Eigenleitung sowie  $n_i$  die Eigenleitungsichte (Intrinsicdichte). Werden Akzeptoren hinzugefügt, vergrößert sich  $p$  und  $n$  muss abnehmen. Werden dagegen Donatoren hinzugefügt, vergrößert sich  $n$  und  $p$  muss abnehmen. In der Halbleitertechnologie werden Dichten der Störstellen von ca.  $10^{10}$  bis  $10^{20}$  cm $^{-3}$  eingesetzt. In gleicher Größe erhöht sich die entsprechende Trägerdichte (vergleiche auch  $n_{Cu} \approx 10^{22}$  cm $^{-3}$ ). Der enorme Unterschied der Trägerkonzentrationen in jedem Leitfähigkeitstyp führt zu den Begriffen *Majoritätsträger* und *Minoritätsträger*. Die Majoritätsträger bestimmen den Leitfähigkeitstyp, dagegen sind die Minoritätsträger oft zu vernachlässigen (sie erhalten aber z.B. im PN-Übergang eine spezifische Rolle).

**Praxistipp:** Für qualitative Überlegungen ist das Bändermodell mit Fermiiveau (ohne Verteilungen) eine einfache wirksame Methode.

Für exakte quantitative Untersuchungen sind dagegen quantenphysikalisch der Atom- und der Kristallaufbau mit ihren Bindungen sowie die Zustandsdichteverteilungen der Elektronen zu berücksichtigen. Darüber hinaus müssen thermodynamisch die Verteilungsfunktionen des Elektronengases und seine Gleichgewichtsverhältnisse neben den elektrischen Fragen beherrscht werden.

### 12.1.3 Kennwerte von Halbleitermaterialien und Übungsaufgaben

In Tabelle 12.2 sind zur Verdeutlichung der Größen einige Materialien und ihre wichtigsten Kennwerte aufgeführt.

Kennwerte bei 300 K		$\Delta W$	$b_n$	$b_p$	$n, p$ (Eigenleitung)
Germanium	Ge	0,67 eV	3900 cm $^2$ /Vs	1900 cm $^2$ /Vs	$2,33 \cdot 10^{13}$ cm $^{-3}$
Silicium	Si	1,12 eV	1500 cm $^2$ /Vs	600 cm $^2$ /Vs	$1,6 \cdot 10^{10}$ cm $^{-3}$
Galliumarsenid	GaAs	1,43 eV	8500 cm $^2$ /Vs	400 cm $^2$ /Vs	$1,3 \cdot 10^6$ cm $^{-3}$
Kupfer	Cu	-	40,6 cm $^2$ /Vs	-	$8,4 \cdot 10^{22}$ cm $^{-3}$

**Tabelle 12.2: Einige Halbleitermaterialien**

Bei den Angaben von  $n$  und  $p$  ist zu beachten, dass die Unterschiede viele Größenordnungen betreffen.

Die folgenden Aufgaben verdeutlichen die Möglichkeiten der Anwendung.

#### Aufgabe 12.1

Nach ( 12.1 ) kann die Leitfähigkeit  $\kappa$  für Eigenleitung und Zimmertemperatur (300 K) aus den Angaben der Tabelle 12.2 berechnet werden.

Frage 1: Wie groß wird  $\kappa$  von Ge, Si, GaAs und zum Vergleich von Cu?

Frage 2: Welcher Strom fließt durch ein Bauelement von 0,1 mm Dicke und  $0,1 \cdot 0,1$  mm $^2$  Fläche bei einer Spannung von 5 V für diese Materialien?

Zusatzaufgabe: Diskutiere die Ergebnisse!

(Zum Vergleich:  $\kappa_{Ge} = 2,1 \cdot 10^{-6}$  m/ $\Omega$ mm $^2$ ,  $\kappa_{Si} = 5,5 \cdot 10^{-10}$  m/ $\Omega$ mm $^2$ ,  $\kappa_{GaAs} = 1,8 \cdot 10^{-13}$  m/ $\Omega$ mm $^2$  und  $\kappa_{Cu} = 56$  m/ $\Omega$ mm $^2$  mit  $m/\Omega\text{mm}^2 = 10^6$  1/ $\Omega$ m)

**Aufgabe 12.2**

Eine Probe Silicium aus Tabelle 12.2 wird mit einer Phosphorkonzentration von  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$  dotiert.

Frage 1: Wie groß sind n und p sowie  $\kappa$ ?

Hinweis: Nutze ( 12.3 ) und ( 12.4 ), vernachlässige die Änderung der Beweglichkeiten!

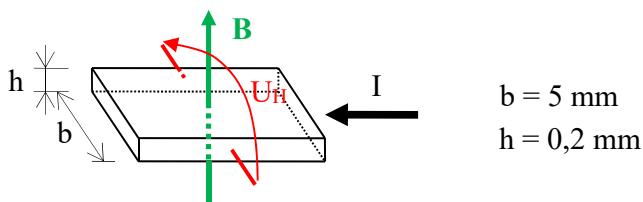
Frage 2: Bei der gleichen Probe (Länge 8 mm, Fläche  $1 \text{ mm}^2$ ) wird ein Widerstand von  $400 \Omega$  gemessen. Wie groß ist die tatsächliche Beweglichkeit  $b_n$ ?

Hinweis: Nach den Erfahrungen mit Frage 1 kann die Löcherleitfähigkeit vernachlässigt werden.

**Aufgabe 12.3**

Aus der Siliciumprobe von Aufgabe 12.2 wird ein Hallsensor hergestellt. Durch den Sensor fließt ein Strom von 1 mA und senkrecht zum Strom wirkt ein Magnetfeld von 2000 T.

(Abmessungen siehe Abb. 12.9.).



**Abb. 12.9: Hallsensor**

Frage: Wie groß ist die Hallspannung  $U_H$ ?

Hinweis: In obiger Anordnung ist  $S = I A_{\perp} = q_0 v_D n$  und  $F = q_0 v_D B$  sowie  $U_H = b E = b F/q_0$ .

**Aufgabe 12.4**

Ein Fotowiderstand soll aus Silicium hergestellt werden und eine möglichst große Widerstandsänderung und Empfindlichkeit aufweisen.

Frage: Sollte hoch, niedrig oder nicht dotiert werden?

**Aufgabe 12.5**

Ein Thermowiderstand soll aus Silicium hergestellt werden und mit steigender Temperatur besser leiten (bei ca.  $1000 \Omega$  für  $20^\circ\text{C}$ ).

Frage: Sollte hoch, niedrig oder nicht dotiert werden?

## 12.2 PN-Übergang

### 12.2.1 Gleichgewicht von Diffusion und Feld

Die zwei Leitfähigkeitsarten bei Halbleitern führen zu der Möglichkeit, einen Übergang von einem Leitfähigkeitsart zum anderen herzustellen und zu untersuchen.

**Praxistipp:** Ein oder mehrere Übergänge von einer P-Halbleiterschicht zu einer N-Halbleiterschicht ist die Grundlage aller bipolaren Bauelemente.

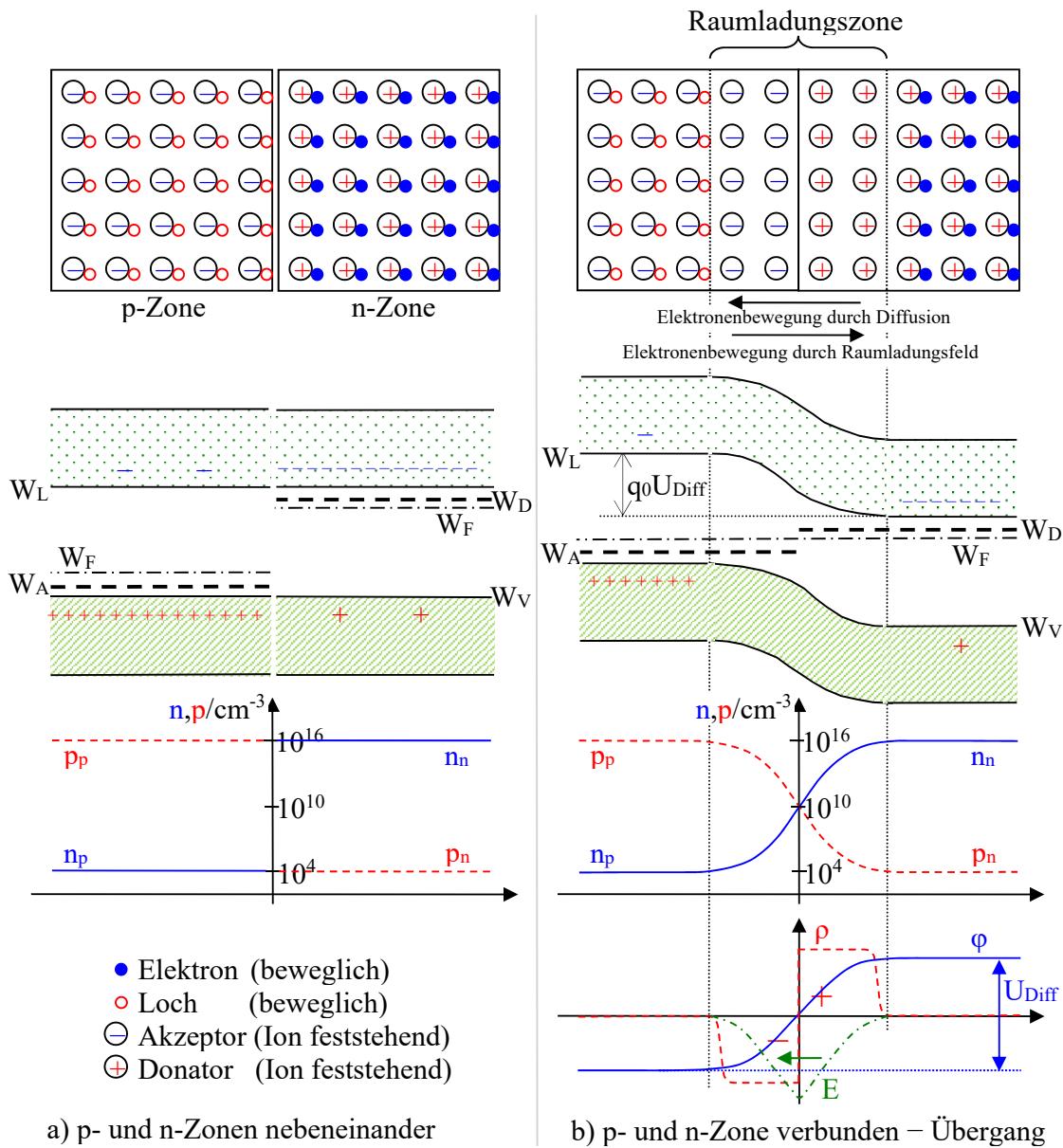


Abb. 12.10: Übergang zwischen zwei Leitfähigkeitstypen – PN-Übergang<sup>147</sup>

In Abb. 12.10 a oben sind schematisch beide Leitfähigkeitstypen nebeneinander mit ihren ionisierten Störstellen und den dadurch entstandenen Löchern bzw. freien Elektronen dargestellt. In dieser Anordnung besteht in der p leitenden Zone und in der n leitenden Zone überall Ladungsgleichgewicht. Bei einer Betrachtung als Kontinuum, das nur in x-Richtung Änderungen aufweist, interessiert vor allem die energetische Lage der beweglichen Ladungsträger, wie sie das Bändermodell darunter in Abhängigkeit von x darstellt. Nach Abschnitt 12.1.2 können auch die Verteilungen der Trägerdichten über x angegeben werden (das Beispiel entspricht etwa Silicium mit Dotierungen von  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ).

Wurden beide Zonen als Übergang (Abb. 12.10 b oben) hergestellt, entsteht ein (in der Darstellung abruptes) *Gefälle der Konzentrationen* der Löcher von links nach rechts und der freien Elektronen von rechts nach links. Dieses Gefälle der Konzentrationen führt zur *Diffusion* der jeweiligen beweglichen Ladungsträger in Richtung ihrer geringeren

<sup>147</sup> Beachte: Das Potential wurde zur einfacheren Darstellung in der Mitte auf null gelegt. Löcher bewegen sich in und Elektronen gegen die Feldrichtung bzw. gegebenenfalls Stromrichtung.

Konzentration (Konzentrationsausgleich wie in Gasen oder Flüssigkeiten, in Abb. 12.10 b für die Elektronenbewegung angedeutet). Dadurch verlagern sich einerseits Elektronen zur Seite der negativen Ionen, gleichen dort Löcher aus und es entsteht ein negativ geladener Bereich. Andererseits wandern Löcher zur Seite der positiven Ionen, gleichen Elektronen aus und es entsteht ein positiv geladener Bereich. So ergibt sich eine *Raumladungszone* im Bereich des Übergangs (Bereiche mit Überschuss negativer bzw. positiver Ladungen). Zwischen diesen Ladungen wirkt ein *elektrisches Feld* (von + nach –, in Abb. 12.10 b also nach links) mit Kraftwirkungen auf die Elektronen nach rechts und auf die Löcher nach links (also jeweils entgegen der Diffusion).

**Praxistipp:** Zwischen beiden Prozessen der Diffusionsbewegung und der Bewegung infolge der Kräfte des Feldes der entstehenden Raumladung stellt sich ein *Gleichgewicht* ein.

Im Bändermodell (darunter dargestellt) ergibt dieser Zusammenhang, dass das Fermi niveau  $W_F$  waagerecht als Bezugsniveau durch beide Zonen geht und sich die Bänder im Übergangsbereich verbiegen. Dabei bedeutet ein größerer Abstand vom Fermi niveau geringere Wahrscheinlichkeit für Ladungsträger (damit deren Anzahl, vergleiche Abb. 12.4 und Abb. 12.7), wodurch die Bänder in der Mitte zusammengeführt werden. Von dort, wo mehr Träger waren, verschieben sie sich dahin, wo weniger waren, bis zum Gleichgewicht. Aus den sich dabei nach (12.3) und (12.4) einstellenden Verteilungen von n und p (in Abb. 12.10 darunter dargestellt) folgt die Raumladungsdichte ( $\rho$ ) sowie daraus das elektrische Feld ( $E$ ) und das Potential ( $\varphi$ ).

$$E(x) = D(x)/\epsilon = 1/\epsilon \int_{P\text{-Elektrode}}^x \rho(x) dx^{148} \quad \text{und} \quad \varphi = - \int_{P\text{-Elektrode}}^x E dx \quad (12.5)$$

Die Spannung (Potentialdifferenz) zwischen den Enden beider Halbleiterzonen infolge des genannten Gleichgewichts wird *Diffusionsspannung* genannt. Die Diffusionsspannung hängt vom Bandabstand und der Stärke der Dotierung ab. Bei höherer Dotierung rückt das Fermi niveau dichter an die Bänder.

**Praxistipp:** Bei einem realen Bauelement kann diese Spannung nach außen nicht abgenommen oder gemessen werden, da die notwendigen elektrischen Kontakte für die Elektroden beider Halbleiterzonen diese genau kompensieren (siehe Abschnitt 12.2.4).

## 12.2.2 Einfluss einer äußeren Spannung

Wird an den PN-Übergang eine *äußere Spannung* angelegt, werden durch den Stromfluss (kleine Pfeile in Abb. 12.11 c und d) von den Kontakten her entweder

- weitere Ladungen abgeführt, d.h. Ausdehnung der Raumladungszone, *Sperrrichtung* mit relativ kleinem Strom (Abb. 12.11 c) oder
- nachgeliefert, d.h. Abbau der Raumladungszone, *Durchlassrichtung* mit hohem Strom (Abb. 12.11 d).

<sup>148</sup> In Abb. 12.10 liegen nur Veränderungen nach x und nur ein **D in x-Richtung** vor. D an der P-Elektrode ist noch **null**. Über  $A_\perp$  braucht somit nicht integriert zu werden und durch  $A_\perp$  kann dividiert werden. Es wird

$$\oint_{\text{Hüllfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q = \int_V \rho dV \quad \text{zu} \quad \cancel{D(P\text{-Elektrode}) A_\perp} + \cancel{\int_{\text{Mantel}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}_{\text{Mantel}}} + D(x) A_\perp = D(x) A_\perp = A_\perp \int_{P\text{-Elektrode}}^x \rho(x) dx .$$

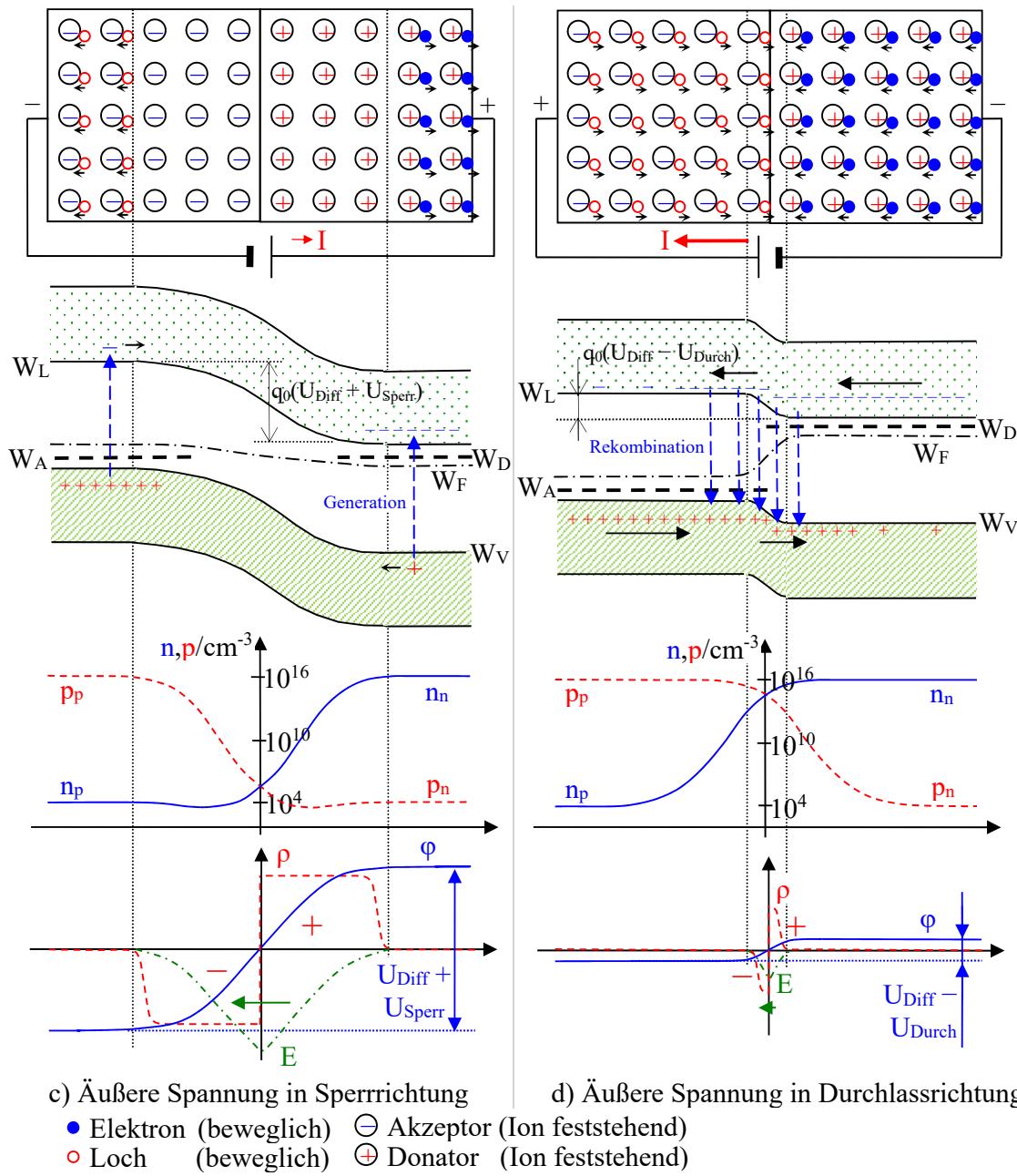


Abb. 12.11: PN-Übergang mit außen anliegender Spannung<sup>149</sup>

Bei Stromfluss wird das reine thermische Gleichgewicht in der Sperrschiicht durch den weiteren Abzug von Trägern bzw. durch die Ladungsträgerzufluss (Trägerinjektion) gestört.

Das Ergebnis ist in der Darstellung von  $n$  und  $p$  deutlich. Die Trägerkonzentrationen werden entweder stark abgesenkt (z.T. noch unter die ursprüngliche Minoritätsträgerkonzentration) bzw. fast ausgeglichen.

Das Ferminiveau verbiegt sich infolge des Nichtgleichgewichts im Übergangsbereich so, dass in Sperrrichtung die Bänder um die Sperrspannung stärker verbogen werden, dagegen in Durchlassrichtung die Bandverbiegung um die Durchlassspannung verringert wird.

<sup>149</sup> Das Potential wurde zur einfacheren Darstellung wieder in der Mitte auf null gelegt.

Die Ausdehnung bzw. der Abbau der Raumladung erfolgt genau so, dass jeweils der Maschensatz erfüllt ist (im Uhrzeigersinn gesehen).

$$\begin{aligned} \text{im PN-Übergang + Elektroden + außerhalb} &= 0 \\ -(U_{\text{Diff}} + U_{\text{Sperr}}) + U_{\text{Elektroden}} + U_{\text{Außen(Sperr)}} &= 0 \\ -(U_{\text{Diff}} - U_{\text{Durch}}) + U_{\text{Elektroden}} - U_{\text{Außen(Durch)}} &= 0 \end{aligned}$$

Der fließende *Strom* setzt sich aus den Anteilen der Diffusionsbewegung und der Bewegung durch das Raumladungsfeld beider Trägerarten zusammen, er muss natürlich über x gleich bleiben.

$$I(x) = I_{\text{Diff } n}(x) + I_{\text{Feld } n}(x) + I_{\text{Diff } p}(x) + I_{\text{Feld } p}(x) = \text{const} \quad (12.6)$$

An den Elektroden besteht der Strom nur noch aus Majoritätsträgern.

$$I = I_{\text{Feld } p}(\text{P-Elektrode}) = I_{\text{Feld } n}(\text{N-Elektrode})$$

Die Minoritätsträger sind vernachlässigbar und die Diffusionsströme reichen nicht so weit.

**Praxistipp:** Der *Übergang vom Löcher- zum Elektronenstrom* erfolgt durch *Rekombination* beim Durchlassstrom (hohe Trägerkonzentrationen in der Sperrsicht, Abb. 12.11 d) bzw. *Generation* beim Sperrstrom (nur durch die wenigen neu generierten Träger, Abb. 12.11 c).

### 12.2.3 Kennlinie eines PN-Übergangs

Aus (12.5), (12.1) und den Verteilungen der Trägerkonzentrationen n und p wird die **Kennlinie des PN-Übergangs** ermittelt (Spe65 S. 143-171). Für  $U \ll U_{\text{Diff}}$  und ideale Verhältnisse<sup>150</sup> folgt die Wagner'sche Kennlinienformel des PN-Übergangs.

$$I = I_0 (e^{\frac{qU}{kT}} - 1) \quad ^{151} \quad (12.7)$$

$I_0$  ist der Reststrom in Sperrrichtung (bei  $U \ll 0$ ) und  $U$  die äußere Spannung. Wenn der Strom so groß wird, dass die Ladungsträgerzufuhr (Trägerinjektion) die Raumladungen abgebaut hat ( $U \approx U_{\text{Diff}}$ , Bandverbiegungen sind abgebaut; vergleiche Abb. 12.11 d), muss eine weitere Spannungsvergrößerung gleichmäßig zwischen den Elektroden verteilt werden. Die Spannung am eigentlichen Übergang  $U_{\text{PN}}$  steigt nicht weiter, dafür erhöht sich die Spannung über den beiden Bahngebieten  $2U_B$  (jeweils von der Elektrode bis zum Übergang).

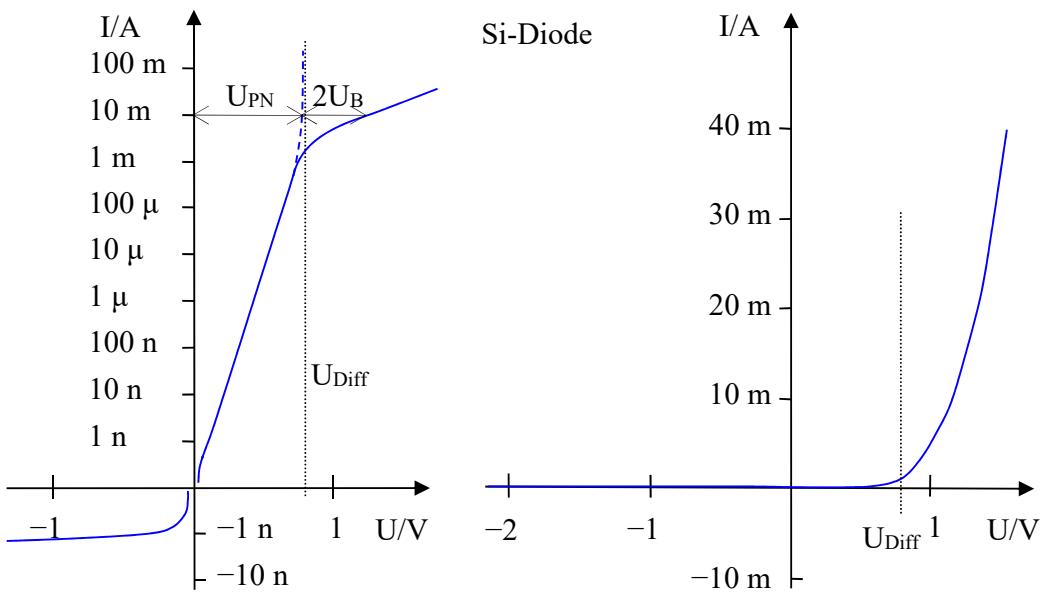
Es folgt damit vollständig

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left( e^{\frac{qU_{\text{Diff}}}{kT}} - 1 \right) \frac{1}{4} \left[ \coth^2 \left( \frac{U_{\text{Diff}} - U_{\text{PN}}}{2kT/q} \right) - \coth^2 \left( \frac{U_{\text{Diff}}}{2kT/q} \right) \right] \text{ und} \\ U &= U_{\text{PN}} + 2U_B = U_{\text{PN}} + 2 \frac{kT}{q} \left[ \coth \left( \frac{U_{\text{Diff}} - U_{\text{PN}}}{2kT/q} \right) - \coth \left( \frac{U_{\text{Diff}}}{2kT/q} \right) \right]. \quad ^{150} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Für  $U_{\text{PN}} \ll U_{\text{Diff}}$  wird aus (12.8) wieder (12.7) sowie  $U = U_{\text{PN}}$ .

<sup>150</sup> Exakt abrupter Übergang, symmetrische Verteilung für  $n(x)$  und  $p(x)$ , gleiche Diffusion von n und p usw. (kann beim Epitaxieverfahren relativ gut erreicht werden).

<sup>151</sup> Die Exponentialfunktion röhrt von der Fermi-Statistik her, in  $I_0$  sind alle Materialparameter zusammengefasst.



**Abb. 12.12: Kennlinie des PN-Übergangs (logarithmisch und linear dargestellt)**

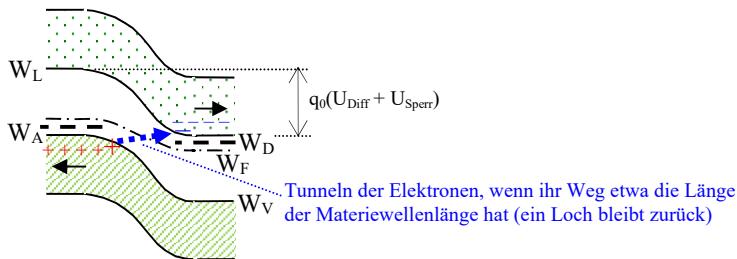
Die in ( 12.8 ) enthaltenen Parameter  $I_0$  und  $U_{Diff}$  lassen sich aus zwei Messpunkten der Kennlinie bestimmen. Durch technologische Erfordernisse und Einflüsse ergeben sich Abweichungen gegenüber den idealen Verhältnissen<sup>152</sup>, die für praktische Belange durch einen Korrekturfaktor  $\alpha$  vor  $kT$  in den Exponenten von ( 12.8 ) ausgeglichen werden können. Dieser kann durch einen dritten Messpunkt ermittelt werden (siehe auch (Boe78)), sodass sich eine gute Übereinstimmung von gemessener Kennlinie und Formel ergibt.

**Praxistipp:** Insbesondere im Bereich kleiner Ströme können Verunreinigungen zu zusätzlichen Abweichungen von der idealen Kennlinie führen (stärkere Steigung des Sperrstromes mit der Sperrspannung).

In Sperrrichtung wird das elektrische Feld bei hohen Sperrspannungen im Übergangsbereich sehr groß und es treten zusätzliche Effekte auf:

- Hohe Feldkräfte können Ladungsträger direkt aus ihrer Bindung (dem Valenzband) reißen – Zehnereffekt.
- Nehmen Elektronen im Feld viel Bewegungsenergie auf, ruft Stoßionisation lawinenartig einen Anstieg der Trägerkonzentration hervor – Avalancheeffekt.
- Weiter können bei schmalen Übergängen und hoher Sperrspannung Elektronen aufgrund ihrer Welleneigenschaften von der Valenzbandkante direkt zur Leitbandkante „tunneln“ (was keine Energieänderung benötigt, entspricht einer Generation) – Tunnelleffekt.

<sup>152</sup> Abrupter Übergang, symmetrische Verteilung für  $n(x)$  und  $p(x)$ , gleiche Diffusion von n und p, verbleibende Menge Verunreinigungen.



**Abb. 12.13: Darstellung des Tunneleffekts im Bändermodell**

Alle drei Effekte führen zu einem steilen Stromanstieg im Sperrbereich.

**Praxistipp:** Eine Nutzung für Bauelemente erfolgt bei Zehnerdioden zur Spannungsstabilisierung (ca. 3...50 V) bei Avalanche dioden zum Überspannungsschutz (ca. 150...1000 V).

#### 12.2.4 Metall-Halbleiter-Übergang

Metall-Halbleiter-Übergänge standen mit dem Kristalldetektor und den Spitzendioden am Anfang der Entwicklung.

Technologisch ergibt sich für Sperrsichten die Schwierigkeit, dass alle Verunreinigungen und Fehler auf der Oberfläche des Einkristalls die Trägeranzahlen stark verändern. Deshalb konnten Schottkydiode erst mit ausgereifter Technologie hergestellt werden und auch heute noch nicht für sehr große Querschnitte (d.h. große Ströme). Das Problem ist dagegen bei leitenden Kontakten unbedeutend.

Nachdem die Technologie zur Herstellung flächenhafter Metall-Halbleiter-Übergänge beherrscht wird, können ihre Vorteile umfassend genutzt werden. Das ist insbesondere die mögliche geringe Schwellspannung im Durchlassbereich.

**Praxistipp:** Metall-Halbleiter-Übergänge werden heute bei Schottkydiode genutzt. Sie sind auch die Grundlage für alle leitenden Kontakte an Halbleiterbauelementen.

Bei mehreren Übergängen in Reihe, die an beiden Enden das gleiche Metall (z.B. die Zuleitung) haben, heben sich alle Diffusionsspannungen gegenseitig auf. Es sind sowohl für einen N- als auch einen P-Halbleiter leitende Kontakte bei der richtigen Auswahl möglich.

Das Bändermodell des Metalls (Valenzband und Leitband überschneiden sich, Abb. 12.5) reduziert sich auf das Schottky'sche Napfmodell (bis  $W_F$  gefüllter Napf).

Der Abstand vom Niveau der „Füllung“ bis  $\infty$  heißt *Austrittsarbit*  $W_{AM}$  (Austritt aus der Oberfläche des Metalls). Dieses Oberflächenniveau stellt sich beim Übergang vom Metall zum Halbleiter auf das Ferminiveau ein (entspricht somit dem Ferminiveau des Metalls).

Auch hier entsteht ein *Gleichgewicht* zwischen Diffusion und elektrischem Feld.

Die Kennlinie entspricht in ihrer Form der des PN-Übergangs mit entsprechendem  $I_0$  und  $U_{Diff}$ .

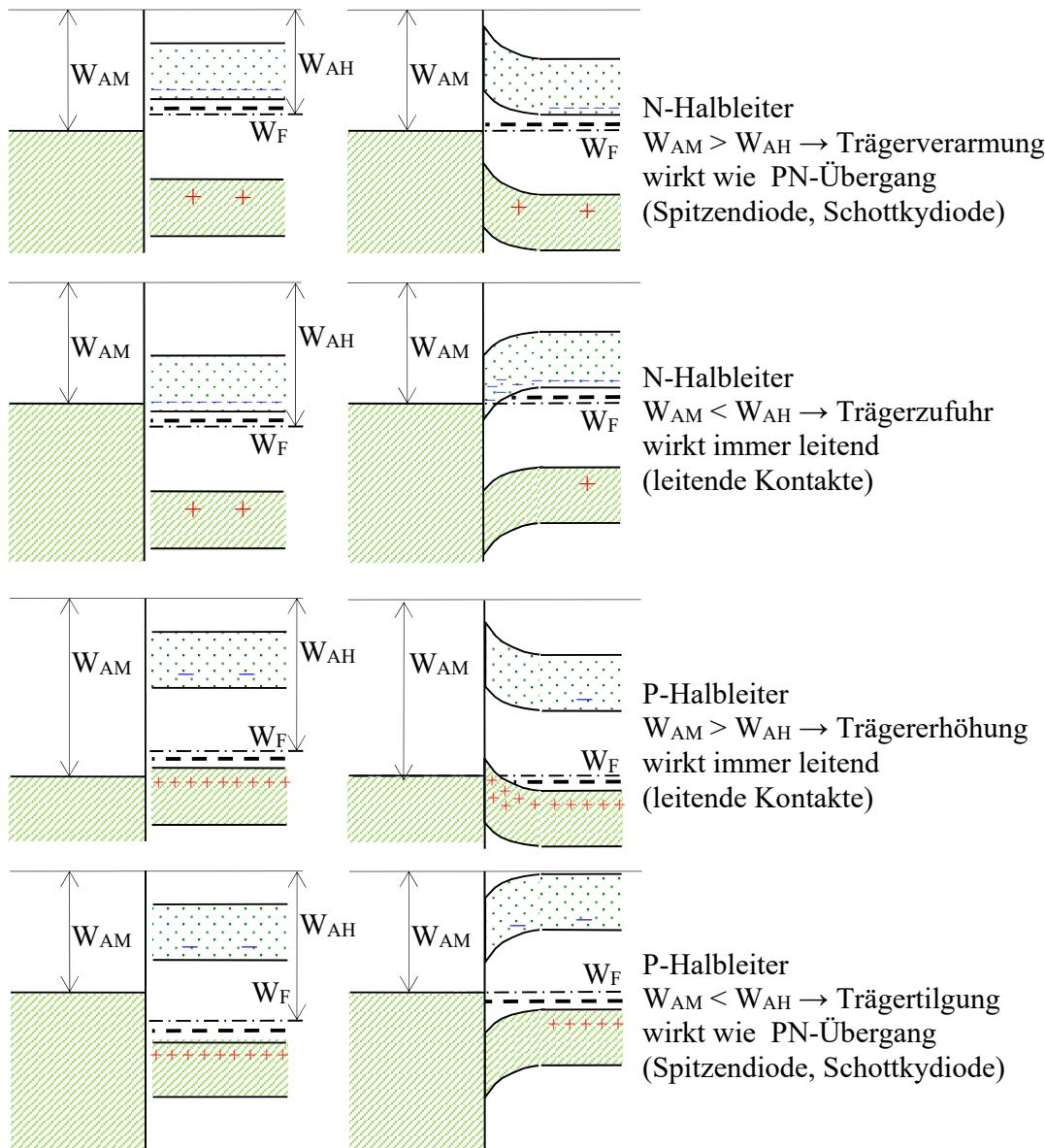


Abb. 12.14: Übergänge zwischen Metall und Halbleiter

Der Übergang zu einem Halbleiter, dessen Austrittsarbeit  $W_{AH}$  (vom Fermi niveau bis  $\infty$ ) kleiner ist als  $W_{AM}$  (entspricht  $W_F$ ), ergibt, dass Elektronen vom Halbleiter zum Metall „diffundieren“. Abb. 12.14 zeigt für einen N-Halbleiter, dass dadurch eine Trägerverarmung entsteht, das bedeutet eine Sperrschiicht wie beim PN-Übergang. Für den P-Halbleiter erhöhen die „wegdiffundierenden“ Elektronen dagegen die Anzahl Löcher und so entsteht ein leitfähiger Übergang. Ist  $W_{AH}$  größer als  $W_{AM}$ , gehen umgekehrt Elektronen vom Metall zum Halbleiter. Damit erfolgt eine Zufuhr von Elektronen bei einem N- und eine Tilgung von Löchern beim P-Halbleiter.

Die Bandverbiegungen bewirken auch hierbei eine *Diffusionsspannung*.

**Praxistipp:** Für die Diffusionsspannung und somit die Schwellspannung kann durch günstige Auswahl bei Schottkydioden ein Wert von 0,3 bis 0,5 V erreicht werden. Diese geringe Durchlassspannung ergibt im Vergleich mit einer Si-Diode (0,7 bis 0,8 V) einen deutlich geringeren Leistungsverlust. Darüber hinaus sind diese Dioden schneller.

### 12.2.5 Ersatzschaltungen für eine Halbleiterdiode

In der Schaltungstechnik ist es oft zweckmäßig, Ersatzschaltungen zu verwenden.

Ersatzschaltungen stellen eine Näherung der statischen Kennlinie, eine Näherung für das Kleinsignalverhalten oder eine mathematische Annäherung an die statische Kennlinie sowie das dynamische Verhalten (Großsignalverhalten) dar.

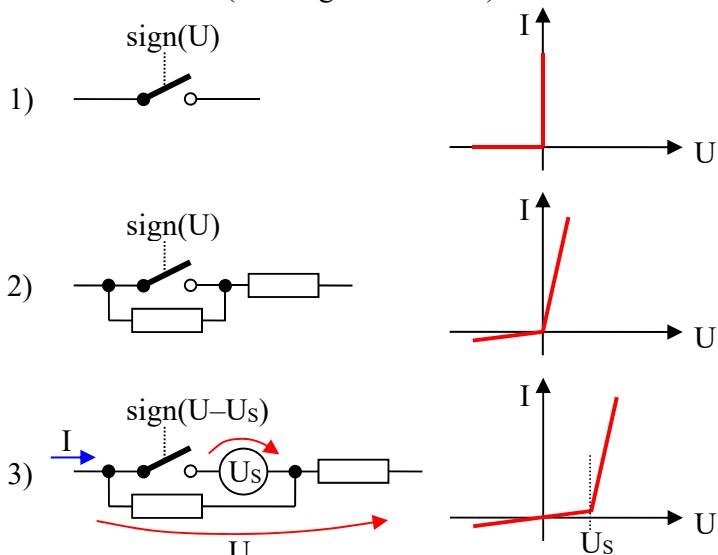


Abb. 12.15: Beispiele für Ersatzschaltungen – Näherung der statischen Kennlinie

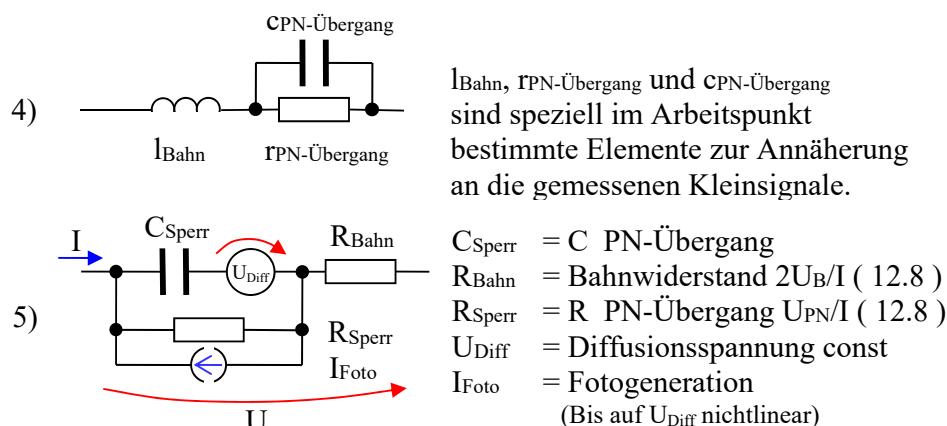


Abb. 12.16: Beispiele für Ersatzschaltungen – Kleinsignal und Großsignal

Die Bestimmung der Parameter der Ersatzschaltungen erfolgt immer durch Messung bzw. aus Typparametern der Hersteller. Die Ersatzschaltbilder Abb. 12.15 1) bis 3) sind grobe Vereinfachungen der Kennlinie. In Abb. 12.16 4) wird nur das Kleinsignalverhalten (vergleiche Abschnitte 12.3.3 und 13.1.1) dicht um den Arbeitspunkt nachgebildet. Das Modell in

Abb. 12.16 5) bildet das exakte physikalische Verhalten des PN-Übergangs so einfach wie möglich ab (siehe (Boe78)). Dadurch können damit auch der Fotostrom und die Lichtstrahlung ( $P_{\text{Licht}} = I \{R_{\text{Sperr}}\} \cdot \text{Quantenausbeute}$ ) sowie deren Zeitverhalten dargestellt werden.

**Praxistipp:** Ersatzschaltungen werden zur Schaltungsberechnung und zur Analyse der Funktionsweise von Schaltungen herangezogen. Insbesondere Simulationssysteme benutzen vorrangig verschiedene Ersatzschaltungen.

## 12.2.6 Kennwerte und Übungsaufgaben zu Halbleiterdioden

Wichtige Kennwerte von Halbleiterbauelementen mit einem PN-Übergang (Dioden) sind:

### 1. Grenzdaten

- Maximaler Spitzendurchlassstrom –  $I_{F M}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitdauer)
- Maximaler mittlerer Durchlassstrom –  $I_{F AV}$
- Maximaler effektiver Durchlassstrom –  $I_{F RMS}$
- Maximale Sperrspannung –  $U_{R M}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitdauer)
- Maximale Sperrsichttemperatur –  $\vartheta_J$
- Maximale Verlustleistung –  $P_{\max}$

### 2. Kenndaten

- Durchlassspannung bei Nennstrom –  $U_F$  bei  $I_F$
- Sperrstrom bei Nennsperrspannung –  $I_R$  bei  $U_R$
- Durchbruchspannung (Z-Diode) –  $U_z$

### 1. Schaltzeichen



### Aufgabe 12.6

Ein Silicium-PN-Übergang wurde mit  $n_A = n_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  dotiert. Die Dotierungen sind bei Raumtemperatur vollständig ionisiert, sodass  $p_p = n_n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  gilt (bei  $n_i = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ).  
Frage 1: Wie groß sind  $n_p$  und  $p_n$ ?

Frage 2: Wie groß ist die Diffusionsspannung?

Hinweis: Die Überlegungen finden bei thermischem Gleichgewicht statt. Das Verhältnis von  $n_p/n_n = f_F(W_L \text{ P-Elektrode}) / f_F(W_L \text{ N-Elektrode})$  mit  $f_F$  nach (12.2) kann durch Einsetzen von  $W_L \text{ P-Elektrode} = q_0 \varphi \text{ P-Elektrode}$  und  $W_L \text{ N-Elektrode} = q_0 \varphi \text{ N-Elektrode}$  (vergleiche auch Abb. 12.10) und Vernachlässigen der „1“ gegenüber den Exponentialfunktionen zu  $U_{\text{Diff}} = \varphi \text{ N-Elektrode} - \varphi \text{ P-Elektrode}$  umgeformt werden ( $kT/q_0 = 26 \text{ mV}$  bei Raumtemperatur ca. 300 K).

Zusatzfrage 1: Welche Schwellspannung ist bei der Kennlinie zu erwarten?

Zusatzfrage 2: Was ergäbe Galliumarsenid mit  $n_i = 1,3 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$  bei gleicher Dotierung?

### Aufgabe 12.7

Eine GaAs-LED ( $\lambda = 940 \text{ nm}$ ) hat bei 20 mA eine Durchlassspannung von 1,35 V. Bei jedem Rekombinationsvorgang kann ein Photon mit  $W_{\text{ph}} = h v = h c/\lambda$  abgestrahlt werden (mit  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Ws}^2$  und  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ).

Frage 1: Wie viele Rekombinationsvorgänge finden pro Sekunde statt?

Hinweis: Bei einem Rekombinationsvorgang ersetzt ein Elektron der Elektronenleitung (in der N-Zone) ein Loch der Löcherleitung (in der P-Zone) (vergleiche Abb. 12.11 d).

Frage 2: Wie groß ist die elektrisch verbrauchte Leistung und wie groß die Leistung des Photonenstroms, wenn alle Rekombinationsvorgänge ein Photon abgeben und ihr Licht vollständig die Diode verlassen kann?

Frage 3: Wie groß ist die tatsächliche Quantenausbeute  $\eta_Q$ , wenn ein Wirkungsgrad von 35 % gemessen wird (zum einen geben nur etwa 90 % der Rekombinationsvorgänge ein Photon ab und zum anderen wird ein großer Teil vom gleichen Material auch wieder absorbiert)?

### Aufgabe 12.8

Bei einer Einweggleichrichtung wird für die Diode folgender Strom gemessen:

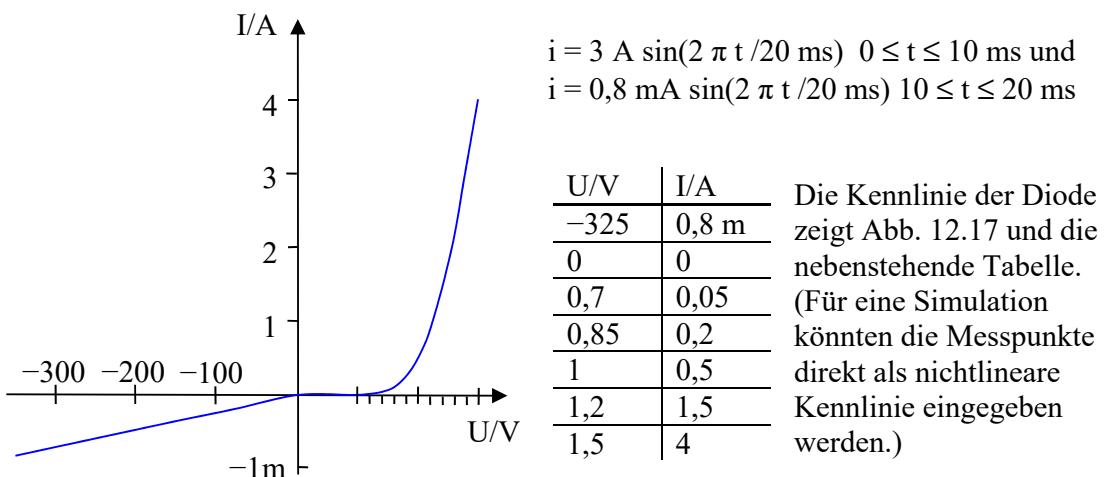


Abb. 12.17: Kennlinie für eine Gleichrichterdiode

Frage 1: Wie sieht die Spannung an der Gleichrichterdiode aus?

Hinweis: Es ist bei dieser nichtlinearen Kennlinie nur eine grafische Lösung sinnvoll (oder eine Simulation mit irgendeiner Kennliniennachbildung).

Frage 2: Welche Verluste entstehen an der Diode, welche Kühlung ist notwendig?

### Aufgabe 12.9

Zwei Gleichrichterdioden sollen parallel geschaltet werden, um einen Strom von 5 A zu ermöglichen. Beide Dioden sind für einen Dauerstrom von  $I_{FM} = 3 \text{ A}$  zugelassen. Die Kennlinien zeigen die nebenstehende Tabelle.

U/V	I <sub>1</sub> /A	I <sub>2</sub> /A
-325	1,5 m	0,8 m
0	0	0
0,7	0,05	0,05
0,85	0,2	0,2
1	0,7	0,5
1,2	1,9	1,5
1,5	5,5	4

Hinweis: Bei Parallelschaltung liegt an beiden Dioden die gleiche Spannung und der Strom wird den Kennlinien entsprechend aufgeteilt. Interpoliere zwischen den Punkten linear.

Frage 1: Wie ergibt sich die Stromaufteilung bei 5 A Gesamtstrom?

Frage 2: Ist der Einsatz dieser beiden Diodenexemplare möglich?

### Aufgabe 12.10

Die beiden Dioden aus Aufgabe 12.9 sollen in Reihe geschaltet werden, um eine Sperrspannung von 500 V zu ermöglichen. Beide Dioden sind für eine Dauersperrspannung von  $U_{RM} = 350 \text{ V}$  zugelassen.

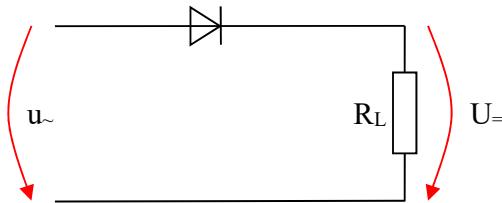
Hinweis: Bei Reihenschaltung fließt durch beide Dioden der gleiche Strom und die Spannung wird den Kennlinien entsprechend aufgeteilt. Interpoliere zwischen den Punkten linear.

Frage 1: Wie ergibt sich die Spannungsaufteilung bei 500 V Gesamtspannung?

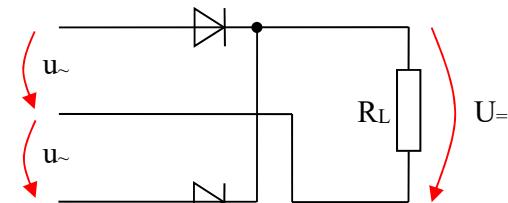
Frage 2: Ist der Einsatz dieser beiden Exemplare möglich?

Zusatzaufgabe: Wie könnte eine Messstrategie aussehen, um Aufgabe 12.9 und Aufgabe 12.10 praktisch zu lösen, ohne die Dioden zu gefährden?

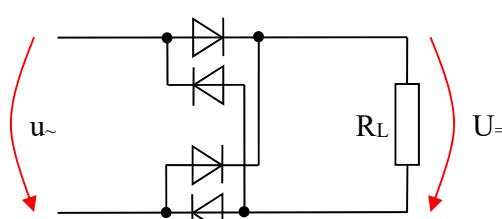
### Aufgabe 12.11



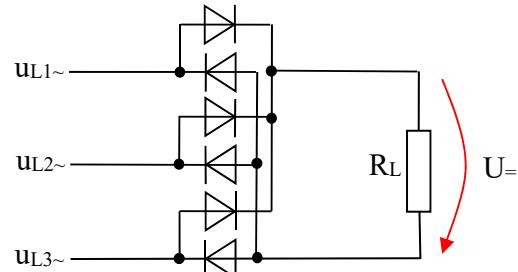
a) Einpuls-Gleichrichtung



b) Zweipuls-Gleichrichtung



c) Vierpuls-Gleichrichtung



d) Sechspuls-Gleichrichtung

Die Pulszahl ergibt sich aus der Anzahl der Wege, von denen Pulse (z.B. eine Halbwelle) kommen.

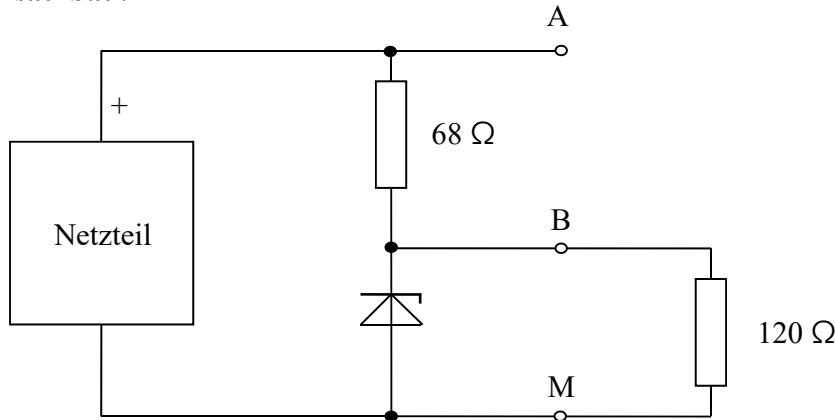
### Abb. 12.18: Beispieldiagramme zur Gleichrichtung

In den Beispielen von Abb. 12.18 bedeuten  $u_{\sim} = u_{L1\sim} = \hat{U} \cdot \sin(\omega t)$ ,  $u_{L2\sim} = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 120^\circ)$  sowie  $u_{L3\sim} = \hat{U} \cdot \sin(\omega t - 240^\circ)$ . Die Dioden können durch Abb. 12.15 1) genähert werden.

Frage: Wie sieht für die Beispiele  $U_+$  (ohne Siebung!) aus?

### 12.2.7 Messung und Auswertung der Kennlinie von Dioden

Als Beispiel für Dioden soll eine Z-Diode untersucht werden. Der Durchlassbereich entspricht einer normalen Diode, der Sperrbereich weist bei der Zehnerspannung einen steilen Stromabstieg auf. Eine Z-Diode kann zur Spannungsstabilisierung eingesetzt werden. Im Versuch geht es um die Analyse der Kennlinie. Aus dieser Analyse ergeben sich einige wichtige Richtlinien zur Dimensionierung.

**Versuchsaufbau:****Abb. 12.19: Schaltung einer einfachen Spannungsstabilisierung****Versuchsdurchführung:**

1. Messen der Kennlinie einer Z-Diode ZD 10 im Durchlass-, Sperr- und Zehnerbereich.  
Wählen der jeweiligen Messschaltung und aller benötigten Geräte.
2. Messung der Spannungsstabilisierung durch eine Z-Diode. Dazu sind die Gleichspannungen  $U_{BM}$  und  $U_{AM}$  bei
  - Leerlauf (an den Punkten B und M) für  $U_{AM}$  von 9....15 V und
  - einer Last von  $120 \Omega$  für  $U_{AM}$  von 9....20 V
 zu messen.

**Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:**

- Das Messen des Stromes der Z-Diode ist mit den üblichen Labormessgeräten im Durchlass- und Zehnerbereich, aber nicht im einfachen Sperrbereich möglich (dafür wären Messgeräte für Ströme unter 10 nA notwendig).
- Es ist deutlich, dass die Spannung  $U_{BM}$  nur eine geringe Änderung aufweist. Entsprechend der Kennlinie müssen der Strom durch die Z-Diode und so der Spannungsabfall am Vorwiderstand ( $68 \Omega$ ) steigen. Der maximal zulässige Strom ergibt die Grenze für die obere Spannung (wenn Leerlauf gefordert ist) oder die Dimensionierungsbedingung für den Vorwiderstand.
- Bei Last beginnt die Stabilisierung erst, wenn der Spannungsabfall am Lastwiderstand größer als  $U_z$  wird. Daraus ergibt sich die Grenze für die größte Last (den kleinsten Lastwiderstand). Danach muss die Z-Diode zusätzlich Strom übernehmen, um den Spannungsabfall am Vorwiderstand zu vergrößern (Grenze für die kleinste Last, wenn kein Leerlauf gefordert ist).

## 12.3 Bipolartransistor

### 12.3.1 Steuerung durch Trägerinjektion

Die Folge von drei Halbleiterschichten ungleichen Leitfähigkeitstyps mit einer Mittelschicht, die dünner als die Diffusionslänge ist, ergibt den Bipolartransistor.

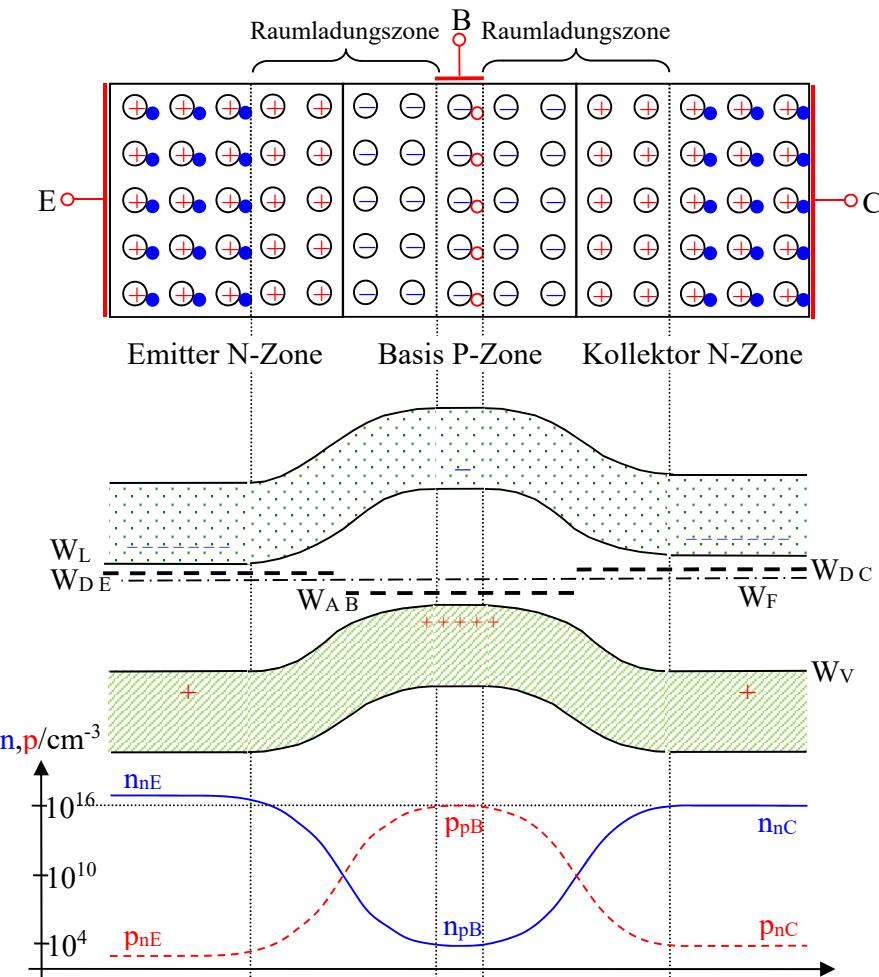


Abb. 12.20: Zonenanordnung, Bändermodell und Dichteveilichungen des Transistors

In Abb. 12.20 ist als Beispiel ein npn-Transistor dargestellt. Der Emitter (mit  $W_{DE}$ ) ist höher dotiert und hat deshalb eine höhere Majoritätsträgerdichte ( $n_{nE}$ ).

Es ist sofort zu erkennen, dass Elektronen aus der Basis (sie sind dort Minoritätsträger) ohne Energiezufuhr zum Kollektor gelangen können (genauso zum Emitter).

Ein Mechanismus, der Elektronen in die Basis bringt, ermöglicht einen steuerbaren Strom zum Kollektor. Genau das realisiert ein Basis-Emitter-Strom in Durchlassrichtung.

Dadurch gelangen viele Elektronen in die Basis (siehe Abb. 12.21) und können nicht vollständig rekombinieren, weil die Basis dünner als die Diffusionslänge ist (Eindringtiefe der Diffusion der Elektronen). Zur Vergrößerung dieser Trägerinjektion ist der Emitter höher dotiert. Der von der Basiselektrode kommende Löcherstrom geht durch Rekombination in Elektronenstrom über und gelangt nur zum geringen Teil bis zum Emitter.

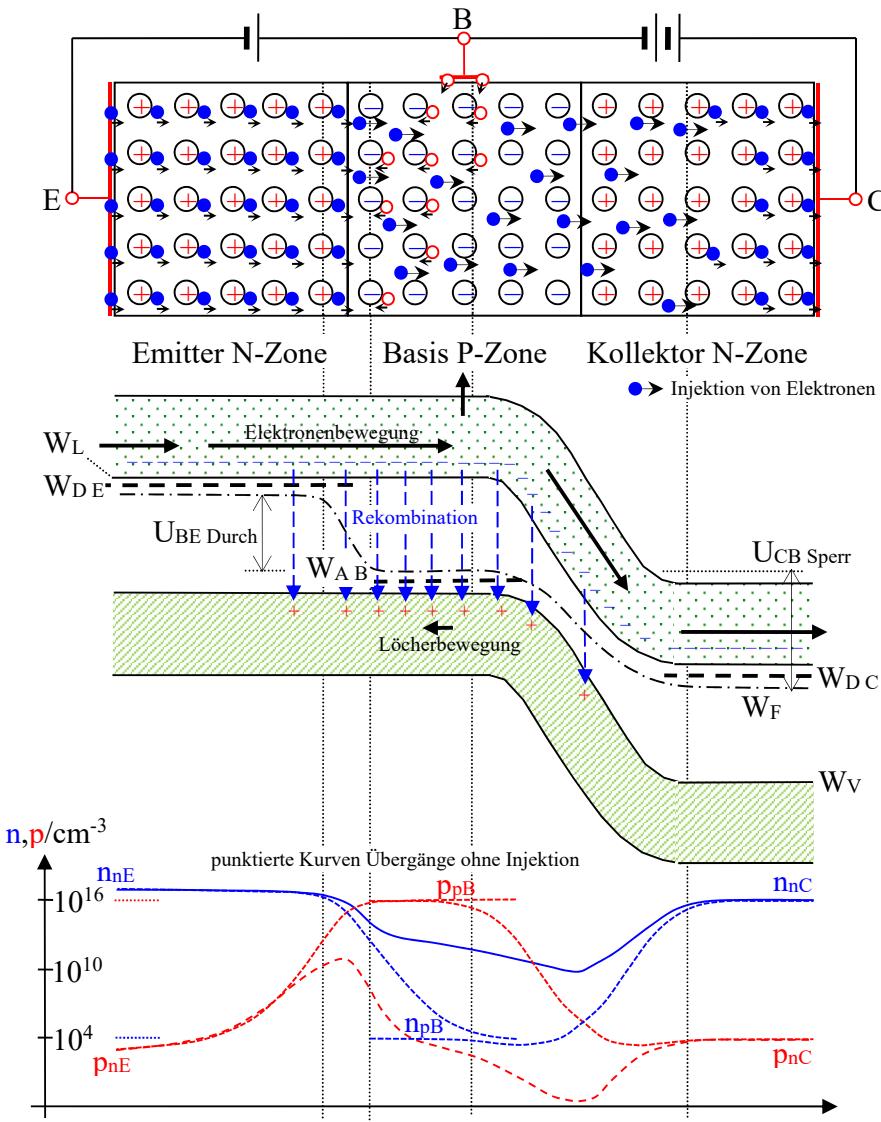


Abb. 12.21: Transistor mit äußeren Spannungen<sup>153</sup>

Eine Kollektor-Basis-Spannung in Sperrrichtung treibt die Elektronen weiter zum Kollektor (siehe Abb. 12.21). Die Elektronen können dabei sogar noch an potentieller Energie verlieren. Das Bändermodell verdeutlicht dieses sehr anschaulich.

Die Trägerkonzentration der Elektronen (vergleiche Abb. 12.21 mit Abb. 12.11<sup>154</sup>) werden im N-Emitter entsprechend der Durchlassrichtung angehoben. Sie können dann aber in der folgenden P-Basis nach anfänglicher Verringerung nicht dem normalen Durchlassverlauf entsprechend weiter abnehmen, da die Rekombination nicht ausreicht<sup>155</sup>. Im N-Kollektor wird dann wieder die Konzentration ähnlich der normalen Sperrrichtung erreicht.

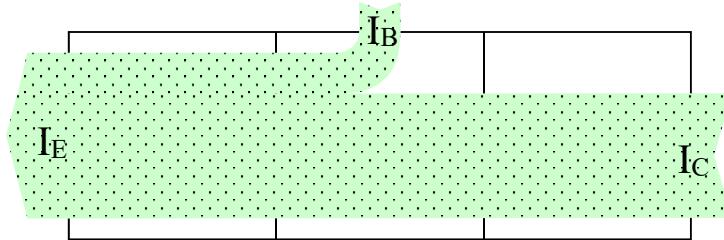
Die Trägerkonzentration der Löcher wird im Emitter-Basis-Übergangsbereich entsprechend der Durchlassrichtung ebenfalls anfangs angehoben, dann aber durch die Rekombination stark gedrückt und erreicht nicht einmal die normale P-Konzentration der Basis. Sie sinkt danach im Basis-Kollektor-Übergangsbereich entsprechend der Sperrrichtung noch deutlich unter die Konzentration des N-Kollektors.

<sup>153</sup> Im Bändermodell des Emitter-Basis-Übergangs ist der Potentialwall vollständig abgebaut ( $U_{BE \text{ Durch}} \approx U_{Diff}$ ).

<sup>154</sup> Dabei ist die Durchlassrichtung beider Abbildungen seitenvertauscht.

<sup>155</sup> Beachte, dass das thermische Gleichgewicht durch den Strom gestört wird.

Die Größe des Basisstroms fungiert hierbei zur Steuerung, wie viele Elektronen in die Basis injiziert werden und somit zum Kollektor gelangen können. Ist die Kollektorspannung groß genug (steiler, energiegünstiger Abfall von der Basis zum Kollektor im Bändermodell), werden sogar deutlich mehr Elektronen zum Kollektor „abgesogen“, als zur Basiselektrode wegfließen. Aus diesem Verhalten resultiert der Verstärkungseffekt (Abb. 12.22).



**Abb. 12.22: Stromaufteilung im npn-Transistor (schematisch)** <sup>156</sup>

Für einen pnp-Transistor müssen in der Beschreibung die Elektronen gegen Löcher getauscht und beide Spannungsquellen umgepolt werden. Hierbei findet dann eine Injektion von Löchern vom Emitter in die Basis statt (d.h., Elektronen des Valenzbandes der Basis gelangen ohne Energieänderung zum Emitter und lassen Löcher zurück; Abb. 12.11 d seitenrichtig).

**Praxistipp:** Natürlich könnte der Transistor auch in umgekehrter Richtung betrieben werden. Da der Kollektor aber nicht so hoch dotiert ist wie der Emitter, erreicht diese Betriebsweise nur eine geringe Injektion und somit sehr schlechte Kennwerte (inverser Transistor).

### 12.3.2 Kennlinie des Bipolartransistors

Die übliche Darstellung des **Kennlinienfeldes** zeigt in jedem Quadranten eine Zusammenstellung von jeweils zwei Variablen und einem Parameter für die Kurvenscharen.

Das Kennlinienfeld entspricht einem Standard-NF-Transistor mit 0,5 W maximaler Verlustleistung.

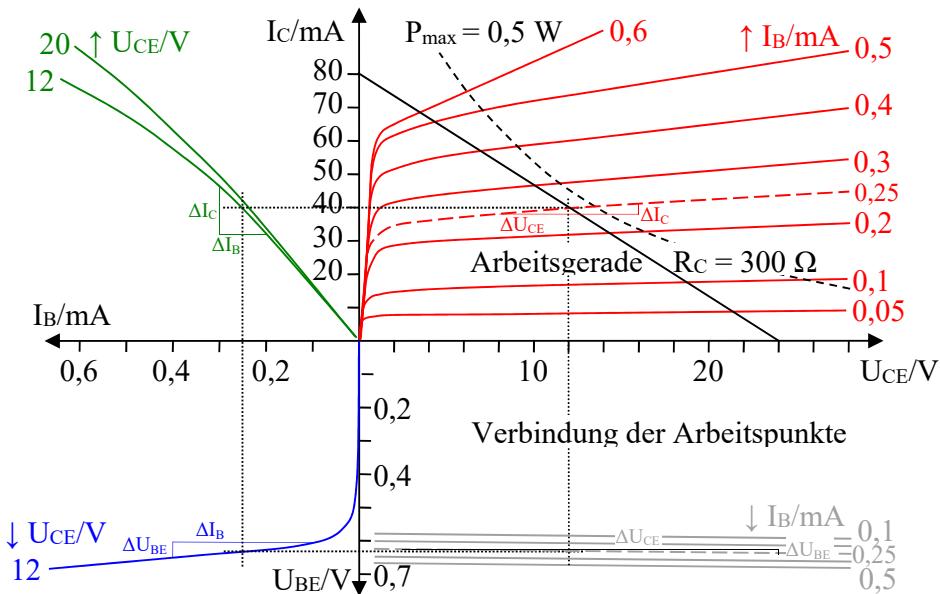
Im ersten Quadranten wird die **Ausgangskennlinie**  $I_C = f(U_{CE})$  mit dem Basisstrom  $I_B$  als Parameter dargestellt (Kollektorstrom  $I_C$ , Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{CE}$ ). Liegt zwischen Kollektor und Spannungsquelle ein Kollektorwiderstand  $R_C$ , wird  $U_{CE}$  durch  $I_C \cdot R_C$  gegenüber der Batteriespannung verringert, daraus resultiert die Arbeitsgerade (gezeigt für  $U_{Bat} = 24$  V). In Abb. 12.23 wurde der Arbeitspunkt  $U_{CE} = 12$  V,  $I_C = 40$  mA und  $U_B = 0,25$  mA gewählt. Die fein gestrichelten Linien zeigen den **Arbeitspunkt** in jeder Zusammenstellung (in allen Quadranten).

Im zweiten Quadranten folgt die **Steuerkennlinie**  $I_C = f(I_B)$  mit  $U_{CE}$  als Parameter. Da die Kurven sehr dicht liegen, wurden nur zwei gezeichnet. Die Steuerung des Ausgangsstromes  $I_C$  durch den Eingangsstrom  $I_B$  ist fast linear.

Im dritten Quadranten liegt die **Eingangskennlinie**  $U_{BE} = f(I_B)$  mit dem Parameter  $U_{CE}$ . Diese Kurve entspricht der Diodenkennlinie von der Basis zum Emitter. Auch hier besteht eine geringe Abhängigkeit von  $U_{CE}$ , sodass nur eine Kurve dargestellt wurde.

Die geringe Abhängigkeit der **Rückwirkungskennlinie** von  $U_{CE}$  ist im vierten Quadranten am deutlichsten  $U_{BE} = f(U_{CE})$ . Die Geraden sind fast waagerecht (d.h. konstant). Die Wirkung der Ausgangsspannung  $U_{CE}$  auf die Eingangsspannung  $U_{BE}$  ist somit praktisch vernachlässigbar.

<sup>156</sup> Die Richtung der Elektronenbewegung geht gegen die Stromrichtung.



**Abb. 12.23: Kennliniendarstellung eines Bipolartransistors**

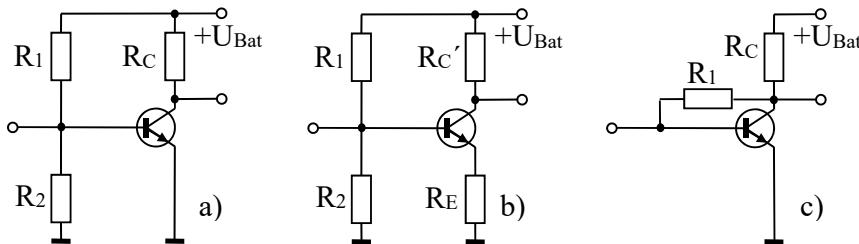
Mit Hilfe der Arbeitsgeraden in der Ausgangskennlinie, bei deren Wahl zum einen die maximale Verlustleistung<sup>157</sup> beachtet werden muss und zum anderen ein möglichst großer linearer Bereich für die Steuerung erreicht werden sollte, wird der Arbeitspunkt der Transistororschaltung dimensioniert (Wahl von  $U_{Bat}$ ,  $R_C$ , Bestimmung von  $I_B$  und  $U_{BE}$  sowie des dafür notwendigen Spannungsteilers; siehe Abschnitt 12.3.3).

Ein Kennlinienstück um den Arbeitspunkt in jedem Quadranten, das möglichst groß, aber näherungsweise noch linear ist, kann genutzt werden, die Anstiege  $\Delta I_C/\Delta U_{CE}$ ,  $\Delta I_C/\Delta I_B$ ,  $\Delta U_{BE}/\Delta I_B$  und  $\Delta U_{BE}/\Delta U_{CE}$  für den gewählten Arbeitspunkt zu bestimmen.

**Praxistipp:** Diese Parameter dienen für Ersatzschaltungen bei der Schaltungsberechnung.

### 12.3.3 Grundschaltungen, Vierpoldarstellung und Kleinsignalverhalten

Die Festlegung des Arbeitspunktes ist der erste Schritt zur Dimensionierung einer Transistorverstärkerstufe.



**Abb. 12.24: Schaltungen zur Einstellung des Arbeitspunktes einer Transistorstufe**

Durch den Kollektowiderstand ( $R_C$  in Abb. 12.24 a) wird der Arbeitspunkt festgelegt.

$$R_C = \frac{U_{Bat} - U_{CE}}{I_C} \quad (12.9)$$

Dazu werden  $U_{CE}$  und  $I_C$  der Kennlinie (Abb. 12.23 1. Quadrant) oder den Herstellerangaben (Standardarbeitspunkt) entnommen. Für den gleichen Arbeitspunkt sind der Basisstrom und

<sup>157</sup>  $P_{max}$  folgt aus der konstruktiv bedingten maximal möglichen Wärmeabgabe des Transistors.

die Basisspannung abzulesen (2. und 3. Quadrant). Danach wird der Spannungsteiler ( $R_1$  und  $R_2$  gemäß Abb. 12.24 a) ausgelegt.

**Praxistipp:** Damit der Spannungsteiler nahezu belastungslos wird, sollte er etwa den zehnfachen Querstrom bekommen. Wegen Exemplarstreuungen der Transistoren wird oft im Testbetrieb der Spannungsteiler als Einstellregler ausgeführt und der Arbeitspunkt justiert.

$$R_1 + R_2 = \frac{U_{\text{Bat}}}{10 I_B} \quad \text{und} \quad \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_{\text{BE}}}{U_{\text{Bat}}} \quad (12.10)$$

**Praxistipp:** Zur Stabilisierung des Arbeitspunktes gegen Verschiebung bei Erwärmung wird der Kollektorwiderstand in  $R_C'$  und  $R_E$  aufgeteilt (Abb. 12.24 b). Für die Signale wird  $R_E$  durch einen Kondensator „kurzgeschlossen“ ( $R_E$  ist nur für den Arbeitspunkt). 158

Die Betrachtungsweise zur Kleinsignalaussteuerung ermöglicht die weitere Behandlung der Transistorstufe. Ihre Entwicklung stellte den Durchbruch für die Schaltungstechnik dar.

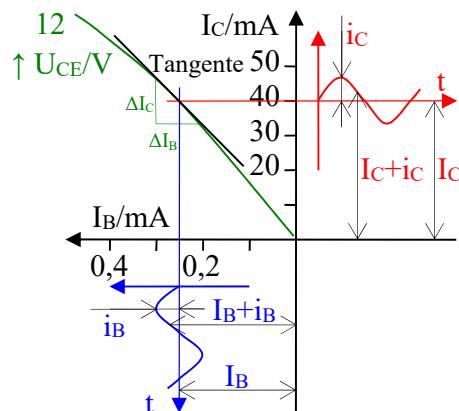


Abb. 12.25: Prinzip der Kleinsignalaussteuerung (Ein- und Ausgangsstrom-Kennlinie)

Nach dem Überlagerungsprinzip (siehe auch Abschnitt 9.3) können bei linearen Elementen Ströme und Spannungen addiert werden. Bewegen sich Änderungen  $\Delta I_B = i_B$  nur in einem kleinen Bereich um den Arbeitspunkt (Abb. 12.25) und kann die Kennlinie in diesem Bereich hinreichend genau durch die Tangente im Arbeitspunkt genähert werden, ist die Anwendung des Überlagerungsprinzips gegeben. Damit ist es möglich, die Dimensionierung des Arbeitspunktes (Gleichstromquelle  $U_{\text{Bat}}$ ) ohne Berücksichtigung der Signale durchzuführen und die Signale ohne die Berücksichtigung der Stromversorgung zu behandeln.

Vierpole sind eine wichtige Abstraktionsform und obendrein ein allgemeines Denkprinzip, das zu einfach handhabbaren Ersatzschaltungen führt; vergleiche auch Abschnitt 9.4.

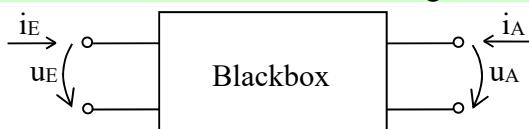


Abb. 12.26: Blackbox als allgemeiner Vierpol mit vier Ein- und Ausgangsgrößen

<sup>158</sup> Ein Anstieg von  $I_C$  (somit auch von  $I_E$ ) reduziert  $U_{\text{BE}}$  um den Spannungsanstieg an  $R_E$  und dann rückwirkend  $I_C$  (Prinzip der Gegenkopplung, siehe auch Abschnitt 13.2.2). Die Größe von  $R_E$  ist Schaltungsbeispielen der Hersteller zu entnehmen oder experimentell zu ermitteln.

Der Zusammenhang der *vier Ein- und Ausgangsgrößen* in Abb. 12.26 ergibt für *lineare Vierpole* zur Beschreibung *zwei einfache Gleichungen*. Die möglichen Kombinationen dieser Größen ergeben *sechs verschiedene Betrachtungsweisen* (siehe auch (Lin93 S. 402 ff)).

**Praxistipp:** Aus den Gleichungen dieser Betrachtungsweisen können *Messvorschriften* für die betreffenden *vier Parameter* der Gleichungen abgeleitet werden. Dazu werden ein- bzw. ausgangsseitige *Leerlauf-* ( $i_{E/A} = 0$ ) und *Kurzschlussmessungen* ( $u_{E/A} = 0$ ) benötigt.

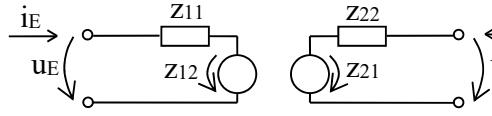
### Gleichungen und Ersatzschaltung:

(für beliebige innere Struktur)

#### 1. Widerstandsform (günstige Reihenschaltung der Ein- und Ausgänge)

$$u_E = Z_{11} i_E + Z_{12} i_A$$

$$u_A = Z_{21} i_E + Z_{22} i_A$$



### Bestimmung der Parameter:

aus Leerlauf- ( $i = 0$ ) und Kurzschlussmessungen ( $u = 0$ )

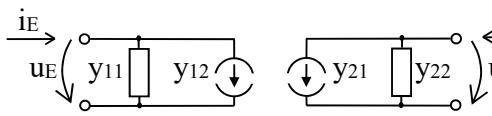
$$\begin{aligned} Z_{11} &= u_E / i_E \Big|_{i_A=0} & Z_{22} &= u_A / i_A \Big|_{i_E=0} \\ Z_{12} &= u_E / i_A \Big|_{i_E=0} & Z_{21} &= u_A / i_E \Big|_{i_A=0} \end{aligned}$$

Abb. 12.27: Ersatzschaltung aus realen gesteuerten Ersatzspannungsquellen

#### 2. Leitwertform (günstige Parallelschaltung der Ein- und Ausgänge)

$$i_E = y_{11} u_E + y_{12} u_A$$

$$i_A = y_{21} u_E + y_{22} u_A$$



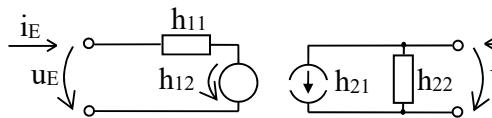
$$\begin{aligned} y_{11} &= i_E / u_E \Big|_{u_A=0} & y_{22} &= i_A / u_A \Big|_{u_E=0} \\ y_{12} &= i_E / u_A \Big|_{u_E=0} & y_{21} &= i_A / u_E \Big|_{u_A=0} \end{aligned}$$

Abb. 12.28: Ersatzschaltung aus realen gesteuerten Ersatzstromquellen

#### 3. Hybridform (günstig für Eingang mit Reihen-, Ausgang mit Parallelschaltung) (gibt es auch umgekehrt, d.h. zwei Varianten)

$$u_E = h_{11} i_E + h_{12} u_A$$

$$i_A = h_{21} i_E + h_{22} u_A$$



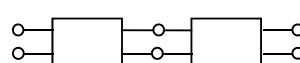
$$\begin{aligned} h_{11} &= u_E / i_E \Big|_{u_A=0} & h_{22} &= i_A / u_A \Big|_{i_E=0} \\ h_{12} &= u_E / u_A \Big|_{i_E=0} & h_{21} &= i_A / i_E \Big|_{u_A=0} \end{aligned}$$

Abb. 12.29: Ersatzschaltung aus realer gesteuerter Ersatzspannungs- und -stromquelle

#### 4. Kettenform (günstig für Kettenbeschreibungen) (gibt es auch als Ausgang = f{Eingang}, d.h. zwei Varianten; die innere Struktur bleibt bei dieser Form „abstrakt“)

$$u_E = a_{11} u_A + a_{12} i_A$$

$$i_E = a_{21} u_A + a_{22} i_A$$



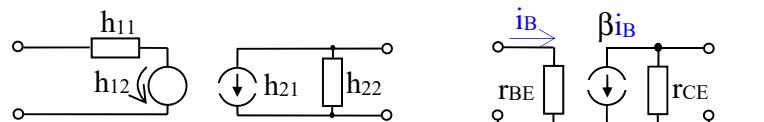
$$\begin{aligned} a_{11} &= u_E / u_A \Big|_{i_A=0} & a_{22} &= i_E / i_A \Big|_{u_A=0} \\ a_{12} &= u_E / i_A \Big|_{u_A=0} & a_{21} &= i_E / u_A \Big|_{i_A=0} \end{aligned}$$

Abb. 12.30: Kettenbeschreibung zweier Vierpole

Alle Vierpolgleichungen lassen sich in Matrizenform schreiben. Durch Matrixkonvertierung können die Parameter der sechs Formen ineinander umgewandelt werden.

**Praxistipp:** Für *Transistoren* hat sich die Hybridform mit den h-Parametern durchgesetzt.

Es ist zu sehen, dass die *Messvorschrift mit den Anstiegen*  $\Delta U_{BE}/\Delta I_B$ ,  $\Delta I_C/\Delta U_{CE}$ ,  $\Delta U_{BE}/\Delta U_{CE}$  und  $\Delta I_C/\Delta I_B$  im Kennlinienfeld übereinstimmt<sup>159</sup> (Abb. 12.23). Dabei wird  $h_{12}$  in der Regel vernachlässigt (vergleiche Abb. 12.23, vierter Quadrant), weil die Rückwirkungen sehr gering sind. Für den Transistor werden gleichsam auch der Verstärkungsfaktor  $\beta$  sowie die Kleinsignalwiderstände  $r_{BE}$  und  $r_{CE}$  verwendet.



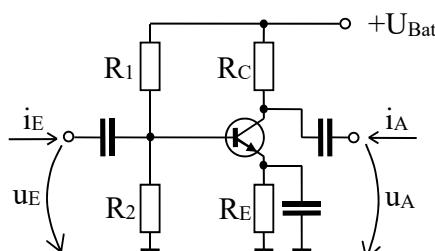
mit  $h_{11} = r_{BE}$ ,  $h_{22} = 1/r_{CE}$ ,  $h_{12} = 0$ ,  $h_{21} = \beta$  und  $i_B$  als Steuergröße

**Abb. 12.31: Kleinsignalersatzschaltung des Transistors**

Es gibt drei Transistorgrundschaltungen mit unterschiedlichen Betriebseigenschaften. Diese können an den Kleinsignalersatzschaltungen verdeutlicht werden.

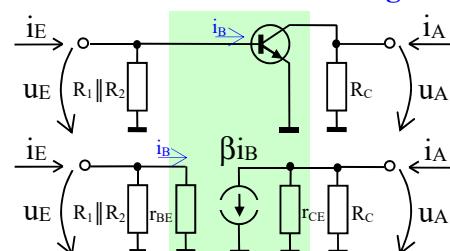
Die Kondensatoren sowie die Batterie in Abb. 12.32, Abb. 12.33 und Abb. 12.34 sollen für die Signalfrequenz (das Kleinsignal) keinen Widerstand ( $0 \Omega$ ) haben. (Für Gleichstrom haben die Kondensatoren einen unendlichen Widerstand.)

### vollständige Schaltung:



**Abb. 12.32: Emitterschaltung**

### Kleinsignalersatzschaltung ohne und mit Transistorersatzschaltung:



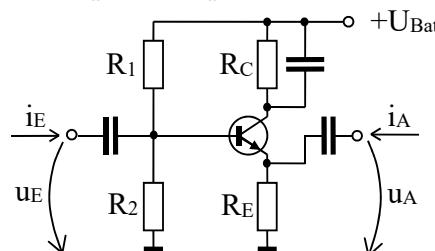
Mit der Emitterschaltung lassen sich folgende Betriebswerte erreichen:

$$R_{EIN} = (R_1 \parallel R_2) \parallel r_{BE} \approx 0,5 \dots 20 \text{ k}\Omega \quad \text{mittel}$$

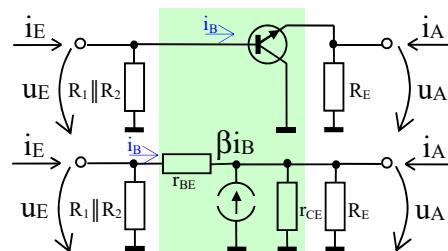
$$R_{AUS} = R_C \parallel r_{CE} \approx 1 \dots 100 \text{ k}\Omega \quad \text{mittel}$$

$$v_u \text{ leer} = -\beta (R_C \parallel r_{CE}) / r_{BE} \approx -100 \dots 1000 \quad \text{gegenphasig, hoch}$$

$$v_i \text{ kurz} = \beta (R_1 \parallel R_2) / (R_1 \parallel R_2 + r_{BE}) \approx \beta \approx 100 \quad \text{hoch}$$



**Abb. 12.33: Kollektorschaltung**



<sup>159</sup> Diese werden immer mit dem feststehenden Parameter der Kurvenschar, also keiner Änderung (Kleinsignal ist null) bestimmt.

Mit der Kollektorschaltung lassen sich folgende Betriebswerte erreichen:

$$R_{EIN} = (R_1 \parallel R_2) \parallel [r_{BE} + (\beta+1)r_{CE} \parallel R_E] \approx 0,2 \dots 1 \text{ M}\Omega$$

hoch

$$R_{AUS} = (R_E \parallel r_{CE}) \parallel r_{BE} / (\beta+1) \approx 50 \dots 500 \Omega$$

niedrig

$$V_u \text{ leer} = [r_{BE}/(\beta+1)R_E \parallel r_{CE} + 1]^{-1} < 1$$

keine

$$V_i \text{ kurz} = -\beta (R_1 \parallel R_2) / (R_1 \parallel R_2 + r_{BE}) \approx -\beta \approx -100$$

gegenphasig, hoch

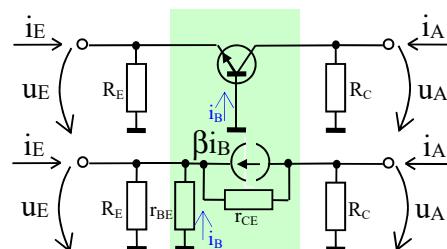
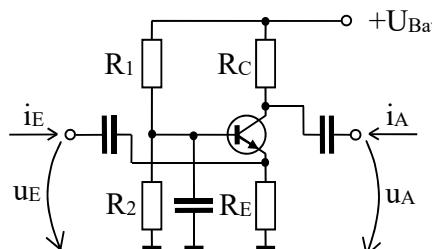


Abb. 12.34: Basisschaltung

Mit der Basisschaltung lassen sich folgende Betriebswerte erreichen:

$$R_{EIN} = (R_E \parallel r_{BE}) / \beta \approx 50 \dots 200 \Omega$$

niedrig

$$R_{AUS} = (R_C \parallel r_{CE}) (1 + \beta R_E / r_{BE}) \approx 0,5 \dots 2 \text{ M}\Omega$$

hoch

$$V_u \text{ leer} = \beta (R_C \parallel r_{CE}) / r_{BE} \approx 100 \dots 1000$$

hoch

$$V_i \text{ kurz} \approx -1$$

gegenphasig, keine

**Praxistipp:** Die Standardverstärkerstufe im NF-Bereich wird mit der Emitterschaltung realisiert (hohe Verstärkung). Kollektorstufen finden ihre Verwendung vor allem in Impedanzwandlerstufen (hoher Ein-, geringer Ausgangswiderstand, keine Verstärkung). Die Basisschaltung wird z.T. für Hochfrequenzanwendungen eingesetzt (günstigere Rauschanpassung mit geringem Eingangswiderstand).

Soll das dynamische Verhalten auch für höhere Frequenzen richtig wiedergegeben werden, sind Gehäuse und Sperrschichtkapazitäten in die Ersatzschaltungen einzufügen. Für das Großsignalverhalten wurden von Ebers und Moll Ersatzschaltungen entwickelt, sie werden abgewandelt in Simulationssystemen verwendet.

Weiterführendes zur Schaltungstechnik ist der Spezialliteratur zu entnehmen (siehe z.B. (Lin93 S. 402 ff) und insbesondere (Tie10)). Zur Behandlung der Eigenschaften wichtiger Signale siehe Abschnitt 11 und 16.

### 12.3.4 Kennwerte und Übungsaufgaben zum Transistor

Wichtige Kennwerte von Bipolartransistoren sind:

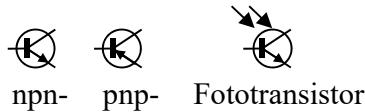
#### 1. Grenzdaten

- Maximaler Kollektorstrom –  $I_{CM}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitspanne)
- Maximaler mittlerer Kollektorstrom –  $I_{CAV}$
- Maximaler Basisstrom –  $I_{BM}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitspanne)
- Max. Kollektor-Emitter-Sperrspannung –  $U_{CE0}$
- Maximale Sperrschichttemperatur –  $\vartheta_J$
- Maximale Verlustleistung –  $P_{tot}$

#### 2. Kenndaten

- Gleichstromverstärkung –  $B = I_C/I_B$  (bei Nennarbeitspunkt)
- Kurzschlussstromverstärkung –  $\beta$  (bei Nennarbeitspunkt)
- Transitfrequenz –  $f_T$  (bei Nennarbeitspunkt)
- Rauschzahl –  $F$  (bei Nennarbeitspunkt)

### 3. Schaltzeichen



### Aufgabe 12.12

Für einen Transistor empfiehlt der Hersteller den Arbeitspunkt  $U_{CE} = 5 \text{ V}$  und  $I_C = 2 \text{ mA}$ . Die Gleichstromverstärkung wird mit  $B = 180$  für diesen Arbeitspunkt angegeben. Zur Spannungsversorgung steht eine Batterie mit 12 V zur Verfügung.

Frage 1: Wie sind  $R_C$ ,  $R_1$  und  $R_2$  zu wählen?

Hinweis: Aus  $B$  kann  $I_B$  bestimmt werden, nur Normwerte (E 6 mit 20 %) verwenden.

Frage 2: Wie verändert sich  $R_C'$ , wenn ein  $R_E$  mit  $220 \Omega$  eingesetzt werden soll?

Frage 3: Wie könnte die Schaltung mit einem Einstellregler für  $R_1$  und  $R_2$  aussehen?

### Aufgabe 12.13

Für den gleichen Arbeitspunkt, wie er in Aufgabe 12.12 verwendet wird, gibt der Hersteller für 1 kHz die h-Parameter  $h_{11} = 2,7 \text{ k}\Omega$ ,  $h_{22} = 18 \mu\text{S}$ ,  $h_{12} = 10^{-4}$  und  $h_{21} = 220$  an. Für eine Verstärkerstufe in Emitterschaltung Abb. 12.32 kann damit und mit den in Aufgabe 12.12 ermittelten Werten für  $R_C'$  ( $R_E$  soll durch einen Kondensator unwirksam sein),  $R_1$ ,  $R_2$  und die Leerlaufspannungsverstärkung  $v_u \text{ leer} = u_A/u_E$  bei  $i_A = 0$  bestimmt werden.

Frage: Wie groß ist  $v_u \text{ leer}$ ?

Hinweis: Am Eingang die Stromteilung beachten; am Ausgang reicht die Gesamtspannung.

### Aufgabe 12.14

Für einen Leistungstransistor empfiehlt der Hersteller den Arbeitspunkt  $U_{CE} = 2 \text{ V}$  und  $I_C = 150 \text{ mA}$ . Die Gleichstromverstärkung wird mit  $B = 100$  für diesen Arbeitspunkt angegeben. Zur Spannungsversorgung steht eine Batterie mit 12 V zur Verfügung.

Frage 1: Wie sind  $R_C$ ,  $R_1$  und  $R_2$  zu wählen?

Hinweis: Aus  $B$  kann  $I_B$  bestimmt werden, nur Normwerte (E 6 mit 20 %) verwenden.

Frage 2: Wie könnte die Schaltung aussehen mit einem Einstellregler für  $R_1$  und  $R_2$ ?

Zusatzaufgabe: Vergleiche die Ergebnisse mit Aufgabe 12.12!

### Aufgabe 12.15

Ein Transistor soll ein Relais (6 V, 10 mA mit  $I_{\text{Schalt}} > 8 \text{ mA}$ ,  $I_{\text{Abfall}} < 1 \text{ mA}$ ) schalten.

Das Eingangssignal beträgt entweder Low-Signal: 0 V ... max. 0,2 V und max. 2 mA oder

High-Signal: 5 V ... min. 3,4 V und max. -0,2 mA.

Auf der Arbeitsgeraden in der Kennlinie wurden zwei Arbeitspunkte ausgewählt:

$I_C = 9,75 \text{ mA}$ ,  $U_{CE} = 0,15 \text{ V}$ ,  $I_B = 0,1 \text{ mA}$  und

$U_{BE} \approx 0,7 \text{ V}$

$I_C = 0,5 \text{ mA}$ ,  $U_{CE} = 5,7 \text{ V}$ ,  $I_B \approx 0 \text{ mA}$ ,  $U_{BE} < 0,4 \text{ V}$ .

Der Transistor wirkt als Schalter (kein Kleinsignal).

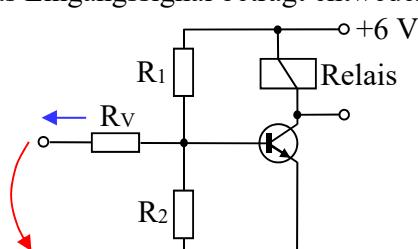


Abb. 12.35: Relaisansteuerung mit einem Transistor

Frage: Wie groß sind  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_V$  zu wählen?

Hinweis: Ungünstige Fälle berücksichtigen. Es werden praktisch zwei Arbeitspunkte (Teilschaltung des Eingangs für Low- und High-Signal) einzeln dimensioniert. Da es mehr Unbekannte ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_V$ ,  $I_E$ ,  $U_{BLow}$ ) als Gleichungen sowie Ungleichungen gibt, muss gewählt werden. Vorschlag:  $R_1 = \infty$  versuchen.

### 12.3.5 Messungen am Transistorverstärker

Ein Transistorverstärker ist mit dem Transistor BC 547 B nach den Schaltungen in Abb. 12.32, Abb. 12.33 und Abb. 12.34 aufzubauen und zu erproben. Das Datenblatt des Transistors BC 547 B steht zur Verfügung.

#### **Versuchsaufbau:**

Eingangsspannung (vom Funktionsgenerator): ca. 10 mV bei 1 kHz,  
 Versorgungsspannung (vom Netzgerät): 12 V,  
 Oszilloskop zum Messen von  $u_E$  und  $u_A$ ,  
 Multimeter für das Einjustieren des Arbeitspunktes,  
 Schaltung siehe Transistorgrundschaltungen Abb. 12.32, Abb. 12.33 und Abb. 12.34

#### **Versuchsdurchführung:**

1. Dimensionierung der Schaltung des Verstärkers, ausgehend vom Arbeitspunkt  $U_{CE} = 5V$  und  $I_C = 2 \text{ mA}$  bei  $B = 180$  (Bestimmung und Wahl von  $R_1, R_2, R_C'$  bei  $R_E = 220 \Omega$ )
  2. Messen der Leerlaufspannungsverstärkung
  3. Messen des Eingangswiderstandes
  4. Messen des Ausgangswiderstandes
  5. Messen der Kurzschlussstromverstärkung
- für Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung

Die Kondensatoren werden zu  $10 \mu\text{F}$  gewählt. Die Kondensatoren parallel zum Emitterwiderstand und insbesondere der Koppelkondensator am Eingang der Basisschaltung müssen wegen der kleinen Widerstände größer gewählt werden, z.B.  $50 \mu\text{F}$ . Der Ein- und der Ausgangswiderstand für das Signal können nur durch Vergleich mit äußeren Widerständen ermittelt werden (entspricht der Methodik beim Grundstromkreis).

#### **Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:**

- Die Dimensionierung des Arbeitspunktes erfolgt entsprechend Aufgabe 12.12. Zur Herstellung der Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung sind nur die Anschlüsse der Kondensatoren zu verändern, der Arbeitspunkt wird beibehalten.
- Die gemessenen Verstärkungs- und Widerstandswerte entsprechen den Erwartungen. Mit dem Standardtransistor und dem allgemein gewählten Arbeitspunkt können natürlich nicht „Bestwerte“ für alle Varianten erreicht werden.
- Für die Messung des Eingangswiderstands können mit einem definierten Vorwiderstand und für den Ausgangswiderstand durch eine definierte Last ein zweiter Messwert ermittelt werden und im Vergleich die Berechnung erfolgen. Dazu müssen beide Widerstände etwa die Größe des zu bestimmenden Widerstandes haben, um eine entsprechende Genauigkeit zu erreichen.

## 12.4 Feldeffekttransistor

### 12.4.1 Trägeranreicherung und -verarmung im Kanal

Der Feldeffekttransistor wurde Ende der 1920er-Jahre als unipolarer Transistor bekannt, konnte aber erst mit entwickelter Siliziumtechnologie produziert werden. Den technologisch am einfachsten zu realisierenden Aufbau hat der *Sperrschiicht-Feldeffekttransistor*. Dabei wird die Isolation durch einen in Sperrrichtung betriebenen PN-Übergang erreicht (diese ist nicht an der Halbleiteroberfläche, Abb. 12.36 a). Dagegen wird der *Feldeffekttransistor mit isoliertem Gate* an der Oberfläche eines Chips durch Fotolithografie realisiert (Abb. 12.36 b).

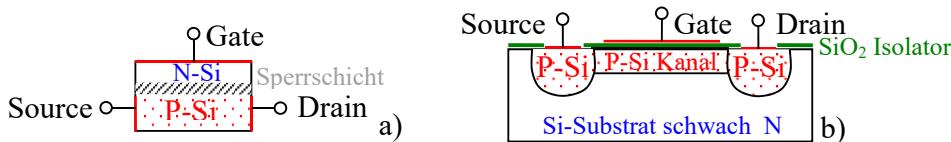


Abb. 12.36: a) Sperrsicht- und b) MOS-Feldeffekttransistor

Der *Kanal* (zur Leitung vorgesehener Bereich, in Abb. 12.36 jeweils ein P-Kanal) befindet sich zwischen der *Source*- und der *Drainelektrode*. Dieser Kanal nutzt nur eine Trägerart, ist unipolar. Es gibt deshalb alle Ausführungen entweder mit P- oder mit N-Kanal.

Die Leitfähigkeit des Kanals wird durch Anreicherung bzw. Verdrängung der jeweiligen Trägersorte mit Hilfe des elektrischen Feldes vom Gate zum Kanal gesteuert.

An die Gateelektrode wird eine Spannung gegenüber dem Source  $U_{GS}$  angelegt. Diese sperrt den PN-Übergang beim Sperrsicht-Feldeffekttransistor (d.h. Isolation) und verdrängt die Träger im Sperrsichtbereich mit zunehmender Spannung (vergleiche Abschnitt 12.2.2 und Abb. 12.11 c, sichtbar an der Sperrsichtverbreiterung, die den Kanal abschnürt). Da allein der Sperrbereich genutzt werden kann, gibt es nur Verarmungstypen.

Beim Feldeffekttransistor mit isoliertem Gate entspricht die Anordnung *Gateelektrode – Isolator – Kanal einem Kondensator*. Das Feld dieses Kondensators verdrängt ebenfalls die Träger, um die notwendige Ladung zu speichern (als Raumladung bleiben die feststehenden Ionen). Mit dieser Anordnung können aber auch Träger angereichert werden, wenn durch ein Feld in umgekehrter Richtung zusätzliche Träger für den „Kondensator“ gespeichert werden.

**Praxistipp:** Aus dieser Überlegung folgen sechs verschiedene Feldeffekttransistoren (FET).

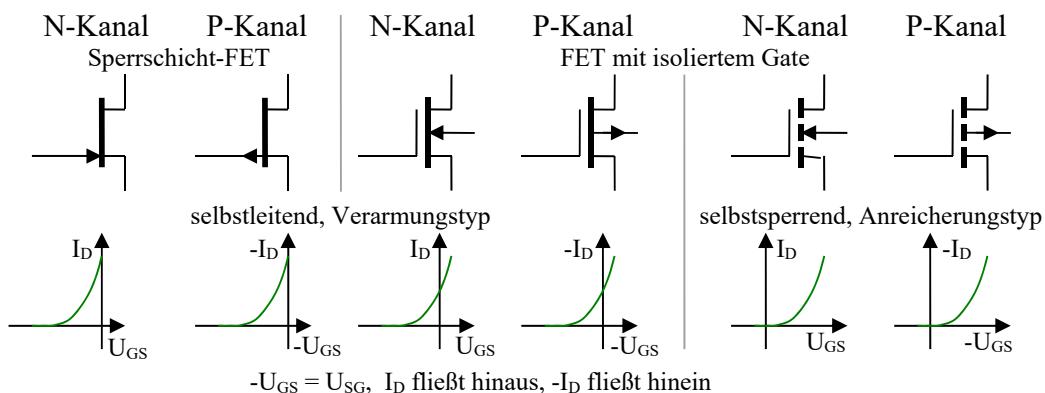


Abb. 12.37: Typen der Feldeffekttransistoren und ihre Steuerkennlinien

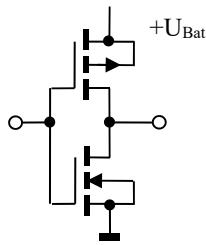
Dank der Isolation zwischen Gate und Kanal fließt nur ein *extrem geringer Gategleichstrom* (beim Sperrsicht-FET der Sperrreststrom < 1 nA). Nur das Laden und Entladen der Gate-Source-Kapazität bei Spannungsänderungen benötigt einen Strom. Deshalb spricht man von einer *leistungslosen Steuerung*.

Wegen der geringen Größe der Gate-Source-Kapazität reichen *kleinste Ladungsmengen, um die Durchbruchsspannung* zu erreichen ( $U_{GS} = Q/C_{GS}$ ), wobei der Transistor insbesondere bei FETs mit isoliertem Gate zerstört würde.

**Praxistipp:** Viele Herstellertypen werden durch eine Z-Diode geschützt. Ungeschützte Exemplare werden mit kurzgeschlossenen Anschlüssen geliefert und müssen sehr vorsichtig gehandhabt werden.

Feldeffekttransistoren mit isoliertem Gate werden auf einem Chip mittels Fotolithografie in einem Durchlauf mit nur einem Diffusionsprozess realisiert und ermöglichen so umfangreiche Strukturen. Da heute wegen des geringen Leistungsbedarfs fast ausschließlich CMOS

(komplementäre MOS) mit je einem selbstsperrenden N- und P-Kanal-Transistor in Reihenschaltung ausgeführt werden, sind zwei Durchläufe notwendig.



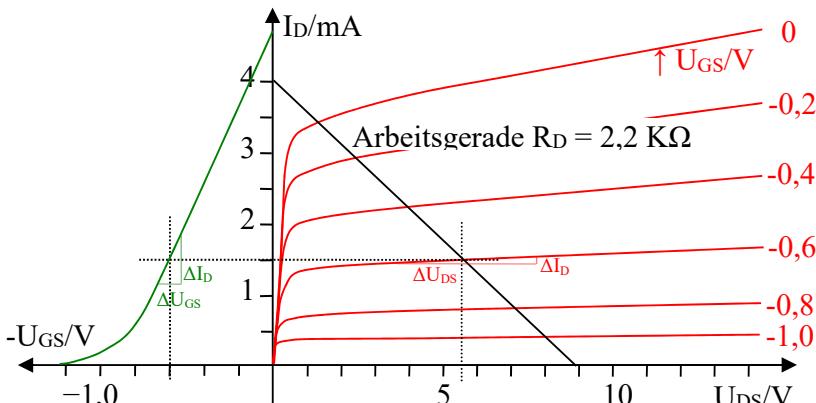
**Abb. 12.38: Schaltung eines CMOS-Inverters** (vergleiche (Tie10 S. 626 ff))

Liegt am Eingang von Abb. 12.38  $+U_{\text{Bat}}$ , leitet der untere (N-Kanal) Transistor und am Ausgang wird  $U = 0$ . Liegt dagegen  $U = 0$  am Eingang, leitet der obere (P-Kanal) Transistor und am Ausgang folgt  $U_{\text{Bat}}$ . Der andere Transistor ist jeweils gesperrt. Es kann also nie ein Strom quer von  $U_{\text{Bat}}$  nach 0 (Masse) fließen. Das Substrat ist auf Masse (bzw.  $+U_{\text{Bat}}$ ) zu legen, damit der PN-Übergang zwischen P- (bzw. N-) Substrat und N- (bzw. P-) Kanal gesperrt ist.

**Praxistipp:** Im Umschaltmoment leiten allerdings beide (wenn auch unterschiedlich gut) und mit zunehmender Taktfrequenz wird dann mehr Leistung benötigt.

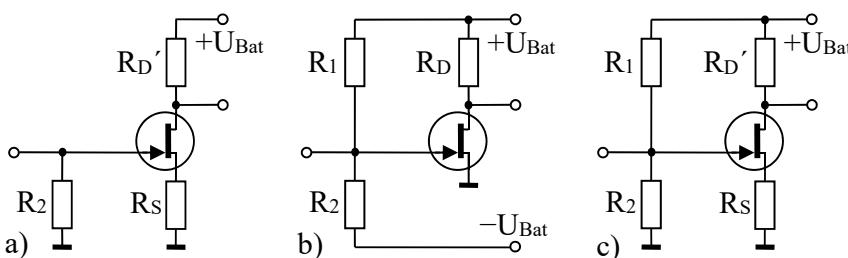
## 12.4.2 Kennlinien, Ersatz- und Grundschatungen des FET

Das Ausgangskennlinienfeld der Feldeffekttransistoren sieht ähnlich aus wie das des Bipolartransistors. Die Steuerkennlinie ist mit der Elektronenröhre vergleichbar.



**Abb. 12.39: Kennlinie eines N-Kanal-Sperrsicht-Feldeffekttransistors**

Die Kennlinie wird auch beim Feldeffekttransistor zur Dimensionierung des Arbeitspunktes benötigt. Dazu sind  $U_{\text{DS}}$  und  $I_D$  sowie das zugehörige  $U_{\text{GS}}$  entsprechend der gewählten Arbeitsgeraden abzulesen (bzw. Standardarbeitspunkte des Herstellers zu nutzen).



**Abb. 12.40: Schaltungen zur Einstellung des Arbeitspunktes eines FET**

Durch den Drainwiderstand ( $R_D$  in Abb. 12.40 b) wird der Arbeitspunkt festgelegt.

$$R_D = \frac{U_{\text{Bat}} - U_{\text{DS}}}{I_D} \quad (12.11)$$

$R_1$  und  $R_2$  können sehr hochohmig ausfallen. Es muss aber die notwendige negative Gatevorspannung entweder durch eine zusätzliche Spannungsquelle ( $-U_{\text{Bat}}$  in Abb. 12.40 b) oder durch eine Verschiebung der Sourcespannung (in Abb. 12.40 a bzw. c durch  $R_S$ ) beachtet werden. Dafür ist dann  $R_D$  wieder in  $R_D'$  und  $R_S$  aufzuteilen.  $R_S$  ergibt sich in Abb. 12.40 a zu

$$R_S = \frac{U_{\text{GS}}}{I_D} \quad \text{und} \quad R'_D = R_D - R_S \quad (12.12)$$

**Praxistipp:** Da normalerweise kein Eingangsstrom fließt, kann das Gate mit  $R_2$  hochohmig auf Masse (Abb. 12.40 a) gelegt werden (ca. 1 ... 10 MΩ).

Außer der Sourceschaltung gibt es auch beim FET eine Drain- und eine Gateschaltung (Weiterführendes dazu siehe (Lin93 S. 402 ff) und (Tie10 S. 238)).

Wie beim Bipolartransistor hat sich auch bei den Feldeffekttransistoren eine ähnliche Kleinsignalersatzschaltung für Kleinsignalanwendungen durchgesetzt.

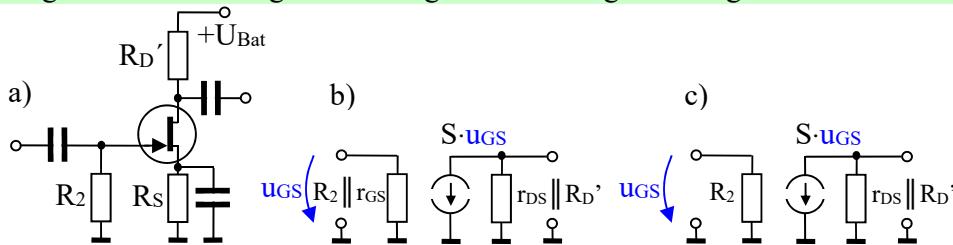


Abb. 12.41: Kleinsignalersatzschaltung des FET in Sourceschaltung

Die Steilheit  $S = \Delta I_D / \Delta U_{\text{GS}} = y_{21}$  und  $r_{\text{DS}} = \Delta U_{\text{DS}} / \Delta I_D = 1/y_{22}$  entsprechen den Kennlinien in Abb. 12.39. Es wird die Leitwertform verwendet (Abb. 12.28). Da  $r_{\text{GS}} = 1/y_{11}$  sehr groß ist (Isolationswiderstand zwischen Gate und Kanal), wird er üblicherweise ganz vernachlässigt (Abb. 12.41 c). Auch die Rückwirkungen  $y_{12}$  werden praktisch immer vernachlässigt. Deshalb findet man nur 2 Quadranten für das Kennlinienfeld. Vergleiche dazu auch Abschnitt 12.2.3.

**Praxistipp:** Für eine Ersatzschaltung, die auch das dynamische Verhalten richtig beschreiben soll, müssen zuerst die Gate-Source-Kapazität und weiter z.B. die Gehäusekapazität berücksichtigt werden.

Die Schaltungen der anderen Feldeffekttransistortypen funktionieren entsprechend (Weiterführendes dazu siehe (Lin93 S. 402 ff) und (Tie10 S. 177-278)).

### 12.4.3 Kennwerte und Beispiele zum Feldeffekttransistor

Wichtige Kennwerte von Feldeffekttransistoren sind:

#### 1. Grenzdaten

- Maximaler Drainstrom
- Maximale Drainkurzschlussstrom
- Maximale Gate-Source-Spannung
- Maximale Drain-Source-Spannung
- Maximale Sperrschichttemperatur
- Maximale Gesamtverlustleistung
- $I_{\text{DM}}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitdauer)
- $I_{\text{DSS}}$  (bei angegebenem  $U_{\text{DS}}$  und  $U_{\text{GS}}$ )
- $U_{\text{GSM}}$  (bei Stoß mit Angabe der Zeitdauer)
- $U_{\text{CE0}}$
- $\vartheta_J$
- $P_{\text{tot}}$

2. Kenndaten
  - Vorwärtssteilheit  $-S = y_{21}$  (bei Nennarbeitspunkt)
3. Schaltzeichen  
Die Schaltzeichen stehen in Abb. 12.37 für integrierte Feldeffekttransistoren. Einzelne Feldeffekttransistoren werden dagegen mit einem Kreis umrandet.

### Aufgabe 12.16

Ein selbstleitender N-Kanal MOS-FET wird in Sourceschaltung entsprechend Abb. 12.41 a mit  $U_{\text{BAT}} = 9 \text{ V}$  aufgebaut. Aus den Angaben des Herstellers folgen  $I_D = 1,5 \text{ mA}$ ,  $U_{\text{DS}} = 5.5 \text{ V}$  bei einer Gatevorspannung  $U_{\text{GS}} = -0,6 \text{ V}$ . In diesem Arbeitspunkt wird  $S = 6 \text{ mS}$  angegeben (vergleiche Abb. 12.39).

Frage 1: Wie sind  $R_D'$  und  $R_S$  zu dimensionieren?

Frage 2: Wie groß wird die Leerlaufspannungsverstärkung  $V_u \text{ Leer}^2$ ?

Hinweis: Nutze Abb. 12.41 c! Es gilt  $R_D \ll r_{\text{DS}}^{160}$ , somit kann  $r_{\text{DS}}$  vernachlässigt werden.

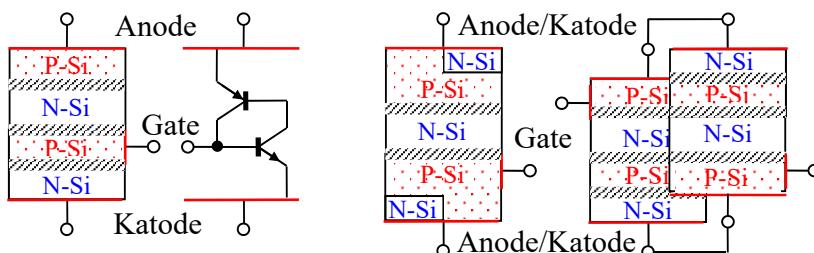
( $R_2$  spielt keine Rolle und ist außerdem sehr groß gegenüber dem Ausgangswiderstand der Eingangsspannungsquelle, er kann z.B. zu  $1 \text{ M}\Omega$  gewählt werden).

Zusatzfrage 1: Wie würde die Schaltung mit einem selbstleitenden P-Kanal MOS-FET aussehen (bei sonst vergleichbare Parameter)?

Zusatzfrage 2: Wie würde die Schaltung mit einem selbstsperrenden N-Kanal MOS-FET aussehen (bei sonst vergleichbare Parameter)?

## 12.5 Weitere wichtige Halbleiterbauelemente

Die Palette der Bauelemente und -varianten ist sehr groß. Dazu kommt eine Vielzahl komplexer integrierter Schaltungen. An dieser Stelle sollen die Vierschichtbauelemente (Vierschichtdiode, Thyristor, Diac und Triac) sowie der IGBT<sup>161</sup> genannt werden.



Thyristor und Prinzipschaltung    Triac und Triac aus 2 ↑↓ Thyristoren

3 Sperrsichten

**Abb. 12.42: Schichtenfolge von Thyristor und Triac**

Wird an den Thyristor in Abb. 12.42 eine Spannung (mit „+“ an die Anode und „-“ an die Katode) gelegt, befinden sich die beiden äußeren Sperrsichten in Durchlassrichtung und die mittlere in Sperrrichtung. Durch eine positive Spannung am Gate (d.h. Durchlassrichtung für Katode → Gate) beginnt wie beim Transistor die Trägerinjektion und die mittlere Sperrschiicht wird leitend. Wird die Spannung vom Gate wieder entfernt, tritt ein Selbsthalteeffekt ein, der an den beiden sich gegenseitig steuernden Transistoren der Prinzipschaltung sichtbar ist.

<sup>160</sup> Der Anstieg der Kennlinie ist sehr viel geringer als bei der Arbeitsgeraden.

<sup>161</sup> Insulated-gate bipolar transistor

**Praxistipp:** Für den Prozess der „Zündung“ reicht immer ein kurzer Spannungsimpuls.

Bei einer Spannung (mit „–“ an der Anode und „+“ an der Katode) sind die beiden äußeren Sperrsichten gesperrt und ein Leiten ist nicht möglich.

Weil die Zündung bei einer entsprechenden Durchbruchsspannung auch ohne Impuls erfolgt, kann ein „Thyristor ohne Gate“ als Vierschichtdiode mit definierter Schaltspannung hergestellt werden.

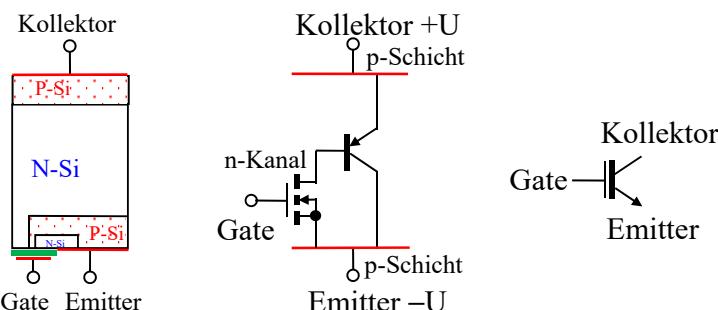
**Praxistipp:** Der Triac in Abb. 12.42 besteht aus zwei antiparallelen Thyristoren und schaltet somit in beiden Richtungen. Der Diac ist das Analogon zur Vierschichtdiode.

Da diese Bauelemente für die hohen Ströme der Leistungselektronik mit großen Querschnittsflächen hergestellt werden, erfolgt das Zünden nicht über die ganze Fläche einheitlich, sondern beginnt an einer Stelle und breitet sich von dort schnell lawinenartig über die ganze Fläche aus.

**Praxistipp:** Erfolgt der Stromanstieg schneller als das Ausbreiten, wird diese Stelle überlastet und der Thyristor zerstört. Deshalb ist der *maximal zulässige Stromanstieg* zu beachten. Der Thyristor wird erst wieder sperrend, wenn alle injizierten Träger abgeflossen sind. Daraus ergibt sich die *Freiwerdezeit*, die der Thyristor mindestens stromlos sein muss, um wieder sperren zu können.

In diesem Verhalten liegt die Problematik für die Herstellung „abschaltbarer“ leistungselektronischer Bauelemente. Heute werden deshalb je nach erforderlicher Spannung und Leistung vielfach Bipolartransistoren, Leistungs-MOS-FET sowie deren Kombination im IGBT verwendet.

Der n-Kanal IGBT besteht im Wesentlichen aus der Struktur eines pnp-Bipolartransistors (im Ersatzschaltbild ist aber der Emitter am Kollektoranschluss des IGBT). Wenn durch eine positive Spannung am Gate ein leitender n-Kanal entsteht (zwischen beiden N-Si), ist der obere PN-Übergang in Durchlassrichtung (Basis-Emitter-Diode in der Ersatzschaltung). Von dort erfolgt dann eine Injektion von Löchern in die gesamte schwach dotierte n-Schicht.



**Abb. 12.43: IGBT – schematischer Aufbau, vereinfachte Ersatzschaltung und Symbol**

In Abb. 12.43 ist ein n-Kanal-Typ (selbstsperrend) dargestellt (ohne technologische Einzelheiten). Die Anschlüsse Gate und Emitter dienen der Steuerung und vom Kollektor zum Emitter fließt der Laststrom.

Prinzipiell können auch die anderen vier MOS-FET eingesetzt werden (bei p-Kanal-Typen ist dann ein npn-Bipolartransistor erforderlich).

**Praxistipp:** IGBT sind zunehmend für höhere Spannungen und Leistungen verfügbar.

Die Anwendung dieser Bauelemente erfolgt in Abschnitt 20.

# 13 Analoge Schaltungstechnik

Hilfreich für das Verständnis sind die Abschnitte 4 bis 6 sowie 9, 11 und 12.

Es werden

- der Aufbau, die Arbeitsweise und die Eigenschaften von Operationsverstärkern,
- die Parameter von Operationsverstärkern,
- das Prinzip der Gegenkopplung,
- die Spannungs- und die Stromgegenkopplung bei Operationsverstärkern,
- die Schaltungsberechnung und Konfiguration,
- einige wichtige Anwendungen zum Kennenlernen des Betriebsverhaltens sowie
- Messungen an Operationsverstärkern

vorgestellt.

## 13.1 Einteilung von Verstärkerschaltungen

### 13.1.1 Arbeitspunkt, Eigenschaften und Betriebsverhalten

Ein Verstärker (mit Röhren, heute mit Halbleiterbauelementen) hat immer eine nichtlineare Kennlinie. Daher haben sich mit der Zeit mehrere Betriebsweisen herauskristallisiert.

Zuerst beherrschte der *A-Betrieb* – ein **Kleinsignalverstärker**. Das Prinzip verdeutlicht Abb. 13.1.

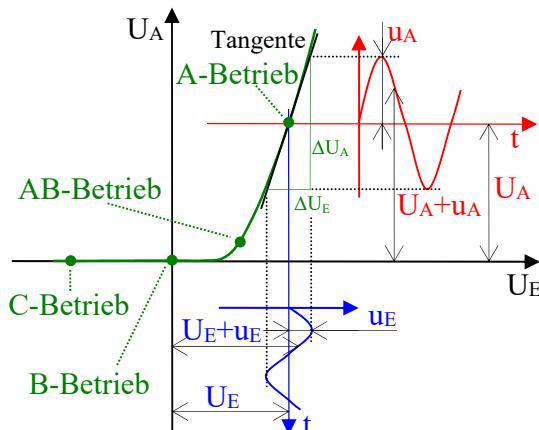


Abb. 13.1: Betriebsweisen und ihre Arbeitspunkte

Die Eingangsspannung  $u_E$  wird auf den Arbeitspunkt (A-Betrieb,  $U_E$  und  $U_A$ ) aufaddiert und entsprechend der Steigung der Kennlinie in diesem Punkt verändert sich die Ausgangsspannung um  $u_A$ . Ist die Steigung hoch, wird eine hohe Verstärkung  $v = u_A/u_E$  erreicht.

Die Signalspannungen  $u_E$  und  $u_A$  sind dabei grundsätzlich durch Schaltungsmaßnahmen am Ein- und Ausgang vom Arbeitspunkt zu trennen (z.B. durch geeignete Kondensatoren), aber am Verstärkerelement zu addieren.

Es können nur Aussteuerungen um den Arbeitspunkt zugelassen werden, die in einem hinreichend linearen Bereich um den Arbeitspunkt liegen.

**Praxistipp:** Die maximale Aussteuerung wird aus den maximal zulässigen Signalverzerrungen (Klirrfaktor im Audiobereich, siehe Abschnitt 16.1.1.) bestimmt.

Der große Nachteil beim A-Betrieb ist der Ruhestrom schon ohne Signal durch den Arbeitspunkt (damit Leistungsverbrauch).

Das wäre im **B-Betrieb** nicht der Fall (Abb. 13.1). Es würden aber insbesondere bei Transistoren<sup>162</sup> nur die Signalspitzen, bei denen die positive Halbwelle von  $U_E$  über den Kennlinienknick reicht, am Ausgang erscheinen. Deshalb wurde für die Transistortechnik der AB-Betrieb entwickelt, für den der Arbeitspunkt durch die Vorspannung des Arbeitspunktes  $U_E$  in den Knick verlegt wurde. Der geringe Ruhestrom muss dabei hingenommen werden.

**Praxistipp:** Diese Betriebsart hat sich heute bei Transistororschaltungen und -schaltkreisen als Gegentaktendverstärker durchgesetzt (Abb. 13.2).

Dabei muss jede Halbwelle durch eine eigene Stufe verstärkt werden. Die Kennlinien beider Stufen sind komplementär zu justieren (1. und 3. Quadrant). Dazu wird in der Regel ein Paar komplementäre Transistoren (NPN- und PNP-Transistoren mit ausgesuchten spiegelgleichen Kennlinien) genutzt und durch passende Dioden die Arbeitspunktverschiebung realisiert. Die Ausgangssignale beider Transistoren werden addiert, sodass eine Summenkennlinie erscheint. Diese kann relativ genau einer Geraden entsprechen, wodurch praktisch ein Großsignalverstärker entsteht (Abb. 13.2)<sup>163</sup>.

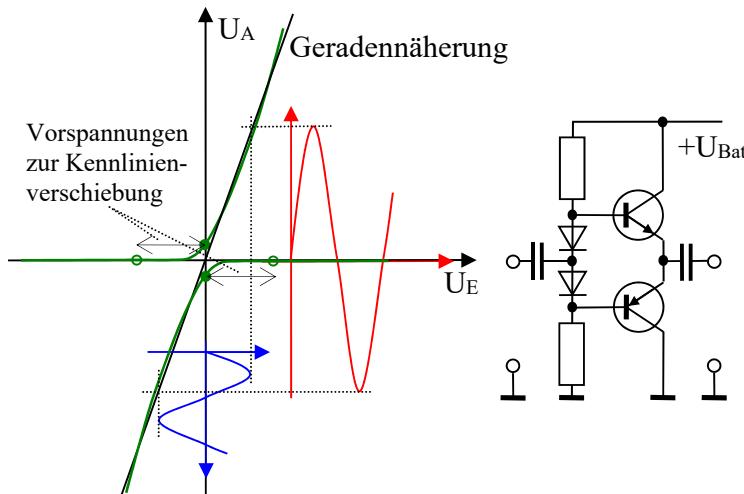


Abb. 13.2: AB-Gegentaktbetrieb

Für Impulsverstärker (Auffrischung von Impulsen ohne kleine Störungen) wird der **C-Betrieb** genutzt (Abb. 13.1).

Eine weitere Betriebsart ist der Zerhackerverstärker (Choperverstärker) **D-Betrieb**, bei dem das Eingangssignal mit einem Gleichanteil zerhackt, dieses reine Wechselstrom danach verstärkt (z.B. bei A-Betrieb) und anschließend wieder gleichgerichtet wird. Dieser Betrieb war notwendig, da mit A-, AB- oder B-Verstärkern keine Gleichsignale verarbeitet werden konnten. Das Grundprinzip beim D-Betrieb ähnelt stark einer Pulsamplituden- oder auch einer Pulsbreitenmodulation (siehe Abschnitt 15.1.1.).

**Praxistipp:** Heute steht dafür der Operationsverstärker zur Verfügung (siehe 13.2).

<sup>162</sup> Bei Röhren war es etwas günstiger.

<sup>163</sup> Die Schaltungen sind heute wesentlich ausgefeilter als das einfache Beispiel und außerdem als integrierte Bausteine verfügbar.

### 13.1.2 Anforderungen der Anwendung

Verstärker werden für verschiedene Anwendungen benötigt und gebaut. Es hat sich gezeigt, dass es nicht sinnvoll ist, einen Verstärker zu entwickeln, der alles kann. Unterschiedliche Anforderungen ergeben sich z.B. aus:

- dem Signalpegel (z.B. Spannungsbereich, Klein-, Großsignal)
- dem notwendigen Eingangswiderstand,
- der Signalfrequenz und der Signalbandbreite,
- dem geforderten Ausgangswiderstand,
- der geforderten Verstärkung und Ausgangsleistung.

Danach haben sich z.B. folgende Grundtypen herausgestellt:

- Audioverstärker (NF-Verstärker angepasst an Audiosignale),
- Videoverstärker (Breitbandverstärker angepasst an Videosignale),
- HF-Verstärker (für unterschiedliche Einsatzfälle bei hohen Frequenzen),
- ZF-Verstärker (selektive HF-Verstärker für verschiedene Zwischenfrequenzen),
- Gleichspannungsverstärker (für Signale von 0 Hz bis ...) usw.

**Praxistipp:** Als universell und am besten einsetzbar hat sich dabei der Operationsverstärker in der Form des integrierten Bausteins (IC) erwiesen.

## 13.2 Operationsverstärkertechnik

### 13.2.1 Differenzverstärker, Operationsverstärker und seine Parameter

Der Ausgangspunkt für die Entwicklung des Operationsverstärkers war die Forderung der Regelungstechnik, Gleichsignale zu verstärken. Das ermöglichte der Differenzverstärker.

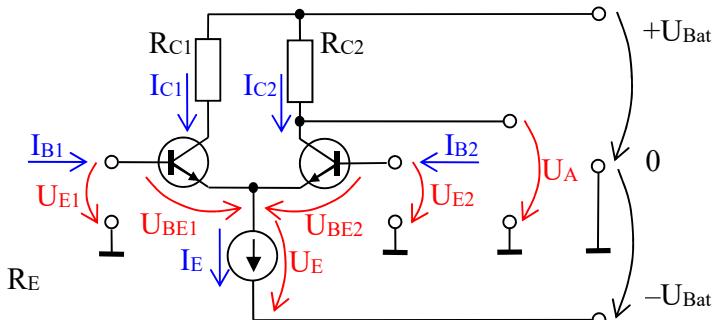


Abb. 13.3: Differenzverstärker (Prinzipschaltung)

Nach dem Knotenpunktsatz und den Maschensätzen werden:

$$I_E = I_B1 + I_C1 + I_B2 + I_C2$$

$$U_{BE1} = U_{E1} + U_{Bat} - U_E$$

$$U_{BE2} = U_{E2} + U_{Bat} - U_E.$$

( 13.1 )

Früher benutzten beide Transistoren einen gemeinsamen Emitterwiderstand, heute normalerweise eine Stromquelle<sup>164</sup>. An einer Konstantstromquelle wird ihr Spannungsabfall

<sup>164</sup> Das kann durch eine Transistorschaltung realisiert werden.

so geregelt, dass der Strom immer konstant bleibt<sup>165</sup>. Auf diese Weise stellt sich immer ein **Gleichgewicht** zwischen  $I_{B1} + I_{C1}$  und  $I_{B2} + I_{C2}$  so ein, dass  $I_E$  unverändert bleibt. Für den Differenzverstärker (Abb. 13.3) sind gleiche Transistoren mit den gleichen Arbeitspunkten notwendig.

Für jedes  $U_{E1} = U_{E2}$  stellen sich die Ströme auf  $I_{B1} + I_{C1} = I_{B2} + I_{C2} = I_E/2 = \text{const}$  ein. Beide Steuerspannungen  $U_{BE1} = U_{BE2}$  erhalten dabei nach (13.1) den Wert für den dazu erforderlichen Basisstrom. Eine gleichzeitige Vergrößerung/-kleinerung von  $U_{E1}$  und  $U_{E2}$  könnte zwar zu einer Vergrößerung/-kleinerung der Ströme führen, die dadurch sofort auch steigende/fallende Spannung  $U_E$ <sup>166</sup> lässt aber beide  $U_{BE1}$  und  $U_{BE2}$  unverändert.

Wird nur  $U_{E1}$  vergrößert, ergibt sich in gleichem Maße eine Erhöhung von  $I_{B1} + I_{C1}$  wie eine Verkleinerung von  $I_{B2} + I_{C2}$ , sodass  $I_E$  konstant bleibt.  $I_{C1}$  steigt somit und  $I_{C2}$  wird verringert. Über  $I_{C2} \cdot R_{C2}$  wird bei Vergrößerung von  $U_{E1}$  demnach  $U_A$  **größer**. Wird dagegen  $U_{E2}$  vergrößert, steigt  $I_{C2}$  und  $I_{C1}$  verkleinert sich. D.h., bei Vergrößerung von  $U_{E2}$  wird  $U_A$  **kleiner**.

Das stärkere Ansteuern eines Transistors sperrt also immer in gleichem Maße den anderen. Der Strom  $I_E$  teilt sich auf beide Transistoren entsprechend  $U_{E1}$  und  $U_{E2}$  auf. Dieses Prinzip ermöglicht auch **Gleichsignale** am Eingang und funktioniert mit geringem Abstand (ca. 0,7 bis 1,2 V) bis zu Ausgangsspannungen zwischen  $-U_{\text{Bat}}$  bis  $+U_{\text{Bat}}$ .

**Praxistipp:** Wir haben also einen Eingang, der **gleichsinnig** und einen der **gegensinnig** die Ausgangsspannung beeinflusst.

Aus dem Differenzverstärker entwickelte sich der **Operationsverstärker**, der für die Regelungstechnik und insbesondere in Analogrechnern schon mit Röhren gebaut wurde. Erst billige integrierte Schaltkreise ermöglichen eine enorme und weite Verbreitung.

Für den *Operationsverstärker* wurde der Differenzverstärker mit weiteren Verstärkerstufen und einem Gegenaktendverstärker komplettiert. Einige Typen benötigen außen noch vom Hersteller festgelegte Elemente zur Frequenzkompensation oder für einen Nullabgleich.

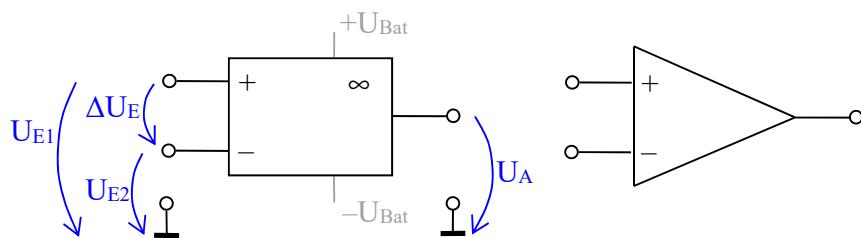


Abb. 13.4: Operationsverstärker (Schaltbilder)

Durch seine fast idealen Eigenschaften wird der Operationsverstärker (OV) als Bauelement betrachtet, ohne seine innere Struktur näher zu beachten. Die Schaltbilder zeigen Abb. 13.4. Der Operationsverstärker selbst benötigt in der Regel keinen Masseanschluss, die Batterie muss aber üblicherweise in der Mitte auf Masse liegen, so entsteht ein definiertes Bezugspotential.

Einen Vergleich der Parameter eines idealen Operationsverstärkers mit einigen Standardtypen zeigt Tabelle 13.1. Weiterführendes siehe (Tie10 S. 509-612).

<sup>165</sup> Praktisch bleibt eine sehr geringe Stromänderung als Regelabweichung.

<sup>166</sup> Da  $U_{\text{Bat}}$  feststeht, wird  $U_E$  einfach um die Änderung von  $U_{E1} = U_{E2}$  größer/kleiner.

	idealer OV z.B. μA 741	Standardtyp z.B. CA 3140	MOS Eingänge z.B. CA 3140	Präzisionstyp z.B. μA 714
$v_0$	$\infty$	200 000	100 000	500 000
Eingangswiderstand	$\infty$	$2 \text{ M}\Omega$	$1,5 \text{ T}\Omega$	$50 \text{ M}\Omega$
Ausgangswiderstand	0	$75 \Omega$	$60 \Omega$	$60 \Omega$
max. Ausgangstrom	unbegrenzt	20 mA	22 mA	20 mA
Eingangsspannungsdi- fenz (Offsetspannung)	0	1 mV	8 mV	30 μV
Eingangsruhestrom	0	80 nA	5 pA	1,2 nA
Eingangsruhestromdif- fenz (Offsetstrom)	0	20 nA	0,5 pA	0,5 nA
Offsetspannungsdrift	0	$6 \mu\text{V}/\text{K}$	$10 \mu\text{V}/\text{K}$	$0,3 \mu\text{V}/\text{K}$
Gleichtaktunterdrückung	$\infty$	90 dB	90 dB	123 dB
Transitfrequenz	unbegrenzt	1 MHz	4,5 MHz	0,6 MHz

Tabelle 13.1: Vergleich der Parameter von Operationsverstärkern

**Zu den Parametern:**

- Wenn die *Eigenverstärkung*  $v_0 \approx \infty$  ist, muss die Differenzspannung  $U_{E1} - U_{E2} \approx 0$  sein, sonst würde die hohe Verstärkung zu  $U_A \rightarrow \infty$  führen. Mit  $U_E = 75 \mu\text{V}$  und  $v_0 = 200000$  wäre bei  $U_{\text{Bat}} = 15 \text{ V}$  die Aussteuergrenze längst erreicht; das ist noch weniger als 1/10 der Offsetspannung einer immer vorhandenen Störspannung.

**Praxistipp:** D.h. auch, dass die *Eigenverstärkung*  $v_0$  nicht direkt genutzt werden kann.

- Der *Eingangsruhestrom* wird nach Abb. 13.5 ermittelt:  $I_i = (I_+ + I_-)/2$ .

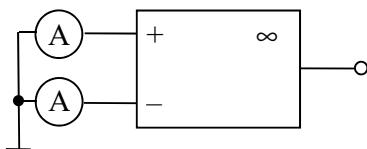


Abb. 13.5: Messung des Eingangsruhestromes

Diesen Ruhegleichstrom benötigt der Baustein zur Funktion (Basisströme für den Arbeitspunkt); er muss durch die äußere Beschaltung möglich sein.

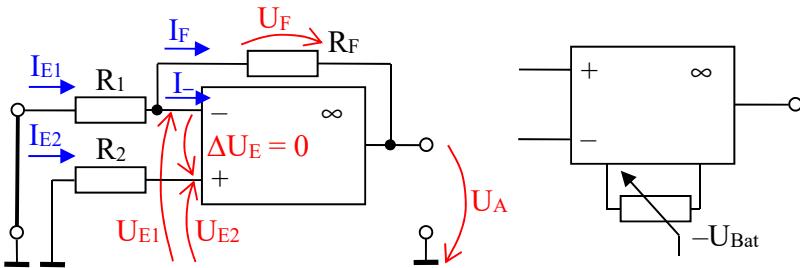


Abb. 13.6: Typische Operationsverstärkerschaltung und Nullabgleich

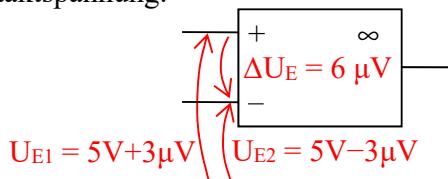
Betrachten in Abb. 13.6 die Ruheströme  $I_-$  und auch  $I_+$  ( $= I_{E2}$ ) je 100 nA bei  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ , werden  $U_{E1} = U_{E2} = 1 \text{ mV}$  (wegen  $\Delta U_E = 0$ ). Dann wird der Strom  $I_{E1}$  nach dem Ohm'schen Gesetz 100 nA und  $I_F$  nach dem Knotensatz genau null. Damit kann nach dem Maschensatz ( $U_{E1} + U_F + U_A = 0$ ) für  $U_A$  nur  $-1 \text{ mV}$  entstehen. Diese Abweichung erfolgt nicht, wenn  $R_1 \parallel R_F = R_2$  dimensioniert wird. (Dann wird  $I_{E1} \cdot R_1 = 1 \text{ mV}$  und  $I_F \cdot R_F = 1 \text{ mV}$  somit  $U_A = 0$ .) Nicht zu große Unsymmetrien sowie Abweichungen von den gleichen Ruheströmen (*Offsetstrom*  $I_{i0} = I_+ - I_-$ ) können auch durch einen Nullabgleich

ausgeglichen werden. Auf keinen Fall darf (z.B. durch einen Kondensator) ein Ruhestrom verhindert werden.

Bei niederohmiger Beschaltung ( $R_1, R_2$ ) ist der Offsetstrom  $I_{i0}$  unbedeutend (es bleibt  $I_{i0} \cdot R \ll U_{i0}$  der **Offsetspannung**), bei hochohmiger Auslegung kann die Wirkung des Offsetstromes bedeutend werden.

**Praxistipp:** Als Richtwert kann  $R_{1/2}$  kleiner bis etwa  $U_{i0}/I_{i0}$  dienen ( $1 \text{ mV}/20 \text{ nA} = 50 \text{ k}\Omega$  vergleiche mit Tabelle 13.1).

3. Die **Offsetspannungsdrift** erzeugt eine Ausgangsspannungsänderung ohne Eingangsspannungsänderung in Abhängigkeit von der Erwärmung der OV-Chips. Sie wird als äquivalente Eingangsspannung pro Temperaturänderung angegeben.
4. Bei der **Gleichtaktunterdrückung** geht es um die Verminderung der Verstärkung der Gleichtaktspannung.



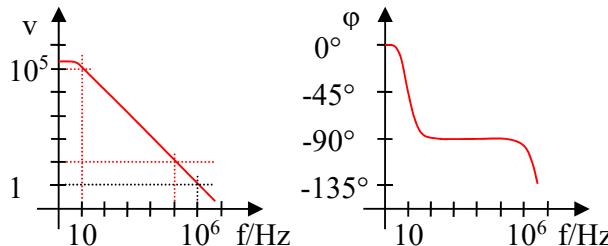
**Abb. 13.7: Gleichtaktspannung und Differenzspannung**

In Abb. 13.7 beträgt die Differenzspannung  $6 \mu\text{V}$  und die Gleichtaktspannung  $(U_{E1} + U_{E2})/2 = 5 \text{ V}$ . Leider wird die Gleichtaktspannung ebenfalls geringfügig verstärkt ( $v_- = U_A = U_{E-}$ ). Da die Gleichtaktspannung in der Regel relativ groß ist, können Störungen die Folge sein. Die **Gleichtaktunterdrückung**  $k_{CMR} = v_u - v_-$  (jeweils in dB gemessen, vergleiche Abschnitt 10.9) ist das Maß für diesen Aspekt. Je größer die Unterdrückung, desto besser ist der Baustein<sup>167</sup> (bzw. die Gesamtschaltung).

5. Der **Frequenzgang** zeigt, dass kein Verstärker unendlich hohe Frequenzen verarbeiten kann. Im Normalfall gilt für eine bestimmte Technik und ihren jeweiligen Entwicklungsstand die Regel, dass das *Produkt aus Verstärkung und Bandbreite konstant* ist. D.h., je höher die Verstärkung gewählt wird, desto geringer muss die Bandbreite sein (beim Operationsverstärker 0 Hz bis obere Grenzfrequenz). Für einen Operationsverstärker wäre nach Tabelle 13.1 die obere Grenzfrequenz bei  $v = 10^5$  gerade  $10 \text{ Hz} (\rightarrow 10^5 \cdot 10)$ .

**Praxistipp:** Wird  $v$  durch Schaltungsmaßnahmen verringert, steigt die Grenzfrequenz in gleichem Maße.

Bei  $v = 10$  wird die Grenzfrequenz  $100 \text{ kHz} (\rightarrow 10 \cdot 10^5)$ . Die Grenzfrequenz, bei der gerade die Verstärkung 1 erreicht wird, heißt **Transitfrequenz** ( $\rightarrow 1 \cdot 10^6$ ).



**Abb. 13.8: Frequenz und Phasengang der Verstärkung eines typischen OV**

<sup>167</sup> Z.B. ergibt  $v_u = 10^5 = 100 \text{ dB}$  und die dagegen geringe  $v_- = 3,16 = 10 \text{ dB}$  ein  $k_{CMR} = 90 \text{ dB}$ . Dabei würden (ohne Offsetspannung)  $u_A = v_u \cdot 100 \mu\text{V} = 10 \text{ V}$  und  $U_{A-} = v_- \cdot 5 \text{ V} = 15,8 \text{ V}$ .

Ein Problem kann auch die mit dem Frequenzgang verbundene Phasenverschiebung der Ausgangs- gegenüber der Eingangsspannung werden (*Phasengang*), wenn eine Rückführung vom Aus- zum Eingang vorgesehen ist. Eine „Mitkopplung“ würde zu Schwingungen der Schaltung führen.

Eine Kleinsignalbetrachtung ist für den Operationsverstärker nicht explizit erforderlich. Solange die Aussteuerung im linearen Bereich der Kennlinie (ca. von  $-U_{\text{Bat}} + 0,7 \text{ V}$  bis zu  $+U_{\text{Bat}} - 0,7 \text{ V}$ ) bleibt, ist eine lineare Betrachtungsweise ohne Weiteres gegeben.

### 13.2.2 Prinzip der Gegenkopplung

Mit- und **Gegenkopplung** wurden nach physikalischen Wirkungsweisen schon früh genutzt, aber erst eine Regelungstechnische Betrachtung brachte eine umfassende Erklärung.

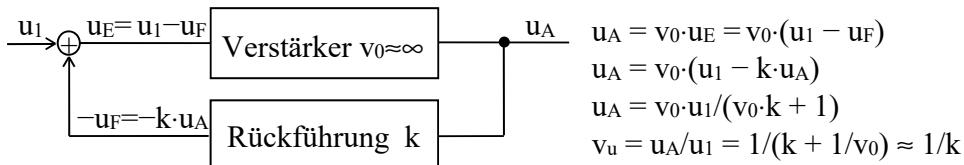


Abb. 13.9: Darstellung der Gegenkopplung als Regelkreis

Bei einer Verstärkung von  $v_0 \approx \infty$  hängt die Gesamtverstärkung  $v_u$  praktisch nur von der gegengekoppelten Rückführung mit  $0 < k < 1$  ab (Minuszeichen bei der Summation). Eine Mitkopplung hätte ein Pluszeichen bei der Summenbildung, wodurch der Nenner mit steigendem  $k$  zu null werden kann (Instabilität oder Eigenschwingungen).

**Praxistipp:** Für unseren Operationsverstärker sind zwei Schaltungsvarianten für eine Rückführung möglich – **Spannungs- und Stromgegenkopplung**.

In der Schaltung nach Abb. 13.10 wird ein Teil der *Ausgangsspannung* an den *negierenden Eingang* zurückgeführt – **Spannungsgegenkopplung**.

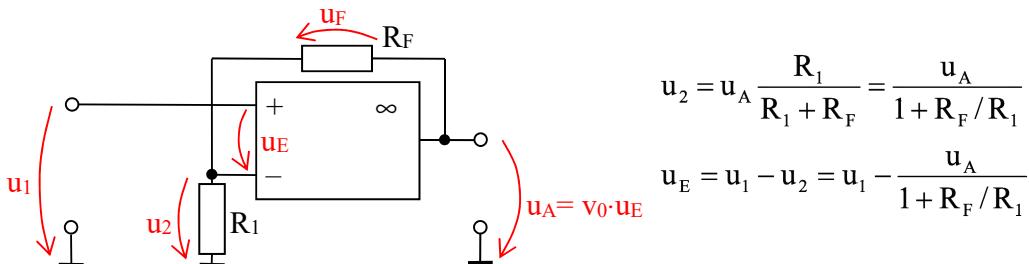


Abb. 13.10: Spannungsgegenkopplung – nichtinvertierender Verstärker

Dabei wird die Gesamtverstärkung

$$\begin{aligned} v_u &= \frac{u_A}{u_1} = \frac{u_A}{u_E + u_A / (1 + R_F/R_1)} = \frac{u_A}{u_A/v_0 + u_A / (1 + R_F/R_1)} \\ v_u &\approx 1 + \frac{R_F}{R_1} \quad \text{für} \quad v_0 \rightarrow \infty . \end{aligned} \tag{13.2}$$

Die Leerlaufspannungsverstärkung  $v_u$  der gesamten Schaltung ist durch das *Verhältnis der Widerstände  $R_F$  und  $R_1$*  sehr genau einzustellen. (Das gilt, solange  $v_0 \gg 1 + R_F/R_1$  ist.)

**Praxistipp:** Dabei ergibt der Fall  $R_F = 0$  als Sonderfall  $v_u = 1$  ( $R_1$  kann dabei auch  $\infty$  sein).

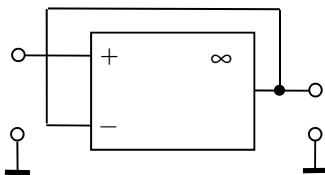


Abb. 13.11: Nichtinvertierender Verstärker mit  $v_u = 1$

Der *Eingangswiderstand* ergibt sich für den nichtinvertierenden Verstärker zu

$$R_{E\text{ges}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_E + u_A / (1 + R_F / R_1)}{i_1} = \frac{u_E}{i_1} \left(1 + \frac{v_0}{1 + R_F / R_1}\right)$$

$$R_{E\text{ges}} \approx R_E \frac{v_0}{v_u} . \quad (13.3)$$

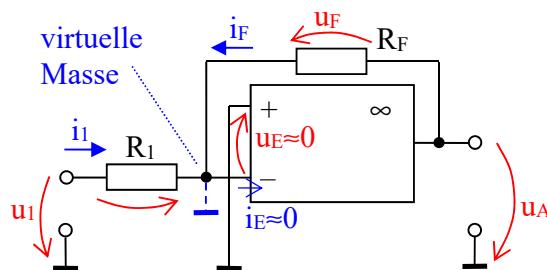
D.h., der Eingangswiderstand wird in dem Maße vergrößert, wie die Verstärkung verkleinert wird (für  $v_u = 100$  wird z.B.  $R_{E\text{ges}} = R_E \cdot 200000/100 = R_E \cdot 2000$  und nach Tabelle 13.1  $R_E = 2 \text{ M}\Omega$  bis  $1,5 \text{ T}\Omega \cdot 2000 = 4 \text{ G}\Omega$  bis  $3000 \text{ T}\Omega$ ).

**Praxistipp:** Diese *hohen erreichbaren Eingangswiderstände* sind der Hauptanwendungsfall des nichtinvertierenden Verstärkers, der deshalb auch *Elektrometerverstärker* genannt wird.

Zur Dimensionierung des Spannungsteilers  $R_F$ ,  $R_1$  wird der Querstrom mindestens  $10 \cdot (I_i + I_{i0})$  (unbelasteter Teiler), aber nicht größer als  $95\% I_{A\text{max}}$  (Ausgangsstrom wird für den Ausgang benötigt) gewählt.

Bei Einbeziehung der *Gleichtaktverstärkung* in die Untersuchungen zeigt sich das Problem, dass deren Einfluss sehr störend sein kann und *keine Verbesserung durch die Gegenkopplung* erfolgt. Deshalb sind dem Einsatz dieser Variante Grenzen gesetzt.

In der Schaltung nach Abb. 13.12 wird der Strom  $i_F$  vom Ausgang zum negierenden Eingang zurückgeführt – **Stromgegenkopplung**.



Knotensatz:

$$i_1 = i_E - i_F \approx -i_F$$

mit  $u_E \approx 0$ ,  $i_E \approx 0$  und <sup>168</sup>

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} \quad \text{sowie} \quad i_F = \frac{u_A}{R_F}$$

Abb. 13.12: Stromgegenkopplung – invertierender Verstärker

Damit wird die Gesamtverstärkung

$$v_u = \frac{u_A}{u_i} = \frac{u_A / (-i_F)}{u_i / i_1} = -\frac{R_F}{R_1} . \quad (13.4)$$

Gleichung (13.4) sagt einmal aus, dass die *Gesamtverstärkung negativ* und somit die Ausgangsspannung invertiert (negiert oder  $180^\circ$  phasenverschoben) ist und dass zum anderen wiederum nur das *Verhältnis der Widerstände*  $R_F$  und  $R_1$  die Verstärkung bestimmt.

Durch das Minuszeichen (infolge der Schaltungsvariante) wird die *Gleichtaktverstärkung in gleichem Maße verringert* und kann hier gut beherrscht werden.

<sup>168</sup> Da  $i_E = u_E/R_E$  ist, muss auch  $i_E \approx 0$  sein.

Der *Eingangswiderstand* der Gesamtschaltung findet dagegen *keine Verbesserung*.

$$R_{E_{\text{ges}}} = \frac{u_1}{i_1} = R_1 \quad (13.5)$$

Außerdem kann  $R_1$  nicht beliebig hoch gewählt werden (siehe Hinweise Abschnitt 13.2.1 nach 2.).

**Praxistipp:** Da für sehr viele Anwendungen der Eingangswiderstand ausreichend ist und das Invertieren nicht behindert (bzw. durch eine zweite Stufe behoben werden kann), wird diese **Schaltung hauptsächlich angewandt**.

Weitere Parameter werden *durch die Gegenkopplung in gleichem Maße verbessert*, so z.B. die *Temperaturdrift*, der *Frequenzgang* (siehe Hinweise Abschnitt 13.2.1 nach 5.), der *Ausgangswiderstand* oder auch geringe *Nichtlinearitäten* in der Kennlinie.

**Praxistipp:** Damit insbesondere die genutzten Näherungen gültig sind und nicht immer mehr Zusatzeffekte behandelt werden müssen, sollte die *Gesamtverstärkung einer Stufe nicht wesentlich über 100 liegen*. Bei den heutigen Preisen ist eine zweite Verstärkerstufe erheblich billiger als der sonst folgende Entwicklungsaufwand.

### 13.2.3 Dimensionierung von Operationsverstärkerschaltungen

Die Dimensionierung soll an einem Beispiel erörtert werden. Dazu steht die Aufgabe, das Signal eines Sensors auf das Standardeingangssignal einer SPS oder einer PC-I/O-Karte zu verstärken, um den vollen Bereich der Auflösung des Analog-Digital-Wandlers zu erhalten. Der Sensor liefert eine Ausgangsleerlaufspannung von  $u_{\text{sen}} = 0$  bis  $\pm 100$  mV bei einem Innenwiderstand des Sensors von  $R_{\text{sen}} = 500 \Omega$ . Das Ausgangssignal soll  $u_a = 0$  bis  $\pm 10$  V betragen.

Es wird als Operationsverstärker ein *Standardtyp* nach Tabelle 13.1 eingesetzt.

Dafür müssen die Schaltung dimensioniert (Schaltungsvariante, Verstärkung, Steuerkennlinie sowie  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_F$ ), der *Eingangs-* und der *Ausgangswiderstand* kontrolliert sowie der *Frequenzgang* und die *Drift* überprüft werden.

#### Bestimmung der Verstärkung:

Die notwendige *Verstärkung* ergibt sich aus der vorhandenen maximalen Eingangsspannung und der maximal geforderten Ausgangsspannung nach der Verstärkung.

$$v_u = \frac{u_A \text{ Soll Max}}{u_1 \text{ Ist Max}} = \frac{10 \text{ V}}{100 \text{ mV}} = 100$$

Wird der invertierende Verstärker gewählt, muss  $v_u = -100$  realisiert werden.

#### Bestimmung der Schaltungselemente ( $R_1$ sowie $R_F$ ):

Die Widerstände an den beiden Eingängen sollten  $R_{1/2} < \text{bis } \approx U_{i0}/I_{i0} = 50 \text{ k}\Omega$  (vergleiche Abschnitt 13.2.1 nach 2.) sein. In der Praxis wählt man 10 bis 20 kΩ.

**Praxistipp:** Dafür ist zu prüfen, ob der *Eingangswiderstand* genügend groß gegenüber dem Innenwiderstand des Sensors ( $R_E \gg R_{\text{sen}}$ ) ist, damit das Sensorsignal  $u_{\text{sen}}$  möglichst vollständig am Verstärkereingang zur Verfügung steht.

Für den invertierenden Verstärker folgt  $R_E \equiv R_1 = 10$  bis  $20 \text{ k}\Omega \gg 500 \Omega$ . Das entspricht einem Spannungsverlust von 5% bis 2,5% und ist in der Praxis vertretbar (evtl. kann es durch geringfügig höher justierte Verstärkung ausgeglichen werden; es findet aber *keine unnötige*

Verringerung der Messgröße und somit der Auflösung und daraus folgend der Genauigkeit statt).

**Praxistipp:** Es wird gewählt: Schaltungsvariante invertierender Verstärker und somit für  $R_1 = R_2 = 20 \text{ k}\Omega$  ( $R_2$  aus Symmetriegründen gleich, da  $20 \text{ k}\Omega \parallel 2 \text{ M}\Omega \approx 20 \text{ k}\Omega$ ) sind.

Damit kann nach (13.4)  $R_F$  bestimmt werden.

$$v_u = -\frac{R_F}{R_1} \quad \text{d.h.} \quad R_F = -v_u R_1 = -(-100) 20 \text{ k}\Omega = 2 \text{ M}\Omega$$

Die Schaltung dazu zeigt Abb. 13.13.

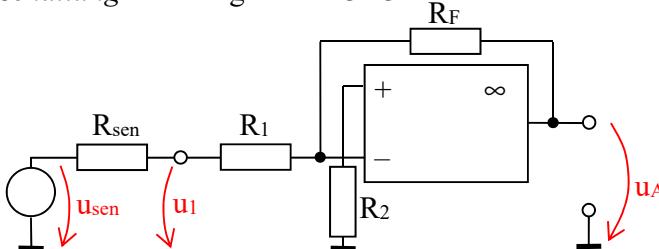


Abb. 13.13: Gewählte und dimensionierte Schaltung des Verstärkers

**Praxistipp 1:** Zur Korrektur der Verstärkung und der Bauelementengenauigkeiten kann z.B.  $R_F$  als Einstellregler ausgelegt werden.

**Praxistipp 2:** Damit die Verstärkungskennlinie im Bereich  $\pm 10 \text{ V}$  linear ist, sollte die Batteriespannung  $+12 \text{ V}$  und  $-12 \text{ V}$  gewählt werden (je nach Netzteil sind auch  $\pm 15 \text{ V}$  möglich).

#### Kontrolle des Ausgangswiderstandes:

Der Ausgangswiderstand des Signals wird durch die Gegenkopplung noch verkleinert (Tie10 S. 559-560) und beträgt  $R_{Ages} \approx R_A v_u / v_0 = 75 \Omega 100/200000 = 38 \text{ m}\Omega$ .

#### Kontrolle des Frequenzganges:

Aus der Darstellung von Abb. 13.8 kann der Frequenzgang für eine Verstärkung von 100 gezeichnet werden (Abb. 13.14). Alternativ kann mit dem Produkt aus Verstärkung und Bandbreite gerechnet werden.

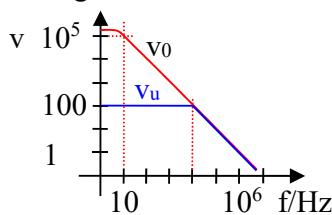


Abb. 13.14: Frequenzgang für Verstärkung  $v_u = 100$

Es ist ablesbar, dass der Frequenzgang von 0 bis 10 kHz reicht. Das muss mit den Daten des Sensorsignals verglichen werden.

**Praxistipp:** Sind dessen Signalfrequenzen höher, können z.B. zwei Verstärkerstufen mit jeweils der Verstärkung 10 hintereinander genutzt werden.

#### Kontrolle der Drift:

Eine Betrachtung der *Drift* über den gesamten Einsatztemperaturbereich (z.B.  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  bis  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ) ergibt mit  $6 \mu\text{V/K}$  und  $v_u = 100$  eine Spannungsunsicherheit am Ausgang von  $u_A = 30 \text{ mV}$ . Dagegen werden kurzzeitige Temperaturschwankungen des Chips von ca. 5 K eine Spannungsschwankung am Ausgang von  $u_A = 3 \text{ mV}$  ergeben. Das Erstere bedeutet, dass entweder ein Spannungsfehler von 30 mV (entspricht  $30 \text{ mV}/10\text{V} = 3 \%$  des Endwertes) verkraftbar sein muss oder gemäß der Umgebungstemperatur eine Nullpunktkorrektur

erforderlich ist. Das Zweite bedeutet, dass eine *Spannungsungenauigkeit* von 3 mV (entspricht 0,3 % des Endwertes) in Kauf genommen werden muss.

### 13.2.4 Messen von Parametern bei Operationsverstärkern

Für einen praktischen Einsatz sind die *Parameter* (Verstärkung, Eingangswiderstand, Verstärkungskennlinie, Ausgangswiderstand, Frequenzgang und Drift) des Verstärkers *durch Messungen* zu bestätigen und evtl. zu justieren. Es kann notwendig sein, dieses im gesamten vorgesehenen Einsatztemperaturbereich zu realisieren.

**Praxistipp:** Vor den Messungen ist ein Nullabgleich durchzuführen (wenn für den gewählten Operationsverstärker vorgesehen, siehe Abb. 13.6).

#### Messung der Verstärkung, Verstärkungskennlinie und des Frequenzgangs:

Die Verstärkung der Spannung bei ausgangsseitigem Leerlauf  $v_{uleer}$  muss mit  $R_L \rightarrow \infty$  gemessen werden.

**Praxistipp:** Dabei sind *Testsignale* (am sinnvollsten Sinussignale) auf den Eingang zu geben und entsprechend der Signaleigenschaften zu messen (z.B. mit einem Oszilloskop von der positiven Spannungsspitze bis zur negativen Spannungsspitze des Sinussignals  $u_s$ ).

Da das Messgerät am Eingang direkt parallel liegt, zeigt es unmittelbar die richtige Spannung. Am Ausgang muss der Messgeräteinnenwiderstand einen Leerlauf bedeuten.

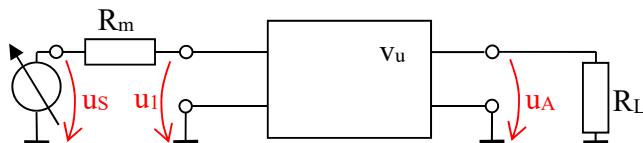


Abb. 13.15: Messschaltung für den Operationsverstärker

Die Verstärkung ist für den gesamten Aussteuerbereich (Verstärkungskennlinie) und den gesamten Frequenzbereich (Frequenzgang) zu ermitteln.

**Praxistipp:** Dabei sollte neben der Amplitude auch die Kurvenform kontrolliert werden, sonst führen Verzerrungen der Kurvenform zu groben Fehlern.

169

#### Messung des Eingangswiderstandes:

Werden in der Messschaltung nach Abb. 13.15 die Signalspannung  $u_s$  und die Eingangsspannung  $u_1$  gemessen, kann bei bekanntem Messwiderstand  $R_m$  der *Eingangswiderstand für die Signale* berechnet werden.

$$R_{Eges} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_1 R_m}{(u_s - u_1)}$$

**Praxistipp:** Der Messwiderstand sollte aus Gründen der Genauigkeit etwa die Größe des Eingangswiderstandes haben (für  $R_m = R_E$  wäre dann  $u_1 = \frac{1}{2}u_s$ ).

#### Messung des Ausgangswiderstandes:

Wird in der Messschaltung nach Abb. 13.15 die Ausgangsspannung  $u_A$  einmal für Leerlauf  $u_{A1}$  und außerdem für einen Lastwiderstand  $u_{A2}$  gemessen, kann bei bekanntem

<sup>169</sup> Bei Sinusform sind nur nichtlineare Verzerrungen (z.B. eine Begrenzung) zu erwarten. Bei z.B. Rechtecksignalen müssen auch lineare Verzerrungen durch den Frequenzgang beachtet werden.

Lastwiderstand  $R_L$  der *Ausgangswiderstand für die Signale* bestimmt werden (solange lineare Verhältnisse vorliegen).

$$R_{Ages} = \frac{u_{RA2}}{i_{A2}} = \frac{u_{A1} - u_{A2}}{i_{A2}} = \frac{u_{A1} - u_{A2}}{u_{A2}} R_L$$

**Praxistipp:** Hierbei sollte der Lastwiderstand aus Gründen der Genauigkeit etwa die Größe des Ausgangswiderstandes haben (für  $R_L = R_A$  wäre  $u_{A1} = 2u_{A2}$ ; es darf aber nicht der maximale Ausgangstrom des OV-Bausteins überschritten werden).

170

### Messung der Drift:

Die *Drift* kann nur durch präzise Messungen im Temperaturschrank und Beobachtung über längere Zeit ermittelt werden. Einen Eindruck gibt die Messung nach Abb. 13.16.

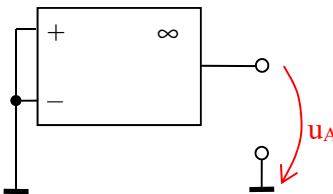


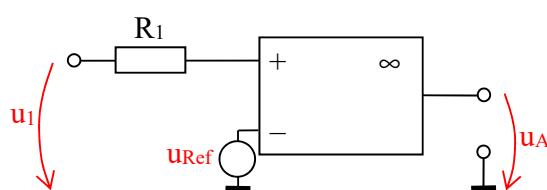
Abb. 13.16: Beobachtung der Drift

Die Eingänge werden beide direkt auf Masse gelegt, ohne Gegenkopplung mit voller Verstärkung wird der Nullpunkt justiert und die Ausgangsspannung beobachtet. Bei sehr schlechten Exemplaren kann der Nullabgleich nicht erreicht werden, aber auch bei den besseren läuft die Ausgangsspannung nach wenigen Sekunden bis Minuten weg und erreicht meist sogar die positive oder negative Sättigung. Nur bei relativ guten Exemplaren, die nicht in die Sättigung laufen, können aus den Schwankungen brauchbare Rückschlüsse gezogen werden.

### 13.2.5 Schaltungsbeispiele mit Operationsverstärkern

Bei den folgenden Schaltungsbeispielen werden nur die für die Funktion signifikanten Bauelemente dargestellt. Für eine praktische Nutzung sind die Spannungsversorgung und je nach Typ eine Nullpunktkorrektur oder Frequenzcompensationsschaltungen nach Herstellerangaben hinzuzufügen. Anstelle über  $R_2$  wird der nichtinvertierende Eingang wegen der Übersichtlichkeit auf Masse gelegt.

#### Komparator

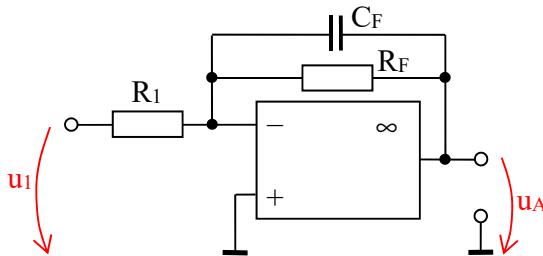


Ist die Spannung  $u_I$  gerade größer als die Referenzspannung  $u_{Ref}$  wird durch die hohe Eigenverstärkung  $u_A \approx +U_{Bat}$ , für  $u_I < u_{Ref}$  folgt  $u_A \approx -U_{Bat}$ . Für diese Komparatorschaltung muss kein besonders guter Operationsverstärker eingesetzt werden. Es gibt dafür ausgelegte Typen, die durch ihre geringere Eigenverstärkung sogar etwas schneller „umklappen“.

Abb. 13.17: Komparatorschaltung mit Operationsverstärker

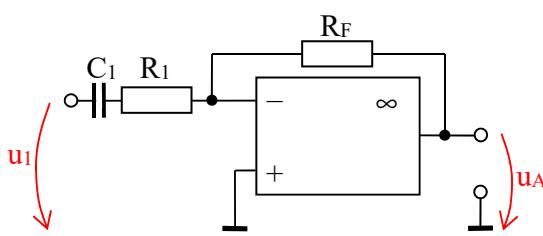
<sup>170</sup> Vergleiche Abschnitt 9.1.1.

### Verstärker mit Tief-, Hoch- und Bandpassverhalten



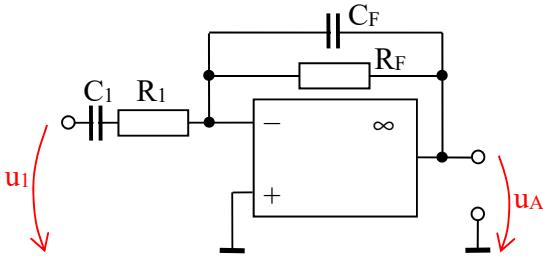
Mit steigender Frequenz vergrößert  $C_F$  den Strom der Gegenkopplung und somit wird die Verstärkung geringer. Bei  $f = \infty$  wird die Verstärkung somit null. Die obere Grenzfrequenz wird  $f_{go} = 1/2\pi R_F C_F$

Abb. 13.18: Verstärker mit Tiefpassverhalten



Bei  $f = 0$  Hz ist  $i_1 = 0$  und die Verstärkung wird null. Mit steigender Frequenz vergrößert  $C_1$  den Strom am Eingang und somit die Verstärkung bis  $-R_F/R_1$  (aber nur bis zur Frequenzgrenze des OV). Die untere Grenzfrequenz wird  $f_{gu} = 1/2\pi R_1 C_1$ .

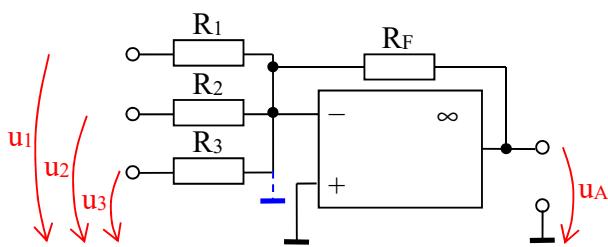
Abb. 13.19: Verstärker mit Hochpassverhalten



Die beiden Kondensatoren wirken sowohl wie bei Abb. 13.18 als auch wie bei Abb. 13.19. Das ist nur sinnvoll, wenn mit steigender Frequenz zuerst der Hochpass (mit  $f_{gu}$ )  $v_u$  vergrößert und danach der Tiefpass (mit  $f_{go}$ )  $v_u$  wieder verkleinert.

Abb. 13.20: Verstärker mit Bandpassverhalten

### Summation



Der Knotenpunktsatz in Abb. 13.21 ergibt  $i_1 + i_2 + i_3 = -i_F$  und somit

$$u_A = -\left(\frac{R_F}{R_1} u_1 + \frac{R_F}{R_2} u_2 + \frac{R_F}{R_3} u_3\right).$$

Sind in Abb. 13.21  $R_1 = R_2 = R_3$ , gilt auch für die Verstärkungsfaktoren  $v_{u1} = v_{u2} = v_{u3}$ , ansonsten entsprechen diese dem jeweiligen Verhältnis von  $R_F$  zu  $R_x$ .

Abb. 13.21: Summierender Verstärker

### Beispiel: Schaltung einer elektronischen Induktivität

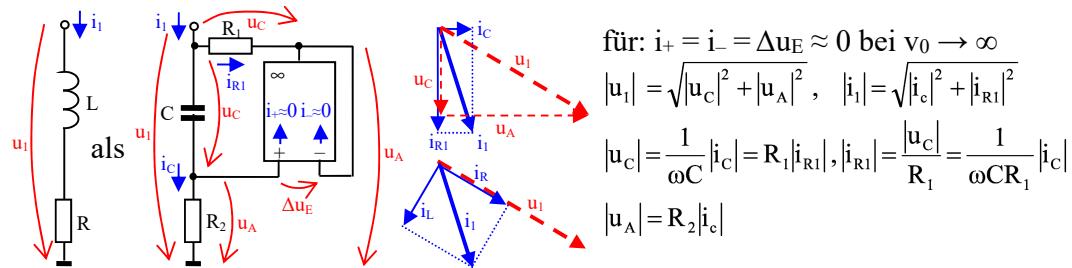


Abb. 13.22 Gyratorschaltung

Mit  $\omega CR_1 \ll 1$  folgt  $|i_c| \ll |i_{R1}|$  und somit:

$$|Z_{\text{ges}}| = \left| \frac{u_1}{i_1} \right| = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega CR_1 R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega CR_1)^2}} \approx \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Es ergibt sich also für einen bestimmten Frequenzbereich (solange  $\omega CR_1 \ll 1$  gilt) in guter Näherung entsprechend der gewählten Bauelemente die Reihenschaltung einer Induktivität  $L = \omega CR_1 R_2$  mit dem Widerstand  $R = R_1$ .

### Beispiel der Wirkung nichtlinearer Bauelemente

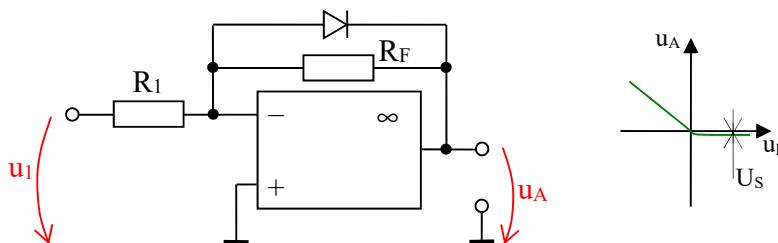


Abb. 13.23: Diode in der Gegenkopplung

Eine positive Eingangsspannung gibt eine negative Ausgangsspannung, bis die Schwellspannung der Diode erreicht und diese so niederohmig wird, dass sich die Verstärkung zu null ergibt. Bei einer negativen Eingangsspannung und somit positiven Ausgangsspannung wirkt die Diode nicht.

Durch entsprechende Justierung sowie eine zweite Schaltung für die positive Eingangsspannung können Präzisionsgleichrichter (ohne Schwellspannungen) gebaut werden.

### Logarithmierender Verstärker

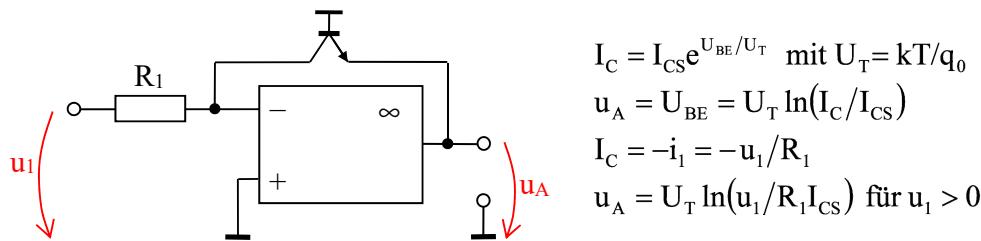


Abb. 13.24: Nutzung der Transistorkennlinie in der Gegenkopplung

Bei entsprechend präziser Justierung ist  $u_A$  (in einem bestimmten Aussteuerungsbereich<sup>171)</sup> eine exakte Funktion des Logarithmus von  $u_1$ . Präzisionsschaltkreise nach diesem Funktionsprinzip werden zur Multiplikation und Division eingesetzt. Jedes elektronische Wirkleistungs- und Echteleffektivwertmessgerät nutzt heute diese Schaltkreise.

<sup>171</sup> Vergleiche auch mit der Diodenkennlinie von Wagner Abschnitt 12.2.3.

Viele Schaltungen wie z.B. Summierer, Integrationsschaltungen usw. wurden insbesondere durch die Analogrechentechnik hervorgebracht (Tie10 S. 739 ff).

### 13.3 Übungsaufgaben zum Operationsverstärker

#### Aufgabe 13.1

Ein Vorverstärker mit einem Operationsverstärkerschaltkreis (kompatibel mit  $\mu\text{A}$  741 Tabelle 13.1) ist zu dimensionieren (vergleiche Abb. 13.25). Gegeben:

Eingangsspannung (Spannung des Mikrofons) = max. 2,5 mV

Innenwiderstand des Mikrofons = 200  $\Omega$

Ausgangsspannung für einen Line-Eingang = bis 200 mV.

Frage 1: Wie groß muss  $U_u$  sein und kann der invertierende Verstärker verwendet werden?

Frage 2: Welche Werte sind für  $R_1$  und  $R_2$  zu wählen und was ergibt sich für  $R_F$ ?

Frage 3: Welche Versorgungsspannungen sollten für die notwendige Aussteuerbarkeit gewählt werden (es sind  $\pm 4$  bis  $\pm 15$  V spezifiziert)?

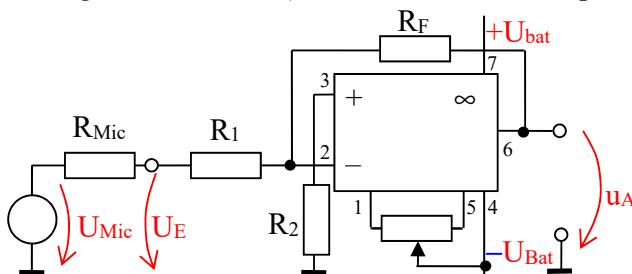


Abb. 13.25: Schaltungen mit Nullabgleich und Pinnbelegung des Bausteins

#### Aufgabe 13.2

Ein Impedanzwandler mit einem Operationsverstärkerschaltkreis (kompatibel mit  $\mu\text{A}$  741 Tabelle 13.1) ist zu dimensionieren (vergleiche Abb. 13.26). Gegeben:

Kapazität der Kondensatormikrofonkapsel  $C_{\text{Mic}}$  = 10 pF

Geforderte untere Grenzfrequenz = 20 Hz

Spannungsänderung am Kondensator = max. 2,5 mV

Ausgangswiderstand des Wandlers < 200  $\Omega$

Ausgangsspannung für einen Mikrofon-Eingang = bis 2,5 mV.

Frage 1: Wie groß muss ein Vorwiderstand zur Spannungsversorgung für das Kondensatormikrofon  $R_V$  gewählt werden?

Hinweis: Aus  $\omega_{gu} = 1/R_V C_{\text{Mic}}$  folgt  $R_V = 1/2\pi f_{gu} C$ ; vergleiche Abschnitt 11.1.3

Frage 2: Welche Werte sind für  $R_1$  und  $R_2$  zu wählen und was ergibt sich für  $R_F$ ?

Frage 3: Welche Versorgungsspannungen sollten für die notwendige Aussteuerbarkeit gewählt werden (es sind  $\pm 4$  bis  $\pm 15$  V spezifiziert)?

Frage 4: Wie groß werden der Eingangs-, der Ausgangswiderstand, der Frequenzgang und die Drift?

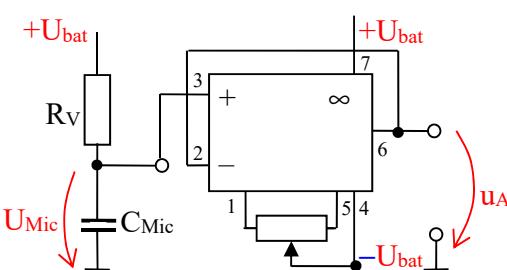


Abb. 13.26: Schaltungen mit Nullabgleich und Pinnbelegung des Bausteins

**Aufgabe 13.3**

Ein Messverstärker mit einem Operationsverstärkerschaltkreis (kompatibel mit  $\mu\text{A}$  741 Tabelle 13.1) ist zu dimensionieren (vergleiche Abb. 13.27). Gegeben:

Eingangsspannung (Leerlaufspannung des Messwandlers) = 0 bis 250 mV

Innenwiderstand des Messwandlers = 200  $\Omega$

Ausgangsspannung entsprechend dem Standardsignal = 0 bis 10 V.

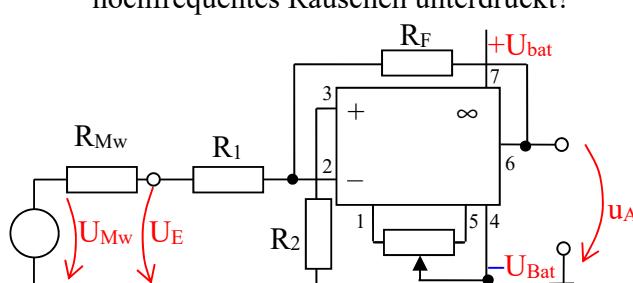
Frage 1: Wie groß muss  $U_E$  sein und kann der invertierende Verstärker verwendet werden?

Frage 2: Welche Werte sind für  $R_1$  und  $R_2$  zu wählen und was ergibt sich für  $R_F$ ?

Frage 3: Welche Versorgungsspannungen sollten für die notwendige Aussteuerbarkeit gewählt werden (es sind  $\pm 4$  bis  $\pm 15$  V spezifiziert)?

Frage 4: Wie groß werden der Eingangs-, der Ausgangswiderstand, der Frequenzgang und die Drift?

Zusatzfrage: Wie ist die Schaltung zu verändern, damit ein Tiefpass mit  $f_{go} = 15$  kHz hochfrequentes Rauschen unterdrückt?



**Abb. 13.27: Schaltungen mit Nullabgleich und Pinnbelegung des Bausteins**

**Aufgabe 13.4 (Zusatzaufgabe)**

Realisieren Sie die Schaltung von Abb. 13.27 und führen Sie praktische Messungen durch.

**Versuchsaufbau:**

Überlegen Sie sich den Versuchsaufbau selbst.

Hinweis: Verwenden Sie einen Funktionsgenerator anstelle des Messwandlers und ein Oszilloskop zum messen.

**Messungen:**

1. Messen der Verstärkungskennlinie des invertierenden Verstärkers von  $U_E = 0 \dots 250$  mV (ca. alle 50 mV) bei 1 kHz.
2. Messen des Frequenzgangs von 0 ... 20 kHz (logarithmisch ca. 6 Messpunkte) bei  $U_E = 150$  mV.
3. Messen des Eingangswiderstands und des Ausgangswiderstands (bei ca. 1 kHz und  $U_E = 100$  mV).
4. Messen des Frequenzgangs von 0 ... 20 kHz (logarithmisch ca. 6 Messpunkte) bei  $U_E = 150$  mV mit einem Filter entsprechend der Zusatzfrage.

**Versuchsergebnisse:**

Die Messungen stimmen sehr gut mit den Berechnungen überein. Abweichungen entstehen nur durch die Toleranz der Bauelemente.

# 14 Vierter Exkurs Mathematik

## 14.1 Mathematische Grundlagen – Zahlensysteme

Das Dezimalzahlensystem ist als Stellen- oder *Positionssystem* (Ziffern mit Stellenwert im Zahlwort) aufgebaut, basiert auf der *Grundzahl „10“* und hat zehn *Ziffern* (0, 1, … 9). Im Zahlwort werden die Ziffern mit ihrem Stellenwert multipliziert und danach addiert.

Nach dem gleichen Verfahren können Zahlensysteme z.B. mit den Grundzahlen

- 2, den Ziffern 0 und 1 und dem Stellenwert  $2^n$  – *Dualzahlen*<sup>172</sup>,
- 8 (=  $2^3$ ), den Ziffern 0, 1, … 7 und dem Stellenwert  $8^n$  – *Oktalzahlen* oder
- 16 (=  $2^4$ ), den Ziffern 0, 1, … 9, A … F und dem Stellenwert  $16^n$  – *Hexadezimalzahlen* gebildet werden<sup>173</sup>.

Dualzahlen	Oktalzahlen	Dezimalzahlen	Hexadezimalzahlen	BCD-Code
0	0	0	0	0000 0000
1	1	1	1	0000 0001
1 0	2	2	2	0000 0010
1 1	3	3	3	0000 0011
1 0 0	4	4	4	0000 0100
1 0 1	5	5	5	0000 0101
1 1 0	6	6	6	0000 0110
1 1 1	7	7	7	0000 0111
1 0 0 0	1 0	8	8	0000 1000
1 0 0 1	1 1	9	9	0000 1001
1 0 1 0	1 2	1 0	A	0001 0000
1 0 1 1	1 3	1 1	B	0001 0001
1 1 0 0	1 4	1 2	C	0001 0010
1 1 0 1	1 5	1 3	D	0001 0011
1 1 1 0	1 6	1 4	E	0001 0100
1 1 1 1	1 7	1 5	F	0001 0101
1 0 0 0 0	2 0	1 6	1 0	0001 0110
1 0 0 0 1	2 1	1 7	1 1	0001 0111

Tabelle 14.1: Vergleich der Zahlensysteme

Der Vergleich in Tabelle 14.1 zeigt, dass die Dualzahlen sehr lange Zahlwörter ergeben und somit für den Normalgebrauch nicht geeignet sind. Als zu den Dualzahlen kompatibles System hat sich im Gebrauch für die Computertechnik deshalb das Hexadezimalsystem durchgesetzt. Die Sonderform der binärcodierten Dezimalzahlen (BCD-Code) wird heute nur noch bei speziellen Anwendungen genutzt (z.B. für Zähler, wenn keine Umwandlung für die Anzeige erforderlich sein soll).

**Praxistipp:** Die besondere *technische Bedeutung der Dualzahlen – dem einfachsten Zahlensystem* – folgt aus den technischen Möglichkeiten, mit außerordentlich hoher *Störfestigkeit* zwei Ziffern (d.h. zwei Zustände) realisieren zu können.

<sup>172</sup> Auch Binärzahlen (kleinstes Zahlensystem, da mit nur einer Ziffer kein Positionssystem möglich ist)

<sup>173</sup> Dabei ist n eine ganze Zahl. Sie nimmt mit jeder Stelle der Ziffer im Zahlwort nach links zu. Ein Komma wird zwischen der Position  $\text{Grundzahl}^0$  und  $\text{Grundzahl}^{-1}$  angeordnet.

Ziffer	logischer Wert	Schaltzustand	Beispiele für elektrische Signale
0	Nein oder Falsch		+3,6...+6V (V24) oder 0 ... 0,8 V (TTL-Eingang)
1	Ja oder Wahr		-3,6...-6V (V24) oder 2,0 ... 5 V (TTL-Eingang)

Die Dualzahlen mit ihren zwei Zuständen stimmen mit der Aussagenlogik überein, die schon in der Antike entwickelt wurde (mit 0 = Nein und 1 = Ja).

Alle Rechenoperationen mit Binärzahlen können auf die **drei logischen Grundfunktionen** der **booleschen Algebra** zurückgeführt werden. Das stimmt mit der Aussagenlogik überein.

Die drei Grundfunktionen können am besten mit einer Wahrheitstabelle verdeutlicht werden.

- UND-Funktion (oder AND bzw. Konjunktion)

$x_1 \wedge x_2 = y$	$x_1$	$x_2$	$y$	Wenn $x_1$ und $x_2$ erfüllt sind, dann ist $y$ wahr.
	0	0	0	
	1	0	0	
	0	1	0	
	1	1	1	

- ODER-Funktion (oder OR bzw. Disjunktion)

$x_1 \vee x_2 = y$	$x_1$	$x_2$	$y$	Wenn $x_1$ oder $x_2$ erfüllt sind, dann ist $y$ wahr.
	0	0	0	
	1	0	1	
	0	1	1	
	1	1	1	

- NICHT-Funktion (oder NOT bzw. Negation)

$\bar{x} = y$	$x$	$y$	Wenn $x$ nicht erfüllt ist, dann ist $y$ wahr und umgekehrt.
	0	1	
	1	0	Dabei gilt $(\bar{x}) = x$

**Praxistipp:** Diese Grundfunktionen können durch *technische Anordnungen* einfach realisiert werden. Darüber hinaus sind auch alle Rechenoperationen mit diesen drei Grundfunktionen nach entsprechenden Algorithmen mittels Dualzahlen besonders einfach zu realisieren.

Für das Arbeiten mit logischen Funktionen gibt es eine Reihe sehr praktischer **Rechenregeln**.

- Rechenregeln mit Konstanten

$$\begin{array}{lll} \bar{0} = 1 & 0 \wedge 0 = 0 \\ \bar{1} = 0 & 0 \wedge x = 0 & 1 \wedge x = x \\ x \wedge x = x & \bar{x} \wedge x = 0 \\ 0 \vee 0 = 0 & & \\ 0 \vee x = x & 1 \vee x = 1 \\ x \vee x = x & \bar{x} \vee x = 1 \end{array} \quad x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$$

- Kommutatives Gesetz (Vertauschung)

$$x_1 x_2 = x_2 x_1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$

- Assoziatives Gesetz (Verbindung)

$$x_1 x_2 x_3 = x_1 (x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 \dots$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \dots$$

- Distributives Gesetz (Verteilung)

$$x_1 (x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$

$$x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$$

- Absorptionsgesetze

$$\begin{aligned}x_1 \vee x_1 x_2 &= x_1 \\x_1 (x_1 \vee x_2) &= x_1 \\x_1 (\bar{x}_1 \vee x_2) &= x_1 x_2 \\x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 &= x_1 \vee x_2 \\\overline{x_1 x_2} &= \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \\\overline{x_1 \vee x_2} &= \bar{x}_1 \bar{x}_2\end{aligned}$$

Diese Rechenregeln sind mit Wahrheitstabellen<sup>174</sup> oder durch Umformen zu beweisen.

Des Weiteren gelten **Vorrangregeln** für die Schreibweise. Sind keine Klammern gesetzt, gilt:

1. Negation,
2. UND (AND; auch Multiplikationspunkt oder kein Zeichen),
3. ODER (OR)

Dabei entspricht 2. vor 3. der Regel Punkt- vor Strichrechnung.

**Praxistipp:** Redundante logische Ausdrücke können mit diesen Regeln vereinfacht werden.

Als Maßbezeichnung im SI-System für eine *binäre Einheit* (0 oder 1) wurde 1 bit festgelegt. Da  $2^{10} = 1024 \approx 1000$  ist, hat sich dafür die Maßbezeichnung 1 kbit, für  $2^{20}$  die Bezeichnung 1 Mbit usw. durchgesetzt. Werden acht binäre Einheiten zu einem *binären Wort* zusammengefasst, lautet die Einheit 1 B (Byte) und des Weiteren 1 kB, 1 MB usw.<sup>175</sup>

## 14.2 Rechnen mit verschiedenen Zahlensystemen

### Umwandlung Dual- ↔ Dezimalzahlen

$$110101_B = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 2^5 \\ +1 \cdot 2^4 \\ +0 \cdot 2^3 \\ +1 \cdot 2^2 \\ +0 \cdot 2^1 \\ +1 \cdot 2^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 32 \\ +1 \cdot 16 \\ +0 \cdot 8 \\ +1 \cdot 4 \\ +0 \cdot 2 \\ +1 \cdot 1 \end{array} \right\} = 53_D$$

### Umwandlung Dezimal- ↔ Dualzahlen

$$53_D = \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 10^1 \\ +3 \cdot 10^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 101 \cdot 1010 \\ +11 \cdot 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 101 \cdot 1000 \\ +101 \cdot 10 \\ +11 \cdot 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 101000 \\ +1010 \\ +\underline{111} \end{array} \right\} \text{Übertrag}$$

$$110101_B$$

Es ist an den Beispielen zu erkennen, dass eine Umwandlung stellenweise erfolgen kann. Dabei sind nur noch die einzelnen Ziffern und Stellenwerte umzuwandeln. Die Addition erfolgt wie gewohnt (bei Berücksichtigung des Übertrages).

### Umwandlung Dual- ↔ Hexadezimalzahlen

$$\begin{array}{r} 0011|0101_B \\ 3 \quad | \quad 5 \quad H \end{array}$$

Die Umwandlung ist nach Einteilung in Vierergruppen möglich, da gerade vier Binärstellen eine Hexadezimalstelle ergeben.

Andere Umwandlungen erfolgen analog, wobei die Umwandlung in Zahlensysteme, die miteinander kompatibel sind (wie Dual- und Hexadezimalzahlen), besonders einfach wird.

<sup>174</sup> Dabei sind bei mehreren Variablen die Wahrheitstabellen so anzulegen, dass alle Kombinationen entstehen.

<sup>175</sup> Es wird oft auch Kbit und KB geschrieben, auch die Einheit Kibit, Mibit usw. für exakt  $2^{10}, 2^{20}$

*Addition* von Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 11101 \\
 + 1110 \\
 \hline
 101011
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 29_D \\
 14_D \\
 \hline
 1 \\
 43_D
 \end{array}$$

Überträge

Die Vorgehensweise ist die gleiche wie bei Dezimalzahlen.

*Multiplikation* von Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 11101 \cdot 1110 \\
 \hline
 11101 \\
 11101 \\
 11101 \\
 \hline
 00000
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 29_D \cdot 14_D \\
 29 \\
 116 \\
 \hline
 1 \\
 406_D
 \end{array}$$

Überträge

**Praxistipp:** Die Vorgehensweise hat immer die gleiche Form wie bei den Dezimalzahlen.

Es treten aber nur Multiplikationen mit 1 oder 0 auf. Somit reduziert sich die Operation auf eine Verschiebung um entsprechend viele Stellen und eine Addition.

*Subtraktion und Division* erfolgen in gleichartiger Weise.

# 15 Digitale Schaltungstechnik

Hilfreich für das Verständnis kann die Wiederholung der mathematischen Abhandlungen in Abschnitt 14 sein. Es werden

- die Grundlagen digitaler Signale,
- das Rechnen mit Binärzahlen,
- die Wandlung analoger in digitale Signale,
- der Entwurf kombinatorischer digitaler Schaltungen,
- der Entwurf sequentieller digitaler Schaltungen (Schaltungen mit Speichern),
- grundlegende Varianten von Speichern sowie
- Messungen an kombinatorischen und sequentiellen digitalen Schaltungen

insbesondere anhand einiger wichtiger Anwendungen vorgestellt.

## 15.1 Grundlagen digitaler Signale

### 15.1.1 Informationstechnische Grundlagen digitaler Signale

**Der Ausgangspunkt** zur Behandlung von Signalen sind die Begriffe **Information**, **Zeichen** und **Signal**, wie sie in der Norm DIN 44300 dargelegt werden.

Der Begriff Information wird in verschiedenen Wissenschaftsbereichen verwendet und ist schwer allgemein festzulegen. In der Umgangssprache wird er im Sinne von Kenntnisserwerb über Sachverhalte und Vorgänge mit Neuigkeitsgehalt verstanden. Der exakte Begriff im philosophischen Sinne ist an das menschliche Denken gebunden. **Informationen** können erst *im Gehirn* vorhanden sein.

Nach Shannon (dem Begründer der *technischen Informationstheorie*) ist der Wert einer *Information* die durch sie „*beseitigte Unsicherheit*“. Ihr Wert wird also wahrscheinlichstheoretisch festgelegt und ist somit einer technischen Beurteilung zugänglich, ohne dass die Bedeutung der Information für den Menschen direkt zu beachten ist.

Informationen müssen durch **Zeichen** repräsentiert werden. Die Bedeutung der Zeichen für den Menschen muss vereinbart sein (z.B. die Zeichen des Alphabets bedeuten Laute, die Zeichen des Morsealphabets stehen für Buchstaben und Ziffern, die Zeichen der ASCII-Tabelle stehen für Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen usw.).

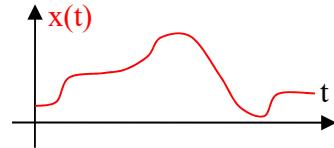
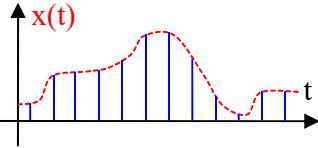
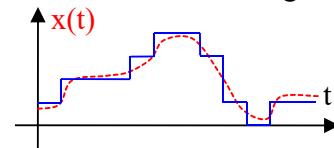
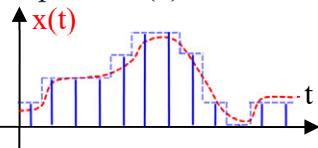
Träger der Zeichen sind **Signale** (z.B. elektrische Spannungen als zeitabhängige Signale, modulierte elektromagnetische Strahlung, akustische Schwingungen usw.).

Es gibt drei zu beachtende Aspekte bezüglich der Sprache:

- Semantik – inhaltliche Bedeutung
- Sigmatik – Zeichen
- Pragmatik – Zweckbestimmung des Inhalts.

**Praxistipp:** Die *technische Informationstheorie* betrachtet **nur** den *sigmatischen Aspekt*.

Die Einteilung von Signalen nach ihren Eigenschaften bezüglich Amplitude und Zeit zeigt Tabelle 15.1.

	kontinuierliches Signal	diskontinuierliches Signal
stetiges Signal	<i>analoges Signal</i> als zeitabhängige Größe (1) 	<i>abgetastetes analoges Signal</i> zu diskreten Zeitpunkten (2) 
diskretes Signal	<i>diskrete</i> Signalstufen als <i>zeitkontinuierliches</i> Signal (3) 	<i>diskrete</i> Signalstufen zu <i>diskreten</i> Zeitpunkten (4) 

**Tabelle 15.1: Einteilung von Signalen**

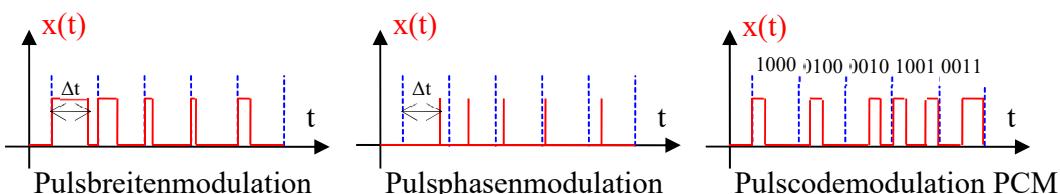
Beispiele für die vier Felder in Tabelle 15.1 sind:

- (1) sehr viele Mess- und Sensorsignale,
- (2) Abtast- oder Stichprobenmessungen,
- (3) inkrementelle Geber, Codescheibe sowie
- (4) zeit- und amplitudendiskrete Signale.

Sonderformen von

- (1) frequenzanaloge Signale  $\hat{U} \cos\{2\pi f(t)t\}$  mit  $x(t) \sim f(t)$  und  $\hat{U} = \text{const}$
- (4) *binäre Signale* (nur Amplitudenstufe 0 oder 1, z.B. Pulscodemodulation PCM)

Es werden mehrere Arten pulsmodulierter Signale verwendet. Bei allen praktisch realisierten Signalen ist die Amplitude konstant und somit ohne Information. Die Pulsamplitudenmodulation entspricht dem abgetasteten analogen Signal und tritt normalerweise nur als Zwischenstufe bei der Signalumformung (Analog-Digital-Wandlung) auf.

**Abb. 15.1: Pulsmodulierte Signale**

Die Pulsbreitenmodulation und die Pulsphasenmodulation sind zeitdiskrete, aber amplitudentinuierliche Signale. Sowohl die Pulsbreite (oder -länge) als auch die Pulsphase (jeweils  $\Delta t$ ) können beliebige Werte ( $0 < \Delta t < \text{Taktabstand}$ ) annehmen.

Die Pulscodemodulation, die für die Übertragungstechnik schon vor der Entwicklung der Digitaltechnik bekannt war, gehört zu den *zeit- und amplitudendiskreten Signalen* und zu der Sonderform der binären oder digitalen Signale. Die *binären, binärcodierten oder digitalen Signale* führen zu einem eigenständigen Bereich der Schaltungstechnik und Signalverarbeitung.

**Praxistipp:** Ihre mathematischen Grundlagen sind die Dualzahlen und die boolesche Algebra oder **Schaltalgebra** (siehe Abschnitt 14.1).

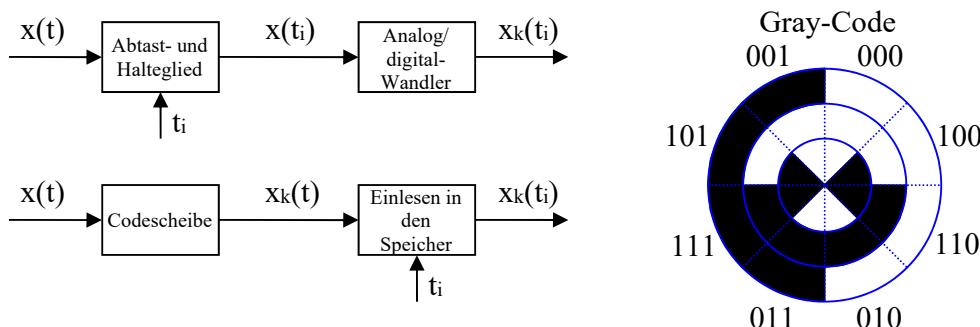
### 15.1.2 Quantisierung von Signalen und Codierung

Zur Umwandlung *analoger Signale in digitale Signale* müssen sowohl eine Zeitquantisierung als auch eine Amplituden- oder Wertquantisierung erfolgen.

In der Praxis erfolgt diese Umwandlung meist in zwei Schritten zu einem digitalen oder diskreten Signal (bei inkrementellen Gebern quasi in einem Schritt).

In Abb. 15.2 sind beide Möglichkeiten für die zwei Schritte der Wandlung dargestellt. Als Zwischenergebnis resultiert einmal ein *abgetastetes analoges Signal* und zum anderen ein *diskretes zeitkontinuierliches Signal*. Erfolgt die Zeitquantisierung zuerst, findet sie normalerweise durch ein Abtast- und Halteglied oft in Verbindung mit einem Multiplexer für mehrere Signale nacheinander statt.

**Praxistipp:** Mit einem Multiplexer abgetastete Werte sind nicht zur gleichen Zeit erzeugt.



**Abb. 15.2: Analog-Digital-Wandlung in zwei Schritten und Codescheibe**

Werden zur Wandlung z.B. Codescheiben oder -lineale benutzt (gelesen z.B. mit einer Lichtschranke), wird als zweiter Schritt mit einem festgelegten Takt der Wert gelesen.

Bei inkrementellen Gebern werden für feststehende Wertänderungen Impulse erzeugt, gelesen und addiert (z.B. rotierende Lochscheibe mit Lichtschranke).

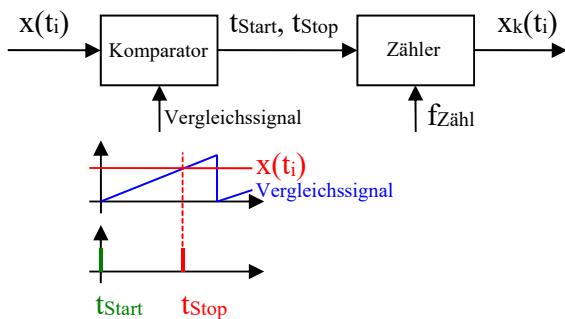
Für Codescheiben und ähnliche Anordnungen eignet sich besonders der Gray-Code, da sich immer nur ein Bit zur gleichen Zeit ändert und somit nur ein geringer Fehler entsteht (infolge der Ansprechempfindlichkeit der Lichtschranke). Bei einem Code mit Dualzahlen müssten sich mehrere Bit absolut exakt gleichzeitig ändern, sonst ergibt es dazwischen Werte, die völlig unkalkulierbare Fehler auslösen. Das kann dann nur durch Mehrfachablesen jeder Spur und mehrere Scheiben korrigiert werden. Natürlich muss für eine Weiterverarbeitung meist eine Umkodierung in Dualzahlen erfolgen.

**Praxistipp:** Zeitquantisierung und Wertquantisierung sind dem Einsatzfall anzupassen.

Analog-Digital-Umsetzer führen die Wertquantisierung und Codierung in Dualzahlen durch.

Die verschiedenen Verfahren für Analog-Digital-Umsetzer (ADU) unterscheiden sich z.B. im Zeitbedarf für die Wandlung, in der Genauigkeit oder im Aufwand. Die Umkehrung erfolgt mit einem Digital-Analog-Umsetzer (DAU).

### • Dreiecksverfahren



**Abb. 15.3: Prinzip des ADU nach dem Dreiecksverfahren**

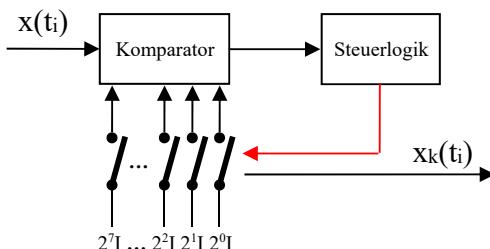
Das abgetastete Signal wird mit einem zeitproportionalen Signal (Dreiecksignal) durch einen Komparator verglichen. Stimmen beide Signale überein, wird das Stoppsignal ausgelöst. Zwischen Startsignal (Beginn des Dreiecks) und Stoppsignal zählt der Zähler eine geeichte Impulsfrequenz. Das Ergebnis der Zählung ist  $x_k(t_i)$  (entsprechend dem Zähler als Dualzahl).

**Praxistipp:** Der Umsetzvorgang erfolgt sehr schnell, aber mit von der Amplitude abhängiger Dauer. Die Genauigkeit ist nicht sehr hoch.

### • Balanceverfahren

Der Wert wird in Abb. 15.4 nach folgendem Algorithmus ermittelt:

- Schalter des größten Wertes schließen. Ist die Summe der Vergleichssignale kleiner als  $x(t_i)$ , bleibt der Schalter geschlossen, ist sie größer, wird er wieder geöffnet.
- Schalter des zweitgrößten Wertes schließen. Ist die Summe der Vergleichssignale kleiner, bleibt der Schalter geschlossen, ist sie größer, wird er wiederum geöffnet.
- Weiter bis zum kleinsten Wert.

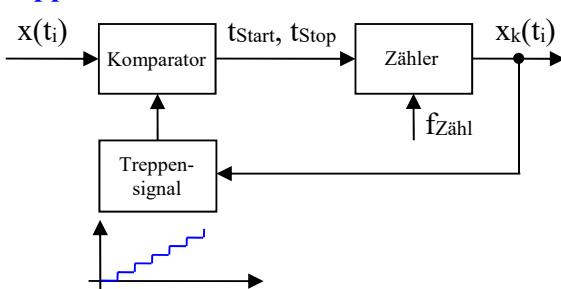


**Abb. 15.4: Prinzip des Balanceverfahrens**

Nach dem kleinsten Wert entspricht die Stellung der Schalter der Dualzahl. Die Genauigkeit hängt von der Justierung der Vergleichssignale, der Summation und dem Komparator ab und kann sehr hoch sein.

**Praxistipp:** Das Verfahren ist relativ langsam, die Umsetzzeit aber immer gleich.

### • Treppenverfahren

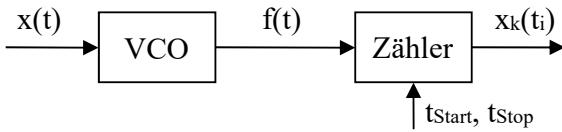


**Abb. 15.5: Prinzip des Treppenverfahrens**

Das Verfahren funktioniert ähnlich wie das Dreiecksverfahren.

**Praxistipp:** Durch die Treppenspannung kann die Genauigkeit besser gestaltet werden.

- **Umsetzung über ein frequenzanaloges Signal**



**Abb. 15.6: Zählen eines frequenzanalogen Signals**

Der Spannungs-Frequenz-Umsetzer (VCO – Voltage controlled Oscillator) erzeugt ein Signal mit einer Frequenz proportional zur Spannung ( $f = k \cdot u$  mit  $u = x\{t\}$ ). Diese Frequenz wird in einem geeichten Intervall gezählt. Das Verfahren ist relativ schnell, die Genauigkeit hängt vom VCO ab.

**Praxistipp:** Wenn sich im Zeitintervall die Spannung etwas ändert, wird durch den Zählvorgang (entspricht Integration) der Mittelwert über dem Zeitintervall gebildet.

- **Inkrementelle Geber**

Es werden Einzelimpulse erzeugt, die jeweils einer festgelegten Signaländerung entsprechen (z.B. durch ein mitbewegtes abgetastetes Strichgitter). Durch Zählen der Impulse von einer Nullstellung an ist der genaue Wert als Dualzahl verfügbar. Die Genauigkeit hängt z.B. vom Strichgitter ab.

**Praxistipp:** Das Problem besteht im „Verschlucken“ von Impulsen und dem Aufsummieren dieser Fehler. Es ist somit immer wieder die Nullstellung anzufahren.

Heute ist eine Vielzahl von Schaltkreise verfügbar, die eingesetzt werden können. Sie unterscheiden sich im Eingangsspannungsbereich, im Eingangswiderstand, in der Genauigkeit, im Ausgangswertebereich (8, 12, 16 ...bit) oder in der Versorgungsspannung und Leistung. Z.T. ist zusätzlich evtl. ein Multiplexer, ein Abtast- und Halteglied oder auch ein Datenpuffer notwendig.

**Praxistipp:** Es ist meistens eine Pegelanpassung, in manchen Fällen auch ein Präzisionsgleichrichter notwendig, um den Eingangsspannungsbereich des ADU voll auszunutzen und somit die Genauigkeit des Wertebereiches auch zu realisieren.

Die Zeitquantisierung erfolgt durch Abtastung des Signals in der Regel mit fester Abtastrate.

Damit ein Signal aus dem abgetasteten Signal wieder reproduziert werden kann (d.h., damit es repräsentativ ist), muss die *Abtastung genügend schnell* erfolgen. Dabei ist die höchste im Signal vorhandene Frequenz entscheidend. Um den Anteil mit der höchsten Frequenz gerade noch erfassen zu können, sind *mindestens zwei Abtastungen pro Periode* (dieser Frequenz) erforderlich. Aus dieser Tatsache hat Shannon das **Abtasttheorem** aufgestellt.

$$\Delta t_{Ab} = T_{Min}/2 = 1/2f_{Max} \quad (15.1)$$

Wird das Abtasttheorem eingehalten, kann der Signalanteil  $f_{Max}$  mit einer statistischen Genauigkeit von gerade 50 % reproduziert werden. Es treten aber noch keine völlig unkalkulierbaren Verfälschungen des Signals auf.

**Praxistipp:** Solche Signalverfälschungen können gut mit einem Digitalspeicheroszilloskop beobachtet werden, wenn z.B. ein höherfrequentes Sinussignal mit immer geringerer Zeitauflösung dargestellt wird.

Dabei kommt es nicht auf die Signalanteile mit der höchsten „gewollten“ Frequenz, sondern auf *die höchste tatsächlich vorhandene Frequenz* an.

**Praxistipp:** Im Fall, dass nur tiefere Frequenzen interessieren, müssen vor der Abtastung mit einem *analogen Filter* die höheren Frequenzanteile abgetrennt werden.

### 15.1.3 Grundlagen digitaler Signalverarbeitung – Schaltalgebra

Die Realisierung der drei Grundfunktionen (siehe Abschnitt 14.1) kann mit unterschiedlichen technischen Mitteln erfolgen.

- UND-Funktion (oder AND bzw. Konjunktion)
- ODER-Funktion (oder OR bzw. Disjunktion)
- NICHT-Funktion (oder NOT bzw. Negation)

Einige einfache Beispiele zeigt Abb. 15.7.

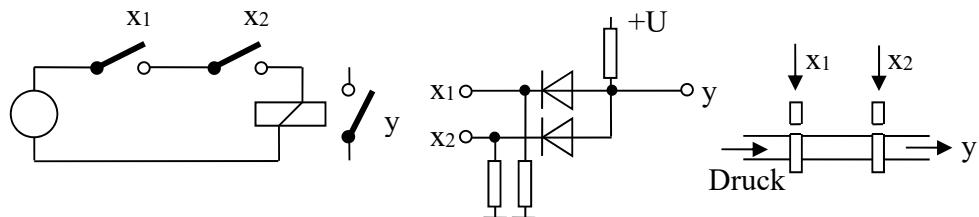


Abb. 15.7: Realisierung einer UND-Schaltung mit Relais, Dioden und Pneumatik

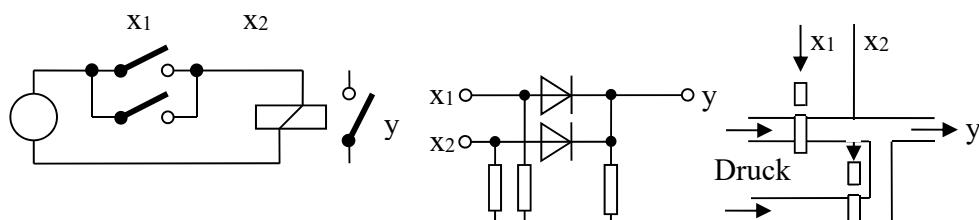


Abb. 15.8: Realisierung einer ODER-Schaltung mit Relais, Dioden und Pneumatik

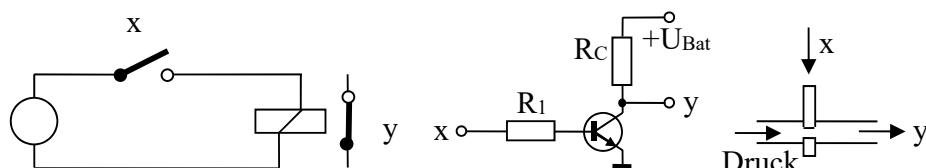


Abb. 15.9: Realisierung einer NICHT-Schaltung mit Relais, Transistor und Pneumatik

Eine Logik mit Relais ist zu groß und mechanisch zu anfällig, die Dioden-Transistor-Logik hat ungünstige Bedingungen bezüglich der Ein- und Ausgangsbelastung. Durchgesetzt hat sich die *TTL-Schaltungstechnik* (Transistor-Transistor-Logik) und in hochintegrierten Schaltungen die *C-MOS Schaltungstechnik* (vergleiche Abb. 12.38). In speziellen Bereichen werden pneumatische oder hydraulische Elemente eingesetzt.

**Praxistipp:** Bei TTL-Schaltkreisen dominiert die Realisierung verbundener Funktionen.

- NAND

$\overline{x_1 \wedge x_2} = y$	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y
	0	0	1
	1	0	1
	0	1	1
	1	1	0

Wenn  $(x_1 \wedge x_2)$  nicht erfüllt ist, dann ist y wahr.

- NOR

$\overline{x_1 \vee x_2} = y$	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y
	0	0	1
	1	0	0
	0	1	0
	1	1	0

Wenn  $(x_1 \vee x_2)$  nicht erfüllt ist, dann ist y wahr.

**Praxistipp:** Die Nutzung dieser Bausteine stellt keine Einschränkung dar, da mit mehreren Bausteinen beider oder eines beider Typen alle Funktionen realisierbar sind (siehe Absorptionsgesetze Abschnitt 14.1).

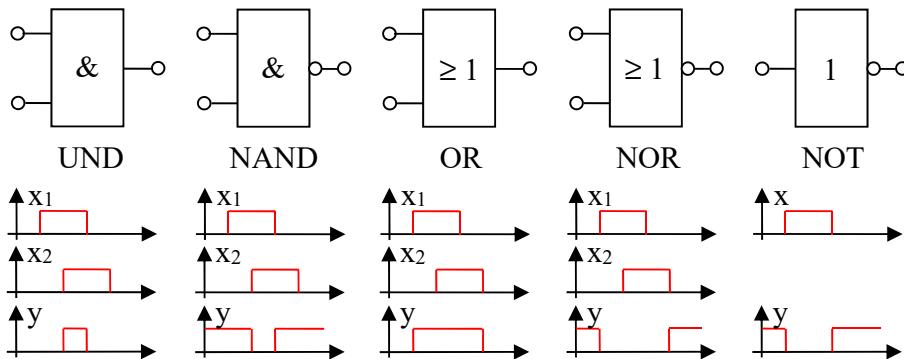


Abb. 15.10: Symbole für die logischen Operationen und ihre Signalverläufe

Für die logischen Grundfunktionen und ihre Operationen werden die *Symbole* in Abb. 15.10 verwendet. Darunter sind die Zeitverläufe der Ein- und Ausgangssignale dargestellt. Die Zeitverläufe der Ein- und Ausgangssignale zeigen die Wirkungsweise der Funktionen noch einmal sehr deutlich. Bei zusätzlicher Beachtung von *Reaktionszeiten* (wie Ansprechverzögerung oder Abfallverzögerung) kann mit solchen Darstellungen bei komplexeren *Schaltungen* überprüft werden, ob durch unterschiedliche Verzögerungen Schaltfehler (*Hazards*) entstehen können.

Beim Entwurf logischer Schaltungen wird von der gewünschten Gesamtfunktion ausgegangen und danach werden alle Bedingungen mit ODER verbunden (disjunktive kanonische Normalform)<sup>176</sup>. Anschließend kann der Ausdruck mit den Rechenregeln (Abschnitt 14.1) minimiert werden.

<sup>176</sup> Es ist auch eine konjunktive kanonische Normalform möglich.

Bei  $y = 1$  soll z.B. die Tür offen sein, wenn entweder  $x_1 = 1$  jemand hineingeht oder  $x_2 = 1$  jemand hinausgeht. Die Tür muss also offen ( $y = 1$ ) sein, wenn  $x_1 \bar{x}_2$  nur jemand hineingeht oder  $\bar{x}_1 x_2$  nur jemand hinausgeht oder beides  $x_1 x_2$  vorliegt. Dann

$$y = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

$$y = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(x_1 \vee \bar{x}_1) \quad \text{mit Klammern zusammengefasst}^{177}$$

$$y = x_1 \vee x_2$$

Für das Minimieren bis zur Minimalform (ohne Redundanz) wurden auch grafische Methoden (z.B. das *Karnaugh-Veitch-Diagramm*) entwickelt.

**Praxistipp:** Heute gibt es dazu Rechnerprogramme, mit denen neben dem Minimieren auch eine Optimierung auf die vorhandenen logischen Elemente (z.B. in einem ASIC) durch gezieltes Erweitern stattfindet.

### 15.1.4 Übungsaufgaben zu Zahlen, Codierung und Schaltalgebra

#### Aufgabe 15.1

Wandeln Sie die Dezimalzahl 128, 192 und 240 (die in Subnetmasken vorkommen können) jeweils in eine Hexadezimalzahl, Oktalzahl und Binärzahl um.

Frage: Was ist jedes Mal zu erkennen?

#### Aufgabe 15.2

Führen Sie eine bitweise UND-Verknüpfung der Binärzahlen der IP-Adresse 134.28.125.31 mit der Subnetmaske 255.255.255.128 (Dezimalzahlangabe) durch.

Frage: Was fällt dabei auf?

#### Aufgabe 15.3

Addieren Sie  $118_{\text{Dez}}$  und  $10_{\text{Dez}}$  als Binärzahlen. Multiplizieren Sie beide Zahlen als Binärzahlen. Multiplizieren Sie  $118_{\text{Dez}}$  und  $8_{\text{Dez}}$  als Binärzahlen.

#### Aufgabe 15.4

Gegeben ist ein Codelineal mit 3 bit Auflösung von 0 bis 10 mm.

Frage 1: Wie lautet der Gray-Code für die Position 5,4 mm?

Frage 2: Wie lautet der Code an gleicher Position bei 4 bit Auflösung?

#### Aufgabe 15.5

Stellen Sie für beide Schaltungen die Funktionen auf.

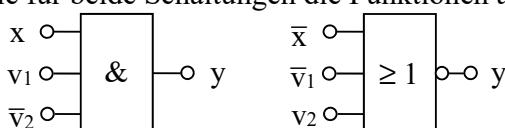


Abb. 15.11: Signal mit zwei Verriegelungen ( $v_1$ =Luftklappe,  $v_2$ =Sicherheitstür)

Frage: Was zeigt der Vergleich?

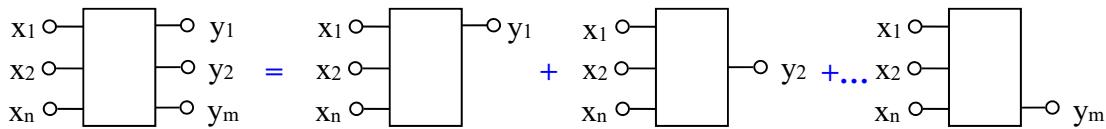
<sup>177</sup> Dabei ist es zulässig, den ersten Term zweimal zu benutzen, da das logische Ergebnis unverändert bleibt.

## 15.2 Kombinatorische Schaltungen (Schaltnetze)

### 15.2.1 Entwurf kombinatorischer Schaltungen

Kombinatorische Schaltungen oder **Schaltnetze** bestehen aus OR, (NOR,) AND, (NAND) und NOT Funktionen (Bausteinen), sind aber *speicherfrei*.

Im Allgemeinen findet eine getrennte Betrachtung aller Eingangs- mit den jeweiligen Ausgangsgrößen statt.



**Abb. 15.12: Allgemeines Schaltnetz mit n Ein- und m Ausgängen**

Die Aufgabenstellung für ein Schaltnetz muss für jede vorkommende Kombination der Eingänge festlegen, welche Werte die Ausgänge annehmen müssen. Dazu ist eine **Belegungstabelle** zu erarbeiten. Das Beispiel einer Treppenlichtsteuerung soll das demonstrieren.

- $x_1$  Taster Erdgeschoss (ein oder aus)
- $x_2$  Taster Obergeschoss (ein oder aus)
- $x_3$  Zeitschalter (läuft oder abgelaufen)
- $y_1$  Licht (ein oder aus)
- $y_2$  Kontrolllicht in den Tastern (ein oder aus)
- $y_3$  Zeitschalter (starten oder nicht starten)

In der Belegungstabelle müssen die Ausgänge für alle Kombinationen der möglichen Zustände aller Eingänge festgelegt werden. Bei drei Eingängen gibt es 8 Kombinationen.

Nr.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
1	0	0	0	0	1	0	nur Kontrollleuchten sollen auf ein sein
2	1	0	0	1	1	1	wenn Taster 1 betätigt, Licht und Zeitschalter ein
3	0	1	0	1	1	1	wenn Taster 2 betätigt, Licht und Zeitschalter ein
4	1	1	0	1	1	1	gleichfalls, wenn zufällig beide Taster betätigt
5	0	0	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
6	1	0	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
7	0	1	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
8	1	1	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren

**Tabelle 15.2: Belegungstabelle**

In Kombination 2, 3 und 4 könnten alternativ für die geplante Funktion die Kontrollleuchten der Taster auch aus sein.

Aus der Belegungstabelle können die **disjunktiven kanonischen Normalformen** (eine ODER-Verknüpfung aller Eingangsbelegungen für jeweils  $y = 1$ ) für jeden Ausgang erstellt werden. Für  $y_1$  ergibt das die Belegungen 2 bis 8, für  $y_2$  die Belegungen 1 bis 4 und für  $y_3$  die Belegungen 2 bis 4.

$$y_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

$$y_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

$$y_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

( 15.2 )

Durch **Minimierung** kann daraus die Form erstellt werden, die den geringsten Bauelementebedarf erfordert.

$$y_3 = (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2) \bar{x}_3 = [(x_1 \vee \bar{x}_1)x_2 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2)x_1] \bar{x}_3 = \underline{(x_1 \vee x_2)} \bar{x}_3$$

↳ wird zweimal verwendet

$$y_2 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2) \bar{x}_3 = \underline{\bar{x}_3}$$

↳ Klammer immer erfüllt

$$y_1 = (x_1 \vee x_2) \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2) x_3 = \underline{(x_1 \vee x_2) \bar{x}_3} \vee x_3$$

↳ 2...4 wie oben      ↳ Klammer immer erfüllt

( 15.3 )

Technisch reicht alternativ auch  $y_1 = x_3$  für die richtige Funktion; dann würde das Licht erst nach Loslassen des Tasters leuchten.

**Praxistipp:** Die **logische Schaltung** (das Schaltnetz) kann direkt nach den minimierten Funktionen aus der Belegungstabelle aufgebaut werden.

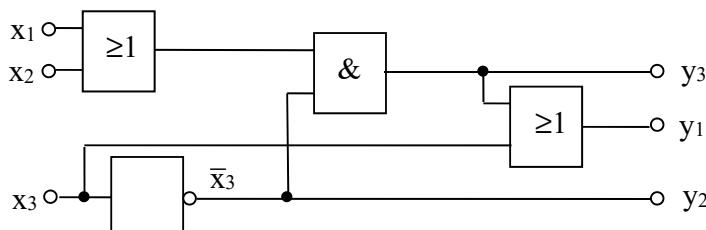


Abb. 15.13: Schaltung der Treppenlichtsteuerung

Für Abb. 15.13 sind in der Regel drei Schaltkreise (1x OR, 1x AND und 1x NOT) notwendig und es bleiben in den üblicherweise verwendeten Mehrfachgattern viele Gatter ungenutzt.

**Praxistipp:** Oft ist es günstiger, die Schaltung nur aus einer Sorte Gatter zu realisieren.

In diesem Beispiel soll die Treppenlichtsteuerung nur aus NOR-Gattern aufgebaut werden.

Dazu sind die drei **Funktionen** ( 15.3 ) so zu **erweitern**, dass sie nur negierte ODER ( $\bar{a} \vee \bar{b}$ ) erfordern.

**Praxistipp:** Es kann immer ohne Veränderung eine doppelte Negation verwendet werden.

$$y_1 = \overline{(x_1 \vee x_2) x_3} \vee x_3 = \overline{(x_1 \vee x_2) \vee x_3} \vee x_3 = \overline{(x_1 \vee x_2) \vee x_3 \vee x_3} = \overline{\overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \vee x_3}}} = y_1$$

( 15.4 )

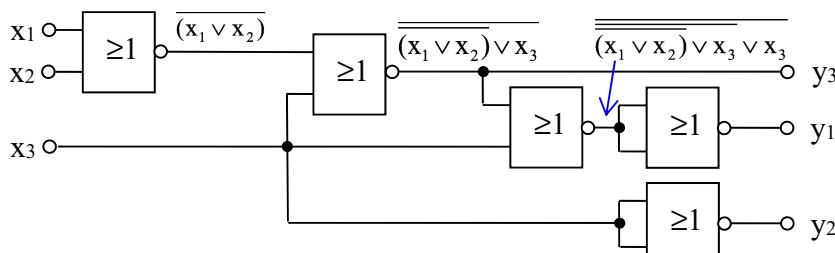


Abb. 15.14: Schaltung der Treppenlichtsteuerung mit 5 NOR-Gattern

Bei der Umformung wurden die Absorptionsgesetze verwendet. Für  $\bar{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}$  werden also beide Variablen und die logische Funktion ( $\wedge \rightarrow \vee$ ) jeweils „negiert“.

Diese Realisierung benötigt 5 NOR-Gatter; es können demnach z.B. **zwei** Schaltkreise mit je vier NOR-Gattern verwendet werden.

### 15.2.2 Wichtige Beispiele zu Schaltnetzen

Neben den Grundfunktionen werden oft abgeleitete Funktionen benötigt. Als Beispiele werden das Exklusiv-Oder, der Halb- und der Volladdierer dargestellt (mehr z.B. in (Tie10 S. 647 ff)).

Das *Exklusiv-Oder* (also die Funktion „entweder oder“) EXOR-Baustein mit dem Symbol „=1“:

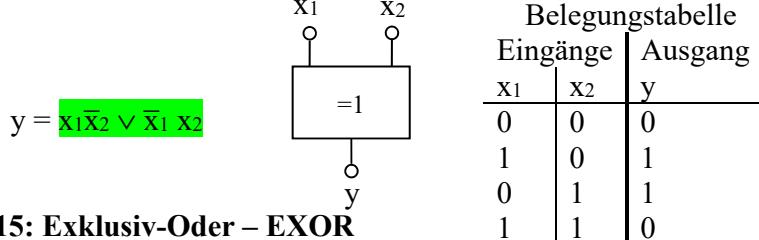


Abb. 15.15: Exklusiv-Oder – EXOR

Eine *Analyse des Algorithmus* der Addition ergibt die erforderliche *Belegungstabelle*.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c} 111 \\ + \quad \downarrow 11 \\ \text{K11} \end{array} & \begin{array}{c} 7_D \\ 3_D \\ \hline 10_D \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \text{Überträge} \\ \hline 1010 \end{array} &
 \end{array}$$

Zuerst wird die *niedrigste Stelle* beider Zahlen betrachtet.

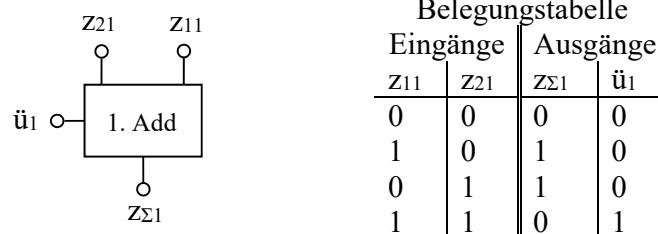


Abb. 15.16: Addition der niedrigsten Ziffern z<sub>11</sub> und z<sub>21</sub> zweier Zahlen

Die *logischen Funktionen* aus der Belegungstabelle werden:

- für die Summe (disjunktive Normalform mit zwei Ausdrücken, für die z<sub>Σ1</sub> = 1 ist):  
 $z_{\Sigma 1} = z_{11} \bar{z}_{21} \vee \bar{z}_{11} z_{21}$  ,  
 (Das entspricht einem Exklusiv-Oder.)
- und für den Übertrag (mit nur einem Ausdruck, für den ü<sub>1</sub> = 1 ist)  
 $\ddot{u}_1 = z_{11} z_{21}$

eine einfache UND-Verknüpfung.

Für die *n-te Stelle* muss der Übertrag der (n-1)-ten Stelle zusätzlich berücksichtigt werden.

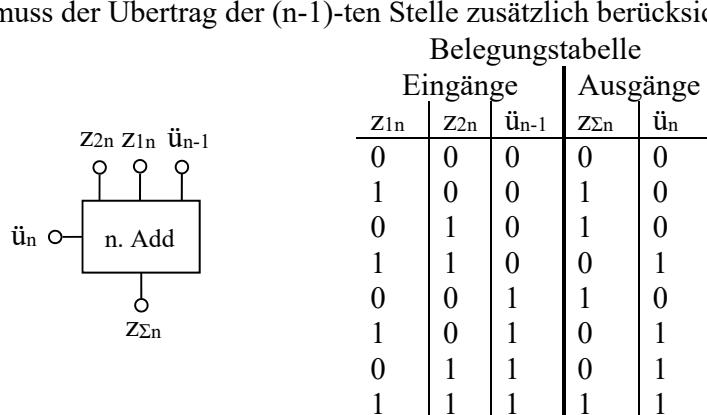


Abb. 15.17: Addition der n-ten Ziffern z<sub>1n</sub> und z<sub>2n</sub> zweier Zahlen

Die *logischen Funktionen* für die n-te Stelle (mit je vier Ausdrücken, die 1 sind) werden:

$$z_{\Sigma n} = z_{1n} \bar{z}_{2n} \bar{u}_{n-1} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n} \bar{u}_{n-1} \vee \bar{z}_{1n} \bar{z}_{2n} u_{n-1} \vee z_{1n} z_{2n} u_{n-1}$$

$$\bar{u}_n = z_{1n} z_{2n} \bar{u}_{n-1} \vee z_{1n} \bar{z}_{2n} u_{n-1} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n} u_{n-1} \vee z_{1n} z_{2n} \bar{u}_{n-1}.$$

Nach dem *Minimieren* wird daraus:

$$z_{\Sigma n} = (z_{1n} \bar{z}_{2n} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n}) \bar{u}_{n-1} \vee (\bar{z}_{1n} \bar{z}_{2n} \vee z_{1n} z_{2n}) u_{n-1}$$

$$z_{\Sigma n} = A \bar{u}_{n-1} \vee \bar{A} u_{n-1} \quad \text{mit } A = (z_{1n} \bar{z}_{2n} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n}) \quad ^{178}$$

$$\bar{u}_n = z_{1n} z_{2n} \bar{u}_{n-1} \vee z_{1n} \bar{z}_{2n} u_{n-1} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n} u_{n-1} \vee z_{1n} z_{2n} \bar{u}_{n-1}$$

$$\bar{u}_n = z_{1n} z_{2n} (\bar{u}_{n-1} \vee u_{n-1}) \vee (z_{1n} z_{2n} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n}) u_{n-1} = z_{1n} z_{2n} \vee (z_{1n} \bar{z}_{2n} \vee \bar{z}_{1n} z_{2n}) u_{n-1}$$

In der Praxis hat es sich bewährt, einen Baustein für einen *Halbaddierer* und mit zwei Halbaddierern einen *Volladdierer* für die Addition einer Stelle zu realisieren. Diese Volladdierer können dann *je nach Anzahl der Stellen aneinandergehängt* werden. So erreicht man eine sehr flexible Anordnung.

Der Halbaddierer entspricht der Addition der niedrigsten Stelle einer Ziffer.

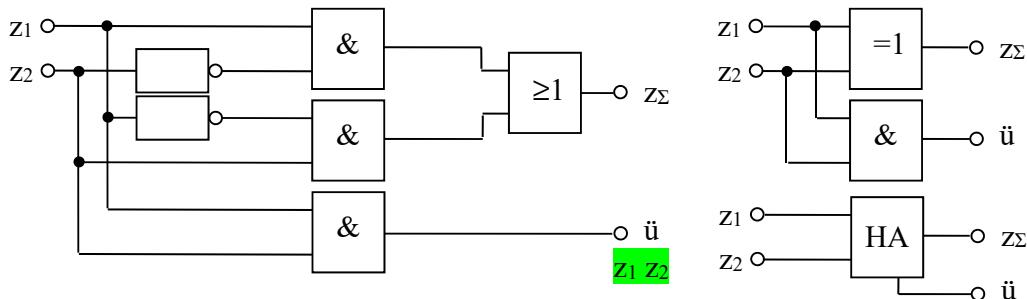


Abb. 15.18: Halbaddierer mit NOT, AND und OR, mit EXOR und AND und als Symbol

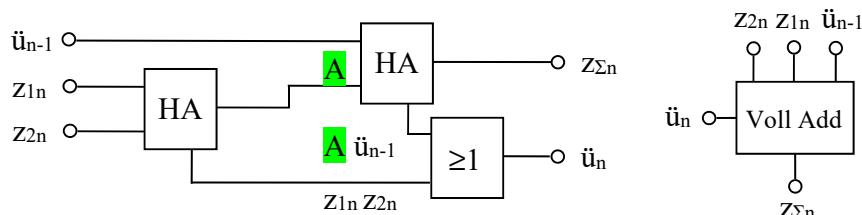


Abb. 15.19: Volladdierer mit zwei Halbaddierern und OR sowie als Symbol

Für eine *Addition von m Ziffern* werden m Volladdierer verbunden.

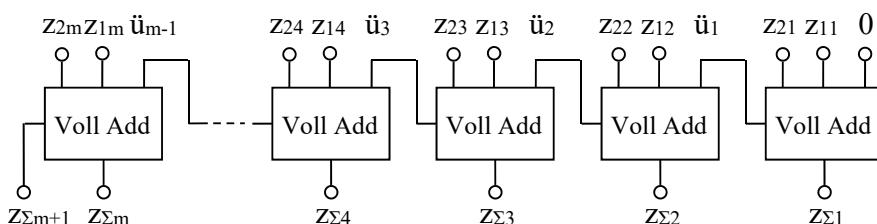


Abb. 15.20: Addition von zwei Zahlen mit m Ziffern

**Praxistipp:** In der Rechentechnik werden viele weitere kombinatorische Schaltungen (also Schaltungen ohne Speicher) verwendet, z. B. Vergleicher ( $>$ ,  $=$ ,  $<$ ), zur Multiplikation die Linkverschiebung, zur Division die Rechtsverschiebung oder die Komplementbildung.

<sup>178</sup> Vergleiche Belegungstabelle;  $z_{\Sigma n}$  entspricht  $A \bar{u}_{n-1} \vee \bar{A} u_{n-1}$

### 15.2.3 Übungsaufgaben und Versuch zu Schaltnetzen

#### Aufgabe 15.6

Es ist die Belegungstabelle, die Funktion und die Schaltung für einen Vergleich zweier logischer Werte entsprechend  $y = x_1 > x_2$  (Werte jeweils True oder False) zu entwickeln.

#### Aufgabe 15.7

Es ist für die Treppenlichtsteuerung nach ( 15.3 ) eine Schaltung ausschließlich mit NAND-Gattern zu entwickeln.

#### Aufgabe 15.8 Versuch zu Schaltnetzen

Messtechnische Untersuchung der Schaltungen der Treppenlichtsteuerung.

#### Versuchsaufbau:

Auf einem Testbrett ist die Schaltungen mit jeweils zwei vierfach NOR bzw. NAND Bausteinen zu stecken. Die Eingänge sind mit Steckern entsprechend dem gewünschten Zustand auf Masse bzw. +5 V zu legen. Die Ausgänge der Schaltung sind mit je einer Anzeigediode zu verbinden.

#### Versuchsdurchführung:

Der gesamte Belegungstabelle ist zu überprüfen.

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

Nur die vollständige Überprüfung der Belegungstabelle stellt die richtige Funktion sicher.

## 15.3 Sequentielle Schaltungen (Schaltwerke)

### 15.3.1 Wichtige Speicheranordnungen

Sequentielle Schaltungen oder **Schaltwerke** bestehen aus Schaltnetzen mit *Speichern* (mindestens einem) zur Rückführung von den Ausgangs- zu den Eingangswerten.

In Abb. 15.21 wird das Grundprinzip eines Schaltwerkes dargestellt. Je nach Arbeitsweise sind dabei verschiedene Speichertypen einzusetzen.

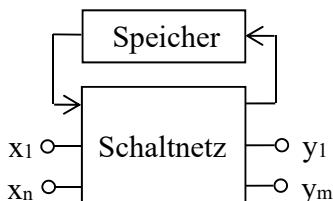


Abb. 15.21: Prinzip eines Schaltwerks

Speicher werden in der Elektronik durch bistabile Kippstufen realisiert. Diese können asynchron oder synchron arbeiten.

Die **asynchrone Kippstufe** wird als *RS-Flipflop* z.B. durch zwei NOR realisiert. Dabei existieren ein Eingang zum Setzen des Speichers und ein zweiter zum Löschen (*Reset*). Normalerweise steht sowohl der Ausgang (Q) als auch der negierte Ausgang zur Verfügung.

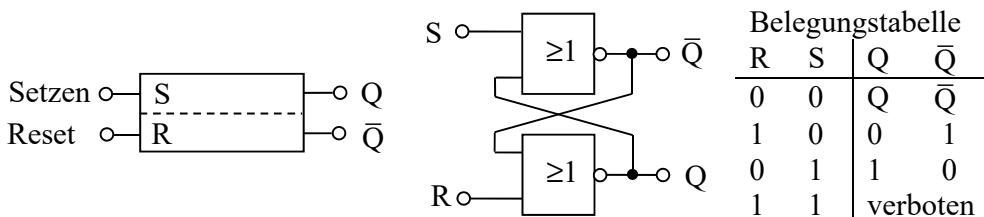


Abb. 15.22: RS-Flipflop als Symbol, mit zwei NOR-Gattern und Belegungstabelle

Liegt an S und R „0“ (entspricht Lowpegel), bleibt der gespeicherte Wert (0 oder 1) erhalten. Würden beide Eingänge gleichzeitig „1“ (entspricht Highpegel), wäre der Ausgang von vielen Zufällen abhängig und ist somit undefiniert. Dieser Fall ist deshalb verboten.

**Praxistipp:** RS-Flipflops werden in der Praxis aus zwei NOR-Gattern realisiert und stehen in der Regel nicht als Spezialbausteine zur Verfügung.

Eine **synchrone Kippstufe** enthält zusätzlich zum RS-Flipflop eine Taktsteuerung und wird auch als Auffangflipflop bezeichnet.

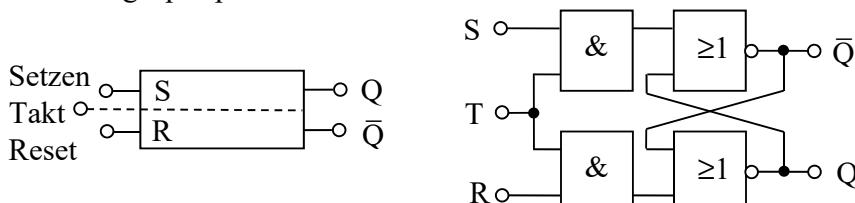


Abb. 15.23: Taktgesteuertes RS-Flipflop und Schaltung mit Gattern

Durch die zusätzlichen UND-Gatter wirken die Signale an R bzw. S nur dann am RS-Flipflop, wenn gleichzeitig das Taktsignal auf „1“ liegt. Sind mehrere dieser Flipflops hintereinander angeordnet, könnte während der Taktzeit der Wert durch mehrere Speicher laufen. Die Taktung soll aber für eine eindeutige Übernahme sorgen und keine weiteren Veränderungen zulassen.

Dazu ist in einem **RS-Master-Slave-Flipflop** neben dem Hauptspeicher ein Zwischenspeicher notwendig. Während des Taktes erfolgt so eine Übernahme in den Zwischenspeicher und nach Taktende die Übergabe in den Hauptspeicher.

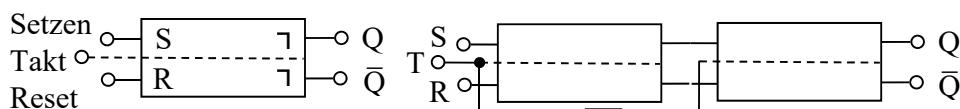


Abb. 15.24: RS-Master-Slave-Flipflop und Aufbau aus zwei getakteten RS-Flipflops

Ist das Taktsignal auf „1“, lassen beide UND-Gatter des ersten getakteten RS-Flipflops (siehe Abb. 15.23) die Signale „R“ bzw. „S“ durch, während die des zweiten getakteten RS-Flipflops durch das NOT-Gatter sperren. Damit ist der *erste Speicher offen* und kann übernehmen und der *zweite gesperrt*. Nach Taktende (Taktsignal = 0) wird der *erste Speicher gesperrt*, durch das NOT-Gatter ist der *zweite offen* und so erfolgt die Übergabe an den Hauptspeicher.

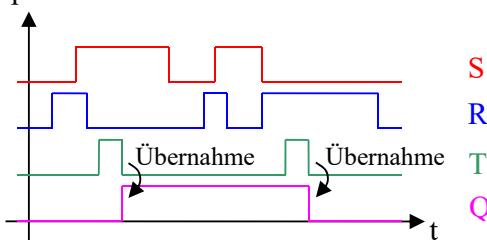
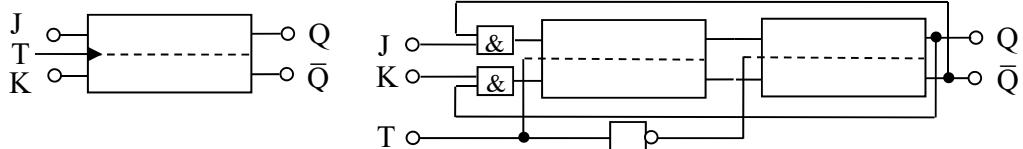


Abb. 15.25: Taktschema mit Störimpulsen

Es bleibt aber nach wie vor das gleichzeitige Auftreten von  $R = S = 1$  (während des Taktes) verboten und würde zu ungewollten Zuständen führen.

Das wird durch eine weitere Verriegelung in einem **JK-Master-Slave-Flipflop** gelöst.



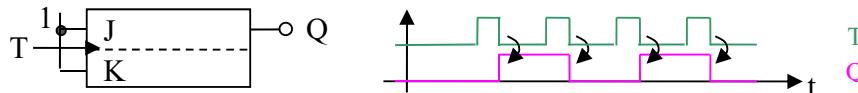
**Abb. 15.26: JK-Master-Slave-Flipflop und Aufbau aus zwei getakteten RS-Flipflops**

Liegt an J und K gleichzeitig „1“, ist je nach dem Wert von Q das obere oder untere UND-Gatter geöffnet. Durch die gekreuzte Rückführung erfolgt nach Taktende eine Umkehrung von Q ( $Q$  wird  $\bar{Q}$ ). Damit wird die Belegungstabelle nach Taktende:

K	J	Q	
0	0	$Q$	Speichern – Wert wird gehalten
1	0	0	Löschen (Reset)
0	1	1	Setzen
1	1	$\bar{Q}$	Umkehr von Q gegenüber vor dem Takt

**Praxistipp:** Die R- und S-Eingänge können zur Voreinstellung als allgemeines Preset und Reset an einen Pin zusätzlich herausgeführt sein. Damit ist das JK-Master-Slave-Flipflop ein *universell einsetzbares Speicherelement*.

Anwendung für **Teilerschaltungen**

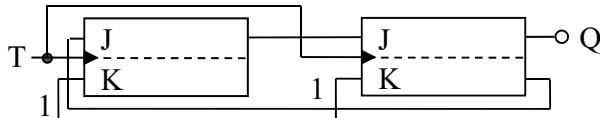


**Abb. 15.27: Teilung der Taktfrequenz auf f/2**

Werden an einem JK-Master-Slave-Flipflop J und K ständig auf „1“ gelegt, erfolgt *zum Ende jedes Taktsignals eine Umkehr des Ausgangs Q* (siehe Abb. 15.27). Das so entstehende Ausgangssignal hat demzufolge genau die halbe Frequenz. Werden jeweils an den Ausgang die Takteingänge gleicher Schaltungen (entsprechend Abb. 15.27) angeschlossen, wird die Frequenz immer wieder auf die Hälfte geteilt.

**Praxistipp:** So sind die oft benötigten  $2^n$ -Teiler ( $f/2^n$ ) einfach realisierbar.

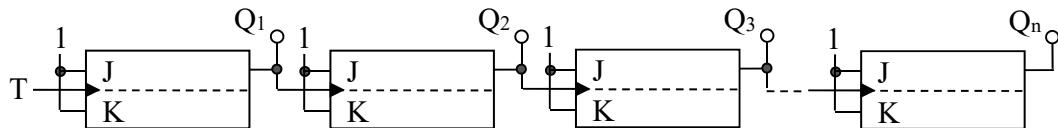
Durch eine spezielle Beschaltung sind aber auch ungerade Teiler möglich.



**Abb. 15.28: Teiler auf f/3**

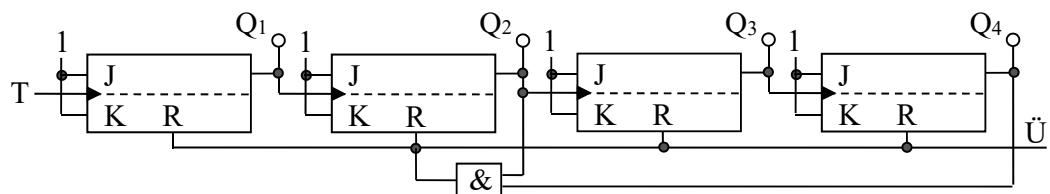
Für  $Q_1 = Q_2 = 0$  gilt  $J_1 = \bar{Q}_2 = K_1 = 1$ , aber  $J_2 = Q_1 = 0$  und  $K_2 = 1$ . Nach dem Ende des ersten Taktes wird nach der Belegungstabelle  $Q_1$  also umgekehrt ( $\rightarrow 1$ ), während  $Q_2$  gelöscht wird ( $\rightarrow$  bleibt 0). Nun sind  $J_1 = J_2 = K_1 = K_2 = 1$  und nach dem Ende des zweiten Taktes kehren sich beide Ausgänge um. Es werden  $Q_1 = 0$  und  $Q_2 = 1$ . Jetzt sind  $J_1 = \bar{Q}_2 = 0$  und  $J_2 = Q_1 = 0$  und es werden nach dem Ende des dritten Taktes beide Ausgänge gelöscht (bleiben oder werden 0). Das ist wieder der Anfangszustand. Aus *drei Takten* wird also immer *einer*. (Da die Taktfrequenz von vornherein kein Tastverhältnis von 1:1 haben muss, ist es kein Problem, dass f/3 ebenfalls kein Tastverhältnis von 1:1 hat.)

### Anwendung für **Zählerschaltungen**



**Abb. 15.29: Binarzähler für die Taktfrequenz mit Anzeige von n Binärziffern**

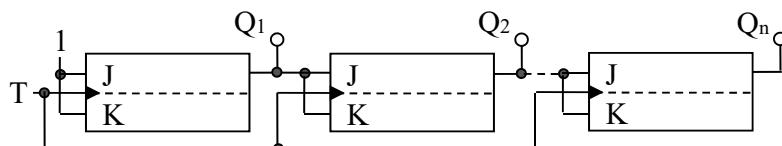
**Praxistipp:** Da jeder Baustein die Taktfrequenz auf die Hälfte teilt, erscheinen zum Schluss  $Q_n$  bis  $Q_1$  als Anzahl der Impulse. Dieser *Binärzähler* ergibt somit sofort eine Binärzahl.



**Abb. 15.30: Dezimalzähler mit BCD-Code und Übertrag für die nächste Dekade**

Ein *Dezimalzähler* wird realisiert, indem bei Erreichen der Ziffer  $10_D$  ( $1010_B$ ) ergibt am UND-Gatterausgang 1) alle Bausteine zurückgesetzt werden und die Zählung mit dem 11. Impuls neu beginnt. Gleichzeitig wird der Rücksetzimpuls als Übertrag für den Takteingang der nächsten Dekade ausgeführt.

Für die dargestellten Zählerschaltungen wirken sich die Ein- und Ausschaltzeiten der Bausteine als Laufzeitverzögerungen zwischen den Bausteinen aus. Das ergibt eine *asynchrone Zählung*, wodurch kurzzeitig Zwischenzustände möglich sind, die nicht dem aktuellen Zählerstand entsprechen.



**Abb. 15.31: Synchrone Kopplung für Zähler**

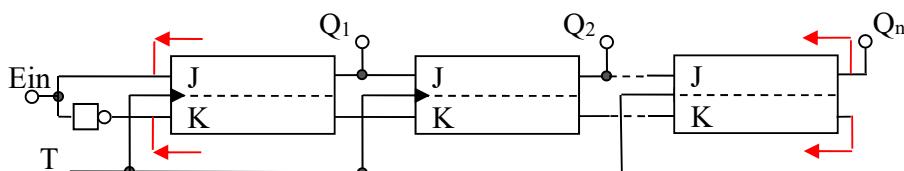
Die Kopplung der Stufen des Zählers nach Abb. 15.31 ermöglicht eine *synchrone Zählung*, da nach Taktende alle Stufen den aktuellen Wert haben. Alle Laufzeiten liegen vor dem Taktende und das Taktende wirkt an allen Stufen gleichzeitig.

**Praxistipp:** Diese *universellen Zähler mit Voreinstellung* können zusätzlich durch eine Umschaltung als *Vorwärts- und Rückwärtszähler* ausgelegt werden.

Zähler sind als Schaltkreise in vielen Konfigurationen und Varianten verfügbar.

179

### Anwendung für **Schieberegister- und Ringzählerschaltungen**



**Abb. 15.32: Schieberegister und Ringzähler (mit roter Rückführung)**

Wird am Eingang ein Bit-Muster eingespeist, läuft dieses Bit-Muster mit jedem Taktsignal Stufe für Stufe durch das Schieberegister (da eine „1“ am Ausgang ein Setzen der nächsten

<sup>179</sup> Eine voreingestellte Zahl wird zurückgezählt und kann normalerweise bei Erreichen von null einen Impuls (z.B. als Interruptsignal) auslösen.

Stufe am Ende des folgenden Taktes bewirkt; eine „0“ bewirkt ein Löschen). Dazu muss die Taktfrequenz größer oder bestenfalls gleich der Bit-Änderungsfrequenz sein. Wenn die Taktfrequenz groß genug ist, finden sich in der Belegung der Stufen auch die richtigen Zeitabstände wieder.

Wird die Rückführung in Abb. 15.32 genutzt, ergibt sich ein Ringzähler. Ein voreingestelltes *Bit-Muster* läuft mit jedem Takt im Kreis eine Stelle weiter herum.

**Praxistipp:** Außer bistabilen Kippstufen können **monostabile** und **astabile** Kippstufen realisiert und verwendet werden.

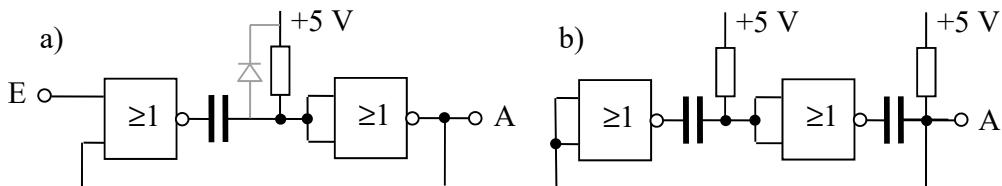


Abb. 15.33: a) monostabile und b) astabile Kippstufen

Bei der monostabilen Kippstufe wird im *Ruhezustand* kein Ladestrom für C fließen. Das ergibt folgenden *stabilen Zustand*: Eingänge des ersten NOR „0“ und Ausgang „1“, Eingänge des zweiten NOR beide „1“ und Ausgang „0“. So ist auch wirklich der untere Eingang des ersten NOR „0“ und C ungeladen. Wird an den Eingang ein kurzer Impuls gelegt, wird der Ausgang des ersten NOR „0“. Da sich der Kondensator nur langsam aufladen kann, muss das Nullsignal erst einmal auch an beiden Eingängen des zweiten NOR liegen und der Ausgang wird „1“. Damit ist ein Eingang des ersten NOR weiterhin „1“, auch wenn der Impuls zu Ende ist. Dieser *Zustand ist instabil*, weil sich der Kondensator auflädt und nach einer (durch R, C und den Schwellspannungen) festgelegten Zeit die Spannung an den Eingängen des zweiten NOR dieses durchschaltet. Damit wird der Ausgang „0“, demzufolge sind beide Eingänge des ersten NOR „0“ und der Ausgang wieder „1“. Da der Kondensator noch aufgeladen ist, würden die Eingänge des zweiten NOR auf fast 10 V angehoben werden. Die Diode ist dann aber in Durchlassrichtung und entlädt den Kondensator sehr schnell. Dadurch ist die monostabile Stufe sofort wieder im *stabilen Ruhezustand* (und erneut einsatzfähig) und die Eingänge des zweiten NOR werden vor *Überspannung geschützt*. Die Anwendung findet für die *Herstellung einer gewollten Impulslänge* statt.

Die astabile Kippstufe hat keinen *stabilen Ruhezustand*, sondern es läuft umgekehrt der gleiche instabile Vorgang ab. Damit schalten entsprechend R, C und den Schwellspannungen beide NOR immer hin und her. Die Anwendung erfolgt zur *Schwingungserzeugung*.

Weitere Anordnungen sind in (Tie10 S. 673 ff) zu finden.

### 15.3.2 Beispiel für den Entwurf einer Ablaufsteuerung

**Ablaufsteuerungen** bzw. *Schrittketten* sind die Hauptanwendungen von **Schaltwerken**. Für diese ist heute eine Programmiersprache in der IEC 61131-3 festgelegt.

Als Beispiel soll die Regelung einer Heizungsanlage für ein Wohnhaus entworfen werden.

Der **Ausgangspunkt** ist die *Analyse deren Funktionen*. Die erforderlichen sind:

- das Verarbeiten des manuellen Ein- und Ausschaltens der Anlage,
- die Steuerung der Umwälzpumpe (Einschalten, wenn die Heizung läuft),
- die temperaturabhängige Steuerung des Brenners und
- die Steuerung von Kontrolllampen für Pumpe und Brenner.

In diesem vereinfachten Beispiel soll die Temperaturregelung durch Ein- und Ausschalten des Brenners zwischen oberem und unterem Temperatursollwert des Raumes realisiert werden.

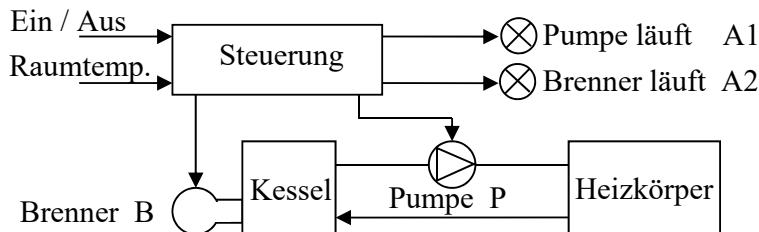


Abb. 15.34: Prinzipdarstellung der Heizungsanlage

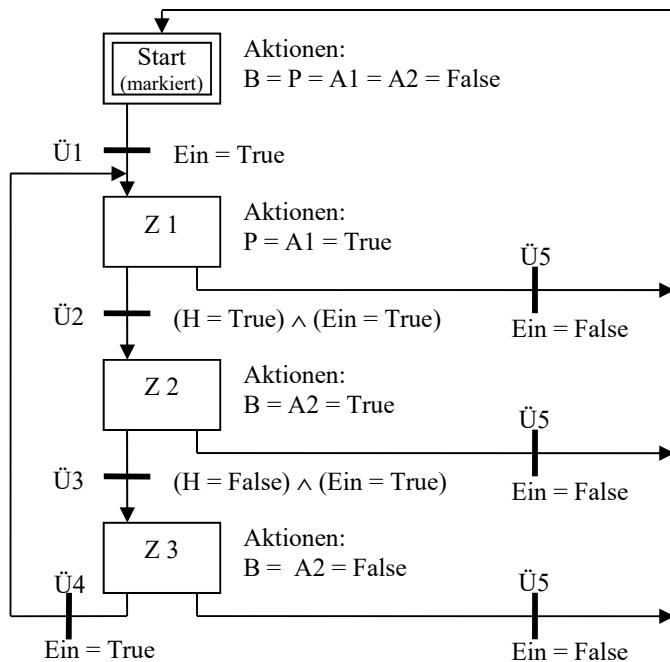


Abb. 15.35: Funktionsplan der Steuerung (Ablaufsteuerung)

Im **Funktionsplan der Steuerung** (Abb. 15.35) bedeuten (analog zu IEC 61131-3):

- Start = **Startzustand**, dieser ist zu Beginn aktiviert (markiert) und seine Aktionen werden sofort zu Beginn ausgeführt (*Ausgangszustand* wird hergestellt).
- Z1 bis Z3 = **Zustände** mit ihren **Aktionen**.
- $\bar{U}_1$  bis  $\bar{U}_5$  = **Übergangsbedingungen (Transitionen)**; wenn sie erfüllt sind, wird der *nächste Zustand aktiviert* und der *alte Zustand deaktiviert*. Somit werden danach die Aktionen des neuen Zustandes ausgeführt.
- Ein = True, wenn die Heizung manuell eingeschaltet wurde, sonst False.
- H = Wärmeanforderung, sie ist True, wenn die Isttemperatur kleiner ist als die untere Solltemperatur ( $t_{\text{ist}} < t_{\text{soll untere}}$ ), und False, wenn  $t_{\text{ist}} > t_{\text{soll obere}}$  ist.

Die Transitionen in Abb. 15.35 wurden so dargestellt, dass bei mehreren möglichen immer nur eine logisch richtig sein kann (mit Hilfe der UND Verknüpfungen). Praktisch sind auch **Prioritäten** einstellbar.

Die Aktionen des Zustands Z3 werden *genau einmal durchgeführt*, weil eine der anschließenden Transitionen immer sofort erfüllt ist (jeder Zustand wird mindestens einmal ausgeführt).

**Praxistipp:** Auf der Basis des Funktionsplanes kann eine *Hardwaresteuerung* als **Schrittkette** (eine Grundform des Schaltwerkes) entworfen werden.

Jeder Hardwareschritt besteht aus einem Speicher, der zur *Aktivierung* gesetzt und zur *Deaktivierung* gelöscht werden kann. Der *Speicherausgang* steuert die Aktionen. Beim Start

(Power-On-Reset) erhält der Speicher des ersten Schritts ein *Preset*- und alle anderen einen *Reset*-Impuls. D.h., nur der erste Schritt ist nach dem Start aktiviert.

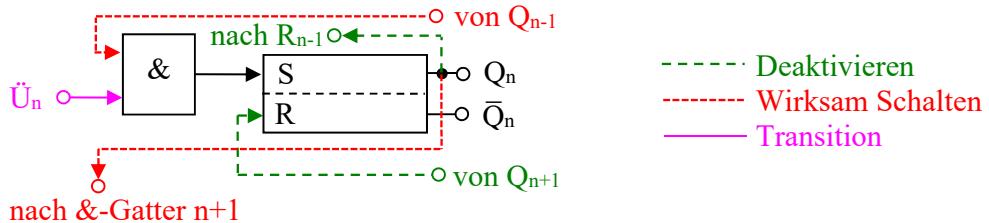


Abb. 15.36: Hardware für den n-ten Schritt

Nur wenn der *vorherige Schritt aktiv* ist ( $Q_{n-1} = 1$ ), wirkt die *Transition* ( $\ddot{U}_n$ ) über das UND-Gatter. Wird dieser Schritt durch  $\ddot{U}_n = 1 \rightarrow S = 1 \rightarrow Q_n = 1$  aktiv, wirkt  $Q_n = 1$  auf  $R_{n-1}$  zurück und *löscht* den Speicher des *vorherigen Schritts*. Durch  $Q_n = 1$  wird außerdem die *Transition des nächsten Schritts auf Durchgang gesetzt*.

Wenn der *nächste Schritt aktiv* wird ( $Q_{n+1} = 1$ ), wird der *aktuelle Schritt vom nächsten über R gelöscht* (deaktiviert).

$Q_n$  und  $\bar{Q}_n$  werden zum Schalten der *Aktionen* eingesetzt.

**Praxistipp:** Die Übergangsbedingungen werden z.B. durch kombinatorische Schaltungen realisiert. Für die Aktionen werden weitere Speicher benötigt, wenn sie über den aktuellen Schritt hinaus bestehen sollen. Dabei können durch kombinatorische Schaltungen zusätzlich Verriegelungen realisiert werden.

Der Funktionsplan (Abb. 15.35) zeigt, dass einige Zustände von *mehreren Transitionen* aktiviert werden können. Darüber hinaus sind dann auch *mehrere Vorgänger* vorhanden. Auch das muss durch entsprechende kombinatorische Schaltungen berücksichtigt werden.

Abb. 15.37 stellt die vollständige Schaltung der Hardware des Beispiels der vereinfachten Heizungssteuerung vor.

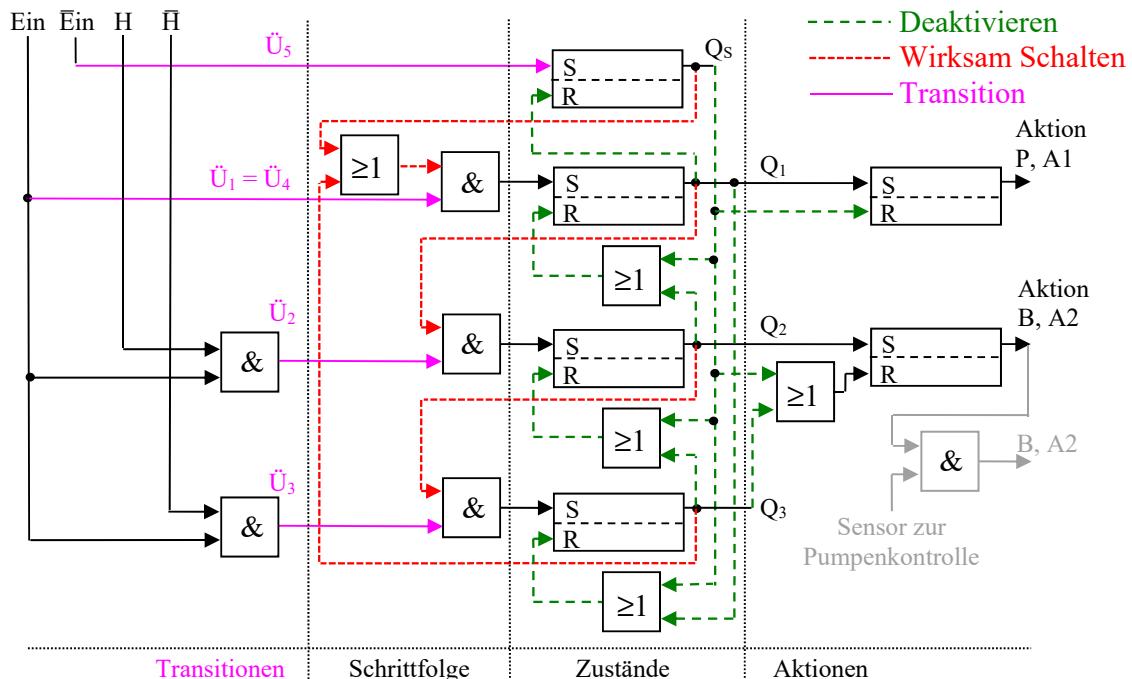


Abb. 15.37: Hardware der Heizungssteuerung

Es ist deutlich zu sehen, dass bei mehreren Nachfolgern durch das ODER-Gatter jeder Zustand löschen kann (der 1. und 2. Zustand je durch den Zustand Start und auch durch den unmittelbaren Nachfolger; der 3. Zustand durch den Zustand Start und durch den 1. Zustand). Genauso wird die Transition des 1. Zustands sowohl vom Zustand Start als auch vom 3. auf wirksam geschaltet.

Eine *Verriegelung* für den Fall, dass die Pumpe ausfällt und somit nicht wirksam ist, zeigt die zusätzliche grau angedeutete Schaltung.

Nicht dargestellt worden sind die *Verbindungen des Preset-Pins* vom Zustand Start und der *Reset-Pins* aller anderen an den Reset-Taster. Weiterhin muss die Spannungsversorgung der Bausteine berücksichtigt werden.

### 15.3.3 Versuch zur Schrittkette \*

Untersuchung der Schaltung der Heizungssteuerung.

#### Versuchsaufbau:

Es ist auf einem Testbrett die Schaltung aufzubauen.

(Im günstigen Fall steht ein vorbereitetes Modul der Schrittkette zur Verfügung.) Für die Wärmeanforderung mit Temperaturerfassung kann ein Vergleicherbaustein eingesetzt werden. Der Einschalter ist mit einem Umschalter zwischen Masse bzw. +5 V zu realisieren. Die Ausgänge der Aktionen mit je einer Anzeigediode zu verbinden.

**Versuchsdurchführung:** Überprüfen Sie die Funktion aller Kombinationen von Ein und H.

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

Nur die vollständige Überprüfung aller Kombinationen stellt die richtige Funktion sicher. Es sind evtl. Fehler im vorbereiteten Modul zu finden.

## 15.4 Richtungen der weiteren Entwicklung

**Praxistipp:** Die in den Abschnitten 15.2 und 15.3 dargestellten Bausteine und deren Möglichkeiten sind nach wie vor für kleinere Aufgaben sehr vorteilhaft einsetzbar.

Die weitere Entwicklung geht über

- SPLD (Simple Programmable Logic Device),
- PLA (Programmable Logic Array),
- PAL (Programmable Array Logic),
- GAL (Gate Array Logic),
- CPLD (Complex Programmable Logic Device),
- FPGA (Field Programmable Gate Array),
- ASIC (Application Specific Integrated Circuit)

zu **hochintegrierten Logikanordnungen**, die in der Regel von einem Konfigurationsprogramm einmalig *frei konfiguriert* werden können (Erstellen des gewünschten Schaltnetzes bzw. -werkes). In diesen Bausteinen ist je nach Typ eine relativ große Anzahl von Gattern, Speichern usw. Ein- und Ausgängen, evtl. A/D- und D/A-Wandlern usw. enthalten.

Eine andere Entwicklungsrichtung geht zu **programmierbaren und prozessorgesteuerten Lösungen**. SPS (Speicherprogrammierbare Steuerungen) standen am Anfang und werden

umfangreich und heute teilweise mit Feldbusssystemen eingesetzt. Heute werden insbesondere für größere Aufgaben auch vorteilhaft Industrie-PC eingesetzt.

Aus in den Abschnitten 15.2 und 15.3 aufgezeigten Entwicklungen sind auch die für SPS genormten Programmiersprachen (IEC 61131-3) mit hervorgegangen und viele *Lösungen wurden direkt übernommen* (z.B. die Schrittkette).

# 16 Analyse von Signalen und Systemen

Hilfreich für das Verständnis kann die Wiederholung der mathematischen Abhandlungen in Abschnitt 10 sowie zusätzlich Abschnitt 11 sein. Es werden

- wichtige analoge Signale und Systeme in der Elektronik mit ihren Beschreibungen und Parametern – Audio- und Videosignale,
- analoge Modulationsverfahren – Amplituden-, Frequenz- und Phasenmodulation,
- diskrete Signale und deren Beschreibung,
- Protokolle für Übertragung und Speicherung,
- digitale Modulationsverfahren sowie
- Codierung, Kompression und Fehlerkorrektur digitaler Signale

anhand von Beispielen vorgestellt.

## Vorbemerkungen

Insgesamt zeigte sich, dass zwei äquivalente Betrachtungs- bzw. Darstellungsweisen für Signale und Systeme bestehen – die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung**. Für die Frequenzdarstellung existieren darüber hinaus mehrere Transformationen.

Jede dieser Darstellungsweisen kann gleichberechtigt zur Analyse von Signalen und Systemen angewandt werden. Dabei treten jeweils andere Aspekte besonders deutlich hervor. Es ist sinnvoll, immer die Darstellung zu nutzen, die am einfachsten und deutlichsten die gewünschten Ergebnisse hervorbringt. Folgende Methoden stehen zur Verfügung:

- Zeitdarstellung als Funktion, analoge Messkurve bzw. abgetastete Messkurve,
- Frequenzspektrum nach der Fourierreihe (siehe Abschnitte 10.4 und 11.2.2),
- Frequenzspektrum nach der Fouriertransformation (siehe Abschnitte 10.6 und 11.3.1) bzw. (aber heute selten) analog gemessen,
- Frequenzspektrum nach der diskreten Fouriertransformation (siehe Abschnitte 10.7 und 11.3.2) oder als diskrete gemessene Spektralwerte sowie
- Kurzzeitfrequenzspektrum als diskrete gemessene Spektralwerte (siehe Abschnitt 16.3.1).

Damit sind sowohl *determinierte* als auch *stochastische* und genauso *analoge* wie *digitale Signale* zu behandeln.

Zur Beschreibung von *linearen zeitinvarianten Systemen* stehen Übertragungsfunktionen im Zeit- ( $g(t)$ ) sowie im Frequenzbereich ( $H(j\omega)$  oder  $H(p)$ ) (siehe Abschnitt 11.4.3) zur Verfügung.

*Abtastsysteme*, die insbesondere in der modernen Regelungstechnik auftreten, werden mit der Z-Transformation und entsprechenden Z-Übertragungsfunktionen behandelt (siehe Spezialliteratur z.B. (Fri85 S. 83 ff)).

Im Folgenden sollen ein Überblick sowie wichtige Einblicke in grundlegende theoretische Zusammenhänge zu dieser Thematik hauptsächlich mit Hilfe einiger einfacher Beispiele dargestellt werden<sup>180</sup>.

<sup>180</sup> Eine der ersten Darstellungen, die weitgehend vollständig und verständlich ist, geben die drei Bände (Lan73).

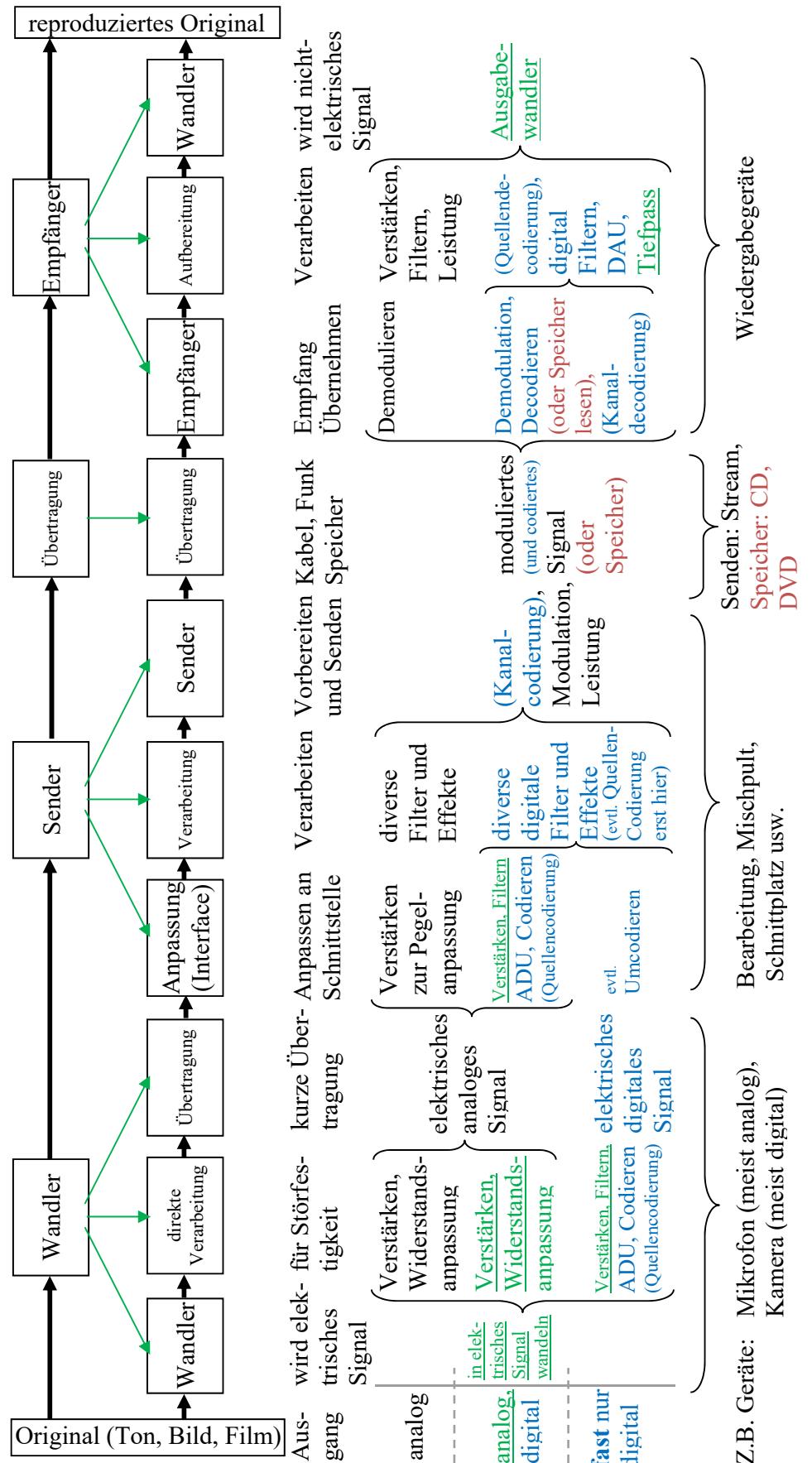


Abb. 16.1: Kette der Signalverarbeitung vom Original bis zur Wiedergabe

An den Anfang wird bewusst die gesamte „*Kette“ der Signalverarbeitung* vom Original bis zur Wiedergabe als Übertragungskette gestellt (inclusive eines physikalischen Übertragungskanals). In Abb. 16.1 sind beispielhaft die Funktionen und Aufgaben zu sehen, die nacheinander zu realisieren sind. Dabei wurde versucht, die unterschiedlichen Varianten einer analogen bzw. digitalen Verarbeitung zu verdeutlichen. Alle weiteren Darlegungen bauen dann darauf auf.

Auch wenn eine nachrichtentechnische Sichtweise im Vordergrund steht, erfolgt die Verarbeitung von *Sensorsignalen* in analoger Weise. Für deren Verarbeitung müssen grundsätzlich deren Eigenschaften und die mit ihrer Anwendung verbundene Zielstellung berücksichtigt werden.

Ein Überblick zu den Systemen der *Regelungstechnik* wird im Abschnitt 17 dargestellt.

## 16.1 Wichtige Signale und Systeme in der Elektronik

### 16.1.1 Kennwerte für Audiosignale und -geräte

Audiosignale sind als Schallschwingungen in der Luft analoge Signale. Ihre Wahrnehmung mit dem menschlichen Ohr ist mit den Eigenschaften dieses Sinnesorgans verbunden. Jede elektronische Verarbeitung muss sich grundsätzlich an den Eigenschaften, Gewohnheiten und Bedürfnissen von Menschen orientieren. Besonders wichtige sind dabei:

- die Hörschwelle (Empfindlichkeit) und der Dynamikumfang des Hörens (Bereich vom leisensten bis zum lautesten Schall ca. 120 dB),
- das logarithmische Lautstärkeempfinden,
- der Frequenzbereich (ca. 16 bis 18000 Hz) mit frequenzabhängiger Empfindlichkeit,
- die räumliche Wahrnehmung und
- eine Reihe von Wahrnehmungseffekten der Psychoakustik.

Differenziertere Ausführungen sind z.B. in (Wei08 S. 42 ff, 89 ff) nachzulesen.

**Praxistipp:** Nach Wandlung in ein analoges elektrisches Signal und evtl. in ein digitales elektrisches Signal wird eine elektronische oder rechentechnische Verarbeitung möglich.

#### Kennwerte bei der Bewertung von Audiosignalen und -geräten:

Als *Einheit für Signalpegel* dient das *Dezibel*<sup>181</sup> in der Elektrotechnik, insbesondere in der Akustik und Audiotechnik (Leistung, Spannung, Schalldruck u.ä.). Für Leistungen gilt<sup>182</sup>:

$$P_{dB} = 10 \log(P_1/P_2) \text{ gemessen in dB} \quad (16.1)$$

Bei linearen Systemen ist die Leistung proportional zum Quadrat der Effektivwerte ( $P \sim U^2$ ), so folgt für Spannung (ähnlich auch für Schalldruck und weitere Größen):

$$U_{dB} = 20 \log(U_1/U_2) \text{ gemessen in dB} \quad (16.2)$$

Anstelle von  $P_2$  (bzw.  $U_2$ ) wird oft ein *standardisierter Bezugswert* verwendet und das dB entsprechend gekennzeichnet. Z.B. hat das dBm den Bezugswert 1 mW, das dBA (auch dB SPL) den A-bewerteten Schalldruckpegel (20 µPa am Ohr, festgelegt als Hörschwelle bei 2 kHz). Weiterführendes siehe z.B. (Wei08 S. 28 ff), Rechenregeln siehe Abschnitt 10.9.

Der *Dynamikumfang* beschreibt in dB den Quotienten des höchsten durch das kleinste Signal. Das Ohr erreicht von der Hörschwelle bis zur Schmerzgrenze ca. 120 dB. Ein gutes Konzert

<sup>181</sup> Dezibel ist entstanden als 1/10 des Bel, das nach Bell benannt wurde.

<sup>182</sup> Eigentlich wäre  $P_{dB}$  dimensionslos, bekommt aber dB als Einheit zur eindeutigen Bezeichnung.

kann ca. 90 dB ergeben. Bei UKW-Stereo oder einer CD werden etwa 70 dB verarbeitet. In einer normalen Wohnung herrschen vom Grundgeräusch bis zur Zimmerlautstärke ca. 40 dB.

Der *Frequenzgang* gehört zur Übertragungsqualität. Das Ohr kann Töne von ca. 16 Hz bis ca. 18 kHz für Jüngere, 12 kHz (und sogar unter 10 kHz) für Ältere wahrnehmen. UKW-Stereo überträgt 30 Hz bis 15 kHz, eine CD bis weit über 20 kHz.

Für Audiogeräte hat sich weiter der *Klirrfaktor* für die Klangqualität etabliert:

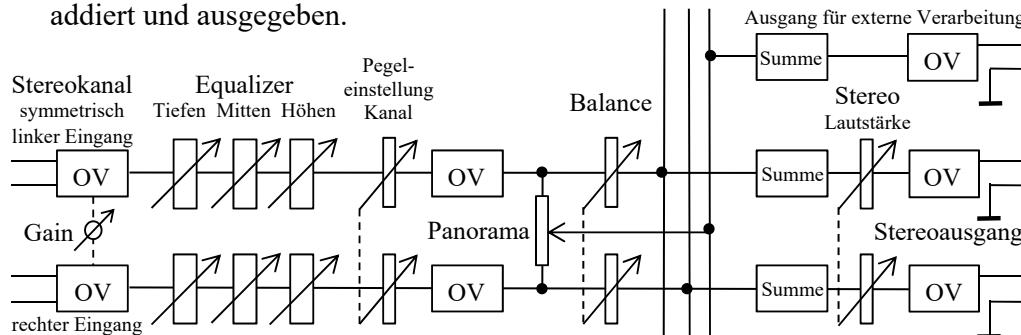
$$k = (U_{\text{eff}}^2 - U_{\text{Grundschwingung eff}}^2)^{1/2} / U_{\text{eff}} \quad (16.3)$$

Alle durch nichtlineare Verzerrungen zusätzlich entstandenen Signalanteile werden gegenüber dem Gesamtsignal bewertet. (Verzerrungen erzeugen immer Oberschwingungen.) Heute sind Klirrfaktoren deutlich unter 1 % erreichbar.

**Praxistipp:** Eine Informationsreduktion kann bei analogen Audiosignalen nur durch Einschränkung des Frequenzgangs und eventuell des Dynamikumfangs erfolgen.

Als repräsentatives Beispiel für die Verarbeitung von Audiosignalen soll ein analoges Mischpult in seinen Grundfunktionen untersucht werden. Seine drei Hauptaufgaben sind:

- **Signalaufbereitung:** Die entsprechenden Signaleingänge (Mikrofon, Line) benötigen unterschiedliche **Eingangsschnittstellen** (Eingangswiderstände, Eingangsbuchsen usw.), Pegelanpassungen, Frequenzgangkorrekturen und evtl. Versorgungsspannungen.
- **Signalverteilung:** Die Signale sind auf verschiedene Ausgänge zu verteilen (Verstärkerstufen, Aufnahmegeräte, Effektgeräte oder auch Kontrollkopfhörer).
- **Signalmischung:** Die Eingangssignale werden entsprechend dem gewünschten Klang mit jeweils passendem Pegel und gewollter Frequenzgangkorrektur sowie evtl. Effekten addiert und ausgegeben.



**Abb. 16.2: Schematischer Aufbau eines analogen Mischpultes (vereinfacht)**

Das Blockdiagramm in Abb. 16.2 zeigt zur besseren Übersichtlichkeit nur einen Eingangskanal des Mischpultes (es gibt immer mehrere), den (in der Regel einen) Hauptausgang, aber nur einen der zusätzlichen Ausgänge.

Die Operationsverstärker (OV) nach den **Eingängen** (zur Pegel- und Impedanzanpassung mit Gain zum Übersteuerungsschutz) entsprechen weitgehend den Standardschaltungen (evtl. mit Tiefpass für Störungen außerhalb des Hörbaren vergleiche Abb. 13.18). Hauptelemente sind der **Equalizer**, eine **Pegleinstellung** (für den Kanal) sowie die **Balance** (Aufteilung auf rechten und linken Kanal) sowie der Panoramaregler für Monoausgänge.

In der Mitte erfolgt die *Mischung auf die Busse* für den linken und rechten Stereoausgang sowie (hier im Beispiel) für einen Monokanal zur externen Verarbeitung (Aux).

Rechts wird die *Summierung* und die Einstellung des *Ausgangspegels* der Signale (Fader) für die verschiedenen Ausgänge schematisch dargestellt.

Zur **Klangbeeinflussung** verwenden gute Mischpulte parametrische Filter<sup>183</sup> (seit ca. den 60er-Jahren Standard, oft sogenannter „British EQ“). Damit ist eine einfache Anhebung sowie Absenkung der Pegel im betreffenden Frequenzbereich möglich. In den Mittelstellungen entsteht ein linearer Frequenzgang (jeweils keine Beeinflussung). Außerdem ergibt sich eine geringere Phasenverschiebung an den Rändern des Frequenzganges (wodurch ein „warmer und musikalischer Klangcharakter“ möglich sein soll).

Einen einfachen *parametrischen Equalizer* mit drei Filterbereichen zeigt Abb. 16.3. Ein nichtinvertierender Operationsverstärker am Eingang mit hohem Eingangswiderstand und geringem Ausgangswiderstand ist zur Pegelanpassung unerlässlich. Für den folgenden Equalizer gilt<sup>184</sup>, wenn die grau dargestellten Elemente erst mal nicht berücksichtigt werden:

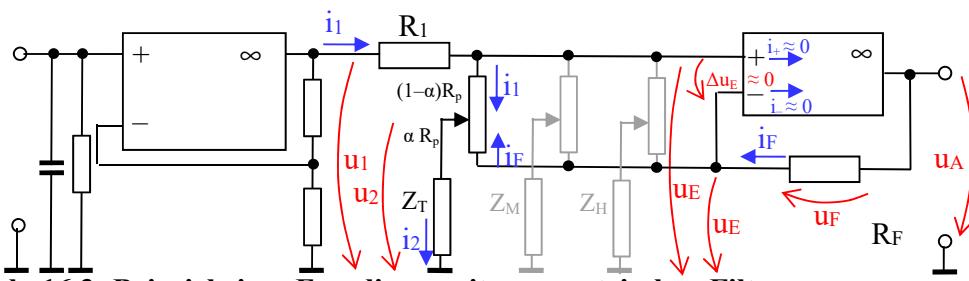


Abb. 16.3: Beispiel eines Equalizers mit parametrischen Filtern

$$u_1 = R_1 i_1 + u_E; \quad u_2 = Z_T (i_1 + i_F); \quad u_E = (1-\alpha) R_p i_1 + u_2 \equiv \alpha R_p i_F + u_2; \quad u_A = R_F i_F + u_E \equiv v u_1$$

$$i_2 = i_1 + i_F$$

Eine einfache Erklärung der Funktion folgt daraus, dass bei oberem Anschlag des Potentiometers ( $\alpha = 1$ ) ein Teil des Signals über  $Z_T$  nach Masse abgeleitet wird. So gelangt nur ein kleinerer Teil zum „+“ Eingang. Das ergibt eine Verkleinerung des Signals. Bei unterem Anschlag ( $\alpha = 0$ ) wird dagegen ein Teil der Gegenkopplung nach Masse abgeleitet. Das gibt eine Vergrößerung der Verstärkung. In der Mitte ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) sind beide Veränderungen ausbalanciert und es erfolgt weder eine Verkleinerung noch eine Verstärkung.

Aufgelöst nach der *Gesamtverstärkung*  $v$  ergibt sich für den Fall  $R_1 \equiv R_F$ :

$$v = 1 + \frac{R_F}{Z_T} \cdot \frac{1 - 2\alpha}{1 + \alpha R_F/Z_T + (1 - \alpha) \alpha R_p/Z_T}.$$

Wenn  $Z_T$  gegen  $\infty$  geht, wird in jedem Fall  $v = 1$ , weiter folgt:

für  $\alpha = 0$  wird  $v = 1 + R_F/Z_T$  Verstärkung um  $v_{\text{Max}}$ ,

für  $\alpha = \frac{1}{2}$  wird  $v = 1$  keine Verstärkung oder Verkleinerung,

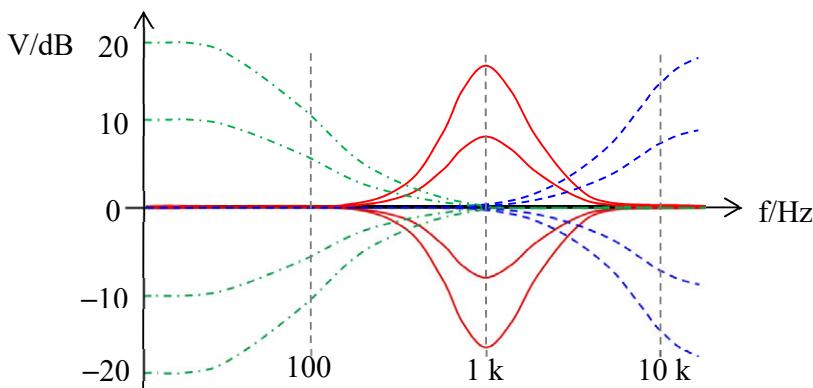
für  $\alpha = 1$  wird  $v = (1 + R_F/Z_T)^{-1}$  Verkleinerung um  $1/v_{\text{Max}}$ .

Somit kann mit dem Potentiometer ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) die Signalamplitude von  $1/v_{\text{Max}} \leq v \leq v_{\text{Max}}$  (oder im dB-Maß:  $-v_{\text{Max}} \text{ dB} \leq v \leq +v_{\text{Max}} \text{ dB}$ ) eingestellt werden.

Ist  $Z_{T/M/H}$  frequenzabhängig, ist es auch die Verstärkung bzw. Verkleinerung. Es folgt ein entsprechender *Frequenzgang der Verstärkung*. Ein Kondensator ( $Z_H = 1/\omega C$ ) hat für kleine Frequenzen einen sehr hohen Widerstand. D.h.,  $R_F/Z_{2H}$  wird 0 und  $v$  zu 1. Steigt die Frequenz, nehmen  $R_F/Z_H$  und die Verstärkung bzw. Verkleinerung zu. Ein Widerstand ( $R_C$ ) in Reihe mit  $C$  führt bei hohen Frequenzen zu  $(1 + R_F/R_C) = \text{const.}$  Wegen  $v = 1 + R_F/R_C$  kann dann  $R_C$  zu  $R_C = R_F/(v_{\text{soll}} - 1)$  festgelegt werden. Zusätzlich kann die Dimensionierung der Grenzfrequenz ( $f_{gu} = 1/(2\pi R_C C)$ ) des Hochpasses über das noch frei verfügbare  $C$  erfolgen. Die Mitten werden als Bandpass aus  $R$ ,  $L$  und  $C$  sowie der Tiefpass aus  $R$  und  $L$  aufgebaut. Induktivitäten können dazu mit einer Gyratorschaltung realisiert werden (siehe Abb. 13.22).

<sup>183</sup> Bei diesen können ein bis mehrere Parameter ( $v$ ,  $f$ ,  $\Delta f$ , Phase) verändert werden.

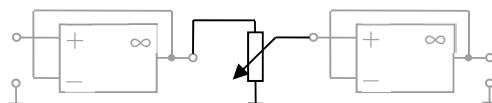
<sup>184</sup> Folgt aus Maschen- und Knotenpunktsätzen bei üblichen Näherungen für einen OV ( $i_+ = i_- = \Delta u_E \approx 0$  für  $v_0 \rightarrow \infty$ ).



**Abb. 16.4: Frequenzgangkurven der drei Filter für je 5 Potentiometerstellungen**

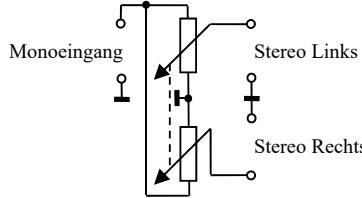
In Abb. 16.4 sind Tiefpass (Shelving Filter für die Bässe), Bandpass (Peaking Filter für die Mitten) und Hochpass (Shelving Filter für die Höhen) dargestellt. Die Überlappung zeigt, dass analoge Filter nicht sinnvoll mehr Frequenzbereiche ermöglichen.

Die **Regulierung der Signalpegel** (Lautstärke, Gain, Fader) erfolgt mit einem Schieberegler.



**Abb. 16.5: Regulierung der Signalpegel** <sup>185</sup>

Mit dem **Panoramaregler** wird einem Monosignal eine Position im Stereopanorama zugewiesen (hier einfach "Intensitäts"-Stereofonie, keine Laufzeitunterschiede).



**Abb. 16.6: Panoramaregler** <sup>185</sup>

Es gibt spezielle Doppelpotentiometer, deren Widerstandskurven  $R(\alpha)$  so angepasst sind, dass in jeder Stellung die Stereosumme der Signalleistungen gleich bleibt.

Das eigentliche **Mischen der Signale** (Summation) muss so erfolgen, dass die Eingangssignale auf ihren Leitungen dabei nicht verändert werden (siehe Abb. 13.21). Auf diese Weise können mehrere Summationsschaltungen mit zum Teil denselben Eingangssignalen für verschiedene Ausgänge ohne ungewollte gegenseitige Vermischungen der Signale durch das Zusammenschalten an den Eingängen realisiert werden.

Der Dynamikumfang kann durch einen **Kompressor** verringert werden. Dazu wird beim Überschreiten eines einzustellenden Pegels nach einer zu wählenden Verzögerungszeit die Verstärkung verringert. So erfolgt in Zeitabschnitten mit zu hohem Signal eine geringere Verstärkung. Da er zeitvariant arbeitet, ist der Kompressor kein lineares System.

### 16.1.2 Messungen an einem analogen Mischpult

Ziel ist das Kennenlernen von Geräten und Verfahren zur Messung und Darstellung der Signal- und Systemeigenschaften am Beispiel der Signalverarbeitung mit einem analogen Mischpult. Dazu sind folgende Fragen zu untersuchen:

<sup>185</sup> OV vor und nach Potentiometern gewährleisten die Rückwirkungsfreiheit und müssen, wenn nicht vorhanden, eingefügt werden.

- Welche Methoden zur Messung von Frequenz- und Phasengängen gibt es, welche Eigenschaften und Aussagefähigkeit haben eine statische Messung, eine dynamische Messung (durch Wobbeln) und die Ermittlung mit einem Rauschsignal?
- Welche Filter werden eingesetzt (insbesondere parametrische Filter)?
- Wie kann ein Monosignal in ein Stereopanorama eingeordnet werden?
- Wie erfolgt eine Signalmischung, ohne die Signale durch die Addition zu verändern?

### Versuchsaufbau:

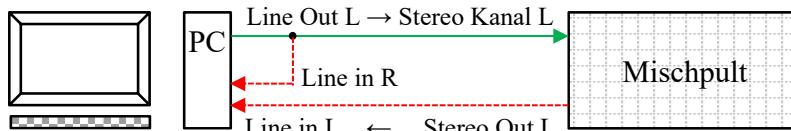


Abb. 16.7: Vergleich der Ein- und Ausgangssignale des Mischpults

### Versuchsdurchführung:

#### Aufgabe 1:

Vorbereiten einer digitalen Erzeugung und Auswertung für analoge Signale am PC:

- 1 Starten eines Programms zur Audiobearbeitung (z.B. Audacity) und Erzeugen einer Datei (z.B. „test150\_44\_lin.wav“), die genau in 150 s mit 44 Samples/s die Frequenz linear von 0 Hz bis 15 kHz hochfährt sowie einer Datei (z.B. „test150\_44rausch.wav“) mit 150 s weißem Rauschen.
- 2 Betrachten der Dateien „test150\_44\_lin.wav“ von  $t = 0$  bis 150 s bei dem notwendigen Zoom. Aufrufen der Frequenzanalyse für die Datei „test150\_44\_lin.wav“ und Testen der verschiedenen Einstellungen für Fensterfunktion und Fensterbreite (Anzahl Abtastwerte) bei linearer und logarithmischer Darstellung.
- 3 Wiederholen mit der Datei „test150\_44rausch.wav“.

Was fällt Ihnen auf, versuchen Sie es jeweils zu erklären?

Hinweis: Für die folgende Frequenzanalyse sind die Einstellungen „Hanning-Fenster“, „Größe: 512 bis 1024“ bei linearer Darstellung etwa optimal.

#### Aufgabe 2:

Untersuchung der Eigenschaften der Klangregler (Filter) des Mischpultes:

- 1 Aufbau nach Abb. 16.7 (alle Klangregler in Mittelstellung und Balance ganz auf links).
- 2 Pegeleinstellung für das Signal vom PC (z.B. VLC-Player mit der Datei „test150\_44\_lin.wav“ am Player 100% und PC-Mixer 50%) mit Hilfe der optischen Anzeige am Mischpult so, dass keine Übersteuerung erfolgt (Einstellungen für nachfolgende Untersuchungen unverändert lassen).
- 3 Untersuchen des Einflusses des Equalizers (Regler für Höhen, Mitten und Tiefen). Dazu das Eingangssignal bei Aufnahme (rechter Kanal) mit dem Aufnahmeregler der Audiobearbeitung auf ca. 0,8 einpegeln. Den Fader des Stereokanals auf 0 dB stellen und den Fader des Stereo Out so einpegeln, dass bei Aufnahme der linke Kanal auch ca. 0,8 erreicht (Einstellungen für nachfolgende Untersuchungen unverändert lassen).
- 4 Darstellen und Auswerten der Signale (rechts Eingangssignal, links Ausgangssignal) auf dem PC durch Aufnehmen und Auswerten mit der Audiobearbeitung (Stereokanäle evtl. trennen). Einmal alle Regler in Mittelstellung und dann die Höhen auf -15 dB.
- 5 Auswertung der Amplituden und Phasen in Abhängigkeit von der Frequenz. (Da die Frequenz von 0 bis 15000 Hz in 150 s linear erhöht wurde, entspricht die Frequenz der Zeit in 1/100 s.)
- 6 Der Frequenzgang kann auch mit der Frequenzanalyse betrachtet werden (auch mit der Datei „test150\_44rausch.wav“). (Die Phasen werden leider in der Regel nicht dargestellt.)

**Aufgabe 3 und 4:**

Wiederholen Sie Aufgabe 2 für die Mitten und die Tiefen (andere Regler in Mittelstellung).

**Aufgabe 5:**

Testen Sie selbstständig die Wirkung des Panoramareglers und der Mischung zweier Signale.

**Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:**

Der Einfluss der Filter ist deutlich zu erkennen und entspricht den 15 dB. Die Phasenverschiebungen sind bis auf den Bereich der Anstiegsflanken der Frequenzgangkurven null und in den Wendepunkten nur ca. 45°.

**16.1.3 Kennwerte und Beispiele für Videosignale und -geräte**

Videosignale sind als Lichtstrahlen analoge Signale. Ihre Wahrnehmung mit dem menschlichen Auge ist mit den Eigenschaften dieses Sinnesorgans verbunden. Jede elektronische Verarbeitung muss sich grundsätzlich an den Eigenschaften, Gewohnheiten und Bedürfnissen von Menschen orientieren. Besonders wichtige sind dabei:

- die Augenempfindlichkeit und das Farbsehen (führt zur Farbmetrik),
- das Auflösungsvermögen des Auges (eine Bogensekunde = 0,016°),
- eine flimmerfreie Darstellung (ab ca. 50 Wechseln von Hell zu Dunkel pro Sekunde),
- die räumliche Wahrnehmung und
- eine Reihe von Wahrnehmungseffekten.

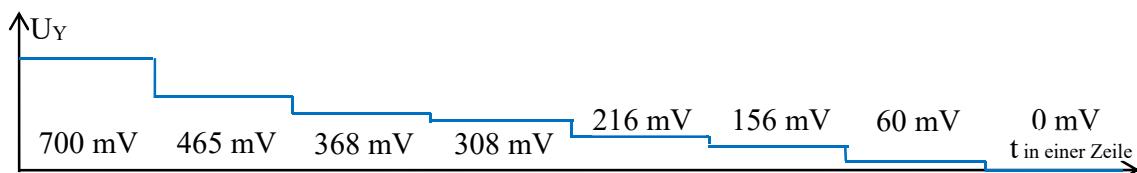
Differenziertere Ausführungen sind z.B. in (Wei08 S. 66 ff) nachzulesen.

**Praxistipp:** Nach Wandlung in zeilenweise analoge elektrische Signale und evtl. weiter in digitale elektrische Signale wird eine elektronische oder rechentechnische Verarbeitung möglich.

**Kennwerte bei der Darstellung von Videosignalen und -geräten**

**RGB-Farbbalken:** 100% entsprechen 255; 75 % entsprechen 190 (bei 8 bit pro Farbe)

R:	255	190	0	0	190	190	0	0
G:	255	190	190	190	0	0	0	0
B:	255	0	190	0	190	0	190	0
<b>FBAS-Signal:</b> 100% entsprechen 700 mV; 75 % entsprechen 525 mV								
U <sub>R</sub> :	700 mV	525 mV	0	0	525 mV	525 mV	0	0
U <sub>G</sub> :	700 mV	525 mV	525 mV	525 mV	0	0	0	0
U <sub>B</sub> :	700 mV	0	525 mV	0	525 mV	0	525 mV	0



**Abb. 16.8: Farbbalken mit Signalparametern**

Das Helligkeitssignal Y ergibt sich aus den Signalen Rot R, Grün G und Blau B zu:

$$U_Y = 0,299 U_R + 0,587 U_G + 0,114 U_B \quad (\text{Beachte: } 0,299 + 0,587 + 0,114 = 1) \quad (16.4)$$

**Das Farbdifferenzsignal  $U_U$**  ergibt sich aus den Signalen  $Y$  und  $B$  zu:

$$U_U = 0,493 (U_B - U_Y)$$

(16.5)

(Eine neuere Definition ergibt etwas andere Werte mit  $U_{Pb} = 0,565 (U_B - U_Y)$ .)

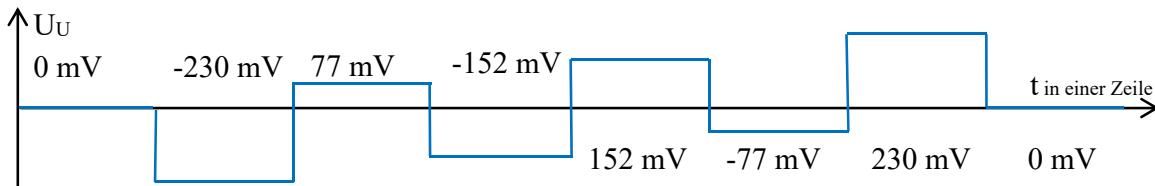


Abb. 16.9: Farbdifferenzsignal  $U_U$

**Das Farbdifferenzsignal  $U_V$**  ergibt sich aus den Signalen  $Y$  und  $R$  zu:

$$U_V = 0,877 (U_R - U_Y)$$

(16.6)

(Eine neuere Definition ergibt etwas andere Werte mit  $U_{Pr} = 0,713 (U_R - U_Y)$ .)

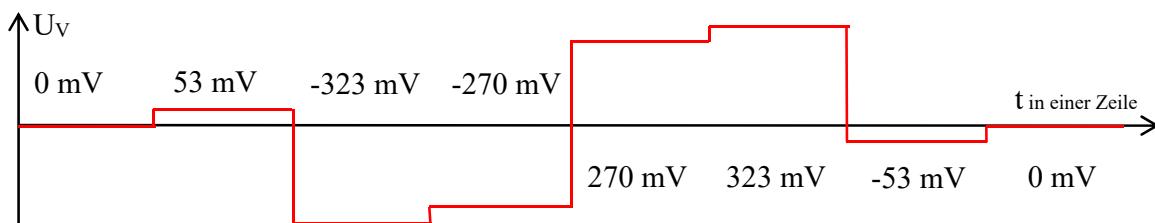


Abb. 16.10: Farbdifferenzsignal  $U_V$

Die Signale können im **YUV-Farbraum** mit  $U_U$  in x- und  $U_V$  in y-Richtung als Vektordiagramm dargestellt werden, d.h. in *kartesischen Koordinaten*.

Eine Interpretation ist auch als *Polarkoordinaten* mit Betrag und Winkel der Farbvektoren möglich.

Dabei erscheint der Betrag als **Farbsättigung** (Farbintensität) und der Winkel als **Farbwert**.

Die Helligkeit ( $Y$ -Achse) steht hier senkrecht auf dem  $U$ - $V$ -Diagramm.

Damit sind in  $U$  und  $V$  keine Informationen über die Helligkeit und in  $Y$  keine über die Farbe.

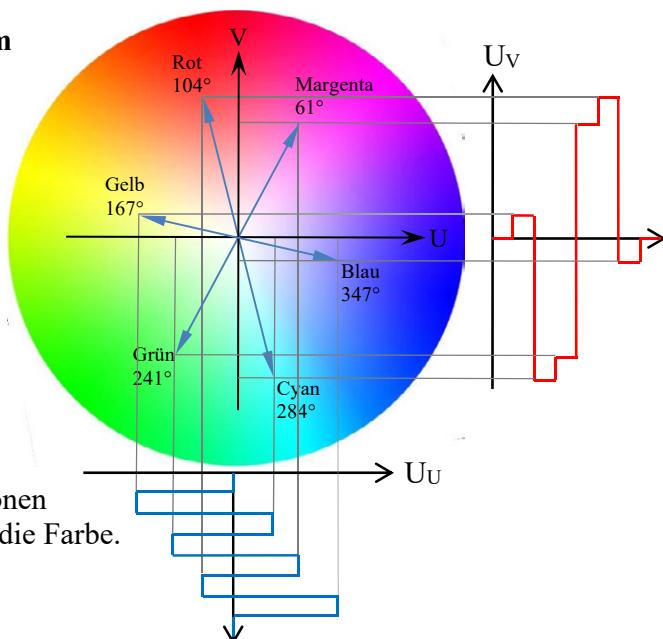


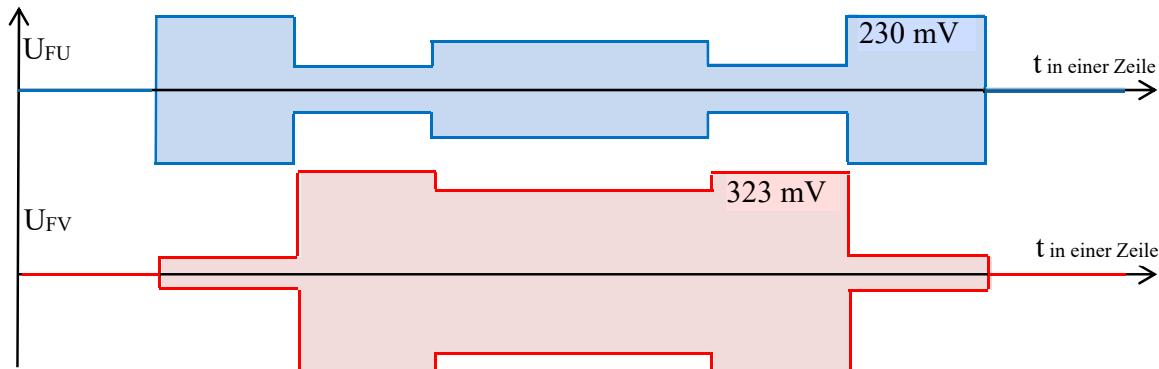
Abb. 16.11: YUV-Farbraum mit Vektordiagramm aus  $U_U$  und  $U_V$

Das **Farbsignal** entsteht durch **Quadraturamplitudenmodulation (QAM)** des  $U$ - $V$ -Signals:

Es wird  $U_U$  mit dem *Farbträger* ( $U_{FT} = 4,43 \text{ MHz}$ ) entsprechend der Sinusphase zu  $U_{FU}$  und  $U_V$  mit demselben Träger entsprechend der Cosinusphase zu  $U_{FV}$  multipliziert.

Auf diese Weise folgt die Möglichkeit, das Farbsignal zusätzlich zum Helligkeitssignal zu übertragen, und ältere Schwarz-Weiß-Geräte nutzen weiter nur das Helligkeitssignal.

(Die Farbträgerschwingungen sind in Abb. 16.12 als Band eingefärbt dargestellt; die Trägeramplitude war vor der Multiplikation Eins.)



**Abb. 16.12: Farbdifferenzsignale mit Sinus und Cosinus des Farbträgers multipliziert**

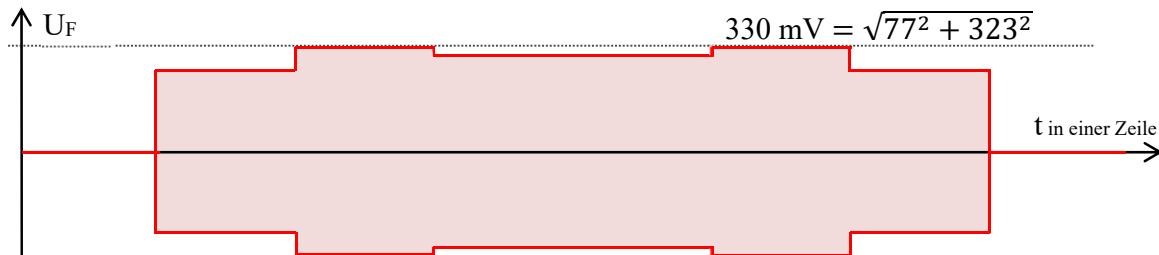
Beide werden addiert. Dabei ergeben Sinus und Cosinus gleicher Frequenz wieder eine sinusförmige Schwingung dieser Frequenz mit einer Amplitude

$$U_F = \sqrt{U_{FV}^2 + U_{FU}^2} = \sqrt{U_V^2 + U_U^2}$$

und der Phase

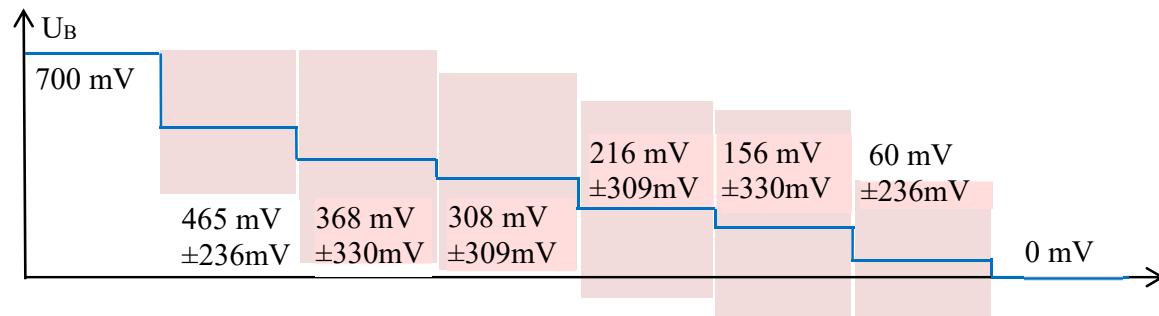
$$\varphi = \arctan \frac{U_U}{U_V} .$$

Für eine Zeile resultiert so das Farbsignal  $U_F$ , das ausschließlich Farbinformationen enthält.



**Abb. 16.13: Quadraturmoduliertes Signal**

Das Signal der vollständigen Bildinformation  $U_B$  einer Zeile folgt, wenn dazu weiterhin das  $U_Y$ -Signal (16.4) addiert wird.



**Abb. 16.14: Gesamte Bildinformation einer Zeile**

**Praxistipp:** Signale, die den gezeigten Normwerten nicht entsprechen, sind nicht sendefähig.

Die Funktionsdarstellung der Quadraturmodulation und des endgültigen PAL Signals siehe Abschnitt 16.2.5, Weiterführendes z.B. in (Sch09 S. 66 ff).

**Praxistipp:** Videosignale erfuhrn immer eine Informationsreduktion durch die Anzahl der Zeilen, die Anzahl Bilder pro Sekunde, das Halbbildverfahren sowie durch die Bandbreiten. Dabei werden weiterhin die Farbinformationen nur halb so oft gesendet.

### 16.1.4 Messung der Eigenschaften an RGB-Signalen

Kennenlernen von Geräten und Verfahren zur Messung und Darstellung der Signaleigenschaften für die Signalverarbeitung analoger Videosignale. Messung und Bewertung analoger Videosignale bezüglich der Einhaltung geforderter Normen für sendbares Videomaterial.

#### Versuchsaufbau:

Der Versuch wird am PC mit einem geeigneten Videoschnittprogramm mit Vektordiagramm (vergleiche Abb. 16.11) durchgeführt.

#### Versuchsdurchführung:

##### Aufgabe 1:

Vertraut machen mit den Farbnormen und dem Videoschnittprogramm des Arbeitsplatzes:

1. Starten einer Bildbearbeitung und Erstellen eines Farbbalkenbildes (als \*.jpg-Datei) nach Vorgabe (Pal 720x576 Pixel mit 72 Pixel/Zoll; 8 Farbbalken nach Abb. 16.8),
2. Importieren dieses Bildes in ein neues Projekt eines Videoschnittprogramms. Es soll eine kurze Filmsequenz erzeugt werden. Diese kann in das Schnittfenster eingefügt werden.

##### Aufgabe 2:

3. Untersuchen der Wellenform und des Vektorbereiches mit den entsprechenden Tools des Programms. Welche Spannungswerte und Punkte in der Vektordarstellung werden erreicht?
4. Zum Vergleich Farbbalken mit 100 % Farbsättigung sowie einen weiteren mit 90 % weiß erstellen, importieren und ebenfalls untersuchen.

#### Zusatzaufgabe:

Betrachten und Analysieren auf externen Geräten:

Videosequenz wiedergeben und entsprechende externe Geräte verwenden. Einen Wave- und Vektormonitor sowie einen Monitor anschließen und die Sequenzen untersuchen (passende Kabel verwenden; aber nur für Video erforderlich).

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

Der Aufbau der Videosignale entspricht Abschnitt 16.1.3. Das Signal mit 100 % Farbbalken erscheint als übersteuert und das Signal mit 90 % Weißbalken nutzt die mögliche Qualität der Übertragung nicht. Die externen Geräte zeigen gleiche Ergebnisse. Mit diesen können Videogeräte zur Aufnahme und Wiedergabe überprüft werden.

## 16.2 Analyse analog modulierter Signale

### 16.2.1 Amplitudenmodulation

Ein hochfrequentes Trägersignal kann in seiner *Amplitude* ( $\hat{U}_{HF}$ ), in seiner *Frequenz* ( $\omega_{HF}$ ) oder in seiner *Phase* ( $\varphi_{HF}$ ) moduliert werden. D.h.,  $u_{HF}(t) = \hat{U}_{HF} \sin(\omega_{HFT} + \varphi_{HF})$ .

Die **Amplitudenmodulation** wurde als Erste erschlossen. Sie entsteht durch Multiplikation der Amplitudenhüllkurve mit einer konstanten hochfrequenten Schwingung. Die Amplitudenhüllkurve enthält das niederfrequente Nutzsignal (hier sinusförmiges Testsignal).

$$u(t) = \underbrace{\hat{U} (1 - m \cdot \sin \omega_1 t)}_{\text{NF Hüllkurve}} \cdot \underbrace{\sin \omega_2 t}_{\text{HF}} \quad (= \hat{U}(t) \sin \omega_2 t)$$

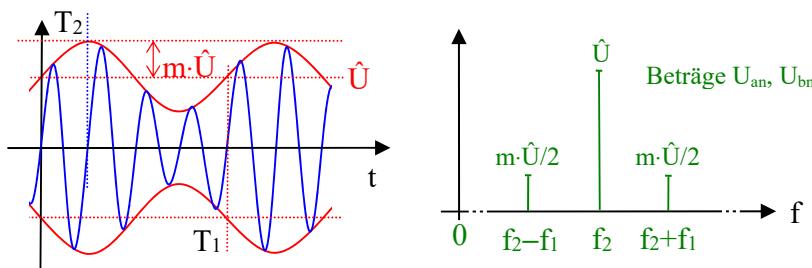
Amplitude der HF

( 16.7 )

Die Berechnung des **Spektrums** (oder der Fourierreihe) ergibt für ( 16.7 ) eine endliche Anzahl Reihenglieder und erfolgt am einfachsten mit den Regeln für trigonometrische Funktionen <sup>186</sup>.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega_2 t - \hat{U} \frac{m}{2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t]$$

( 16.8 )



**Abb. 16.15: Beispiel für ein amplitudenmoduliertes Signal und dessen Spektrum**

Da der *Modulationsgrad* ( $m$ ) maximal 1,0 werden kann (in der Praxis wird bei guten Modulatoren ca. 0,8 erreicht), wird die Leistung ( $P \sim u^2$ ) der beiden alle Informationen enthaltenden Seitenbänder  $P_{\text{Nutz}}$  gegenüber der Trägerleistung  $P_{\text{Träger}}$  zu

$$P_{\text{Nutz}} = 2(m\hat{U}/2)^2 = m^2\hat{U}^2/2 < \frac{1}{2} \hat{U}^2 = \frac{1}{2} P_{\text{Träger}}.$$

Zum anderen kann aus Abb. 16.15 die erforderliche *Bandbreite* z.B. für eine Musikübertragung abgeleitet werden.

**Praxistipp:** Soll die Übertragung bis  $f_{\text{NF}} = 15 \text{ kHz}$  (HiFi-Norm) stattfinden, muss zwischen der untersten ( $f_{\text{HF}} - f_{\text{NF}}$ ) und der obersten Frequenz ( $f_{\text{HF}} + f_{\text{NF}}$ ) die Bandbreite für die Übertragung  $\Delta f_B = 2f_{\text{NF}} > 30 \text{ kHz}$  betragen (ohne Stereoübertragung).

Eine Einseitenbandmodulation mit unterdrücktem Träger kann sowohl das Leistungsverhältnis verbessern als auch die Bandbreite verringern; es muss aber vor der Demodulation beides wiederhergestellt werden.

**Praxistipp:** Bei **Modulation** und **Multiplikation** entstehen zusätzlich neue Frequenzen im Gegensatz zu einer Addition.

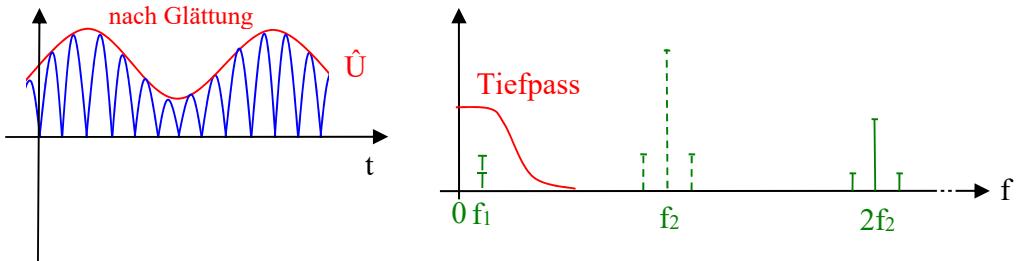
Die *Demodulation* kann bei der Amplitudenmodulation

- entweder durch eine *Gleichrichtung und anschließende Glättung*
- oder durch *nochmalige Multiplikation* <sup>187</sup> (Überlagerung) mit  $\cos \omega_2 t$  bei ( 16.8 ) sowie anschließender Tiefpassfilterung

erfolgen (siehe Abb. 16.16).

<sup>186</sup>  $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

<sup>187</sup> Bei einer reinen Multiplikation (auch Mischen) haben die Hüllkurven den Gleichanteil null und es entsteht im Unterschied zur Modulation kein Träger. Dadurch würde bei anschließender einfacher Gleichrichtung die Frequenz verdoppelt. Darüber hinaus entstehen in den Einschnürungspunkten Phasensprünge von  $180^\circ$ .



**Abb. 16.16: Demodulation durch Gleichrichtung und Überlagerung**<sup>188</sup>

Bei einer Überlagerung entstehen alle Frequenzen mit  $+ f_2$  und mit  $- f_2$ . Dabei werden aus  $f_2 - f_1$  ein nicht störender Gleichanteil<sup>189</sup> und  $\cos[2\pi(f_2-f_1) - 2\pi f_2] = \cos(2\pi f_1)$ ; d.h., dieses spiegelt sich zu  $f_1$  dazu.

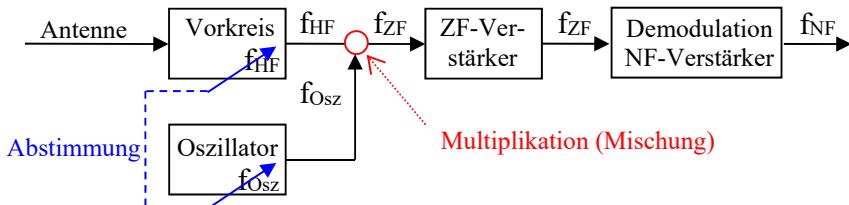
(Dieses Verfahren wird normalerweise nicht zu einer einfachen Amplitudendemodulation eingesetzt.)

**Praxistipp:** Die Amplitudenmodulation kann sehr gut mit vielen Funktionsgeneratoren oder mit einer Simulation demonstriert werden.

### 16.2.2 Frequenzumsetzung mit dem Überlagerungsverfahren

Das *Überlagerungsverfahren* (Multiplikation) wird zur *Frequenzumsetzung* angewandt.

Das Prinzip soll am *Überlagerungsempfänger* (Superhet-Empfänger) mit Zwischenfrequenzverstärker dargestellt werden (Abb. 16.17).



**Abb. 16.17: Prinzip des Überlagerungsempfängers**

Die Oszillatorkonstante wird gemeinsam mit der Frequenz des Vorkreises (oder des Empfangsfilters) so abgestimmt, dass entweder  $f_{HF} - f_{Osz}$  oder  $f_{Osz} - f_{HF}$  immer genau  $f_{ZF}$  ergibt. Nach Wahl der Variante muss die andere (die Spiegelkonstante, z.B.  $f_{Osz} + f_{ZF} = f_{HF}$  und  $f_{Osz} - f_{ZF} = f_{Spiegel}$ ) durch den Vorkreis gesperrt werden (Spiegel Selektion sperrt  $f_{Spiegel}$ ). Das Ergebnis ist

- eine konstante ZF-Frequenz  $f_{ZF}$  (unabhängig von der Eingangsfrequenz  $f_{HF}$ ),
- ein hochwirksamer ZF-Verstärker als Resonanzverstärker mit günstiger fester Frequenz, Bandbreite und Verstärkung sowie
- viele Filterkreise hintereinander (normalerweise 5 bis 7), um insgesamt eine steile Flanke der Filterung und somit eine hohe Trennschärfe zu erreichen.

<sup>188</sup> Phasen nicht dargestellt

<sup>189</sup> Hierbei spielt die Phase der Überlagerungsfrequenz und des Trägers eine Rolle; eine Nutzung erfolgt bei phasenempfindlicher Gleichrichtung.

**Praxistipp:** Dieses Prinzip brachte den Durchbruch in der Empfangstechnik und wird bis heute angewandt. In modernen Empfängerschaltkreisen sind lediglich die LC-Bandfilter <sup>190</sup> durch PLL-Kreise ersetzt worden.

Nach gleichem Prinzip findet auch die Frequenzumsetzung zur Trennung von Bild und Ton beim Fernsehempfang oder die Umsetzung der Signale von Fernsehsatelliten im LNS statt, um danach eine Weiterleitung mit einem Koaxialkabel zu ermöglichen.

Durch *Multiplikation* (Überlagerung, Mischung) kann somit ein *Frequenzband* in einen fast beliebigen, gewünschten anderen Frequenzbereich umgesetzt werden.

### 16.2.3 Frequenzmodulation

Die **Frequenzmodulation** wurde ursprünglich entwickelt, um einen geringeren Bedarf an Bandbreite zu erreichen. Das erwies sich aber als Trugschluss. Liegt die Information in der Frequenz, erhalten wir mit einem sinusförmigen Testsignal  $\omega_s$  und dem Träger  $\omega_T$

$$\omega(t) = \omega_T (1 + m \cdot \cos \omega_s t) = \omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_s t \quad ^{191} \quad (16.9)$$

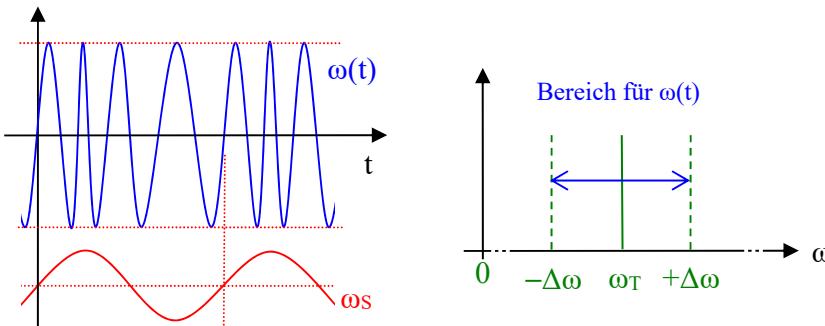


Abb. 16.18: Beispiel für ein frequenzmoduliertes Signal im Zeitbereich

Da in Abb. 16.18 rechts der Frequenzbereich von  $\omega(t)$  (der für die verschiedenen Zeiten zutrifft) abgebildet wurde, entspricht dies nicht dem Spektrum (ein Spektrum muss grundsätzlich aus zeitunabhängigen Sinusanteilen bestehen).

Um im Signal  $u_{HF}(t) = \hat{U}_{HF} \sin(\omega_{HF} t + \varphi_{HF})$  die Information in  $\omega_{HF}$  zu modulieren, muss davon ausgegangen werden, dass die Funktion *ursprünglich* „sin Φ“ lautete. Diese wird **nur** für den Fall, dass  $d\Phi/dt = \text{const} = \omega$  ist, zu „sin ωt“. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t \omega(t) dt = \int_0^t (\omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_s t) dt \\ \Phi(t) &= \omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \cdot \sin \omega_s t \quad \text{mit } \Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{\Delta f}{f_s} \end{aligned}$$

und damit kann das *frequenzmodulierte Signal* geschrieben werden.

$$u(t) = \hat{U}_T \cos \left( \omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \cdot \sin \omega_s t \right) \quad (16.10)$$

In ( 16.10 ) ist eine *konstante Amplitude* zu erkennen. Der *Phasenhub*  $\Delta\varphi$  wird aber gegenüber dem *Frequenzhub*  $\Delta f$  mit  $f_s$  dividiert und somit für höhere Signalfrequenzen verkleinert. Das Signal in ( 16.10 ) ist für unser Testsignal ein stationäres periodisches

<sup>190</sup> Ein Phasenregelkreis mit entsprechenden Parametern kann gut als IC realisiert werden.

<sup>191</sup> Nur diese Form von  $\omega(t)$  wird unter Frequenzmodulation verstanden  $u(t) = \hat{U}_S \sin \omega_s t \rightarrow \omega + \Delta\omega \cos \omega_s t = \omega(t)$ .

Zeitsignal und es kann das **Spektrum** nach der *Fourierreihe* berechnet werden. Die Lösung der Integrale von ( 10.7 ) ergibt relativ komplizierte Funktionen.

$$u(t) = \hat{U}_T \left( J_0(\Delta\varphi)\cos(\omega_T t) + J_1(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + \omega_S)t - \cos(\omega_T - \omega_S)t] + J_2(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 2\omega_S)t + \cos(\omega_T - 2\omega_S)t] + J_3(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 3\omega_S)t - \cos(\omega_T - 3\omega_S)t] + \dots \right) \quad (16.11)$$

Die Koeffizienten  $J_n(\Delta\varphi)$  in ( 16.11 ) sind Besselfunktionen n-ter Ordnung 1. Art der Variablen  $\Delta\varphi$  (diese können Tabellen entnommen werden).

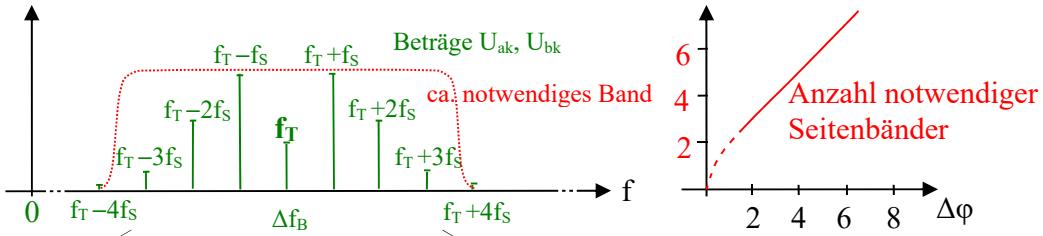


Abb. 16.19: Spektrum der Frequenzmodulation mit einem Testsignal

Wenn alle Seitenbandfrequenzen vernachlässigt werden, die kleiner sind als 10% der Amplitude des unmodulierten Trägers, wird die *notwendige Bandbreite nach Carson näherungsweise*

$$\Delta f_{B \min} = 2(\Delta\varphi + 1)f_{S \max} \quad \text{für } \Delta\varphi > 1.$$

Danach sind auf jeder Seite des Trägers  $\Delta f_{B \min}/2f_{S \max} = \Delta\varphi + 1$  Seitenbandfrequenzen erforderlich (in Abb. 16.19 ist  $\Delta\varphi$  ca. 2, somit ist schon die vierte Seitenbandfrequenz < 10%).

**Praxistipp:** Für den *UKW Rundfunk* bedeutet dies mit der Festlegung des Frequenzhubs auf  $\Delta f = 75$  kHz, dass für HiFi-Qualität mit  $f_{S \max} = 15$  kHz der Phasenhub  $\Delta\varphi = 5$  und die notwendige Bandbreite 180 kHz (bzw. die Anzahl Seitenbandfrequenzen 6) werden. Bei Beibehaltung von  $\Delta\varphi = 5$  und  $f_{S \max} = 60$  kHz (Stereo mit RDS) werden nicht ganz 400 kHz benötigt (bei ebenfalls 6 Seitenbandfrequenzen).

Weil  $\Delta\varphi = \Delta f/f_S$  ist, würde für hohe Signalfrequenzen bei konstantem Frequenzhub  $\Delta f$ , der die Signalamplitude repräsentiert, die Übertragungsqualität sinken<sup>192</sup>. Um das zu verhindern, werden die hohen Frequenzen in der Amplitude vor der Modulation verstärkt – *Präemphase*. Das wird durch eine Anhebung hoher Frequenzen mittels zusätzlichem RC-Hochpass mit einer Zeitkonstanten von 50 µs (UKW in Europa) erreicht. Umgekehrt müssen die hohen Frequenzen im Empfänger nach der Demodulation wieder abgesenkt werden – *Deemphase*. Das erfolgt durch einen RC-Tiefpass mit gleicher Zeitkonstanten.

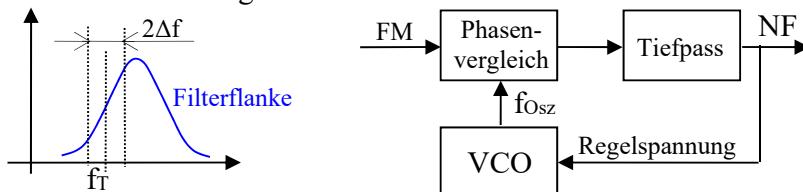
Zur *Frequenzmodulation* muss direkt bei der Schwingungserzeugung die Frequenz beeinflusst werden. Das geschieht im einfachsten Fall durch ein Kondensatormikrofon oder durch einen spannungsgesteuerten elektronisch realisierten Blindwiderstand. Eine moderne Variante insbesondere für Kleinanwendungen behandelt Aufgabe 16.4.

Die *Demodulation* kann bei der Frequenzmodulation nicht so einfach erfolgen. Zuerst sind alle Amplitudenstörungen durch einen *Begrenzer* zu beseitigen (Amplitude hat keine gewollte Information). Danach wird

- **entweder** durch einen a) Flanken-, b) Phasen- (auch Verhältnis-) bzw. c) Zähldiskriminator in eine a) *Amplituden-*, b) *Phasen-* oder c) *Pulsmodulation* gewandelt und mit einem a) AM-Demodulator (Gleichrichter), b) phasenempfind-

<sup>192</sup> Das Signal-Rausch-Verhältnis ist etwa proportional zu  $\Delta\varphi$  und würde deutlich schlechter werden.

- lichen Gleichrichter (Verhältnisgleichrichter, Ringmodulator) bzw. c) nur einem Tiefpass demoduliert
- **oder aber** in heutiger Zeit durch einen *PLL Demodulator* demoduliert.



**Abb. 16.20: Prinzip des Flankendiskriminators und der PLL-Demodulation**

Die Filterkurve in Abb. 16.20 wird so justiert, dass die Flanke die FM in eine AM wandelt. Beim PLL-Kreis (Phasenregelkreis) wird der VCO (spannungsgesteuerter Oszillatior) der Frequenz der FM nachgeführt, sodass die Regelspannung exakt dem NF-Signal entspricht<sup>193</sup>. Diese Anordnung kann sehr gut als integrierte Schaltung realisiert werden.

**Praxistipp:** Die Frequenzmodulation kann nur mit einer Simulation eindrucksvoll gezeigt werden. Praktisch ist der Frequenzhub zu klein, um sichtbar zu werden.

## 16.2.4 Phasenmodulation

Die **Phasenmodulation** ist der Frequenzmodulation sehr ähnlich, aber es wird

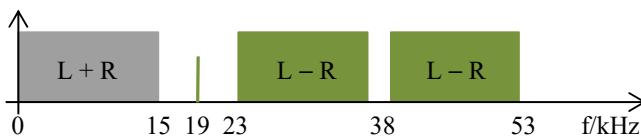
$$\Phi(t) = \omega_T t + \Delta\varphi \cdot \sin \omega_S t \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = \omega_S \cdot \Delta\omega.$$

Die Amplitudeninformation ( $u(t) = \hat{U}_S \sin \omega_S t \rightarrow \Delta\varphi \sin \omega_S t = \Delta\varphi(t)$ ) steckt hierbei direkt in  $\Delta\varphi$ . Diese Modulation wird nur in Spezialfällen genutzt.

**Praxistipp:** Bei der Analyse von Signalen oder Systemen kann jeweils die Darstellungsweise genutzt werden, die für die gewünschte Untersuchung besser geeignet ist.

## 16.2.5 Stereo- und Videosignalmodulation

Die Übertragung von *Stereosignalen* musste unter der Voraussetzung erfolgen, dass alle Monoempfänger weiterhin ihr gewohntes Programm empfangen können. Deshalb wurde ein Summensignal (Links + Rechts) und zusätzlich ein Differenzsignal (Links – Rechts) vorgesehen. Das Summensignal befand sich an der Stelle des bisherigen Monosignals. Dazu erfolgte die Addition des mit einem Träger von 38 kHz amplitudengemodulierten Differenzsignals (mit beiden Seitenbändern aber unterdrücktem Träger). Ein mit dem 38 kHz Träger phasengleich dazuaddierter 19 kHz Pilotton dient zur Wiederherstellung des Trägers (bzw. direkt zur Wiederherstellung des linken und rechten Signals).

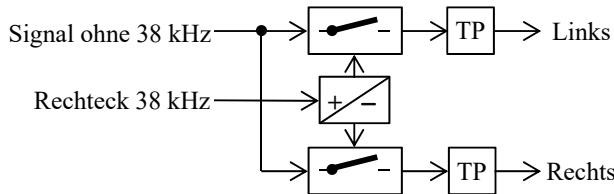


**Abb. 16.21: Stereosignal**

**Praxistipp:** Das Stereosignal wird dann insgesamt im UKW-Bereich frequenzmoduliert und jede Seitenfrequenz besteht aus einem Band wie in Abb. 16.21, vergleiche Abschnitt 16.2.3.

<sup>193</sup> Bei der Regelung gibt es als Regelabweichung eine Phasenabweichung, aber keine Frequenzabweichung.

Zur Demodulation werden der 38 kHz Träger (durch Verdoppeln des 19 kHz Pilottones) wiederhergestellt, die 23 bis 53 kHz abgetrennt, eine Amplitudendemodulation durchgeführt und anschließend durch  $(L + R) + (L - R)$  und  $(L + R) - (L - R)$  das linke und rechte Signal zurückgewonnen. Moderne IC nutzen Zeitmultiplexverfahren. Nach Abtrennen und Verdoppeln wird der Pilotton phasenrichtig als 38 kHz Rechtecksignal zum „Austasten“ des linken bzw. (um  $180^\circ$  verschoben) des rechten Kanals genutzt<sup>194</sup>.

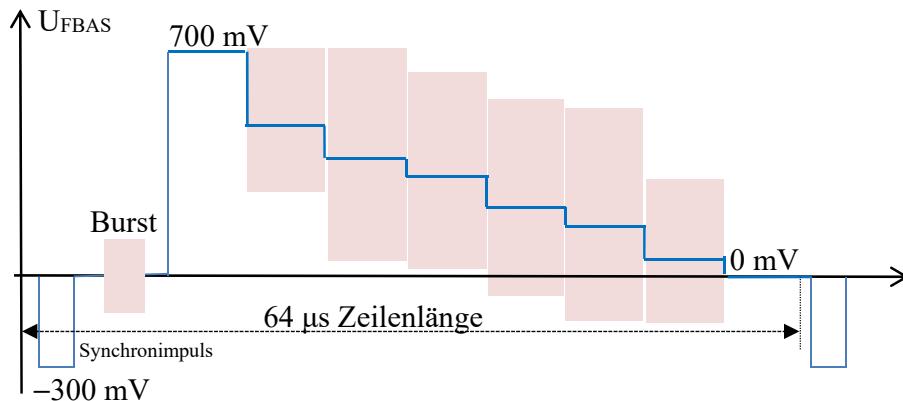


**Abb. 16.22: Stereodemodulator nach dem Zeitmultiplexverfahren**

**Praxistipp:** Für das Zeitmultiplexverfahren sind keine LC-Filter und Mischer erforderlich, sodass es gut als IC realisiert werden kann.

Das in Abschnitt 16.1.3 beschriebene Signal mit den Bildinformationen (Abb. 16.14) wird zum *FBAS-Signal*<sup>195</sup>, indem der sogenannte *Burst* (10 Perioden des bei der QAM unterdrückten Farbrägers zur synchronen Neuerzeugung für die Demodulation) und der *Synchronimpuls* (von 4,7  $\mu\text{s}$  Länge) eingefügt werden.

Das endgültige modulierte HF-Signal wird nach dem Blockdiagramm in Abb. 16.24 erzeugt. Dazu muss der Synchronrakt auch die *Bildumschaltung* mit berücksichtigen.



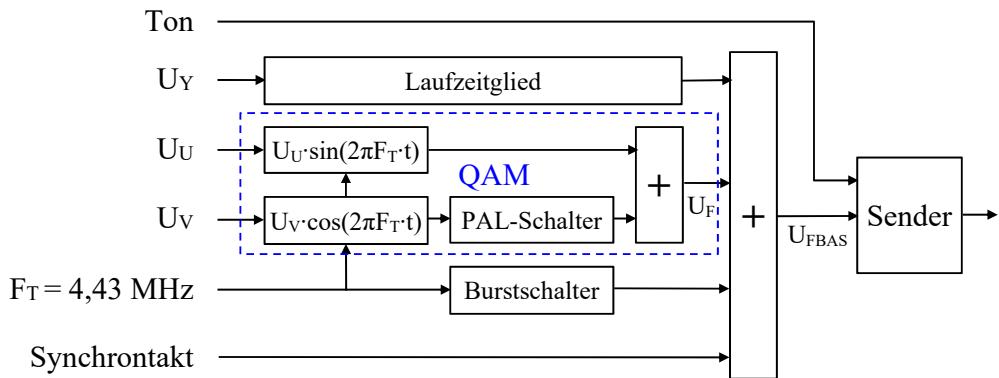
**Abb. 16.23: FBAS-Signal**

Durch den *PAL-Schalter* wird  $U_{FV}$  jeder zweiten Zeile invertiert (d.h.  $180^\circ$  gedreht), um beim Empfänger durch eine Auswertung von zwei Zeilen Farbfehler zu korrigieren. Das *Laufzeitglied* gleicht die Zeitverzögerung des Quadraturmodulators und der Addition aus. Der *Burstschalter* fügt zu den entsprechenden Zeiten den Burst dazu.

Der Ton wird im Sender mit einem Träger von 5,5 MHz *frequenzmoduliert* und zum FBAS-Signal addiert. Für dieses Signal erfolgt dann eine *Amplitudenmodulation* mit bis auf einen Rest unterdrücktem Seitenband auf den HF-Träger im VHF- oder UHF-Bereich.

<sup>194</sup> Das Austasten entspricht einer erneuten Modulation  $\rightarrow L+R, \frac{1}{2}\{38\pm(L+R)\}, \frac{1}{2}\{38-[38\pm(L-R)]\} \rightarrow L-R, \frac{1}{2}\{38+[38\pm(L-R)]\}, 38 \text{ kHz}$ . Die grauen Anteile filtert der Glättungstiefpass mit weg. Es bleibt „L“. Mit  $-38$  bleibt „R“. Für  $(L-R)$  ist deren Frequenzband einzusetzen. Die  $\frac{1}{2}$  verdeutlichen die Amplitude der Seitenbänder. Zeitmultiplexverfahren entspricht einem Synchondemodulator (auch phasenempfindlicher Gleichrichter).

<sup>195</sup> FBAS bedeutet Farb-Bild-Austast-Synchron



**Abb. 16.24: Blockschaltbild bis zum Sendesignal**

Die Demodulation erfolgt mit den umgekehrten Funktionen: AM-Demodulator, Auskopplung der 5,5 MHz und Frequenzdemodulation des Tons, Auskopplung der Synchronimpulse und von U<sub>Y</sub>, Demodulation der QAM<sup>196</sup>, Berechnen von U<sub>R</sub>, U<sub>G</sub> und U<sub>B</sub>.

**Praxistipp:** Wenn am Gerät entsprechende Anschlüsse ausgeführt wurden, können die folgenden Standardsignale genutzt werden:

- U<sub>R</sub>, U<sub>G</sub> und U<sub>B</sub> entsprechen dem RGB-Signal. Das Synchronsignal wird dann zu U<sub>R</sub> hinzugefügt.
- U<sub>Y</sub>, U<sub>U</sub> und U<sub>V</sub> entsprechen dem YUV-Signal (bzw. mit veränderten Faktoren dem YPbPr-Signal oder Komponentensignal). Das Synchronsignal wird zu U<sub>Y</sub> hinzugefügt.
- U<sub>Y</sub> und U<sub>F</sub> entsprechen dem Y/C-Signal (S-Video). Das Synchronsignal wird zu U<sub>Y</sub> hinzugefügt.
- U<sub>FBAS</sub> ist das Composite-Signal.

## 16.2.6 Kennwerte, Übungsaufgaben und Simulation modulierter Signale

Kennwerte eines Signals sind stark abhängig von der Signalform, z.B.

- Sinussignal:  $\hat{U}$ ,  $\omega$  und evtl.  $\phi$
- Rechtecksignal:  $\hat{U}_{ss}$ , U<sub>Offset</sub> (oder  $\hat{U}_-$  und  $\hat{U}_+$ ), Tastverhältnis, Periodendauer und evtl. Anstiegszeit der Flanke<sup>197</sup>
- Dreiecksignal:  $\hat{U}_{ss}$ , U<sub>Offset</sub> (oder  $\hat{U}_-$  und  $\hat{U}_+$ ), Anstiegzeit und Abfallzeit (zusammen Periodendauer)

Kennwerte eines Frequenzspektrums (gemessen oder nach der Fourierreihe).

- Amplitudenwerte von  $n \cdot \omega$  als U<sub>cn</sub> (oder die Beträge von U<sub>an</sub> und U<sub>bn</sub>)
- Phasenlage von  $n \cdot \omega$  als  $\varphi_n$  (oder als Vorzeichen der U<sub>an</sub> und U<sub>bn</sub>)

Kennwerte eines amplitudenmodulierten Signals

- Amplitude des unmodulierten Trägers  $\hat{U}$
- Frequenz des Trägers f<sub>T</sub>
- Modulationsgrad m =  $\hat{U}_s/\hat{U}_T$
- Bandbreite des modulierten Signals (oder maximale Signalfrequenz)

Kennwerte eines frequenzmodulierten Signals

- Amplitude des Trägers  $\hat{U}$

<sup>196</sup> Mit einem Synchondemodulator (auch phasenempfindlicher Gleichrichter).

<sup>197</sup> Von 0,1 bis 0,9  $\hat{U}$ .

- Frequenz des unmodulierten Trägers  $f_T$
- Frequenzhub  $\Delta f$ , daraus folgender Phasenhub  $\Delta\varphi$
- maximale Signalfrequenz
- Bandbreite des modulierten Signals

### Aufgabe 16.1

Addition der Teilschwingungen des Rechtecksignals aus Abb. 11.39, z.B. mit einem Simulationsprogramm bei  $\hat{U} = 5 \text{ V}$ ,  $T = 2 \text{ ms}$ .

Frage 1: Wie sehen die Grund- und die ersten Oberschwingungen ( $n = 3, 5, 7$ ) einzeln aus?

Frage 2: Wie sieht das Signal bei schrittweiser Addition der Oberschwingungen (von der 3. bis zur 7.) aus?

Frage 3: Wie sehen das Amplituden- und das Phasenspektrum aus?

### Aufgabe 16.2

Spektrum eines amplitudinemodulierten Signals mit  $\hat{U}_T = 100 \text{ V}$ ,  $f_T = 500 \text{ kHz}$  und zwei Sinussignalen  $\hat{U}_1 = 30 \text{ V}$ ,  $f_{s1} = 80 \text{ Hz}$  und  $\hat{U}_2 = 20 \text{ V}$ ,  $f_{s2} = 12000 \text{ Hz}$  (entspricht einem Mittelwellensignal)

Frage 1: Wie sieht die Darstellung des Spektrums der Beträge der Amplituden aus?

Frage 2: Welche Übertragungsbandbreite ist mindestens erforderlich?

### Aufgabe 16.3

Drei Sprachsignale ( $f_M = 200$  bis  $3600 \text{ Hz}$ ) sollen frequenzmultiplex übertragen werden.

Zwischen den Übertragungskanälen ist ein Frequenzabstand von  $400 \text{ Hz}$  vorzusehen und der erste Kanal soll bei  $4 \text{ kHz}$  beginnen.

Frage 1: Welche Oszillatorkreisfrequenzen können für eine Frequenzumsetzung gewählt werden?

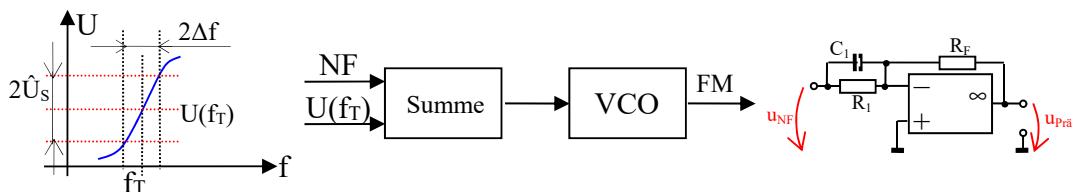
Frage 2: Es wird eine Multiplikationsschaltung genutzt, welche Frequenzen müssen danach wieder entfernt werden?

Hinweis: Im Vergleich mit einer Amplitudemodulation soll immer nur ein Seitenband übertragen werden.

### Aufgabe 16.4

Ein VCO wird zur Frequenzmodulation genutzt. Seine Ausgangsspannung ist konstant  $10 \text{ V}$ .  $U(f_T)$  dient der Feinabstimmung der Trägerfrequenz zu  $f_T = 100 \text{ MHz}$ . Das NF-Signal ist  $\hat{U}_{\text{scos}\omega}$ .

Dabei wurde  $\hat{U}_s$  so gewählt, dass  $\Delta f = 75 \text{ kHz}$  wird. Die Testsignalfrequenz beträgt einmal  $f_s = 1 \text{ kHz}$  und zum anderen  $10 \text{ kHz}$  (siehe Abb. 16.25).



**Abb. 16.25: Kennlinie, Blockschaltbild eines VCO und Schaltung der Präemphase**

Frage 1: Wie lauten  $\omega(t)$ ,  $\Delta\varphi$  und  $u(t)$ ?

Frage 2: Um wie viel wird das Signal von  $10 \text{ kHz}$  durch eine Präemphase ( $\tau = C_1 R_1 = 50 \mu\text{s}$ ) angehoben, wie sieht qualitativ der Frequenzgang aus (bis ca.  $20 \text{ kHz}$ )?

Hinweis:  $Z_1$  sinkt mit steigender Frequenz und  $|v| = R_F/Z_1$  steigt gegenüber  $v(f=0) = R_F/R_1$  (für Operationsverstärker vergleiche 13.2.3).

Zusatzaufgabe: Simulieren Sie die Anordnung von Abb. 16.25!

## 16.3 Diskrete Signale

### 16.3.1 Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation

Diskrete Signale haben nur zu diskreten Zeitpunkten  $t_i$  einen von null verschiedenen Wert.

Sie entstehen z.B. durch Messwertabtastung oder A/D-Wandlung (siehe Abschnitt 15.1.1). Mathematisch entspricht das einer Multiplikation mit einer Folge von Stoßfunktionen<sup>198</sup>. Die Einordnung und die Eigenschaften werden in der Gegenüberstellung Abb. 16.26 deutlich.

Die Transformation erfolgt nach den Gleichungen (10.11) in Abschnitt 10.7. Diese können mit Hochsprachen leicht in Algorithmen für Rechner umgesetzt werden. In vielen Analyseprogrammen sind komfortabel zu nutzende Algorithmen implementiert, die in der Regel keine Fehlbenutzung (insbesondere keine falsche Abtastung) mehr zulassen. Als Algorithmus wird überwiegend die FFT (Fast Fouriertransformation) verwendet.

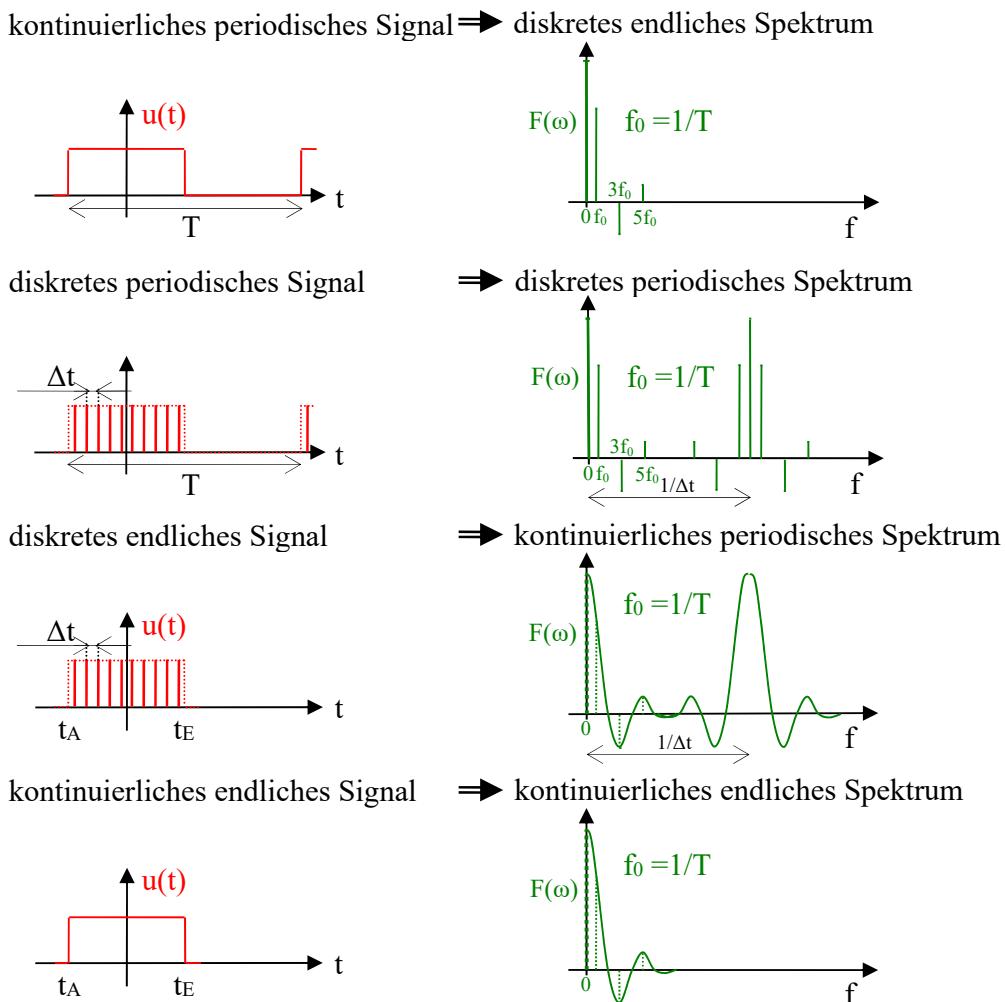


Abb. 16.26: Gegenüberstellung von Signalen und Spektren<sup>199</sup>

<sup>198</sup> Zur Stoßfunktion und Abtastfunktion siehe Abschnitt 10.5.

<sup>199</sup> Es ist  $F(\omega) = F_g(\omega)$  bzw.  $\text{Re}\{F(\omega)\}$  nach (10.9) bzw. (10.10) (hier ein symmetrisches Rechteck). Ein Unterschied besteht, wie für (10.8) erläutert. Die negative Seite der Spektren wurde nicht gezeichnet. Das kontinuierliche Spektrum des Rechtecks entspricht der  $\text{Si}(\omega)$ -Funktion.

**Praxistipp:** Die *diskreten periodischen Signale* sind der eigentliche *Gegenstand der diskreten Fouriertransformation (DFT)*. Aus den Abtastwerten der Grundperiode des Signals  $-T/2 \leq t < T/2$  lassen sich numerisch direkt die Spektralwerte des Bereiches  $0 \leq f \leq 1/\Delta t$  ermitteln. Diese sind dann periodisch fortzusetzen.

200

Die in Abb. 16.26 sichtbaren *Eigenschaften* ermöglichen es, die *diskrete Fouriertransformation für weitere Fälle* in guter Näherung zu nutzen.

- So kann das diskrete endliche (einmalige) Signal mit der Einschränkung bestimmt werden, dass nur das „abgetastete“ Spektrum für  $0 \leq f \leq 1/\Delta t$  bei der Berechnung entsteht<sup>201</sup>.
- Das kontinuierliche periodische Signal kann abgetastet werden<sup>201</sup> und die ermittelten Spektralwerte des Bereiches  $0 \leq f \leq 1/2\Delta t$  sind das diskrete endliche (einmalige) Spektrum.
- Das kontinuierliche endliche (einmalige) Signal kann ebenfalls abgetastet werden<sup>201</sup> und die ermittelten Spektralwerte des Bereiches  $0 \leq f \leq 1/2\Delta t$  sind dann das abgetastete Spektrum, das periodisch fortzusetzen ist.

In der Regel ist es möglich, das Signal bzw. deren *Grundperiode genau  $2^n$ -mal äquidistant abzutasten*. In diesem Fall kann der schnelle Algorithmus der **FFT** und nicht die vollständige Umsetzung der DFT ( 10.11 ) benutzt werden.

**Praxistipp:** Für die praktische Anwendung müssen folgende Bedingungen beachtet werden:

1. Genau eine (oder mehrere) Grundperioden *äquidistant und synchron zur Periode* abtasten. Wenn der Abtastwert direkt zu Beginn des Signals liegt, gehört der gleiche Wert der nächsten Periode nicht mehr dazu (er ist nicht der letzte der ersten Periode). Hilfestellung: Die numerische Berechnung ist so, als ob der abgetastete Bereich immer wieder (periodisch) komplett angehängt wird.
2. Die Abtastung muss so schnell erfolgen, dass  $1/\Delta t$  so groß ist, dass die *Perioden des Spektrums nicht ineinander laufen* und so die Grundperiode des Spektrums verfälscht wird (Aliasingfehler). (Bei Abb. 16.26 ist  $1/\Delta t$  etwas zu klein gewählt.)
3. Ist die Abtastung nicht nach 1. und 2. erfolgt, müssen durch *Interpolation neue Abtastwerte* bestimmt werden (z.B. bei nicht äquidistanter Abtastung, bei nicht synchroner Abtastung oder wenn bei der FFT nicht  $2^n$  Abtastwerte vorliegen.)
4. Ist es nicht möglich, die Abtastung so vorzunehmen (z.B. weil die Grundperiode im Rauschen nicht erkennbar ist), kann eine **geeignete Fensterfunktion** benutzt und die Abtastung dieser zugeordnet werden.

Aliasingfehler entstehen, wenn sich Perioden im Spektrum bei zu kleiner Abtastfrequenz  $1/\Delta t$  überlagern<sup>202</sup>. Die vier Punkte zeigen, dass bei der praktischen Anwendung der DFT eine gute Vorbereitung der Messung und Sorgfalt erforderlich sind, sonst entstehen unkalkulierbare Fehler.

*Kurzzeitfrequenzspektren* entstehen, wenn ein geeignetes Fenster mit dem Signal mitläuft und nach jedem (oder einigen)  $\Delta t$  das Spektrum jeweils neu berechnet wird. Das ergibt ein zeit-abhängiges Spektrum. Entweder ändert sich ständig die Anzeige oder es werden Kurven (z.B. ähnlich wie eine dreidimensionale perspektivische Darstellung als  $F(f_k)$  über  $t$  und  $f$ ) erzeugt.

**Praxistipp:** Viele Programme zur Audiobearbeitung weisen solche Kurzzeitspektren auf.

Digitale Signalprozessoren (DSP) führten zum Durchbruch der digitalen Signalverarbeitung.

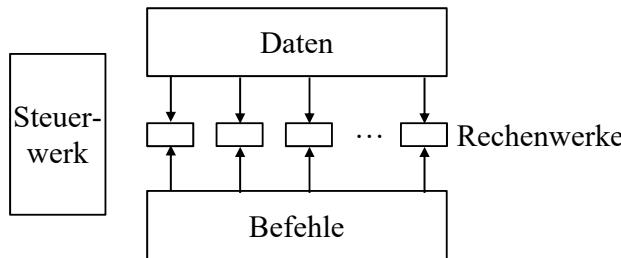
<sup>200</sup> Es muss **exakt** die Grundperiode sein, diese kann aber zeitlich beliebig liegen.

<sup>201</sup> Bei genügend Abtastpunkten ist es entsprechend genau.

<sup>202</sup> Das Abtasttheorem ( 15.1 ) ergibt eine gleichlautende Aussage, wenn der höchste Frequenzanteil bekannt ist.

Ein DSP muss die durch Abtastrate (oder Abtastrate) festgelegte Datenmenge pro Zeittakt sicher verarbeiten. In jedem Takt müssen Eingangsdaten (-signale) in den DSP eingelesen, verarbeitet und die verarbeiteten Daten (als Ausgangssignal) ausgegeben werden – *Prinzip einer Pipeline*. Eine Zeitverzögerung der Datenverarbeitung würde zu Signalausfällen führen. DSPs müssen also echtzeitfähig sein. Dazu dienen:

- A/D-Wandler mit synchroner Abtastung analoger Signale bzw. mit seriellen Schnittstellen zur Ein- und Ausgabe digitaler Signale,
- mehrere Rechenwerke (ALUs), darunter das Multiply-Accumulate-Rechenwerk (MAC für Operationen vom Typ  $A_{n+1} = A_n + B \cdot C$ ), die in einem Prozessorzyklus mit hoher Geschwindigkeit insbesondere FFT oder Faltung ermöglichen,
- Daten und Befehle in eigenen Speichern mit eigenen Bussen, die gleichzeitig in die erforderlichen Rechenwerke geladen werden können,
- Adressgeneratoren (Address Generation Units – AGU), programmierbare Zähler und andere logische Elemente, welche Speicheradressen parallel zu den arithmetischen Operationen bearbeiten können,
- der Aufbau des Prozessors in Harvard-Architektur<sup>203</sup> mit Schleifenspeichern, Ringpuffern und Hardwarestacks,
- die Rechenwerke (Execution Units – EXU), bei denen jeder Cluster das Register des Nachbarclusters auslesen darf,
- kein Multitasking sowie
- mehrmalige Speicherzugriffe und somit eine schnelle Ausführung von Schleifen in einem Zyklus.



**Abb. 16.27: Darstellung der Harvard-Architektur (schematisch)**

Zur Entwicklung von DSP-Anwendungen werden umfangreiche PC-basierte Entwicklungsplätze mit Konfigurationssoftware, Kommunikationssoftware zum Laden der Programme in den DSP sowie zum Debugging, Mess- und Analysegeräte für die analogen Signale, Logikanalysatoren für die digitalen Signale und erprobte Softwarealgorithmen für die Funktionen benötigt.

In der Regel werden Mikrocontroller zusätzlich zur Steuerung der Funktionen und Parameter eingesetzt und sind in den Entwicklungsplatz zu integrieren.

**Praxistipp:** Heute nutzen alle Soundkarten DSPs, alle Grafikkarten GPUs (entsprechend ausgelegte leistungsfähige DSP mit mehreren Pipelines). In vielen Geräten (DSL-Modem, allen OFDM-Modulatoren und -Demodulatoren, Spektralanalysatoren bis zu Oszilloskopen) werden DSPs eingesetzt. (Es gibt auch Softwarelösungen als Signalprozessor, die für einfache Anforderungen auf normalen CPU laufen können.)

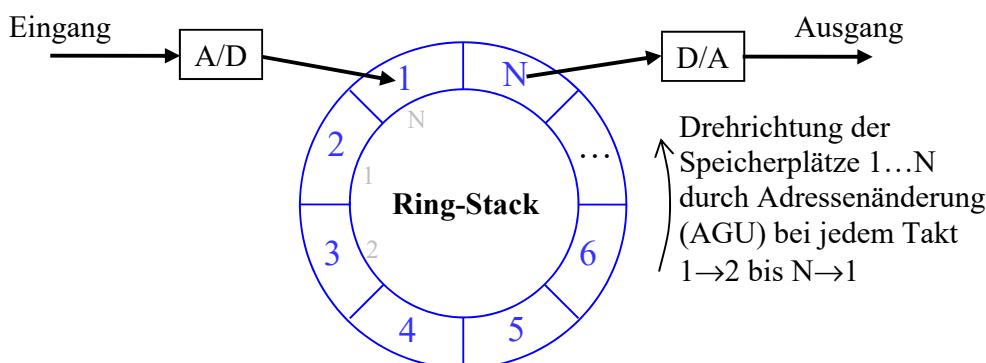
<sup>203</sup> „Harvard-Architektur“ ist in der Informatik eine Prozessorarchitektur zur Realisierung sehr schneller CPUs und Signalprozessoren. Speicher für Befehle und für Daten sind physikalisch getrennt und haben eigene Busse, so können Befehle und Daten gleichzeitig geschrieben werden. Bei der „Von-Neumann-Architektur“ sind dazu mindestens zwei Buszyklen notwendig. Die „Harvard-Architektur“ hat neben der „Von-Neumann-Architektur“ durch den DSP die größte Verbreitung gefunden.

Zum Vergleich mit Abschnitt 16.1.1 wird als Beispiel ein digitales Mischpult kurz vorgestellt. Der grundlegende Aufbau entspricht dem analogen Mischpult.

- Die Signaleingänge (Pegel- und Impedanzanpassung) sind immer analog und entsprechen weitgehend den analogen Mischpulten.
- Danach erfolgt unmittelbar die *Analog-Digital-Wandlung*.
- Die digitale Signalverarbeitung erinnert grundlegend in Aufbau und Abfolge an das analoge Mischpult.
- In der Mitte ist wiederum die *Mischung auf die Busse*, wenn auch softwaregesteuert sehr viel komfortabler.
- Auf der Ausgangsseite erfolgt die *Verteilung der Signale* softwaregesteuert ebenfalls sehr viel komfortabler.
- Unmittelbar vor den Ausgängen erfolgt dann die *Digital-Analog-Wandlung*.

Außer den Funktionen, die schon ein analoges Mischpult besitzt und die nun softwaregesteuert erfolgen, können komfortabel weitere Effekte realisiert werden. Einige der wichtigsten Effekte, die heute in der Regel genutzt werden, sind **Delay** (definierte Zeitverzögerung des Signals), **Echo** (zeitverzögerte mehrfache Wiederholung des Signals mit Abschwächung seiner Amplitude) und **Hall** (wie Echo, aber mit sehr kurzer Zeitverzögerung).

Mit dem Delay sollen die Möglichkeiten der digitalen Signalverarbeitung gezeigt werden.



**Abb. 16.28: Schematische Darstellung der Abarbeitung eines Delay**

Der prinzipielle Ablauf eines Delay zeigt Abb. 16.28. Dabei ist ein Takt je Abtastintervall notwendig (bei 96 kHz wird  $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ ) und die Verzögerung ergibt sich zu  $N \cdot \Delta t$ .

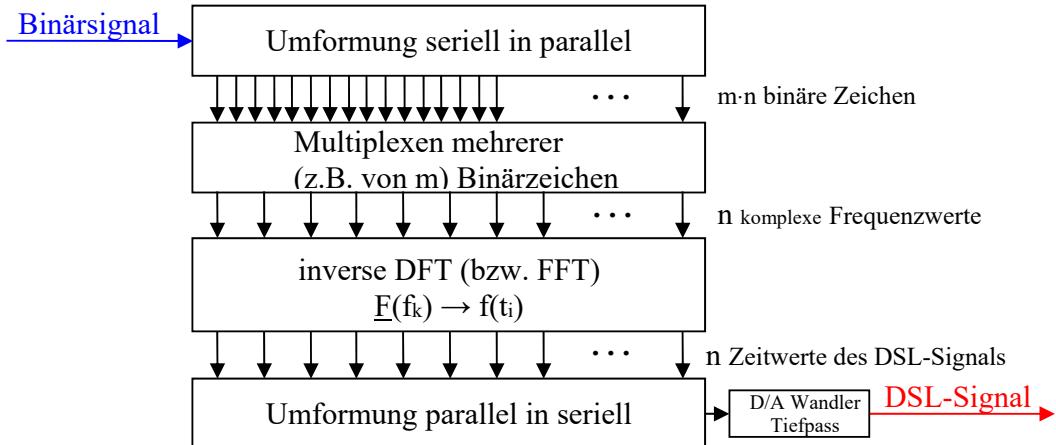
**Praxistipp:** Viele weitere Effekte, so z.B. zur Änderung der Wiedergabegeschwindigkeit oder zur Verfremdung von Stimmen, können darüber hinaus digital besser realisiert werden. Dazu kann auch im Frequenzbereich nach DFT und danach inverser DFT gearbeitet werden.

### 16.3.2 Digitale Modulationsverfahren

Für die Übertragung digitaler Signale wurden adäquate Modulationsverfahren entwickelt, z.B.:

- QPSK – Quadraturphasenumtastung (*Quadrature Phase-Shift Keying*) entspricht der 4-QAM,
- QAM – Quadraturamplitudenmodulation (*Quadrature Amplitude Modulation*),
- OFDM – Orthogonales Frequenzmultiplexverfahren (*Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*),
- DVB-T – Digitales, terrestrisches Fernsehen (*Digital Video Broadcasting – Terrestrial*) oder auch
- DSL – Digitaler Teilnehmeranschluss (*Digital Subscriber Line*).

Die vielfältigen modernen Anwendungen der DFT/FFT für diese Modulationen sollen am Beispiel der Realisierung der Modulation bei einer ADSL-Übertragung untersucht werden. In Abb. 16.29 ist der Ausgangspunkt das zu übertragende *Binärsignal*. Dieses wird z.B. in ein Schieberegister als Datenpuffer eingelesen und so das serielle in ein *parallel* vorliegendes Signal umgeformt.



**Abb. 16.29: Vereinfachtes Prinzip der Sendemodulation bei ADSL**

Mehrere Binärzeichen werden durch eine Quadraturamplitudenmodulation (QAM) zusammengefasst<sup>204</sup> (Multiplexprinzip).



m bit haben zusammen  
 $m^2$  Zustände, die den  
Punkten zugeordnet  
werden.

**Abb. 16.30: 4- und 16-fache QAM**

Bei Abb. 16.30 entstehen für m bit ein cos- und ein sin-Amplitudenanteil (bzw. Amplitudengleich mit Phase). Die Unterscheidbarkeit wird mit höherem m deutlich schlechter.

Die nun vorliegenden n komplexen Werte werden je einer der parallelen *orthogonalen Übertragungsfrequenzen* der ADSL-Übertragung zugeordnet (ähnlich der OFDM). Das realisiert die **inverse diskrete Fouriertransformation** (in ( 10.11 ) obere Formel). Die digital vorliegenden n komplexen Werte werden als *Amplituden*  $F(f_k)$  ( $k = 0 \dots n-1$ ) der Frequenzen  $f_k$  dem  $DFT^{-1}$  Algorithmus zugeführt und die *digitalen Zeitwerte*  $u(t_i)$  in einen Datenpuffer ausgegeben, *seriell* ausgelesen, *digital-analog* gewandelt und abschließend durch einen *Tiefpass* geglättet.

Das so in jedem Umformintervall entstehende Zeitsignal ist das vollständige Signal der *Diskreten-Multiton-Modulation* (DMT) der ADSL-Übertragung mit 256 *Frequenzbändern* zu je ca. 4 kHz Bandbreite (davon 1. bis 32. für analoges Telefon bzw. ISDN freigehalten, 33. bis 64. für die Übertragung des Upstreams, 65. bis 255. für den Downstream und eins für einen Pilotton zur Synchronisation; zusammen ca. 1,1 MHz; siehe Abb. 16.31).

<sup>204</sup> Z.B. könnten je zwei oder vier Bit jeweils dem Real- und Imaginärteil des komplexen Wertes  $F(f_k)$  (Betrag und Phase) zugeordnet werden. Beim DSL kann das für jeden Kanal nach dessen Qualität angepasst werden.

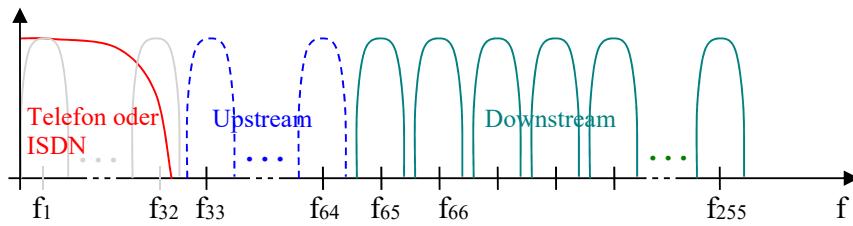


Abb. 16.31: Prinzipielle Anordnung der Frequenzbänder der DMT bei DSL

Die praktische Realisierung erfolgt mit einem *digitalen Signalprozessor* (DSP) und zur Steuerung des Ablaufs einem *Mikrokontroller*. So ist diese Art der Signalverarbeitung mit wenigen integrierten Schaltkreisen im DSL-Modem zu realisieren. Es werden eben nicht über 256 hochwertige analoge Filter, Oszillatoren und Multiplikatoren zur Frequenzumsetzung benötigt.

Auf der *Empfangsseite* erfolgt die Demodulation genau andersherum mit der *diskreten Fouriertransformation* (in (10.11) untere Formel). Die abgetasteten  $u(t_i)$  (von analogen zu *digitalen Zeitwerten* gewandelten  $f(t_i)$ ) werden zu den *Amplituden*  $F(f_k)$  der Frequenzen  $f_k$  transformiert, demultiplext (Umkehrung der QAM) und seriell ausgegeben.

**Praxistipp:** Da alle Modems senden und empfangen müssen, findet beides statt, aber mit verschiedenen Up- und Downstreambreiten. Es gibt demnach zwei verschiedene Modems für Provider und Nutzer.

(Weiterführendes zur Modulation beim DVB siehe z.B. (Sch09 S. 263 ff).)

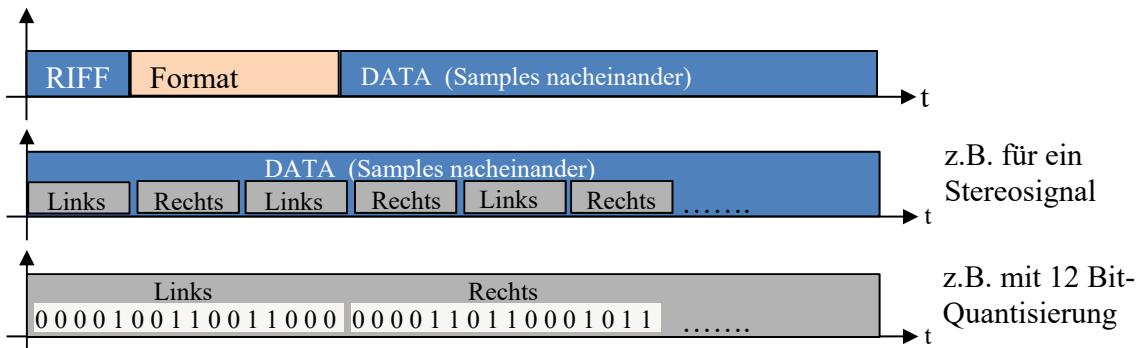
### 16.3.3 Codierung, Kompression und Fehlerkorrektur digitaler Signale

Für die Übertragung digitaler Signale (zeit- und wertquantisierter Signale) muss eine festgelegte **Codierung** und ein festgelegtes **Protokoll** verwendet werden. Das bedeutet:

- Die Codierung jedes Abtastwertes einschließlich einer eventuellen Kompression erfolgt nach vereinbarten Algorithmen.
- Die Zahlenfolge muss *exakt erkennbar* sein, deshalb ist es notwendig, die Daten in ein Protokoll einzubetten (bei Audiosignalen z.B. das S/PDIF-Protokoll).
- Zusätzlich kann das Protokoll Daten zu seinen Details, zur Kontrolle und zur Fehlerkorrektur enthalten.
- Gleiches gilt bei Speicherung für eine Datei (bei Audiodateien z.B. wav-Dateien).

**Praxistipp:** Zeitquantisierung, Wertquantisierung einschließlich Codierung und ein Protokoll sind für eine Signalübertragung bzw. -speicherung die Voraussetzung.

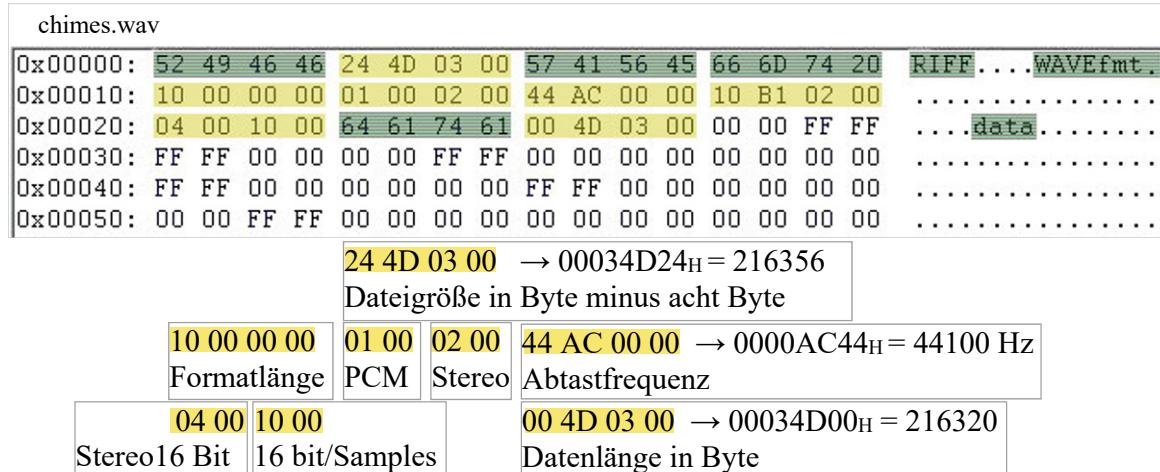
Für Audiosignale in der Unterhaltungselektronik steht an vielen Geräten die relativ einfache digitale S/PDIF-Schnittstelle für elektrische und optische Übertragungen zur Verfügung.



**Abb. 16.32:** Datenformat des S/PDIF-Protokolls im DATA Abschnitt

Im Beispiel von Abb. 16.32 werden 12 Bit-Daten verwendet, sodass von den 16 möglichen Stellen die ersten vier Bit null bleiben.

Als Beispiel für Dateien soll das wav-Dateiprotokoll vorgestellt werden.



**Abb. 16.33:** Die Datei chimes.wav im Hex-Editor<sup>205</sup>

Mit „RIFF“ beginnt der **RIFF**-Abschnitt. Er identifiziert die Datei als „WAVE“-Datei und das 5. bis 8. Byte nennt die Dateigröße. Nach „fmt“ beginnen im **Format**-Abschnitt die Parameter wie Formatlänge, Codierung (hier PCM), mono/stereo (hier stereo), Abtastrate usw. (in den Kästen darunter sind Erläuterungen dazu). Nach „data“ steht der **DATA**-Abschnitt mit der Datenlänge und dem Signalverlauf. Die Samples der Amplitudenwerte folgen in Blöcken zu je 8 Hexadezimalziffern (entspricht 4 Byte 2 je 16 bit linker und 2 je 16 bit rechter Kanal) im Zweierkomplement<sup>206</sup>. Ist die Bit-Anzahl nicht durch 8 teilbar, werden an das niederwertigste Byte Nullen hinzugefügt. Alle Zahlen erscheinen in Byte (2 Hexadezimalziffern = 8 bit) mit der Bytereihenfolge vom niederwertigsten bis zum höchswertigen Byte (also umgekehrt wie normale Zahlen).

Zusätzlich werden heute in der Regel eine **Datenkompression** (Verringerung der großen zu übertragenden Datenmenge und so der notwendigen Bandbreite), Maßnahmen zur **Fehlerkorrektur** sowie eventuell zur **Verschlüsselung** durchgeführt.

<sup>205</sup> In Abb. 16.33 sind hexadezimale ASCII-Zeichen gestreift hinterlegt (je zwei Hexadezimalzeichen, sie stehen in der rechten Spalte zusätzlich als Buchstaben). Byteangaben sind einfach hinterlegt und Daten sind nicht hinterlegt.

<sup>206</sup> Negative Binärzahlen werden bitweise negiert und anschließend wird 1 addiert. Positive Zahlen dürfen das höchste Bit nicht belegen. Z.B. 16 bit erlauben somit den Wertebereich  $8000_{\text{H}} = -32768 < x < +32767 = 7FFF_{\text{H}}$ .

**Praxistipp:** Es existiert eine Vielzahl von Codierungsverfahren und Protokollen. Sie unterscheiden sich vor allem durch die verwendeten Kompressions-, Fehlerkorrektur- und Verschlüsselungsverfahren.

Zur *Datenkompression* werden abhängig vom Verwendungszweck Verfahren angewandt, die

- *verlustfrei* (ohne Reduktion von Informationsanteilen – **Redundanzreduktion**)

sowie

- *verlustbehaftet* (mit Reduktion zumindest von Anteilen, die nicht bzw. kaum wahrnehmbar sind – **Irrelevanzreduktion**),

sind.

Die Ersteren nutzen im Wesentlichen eine bessere Darstellung der Daten. Immer lassen sich die Originaldaten wiederherstellen. Beispiele sind die Zip-Codierung, die Huffman-Codierung oder die Arithmetische Codierung (alle ergeben eine Erhöhung der Entropie<sup>207</sup>).

Die Letzteren erlauben keine Wiederherstellung der Originaldaten. Es müssen grundsätzlich Verfahren zur Entscheidung darüber, welche Daten entbehrt werden können, angewandt werden. So werden z.B. beim mp3-Format Töne entfernt, die beim Hören neben den anderen „lauten“ Tönen untergehen.

In der digitalen Übertragung und Speicherung von Bild- oder Videosignalen werden mehrere Verfahren kombiniert angewandt (z.B. bei den DVB-Übertragungsverfahren, den JPEG- und den MPEG-Verfahren). Weiterführendes z.B. in (Sch09 S. 158 ff).

Dabei werden in entsprechender Reihenfolge z.B. kombiniert:

- Eine Unterabtastung (Helligkeitsunterschiede sind wichtiger als Farbdifferenzen, die damit seltener abgetastet werden können; verlustbehaftet),
- Diskrete-Cosinus-Transformation (wandelt in ein Spektrum; höhere Frequenzanteile entsprechen feinen Strukturen und können entfallen; verlustbehaftet),
- Quantisierung (Anpassen der Wertquantisierung vermindert feine Strukturen; verlustbehaftet),
- Zick-Zack-Scan (von niedrigen zu hohen Frequenzen auslesen)
- Lauflängencodierung (mehrfach nacheinander folgende Symbole werden zusammengefasst)
- Huffman-Codierung (häufig auftretende Symbole erhalten kürzere Codewörter).

**Praxistipp:** Die Arbeit erledigen entsprechende Programme. Bei einigen (z.B. der Bildverarbeitung) können Parameter angepasst werden. Das muss auf den jeweiligen Verwendungszweck mit entsprechenden Erfahrungen ausgerichtet werden.

Viele Verfahren wurden erst mit der Implementation von effektiven Methoden zur *Fehlerkorrektur* praxistauglich, so z.B. das Ethernet, die CD und DVD Speicherung oder alle digitalen Videoübertragungsverfahren.

Das Ethernet nutzt eine *Rückwärtsfehlerkorrektur* (bei Fehlererkennung werden Datenpakete erneut angefordert). Dagegen besitzen Broadcastübertragungen eine *Vorwärtsfehlerkorrektur*. Die einfachsten und bekanntesten Methoden zur Fehlererkennung sind die *Prüfsumme* und die *Paritätsbits*. Dazu muss den Daten Redundanz hinzugefügt werden.

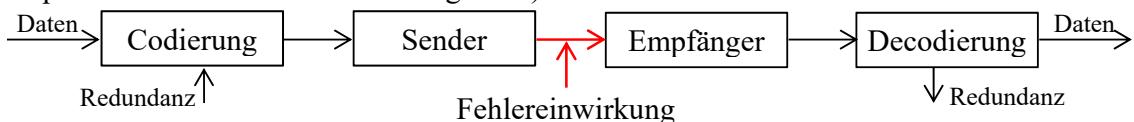
<sup>207</sup> Die Entropie der Information ist ein Maß für den durchschnittlichen Informationsgehalt.

Entsprechend der Protokollvorschriften kann für jeden Datenblock eine Prüfsumme gebildet und zusätzlich übertragen werden. So sind Fehler weitestgehend zu erkennen (nur Rückwärtsfehlerkorrektur).

Paritätsbits können für einen Datenblock auch zeilen- und spaltenweise vergeben werden. Daraus sind dann bereits Korrekturen exakt ableitbar, soweit sie nicht ungünstig gehäuft auftreten (Rückwärts- und teilweise Vorwärtsfehlerkorrektur).

X	X	X	X	$p_{z1}$
X	X	X	X	$p_{z2}$
X	X	X	X	$p_{z3}$
X	X	X	X	$p_{z4}$
$p_{s1}$	$p_{s2}$	$p_{s3}$	$p_{s4}$	

Das Beispiel zeigt eine Variante für 16 Datenbits und Hinzufügen von 8 Paritätsbits. Um Fehler zu erkennen und zu korrigieren, sind redundante Daten so einzufügen, dass der Empfänger ohne Rückfrage (beim Sender) Übertragungsfehler erkennen und korrigieren kann. Vor dem Senden erfolgt dazu eine **Kanalcodierung** (z.B. wird dabei der schon komplexere Reed-Solomon-Code eingesetzt).



**Abb. 16.34: Schema für eine Fehlerkorrektur zur Kanalcodierung**

Des Weiteren erfolgt vor der Kanalcodierung der Sendedaten eine **Quellencodierung** und abschließend die entsprechende Decodierung der Daten von der Quelle (Kompression bzw. Dekompression mit eigenen entsprechenden Mechanismen zur Fehlerkorrektur). Solange die Korrekturen erfolgreich ablaufen, gibt es keine Qualitätseinbußen. Danach bricht die Übertragung schnell zusammen.

**Praxistipp:** Vorwärtsfehlerkorrektur wird beispielsweise für CD und DVD, für das digitale Fernsehen oder beim Mobilfunk eingesetzt.

#### 16.3.4 Kennwerte und Übungsaufgaben für diskrete (digitale) Signale

Kennwerte digitaler Signale:

Abtastfrequenz	$1/\Delta t$
Quantisierungsstufen	$2^n$ mit $n = \text{Anzahl Binärstellen}$

Kennwerte bei Nutzung der diskreten Fouriertransformation:

Abtastfrequenz	$1/\Delta t$
Abtastintervall	$n \cdot \Delta t$
Anzahl Abtastwerte	$n$
Maximal im Signal enthaltene Frequenz	$f_{\text{Max}}$

**Praxistipp:** Es muss das Abtasttheorem eingehalten werden, damit  $1/(2\Delta t) \geq f_{\max}$  wird und die Perioden im Spektrum sich nicht überlappen (vergleiche Abb. 16.26). D.h., jede Periode der höchsten Frequenz muss **mindestens zweimal** abgetastet werden ( $2\Delta t \leq T_{\min} = 1/f_{\max}$ ). Gegebenenfalls muss dazu vor der Abtastung die Frequenz durch ein Tiefpassfilter beschränkt werden (statistischer Fehler für  $f_{\max}$  wird dann bei Wiederherstellung  $\geq 50\%$ ).

### Aufgabe 16.5

Erzeugen einer Sinusschwingung und Abtasten diese mit  $n = 2, 4, 16$  Abtastwerten pro Periodendauer  $T$ .

Frage: Wie ist die Qualität der Abtastung einzuschätzen?

Hinweis: Ein geeignetes Audiobearbeitungsprogramm verwenden.

### Aufgabe 16.6

Durchführen eine diskrete Fouriertransformation (DFT) für das Rechtecksignal aus Abb. 11.39 (bei  $\hat{U} = 5$  V,  $T = 2$  ms) für  $n = 8, 16, 32$  und  $512$  Abtastwerte.

Frage 1: Wie viele Oberschwingungen werden jeweils bestimmt?

Frage 2: Wie ändert sich die Amplitude der jeweils höchsten ermittelten Oberschwingung?

Hinweis: Ein geeignetes Audiobearbeitungsprogramm verwenden.

Zusatzfrage: Wie ändert sich das Spektrum, wenn an die Periode mit  $n$  Intervallen ein Intervall der nächsten Periode angehängt wird?

Hinweis: Ein geeignetes Audiobearbeitungsprogramm verwenden. Gegebenenfalls eine Audiodatei manipulieren, indem am Ende jeder Periode ein Wert verdoppelt wird (siehe Abschnitt 16.3.1).

### Aufgabe 16.7

Zu Delay, Hall und Echo

Frage 1: Was sind die wesentlichen Unterschiede bei der Erzeugung der Effekte Delay, Hall sowie Echo?

Frage 2: Was sind die wichtigsten Parameter, die dafür in der Praxis verwendet werden?

### Aufgabe 16.8

Zum Dynamikumfang

Frage 1: Welcher Dynamikumfang in dB wäre mit 24 bit theoretisch erreichbar?

Frage 2: Welche praktischen Parameter nutzen z.B. Rundfunk, Konzertsaal u.Ä.?

### Aufgabe 16.9

Zum Frequenzgang

Frage 1: Welche höchste Signalfrequenz ist mit einer Abtastfrequenz von 96 kHz erreichbar?

Frage 2: Welche Frequenzgänge werden für genutzte Geräte angegeben (garantiert)?

# 17 Zusammenfassung zur Regelungstechnik

Hilfreich für das Verständnis können die Wiederholung der mathematischen Abhandlungen in Abschnitt 10 sowie zusätzlich Abschnitt 16 sein.

Zur Wiederholung und Zusammenfassung einer Reihe von Bemerkungen in den Abschnitten dieses Buches soll ein kurzer Überblick zur Regelungstechnik gegeben werden.

Es werden

- wichtige Regelstrecken,
- wichtige Regeleinrichtungen,
- wichtige Reglerstrukturen,
- eine Reihe von Regelstrategien

anhand von Beispielen vorgestellt.

## Vorbemerkungen

Im Folgenden werden einige grundlegende Betrachtungen zusammengestellt, um Aspekte vorangegangener Abschnitte zusammenzufassen, zu vervollständigen und zu festigen. Zur Beschreibung und Darstellung von Signalen siehe auch Abschnitt 10 und 16.

Weiterführende Darstellungen werden z.B. in (Bei13), (Föl08) und (Lun08) gegeben.

**Regelungstechnische Vorgänge** sind in der lebenden Natur, in sozialen/gesellschaftlichen Organisationsformen sowie in der Technik vielfältig anzutreffen (auch Kybernetik).

Es sind zwei Formen zu unterscheiden:

- Steuerung – Einstellen der Eingänge nach den gewünschten Sollwerten für die Ausgänge (ohne Auswertung der tatsächlichen Ausgangsergebnisse – offene Wirkungskette),
- Regelung – Stellen der Eingänge nach Vergleich der Sollwerte für die Ausgänge mit den tatsächlichen Ausgangsergebnissen und somit ständige Angleichung an die gewünschten Sollwerte (geschlossene Wirkungskette).

**Praxistipp:** Die Steuerung erfordert einen geringeren Aufwand, aber immer, wenn das dynamische Verhalten nicht vollständig bekannt ist oder Störungen ausgeglichen werden müssen, ist eine Regelung erforderlich.

Die Begriffsdefinitionen und Kennzeichen sind im Normblatt DIN IEC 60050-351 zu finden. In der wissenschaftlichen Literatur und in Lehrbüchern werden diese aber nur zum Teil so verwendet (oft sind die physikalischen Größen selbst, aber auch international übliche oder eigenständige Kennzeichen anzutreffen).

Die wichtigsten Kenngrößen verdeutlichen Abb. 17.1 und Abb. 17.2 (vergleiche (Lun08 S. 4 ff) und (Föl08 S. 2-19)).

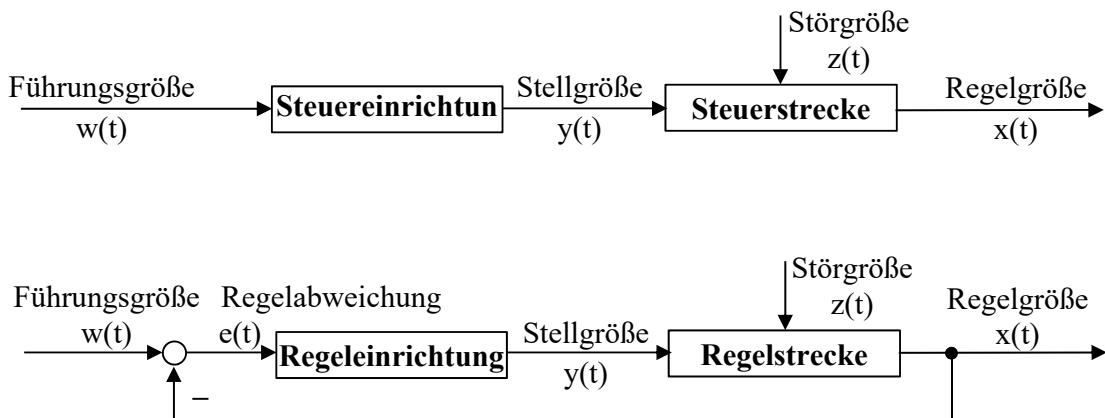


Abb. 17.1: Grundstruktur einer Steuerung (oben) bzw. Regelung (unten)

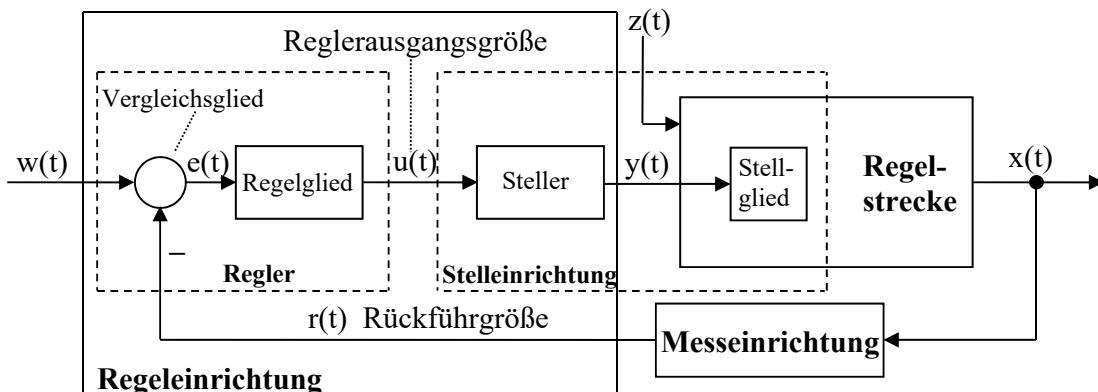


Abb. 17.2: Wirkungsplan der Regelung (nach DIN IEC 60050-351)

Die Stelleinrichtung wird z.T. nicht aufgeteilt und ganz zur Regelstrecke (oder einfach Strecke) gezählt. Insbesondere elektronische Schaltungen (vergleiche Abschnitt 13.2) können auch mehrere Glieder kombinieren (z.B. Messung und Regler mit Vergleich).

(Nach DIN IEC 60050-351 wird  $u$  anstatt  $u$  verwendet sowie eine Anpassung der Größen am Ein- und Ausgang hinzugefügt.) Bei verschiedenartigen physikalischen Größen in Abb. 17.2 könnten z.B. für eine Temperaturregelung folgende Parameter auftreten:

- $w$  = eine der Solltemperatur entsprechende Spannung  $u_{\text{soll}}$  eines Sollwertgebers,
- $r$  = eine der Isttemperatur entsprechende Spannung  $u_{\text{ist}}$  von der Messeinrichtung,
- $e = w - r$  = Differenzspannung  $u_{\text{soll}} - u_{\text{ist}}$ ,
- $u$  = Reglerausgangsspannung  $u_{\text{stell}}$  zum Stellen der Energiezufuhr,
- $y$  = Energiezufuhr (z.B. Gasmenge für den Brenner),
- $x$  = Temperatur  $\vartheta$ ,
- $z$  = Schwankungen der Energiezufuhr, Veränderungen der Außentemperatur ...

Das Stellglied ist dabei der Brenner (mit zusätzlicher Energiezufuhr). Die Regelstrecke ist die gesamte zu erwärmende Einrichtung (Kessel, Wasserkreislauf, Räume), vergleiche auch Abschnitt 15.3.3.

Eine generelle Regelstruktur (mit im Allgemeinen mehreren Stell- und Regelgrößen) zeigt Abb. 17.3).

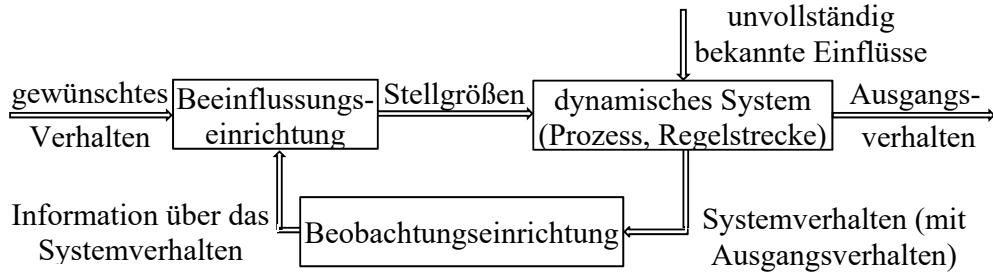


Abb. 17.3: Prinzip einer allgemeingültigen Regelstruktur

**Praxistipp:** Dafür muss sowohl die **Beobachbarkeit** (Anzahl unabhängiger Beobachtungsparameter = Anzahl Prozessparameter) als auch die **Steuerbarkeit** (Anzahl unabhängiger beeinflussbarer Parameter = Anzahl der zu steuernden Parameter) gegeben sein. Die Beschreibung solcher Systeme erfolgt vornehmlich im **Zustandsraum** (mehrdimensionaler abstrakter Raum mit vektoriellen Komponenten für jeden Parameter).

## 17.1 Wichtige Regelkreisglieder und -strategien

Die **Regelkreisglieder** werden in der Regelungstechnik als Übertragungssysteme (d.h. als rückwirkungsfreie **Funktionsblöcke**) dargestellt.



Abb. 17.4: Übertragungssystem

Ein Übertragungssystem wird entweder im Zeitbereich oder bei linearen zeitinvarianten Funktionsblöcken im Frequenzbereich beschrieben (vergleiche dazu Abschnitte 10, 11 und insbesondere 10.6, 10.8, 11.1.3 und 11.4.3). Oft kann eine Linearisierung durch Betrachtung des Kleinsignalverhaltens erreicht werden (vergleiche auch Abschnitt 12.3.3).

$$u_2(t) = g(t) * u_1(t) = \int_0^{\infty} g(t-\tau)u_1(\tau)d\tau \leftrightarrow U_2(p) = H(p) \cdot U_1(p) \quad (17.1)$$

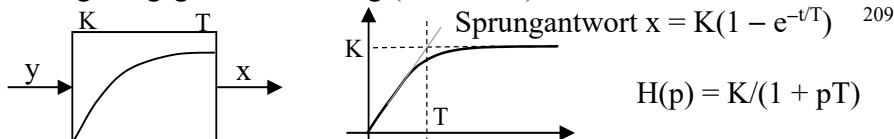
**Praxistipp:** Dabei ist eine Rechnung mit der Laplacetransformation in der Regel besonders einfach, wie an ( 17.1 ) deutlich zu sehen ist.

Oft kann  $H(p)$  aus einem gemessenen Frequenzgang bestimmt bzw. aus einer Messung der Sprung- oder Stoßantwort ermittelt werden (Abschnitt 11.4.3).

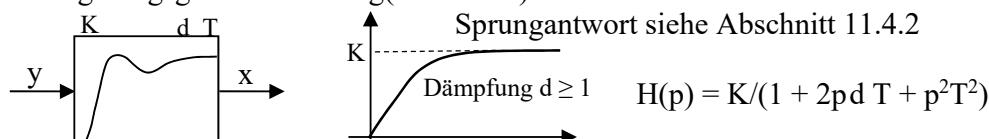
### 17.1.1 Regelstrecken

Die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke kann experimentell (evtl. auch mit Simulation) und/oder theoretisch (Schaltungsanalyse ...) bestimmt werden. Dabei sind auch geeignete Näherungen zu benutzen. Besonders wichtig sind die folgenden Übertragungsfunktionen<sup>208</sup>:

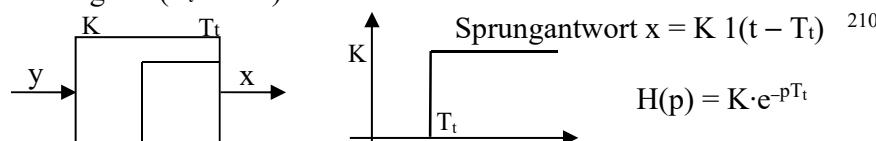
- Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT<sub>1</sub>-Glied)



- Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT<sub>2</sub>-Glied)



- Totzeitglied (T<sub>t</sub>-Glied)



- Zusammengesetzte Übertragungsfunktionen

z.B. Reihenschaltung eines PT<sub>1</sub>-Gliedes und eines T<sub>t</sub>-Gliedes

Bei diesen Strecken ist der Ausgang eine eindeutige Funktion des Eingangs (d.h., sie haben einen Ausgleich). Strecken können aber auch ohne Ausgleich auftreten, was bei der Wahl der Regelstrategie beachtet werden muss.

**Praxistipp:** Eine Strecke mit Ausgleich liegt vor, wenn die Ausgangsgröße nach jeder Änderung am Eingang (auch sprunghaften) wieder zu einer definierten Ausgangsgröße gelangt. Ohne Ausgleich wird nicht wieder eine definierte Ausgangsgröße erreicht.

211

### 17.1.2 Regeleinrichtungen

Regeleinrichtungen müssen entsprechend der Zielstellung entworfen werden. Die folgenden Regler sind dabei besonders prädestiniert<sup>212</sup>.

<sup>208</sup> In der Regelungstechnik lautet die Laplacevariable meist s, in der Elektrotechnik wird p verwendet.

<sup>209</sup> Vergleiche auch Abschnitt 5.2.2.

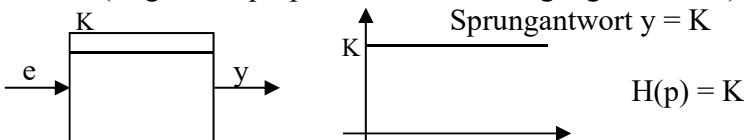
<sup>210</sup> Vergleiche Abschnitt 10.5 und Verschiebungssatz in Abschnitt 10.8.

<sup>211</sup> Z.B. erlangt der Drehwinkel eines Motors als x(t) nach einfaches Einschalten des Motors durch y(t) = 1(t) keinen definierten Endwert.

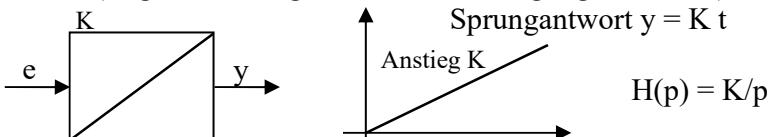
<sup>212</sup> Die Realisierung kann z.B. elektronisch mit Operationsverstärkern erfolgen (siehe Abschnitt 13.2).

**Lineare Regler:**

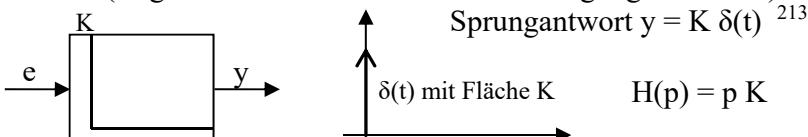
- P-Glied (Regler mit proportionalem Übertragungsverhalten)



- I-Glied (Regler mit integrierendem Übertragungsverhalten)



- D-Glied (Regler mit differenzierendem Übertragungsverhalten)

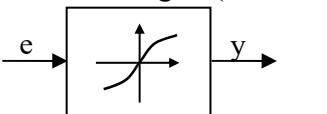


- PID-Regler (Regler mit dem Übertragungsverhalten der P-, I- und D-Glieder)  
Parallelschaltung eines P-Gliedes, eines I-Gliedes und eines D-Gliedes (oder Baustein, der alle drei Funktionen gleichzeitig realisiert)

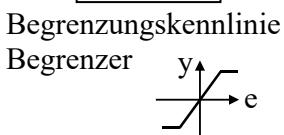
**Praxistipp:** Bei Reglern mit integrierendem Übertragungsverhalten kann für die Regelung die Regelabweichung  $e(t)$  im stationären Betrieb zu null werden.

**Nichtlineare Regler** (werden nicht mit der Laplacetransformation behandelt):

- Kennlinienregler (mit verschiedenen nichtlinearen und umschaltenden Kennlinien)

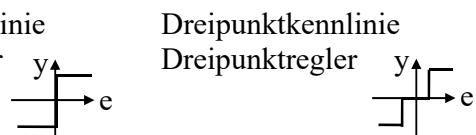


Kennlinie  $y = f(e)$



Begrenzungskennlinie  
Begrenzer

Zweipunktkennlinie  
Zweipunktregler



Dreipunktkennlinie  
Dreipunktregler

- Strukturumschaltende Regler

Die Reglerstruktur wird entsprechend der Regelstrategie (durch Schalten) verändert. Als Beispiel können die meisten Stromrichter angesehen werden (vergleiche dazu die Abschnitte 20.1.1, 20.1.2).

**Praxistipp 1:** Technisch reale Systeme haben normalerweise eine Begrenzung (kein Ausgang kann unendlich werden). Oft muss aber ein Begrenzer zusätzlich eingesetzt werden, um die Größen gezielt zu reduzieren.

**Praxistipp 2:** Zweipunktregler ermöglichen oft eine einfache Regelstrategie. Dabei ergibt sich durch vorhandene Verzögerungen teilweise von selbst eine Hysterese. Andernfalls ist ein Zweipunktregler mit Hysterese einzusetzen, um zu schnelles Schalten zu vermeiden.

**Praxistipp 3:** Schaltende Regler können die Ausgangsgröße nicht genau an den Sollwert anpassen. Die Ausgangsgröße schwankt um den Sollwert, entspricht ihm aber im Mittel.

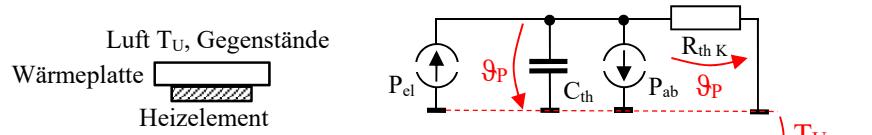
<sup>213</sup> Vergleiche Abschnitt 10.5.

### 17.1.3 Reglerstrukturen

Entsprechend der Zielstellung der regelungstechnischen Aufgabe ist die Reglerstruktur zu ermitteln. Als Beispiele werden folgende grundlegende Strukturen kurz dargestellt.

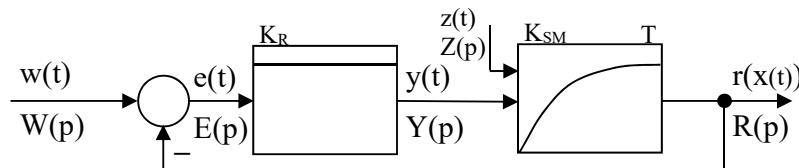
- **Regelkreis mit linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedern**

Ein Beispiel ist die Temperaturregelung für eine elektrische Wärmeplatte ( $P_{el}$ ). Das Heizelement ist direkt auf der Platte befestigt, daher kann der thermische Widerstand von Heizelement und Platte vernachlässigt werden. So hat die Platte überall die gleiche Temperatur ( $\vartheta_p$ ). Es wirken die Wärmespeicherung ( $C_{th}$ ) und der Übergangswiderstand ( $R_{th\ K}$ ) für Konvektion zur Umgebung ( $T_U$ ). Zusätzlich erfolgt eine Wärmeableitung ( $P_{ab}$ ) zu Gegenständen auf der Platte. (Vergleiche Abschnitt 4.4.5 und Abb. 4.38 mit Rechnung.)



**Abb. 17.5: Wärmeplatte schematisch und thermische Ersatzschaltung**

Die Sprungantwort war für Abb. 4.38  $\vartheta_p = P_{el} R_{th\ K} (1 - e^{-t/\tau_{th}})$ . Das entspricht einer Verzögerung 1. Ordnung. Mit  $y = P_{el}$ ,  $z = P_{ab}$ ,  $x = \vartheta_p$ ,  $r = K_{mess} \cdot \vartheta_p$ ,  $K_S = R_{th\ K}$ ,  $T = \tau_{th}$  wird  $X(p)/(Y(p) + Z(p)) = H_s(p) = K_S/(1 + pT)$ . Wird als linearer Regler ein P-Glied ( $K_R$ ) eingesetzt, ergibt sich die folgende Regelung. Indem die Messeinrichtung in die Strecke einbezogen wurde, erscheint  $r$  als Ausgang anstelle  $x = r/K_{mess}$  und es wird  $K_{SM} = K_S \cdot K_{mess}$ ; vergleiche (Bei13 S. 29).



**Abb. 17.6: Regelstruktur für lineare Regelung**

Dabei sind  $r$  und  $w$  der Ist- bzw. Solltemperatur entsprechende Größen,  $y$  und  $z$  Leistungen  $P_{el}$  bzw.  $P_{ab}$ .

$$R(p) = K_R \cdot [K_{SM}/(1 + pT)] \cdot [W(p) - R(p)] + Z(p) K_{SM}/(1 + pT)$$

Das *Führungsverhalten* (Reaktion auf Sollwertänderungen) wird für diese Regelung:

$$R(p)/W(p) = K_R \cdot K_{SM} / (1 + pT + K_R \cdot K_{SM}) \quad \text{bei } Z(p) = 0.$$

Die *Regelabweichung*  $e$  wird für die Führung

$$E(p) = W(p) - R(p) = W(p) - W(p) \cdot K_R K_{SM} / (1 + pT + K_R K_{SM})$$

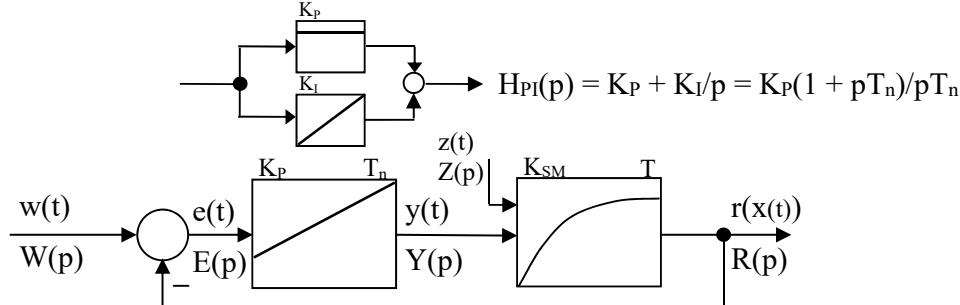
und es ist zu sehen, dass die Regelabweichung im Verhältnis zu  $w$  für den stationären Fall ( $t \rightarrow \infty$  entspricht  $p \rightarrow 0$ ) zu  $1 - K_R K_{SM}/(1 + K_R K_{SM})$  und für  $K_R K_{SM} \gg 1$  sogar sehr klein wird.

Das **Störverhalten** wird für diese Regelung (nur Störgrößenänderungen)

$$R(p)/Z(p) = K_{SM} / (1 + pT + K_R \cdot K_{SM}) \quad \text{bei } W(p) = 0$$

und für  $K_R K_{SM} >> 1$  und den stationären Fall  $R(p)/Z(p) \approx 1/K_R$ .

Das gleiche Beispiel mit einem PI-Regler (P- und I-Glied parallel; vergleiche (Bei13 S. 131-133) zeigt Abb. 17.7 (mit der Nachstellzeit  $T_n = K_p/K_I$ ).



**Abb. 17.7: Regelstruktur für lineare Regelung**

Dabei sind  $r$  und  $w$  der Ist- bzw. Solltemperatur entsprechende Größen,  $y$  und  $z$  Leistungen  $P_{el}$  bzw.  $P_{ab}$ .

$$R(p) = [K_p(1 + pT_n)/pT_n] \cdot [K_{SM}/(1 + pT)] \cdot (W(p) - R(p)) + Z(p) K_{SM}/(1 + pT)$$

Das **Führungsverhalten** wird für diese Regelung ( $Z(p) = 0$ ):

$$R(p)/W(p) = K_p K_{SM}(1 + pT_n) / [p^2 T T_n + pT_n(1 + K_p K_{SM}) + K_p K_{SM}]$$

Die **Regelabweichung**  $e$  wird ( $Z(p) = 0$ )

$$E(p) = W(p) - W(p) \cdot K_p K_{SM}(1 + pT_n) / [p^2 T T_n + pT_n(1 + K_p K_{SM}) + K_p K_{SM}]$$

und es ist zu sehen, dass die Regelabweichung für den stationären Fall ( $p \rightarrow 0$ ) zu null wird ( $1 - K_p K_{SM}/K_p K_{SM} \equiv 0$ ).

Das **Störverhalten** wird für diese Regelung (nur Störgrößenänderungen)

$$R(p)/Z(p) = pT_n K_{SM} / [p^2 T T_n + pT_n(1 + K_p K_{SM}) + K_p K_{SM}]$$

und für den stationären Fall ( $p \rightarrow 0$ ) ebenfalls zu  $R(p)/Z(p) \equiv 0$ .

**Praxistipp:** Der Vorteil durch das I-Glied ist, dass sowohl die Führungsänderungen als auch die Störungen bis zu einer Abweichung von null ausgeregelt werden.

Führungs- und Störungsverhalten entsprechen einem System 2. Ordnung<sup>214</sup> und die **Stabilität** muss untersucht werden.

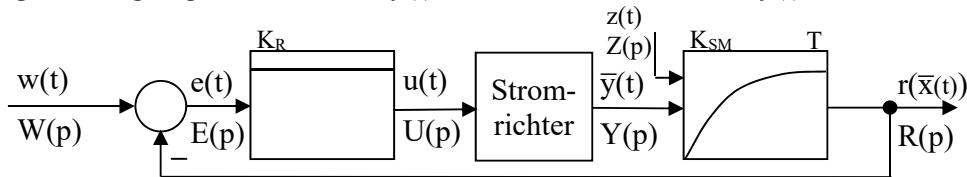
Mit der Dämpfung  $\delta = (1+K_p K_{SM})/2T$  und der Resonanzfrequenz  $\omega_0 = (K_p K_{SM}/T T_n)^{1/2}$  entsteht für  $\delta = \omega_0$  der aperiodische Grenzfall. Mit  $\delta \approx 0,7 \omega_0$  wird mit einem leichten Überschwingen der neue Wert noch etwas schneller erreicht. Eine **Definition der Stabilität** für lineare zeitinvariante Regelungen kann aus deren Sprungantwort abgeleitet werden. Die Sprungantwort muss für  $t \rightarrow \infty$  einen endlichen Wert annehmen (der bei realen Systemen dann schon nach endlicher Zeit erreicht wird).

**Praxistipp:** Neben der Gewährleistung des gewünschten Regelverhaltens ist die Stabilität der Regelung zu sichern. Siehe z.B. (Bei13 S. 150 ff), (Fö108 S. 145 ff) und (Lun08 S. 381 ff).

<sup>214</sup>  $H_{PI}(p) \cdot H_S(p)$  ist die Multiplikation zweier Systeme 1. Ordnung. Vergleiche das Verhalten von Systemen 2. Ordnung auch mit Abschnitt 11.4.2.

- **Quasistationäre Regelung bei schaltenden Reglern**

Wird zur Steuerung des Heizelements von Abb. 17.6 oder Abb. 17.7 eine Pulsbreitenmodulation mit Stromrichter eingesetzt, kann quasistationär geregelt und analog zur linearen zeitinvarianten Regelung vorgegangen werden. Dazu wird der Istwert der Temperatur über mehrere Taktperioden gemittelt und dann das Tastverhältnis über  $u(t)$  als analoger Wert geregelt. Dabei wird  $y(t)$  ebenfalls zum Mittelwert  $\bar{y}(t)$ .

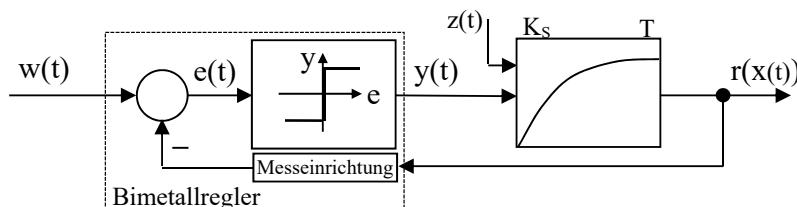


**Abb. 17.8: Quasistationäre Regelung**

**Praxistipp:** Bei genügend hoher Taktfrequenz bleibt die Mittelung im Regelkreis sogar ohne Bedeutung.

- **Zweipunktregler als Beispiel einer einfachen nichtlinearen Regelung**

Bei einem Bügeleisen (das eine gleichartige Struktur wie Abb. 17.5 hat) wird ein Zweipunktregler verwendet. Ein Bimetallregler realisiert dabei sowohl die Temperaturmessung, den Vergleich mit dem Sollwert als auch den Zweipunktregler.



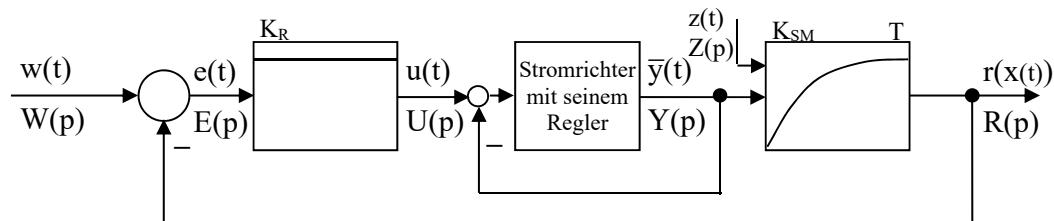
**Abb. 17.9: Zweipunktregler mit Bimetall**

Der Reglerausgang  $y(t)$  schaltet dabei das Heizelement aus und ein. Eine Hysterese hat schon das Bimetall (Ausschalten bei etwas höherer Temperatur als beim Einschalten).

**Praxistipp:** Solche einfachen preiswerten Regelungen werden vielfach verwendet.

- **Kaskadenregelung**

Benötigt der Stromrichter bei quasistationärem Betrieb eine eigene Steuerung für einen definierten Mittelwert des Ausgangs, kann diese durch eine eigene Regelung realisiert werden. Zusätzlich wird eine übergeordnete Temperaturregelung angeordnet. In diesem Fall wird  $u(t)$  der Sollwert für den Mittelwert  $\bar{y}(t)$ . Der Regler des Stromrichters erzeugt dann das entsprechende Pulsmuster, bis  $\bar{y}(t)$  mit  $u(t)$  übereinstimmt.



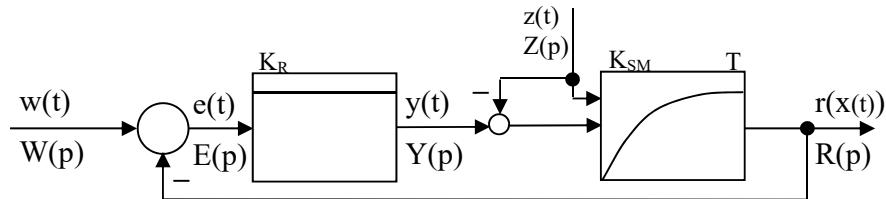
**Abb. 17.10: Beispiel Kaskadenregelung bei Stromrichtern**

Vergleiche auch Abschnitt 20.1.2. Weiterführendes siehe z.B. (FöI08 S. 270).

**Praxistipp:** Hierdurch ist lineare Regelung für quasistationären Betrieb erreichbar.

- **Störgrößenaufschaltung**

Insbesondere wenn das Störverhalten nicht gut genug ist und die Störgrößen messbar sind (wie z.B. Netzspannungsschwankungen), kann eine Störgrößenaufschaltung verwendet werden. Dazu wird die gemessene Störgröße  $z(t)$  z.B. von der Stellgröße  $y(t)$  abgezogen. Sie kann natürlich vorher durch ein entsprechendes Übertragungsglied angepasst und auch an einer anderen geeigneten Position z.B. innerhalb des Reglers aufgeschaltet werden.



**Abb. 17.11: Beispiel für eine Störgrößenaufschaltung**

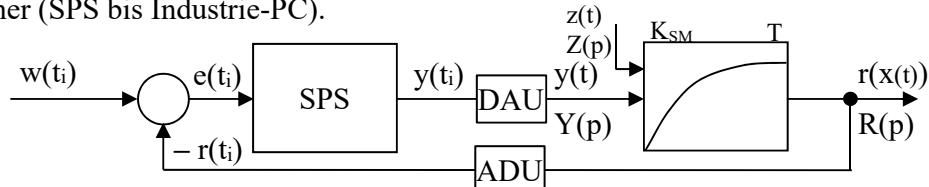
**Praxistipp:** Das Störverhalten kann durch diese Art Kompensation verbessert werden.

Weiterführendes siehe z.B. (FöI08, 2008).

- **Digitale Regelung**

Die digitale Regelung beginnt, wenn mit asynchroner digitaler Schaltungstechnik boolesche Variablen (z.B. Ein, Aus,  $9 < 9_u$ ,  $9 > 9_o$ ...) verarbeitet werden. Vergleiche dazu im Abschnitt 15.3.2 das Beispiel zur Ablaufsteuerung.

Eine moderne digitale Regelung nutzt Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandler (vergleiche dazu Abschnitt 15.1) und verarbeitet den Regelungsprozess mit einem Rechner (SPS bis Industrie-PC).



**Abb. 17.12: Regelung mit digitalem Regler**

**Praxistipp:** Oft sind die Abtastraten sehr groß gegenüber typischen zeitlichen Änderungen. Dann wird wie bei analoger Technik vorgegangen. Ist das nicht der Fall, muss eine Abtastregelung realisiert werden (siehe hierzu z.B. (FöI08 S. 311 ff)).

## 17.2 Regelungstechnische Analyse, Entwurf und Implementierung

Das Vorgehen, um den geeigneten Regler zu finden, seine Parameter richtig einzustellen und eine Implementierung vorzunehmen, verdeutlicht folgender prinzipielle Arbeitsablauf.

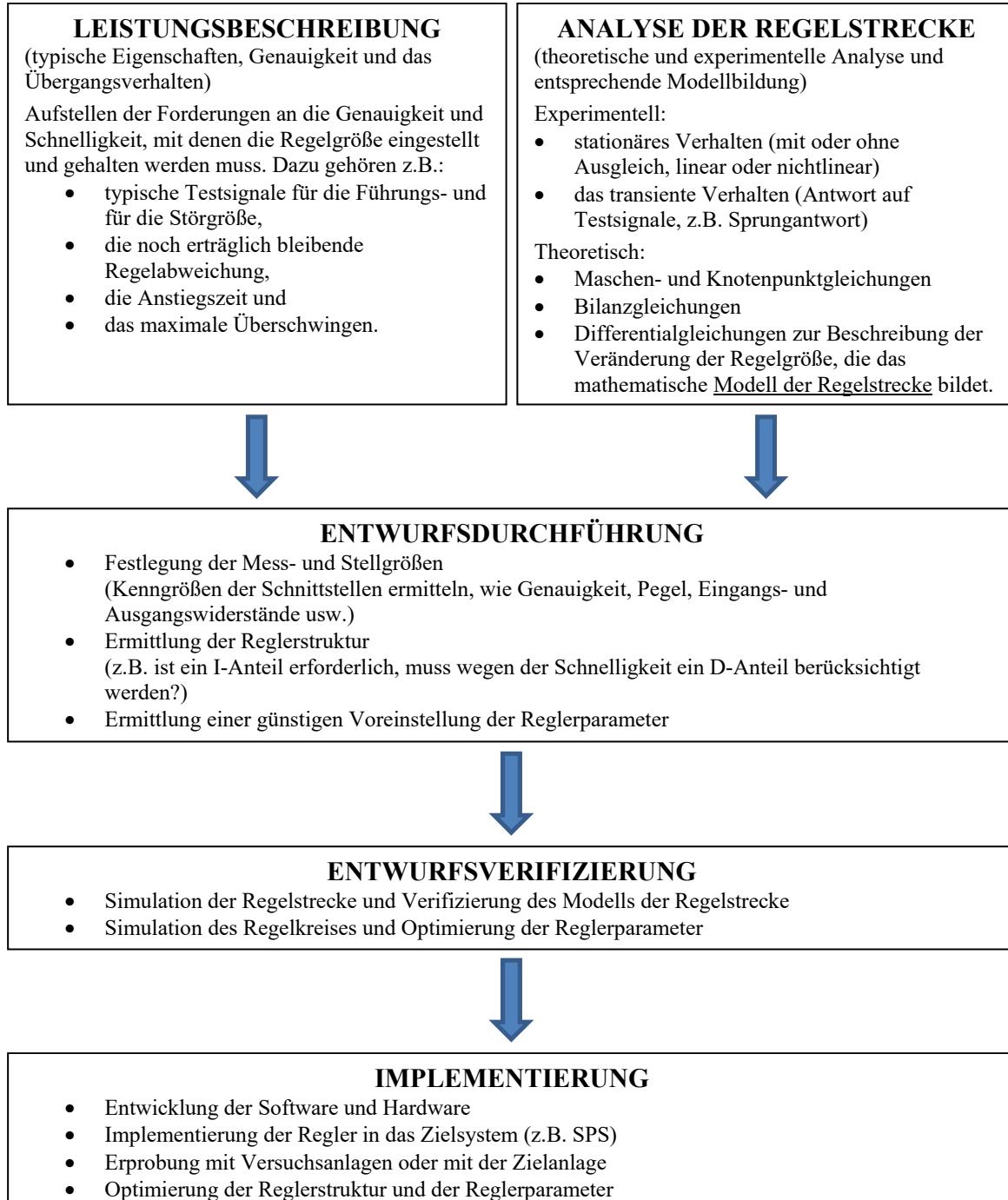


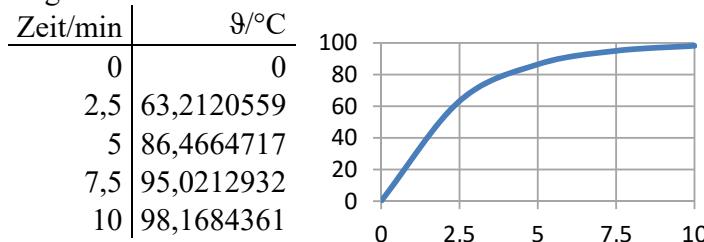
Abb. 17.13: Prinzipieller Ablauf bei Analyse, Entwurf und Implementierung

**Praxistipp:** Entscheidende Hilfsmittel sind **vorbereitete Bausteine** (z.B. für SPS) und **Simulationssysteme** (Tools der Konfigurationssoftware bis zu professionellen Systemen). Zu Modellierung und Simulation vergleiche auch Abschnitt 9.5.

## 17.3 Übungsaufgaben zur Steuerung und Regelung

### Aufgabe 17.1

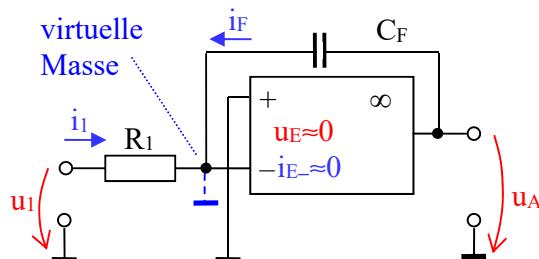
Experimentelle Ermittlung des Übertragungsverhaltens (Zeitbereich) aus der gemessenen Sprungantwort eines Wasserkochers.



Frage: Wie lauten die Parameter?  
Hinweis:  $(1 - e^{-1}) = 0,632$

### Aufgabe 17.2

Theoretische Ermittlung des Übertragungsverhaltens (Zeitbereich) einer Integratorschaltung.



Frage: Wie sieht die Darstellung der Regelung aus, wie lauten die Parameter und wie wäre  $H(p)$ ?  
Hinweis: Es können  $u_A = (1/C_F) \int u_I dt$  und  $i_F = -i_1 = -u_I/R_1$  verwendet werden.

Abb. 17.14: Schaltung eines Integrators mit OV

### Aufgabe 17.3

Darstellen der Reglerstruktur mit Übertragungsverhalten (Zeitbereich) der Blöcke von einer Spannungsgegenkopplung (siehe Abschnitt 13.2.2) und einem einfachen Spannungsregler.

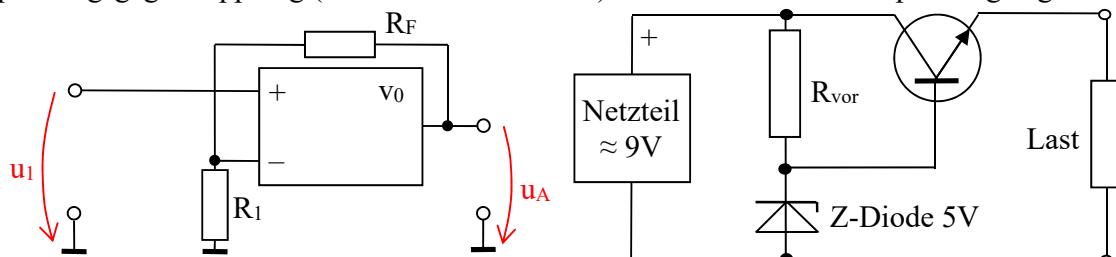


Abb. 17.15: Schaltung spannungsgegengekoppelter OV und Spannungsregelung

Frage: Wie lauten die Parameter?

Hinweis: Ersetzen der Referenzspannung durch eine konstante Spannungsquelle anstelle Z-Diode und  $R_{vor}$ . Linearisieren des Längstransistor mittels Kleinsignalaussteuerung; siehe dazu Abschnitt 12.3.3 Abb. 12.33. Ableiten der Abhängigkeit der Spannung an der Last von  $R_L$  und  $I_L$  durch das totale Differential von  $U_L = R_L \cdot I_L$ .

### Aufgabe 17.4

Ermitteln der Reglerstruktur der Heizungssteuerung von Abschnitt 15.3.2 ohne das konkrete Übertragungsverhalten der Heizungsanlage selbst.

Frage: Wie sieht die Darstellung der Regelung aus?

# 18 Fünfter Exkurs Mathematik\*

## 18.1 Raumzeigertransformation\*

Dreiphasensysteme (wie in der Drehstromtechnik) können anstatt durch drei verbundene Ausdrücke (z.B. für die Stränge) als **ein Raumzeiger** in der komplexen Ebene (also mit zwei Komponenten) dargestellt werden. Dabei wird nicht wie in der komplexen Wechselstromrechnung (Abschnitt 11.1.1) eine imaginäre Zeitfunktion hinzugefügt, sondern die drei Phasen werden in der komplexen Ebene räumlich angeordnet. Auch wenn Raumzeiger ähnlich aussehen und gehandhabt werden, dürfen sie nicht mit diesen Zeigern verwechselt werden. Die *Definition* des Raumzeigers aus den drei Phasen  $u_{Lx}(t)$  lautet:

$$\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{3}} [ u_{L1}(t) + a u_{L2}(t) + a^2 u_{L3}(t) ]$$

mit  $a = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2$  und  $a^2 = e^{j4\pi/3} = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\sqrt{3}/2$ . (18.1)

Für ein symmetrisches Dreiphasensystem mit den  $u_{L1} = \hat{U} \cos(\omega t)$ ,  $u_{L2} = \hat{U} \cos(\omega t - 2\pi/3)$  und  $u_{L3} = \hat{U} \cos(\omega t - 4\pi/3)$  folgt daraus nach Einsetzen in (18.1) und Umformen<sup>215</sup>:

$$\underline{U} = \hat{U} e^{j\omega t}. \quad (18.2)$$

Die Raumzeigerdarstellung enthält nur zwei Komponenten, in unsymmetrischen Systemen evtl. vorhandene Nullsysteme<sup>216</sup> gehen verloren. Ein Nullsystem muss also separat behandelt und nach Rücktransformation addiert werden. Die *Rücktransformation* erfolgt mit<sup>215</sup>:

$$u_{L1}(t) = \operatorname{Re}\{\underline{U}\}, \quad u_{L2}(t) = \operatorname{Re}\{a^2 \underline{U}\} \quad \text{und} \quad u_{L3}(t) = \operatorname{Re}\{a \underline{U}\}. \quad (18.3)$$

**Praxistipp:** Oft ist es sinnvoll, durch einen Übergang zu neuen Koordinaten (z.B. in ein mit  $\omega_2$  rotierendes Koordinatensystem) die Rechnung zu vereinfachen.

Bei einem symmetrischen System entstehen so z.B. zeitkonstante Raumzeiger. Im allgemein mit  $\omega_2 t$  rotierendem System wird dann  $\underline{U}$  zu  $\underline{U}_R = \underline{U} e^{-j\omega_2 t} = \hat{U} e^{j\omega t} e^{-j\omega_2 t} = \hat{U} e^{-j(\omega-\omega_2)t}$  und im Spezialfall  $\omega_2 = \omega$  zu  $\underline{U} = \hat{U}$ . Weiterführendes siehe in (Büh77a S. 33).

## 18.2 Drehstrom und -felder in der Raumzeigerdarstellung\*

Bei Bauelementen (Kondensatoren, Spulen) mit einer Spannung  $\underline{U}_R = \underline{U} e^{j\omega_2 t}$  muss  $\underline{U}_R$  nach der Produktenregel abgeleitet werden.

$$d\underline{U}_R/dt = d\underline{U}/dt \cdot e^{-j\omega_2 t} - \underline{U} \cdot j e^{-j\omega_2 t} d(\omega_2 t)/dt = d\underline{U}/dt e^{-j\omega_2 t} - j \underline{U}_R d(\omega_2 t)/dt$$

bzw.

$$d\underline{U}/dt e^{-j\omega_2 t} = d\underline{U}_R/dt + j \underline{U}_R d(\omega_2 t)/dt = d\underline{U}_R/dt + j\omega_2 \underline{U}_R \quad (18.4)$$

Für ein rotierendes Bauelement ist demnach  $d\underline{U}_R/dt + j\omega_2 \underline{U}_R$  anzusetzen.

**Praxistipp:** Das gilt auch für Ableitungen von rotierenden Feldern (z.B. für  $d\Phi_{kop}/dt$ ).

<sup>215</sup> Mit  $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$  und der Bedingung  $u_{L1}(t) + u_{L2}(t) + u_{L3}(t) = 0$ .

<sup>216</sup> In allen drei Phasen identischer Anteil (z.B. in der Praxis ein Strom im Nullleiter); siehe auch (19.7).

# 19 Energiewandlung und Antriebe

Die Abschnitte 4 bis 6, 9 und 11 sollten verstanden worden sein.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in den Abschnitten 10.1 bis 10.3 und für Interessierte \* 18 sein.

Es werden

- Maschinen bei Gleichstrom,
- deren Schaltungen und Betriebseigenschaften,
- Maschinen für Wechselstrom – Transformator und Universalmotor,
- Dreiphasensysteme und Drehfeld,
- Drehfeldmaschinen – Asynchron- und Synchronmaschine,
- deren Anwendungen sowie
- kurz die Auswahl einer Maschine für einen Antrieb

vorgestellt.

Für den Einsatz und deren Planung ist immer die Aufgabe zur Energiewandlung bzw. für den Antrieb ausschlaggebend (weiteres siehe z.B. Abschnitt 19.4).

## Vorbemerkungen

Eine mögliche Einteilung elektrischer Maschinen zur Energiewandlung und für Antriebe erfolgt oft nach formalen Aspekten in

- ruhende (Transformator, leistungselektronische Wandler) und
- rotierende elektrische Maschinen.

Für das Verständnis und insbesondere für die Sicht auf die Wirkprinzipien ist eine Einteilung in

- Gleichstrommaschinen,
- Wechselstrommaschinen bzw.
- Drehfeldmaschinen

erher ausschlaggebend. Im Folgenden soll die Analyse von elektrischen Maschinen und deren Betriebsverhalten im Vordergrund stehen.

**Praxistipp:** Die Gleichstrommaschine steht am Anfang, weil ihr Betriebsverhalten in etwa als „idealtypisch“ bezeichnet werden kann. Ob bürstenlose Kleinmotore (mit elektronischer Kommutierung), feldorientierte Regelung der Asynchronmaschine oder Stromrichtermotor (Synchronmaschine), immer wird das Betriebsverhalten der Gleichstrommaschine angestrebt.

## 19.1 Maschinen bei Gleichstrom

### 19.1.1 Aufbau und Funktion der Gleichstrommaschine

Die Gleichstrommaschine wird als Motor und Generator genutzt. Ein stromdurchflossener Leiter erfährt im Magnetfeld eine Kraft und ein bewegter Leiter eine induzierte Spannung.

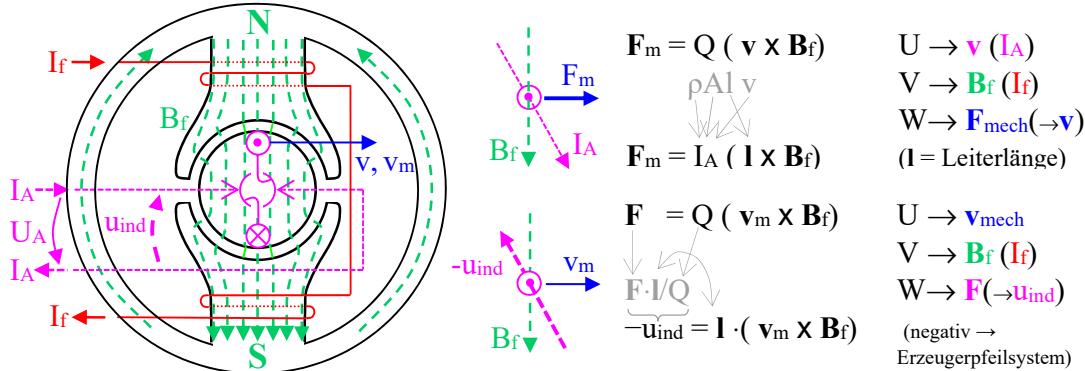


Abb. 19.1: Schematischer Aufbau der Gleichstrommaschine

Bei **Motorbetrieb** fließt der Ankerstrom  $I_A$  über die Schleifkontakte des Kommutators (Kollektors) durch die Leiter der Ankerwicklung wie in Abb. 19.1 dargestellt. Der Strom durch die Feldwicklung  $I_f$  erzeugt das Magnetfeld  $B_f$  (Rechte-Hand-Regel<sup>217</sup>). Nach der Lorentzkraft erfahren die infolge  $I_A$  bewegten Ladungen des Leiters im Anker durch das Magnetfeld eine mechanische Kraft  $F_m$  (Richtung UVW-Regel, rechte Hand) für jeden Leiter des Ankers. Die **Kraft bewegt den Leiter** in Abb. 19.1 in tangentiale Richtung mit  $v$ . Durch den Kollektor muss immer **der** Leiter den Ankerstrom erhalten, für den  $F_m$  gerade senkrecht zu  $B_f$  zeigt. Das ist für möglichst viele Ankerteilwicklungen und entsprechend vielen Kollektorlamellen günstig zu erreichen. Diese Konstruktion ermöglicht, dass die Bewegungsrichtung der Ladungen, das Magnetfeld und die Kraft immer aufeinander **senkrecht** stehen und dadurch die größtmögliche Kraft entsteht.

Bei **Generatorbetrieb** wird der Leiter des Ankers durch eine Antriebskraft mit der Geschwindigkeit  $v_m$  im Magnetfeld  $B_f$  bewegt. Dadurch erfahren die Ladungen des Leiters eine Kraft  $F$  in Richtung des Leiters nach hinten (entsprechend der UVW-Regel, d.h. entgegen der in Abb. 19.1 gezeichneten Stromrichtung  $I_A$ ). Da die Kraft eine Energiezufuhr bewirkt, ergibt sie den *Spannungsabfall*  $-u_{ind}$ <sup>218</sup>. Die Spannung  $u_{ind}$  sowie deren Strom  $I_A$  (bei geschlossenem Stromkreis) sind umgekehrt gegenüber dem Motorbetrieb (bzw. gegenüber Abb. 19.1).

In der Praxis finden *beide Vorgänge gleichzeitig* statt. Beim Motor entsteht als Rückwirkung eine induzierte *Gegenspannung*, beim Generator eine *Gegenkraft*<sup>219</sup>.

**Praxistipp:** Als **Anker** bezeichnet man das Bauteil, dessen Wicklungen durch Bewegung im Feld die induzierten Spannungen erhalten. Nicht zu verwechseln mit Läufer (bzw. Rotor) und Ständer (bzw. Stator). In Abb. 19.1 sind Anker und Läufer identisch. Bei einem Außenläufer wird oft ein äußerer Permanentmagnet zum Rotor, aber nicht zum Anker.

<sup>217</sup> Rechte-Hand-Regel: Strom ergibt magnetischen Fluss (vergleiche Abschnitt 6.1.2).

<sup>218</sup> Die Darstellung in Abb. 19.1 entspricht der Rechten-Hand-Regel: Fluss ergibt induzierte Spannung (vergleiche Abschnitt 6.1.6, 6.1.7).

<sup>219</sup> Damit ist auch die Lenz'sche Regel erfüllt. Ein Strom in Richtung der Lorentzkraft wirkt gerade gegen den Ankerstrom (und  $-u_{ind}$  als Gegenspannung). Ein Strom durch  $-u_{ind}$  bewirkt eine Kraft gegen die Antriebskraft.

In Abb. 19.1 besteht der **Ständer** aus Polschuhen mit der Ständer- bzw. *Feldwicklung* und dem magnetischen Rückschluss (Eisenjoch als magnetischer Leiter zum Schließen des magnetischen Kreises). Bei permanenterregten Maschinen sind anstelle der Feldwicklungen Permanentmagnete angeordnet. Im **Läufer** sind die *Ankerwicklungen* in Nuten auf der Oberfläche angeordnet (nur sehr kleine Motore haben auch beim Läufer Polschuhe). Bei großen Maschinen werden zwischen den Polschuhen der Hauptpole *Wendepole* mit *Wendepolwicklungen* sowie in Nuten der Hauptpole *Kompensationswicklungen* angeordnet (Weiteres in (Tae70 S. 115, 155 ff, 245 ff)).

**Praxistipp:** Der magnetische Fluss muss im Wesentlichen den Widerstand des **dünnen Luftpalts** zwischen Polschuhen und Läufer überwinden.

### 19.1.2 Schaltungen und Betrieb der Gleichstrommaschine

Als elektrische Schaltung zum Betrieb der Gleichstrommaschine gibt es drei grundsätzliche Varianten:

- **Nebenschlussmaschine** – Parallelschaltung von Anker- und Feldwicklung,
- **Reihenschlussmaschine** – Reihenschaltung von Anker- und Feldwicklung und
- **Verbundmaschine** – beide Schaltungsarten auf einmal (gleich- oder gegensinnig).

Zum Prinzip der **Nebenschlussmaschine** gehören die fremderregte, die selbsterregte und die permanenterregte Gleichstrommaschine.

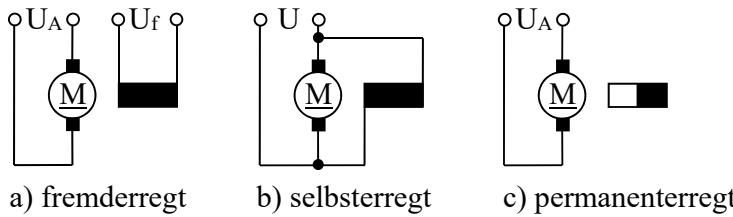


Abb. 19.2: Schaltungen der Nebenschlussmaschine

Bei a) erfolgt die *Erzeugung des Feldes völlig separat*, ist somit unabhängig vom Ankerstrom und unabhängig von diesem zu verändern. Bei b) werden *Feld und Anker aus einer Quelle gespeist*. Dadurch kann die Belastung der Quelle durch den Ankerstrom auf das Feld zurückwirken. Bei c) besteht *keine Möglichkeit, das Feld zu verändern*.

**Praxistipp:** Die drei Varianten in Abb. 19.2 verhalten sich sehr ähnlich, nur der Zugriff auf die Erregung (die Größe des Feldes) ist unterschiedlich.

Bei einer Ersatzschaltung müssen für die Ankerwicklung der *Widerstand* und die *Induktivität* der Wicklung sowie die *Gegenspannung* mit ihrer Abhängigkeit vom Erregerfeld<sup>220</sup> und der Drehzahl (Bewegungsgeschwindigkeit) berücksichtigt werden.

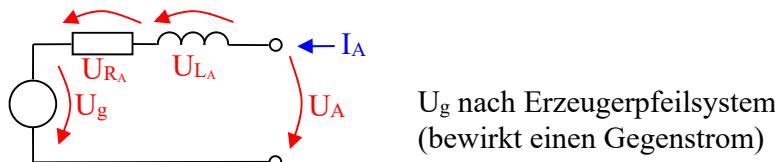


Abb. 19.3: Ersatzschaltung für den Ankerkreis

<sup>220</sup> Die Feldwicklung wird für einen kleinen Strom ausgelegt und hat eine hohe Windungszahl mit dünnem Draht.

Damit können für den Nebenschlussmotor folgende Gleichungen angegeben werden:

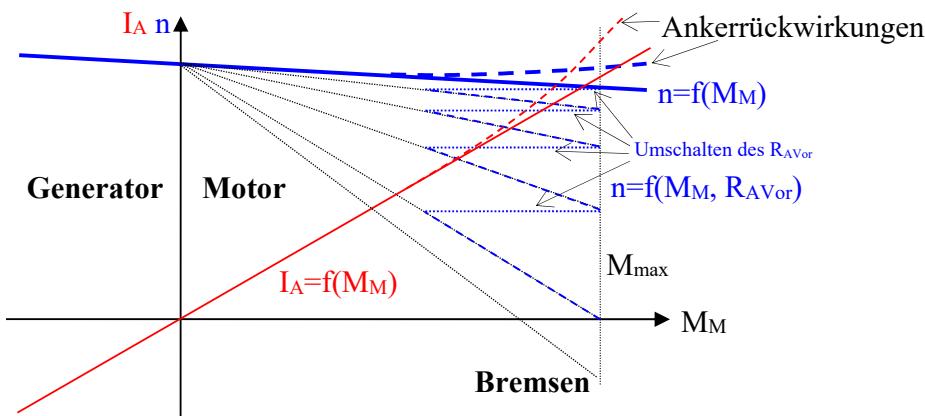
$$\begin{aligned} U_A &= U_g + R_A I_A + L_A dI_A/dt && \text{Maschensatz nach Abb. 19.3} \\ U_g &= c_1 n \Phi_f && \text{aus } -u_{\text{ind}} = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v}_m \times \mathbf{B}_f) = U_g \text{ mit } c_1 = l \cdot 2\pi r_A B_f / \Phi_f^{221} \\ M_M &= c_2 I_A \Phi_f && \text{aus } \mathbf{F}_M = I_A (\mathbf{I} \times \mathbf{B}_f) \text{ mit } c_2 = l \cdot r_A B_f / \Phi_f \\ J d\omega/dt &= M_M - M_{\text{Last}} && \text{Drehmomentengleichung (aus Mechanik)}^{222}. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Die Gleichungen (19.1) beinhalten das gesamte Betriebsverhalten. Die *Maschinenkonstanten*  $c_1$  und  $c_2$  können durch Messungen ermittelt werden bzw. werden vom Hersteller angegeben.

Für das stationäre Betriebsverhalten (d.h. keine zeitlichen Änderungen, alle  $d/dt = 0$ ) folgt die *Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie* und ebenfalls die *Strom-Drehmoment-Kennlinie* der Nebenschlussmaschine<sup>223</sup>:

$$\begin{aligned} n &= \frac{U_A}{c_1 \Phi_f} - \frac{R_A}{c_1 c_2 \Phi_f^2} M_M && \text{damit wird } n_0 = \frac{U_A}{c_1 \Phi_f} \\ I_A &= \frac{M_M}{c_2 \Phi_f} && \text{bei } M_M = M_{\text{Last}} = P/\omega \end{aligned} \quad (19.2)$$

Die Kennlinien ergeben einen guten Überblick über das Betriebsverhalten.



**Abb. 19.4: Kennlinien der Gleichstromnebenschlussmaschine**

Die Kennlinien sind bei Kompensation der Ankerrückwirkungen Geraden und die Drehzahl ist relativ gering vom Drehmoment abhängig (d.h. fast konstant bei  $R_{AVor} = 0$ ).

**Praxistipp:** Da einerseits durch die Konstruktion ein *maximales Drehmoment* ( $M_{\text{max}}$ ) nicht überschritten werden darf und andererseits ein *Maximalstrom* zu beachten ist, kann dieser Motor nicht ohne *Anlasswiderstände* angefahren werden.

Beim **Anlassvorgang** verstärken zusätzliche Vorwiderstände ( $R_{AVor}$ ) in Reihe zu  $R_A$  den Abfall der Kennlinie; siehe (19.2). So wird durch schrittweises Verkleinern des Vorwiderstands der Motor hochgefahren, ohne  $M_{\text{max}}$  und  $I_{A\text{max}}$  zu überschreiten (in Abb. 19.4 gestrichelt angedeutet). Lediglich für Kleinstmotoren wird auf Anlasswiderstände verzichtet.

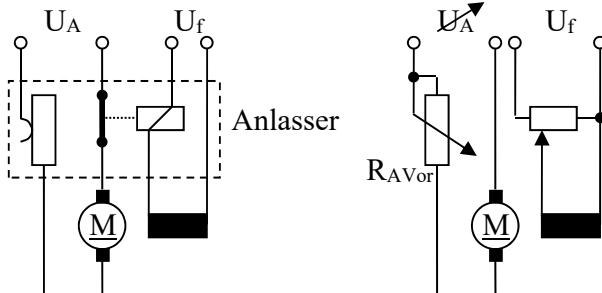
**Praxistipp:** (19.2) zeigt, die *Leerlaufdrehzahl*  $n_0$  wird ohne Feld (für  $\Phi_f \rightarrow 0$ ) *unendlich*.

<sup>221</sup>  $l$  = durch Konstruktion gegebene Summe aller Leiter der Ankerwicklung im Magnetfeldbereich,  $B_f / \Phi_f$  = von der Konstruktion gegebener Faktor bei Zusammenfassung zum Fluss,  $r_A$  Ankerradius, an dem die Kraft angreift.

<sup>222</sup> Aus der Mechanik gilt: Drehmoment  $M = F r$  und Drehzahl  $\omega = 2\pi n = v / r$  sowie Leistung  $P = M \omega (= F v)$ .

<sup>223</sup> Bei geregelten Antrieben besteht im Allgemeinen kein stationärer Betrieb ( $d/dt \neq 0$ ). Wenn die zeitlichen Änderungen groß gegenüber den mechanischen und elektrischen Zeitkonstanten sind, kann stationärer Betrieb als Näherung angenommen werden.

In der Praxis würde der Motor „durchdrehen“, d.h., die Drehzahl wird so groß, dass das Gehäuse zerbricht und alle Teile radial davonfliegen. Bei Verringern des Feldes sinkt die Gegenspannung und der dadurch steigende Strom wirkt stärker als das verringerte Feld. Der Vorgang erfolgt so schnell, dass normale Sicherungen nicht rechtzeitig anspringen. Um dieses Problem zu vermeiden, wird in den **Anlasser** außer den *Anlasswiderständen* eine *Kontrolle des Feldstromes* integriert und bei Ausfall sofort der Ankerstrom unterbrochen. Außerdem fällt der Vorwiderstand beim Abschalten des Ankerstroms sofort *auf den höchsten Widerstandswert zurück*.

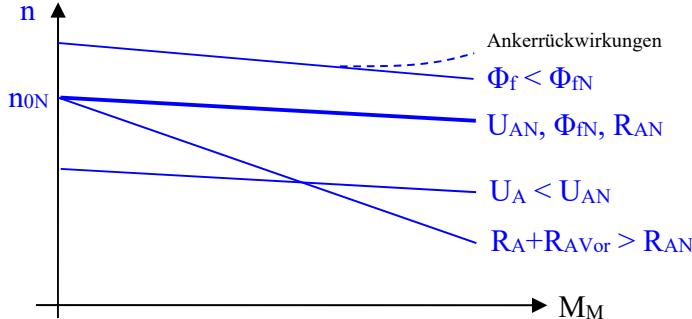


**Abb. 19.5: Gleichstromnebenschlussmaschine mit Anlasser und Drehzahlstellung**

Nach Abb. 19.5 wird der Anlasser vollständig zwischen Motor und Spannungsversorgung angeschlossen.

Zur **Veränderung der Drehzahl** können sowohl die Ankerspannung  $U_A$ , der Widerstand  $R_{Ges} = R_A + R_{AVor}$  als auch das Feld  $\Phi_f$  gestellt werden.

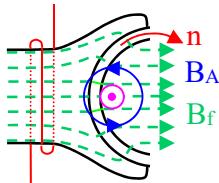
$$n = \frac{U_A}{c_1 \Phi_f} - \frac{R_{Ges}}{c_1 c_2 \Phi_f^2} M_M = \frac{U_A - R_{Ges} I_A}{c_1 \Phi_f}$$



**Abb. 19.6: Veränderung der Drehzahl (Ausgang: Nennwerte  $U_{AN}$ ,  $\Phi_{fN}$ ,  $R_{AN}$ ,  $n_{0N}$ )**

Dabei wird die Leerlaufdrehzahl mit geringerer Spannung  $U_A < U_{AN}$  kleiner, der Kennlinienabfall mit Vergrößerung des Vorwiderstandes stärker  $R_A + R_{AVor} > R_{AN}$  und bei Feldschwächung  $\Phi_f < \Phi_{fN}$  die Drehzahl **vergrößert**. Zusätzlich wird bei Feldschwächung der Kennlinienabfall etwas stärker und die Ankerrückwirkungen treten stärker hervor.

Die Drehzahl der Gleichstromnebenschlussmaschine ist somit relativ einfach in einem sehr weiten Bereich veränderbar, wobei die maximal erreichbare Drehzahl nur konstruktiv bedingt ist ( $c_1$  und Anzahl Polpaare) und über 10 000 U/min liegen kann. Deshalb sind heute Antriebe mit Drehzahlstellung und sehr hohen Drehzahlen das Haupteinsatzgebiet dieser Maschine. Sie werden meist anstatt durch (elektrische Leistung „unnütz“ verbrauchende) Widerstände mit Stromrichtern gestellt. Eine *Drehrichtungsumkehr* wird durch Umpolen entweder der Ankerspannung oder des Erregerfeldes erreicht. In letzter Zeit wird die Gleichstrommaschine immer mehr durch mit Frequenzumrichtern gesteuerte Asynchronmaschinen ersetzt.

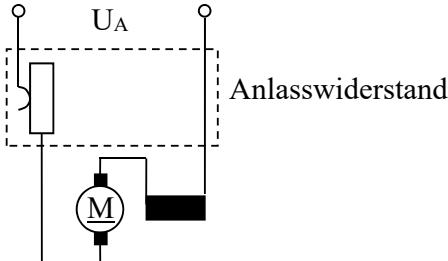


**Abb. 19.7: Entstehung der Ankerrückwirkungen (Darstellung: Motorbetrieb)**

Die **Ankerrückwirkungen** entstehen dadurch, dass das Ankerfeld  $\mathbf{B}_A$  (von den Leitern der Ankerwicklungen) das Erregerfeld  $\mathbf{B}_f$  überlagert (siehe Abb. 19.7). Dabei wird das Erregerfeld auf der einen Seite geschwächt und auf der anderen verstärkt (was infolge der Sättigung begrenzt ist). Insgesamt ergibt sich eine geringe *Feldschwächung* und somit eine geringe Drehzahlerhöhung (zunehmend mit wachsendem Ankerstrom). Außerdem verschiebt sich das Feld etwas in Drehrichtung bei Generator- und umgekehrt gegen die Drehrichtung bei Motorbetrieb (siehe Abb. 19.7). Das kann durch Felder zusätzlicher Wicklungen kompensiert werden, *durch die folglich der Ankerstrom fließen muss*. Deshalb werden in Nuten der Polschuhe Kompensationswicklungen zum Ausgleich der Ankerrückwirkungen und zwischen den Polschuhen Wendepolwicklungen zur Unterdrückung von Feldern zwischen den Polen angeordnet. Die Wicklungen werden zwischen den Polen kommutiert, sollen dort kein Erregerfeld vorfinden und so während der Kommutierung keine Gegenspannung erzeugen.

Bei **Generatorbetrieb** entsprechend Kennlinie (19.2) und Abb. 19.4 wird die gleiche Maschine durch eine Antriebsmaschine gedreht und es fließt bei Belastung ein Strom in umgekehrte Richtung. Dabei muss die Antriebsmaschine außer der abgegebenen *elektrischen Leistung* auch die *Verluste* mit decken (mechanische und z.B. die an  $R_A$ ). Zur Erregung wird meist auf der gleichen Antriebswelle ein kleiner Hilfsgenerator betrieben, um eine unabhängige Erregung zu ermöglichen. Bei Selbsterregung kann der Vorgang durch den Restmagnetismus (Permanenterregung) beginnen.

Beim Prinzip der **Reihenschlussmaschine** (auch Hauptschlussmaschine) besteht der Unterschied zum Nebenschluss darin, dass das *Erreger- und Ankerfeld durch denselben Strom erzeugt werden*.



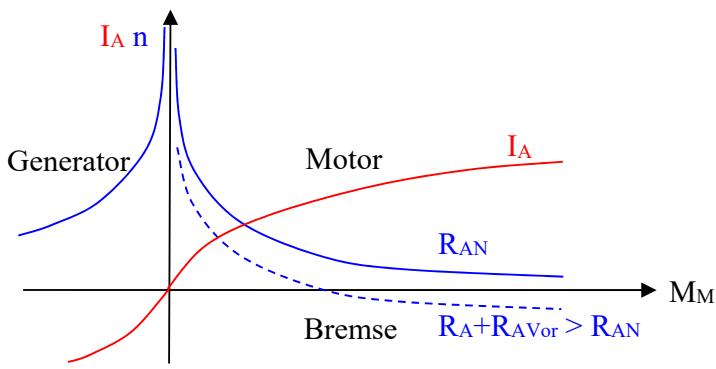
**Abb. 19.8: Anschluss einer Gleichstromreihenschlussmaschine**

Werden konstruktiv bestimmte Größen (Windungszahl<sup>224</sup>, Permeabilität und alle erforderlichen Abmessungen) wiederum als Maschinenkonstante zusammengefasst, lautet das Feld  $\Phi_f = c_3 I_A$ . Aus (19.2) (nach  $I_A$  aufgelöst und dann  $\Phi_f$  sowie  $I_A$  eingesetzt) folgen die *Strom-Drehmoment-* und die *Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie*.

$$I_A = \sqrt{\frac{M_M}{c_2 c_3}} \quad \text{und} \quad n = \frac{U_A}{\sqrt{c_1^2 c_3 / c_2}} \frac{1}{\sqrt{M_M}} - \frac{R_A}{c_1 c_3} \quad \text{damit wird} \quad n_0(M_M \rightarrow 0) \rightarrow \infty$$

( 19.3 )

<sup>224</sup> Die Feldwicklung wird für den Ankerstrom ausgelegt und hat so eine geringe Windungszahl mit dickem Draht.



**Abb. 19.9: Kennlinien der Gleichstromreihenschlussmaschine**

**Praxistipp:** Gleichungen (19.3) und Abb. 19.9 zeigen, dass die Reihenschlussmaschine ohne Belastung (mechanischer Leerlauf mit  $M_M = 0$ ) durchdrehen kann.

Praktisch reichen tatsächlich bei etwas größeren Maschinen die Eigenverluste nicht mehr aus und sie können somit ohne Last nicht betrieben werden. Wie der Strom bei Leerlauf zeigt, schützt auch keine Sicherung.

Zum anderen fällt auf, dass die Reihenschlussmaschine ein sehr gutes Anlaufmoment ( $n = 0$ ) besitzt und auch der Anlaufstrom günstig ist.

Auch der Bremsbetrieb<sup>225</sup> ( $n < 0$ ) ist hier mit hohen Bremsmomenten und akzeptablem Strom zu erreichen.

**Praxistipp:** Dieses typische „Reihenschlussverhalten“ begründet die Anwendung der Reihenschlussmaschine insbesondere für Fahrzeuge.

Eine **Drehzahlregelung** ist durch Verringerung von  $U_A$  oder Erhöhung von  $R_A + R_{AVor}$  möglich. Die *Drehrichtungsumkehr* wird nur durch Umpolen innerhalb der Reihenschaltung zwischen Anker und Feldwicklung erreicht.

Der **Generatorbetrieb** kann ebenfalls wegen des Restmagnetismus beginnen (entspricht permanenterregter Nebenschlussmaschine) und durch den Stromfluss wird dann das volle Erregerfeld erreicht, es steigt aber durch die Sättigung mit höherem Strom nicht weiter an. Die Verluste sind wiederum vom Antrieb aufzubringen. Im Leerlauf (keine elektrische Last,  $R_L \rightarrow \infty$ ) wirkt nur der Restmagnetismus. Durch die sehr starke Abhängigkeit der Ausgangsspannung vom Strom hat der Reihenschlussgenerator keine Bedeutung. Eine Regelung kann außerdem nur über den Antrieb erfolgen, dagegen bei der Nebenschlussmaschine auch über die Erregung.

Bei der **Verbundmaschine** (Doppelschluss- oder Compoundmaschine) sind auf den Polschuhen zwei Wicklungen angeordnet, von denen eine als Nebenschlusswicklung und die andere als Reihenschlusswicklung vorgesehen wurden. Beide Felder können in *gleicher* oder *umgekehrter* Richtung wirken (entsprechend der Verdrahtung).

**Praxistipp:** Dies wird insbesondere verwendet, um die Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie im Arbeitsbereich zu linearisieren oder der Strom-Spannungs-Kennlinie des Generators eine gewünschte Steigung zu geben.

<sup>225</sup> Aktives Bremsen, Motor arbeitet weiter als Verbraucher, nicht als Generator (also ohne Stromumkehr aber Drehrichtungsumkehr – erst nach Abbremsen erkennbar).

### 19.1.3 Kennwerte und Übungsaufgaben

Bezeichnung der Anschlussklemmen einer Gleichstrommaschine:

- Ankerwicklung A1 – A2 (alt A – B)
- Wendepolwicklung B1 – B2 (alt G – H)
- Kompensationswicklung C1 – C2 (wenn vorhanden mit den Wendepolen)
- Reihenschlusswicklung D1 – D2 (alt E – F)
- Nebenschlusswicklung E1 – E2 (alt C – D)
- Wicklung für Fremderregung F1 – F2 (alt I – K)

Kennwerte einer Gleichstrommaschine bei Nennbetrieb:

- Ankerspannung  $U_{AN}$
- Ankerstrom  $I_{AN}$
- Erregerspannung  $U_{fN}$
- Erregerstrom  $I_{fN}$
- Drehzahl  $n_N$
- Leistung  $P_N$

#### Aufgabe 19.1

Die Angaben auf dem Typenschild einer fremderregten Gleichstrommaschine sind:

Anker (A1 – A2) 220 V, 750 A,  
 Erregung (F1 – F2) 220 V, 12 A,  
       650 U/min,      150 kW.

Frage 1: Wie groß ist der Wirkungsgrad  $\eta$ ?

Frage 2: Wie groß ist das mechanische Drehmoment bei Nennbetrieb?

#### Aufgabe 19.2

Ein fremderregter Gleichstromgenerator hat folgende Angaben auf dem Typenschild:

Anker (A1 – A2) 220 V, 610 A,  
 Erregung (F1 – F2) 220 V, 12 A,  
       650 U/min,      150 kW.

Frage 1: Wie groß ist die elektrische Leistung bei Nennbetrieb?

Frage 2: Wie groß ist der Wirkungsgrad  $\eta$  bei Generatorbetrieb?

Frage 3: Woran ist zu sehen, wo die Verluste bleiben (vergleiche mit Aufgabe 19.1)?

### 19.1.4 Messen der Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie

Messung der Kennlinien einer fremderregten Gleichstrommaschine an einem geeigneten Versuchsstand

#### Versuchsaufbau:

Die Gleichstrommaschine, eine Bremse (z.B. Wirbelstrombremse) bzw. eine Antriebsmaschine (z.B. eine weitere Gleichstrommaschine, für Generatorbetrieb nötigt) und die Drehzahlmessung werden mechanisch und elektrisch nach Vorlage des Versuchsstandes angeschlossen.

### Versuchsdurchführung:

Nach Einstellen von Erregung und Ankerspannung bei Leerlauf (keine Bremse) werden in Stufen das Moment der Wirbelstrombremse erhöht und Drehzahl sowie Ankerstrom gemessen (evtl. Erregung und Ankerspannung konstant halten).

Bei Generatorbetrieb werden einmal die Antriebsleistung erhöht sowie Ankerstrom, Drehzahl und Ankerspannung gemessen zum anderen bei konstanter Nenndrehzahl (Antrieb nachstellen und evtl. Erregung konstant halten) der Ankerstrom (die elektrische Leistungsabgabe) erhöht.

### Versuchsaufgaben:

Darstellen der Kennlinien  $n = f(M_M)$  und  $I_A = f(M_M)$  bzw.  $U_A = f(I_A)$ .

1. Kennlinie für Nennerregung und Nennankerspannung
2. Kennlinie für Nennerregung und 70 % Ankerspannung
3. Kennlinie für 80 % Erregerstrom und Nennankerspannung
4. Generatorkennlinie bei Nennerregung
5.  $U_A = f(I_A)$  bei Generatorbetrieb mit konstanter Drehzahl

Beachten Sie, dass Nennankerstrom und Nenndrehmoment (bzw. die mechanische Leistung) nicht überschritten werden!

### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Die Kennlinien entsprechen den theoretischen Erwartungen.
2. Bei geringerer Ankerspannung liegt die Kennlinie parallel mit geringerer Drehzahl.
3. Bei verringertem Erregerstrom folgt eine höhere Drehzahl mit erhöhtem Strom.
4. Die Generatorenspannung fällt mit steigendem Ankerstrom bei konstanter Drehzahl.

## 19.2 Maschinen für Wechselstrom

### 19.2.1 Transformator als ruhende Maschine

Im Transformator wird vom Strom  $i_1$  in der Primärwicklung eine *magnetische Urspannung*  $\Theta_1$  erzeugt, durch *Induktion* eine *elektrische Spannung*  $u_{11}$  und in der Sekundärwicklung  $u_{21}$ . Fließt ein *Sekundärstrom*  $i_2$ , folgen als *Rückwirkung*  $\Theta_2$  sowie  $u_{22}$  und  $u_{12}$  in Gegenrichtung.

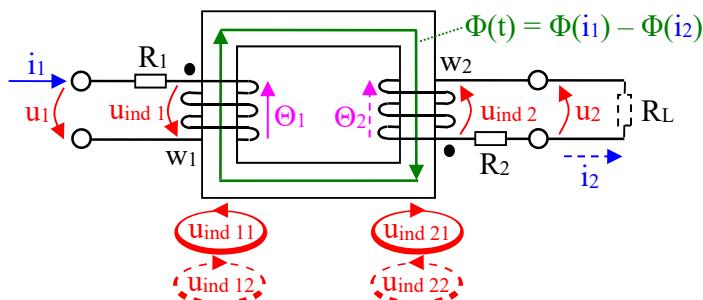


Abb. 19.10: Schematische Darstellung des Transformators

Die Richtungen werden jeweils nach der **Rechten-Hand-Regel** festgelegt (siehe Abschnitt 6.1.2) <sup>226</sup>. So werden mit  $\Phi_{11} = \Phi(i_1)$ ,  $\Phi_{21} = k\Phi(i_1)$ ,  $\Phi_{12} = k\Phi(i_2)$ ,  $\Phi_{22} = \Phi(i_2)$  und dem Koppelfaktor  $k$ :

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}11} &= w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}21} = w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} \\ u_{\text{ind}12} &= w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}22} = w_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt}. \end{aligned}$$

Dabei zeigen  $u_{\text{ind}11}$  sowie  $u_{\text{ind}21}$  in Richtung der dargestellten  $u_{\text{ind}1}$  bzw.  $u_{\text{ind}2}$  und  $u_{\text{ind}22}$  sowie  $u_{\text{ind}12}$  jeweils entgegengesetzt.

$$u_{\text{ind}1} = u_{\text{ind}11} - u_{\text{ind}12} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}2} = u_{\text{ind}21} - u_{\text{ind}22}$$

Werden die *Widerstände des Wickelungsdrahtes*  $R_1$ ,  $R_2$  zusätzlich berücksichtigt, folgen daraus die Maschensätze (Masche 1 Umlauf in Stromrichtung und Masche 2 gegen die Stromrichtung):

$$u_1 = i_1 R_1 + u_{\text{ind}11} - u_{\text{ind}12} \quad \text{und} \quad u_2 = u_{\text{ind}21} - u_{\text{ind}22} - i_2 R_2.$$

Mit dem jeweiligen Induktionsgesetz wird daraus:

$$u_1 = i_1 R_1 + w_1 \frac{d\Phi(i_1)}{dt} - w_1 k \frac{d\Phi(i_2)}{dt}$$

$$u_2 = w_2 k \frac{d\Phi(i_1)}{dt} - w_2 \frac{d\Phi(i_2)}{dt} - i_2 R_2$$

Mit  $\Phi(i_x) = \Theta_x / R_m = w_x i_x / R_m$  sowie  $L_x = w_x^2 / R_m$  und  $M = k w_1 w_2 / R_m = k (L_1 L_2)^{1/2}$  folgen die

#### Transformatorgleichungen:

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - i_2 R_2$$

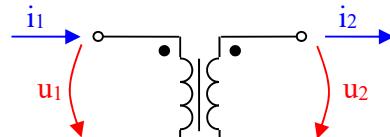


Abb. 19.11: Schaltbild mit Klemmenbelegung

( 19.4 )

Die gleichen Vierpolgleichungen ergibt die folgende **Ersatzschaltung des Transformators**.

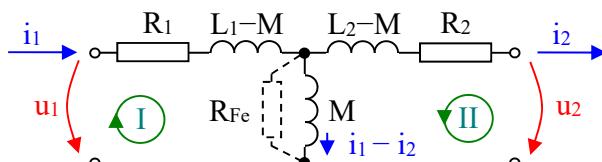


Abb. 19.12: Ersatzschaltung des Transformators

Der Widerstand  $R_{Fe}$  kann dabei zusätzlich eingefügt werden, um die *Wirkleistungsverluste des Eisenkerns* (Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste) darzustellen. Er kann aus dem Gesamtverhalten des Transformators ermittelt werden <sup>227</sup>.

Die beiden Maschensätze in komplexer Schreibweise ( $di/dt \rightarrow j\omega i$ ) lauten:

$$u_1 = R_1 i_1 + j\omega (L_1 - M) i_1 + j\omega M (i_1 - i_2)$$

$$u_2 = -R_2 i_2 - j\omega (L_2 - M) i_2 + j\omega M (i_1 - i_2)$$

( 19.5 )

Mit den Verlusten des Eisenkerns müsste  $j\omega M || R_{Fe}$  eingesetzt werden.

Es ist zu sehen, dass ( 19.5 ) mit ( 19.4 ) identisch ist. Ein Nachteil dieses Ersatzschaltbildes sind aber der negative Wert von  $L_1 - M$  oder  $L_2 - M$ , wenn  $L_1$  und  $L_2$  unterschiedlich groß sind. Deshalb hat sich die Nutzung eines **reduzierten Ersatzschaltbildes** durchgesetzt. Dazu

<sup>226</sup> Induzierte Spannungen entlang des Wickeldrahtes von der Anfangsklemme zur Endklemme (für  $\Phi_1(i_1)$  dargestellt). Wicklungssinn beachten ( $\bullet$  = Wicklungsanfang)!

<sup>227</sup> Er hat nichts mit einem elektrischen Widerstand des Eisenkerns zu tun und ist nicht als solcher zu messen.

werden alle Größen der Sekundärseite<sup>228</sup> einschließlich der Elemente an den Klemmen mit dem Verhältnis der Windungszahlen umgeformt. Es entsteht ein reduzierter Transformator mit dem reduzierten *Windungszahlverhältnis* 1:1.

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2 \frac{w_1}{w_2} & \rightarrow u_2' = u_1 \text{ (wenn } k=1 \text{ und } R_1=R_2=0 \text{ wären)} \\ i_2' &= i_2 \frac{w_2}{w_1} & \rightarrow i_2' = i_1 \text{ (bei } k=1, R_1=R_2=0 \text{ und } \omega M \rightarrow \infty) \\ R_2', L_2' &= R_2, L_2 \cdot (w_1/w_2)^2 & \rightarrow R_2' \approx R_1^{229}, L_2' = L_1 \\ M' &= M \frac{w_1}{w_2} & \rightarrow M' = k(L_1 L_2')^{1/2} = kL_1 \end{aligned}$$

Dadurch werden  $L_1 - M' = (1-k)L_1 = (1-k)L_2' = L_2' - M' = L_\sigma = L_{1\sigma} = L_{2\sigma}'$ .

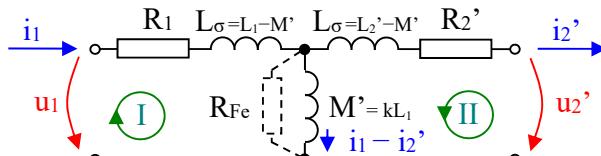


Abb. 19.13: Reduziertes Ersatzschaltbild des Transformators

Eine Untersuchung der reduzierten Ersatzschaltung bei Leerlauf, Kurzschluss und Nennlast ist sehr anschaulich mit Zeigerbildern durchführbar.

Bei **Leerlauf** ist  $i_2' = 0$  und die Spannungsabfälle an  $R_1$  und  $L_{1\sigma}$  sind weiterhin praktisch vernachlässigbar; damit wird  $M \approx L_1$ .

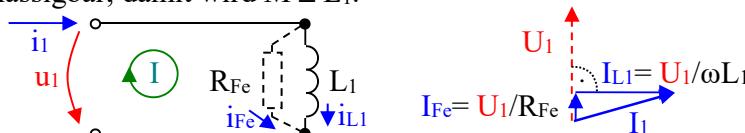


Abb. 19.14: Ersatzschaltung und Zeigerbild für Leerlauf

**Praxistipp:** Durch Messen von  $U_1$ ,  $I_1$ , und  $\varphi_1$  können sowohl  $R_{Fe} = U_1/(I_1 \cos \varphi_1)$  als auch  $L_1 = U_1/(I_1 \omega \sin \varphi_1)$  bei Leerlauf ermittelt werden.

230

Bei **Kurzschluss** sind die Widerstände  $R_2$  und  $L_{2\sigma}$  praktisch so klein, dass  $R_{Fe}$  und  $M$  vernachlässigbar sind.

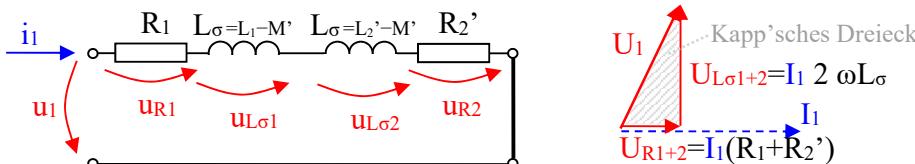


Abb. 19.15: Ersatzschaltung und Zeigerbild für Kurzschluss

**Praxistipp 1:** Durch Messen von  $U_1$ ,  $I_1$  und  $\varphi_1$  können  $R_1 + R_2' = U_1 \cos \varphi_1 / I_1$  und ebenso  $2L_\sigma = U_1 \sin \varphi_1 / (I_1 \omega)$  bei Kurzschluss ermittelt werden.

231

**Praxistipp 2:** Aus  $L_\sigma$  und  $L_1$  sind dann  $k = 1 - L_\sigma/L_1$ ,  $M' = kL_1$  und  $L_2' = L_1$  zu bestimmen. Die Originalgrößen berechnen sich anschließend über das *Windungszahlverhältnis*.

232

**Praxistipp 3:** Die genauen  $R_1$  und  $R_2$  ergeben sich aus deren Messung mit Gleichstrom.

Damit sind alle Parameter des Transformators mit Hilfe von Leerlauf- und Kurzschluss messbar. Das *Kapp'sche Dreieck* ist ein Maß für die Kurzschlussfestigkeit. Je größer das Dreieck, desto kleiner ist bei gegebener Spannung der Kurzschlussstrom.

<sup>228</sup> In einigen Fällen kann auch die Primärseite reduziert werden.

<sup>229</sup> Ist nur etwa gleich, da z.B. die Drahtstärke nicht exakt entsprechend dem Verhältnis gewählt wird.

<sup>230</sup> Spannung gleich Nennspannung einstellen.

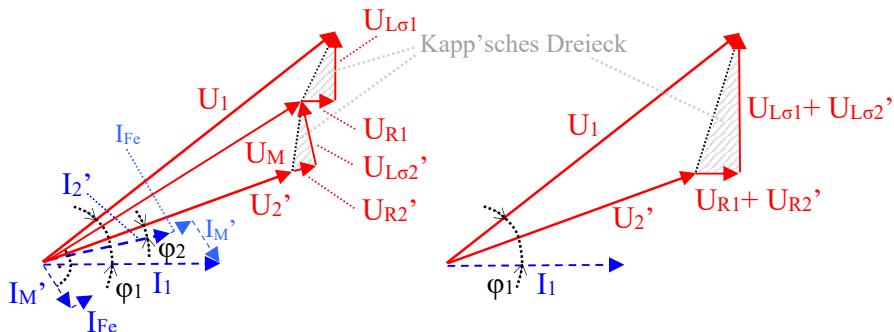
<sup>231</sup> Die Kurzschlussspannung darf nur so hoch sein, dass der Nennstrom erreicht wird.

<sup>232</sup> Näherungsweise kann das Leerlaufspannungsverhältnis verwendet werden.

Das Dreieck kann sowohl durch  $R_1$ ,  $R_2$  als auch durch  $L_\sigma$  vergrößert werden. Da  $R_1$  wie  $R_2$  eine Verlustleistung bedeuten, wird  $L_\sigma$  genutzt und  $L_\sigma$  durch die Größe des Luftspalts im Kern entsprechend eingestellt.

**Praxistipp:** Mit dem *Luftspalt* wird also die *Kurzschlussfestigkeit* beherrscht. Das ist praktisch deutlich erlebbar z.B. bei Schweißtransformatoren.

Bei **Nennlast** (Abb. 19.13 mit Last am Ausgang) ergibt sich das Zeigerbild nach Abb. 19.16.



**Abb. 19.16: Zeigerbild bei Last und mit der Näherung  $I_{Fe} + I_{M'} \approx 0$**

In Abb. 19.16 bilden  $I_1$ ,  $U_1$  und  $\varphi_1$  den Ausgangspunkt.  $U_{R1}$  ist parallel und  $U_{L\sigma1}$  senkrecht zu  $I_1$ . Weiter sind  $I_{Fe}$  parallel und  $I_{M'}$  senkrecht zu  $U_M$  sowie  $U_{R2}'$  parallel und  $U_{L\sigma2}'$  senkrecht zu  $I_2'$ . Es ist erkennbar, dass die Näherung ( $I_{Fe} + I_{M'} \approx 0$ ) relativ geringe Fehler ergibt (in der Praxis sind  $I_{Fe}$  und  $I_{M'}$  sogar noch kleiner als in der Darstellung). Das Kapp'sche Dreieck zerfällt in der genauen Darstellung in zwei Dreiecke mit den in Näherung gleichen Gesamtverlusten. Dabei ergeben  $R_1 + R_2$  Leistungsverluste, dagegen beide  $L_\sigma$  nur Spannungsverluste, sodass  $U_1/U_2$  nicht vollständig  $w_1/w_2$  erreicht (jedoch fast genau bei Leerlauf).

**Praxistipp:** Da das **Ersatzschaltbild** die gleichen Vierpolgleichungen hat, ist es immer statt des Transformators (und so ohne magnetische Urspannung und Induktion) zu verwenden.

Selbst bei Gleichstrom ( $\omega M = 0$ ) folgt das richtige Ergebnis. Nur die galvanische Trennung wird nicht richtig wiedergegeben.

Ein idealer Transformator liefert  $U_1/U_2 = w_1/w_2$  und  $I_1/I_2 = w_2/w_1$  und somit  $P_{w1} = P_{w2}$ . Beim **realen Transformator** wird  $P_{w2} = P_{w1} - P_{VRFe} - P_{VR1+R2}$ . Die **Leistungsverluste** können durch entsprechende Wahl der Drahtstärken (Wickelfenster voll ausnutzen), durch Transformatorbleche mit geringen Ummagnetisierungsverlusten (Weicheisen mit sehr schmaler Hysteresekurve) und durch dünne Bleche mit gegenseitiger Isolation (zur Unterdrückung der Wirbelströme) minimiert werden. Wichtig ist, dass der magnetische Fluss nicht die *Sättigungsgrenze* des Eisens erreicht; sonst sind Probleme von einer Verzerrung der Spannungsform über erhöhte Verluste bis zu einer thermischen Überlastung zu erwarten.

Der **Wirkungsgrad**  $\eta$  erreicht bei Kleintransformatoren ( $P < 300$  W) ca. 60 bis 70 %, bei Großtransformatoren ( $P > 100$  kW) Werte von 95 bis 99,7 %. Transformatoren werden bis ca. 1 GW hergestellt.

Die **Kühlung** erfolgt bei kleinen Transformatoren durch die Oberfläche, bei großen durch einen Kühlkreislauf mit Spezialöl.

Als **Spezialformen** gibt es:

- **Spartransformatoren** – Die Sekundärwicklung wird durch eine Anzapfung der Primärwicklung ersetzt. Sie besitzen keine galvanische Trennung. (Kann auch als induktiver Spannungsteiler aufgefasst werden.)
- **Trenntransformatoren** – Windungszahlverhältnis ist 1:1, gute galvanische Trennung.
- **Stelltransformatoren** – Durch viele Anzapfungen der Primär- (Sparvariante) oder der Sekundärwicklung wird eine feine Einstellung der Sekundärspannung erreicht.

**Praxistipp:** Die **Möglichkeit, mit hohem Wirkungsgrad Spannungen zu wandeln**, war ein starkes Argument für den Übergang zu Wechselstrom.

## 19.2.2 Universalmotor

Da beim *Reihenschlussmotor* durch Anker und Feldwicklung *derselbe Strom* fließt, werden bei Wechselstrom beide genau gleichzeitig umgepolt und die Drehrichtung bleibt erhalten.

Der **Aufbau** entspricht der Gleichstromreihenschlussmaschine. Alle den magnetischen Fluss führenden Eisenteile werden aber grundsätzlich aus *Blechen wie beim Transformator* ausgeführt, um Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste zu minimieren.

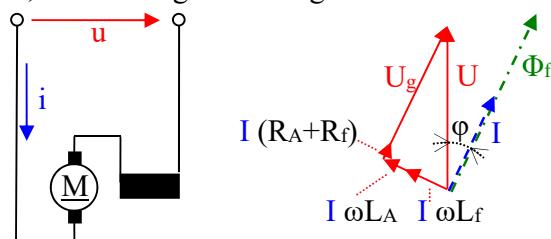


Abb. 19.17: Universalmotor und sein Zeigerdiagramm

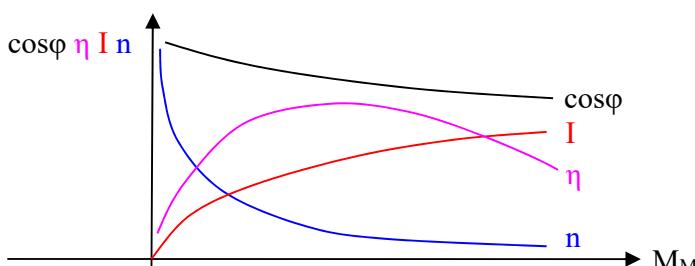


Abb. 19.18: Kennlinien  $\cos\varphi$ ,  $\eta$ ,  $I$ ,  $n = f(M_M)$  des Universalmotors

Das Betriebsverhalten entspricht dem des Gleichstromreihenschlussmotors. Zusätzlich tritt induktive *Blindleistung* und somit ein  $\cos\varphi$  auf. Die Verluste sind ebenfalls von der Betriebsspannung aufzubringen, wobei nur die Wicklungswiderstände Leistungsverluste ergeben.

**Praxistipp:** Eine Hauptanwendung sind *Kleinmaschinen* (Haushalt, Heimwerker usw.).

Dabei wird auf Wendepol- und Kompensationswicklungen verzichtet. Sie werden für Leistungen in der Regel < 500 W (bei hohen Drehzahlen ca. 2 kW) und für Drehzahlen von 3000 bis 15000 U/min<sup>233</sup> hergestellt. Eine Drehzahlregelung erfolgt heute fast ausschließlich durch Phasenanschnittsteuerung. Nur sehr langsam geht ein Austausch dieser vergleichsweise billigen, kleinen und leichten Motoren gegen frequenzgeregelte Asynchronmotoren vor sich.

<sup>233</sup> Hohe Drehzahlen werden vor allem für Gebläse (auch Staubsauger) benötigt.

**Praxistipp:** Zweite Hauptanwendung sind *Bahnmotore* mit  $16 \frac{2}{3}$  Hz (in Deutschland), bis ca. 300 kW und ca. 500 V.

Diese werden seit einiger Zeit sehr erfolgreich durch Stromrichteranordnungen und die insbesondere wartungsärmeren und robusteren Asynchronkurzschlussläufer ersetzt.

### 19.2.3 Kennwerte und Übungsaufgaben

Transformator (Kleinleistungsbereich):

- Nennspannung primär  $U_{PN}$
- Nennstrom primär  $I_{PN}$
- Frequenz  $f$
- Nennspannung sekundär  $U_{SN}$
- Nennstrom sekundär  $I_{SN}$
- Scheinleistung maximal  $P_{SMax}$  wird alternativ zu  $I_N$  angegeben
- (Wirkungsgrad)  $\eta$  wird in der Regel nicht angegeben)

Universalmotor (Kleinleistungsbereich):

- Nennspannung  $U_N$
- Nennstrom  $I_N$
- Nennleistung (mechanisch)  $P$
- $\cos\varphi$   $\cos\varphi$
- Frequenz  $f$
- (Wirkungsgrad)  $\eta$  wird in der Regel nicht angegeben)

#### Aufgabe 19.3

Auf einem Trenntransformator befinden sich die folgenden Angaben:

Eingang 220 V, Ausgang 220 V, Scheinleistung 550 VA und Frequenz 50 Hz.

Frage: Welcher Strom kann maximal genutzt werden?

#### Aufgabe 19.4

Ein vorhandener Transformator für ein Netzteil hat lediglich die Angaben: Eingang 230 V, Ausgang 24 V bei einer Scheinleistung 75 VA und Frequenz 50 Hz. Im Leerlauf werden am Ausgang 27 V gemessen. Da nur 18 V Ausgangsspannung bei ca. 70 VA benötigt werden, muss der Ausgang verändert werden. Es besteht die Möglichkeit, Windungen auf den Wickel dazuzuwickeln. An fünf Testwindungen wird eine Leerlaufspannung von 4,3 V gemessen.

Frage 1: Wie viele Windungen werden benötigt?

Hinweis: Die Näherung, dass das Spannungsverhältnis der Primär- zur Sekundärseite bei Belastung und bei Leerlauf gleich ist, kann genutzt werden.

Frage 2: Wie sind die zusätzlichen Windungen anzuschließen und was wird aus nicht ganzzahligen Windungen?

#### Aufgabe 19.5

Bei Leerlauf werden an einem Transformator  $U = U_N = 230V$ ,  $I = 102 \text{ mA}$  und  $\cos\varphi = 0,2$  gemessen und bei Kurzschluss  $I = I_N = 2,5 \text{ A}$ ,  $U = 105 \text{ V}$  und  $\cos\varphi = 0,66$ .

Frage 1: Wie lauten  $R_1+R_2'$ ,  $L_\sigma$ ,  $L_1$ ,  $k$  und  $R_{Fe}$ ?

Frage 2: Wie groß sind  $U_2'$  und  $\eta$  bei rein Ohm'scher Last im Nennbetrieb sowie  $U_2$  bei  $w_1/w_2 = 12$ ?

Hinweis: Die Näherung mit Vernachlässigung von  $I_{Fe}$  und  $I_M'$  bei Belastung nutzen.

### Aufgabe 19.6

Ein Universalmotor hat folgende Angaben:  $U_N = 220 \text{ V}$ ,  $I_N = 0,8 \text{ A}$ ,  $\cos\varphi = 0,75$ ,  $P = 70 \text{ W}$ ,  $n = 2730 \text{ U/min}$  und  $f = 50 \text{ Hz}$ .

Frage: Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Zusatzfrage: Wie sieht das Zeigerbild aus und wie groß ist die induzierte Gegenspannung, wenn  $R_A + R_f = 75 \Omega$  gemessen wurde?

### 19.2.4 Messen der Kennwerte eines Transformators

Messung der Kennwerte (Parameter) eines Trenntransformators am Versuchsstand

#### Versuchsaufbau:

Es ist eine Anschlussmöglichkeit mit stellbaren 220 V und bis 2 A zu nutzen (mit Trennung vom Netz zu Ihrer Sicherheit). Es wird ein Transformator mit 220 V und ca. 500 VA (Primärseite) benötigt. An der Primärseite des Transformators werden Spannung, Strom und Wirkleistung (z.B. mit elektrodynamischem Messwerk) gemessen. Die Sekundärseite bleibt völlig frei (Leerlauf) bzw. wird direkt kurzgeschlossen.

#### Versuchsdurchführung:

Zu Beginn müssen aus den Daten des Typenschildes Nennspannung und Nennstrom erkundet werden, diese dürfen nicht überschritten werden.

1. Für Leerlauf und Kurzschluss sind jeweils  $U_{eff}$ ,  $I_{eff}$  und  $P_w$  zu bestimmen. Daraus können  $R_1 + R_2'$ ,  $L_\sigma = L_\sigma'$ ,  $L_1$ ,  $k$ ,  $M'$  und  $R_{Fe}$  berechnet werden.
2.  $U_2$  und  $\eta$  bei Nennspannung und  $110 \Omega$  Sekundärlastwiderstand sind zu berechnen, zu messen und zu vergleichen. Die notwendige Schaltung dazu ist zu entwickeln.

Hinweis: Die Erfahrungen mit Aufgabe 19.5 können genutzt werden.

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

- Die messtechnische Bestimmung der Parameter erscheint relativ problemlos.
- Für eine ausreichende Genauigkeit von  $\cos\varphi$  sind bei obiger Methode entsprechend empfindliche Wattmeter nötig (oder wie vorgeschlagen ein Transformator mit höherer Leistung von ca. 500W).

## 19.3 Drehfeldmaschinen

### 19.3.1 Dreiphasensysteme für Strom und Spannung

Mit *Dreiphasensystemen* erreichte die Nutzung von Wechselstrom weitere gewichtige Argumente und hat sich allgemein zur Elektroenergieversorgung durchgesetzt.

Schon ein *Zweiphasensystem* hat gegenüber einfacherem Wechselstrom zwei zusätzliche Möglichkeiten.

- Bei einer *Phasenverschiebung* von  $180^\circ$  wird die Stromsumme beider Rückleiter null und deren *Leitermaterial* kann *eingespart* werden. (So entsteht aber nur ein einphasiges System mit höherer Spannung.)<sup>234</sup>
- Bei einer *Phasenverschiebung* von  $90^\circ$  entsteht für Magnetspulen mit  $90^\circ$  räumlich versetzter Anordnung ein magnetisches Drehfeld. Es wird  $|B| = \text{const}$ , aber mit sich zeitproportional ändernder Richtung  $\alpha = \omega t$  (vergleiche Abschnitt 19.3.2).

**Praxistipp:** Wird in Analogie am x- und y-Eingang eines Oszilloskops eine Sinus- und eine Cosinusspannung angelegt, ist dies leicht nachvollziehbar.

Ein *Dreiphasensystem* kombiniert beide Möglichkeiten bei der gleichen Phasenverschiebung. Dazu sind jeweils eine Zeitverschiebung von  $120^\circ$  und für das Drehfeld Magnetspulen mit  $120^\circ$  räumlich versetzter Anordnung erforderlich.

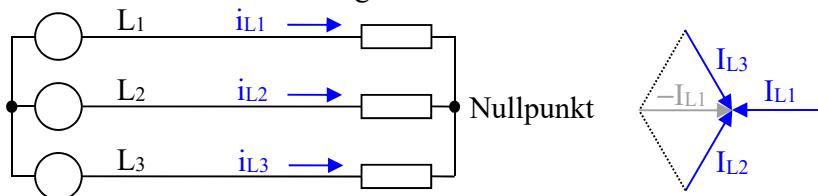


Abb. 19.19: Dreiphasensystem mit drei Leitern  $L_1, L_2$  und  $L_3$  und  $\Sigma I = 0$ <sup>235</sup>

- Außerdem steht bei drei Phasen zwischen einem *Leiter* und dem *Nullpunkt* ein *einfacher Wechselstrom* zur Verfügung.

Durch weitere Phasen gibt es keine zusätzlichen Vorteile.

Insbesondere die Möglichkeiten der Drehfeldmaschinen waren entscheidend für den Übergang zu Dreiphasensystemen.

Ein **symmetrisches Dreiphasensystem** besteht demzufolge aus drei Spannungen mit jeweils einer Zeitverschiebung von  $120^\circ$  (oder  $2\pi/3$ ).

$$\begin{aligned} u_{L1} &= \hat{U} \cos(\omega t) \\ u_{L2} &= \hat{U} \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ u_{L3} &= \hat{U} \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \quad (19.6)$$

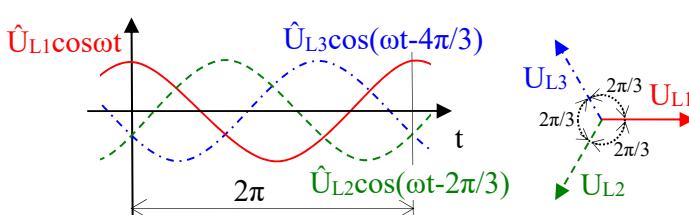


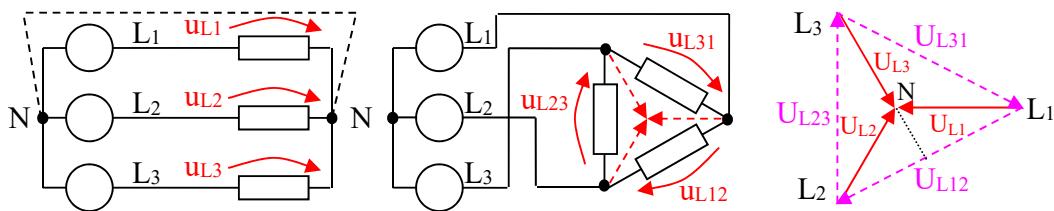
Abb. 19.20: Darstellung einer symmetrische Dreiphasenspannung

In der *Praxis* wird außer den *drei Leitern* ( $L_1, L_2$  und  $L_3$ ) ein *Nulleiter* (N) für Ausgleichsströme zwischen den Nullpunkten mitgeführt. Zusätzlich wird ein *Schutzleiter* (PE) verlegt, der im Normalfall ungenutzt ist, aber bei Schäden an Leitern, Geräten oder Anlagen wichtige Schutzfunktionen erfüllt. Für Fernleitungen werden in der Regel nur drei Leiter ( $L_1, L_2$  und  $L_3$ ) benutzt (z.T. mit darüber angeordneten Blitzschutzleitern).

Für den Anschluss einer Last an die drei Leiter gibt es die **Stern- und die Dreieckschaltung**.

<sup>234</sup> Ähnlich funktioniert das Einphasen-Dreileiternetz mit 2 mal 120 V und geerdetem Mittelpunkt in den USA.

<sup>235</sup> Für die Zeiger wird hier der Betrag in Form von Effektivwerten für deren Länge verwendet.



**Abb. 19.21: Stern-, Dreieckschaltung und Zeigerbild aller Spannungen**

Bei der Sternschaltung (die Quellen in Abb. 19.21 und links die Last) liegt jeweils eine *Leiterspannung an einer Last*. Quellen und Last werden je in einem Nullpunkt verbunden. Bei der Dreieckschaltung (in Abb. 19.21 rechts die Last) liegt eine Last zwischen zwei Leitern und deren Spannungen. Der zwar virtuell vorhandene Nullpunkt kann in der Schaltung nicht angeschlossen und somit auch nicht genutzt werden.

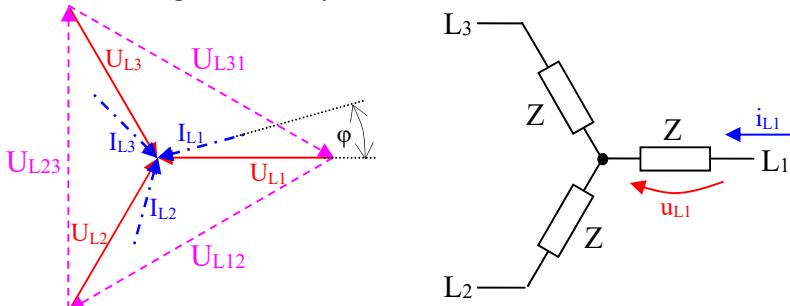
Natürlich können auch die Quellen in Dreieckschaltung angeordnet werden.

Das Zeigerbild in Abb. 19.21 zeigt den Zusammenhang zwischen **Leiter- und verketteten Spannungen**. So folgt z.B. aus dem Dreieck  $L_1 - L_2 - N$  mit den Winkeln  $30^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $30^\circ$ , dass  $U_{L12} = U_{L1} \sqrt{3}$ <sup>236</sup> wird.

**Praxistipp:** Folglich stehen in einem Dreiphasensystem immer zwei Spannungen zur Verfügung:  $U$  und  $U\sqrt{3}$  (z.B. 230 V und 400 V).

Lastwiderstände oder Wicklungen für 230 V können also in Sternschaltung an ein System mit 400 V oder in Dreieckschaltung an ein System mit 230 V angeschlossen werden<sup>237</sup>.

Bei einer *Last mit Blindanteil* besteht zwischen Strom und Spannung jeder Phase die gleiche Phasenverschiebung bei einer symmetrischen Last.



**Abb. 19.22: Strom und Spannung bei symmetrischer kapazitiver Last in Sternschaltung**

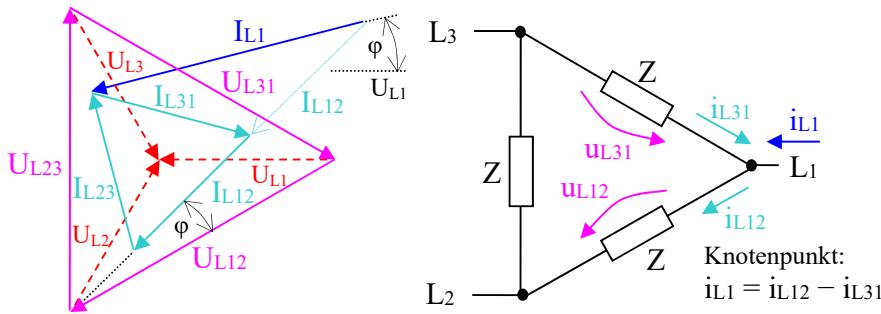
Während die Spannungen zwischen zwei Leitern  $U_{L12}$ ,  $U_{L23}$  und  $U_{L31}$  (vergleiche Abb. 19.22) immer gemessen werden können, muss für die Leiterspannungen  $U_{L1}$ ,  $U_{L2}$  und  $U_{L3}$  der Nullpunkt greifbar sein, was für Sternschaltung normalerweise der Fall ist. Bei Sternschaltung treten nur die Leiterströme  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$  und  $i_{L3}$  auf.

Dagegen fließen bei Dreieckschaltung (Abb. 19.23) die Ströme  $i_{L12}$ ,  $i_{L23}$  und  $i_{L31}$  durch die Last. Der Nullpunkt steht normalerweise nicht zur Verfügung<sup>238</sup>.

<sup>236</sup> Das halbe Dreieck ist rechtwinklig  $\rightarrow U_{L12} = 2 (U_{L1} \cos 30^\circ) = \sqrt{3} U_{L1}$ .

<sup>237</sup> Mit zwar gleicher Last, aber einmal  $U_{L12} = 400$  V für Sternschaltung (d.h.,  $U_{L1} = U_{L12} / \sqrt{3} = 230$  V und somit  $I_{L1} = 230$  V/ Z) und zum anderen  $U_{L12\Delta} = 230$  V für die Dreieckschaltung (d.h.,  $I_{L12\Delta} = 230$  V/ Z), folgt jeweils die gleiche Leistung.

<sup>238</sup> N könnte von einer anderen Stelle oder durch eine Zusatzschaltung für die Messung genutzt werden.



**Abb. 19.23: Strom und Spannung, symmetrische kapazitive Last in Dreieckschaltung**

Abb. 19.22 und Abb. 19.23 wurden für gleiche Spannung und Last dargestellt, sodass die Ströme  $I_{L12} = I_{L23} = I_{L31}$  bei Dreieckschaltung für die gleiche Last größer sind.

**Praxistipp:** Das wird z.B. bei einer Stern-Dreieck-Umschaltung zum Anlassen ausgenutzt.

Für die Leistung bei symmetrischen Dreiphasensystemen  $U_{L1} = U_{L2} = U_{L3} = U_L$  sowie  $U_{L12} = U_{L23} = U_{L31} = U_{LL}$  und genauso  $I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = I_L$  sowie  $I_{L12} = I_{L23} = I_{L31} = I_{LL}$  ergibt sich mit dem Winkel  $\phi$  zwischen Spannung und Strom an einer Last für eine *Sternschaltung* (d.h.  $I_{Zuleitung} = I_L$ , vergleiche Zeigerbild Abb. 19.22):

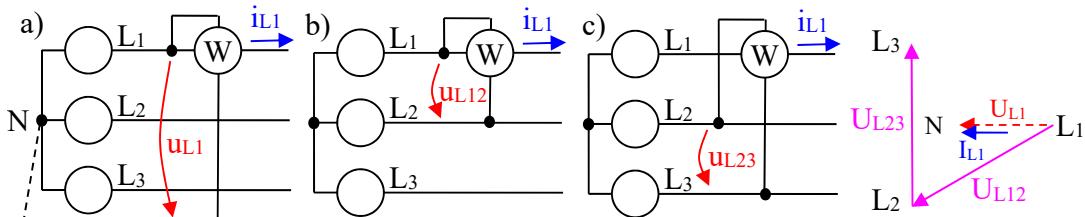
$$\begin{aligned} P_{\text{Stern}} &= 3 U_L I_L \cos\phi = 3 (U_{LL} / \sqrt{3}) I_L \cos\phi \\ &= \sqrt{3} U_{LL} I_L \cos\phi \quad ^{239} \end{aligned}$$

und für eine *Dreieckschaltung* (d.h.  $I_{Zuleitung} = \sqrt{3} I_{LL}$ , vergleiche Zeigerbild Abb. 19.23):

$$\begin{aligned} P_{\text{Drei}} &= 3 U_{LL} I_{LL} \cos\phi \\ &= \sqrt{3} U_{LL} I_L \cos\phi \quad (= 3 U_L I_L \cos\phi) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Leistung unabhängig von der Schaltung nach den *gleichen Formeln*.

Für die **Messung der Leistung** müssen die dargestellten Verhältnisse beachtet werden.



**Abb. 19.24: Mögliche Anordnungen eines Leistungsmessers**

Für Abb. 19.24 a) folgt direkt  $P_{\text{Anzeige}} = U_L I_L \cos\phi$  und somit  $P = 3 P_{\text{Anzeige}}$ ,

für Abb. 19.24 b) folgt  $P_{\text{Anzeige}} = U_{LL} I_L \cos(30^\circ - \phi)$  und

für Abb. 19.24 c) folgt  $P_{\text{Anzeige}} = U_{LL} I_L \cos(90^\circ + \phi) = U_{LL} I_L \sin(\phi)$ , d.h.  $P_B = \sqrt{3} P_{\text{Anzeige}}$ .

Wäre für Abb. 19.24 b)  $u_{L31}$  verwendet worden, ergäbe sich  $P_{\text{Anzeige}} = U_{LL} I_L \cos(30^\circ + \phi)$ .

Nach den Additionstheoremen wird  $\cos(30^\circ - \phi) + \cos(30^\circ + \phi) = \sqrt{3} \cos\phi$ . Damit ergibt die Addition beider Anzeigen  $P = P_{\text{Anzeige}}(u_{L23}) + P_{\text{Anzeige}}(u_{L31}) = \sqrt{3} U_{LL} I_L \cos\phi$  (Aronschaltung).

**Praxistipp:** Durch die vorhandenen Phasenlagen in einem Dreiphasensystem können also

- die Wirkleistung mit Nullpunkt für einen (oder jeden) Leiter,
- die Wirkleistung ohne Nullpunkt mit zwei Leistungsmessern und
- die Blindleistung sogar direkt gemessen werden.

Für **unsymmetrische Last** (verschiedene  $Z_1, Z_2$  und  $Z_3$ ) werden die Ströme in den drei Leitern ungleich und es fließt bei vorhandenem Nullleiter ein *Ausgleichstrom* zur Quelle.

<sup>239</sup> Der Winkel zwischen einem  $U_{LL}$  und  $I_L$  ist nicht  $\phi$  (vergleiche Zeigerbilder Abb. 19.22 und Abb. 19.23).

Ohne Nullleiter entsteht dagegen eine *Spannungsdifferenz* zwischen dem Nullpunkt der Quelle und dem Nullpunkt der Last.

Ist die Quelle starr genug ( $R_i \ll Z$ ), bleiben *mit Nullleiter die Spannungen symmetrisch*, aber ohne Nullleiter nicht.

Bei unsymmetrischer Last zeigt die Schaltung nach Abb. 19.24 a) für jede Phase einzeln die richtige Leistung; es muss dann die Leistung jeder Phase gemessen werden. Die Aronschaltung liefert ohne Nullleiter weiter das richtige Ergebnis, aber mit Nullleiter ein falsches. Eine Blindleistungsmessung funktioniert dann nicht auf diese einfache Weise.

Jedes unsymmetrische System kann in je ein

- **symmetrisches Mitsystem:**  
 $u_{m1} = U_m \cos(\omega t - \varphi_m)$ ,  $u_{m2} = U_m \cos(\omega t - \varphi_m - 2\pi/3)$  und  $u_{m3} = U_m \cos(\omega t - \varphi_m - 4\pi/3)$ ,
- **symmetrisches Gegensystem:**  
 $u_{g1} = U_g \cos(\omega t - \varphi_g)$ ,  $u_{g2} = U_g \cos(\omega t - \varphi_g + 2\pi/3)$  und  $u_{g3} = U_g \cos(\omega t - \varphi_g + 4\pi/3)$  und
- **Nullsystem**<sup>240</sup>:  
 $u_{01} = u_{02} = u_{03} = U_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$

( 19.7 )

zerlegt werden (Lun91a S. 203, 204).

**Praxistipp:** Diese *symmetrischen Komponenten* sind für viele Untersuchungen hilfreich.

### 19.3.2 Das Drehfeld

Für ein **Drehfeld** wird ein symmetrischer Dreiphasenstrom an drei (bzw. p-mal drei) gleiche, aber auf einem Zylinder je um  $120^\circ$  versetzt angeordnete Wicklungspaare angeschlossen.

Der Aufbau der Wicklungen in Nuten<sup>241</sup> des Statorblechpaketes, das Verdrahtungsschema, die Richtungen der Ströme (Punkt – Strom fließt heraus, Kreuz – Strom fließt hinein) und das entstehende Magnetfeld  $\mathbf{B}_1$  von  $i_{L1}(t)$  sind in Abb. 19.25 schematisch dargestellt.

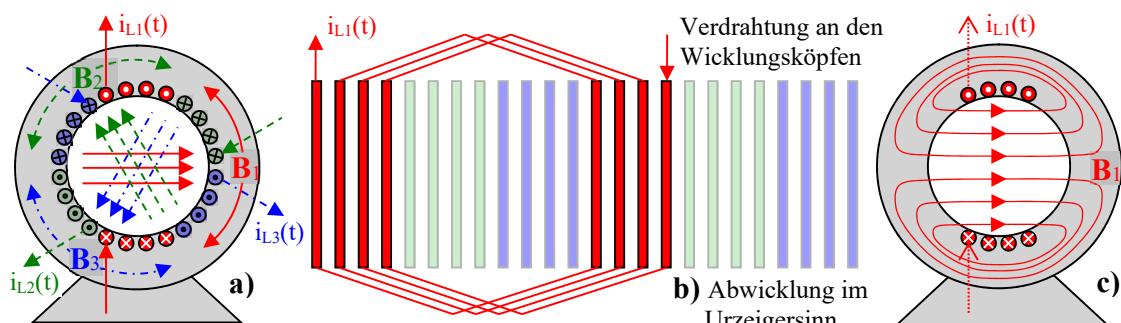


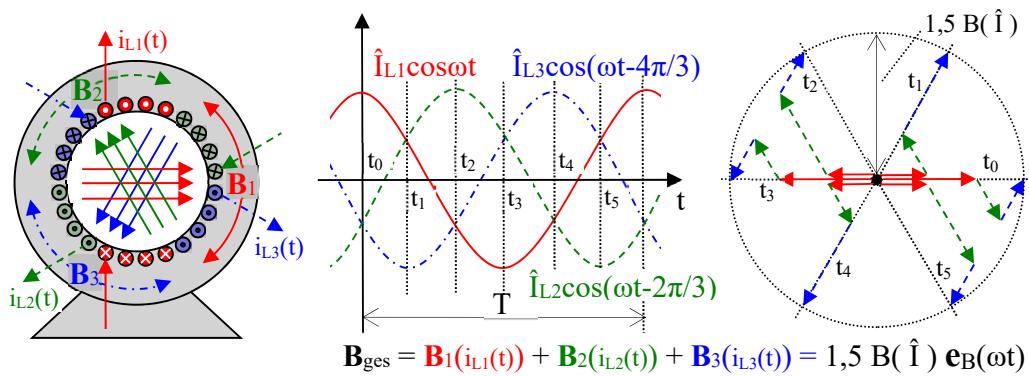
Abb. 19.25: a) Statorwicklungen in Nuten, b) Verdrahtungsschema, c) Magnetfeld  $\mathbf{B}_1$

Durch die Darstellung der drei völlig *symmetrisch aufgebauten Feldwicklungen* in Abb. 19.26 innerhalb von Nuten des Stators (ein Polpaar je Phase<sup>242</sup>) ist die räumliche *Überlagerung der drei Flussdichtefelder* ( $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  und  $\mathbf{B}_3$ ) im Innenraum der Maschine deutlich erkennbar.

<sup>240</sup> Das Nullsystem ist z.B. für eine Spannung mit Nullleiter oder für einen Strom ohne Nullleiter null.

<sup>241</sup> Heutige Maschinen haben normalerweise die Drehfeldwicklungen in Nuten des Ständers.

<sup>242</sup> Es wird deshalb von einer einpolpaarigen Maschine gesprochen mit  $p$  = Polpaaranzahl.



**Abb. 19.26: Drehfeld: Anordnung der Pole, Ströme i(t), Flussdichtevektoren  $\mathbf{B}(i(t))$** <sup>243</sup>

Als Beispiel wurden für  $t_0$  bis  $t_5$  mit einem Zeitabstand von je  $T/6$  ( $\rightarrow \omega T/6 = \pi/3 = 60^\circ$ ) die Flussdichtevektoren addiert ( $\mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$ )<sup>244</sup>. Auch zu jedem anderen Zeitpunkt würde die Summe der Flussdichte wie für die dargestellten Beispiele  $|\mathbf{B}_{\text{ges}}| = 1,5 B(\hat{I}) = \text{const}$  ergeben.

**Praxistipp:**  $\mathbf{B}_{\text{ges}}$  dreht sich *zeitproportional* in die Richtung  $\alpha = \omega t$ , also in Richtung der Phasenfolge  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$  und  $\mathbf{B}_3$  (in Abb. 19.26 gegen die Uhrzeigerrichtung, d.h. positiv).

Bei einer Phasenfolge in umgekehrter Richtung dreht sich auch das Feld umgekehrt. Der *magnetische Rückschluss* des Feldes geschieht auch hier über den äußeren Zylinderring (Zylinderring mit Nuten für die Wicklungen).

Dieses **Drehfeld** findet seine Hauptanwendung in der *Asynchronmaschine* und in der *Synchronmaschine*.

**Praxistipp:** Werden an einen bloßen Stator symmetrische Dreiphasenspannungen bei niedriger Frequenz angeschlossen, ist das Rotieren einer Magnetnadel zu beobachten.

<sup>245</sup>

### 19.3.3 Asynchronmaschine

Bei den **Asynchronmaschinen** (ASM) werden zwei Bauformen einmal mit *Schleifring*- und zum anderen mit *Kurzschlussläufer* unterschieden. Ferner stellen der *Einphasenbetrieb* und darüber hinaus der *Spaltmotor* für Kleinantriebe wichtige praktische Anwendungen dar.

Wird in den Innenraum der Anordnung von Abb. 19.26 eine einfache Blechbüchse gelegt, dreht sich diese sofort mit dem Drehfeld mit. Eine Kompassnadel würde sich natürlich in Feldrichtung ausrichten und mitdrehen, kann aber bei 50 Hz nicht schnell genug beginnen und kommt deshalb nicht „in Tritt“ (bei geringer Frequenz würde es funktionieren).

Wird ein Läufer mit einer *Wicklung im Drehfeld* unbeweglich angebracht, befindet sich die Wicklung *ähnlich* wie die *Sekundärwicklung* bei einem *Transformator* in einem sich zeitlich ändernden magnetischen Feld und es wird eine Spannung induziert. Je nach Winkelstellung des Läufers hat die induzierte Spannung im Unterschied zum Transformator jedoch einen anderen Phasenwinkel.

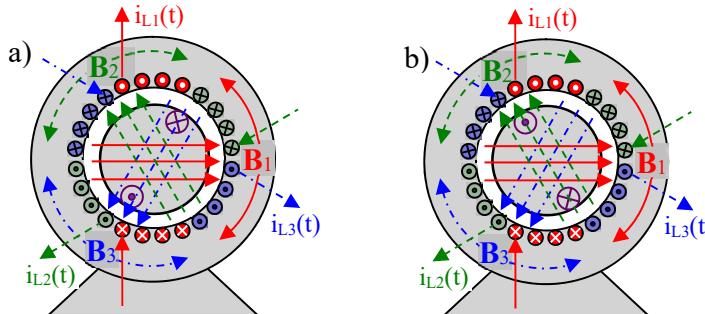
<sup>243</sup> In Abb. 19.26 bedeutet  $e_B(\omega)$  einen radialen Einheitsvektor vom Mittelpunkt in Richtung  $\alpha = \omega t$ .

<sup>244</sup> Alle  $60^\circ$  ist immer ein Strom  $|i(n T/6)| = \hat{I}$ , die beiden anderen je  $\frac{1}{2} \hat{I}$  mit entgegengesetzter Polarität. Die Flussdichtevektoren zeigen stets in die gleiche Richtung, nur ihr Betrag und ihr Vorzeichen ändern sich entsprechend ihres Stromes.

<sup>245</sup> Die Spannung kann so klein sein, dass die Ströme deutlich unter dem Nennstrom bleiben (Frequenzumrichter).

**Praxistipp:** Daraus ergibt sich ein *Phasenschiebertransformator*, der bei der Kopplung von Netzen für eine Einspeisung entsprechend eingestellt werden kann.

In Abb. 19.27 a) steht die Wicklung z.B. parallel zu  $\mathbf{B}_3$ , es wird die gezeigte Stromrichtung<sup>246</sup> gleichphasig zu  $i_{L3}(t)$  durch Induktion entstehen. Für t4 (vergleiche Abb. 19.26) zeigt das Drehfeld in Richtung von  $\mathbf{B}_3$ , die Relativbewegung der Leiter zum Feld in die



**Abb. 19.27: Wicklung im Drehfeld mit verschiedenem Winkel**

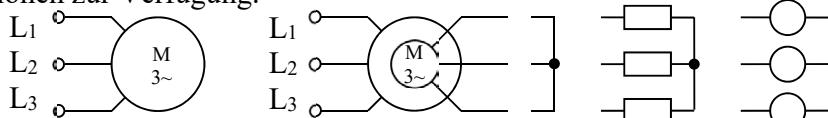
Uhrzeigerrichtung und die Kraft entsprechend der UVW-Regel nach vorn. Der Fluss **durch** die Rotorwicklung hat zu diesem Zeitpunkt die größte zeitliche Änderung<sup>247</sup> und somit die induzierte Spannung ihr Maximum. Im Unterschied dazu steht bei b) die Wicklung parallel zu  $\mathbf{B}_2$  und die gezeichnete Stromrichtung wird gleichphasig zu  $i_{L2}(t)$ .

Fließt in der Wicklung von Abb. 19.27 infolge der Induktion ein Strom, muss dieser der **Ursache – Relativbewegung** zwischen Wicklung und Drehfeld – *entgegenwirken*. Das ist nur möglich, wenn sich der *Läufer mit dem Drehfeld mitdreht*. Dreht er sich mit gleicher Geschwindigkeit (synchrone Drehzahl  $n_0$ ) kann keine Induktion mehr stattfinden, da der magnetische Fluss durch die Wicklung konstant bleibt. Durch die mechanische Belastung des Läufers dreht sich dieser entsprechend langsamer – also **asynchron**.

Da es für die Leistung der „Sekundärwicklung“ gleich bleibt, ob sie viele Windungen und demnach eine hohe induzierte Spannung bei geringem Strom oder ob sie wenige Windungen, also geringe Spannung und hohen Strom hat, werden für einen **Kurzschlussläufer** rings um den Läufer dicke Leiterstäbe in Nuten gegossen und an beiden Stirnseiten mit einem entsprechend starken Ring kurzgeschlossen.

**Praxistipp:** Damit entsteht der robusteste, wartungsärmste und billigste Elektromotor.

Bei einem **Schleifringläufer** werden drei Wicklungen in Nuten angeordnet und über drei Schleifringe zugänglich gemacht. Dadurch steht eine dreiphasige Wicklung für zusätzliche Funktionen zur Verfügung.



**Abb. 19.28: Schaltbilder: Asynchronmaschine mit Kurzschluss- und Schleifringläufer**

Die Schleifringe können sowohl kurzgeschlossen werden als auch mit Widerständen belastet oder durch Spannungsquellen zusätzlich gespeist werden (doppelt gespeiste ASM).

Die **synchrone Drehzahl** entspricht dem Umlauf des Drehfeldes und ist somit durch die Netzfrequenz und die Polpaarzahl<sup>248</sup> festgelegt.

<sup>246</sup> Wenn ein Stromfluss möglich ist. Die Klemmenspannung ergibt sich nach dem Erzeugerpfeilsystem.

<sup>247</sup> Vorher bestand gerade noch eine Komponente nach links, danach nur noch nach rechts durch die Wicklung.

<sup>248</sup> Das Drehfeld läuft pro Netzperiode genau einmal an  $B_1$ ,  $B_2$ , und  $B_3$  (an nur **einem** Polpaar je Phase) vorbei.

$$n_0 = \frac{f_{\text{Netz}}}{p} \quad \text{für } 50 \text{ Hz} \quad n_0 = \frac{50 \text{ Hz}}{p} = \frac{3000}{p} \text{ min}^{-1}$$

Die Abweichung von der synchronen Drehzahl wird als **Schlupf**  $s$  bezeichnet.

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$$

Als Ersatzschaltung hat sich die **reduzierte Transformatorersatzschaltung** bewährt. Sie wird für jede der drei Phasen eingesetzt, normalerweise aber wegen der Symmetrie nur für eine Phase dargestellt. Gelöst werden muss dabei das Problem der geringeren Ausgangsfrequenz  $\omega_2 = \omega_0 - \omega$ . Dazu wird die untere Gleichung von (19.4) durch  $s$  dividiert, sodass  $(1/s) \cdot di/dt$  zu  $j\omega_2 i/s = j\omega_0 i$  wird<sup>249</sup>.

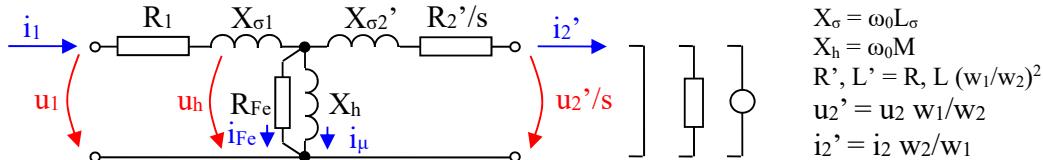


Abb. 19.29: Einphasige Ersatzschaltung der Asynchronmaschine<sup>250</sup>

$R_2'/s$  enthält sowohl die *Verlustleistung* des Drahtes der Läuferwicklung als auch die gesamte *mechanische Leistung* (Reibungsverluste des Motors und abgegebene Leistung). Für  $n = n_0$  (d.h.  $s = 0$ ) wird  $R_2'/s = \infty$ , damit  $i_2' = 0$  und die mechanische Leistung 0, d.h. Leerlauf<sup>251</sup>. Bei Stillstand (durch Festbremsen) wird  $s = 1$  und  $R_2'$  beinhaltet nur die Wicklungsverluste bei Netzfrequenz ( $u_2'$  und  $i_2'$  entsprechen bis auf die Verluste den Eingangswerten).

Beim **Kurzschlussläufer** (bzw. bei kurzgeschlossenen Schleifringen) wird  $u_2'/s = 0$  (folglich wird keine elektrische Leistung den Schleifringen entnommen).

Die Verhältnisse entsprechend der Ersatzschaltung Abb. 19.29 können mit **Zeigerdiagrammen** verdeutlicht werden.

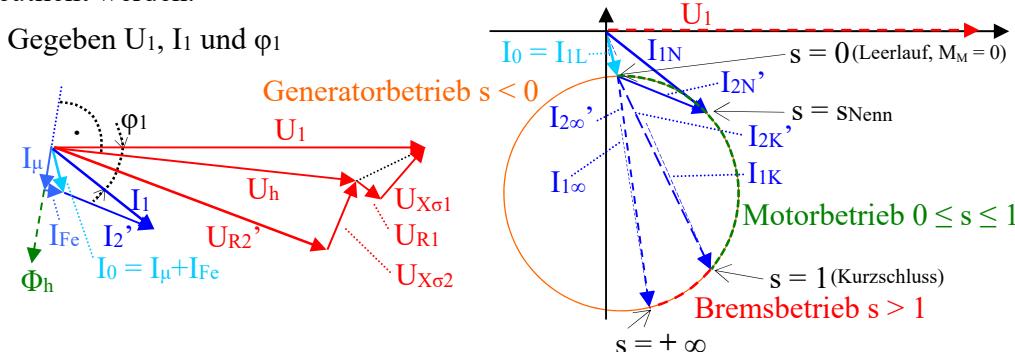


Abb. 19.30: Zeigerbild und Ortskurve für  $I_1$  (vereinfacht) einer Asynchronmaschine<sup>252</sup>

Bei fest vorgegebenem  $U_1$ , hängen (für konstante  $R_1$ ,  $X_{\sigma 1}$ ,  $X_{\sigma 2}'$ ,  $X_h$  sowie  $R_2'$ ) alle Größen nur noch vom Schlupf  $s$  ab. Deshalb werden *Ortskurven* (Kreisdiagramm Abb. 19.30) für den Parameter  $s$  angegeben und aus diesen sowohl die Kennlinie des Motorstroms  $I_1(s)$  als auch seines Drehmoments  $M_M(s)$  abgeleitet (z.B. in (Fis79 S. 180 ff, 265, 282 ff)). Andererseits sind speziell  $R_2'$  und  $X_{\sigma 2}'$  wegen des Effekts der *Stromverdrängung in den Läuferstäben* nicht konstant und die Kennlinien werden dann in der Form  $I_1 = f(n)$  und  $M_M = f(n)$  gemessen, Abb. 19.31. Dabei hat die geometrische Form der Leiterstäbe insbesondere einen deutlichen Einfluss auf den Anlaufbereich (siehe z.B. (Fis79 S. 180 ff, 265, 282 ff)).

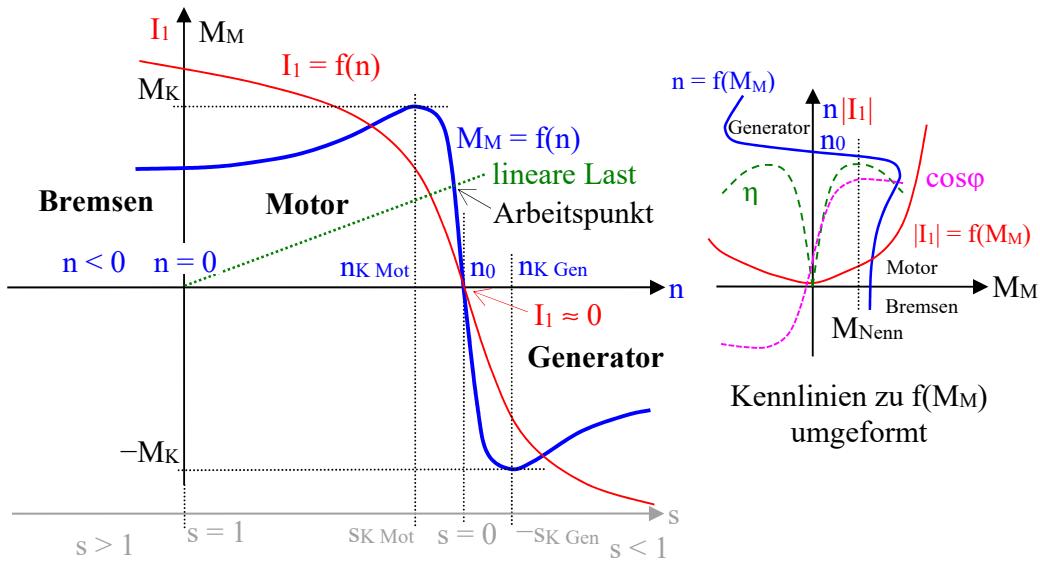
<sup>249</sup> Vergleiche auch mit den Gleichungen (19.5).

<sup>250</sup> Eine exakte Behandlung erfordert eine Raumzeigerdarstellung; siehe Abschnitt 18.1.

<sup>251</sup> Dazu müssen aber durch einen Antrieb gerade die Reibungsverluste ausgeglichen werden.

<sup>252</sup> Aus  $U_1$ ,  $I_1$ ,  $\varphi_1$  folgen  $U_{R1}$ ,  $U_{X\sigma 1}$ ;  $U_h$  ergibt  $I_\mu$ ,  $I_{Fe}$ ;  $I_2'$  ergibt  $U_{X\sigma 2}'$ ,  $U_{R2}'$ ;  $\Phi_h$  folgt aus  $I_\mu$ ; siehe Abb. 19.29.

Mit den Formeln für  $M_M$ ,  $\cos\varphi$  und  $\eta$  können aus  $I_1$  (Betrag und Richtung) sowie dem dazugehörigen  $s$  die Kennlinien ermittelt werden.



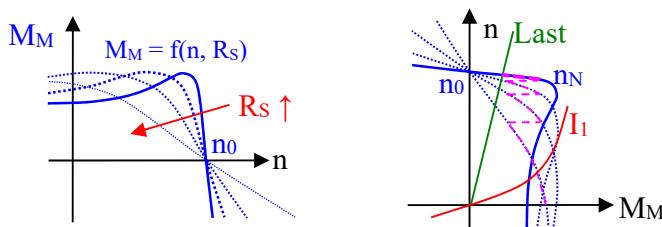
**Abb. 19.31: Kennlinien der Asynchronmaschine (Kurzschlussläufer mit Hochstäben)**

Die übliche Darstellung zeigt das linke Diagramm in Abb. 19.31. Die Darstellung von  $|I_1|$  und  $\cos\varphi$  (rechtes Diagramm in Abb. 19.31) ist exakter als die von  $I_1$  in der Form eines Betrags mit Vorzeichen (linkes Diagramm), da sich die Phase beim Generatorbetrieb nicht um  $180^\circ$  dreht und der Betrag dazwischen nicht völlig null wird. Das zeigt sehr deutlich die Ortskurve Abb. 19.30.

Im Bereich der Geraden bei  $n_0$  (dem normalen Arbeitsbereich) sind die Kennlinien ähnlich denen der Gleichstromnebenschlussmaschine<sup>253</sup>.

Nur der Bereich zwischen den *Kippmomenten* ermöglicht einen *stabilen Betrieb*. Im Arbeitspunkt mit einer Last (in Abb. 19.31 z.B. eine lineare mechanische Last) würde der Antrieb bei Lastzunahme eine Abbremsung (Drehzahlverringerung) erfahren, aber bei einem höheren Antriebsmoment ( $M_M$ ) sofort wieder einen stabilen Arbeitspunkt einnehmen. Im Bereich vor dem Kippmoment würde der Antrieb dagegen infolge der dort eintretenden Verringerung des Antriebsmoments völlig zum Stehen kommen (instabil).

**Praxistipp:** Die **Asynchronmaschine** kann nur im Bereich der Geraden von  $n_{K Mot} < n \leq n_0$  für **Motorbetrieb** und von  $n_0 \leq n < n_{K Gen}$  für **Generatorbetrieb** eingesetzt werden. In diesem Bereich besteht normalerweise lediglich ein Drehzahlabfall von 3 b 5 %. Damit ist also die *Drehzahl* der Asynchronmaschine *fast konstant*.



**Abb. 19.32: Einfluss und Nutzung von Widerständen an den Schleifringen  $R_s$**

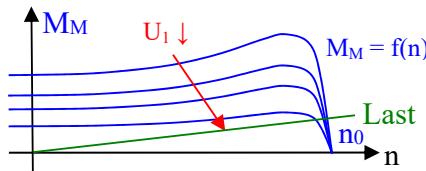
<sup>253</sup> Beachte: In Abb. 19.4 sind  $I_1 = f(M_M)$  und  $n = f(M_M)$  dargestellt wie in Abb. 19.31, rechte Grafik.

Werden bei einem **Schleifringläufer** Widerstände an die Schleifringe angeschlossen, wird  $R_2'$  vergrößert und folglich werden  $I_2'$  sowie  $I_1$  verkleinert (Abb. 19.32 linke Darstellung). Für die Drehmomentkennlinie  $M_M = f(n)$  bedeutet das weniger steile Geraden bei  $n_0$ . Bei Schleifringmaschinen kann ähnlich wie bei der Gleichstromnebenenschlussmaschine mit einer schrittweisen Verringerung der Widerstände an den Schleifringen das *Anfahren* mit *kleineren Strömen* realisiert werden (Abb. 19.32 rechte Darstellung). Beim Kurzschlussläufer existiert diese Möglichkeit nicht, somit kann nur eine Stern-Dreieck-Umschaltung auf der Ständerseite für das *Anfahren* (bei großen Maschinen notwendig) genutzt werden<sup>254</sup>.

Zur **Veränderung der Drehzahl** können

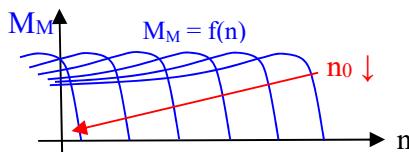
- die *Läuferwiderstände* (nur beim Schleifringläufer, Abb. 19.32),
- die Größe der *Ständerspannungen*  $u_{1L}$ ,  $u_{2L}$  und  $u_{3L}$  (Abb. 19.33) oder
- die *Kreisfrequenz*  $\omega$  der Ständerspannungen  $u_{1L}$ ,  $u_{2L}$  und  $u_{3L}$  (Abb. 19.34)

gestellt werden.



**Abb. 19.33: Einfluss der Ständerspannung**

*Läuferwiderstände* an den Schleifringen ermöglichen eine *gute*, aber *verlustbehaftete* Drehzahlstellung. Verluste werden heute aber gern vermieden. Dagegen ist deutlich zu sehen, dass die *Ständerspannung* nur eine *sehr kleine* Drehzahländerung ergibt. Für eine Steuerung ist diese Variante somit ungeeignet.



**Abb. 19.34: Einfluss der Ständerfrequenz  $\omega = 2\pi p n_0$**

**Praxistipp:** Ein Vergleich der drei Varianten zur Drehzahländerung ergibt, dass nur die Regelung der *Ständerfrequenz* wirklich gute Ergebnisse erbringt.

Das wurde aber erst mit der Entwicklung leistungselektronischer *Frequenzumrichter* realisierbar. Existiert dagegen nur die feste Netzfrequenz, steht diese Variante nicht zur Verfügung. Da jetzt zunehmend preisgünstige Frequenzumrichter verfügbar sind, setzt sich diese Technik immer mehr durch.

Heute wird darüber hinaus z.T. die *feldorientierte Regelung* (Büh77 S. 225 ff) eingesetzt, bei der der Statorstrom ( $I$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  der Leiter) in eine drehmomentbildende (analog zum Ankerstrom der Gleichstrommaschine) und eine flussbildende (analog zum Erregerstrom der Gleichstrommaschine) Stromkomponente aufgeteilt wird, wodurch sowohl das *Drehmoment* als auch die *Drehzahl* entsprechend der Aufgabenstellung *geregelt* werden können.

Der **Bremsbetrieb** (Gegenrichtungsbetrieb) erfordert einen relativ hohen Strom und hat keine ausreichende Wirkung. Bei *Bremsmotoren* wird deshalb z.B. eine Scheibenbremse in den Motor integriert und nur beim Betrieb durch eine Magnetspule (im einfachen Fall vom dann wirksamen Streufeld) gelöst. Diese Art stellt auch das Bremsen bei Stillstand sicher.

<sup>254</sup> Z.B. fahren Motore mit Wicklungen für 400 V in Sternschaltung an (mit 230 V an den Wicklungen und somit geringerem Strom) und haben dann bei Dreieckschaltung mit 400 V ihren Normalbetrieb.

Der **Generatorbetrieb** erfolgt teilweise selbstständig während des Motorbetriebs, z.B. beim Absenken der Last eines Aufzuges. Weil die Drehzahl nur unwesentlich größer wird als bei Motorbetrieb (Abb. 19.31), wird dies ohne genaue Beobachtung gar nicht bemerkt.

Eine Nutzung als Generator erfolgt heute teilweise bei *Windkraftanlagen* wegen der dafür etwas besser angepassten Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie. Als Generator kann die Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer nur im *Parallelbetrieb* zum Netz arbeiten. Sie benötigt das Netz einmal zur *Erregung* der Ständerwicklung und zum anderen wegen der von ihr zwangsweise erforderlichen Blindleistung (siehe Abb. 19.31  $\cos\phi$  in der rechten Darstellung oder Abb. 19.30 Ortskurve).

**Praxistipp:** Umfangreiche Typenreihen insbesondere der Kurzschlussläufer in *Standardausführung*, als *Bremsmotore* oder als *Getriebemotore* mit verschiedenster Ausgangsdrehzahl ermöglichen eine Nutzung dieser preisgünstigen Motoren für fast jede Antriebsaufgabe. Dabei ist immer ein Motorschutzschalter zum Schutz vor Überlast (zu hohe Leiterströme) vorzusehen.

Die Asynchronmaschinen erreichen dabei einen *Wirkungsgrad* von  $\eta = 0,77$  bei kleinen Motoren (ca. 1 kW) bis  $\eta = 0,92$  bei großen (100 kW).

Die *Kühlung* erfolgt in der Regel in selbstgekühlter Ausführung durch außen das Gehäuse umströmende Luft, selten mit durchströmender Luft und nur bei großen Maschinen teilweise fremdgekühlt durch Gebläse oder in Ausnahmen Flüssigkeiten.

Der *Einphasenbetrieb* des Asynchronmotors spielt insbesondere im Haushaltsbereich eine wichtige Rolle. Prinzipiell kann jeder Asynchronmotor auch einphasig betrieben werden. Dabei ist darauf zu achten, dass die Wicklungen ihre Nennspannung erhalten (z.B. sind Wicklungen für 230 V in Dreieckschaltung an 230V Einphasenspannung anzuschließen).

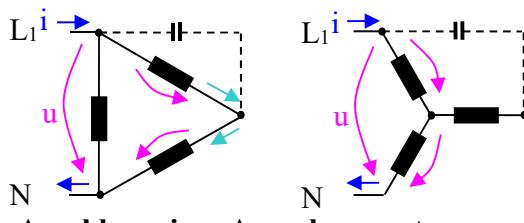


Abb. 19.35: Anschluss eines Asynchronmotors an ein einphasiges Netz

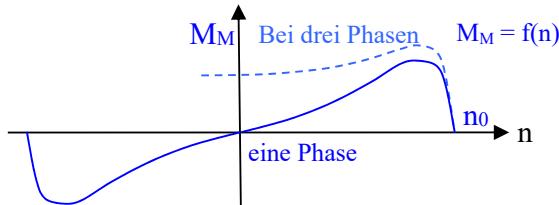


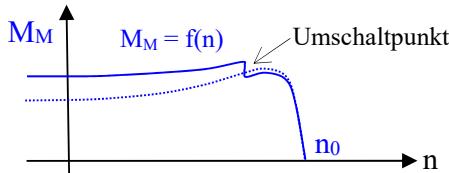
Abb. 19.36: Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie bei Einphasenbetrieb

Ohne zusätzlichen Kondensator ergibt sich eine Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie, die bei  $n = 0$  kein *Anlaufmoment* besitzt und die unabhängig von der Spannungsrichtung in *beiden* Drehrichtungen eine gleiche Kennlinie aufweist.

Wird der Motor in beliebige Drehrichtung mechanisch angedreht, läuft er infolge des dann vorhandenen Drehmomentes in diese Richtung weiter<sup>255</sup>. Durch die Phasenverschiebungen beim Laufen wird aus dem Wechsel- ein allerdings elliptisches Drehfeld. Es wird nur ca. 60 bis 70 % der Leistung erreicht und es gibt mehr Motorgeräusche. Ein Motorschutzschalter verhindert bei Abbremsung eine Überlastung.

<sup>255</sup> Nach Abbremsung kann er aber nicht wieder allein anlaufen.

**Praxistipp:** Mit einem *Zusatzkondensator* kann eine Hilfsphase erreicht werden, die den eigenständigen Anlauf ermöglicht (Abb. 19.37).

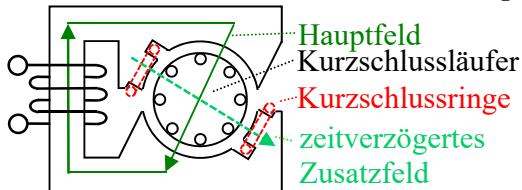


**Abb. 19.37: Einphasenbetrieb mit Anlaufkondensator und dessen Abschaltung**

Infolge der Veränderung der Phasenverschiebung bei Betrieb (vergleiche  $\cos\varphi$  in Abb. 19.31) wird für den Anlauf ein anderer Kondensator benötigt als bei Nennbetrieb. Deshalb wird der Anlasskondensator (üblicherweise durch einen Fliehkraftschalter) nach dem Hochlauf abgeschaltet. Der Kondensator kann so dimensioniert werden, dass das Anlaufmoment sogar größer ist als bei vergleichbarem Dreiphasenbetrieb bzw. auch über dem Kippmoment liegt. Weiteres siehe (Tae70 S. 115, 155 ff, 245 ff).

**Praxistipp:** Motore, die für Einphasenbetrieb vorgesehen sind, werden als Einphasenmotore mit Hilfswicklungen und entsprechend dimensioniertem Kondensator so hergestellt, dass sie fast die Leistung bzw. das Drehmoment eines vergleichbaren Dreiphasenmotors erreichen. Auch hier ist ein Motorschutzschalter zum Schutz vor Überlast erforderlich.

Für Kleinantriebe unter ca. 100 W hat sich der **Spaltmotor** als Bauform durchgesetzt.



**Abb. 19.38: Spaltmotor mit zusätzlichen Kurzschlussringen im Stator**

Der Spaltmotor gleicht dem Einphasenbetrieb mit Hilfswicklung. Die Pole sind als *Polschuhe* ausgebildet, von denen eine Seite mit einem *Spalt* abgeteilt und mit einem *Kurzschlussring* umgeben ist. Der induzierte Wirbelstrom in den Kurzschlussringen sorgt für ein<sup>256</sup> zeitverzögertes Zusatzfeld in einer gegenüber der Seite ohne Ring *versetzten Richtung*, sodass ein elliptisches Drehfeld entsteht.

**Praxistipp:** Diese sehr einfachen robusten kleinen Motoren haben einen Wirkungsgrad von 15 bis 25 % und werden z.B. für Lüfter in Backöfen, kleine Wasserpumpen (Aquarien bis zu Heizungsanlagen) und weitere Kleinantriebe verwendet.

257

#### 19.3.4 Synchronmaschine

Die **Synchronmaschine** wird als Schenkel- und Vollpolmaschine gebaut. Überwiegend wird sie als *Generator* zur Elektroenergieerzeugung angewandt. Bei großen Dauerantrieben wird sie auch als *Motor* genutzt, besonders in Kombination mit einer *Blindleistungskompensation*.

<sup>256</sup> Der Wirbelstrom wirkt dem Anstieg bzw. Abfall des Feldes seiner Polschuhseite entgegen.

<sup>257</sup> Dabei befindet sich der Läufer ohne Probleme vollständig im Wasser.

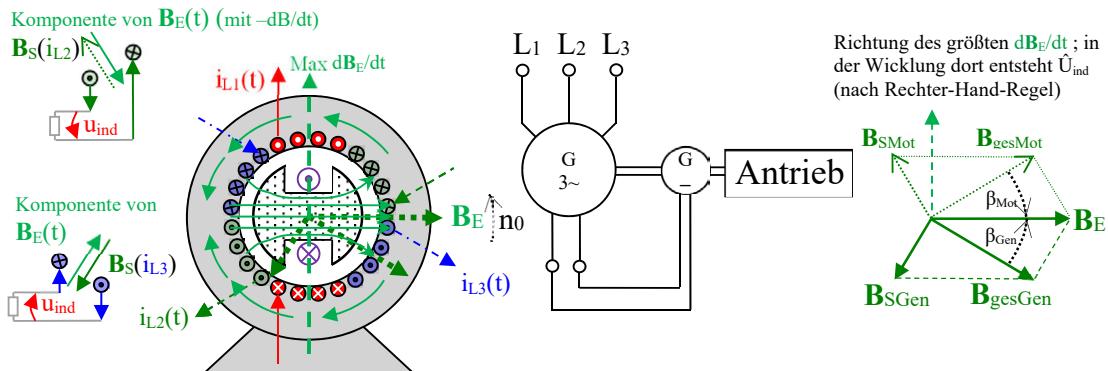


Abb. 19.39: Synchronmaschine mit Schenkelpol als Generator mit Erregermaschine

Das **Polrad** der Synchronmaschine besteht aus einem Elektromagneten (oder in speziellen Fällen einem Permanentmagneten) und erzeugt das *Erregerfeld*  $\mathbf{B}_E$ . Das Polrad wird bei Generatorbetrieb von einer Antriebsmaschine getrieben (Richtung  $n_0$ ); bei Motorbetrieb folgt es dem Drehfeld.

Im **Generatorbetrieb** werden bei Leerlauf (keine Entnahme elektrischer Leistung) durch das Erregerfeld  $\mathbf{B}_E$  des Polrades in den drei Ständerwicklungen Spannungen  $U_{g\text{ eff}} = c_1 n_0 \Phi_E^{258}$  phasengleich zum Umlauf *induziert*. Die Richtung der größten momentanen Zunahme von  $d\mathbf{B}_E/dt$  läuft  $\mathbf{B}_E$  um  $90^\circ$  in Drehrichtung voraus<sup>259</sup> und beim Vorbeilauf entsteht in den senkrecht dazu stehenden Ständerwicklungen jeweils das Maximum der Induktionsspannung. Bei Entnahme von Strömen (in Abb. 19.39 als Beispiel bei reiner Wirkleistung an den Klemmen) fließen diese durch die Ständerinduktivitäten  $L_{s1}, L_{s2}$  und  $L_{s3}$  zeitverzögert.  $\hat{I}$  wird so erst erreicht, wenn das größte  $d\mathbf{B}_E/dt$  schon vorbei ist. (Bei den in Abb. 19.39 gewählten  $L_s$  beträgt die Verzögerung gerade  $30^\circ$ . Das entspricht der Zeit  $t_4$  mit  $i_{L3} = \hat{I}$  und  $i_{L1} = i_{L2} = -1/2 \hat{I}$  in Abb. 19.26.) Die Ständerströme erzeugen das *Ständerfeld*  $\mathbf{B}_S$  ( $\mathbf{B}_{SGen} = \mathbf{B}_S$ ) und dieses wirkt gegen das dort steigende  $\mathbf{B}_E$  (nach der Lens'schen Regel).

**Praxistipp:** Das *Polradfeld*  $\mathbf{B}_E$  läuft bei Generatorbetrieb dem sich als Summe ergebenden Drehfeld  $\mathbf{B}_{gesGen} = \mathbf{B}_E + \mathbf{B}_{SGen}$  mit dem **Polradwinkel**  $\beta_{Gen}$  in Drehrichtung *voraus*.

Dabei bleibt  $\mathbf{B}_S$  umso mehr hinter dem Polrad zurück, je größer der entnommene Strom ist. Bei **Motorbetrieb** erzeugen die Ständerströme das Ständerdrehfeld  $\mathbf{B}_{SMot}$ . Im Leerlauf (keine Entnahme mechanischer Leistung) läuft das Polrad phasengleich mit dem Drehfeld mit, induziert eine Spannung gleicher Größe wie die angelegte<sup>260</sup>, sodass der Strom null wird. Bei Entnahme mechanischer Leistung bleibt das Polrad dagegen hinter dem Drehfeld zurück (In Abb. 19.39 gerade um  $30^\circ$ , das entspricht  $t_2$  mit  $i_{L2} = \hat{I}$  und  $i_{L1} = i_{L3} = -1/2 \hat{I}$  in Abb. 19.26). Die durch  $d\mathbf{B}_E/dt$  des hinterherlaufenden Polrads induzierte Spannung weicht von der angelegten ab und es fließt ein Ständerstrom, der umso größer ist, je mehr das Polrad zurückbleibt (siehe auch Abb. 19.40). Zu  $t_2$  wird  $\mathbf{B}_E$  in Abb. 19.39 kleiner, also ist  $u_{ind}$  negativ und  $i_{L2}(t)$  sowie  $\mathbf{B}_S$  werden verkleinert (gemäß der Lens'schen Regel).

**Praxistipp:** Das *Polradfeld* läuft bei Motorbetrieb dem Gesamtdrehfeld  $\mathbf{B}_{gesMot} = \mathbf{B}_E + \mathbf{B}_{SMot}$  um den **Polradwinkel**  $\beta_{Mot}$  in Drehrichtung *hinterher*.

<sup>258</sup> Vergleiche Abschnitt 19.1.1 und auch Abschnitt 6.1.6. „ $c_1$ “ ist die Maschinenkonstante analog zu (19.1).

<sup>259</sup> Kurz vorher war an diesem Ort gerade noch eine Komponente nach unten, sie ist jetzt null und kurz danach geht eine Komponente nach oben (entspricht dem Nulldurchgang einer Sinusfunktion).

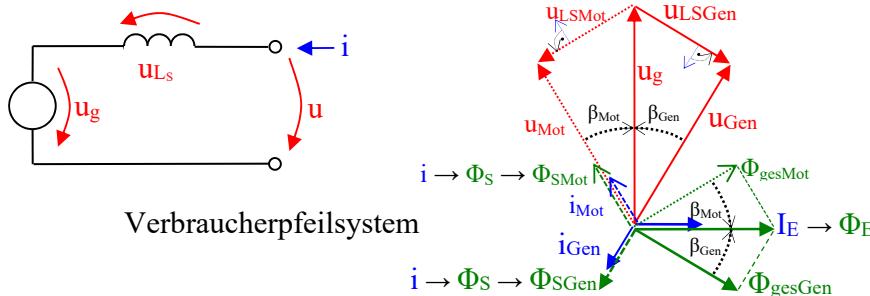
<sup>260</sup> Bei richtig eingestellter Erregung für reine Wirkleistung (siehe auch Abb. 19.42), sonst folgen Blindströme.

Der Läufer bekommt über zwei Schleifringe eine Gleichspannung<sup>261</sup>, das hat den Vorteil der Beeinflussbarkeit des Erregerfeldes.

Für einfache Untersuchungen der Wirkungsweise soll für den Ständer nur eine wirksame Gesamtinduktivität<sup>262</sup>  $L_s$  angenommen und deren Drahtwiderstand vernachlässigt werden. Der Läufer wird als Spannungsquelle für die induzierte Spannung berücksichtigt. In Abb. 19.40 ist eine der drei Phasen und die Zeigerdarstellung der Spannungen, Ströme sowie magnetischen Flüsse der Ständerwicklung abgebildet (u, i und  $\Phi$  sind skalare Zeitfunktionen). Alle drei symmetrischen Phasen ergeben ein gleiches Zeigerbild (bei Messung jeweils aller U, I und  $\phi$ ). Im Verbraucherpeilsystem stimmen in Abb. 19.40 auch die Induktionsspannung und das größte  $d\Phi_E/dt$  überein.

Die Zeiger der Flüsse  $\Phi(t)$  in Abb. 19.40 entstehen aus den Zeitfunktionen, die dem Anteil der Flussdichtevektoren durch die Wicklungsfläche entsprechen (bei Beachtung des Winkels zwischen diesen).

Eine Darstellung von *Zeigern* (u, i) und *Vektoren* (**B**) wäre problematisch, weil Zeiger in der komplexen Zeitebene dagegen Vektoren in einer Ebene des Raumes darzustellen sind. Für eine genaue Untersuchung wäre eine Zusammenfassung der Zeiger der drei Phasen (Fis79 S. 180 ff, 265, 282 ff) oder eine *Raumzeigerdarstellung* zweckmäßig; siehe Abschnitt 18.1.



**Abb. 19.40: Vereinfachte Ersatzschaltung und Zeigerbild bei reiner Wirkleistung**

Der Erregerflusszeiger in Abb. 19.40 zeigt in Richtung des Pols (wird hier als Bezugsrichtung gewählt). Der Strom  $i$  ergibt den Ständerfluss  $\Phi_S = \Phi_{SGen}$ . Die vom Erregerfluss  $\Phi_E$  induzierte Spannung  $u_g$  wird in Richtung des größten  $d\Phi_E/dt$  dargestellt und läuft somit dem Fluss  $90^\circ$  zeitlich voraus.

Für das Verbraucherpeilsystem zeigt bei **Generatorbetrieb**  $i_{Gen}$  gegen die Richtung von  $u_{Gen}$  (reine Wirkleistungsabgabe, Ohm'sche Last) und  $u_{LS}$  (an der Induktivität)  $90^\circ$  gegenüber  $i_{Gen}$  voraus. Die Klemmenspannung  $u_{Gen}$  läuft der Generatorenspannung  $u_g$  somit um den Polradwinkel  $\beta_{Gen}$  hinterher und steht  $90^\circ$  vor  $\Phi_{gesGen} = \Phi_E + \Phi_{SGen}$ .

Im Falle einer *kapazitiven* oder *induktiven Last* würde der Strom in den drei Wicklungen weniger oder mehr verzögert werden ( $\beta$  kleiner oder größer). Dabei entsteht zusätzlich entsprechend der Last eine *Phasenverschiebung*  $\varphi$  zwischen  $u$  und  $i$ .

Bei **Motorbetrieb** (für den Fall reiner Wirkleistungsaufnahme) zeigt  $i_{Mot}$  in die Richtung von  $u_{Mot}$  und  $u_{LS}$  geht wiederum  $90^\circ$  gegenüber  $i_{Mot}$  vor. Die Klemmenspannung läuft dabei der induzierten Gegenspannung  $u_g$  mit dem Polradwinkel  $\beta_{Mot}$  voraus. Aus  $i_{Mot}$  folgt der Ständerfluss  $\Phi_{SMot}$  und damit  $\Phi_{gesMot} = \Phi_E + \Phi_{SMot}$ .

**Praxistipp:** Beim **Betrieb** der Synchronmaschine gibt es zwei Einflussmöglichkeiten:

1. Vergrößerung/Verkleinerung der *Antriebsleistung*,  $\beta$  wird erhöht/verringert.
2. Vergrößerung/Verkleinerung der *Erregung* ( $\Phi_E$  bzw.  $I_E$ ),  $U_g \text{ eff}$  wird erhöht/verringert.

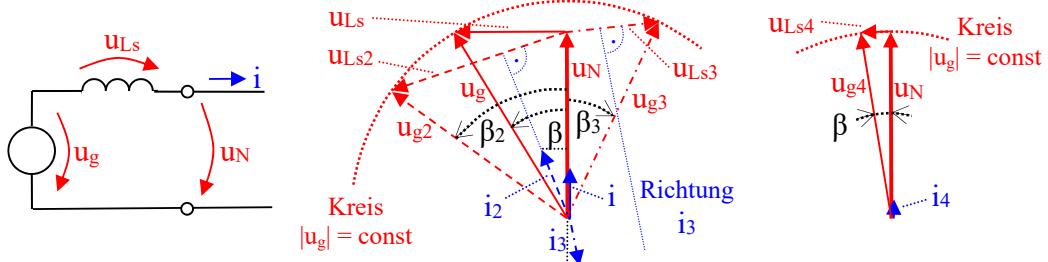
<sup>261</sup> Bei schleifringlosen Maschinen wird eine Wechselspannung transformatorisch übertragen und auf dem Polradläufer gleichgerichtet.

<sup>262</sup> Insbesondere beim Schenkelpolläufer (Fis79 S. 180 ff, 265, 282 ff) ist gegenüber dem Vollpolläufer das Läuferquerfeld besonders zu beachten und eine Längs- sowie Querinduktivität zu berücksichtigen.

### 19.3.5 Parallelbetrieb eines Synchrongenerators zum Netz

Untersuchung für einen **Parallelbetrieb zum starren Netz**, d.h.  $U_N = \text{const}$ ,  $\omega_N = \text{const}$  und  $\varphi_U = \text{const} = 0$  (als Bezugsgröße) mit einer *einphasigen Ersatzschaltung*, die sich nach den vorherigen Überlegungen anbietet:

1. *Veränderung der Antriebsleistung* bei konstanter Erregung (Erzeugerpfeilsystem):



**Abb. 19.41: Parallelbetrieb zum Netz mit konstanter Erregung (Erzeugerpfeilsystem)**

In Abb. 19.41 entsprechen  $u_N$ ,  $u_{Ls}$ ,  $u_g$  und  $i$  der *Einspeisung reiner Wirkleistung* ins Netz. Der Strom  $i$  ist gleichphasig zu  $u_N$ ; Erregung und Antriebsleistung wurden dafür so eingestellt. Das entspricht dem Einzelbetrieb mit vergleichbarer Ohm'scher Last in Abb. 19.40.

Die Darstellung von  $u_N$ ,  $u_{Ls2}$ ,  $u_g2$  und  $i_2$  zeigt nach *Erhöhung* der Antriebsleistung mit einem größeren vorlaufenden Polradwinkel  $\beta_2 > \beta$  die Einspeisung eines *höheren* Wirkstromes (Wirkleistung) mit einem kleinen zusätzlichen Blindstrom (Blindleistung).

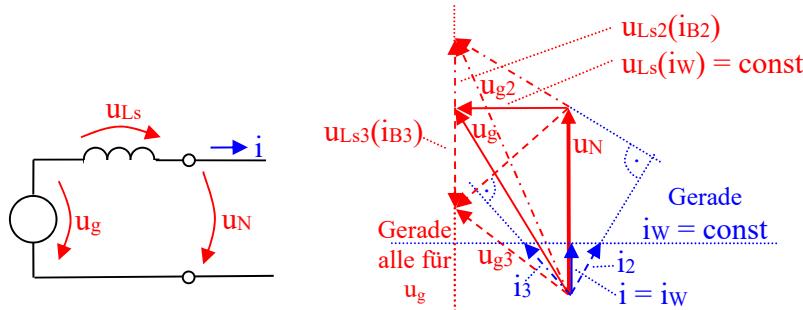
Dagegen zeigen  $u_N$ ,  $u_{Ls3}$ ,  $u_g3$  und  $i_3$  nach *Verringerung* der Antriebsleistung mit einem hinterherlaufenden Polradwinkel  $\beta_3$  (negativ, Uhrzeigersinn) die *Entnahme* von Wirkleistung aus dem Netz (also Motorbetrieb<sup>263</sup>; auch hier ein kleiner zusätzlicher Blindanteil).

Die Blindanteile fallen in der Darstellung von Abb. 19.41 gegenüber der Praxis zu groß aus, da die Spannungen der Statorspule zur besseren Sichtbarkeit übertrieben wurden. Bei  $u_N$ ,  $u_{Ls4}$ ,  $u_g4$  und  $i_4$  (Erregung wurde auf den Leerlauf  $i = 0$  eingestellt) ist zu sehen, dass für kleine Spannungen  $U_{Ls}$  der Statorspule der Blindanteil entlang der Tangente des Kreises sehr gering oder vernachlässigbar wird.

**Praxistipp:** Die Veränderung der *Antriebsleistung* beeinflusst (fast) nur die *Wirkleistung*.

2. *Veränderung der Erregung* bei konstanter Antriebsleistung (Erzeugerpfeilsystem):

In Abb. 19.42 entsprechen  $u_N$ ,  $u_{Ls}$ ,  $u_g$  und  $i$  wieder der *Einspeisung reiner Wirkleistung* ins Netz. Als Ausgangspunkt wurden Erregung und Antriebsleistung dafür wie in Abb. 19.41 und in Abb. 19.40 eingestellt.



**Abb. 19.42: Parallelbetrieb zum Netz mit konstanter Antriebsleistung**

<sup>263</sup> Die Ersatzschaltung stellt das Erzeugerpfeilsystem dar, für das ein Verbrauch mit negativem Strom erscheint.

Bei konstanter Antriebsleistung müssen die Wirkleistung und so der Wirkanteil des Stromes konstant bleiben, deshalb liegen die *Zeigerspitzen aller Ströme auf einer Geraden* ( $i_w = \text{const}$ ). Infolgedessen bleibt auch der Spannungsabfall an der Statorinduktivität, den der Wirkanteil der Ströme hervorruft,  $u_{Ls}(i_w) = \text{const}$ . Somit liegen auch die *Zeigerspitzen aller induzierten Spannungen  $u_g$  auf einer Geraden*. Für eine kapazitive Last läuft der Strom vor ( $i_3$ ) und  $u_g$  wird verkleinert; für eine induktive Last läuft der Strom nach ( $i_2$ ) und  $u_g$  wird vergrößert.

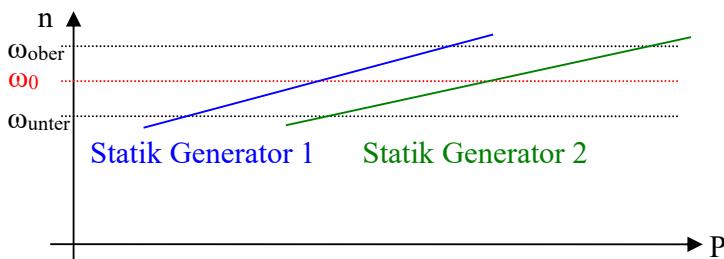
Bei Motorbetrieb ergeben sich analoge Beziehungen, nur dass die Gerade aller  $u_g$  bei negativem Wirkstrom  $i_w$ <sup>264</sup> auf der rechten Seite von  $u_N$  liegt.

**Praxistipp:** Die Veränderung der *Erregung  $u_g$*  durch  $I_E$  beeinflusst nur die *Blindleistung*.

Bei Parallelbetrieb wird demzufolge

- durch Einstellen (oder Regeln) der Antriebsleistung die *Wirkleistungsübernahme* gestellt (oder geregelt) und
- durch Einstellen (oder Regeln) der Erregung die *Blindleistungsübernahme* gestellt (oder geregelt).

Für den Parallelbetrieb von Generatoren bedeutet es, dass die Leistungsanteile der beteiligten Generatoren entsprechend aufgeteilt werden können und müssen. Bei etwa gleich großen Generatoren entsteht durch die Wirkleistungsübernahme eines Generators (durch Vergrößerung der Antriebsleistung) eine *Drehzahlerhöhung*, daraufhin eine *Erhöhung der Netzfrequenz*, als Folge davon wiederum eine Erhöhung der Drehzahl des anderen Generators sowie dementsprechend eine Entlastung dessen Antriebsmaschine<sup>265</sup>. Für eine Regelung des Zusammenwirks von Generatoren, bei der jeder anteilig gleich belastet werden soll, müssen bei beiden (oder allen) jeweils einzeln die Drehzahlen der Antriebsmaschinen nach einer statischen Kennlinie (*Statik*) geregelt werden (bei einer einfachen Regelung).



**Abb. 19.43: Regelung des Parallelbetriebs mit einer Statik**

Abb. 19.43 zeigt, dass bei einer Erhöhung/Verringerung der Drehzahl (damit der Netzfrequenz) beide Generatoren durch deren Regelung ihre Leistung gleichsam erhöhen/verringern. Dabei müssen die Generatoren beide (alle) im Bereich **zwischen  $\omega_{\text{unter}}$  und  $\omega_{\text{ober}}$  im zulässigen Arbeitsbereich** bleiben. So können die Generatoren zusammen auf Schwankungen des Wirkleistungsbedarfs der Last reagieren.

**Praxistipp:** Die *Netzfrequenz* ist bei dieser Art der Regelung *nicht konstant*. Sie variiert um einige Zehntel Hz. Das trifft auch auf die Energieversorgung zu.

266

<sup>264</sup> Die Ersatzschaltung stellt das Erzeugerpeilsystem dar, für das ein Verbrauch mit negativem Strom erscheint.

<sup>265</sup> Ungeregelte Antriebe erzeugen im Arbeitsbereich mit steigender Drehzahl normalerweise ein geringeres Moment (vergleiche mit den Kennlinien des Gleich- und Asynchronmotors in Abb. 19.4, Abb. 19.9 und Abb. 19.31).

<sup>266</sup> Große Verbundnetze werden auf eine Frequenzgenauigkeit  $< \pm 0,5\%$  (49,75 bis 50,25 Hz) geregelt (AEG70 S. 277).

Außerdem muss mit einer Regelung der Spannung  $U_N$  über die Erregung in ähnlicher Weise die Blindleistung aufgeteilt werden, die insgesamt gleichfalls eine Reaktion auf den Blindleistungsbedarf der Last darstellt.

### 19.3.6 Inselbetrieb und Betriebsverhalten der Synchronmaschine

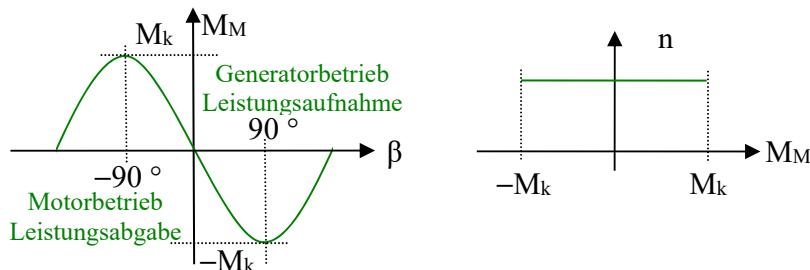
Bei Inselbetrieb befindet sich nur ein Synchrongenerator im Netz (z.B. Notstromaggregat).

**Praxistipp:** Bei **Inselbetrieb eines einzelnen Generators** kontrolliert

- ein Spannungsregler die Erregung so, dass die Ausgangsspannung konstant bleibt,
- ein Drehzahlregler die Antriebsleistung so, dass die Frequenz konstant bleibt.

Damit erfolgt jeweils eine Anpassung an die aktuelle Last (mit Wirk- und Blindanteil).

Das Betriebsverhalten verdeutlicht die **Kennlinien der Synchronmaschine** in Abb. 19.44.



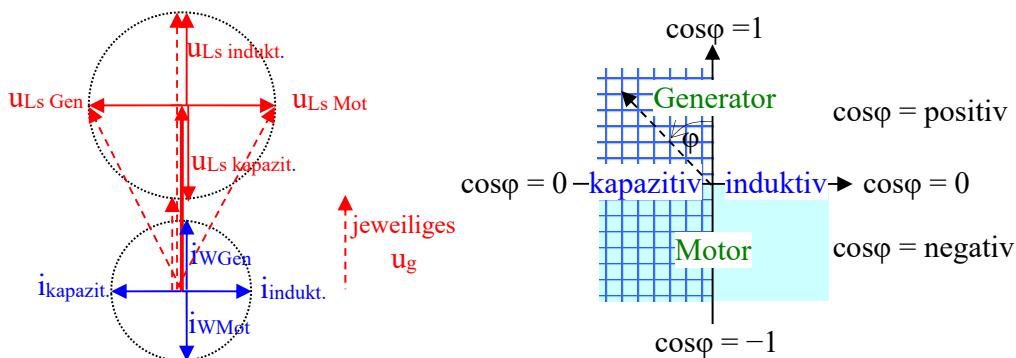
**Abb. 19.44: Drehmoment-Polradwinkel- und Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie**

Das Drehmoment kann zwischen maximaler Zufuhr ( $-M_k$ ) bis maximaler Abgabe ( $M_k$ ) variieren. Dabei gibt es nur von  $-90^\circ < \beta < 90^\circ$  *stabile Arbeitspunkte*, bei denen z.B. eine größere Last zur Vergrößerung des Hinterherlaufens des Polrades und so zu einem höheren Moment, also wieder zu einem stabilen Arbeitspunkt führt.

**Praxistipp:** Die Drehzahl der Synchronmaschine selbst bleibt völlig konstant.

Bei Überschreiten der *Kippmomente*  $M_k$  (bzw.  $-M_k$ ) gerät der Synchronmotor (-generator) „außer Tritt“ und kommt zum Stehen bzw. zu instabilem Verhalten. Der Nennbetrieb liegt in der Regel bei  $\pm 15$  bis  $\pm 30^\circ$ .

Zusammenfassend ermöglichen die **Betriebszustände der Synchronmaschine** alle  $360^\circ$  der denkbaren Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung.



**Abb. 19.45: Alle Betriebszustände mit Erzeugerpfeilsystem als Ausgang**<sup>267</sup>

<sup>267</sup> Vergleiche Abschnitt 11.1.4 Abb. 11.25; dort war das Verbraucherpeilsystem der Ausgangspunkt.

Der **Anlauf** einer Synchronmaschine muss grundsätzlich extra gelöst werden, weil ein Selbstanlauf prinzipbedingt nicht möglich ist. Dazu werden

- das Hochfahren durch einen Fremdantrieb (mit der Antriebsmaschine beim Generator-, mit einem Hilfsmotor beim Motorbetrieb),
- ein asynchroner Hochlauf mit einem zusätzlichen im Polrad angeordneten Kurzschlusskäfig<sup>268</sup> oder
- ein Frequenzhochlauf (langsame Erhöhen der Frequenz bis zur Sollfrequenz von einer Anfangsfrequenz, bei der sich der Motor allein in den Synchronismus zieht)

benutzt.

- Ein *Motor* zieht sich in der Nähe der synchronen Drehzahl in den Synchronismus.
- Ein *Generator im Einzelbetrieb* wird im Weiteren geregelt.
- Ein *Generator im Parallelbetrieb* muss auf das vorhandene Netz synchronisiert ( $U = U_{\text{Netz}}$ ,  $\omega = \omega_{\text{Netz}}$ ,  $\varphi_u = \varphi_u_{\text{Netz}}$ ), dann zum Netz dazugeschaltet und sein Betrieb geregelt werden.

Zu einer **Drehzahlregelung** bei einem Motor kann nur eine Frequenzstellung mit Umrichtern verwendet werden.

Die **Hauptanwendungsgebiete** sind

- Generatoren bis ca. 1000 MW Leistung (mit einem Wirkungsgrad von ca. 98,5%),
- Motoren für große *Dauerlasten* (z.B. Gebläseanlagen) in Kombination mit einer Blindleistungskompensation,
- *Antriebsverbünde* mit hohen Forderungen an synchronen Lauf und
- in neuerer Zeit der *Stromrichtermotor* (umrichtersteuerter Synchronmotor, bei dem z.B. ein Polradsensor die Frequenz steuert).

Trotz der hohen Wirkungsgrade ist bei den großen Maschinen eine effektive **Kühlung** erforderlich. Diese wird je nach Ausführung und Anwendung als Luft- oder auch Wasserkühlung vorgesehen.

### 19.3.7 Kennwerte Übungs- und Messaufgaben

Kennwerte für symmetrischen Drehstrom

$U_L$ ,  $I_L$ ,  $\varphi_{iL}$ ,  $U_{LL}$ ,  $f$ ,  $P_w$ ,  $P_B$  und  $P_s$

Kennwerte für unsymmetrischen Drehstrom

$U_{L1}$ ,  $I_{L1}$ ,  $\varphi_{iL1}$ ,  $U_{L2}$ ,  $I_{L2}$ ,  $\varphi_{iL2}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{L3}$ ,  $I_{L3}$ ,  $\varphi_{iL3}$ ,  $U_{31}$ ,  $f$ ,  $P_w$ ,  $P_B$  und  $P_s$

Kennwerte auf dem Typenschild der Asynchronmaschine

$U_N$ ,  $I_N$ ,  $\cos\varphi$ ,  $n_N$ ,  $f$ ,  $P_{\text{mech}}$  ( $U_N$  und  $I_N$  normalerweise für Stern- und Dreieckschaltung)

Kennwerte auf dem Typenschild der Synchronmaschine

$U_N$ ,  $I_N$  bei  $\cos\varphi = 1$  und  $P_s$  des Stators,  $U_E$  und  $I_E$  des Polrades sowie  $n_0$ ,  $f$  und  $P_{\text{mech}}$

### Aufgabe 19.7

Bei unsymmetrischer Last am Drehstromnetz werden gemessen:

$U_{L1} = 230 \text{ V}$ ,  $I_{L1} = 5 \text{ A}$  und  $P_{w1} = 920 \text{ W}$  bei einer induktiven Last,

$U_{L2} = 230 \text{ V}$ ,  $I_{L2} = 7 \text{ A}$  und  $P_{w2} = 1450 \text{ W}$  bei einer induktiven Last und

$U_{L3} = 230 \text{ V}$ ,  $I_{L3} = 4 \text{ A}$  und  $P_{w3} = 855 \text{ W}$  bei einer kapazitiven Last.

<sup>268</sup> Bei synchroner Drehzahl ist der Kurzschlusskäfig unwirksam.

Frage 1: Wie groß sind die drei  $\cos\varphi$  und der Ausgleichstrom im Nullleiter?

Frage 2: Wie lauten die symmetrischen Komponenten der Ströme?

### Aufgabe 19.8

Die Parameter der Ersatzschaltung einer Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer können aus Leerlauf- und Kurzschlussversuch ermittelt werden. Im Leerlaufversuch (mit einem Antrieb bis zur synchronen Drehzahl) wird an einer Phase der Sternschaltung  $U = U_N = 220V$ ,  $I = 0,05 A$  und  $\cos\varphi = 0,2$  gemessen. Beim Kurzschlussversuch (mit festgebremstem Läufer) wird  $U = 140 V$ ,  $I = I_N = 0,93 A$  und  $\cos\varphi = 0,14$  gemessen. Bei Nennbetrieb ist  $\cos\varphi_N = 0,78$ , die abgegebene mechanische Leistung ist  $P = 0,33 kW$  und der Widerstand einer Wicklung wird zu  $R_1 = 12,4 \Omega$  gemessen.

Frage 1: Wie lauten  $R_1+R_2'$ ,  $X_{\sigma 1}+X_{\sigma 2}'$ ,  $X_h$  und  $R_{Fe}$ ?

Frage 2: Wie groß sind  $s$  und  $\eta$  bei Nennbetrieb?

Hinweis: Benutzen Sie bei Leerlauf die Näherung  $R_1 = X_{\sigma 1} = 0$ , vernachlässigen Sie bei Kurzschluss und Belastung  $I_{Fe}$  und  $I_\mu$  und beachten Sie, dass P für drei Phasen gilt sowie bei Kurzschluss  $R_2'$ , aber bei Belastung  $R_2'/s$  zu setzen ist.

Zusatzaufgabe: Vergleichen Sie das Vorgehen mit dem Transfator Abb. 19.14, Abb. 19.15, Abb. 19.16 und Aufgabe 19.5.

### Aufgabe 19.9

Messung der Ständerinduktivität einer Synchronmaschine am Versuchsstand

#### Versuchsaufbau:

Der Synchrongenerator, eine Antriebsmaschine (Gleichstromnebenenschlussmotor) und die Drehzahlmessung werden mechanisch und elektrisch nach Vorlage angeschlossen.

#### Versuchsdurchführung:

Spannung und Strom werden gemessen. (Drehzahl und Erregung dabei konstant halten).

1. Spannung und Strom für Leerlauf und zwei Ohm'sche Belastungen bei konstanter Induktionsspannung ( $I_E$  und  $n$  konstant) messen.
2. Aus den Zeigerdiagrammen jeweils  $U_{LS}$  und  $\beta$  ermitteln sowie aus  $U_{LS}$ ,  $\omega$  und  $I$  die Ständerinduktivität berechnen. Die Ergebnisse beider Lastfälle sind zu vergleichen.

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

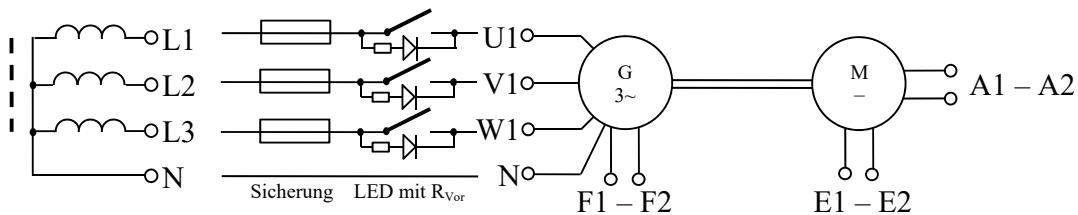
Die Messung ergibt an allen Phasen (im Rahmen der Messgenauigkeit) ein gleiches Zeigerbild. Der Polradwinkel  $\beta$  steigt mit höherer Belastung entsprechend den theoretischen Erwartungen. Die Induktivität kann nach dem einfachen Ersatzschaltbild (Abb. 19.40) berechnet werden und stimmt für beide Belastungsfälle gut überein.

### Aufgabe 19.10

Ein Synchrongenerator soll auf das Netz synchronisiert, Wirk- sowie Blindleistung ins Netz eingespeist werden (Synchrongenerator/-motor mit Gleichstrommotor/-generator als Antriebsmaschine). Dazu ist eine Messschaltung zur Messung der erforderlichen Spannungen, der Wirk-, der Scheinleistung und der Phase  $\varphi$  zu erarbeiten und aufzubauen.

#### Versuchsaufbau:

Der Synchrongenerator und die Antriebsmaschine (Gleichstromnebenenschlussmotor) werden mechanisch und elektrisch nach Vorlage sowie dazu die Messgeräte angeschlossen.



**Abb. 19.46: Netztrenntrafo Synchronisierung und Maschinensatz**

Hinweis: Bei relativ kleinen Maschinen ( $< 200 \text{ W}$ ) zur Phasenmessung ein Oszilloskop mit potentialfreien Eingängen und für den Strom einen Shunt ca.  $1 \Omega$  einsetzen.

#### Versuchsdurchführung:

Zur Synchronisation müssen zu jedem Zeitpunkt für alle drei Phasen die Spannungen vom Netz und dem Generator exakt übereinstimmen (alle LED leuchten nicht). Nur dann darf der Generator an das Netz geschaltet werden und befindet sich erst einmal im Leerlauf.

Hinweis: Eine kompetente fachliche Anleitung ist für den Versuch erforderlich!

Mit der parallel zum Netz laufenden Maschine sind

1. die Einspeisung von Wirkleistung,
2. die Einspeisung von kapazitiver und induktiver Blindleistung,
3. der Motorbetrieb mit reiner Wirkleistung sowie
4. der Motorbetrieb mit kapazitiver und induktiver Blindleistung

zu untersuchen und zu demonstrieren.

Hinweis: Für den Motorbetrieb ist sicherzustellen, dass dann der Gleichstromgenerator in seine Spannungsquelle einspeisen kann (bei relativ kleinen Maschinen ( $< 200 \text{ W}$ ) nehmen das oft die Verluste der Gleichspannungserzeugung auf).

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

Die Messungen stimmen (im Rahmen der Messgenauigkeit) mit den theoretischen Erwartungen (Abschnitt 19.3.5) gut überein.

## 19.4 Auswahl eines Motors für eine Antriebsaufgabe

Vor der Auswahl eines Motors muss eine Analyse der Antriebsaufgabe durchgeführt werden. Dazu gehören:

1. Die Ermittlung der benötigten Antriebsleistung, Drehzahl, Drehzahlstellung und aller Nebenbedingungen,
2. Die Betriebsart, bei der diese Leistung umgesetzt wird (Dafür wurden in VDE 0530 acht Betriebsarten genormt, die sich vor allem hinsichtlich des Erwärmungs- und Abkühlungsverhaltens unterscheiden.),
  - S1 Dauerbetrieb
  - S2 Kurzzeitbetrieb
  - S3 Aussetzbetrieb ohne Einfluss des Anlaufs auf die Erwärmung
  - S4 Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufs auf die Erwärmung
  - S5 Aussetzbetrieb mit Einfluss des Anlaufs und des Bremsens auf die Erwärmung
  - S6 Durchlaufbetrieb mit Aussetzbelastung
  - S7 Unterbrochener Betrieb mit Anlauf und Bremsung
  - S8 Unterbrochener Betrieb mit periodisch wechselnder Drehzahl und Leistung

3. Die benötigte Motorausführung,

- Befestigung, z.B. Fußmotor, Flanschmotor ...
- Lagerarten, z.B. Wälzlager u.ä.
- Achsenausführung, z.B. ein oder zwei Achsenenden, mit Gewinde usw.
- Norm- und Listenmotore
- Sondermotore, z.B. Bremsmotore, Getriebemotore
- Schutzart, Sonderschutz (hohe Luftfeuchtigkeit, Tropenfestigkeit, Explosionschutz)
- Kühlung, z.B. Selbstkühlung (natürlich ohne Einwirkungen), Eigenkühlung (Oberflächen- oder Durchzugslüfter, Flüssigkeitskühlung)
- Stromart, Spannung, Frequenz, Schaltung
- Schutztechnische Angaben, z.B. Überlastschutz, Temperaturüberwachung u.ä.

4. Wichtig ist darüber hinaus ein Kostenvergleich.

Weiterführende Aufstellungen dazu sind in (Vog80 S. 163 ff, 313) und (Bed75 S. 175 ff) zu finden.

## 19.5 Ausblick, weitere elektrische Maschinen

Insbesondere um durch einen höheren Wirkungsgrad weiter den Energiebedarf zu reduzieren, wird nach Alternativen gesucht. Neben neuen Magnetmaterialien und neuen Konstruktionsdetails verändert sich auch die Anwendung bekannter Maschinen.

- So kann mit einer stromrichtersteuerten Synchronmaschine bei einigen Anwendungen ohne Abstriche bei den Betriebseigenschaften ein etwas höherer Wirkungsgrad gegenüber Asynchronmaschinen erreicht werden.
- Für Windkraftanlagen kommen zunehmend doppeltgespeiste Asynchronmaschinen ins Spiel, weil sie besser an die Windverhältnisse angepasst werden können und keine Blindleistung aus dem Netz benötigen.
- Selbst der Reluktanzmotor (eine altbekannte bislang unbedeutende Art eines nur synchron arbeitenden Motors) kommt durch die Möglichkeiten der Frequenzumrichter und seinen noch einmal etwas höheren Wirkungsgrad wieder ins Spiel.
- Andererseits sind für Stell- und Regelantriebe Schrittmotore zu einer breiten Anwendung gelangt.
- Auch bei Gleichstrommotoren, die weiterhin für Regelantriebe eine Rolle spielen, finden ständig Verbesserungen statt.

Die Entwicklung kann demnach nicht als abgeschlossen angesehen werden

# 20 Leistungselektronische Energiewandler

Die Abschnitte 4 bis 6, 9 und 11 sollten verstanden worden sein.

Hilfreich kann die Wiederholung der mathematischen Formalismen in den Abschnitten 10.1 bis 10.3 sowie die Bauelemente aus Abschnitt 12 sein. Es werden

- das Grundprinzip leistungselektronischer Schaltungen,
- die Wirkungsweise und Eigenschaften ihrer Steuerung bei Gleich-, Wechsel- und Drehstrom,
- drei Verfahren selbstgesteuerter Stromrichter,
- Phasenanschnittsteuerung bei fremdgesteuerten Stromrichtern sowie
- einige Anwendungsbeispiele zum Kennenlernen des Betriebsverhaltens

vorgestellt.

Für den Einsatz und deren Planung ist immer die Aufgabe zur Energiewandlung bzw. für die vorgesehene Anwendung ausschlaggebend (vergleiche Abschnitt auch 20.2).

## 20.1 Arbeitsweise von Stromrichtern

### 20.1.1 Grundprinzip und Eigenschaften

Die Vorläufer der Stromrichter waren Kommutatoren – oder allgemeiner gesagt – rotierende Kontakte, welche periodisch synchron zum Vorgang ein-, aus- bzw. umschalten.

Das Grundprinzip leistungselektronischer Strom-, Wechsel- oder Umrichter soll an den beiden einfachsten Schaltungen dargestellt werden (in diesem Fall DC-DC-Wandler).

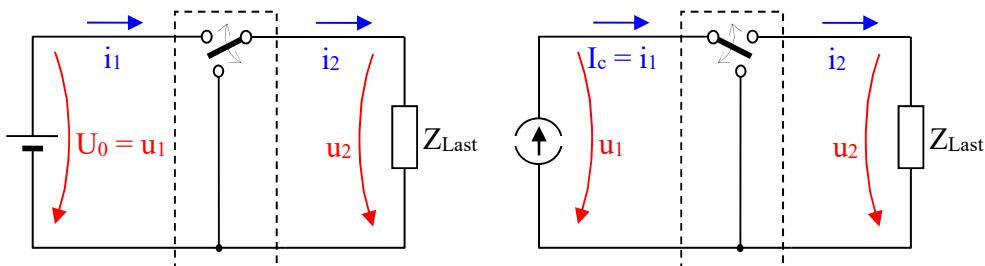


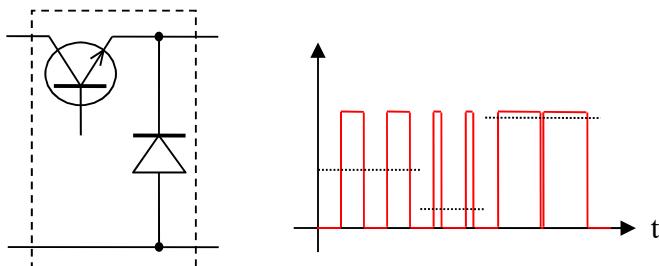
Abb. 20.1: Die beiden einfachsten idealisierten Stromrichterschaltungen

Das Wirkprinzip beider Schaltungen mit einem *idealen Umschalter*<sup>269</sup> ist sofort erkennbar. Nur in *einer* Schalterstellung (Schalter oben), wird *Strom von der Quelle zur Last gespeist*. Bei periodischem Schalten kann somit der *Mittelwert* der Speisung eingestellt werden.

Bei Abb. 20.1 ist aber auch zu sehen, dass die linke Variante *nur eine ideale Spannungsquelle* und eine Ohm'sche und induktive Last ermöglicht, weil der Strom der Induktivität weiterfließen kann, während eine Kapazität kurzgeschlossen würde. Dagegen ermöglicht die rechte Variante *nur eine ideale Stromquelle* und eine *Ohm'sche und kapazitive Last*, weil der

<sup>269</sup>  $R_{\text{offen}} = \infty$ ,  $R_{\text{geschlossen}} = 0$  und  $t_{\text{umschalt}} = 0$ . Da praktisch keine reinen Ohm'schen Lasten vorkommen, ist der ideale Umschalter das einfachste Element eines Stromrichters, weil zumindest auf einer Seite der Strom weiterfließen können muss.

Strom der Konstantstromquelle weiterfließen kann, während eine Spannungsquelle kurzgeschlossen würde.



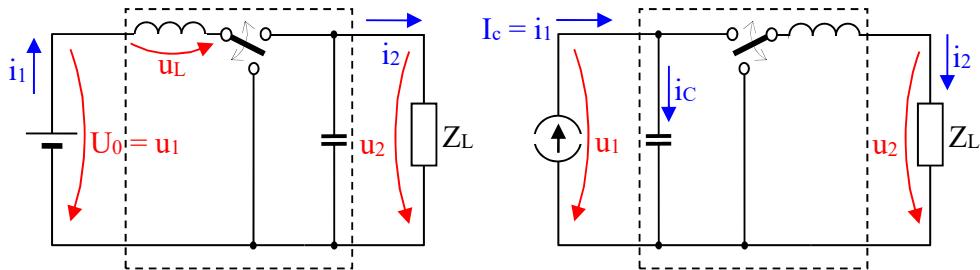
**Abb. 20.2: Praktische Realisierung des Umschalters und Mittelwerte des Schaltens**

Praktisch kann der Umschalter z.B. durch einen Schalttransistor mit entsprechendem Steuersignal und eine Freilaufdiode realisiert werden, die sofort den Strom übernimmt. Die verschiedenen Mittelwerte zeigt als Beispiel die Abb. 20.2 rechts.

**Praxistipp:** Es darf **niemals** ein Schalter parallel zu einer Kapazität oder einer Spannungsquelle bzw. in Reihe mit einer Induktivität oder einer Stromquelle angeordnet werden.

Physikalisch sind Anordnungen wie im Praxistipp Unsinn, in der Praxis würden die Schalterbauelemente durch zu große Ströme oder zu hohe Spannungen zerstört.

Für die meisten Anwendungen sind die rechteckförmigen Speisespannungen oder Ströme ungünstig und müssen geglättet werden. (Induktivitäten oder Kapazitäten in der Last glätten sogar von selbst.)



**Abb. 20.3: Die beiden idealisierten Stromrichterschaltungen mit Glättungselementen**

Zur Glättung kann auf der Seite der Spannungsquelle bzw. der kapazitiven Last nur eine Induktivität und auf der Seite der Stromquelle bzw. der induktiven Last nur eine *Kapazität* eingesetzt werden. Zusätzlich sind die Umschalter umzudrehen, weil die Glättungsindektivität keine Stromunterbrechung und die Glättungskapazität keinen Kurzschluss vertragen können. Den Strom der induktiven Last übernimmt die Glättungskapazität, die Spannung der kapazitiven Last die Glättungsindektivität.

Diese Schaltungen vertragen darüber hinaus eine *beliebige Last*<sup>270</sup> und natürlich auch *reale Quellen*.

Da die Schaltungen quasi eine Umkehrung voneinander darstellen, können beide bei einer Last mit entsprechender Quelle (z.B. Motor → Generatorbremse) auch zurückspeisen.

<sup>270</sup> Nur Induktivitäten mit unterschiedlichen Anfangsströmen können nicht in Reihe sowie Kapazitäten mit unterschiedlichen Anfangsspannungen nicht parallel geschaltet werden.

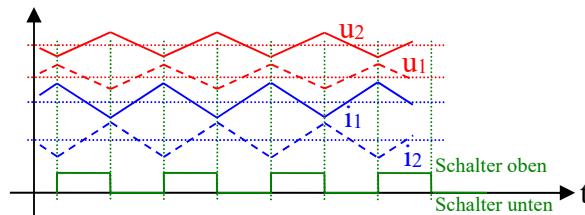


Abb. 20.4: Ströme, Spannungen und Mittelwerte bei periodischem Umschalten<sup>271</sup>

In Abb. 20.3 linke Variante (normale Kurven in Abb. 20.4) bedeuten die **Schalterstellungen**:

1. (**oben**) *Einspeisen eines Stromes* mit Verringerung des Stromes der Induktivität  $i_1$  und Aufladen des Kondensators  $u_2$   
 $Ldi_1/dt = U_0 - u_2 < 0$  und  $Cdu_2/dt = i_1 - i_2 > 0$  sowie
2. (**unten**) *Kurzschluss* mit Anstieg des Stromes der Induktivität  $i_1$  und Entladen des Kondensators  $u_2$  über die Last  
 $Ldi_1/dt = U_0 > 0$  und  $Cdu_2/dt = -i_2 < 0$ .

Bei der rechten Variante (gestrichelte Kurven in Abb. 20.4) bedeuten die **Schalterstellungen**:

3. (**oben**) *Einspeisen eines Stromes* mit Entladen des Kondensators  $u_1$  und Anstieg des Stromes der Induktivität  $i_2$   
 $Cdu_1/dt = i_1 - i_2 < 0$  und  $Ldi_2/dt = u_1 - u_2 > 0$  sowie
4. (**unten**) *Leerlauf* und so Aufladen des Kondensators  $u_1$  und Abfall des Stromes der Induktivität  $i_2$  beim Freilauf über die Last  
 $Cdu_1/dt = i_1 < 0$  und  $Ldi_2/dt = -u_2 < 0$ .

Bei periodischem Schalten stellt sich zwischen dem Ansteigen und Abfallen ein *Gleichgewicht* ein und es entsteht ein stationärer Vorgang mit konstantem Mittelwert. Durch Ändern des *Tastverhältnisses*  $t_{oben}/t_{unten}$  beim Schalten werden die Mittelwerte verändert. Das Übertragungsverhältnis  $\bar{U}_1/\bar{U}_2$  wird also einfach durch das Tastverhältnis festgelegt.

Bei Schalterstellung 1. wird die prinzipbedingte Verringerung des Stromes der Induktivität nur erreicht, wenn die Kondensatorspannung höher ist als die Spannung der Spannungsquelle.

$$u_c = u_2 > U_0 = u_1 \quad (\text{damit } u_L = U_0 - u_2 = Ldi_1/dt = \text{negativ})$$

$$u_2 > u_1 \quad \text{für das Gleichgewicht wird } \bar{u}_1 \bar{i}_1 = \bar{u}_2 \bar{i}_2 \text{ und somit } \bar{i}_1 > \bar{i}_2$$

Bei Schalterstellung 3. kann das prinzipbedingte Entladen des Kondensators nur erfolgen, wenn die Kondensatorspannung *höher* ist als der Spannungsabfall an der Last.

$$u_c = u_1 > u_2 = i_2 Z_L \quad (\text{damit } i_C = i_1 - i_2 = Cdu_1/dt = \text{negativ})$$

$$u_1 > u_2 \quad \text{für das Gleichgewicht wird } \bar{u}_1 \bar{i}_1 = \bar{u}_2 \bar{i}_2 \text{ und somit } \bar{i}_2 > \bar{i}_1$$

Somit stellt die linke Variante in Abb. 20.3 einen **Aufwärtswandler** (Hochsetzsteller mit Spannungsvergrößerung) und die rechte einen **Abwärtswandler** (Tiefsetzsteller mit Spannungsverkleinerung) dar.

Wenn die Wandlung mit idealen Schaltern und Glättungselementen erfolgt, gibt es durch die Wandlung *keine Leistungsverluste*  $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ . Die Wandler verhalten sich somit völlig analog zum idealen Transformator. Bei *realen Schaltern* (z.B. wie in Abb. 20.2) und verlustbehafteten Glättungselementen gibt es *Leistungsverluste durch den Wandler*, die die speisende Seite aufbringen muss.

Durch Drehen und Vertauschen der Klemmen des Schaltermitters entstehen weitere Schaltungsvarianten, die in der Praxis anzutreffen sind.

<sup>271</sup> Die Glättungszeitkonstanten sind viel größer als die Taktzeit, so bleiben  $di/dt$  und  $du/dt$  praktisch konstant.

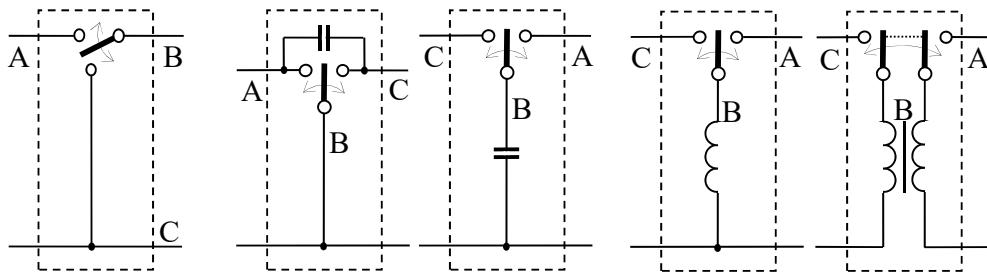


Abb. 20.5: Beispiele weiterer Schaltungsvarianten

Die Schaltung mit Übertrager ist elektrisch gleichwertig mit der einfachen Spule, realisiert aber außerdem eine galvanische Trennung und kann über das Windungszahlenverhältnis zusätzlich wandeln. Als Schalter werden insbesondere Feldeffekt-, Bipolartransistoren, Thyristoren und IGBT zusammen mit Dioden eingesetzt.

**Praxistipp:** Auch **Schaltnetzteile** realisieren im Prinzip die dargestellten Arbeitsweisen.

Für **Wechsel- und Drehstromquellen** sowie -lasten sind zusätzliche Kommutierungen erforderlich.

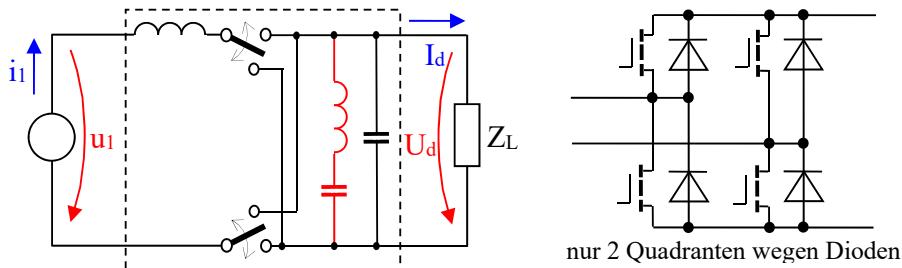


Abb. 20.6: Stromrichterschaltung für Vierquadrantenbetrieb AC → DC

Die Schaltung in Abb. 20.6 hat *vier Schaltzustände* (davon sind beide Kurzschlüsse elektrisch identisch). Somit kann je nach momentaner Polung von  $u_1$  für die Lastseite richtig eingespeist werden. Weil für Wechselstrom  $p(t)$  nicht konstant ist, muss zu den Zeiten der Leistung mit  $p(t) > \bar{P}$  gespeichert und bei  $p(t) < \bar{P}$  aus dem Speicher entnommen werden, da auf der Gleichstromseite konstante Leistung benötigt wird. Das wird in der Praxis am besten mit einem Filter (dargestellt mit L und C als *Saugkreis*) für *doppelte Netzfrequenz* ( $2f_N \ll f_{Takt}$ ) realisiert. (Das Beispiel der FET-Dioden-Schaltung kann nicht voll gesteuert werden, weil auf der Gleichstromseite nur eine Polung möglich ist.<sup>272</sup>)

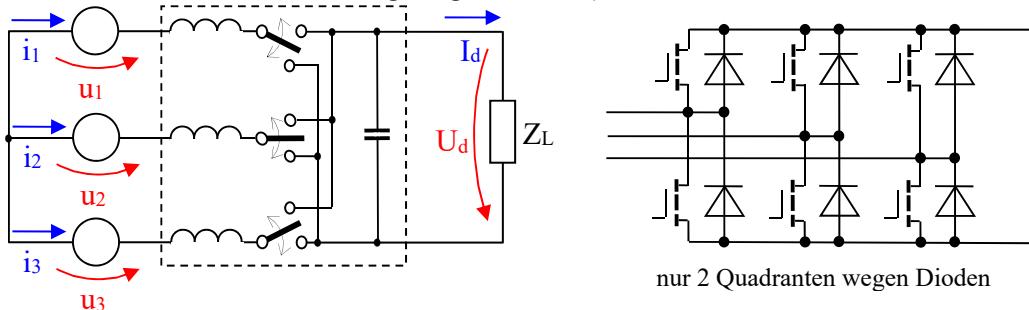


Abb. 20.7: Stromrichterschaltung für Vierquadrantenbetrieb 3 x AC → DC

Die Schaltung in Abb. 20.7 hat *acht Schaltzustände* (davon sind beide Kurzschlüsse elektrisch identisch). Somit kann je nach momentanen  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  für die Lastseite optimal eingespeist werden. Für ein symmetrisches Dreiphasensystem sind  $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = P_d = \text{const}$  und somit ist kein Ausgleich wie bei Wechselstrom erforderlich. (Die als Beispiel dargestellte

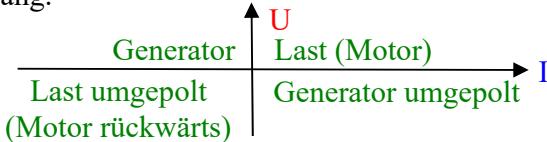
FET-Dioden-Schaltung kann auch hier nicht voll gesteuert werden, weil auf der Gleichstromseite nur eine Polung möglich ist.<sup>272)</sup>

Wenn der Ausgang auch drei Phasen haben soll (Dreiphasendirektumrichter), sind drei Dreifachumschalter anzutragen und es entstehen 27 Schaltzustände (mit 18 vollgesteuerten Ventilen<sup>273)</sup>). Von diesen Schaltzuständen können dann 18 genutzt werden, um eingangsseitig die drei Ströme und ausgangsseitig die drei Spannungen ihren sinusförmigen Sollwerten anzupassen (Boe93 S. 216 ff.).

Die zeitlichen **Umschaltstrategien** für solche Stromrichter (z.B. wie in Abb. 20.6, Abb. 20.7) verbunden mit einer schnellen Regelung (von z.B. Eingangsstrom und Ausgangsspannung) sind sehr komplex. Insbesondere hohe Taktfrequenzen ( $> 20 \text{ kHz}$ ) sowie Anforderungen bezüglich einer schnellen Reaktion auf Veränderungen erfordern für diese Steuerungen eine Echtzeitverarbeitung im Bereich einiger  $\mu\text{s}$ .

**Praxistipp:** Deshalb werden oft nur Varianten mit Zweiquadrantensteuerung und in der Regel sogar ungesteuerte Gleichrichter realisiert.

Vierquadrantenbetrieb zeigt Abb. 20.8 in Abhängigkeit von Strom- und Spannungsrichtung am Ausgang.



**Abb. 20.8: Vierquadrantenbetrieb für einen Stromrichter**

Ist ähnlich wie bei den FET-Dioden-Schaltungen nur eine Spannungs- bzw. Stromrichtung möglich, können z.B. nur die oberen bzw. rechten zwei Quadranten genutzt werden.

Dabei bedeuten die Betriebszustände für den Stromrichter:

- Last – *Gleichrichterbetrieb* AC  $\rightarrow$  DC (ungesteuert, Phasenanschnittsteuerung, sinusförmige Steuerung zusätzlich Strom und Spannung phasengleich)
- Last – *Umrichterbetrieb* bei AC  $\rightarrow$  AC nur gesteuert als Zwischenkreisumrichter oder Direktumrichter realisierbar
- Generator – *Wechselrichterbetrieb* bei DC  $\rightarrow$  AC nur gesteuert möglich, (Phasenanschnittsteuerung, sinusförmige Steuerung)
- Generator – *Umrichterbetrieb* bei AC  $\rightarrow$  AC nur gesteuert als Zwischenkreisumrichter (oder Direktumrichter) realisierbar

Die umgepolte Last und der umgepolte Generator benötigen das Gleiche noch einmal in umgekehrter Richtung oder einen Polaritätsumschalter. Bei Vierquadrantensteuerung (mit vollgesteuerten Ventilen) kann das ein Stromrichter allein durch die entsprechende Steuerstrategie.

Die Bezeichnung bzw. **Einteilung von Stromrichtern** erfolgt nach verschiedenen Gesichtspunkten, die wichtigsten sind:

- Nach der Art der Schaltung
  - Mittelpunktschaltung (2-, 3-Pulsschaltung),
  - Brückenschaltung (4-, 6-, 12-Pulsschaltung),
- Nach der Steuerung
  - ungesteuert,
  - halbgesteuert,
  - vollgesteuert,

<sup>272)</sup> Es sind nicht alle Schaltzustände frei ansteuerbar; die Dioden leiten immer in eine Richtung.

<sup>273)</sup> Die Bezeichnung Ventile ist in der Leistungselektronik für beliebige Schaltelemente üblich.

- Nach der Betriebsart
  - Einquadrantenbetrieb,
  - Zweiquadrantenbetrieb,
  - Vierquadrantenbetrieb,
- Nach dem Löschvorgang
  - netzgelöscht,
  - selbstgelöscht,
- Nach der Art der Ventile
  - ungesteuerte Ventile (Dioden),
  - nur einschaltbare Ventile (Tyristor, Triac),
  - ein- und ausschaltbare Ventile (GTO, Bipolartransistor, Feldeffekttransistor, IGBT),
- Nach der Wirkungsweise
  - Spannungswechselrichter (Abb. 20.8 obere Quadranten),
  - Stromwechselrichter (Abb. 20.8 rechte Quadranten),
- Nach Direkt- oder Zwischenkreisumrichtern.

Zur physikalischen Wirkungsweise der Ventile siehe Abschnitt 12.5, zu den Schaltungen Abb. 12.18 und Aufgabe 12.11.

**Zwischenkreisumrichter** bestehen aus einem Gleichrichter, einem Gleichstromzwischenkreis (z.B. zur Glättung der Gleichspannung) und einem anschließenden Wechselrichter. Der Gleichrichter kann dabei auch ungesteuert ausgeführt werden und Gleich- wie Wechselrichter werden weitgehend unabhängig gesteuert und geregelt.

Bei einem **Direktumrichter** wird in einem Schritt die gesamte Umformung durchgeführt, gesteuert und geregelt. Das wird heute nur in untersynchronen Stromrichterkaskaden realisiert, deren Steuerung eher mit einer Phasenanschnittsteuerung vergleichbar ist und die nur deutlich unter 50 Hz am Ausgang ermöglichen.

**Netzrückwirkungen** durch nichtlineare Ströme bzw. Spannungen wegen der schaltenden Betriebsweise der Stromrichter sowie auftretende Blindleistung müssen immer untersucht und beherrscht werden. Das beginnt schon bei einfachen Diodengleichrichtern. Ziele sind eine hohe Netzqualität und geringe Störungen (EMV-Bestimmungen).

**Praxistipp:** Filter gegen Oberschwingungen, eine sinusförmige Ansteuerung, phasengleiche Steuerung von Strom und Spannung sowie hohe Taktfrequenzen senken die Rückwirkungen.

## 20.1.2 Steueralgorithmen für selbstgesteuerte Stromrichter

Die Ventile eines selbstgesteuerten Stromrichters werden ausschließlich *von der Steuerung gezündet sowie gelöscht*. Die eventuell notwendige Synchronisation mit einem Netz muss dabei vom Steueralgorithmus zusätzlich sichergestellt werden.

### 1. Differenzbandverfahren

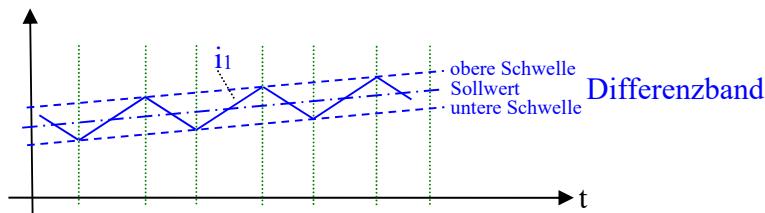


Abb. 20.9: Differenzband zur Steuerung des Stroms

Bei Erreichen der oberen oder unteren Schwelle in Abb. 20.9 muss auf einen anderen Schaltzustand umgeschaltet werden. Das kann z.B. durch einen Komparator ermittelt werden. Folgt der Sollwert des *Differenzbands* z.B. einem *sinusförmigen Sollstrom*, wird der Strom selbst mit den durch die Schwellen vorgegebenen Schwankungen um den Sollstrom *pendeln*.

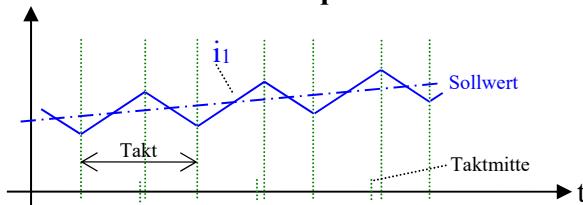
**Vorteile** dieses Verfahrens:

- Die Abweichungen  $\Delta i_1$  sind *unabhängig* von der Last nur durch das Differenzband bestimmt.
- Solange der Stromanstieg, -abfall linear bleibt, entspricht der Mittelwert des Iststromes dem des Sollstromes (über jedes Taktintervall gemittelt).
- Das Verfahren ist relativ einfach realisierbar.

**Nachteile** dieses Verfahrens:

- Die *Taktfrequenz* hängt von der Last ab und ist nicht konstant.
- Demzufolge sind die Störfrequenzen variabel.

## 2. Verfahren mit fester Taktfrequenz



**Abb. 20.10: Feste Taktfrequenz mit Pulsbreitenmodulation zur Steuerung des Stroms**

Der *Anstieg* des Stroms in Abb. 20.10 beginnt immer mit Taktbeginn. Der Umschaltzeitpunkt muss aus dem Mittelwert des Sollstromes für jeden aktuellen Takt *vorauskalkuliert* werden. Das kann z.B. näherungsweise durch ein Dreiecksverfahren geschehen oder durch eine (aber langsamere) übergeordnete Stromregelung<sup>274</sup>. Folgt der Sollwert z.B. einem *sinusförmigen Sollstrom*, wird der Strom selbst verfahrensbedingt um den Sollstrom *pendeln*.

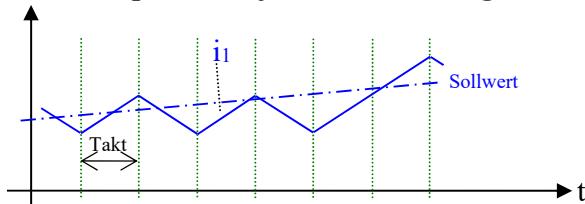
**Vorteile** dieses Verfahrens:

- Die Taktfrequenz hängt nicht von der Belastung ab und ist konstant.
- Demzufolge sind die Störfrequenzen vorgegeben.
- Solange der Stromanstieg, -abfall linear bleibt, entspricht der Mittelwert des Iststromes dem des Sollstromes (über jedes Taktintervall gemittelt).

**Nachteile** dieses Verfahrens:

- Die *Abweichungen*  $\Delta i_1$  sind von der Last *abhängig*.
- Das Verfahren benötigt schnelle Berechnungen oder eine übergeordnete Regelung.

## 3. Feste Taktfrequenz für jede Umschaltung



**Abb. 20.11: Feste Taktfrequenz zur Steuerung des Stroms**

Für den Strom in Abb. 20.11 wird *bei jedem Taktbeginn* entschieden, ob der Anstieg/Abfall *fortgesetzt* werden muss *oder* ob das Gegenteil benötigt wird. Die Entscheidung erfolgt danach, ob der Sollstrom über-/unterschritten wurde oder noch nicht. Das kann durch einen

<sup>274</sup> Da Messung und Regelung für Mittelwerte erfolgen, ist diese Regelung nur anwendbar, wenn eine quasistationäre Regelung möglich ist.

Komparator geschehen. Folgt der Sollwert z.B. einem *sinusförmigen Sollstrom*, wird der *Strom* selbst mit verfahrensbedingten Schwankungen um den Sollstrom *pendeln*.

**Vorteile** dieses Verfahrens: Die *Taktfrequenz* hängt nicht von der Belastung ab und ist *konstant*.

Demzufolge sind die Störfrequenzen vorgegeben.

Das Verfahren ist relativ einfach realisierbar.

**Nachteile** dieses Verfahrens: Die *Abweichungen  $\Delta i_1$*  sind von der Last *abhängig*.

Der Mittelwert des Iststromes entspricht nur im Mittel über viele Takte dem Sollstrom.

Die dargestellten Verfahren zeigen, dass eine *exakte Regelung auf einen Sollwert* (etwa im Sinne eines PI-Reglers) mit einem Stromrichter nicht möglich ist. Als Regler (z.B. zur Regelung einer Last) kann der Stromrichter zu den **strukturumschaltenden Reglern** gerechnet werden. Mit einer entsprechenden Regel- und Schaltstrategie kann aber der Istwert so geregelt werden, dass er *eng um den Sollwert pendelt* (siehe auch Abschnitt 17.1.3). Das heißt aber auch, dass bei *Ausfall* des Reglers oder der Steuerung der Ventile der gerade aktuelle Zustand weiterläuft und im ungünstigen Fall der Strom bis zur *Zerstörung* ansteigt.

Durch Mittelwertbildung über einen *quasistationären* Zeitraum können die Verfahren der linearen Regelungstechnik genutzt werden.

**Praxistipp:** Zur Regelung für die Last an einem DC-DC-Wandler ist dann z.B. eine *Spannungsregelung* (PI-Regler) für konstante Ausgangsspannung mit einer *unterlagerten Eingangsstromregelung*, deren Sollwert die Spannungsregelung liefert, zu realisieren.

### 20.1.3 Steueralgorithmen für fremdgesteuerte Stromrichter

Die Ventile eines fremdgesteuerten Stromrichters werden zumindest *vom Nulldurchgang des Netzes gelöscht*. Die notwendige Synchronisation mit dem Netz erfolgt somit zwangsläufig.

Diese netzgelöschten Stromrichter sind für Wechsel- und Drehstrom nutzbar und benötigen nur eine Ansteuerung zum Zünden der Ventile. Die Einflussnahme beschränkt sich somit auf die Festlegung des Zündzeitpunkts. Auch der ungesteuerte Gleichrichter, der sofort nach dem Nulldurchgang von selbst leitend wird (zündet), gehört zu den fremdgesteuerten Stromrichtern.

#### Zündzeitpunkt nach der Phasenanschnittsteuerung

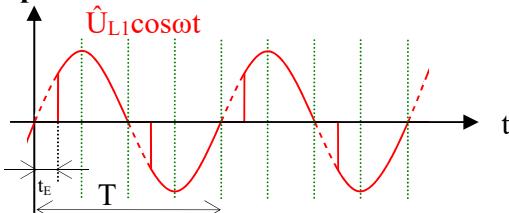


Abb. 20.12: Prinzip der Phasenanschnittsteuerung

Die Ventile werden entsprechend Abb. 20.12 zu  $t_E$  nach einem Nulldurchgang gezündet und vom *Nulldurchgang des Ventilstromes automatisch gelöscht*. Die Festlegung von  $t_E$  erfolgt z.B. durch eine Zeitverzögerung mit einem Timerbaustein oder einfacher durch das Aufladen eines Kondensators nach dem Nulldurchgang.

**Vorteile** dieses Verfahrens: Es erfolgt eine einfache natürliche *Synchronisation* auf die Netzfrequenz.

Das Verfahren ist sehr *einfach* realisierbar.

*Nachteile* dieses Verfahrens: Nur ein Einschalten pro Netzhälbwelle ermöglicht *keine Sinusform* von Strom und Spannung.  
Die nichtsinusförmigen Schwingungen ergeben *viele Störungen* mit einer größeren Anzahl von Oberschwingungen der Netzfrequenz.  
Bei *Netzausfall ist kein Betrieb* möglich.

Wenn im Stromkreis *Induktivitäten* (bzw. Kapazitäten) liegen, wird bei Stromnulldurchgang gelöscht<sup>275</sup>. Dieser stimmt in solchen Fällen *nicht* mit dem *Spannungsnulldurchgang* überein. Außerdem kann nur gezündet werden, wenn das betreffende Ventil aufgrund der momentanen Spannungsverhältnisse Strom führen kann. Zusätzlich sind Freiwerdezeiten der Ventile zu beachten.

In der Regel wird ein netzgelöschter Wechselrichter als *Stromwechselrichter* gebaut, dann übernimmt immer das folgende Ventil den Strom und die Freilaufdioden entfallen.

**Praxistipp:** Wird ein netzgelöschter Stromrichter als Stellglied oder Regler eingesetzt, muss allein die Beeinflussung des Zündzeitpunktes ausreichen.

## 20.1.4 Kennwerte und Übungsaufgaben

Kennwerte von Stromrichtern können sein:

$U_N$  Eingang<sup>276</sup>,  $U_N$  Ausgang,  
 $P_N$ ,  $P_{Max}$ ,  
 $I_{Ausgang\ Max}$ ,  
 $\eta$ ,  
 $f^{276}$ ,  $\cos\varphi$  (bei AC zusätzlich) und  
Sinusform oder nur Blockform, Oberschwingungsanteile oder Störungen,  
 $f_{Takt}$ , wenn selbstgesteuert

### Aufgabe 20.1

Die in Abb. 20.12 dargestellte Phasenanschnittsteuerung soll für  $\hat{U} = 325$  V,  $f = 50$  Hz und  $t_E = 3$  ms, 5 ms und 8 ms durchgeführt werden.

Frage: Wie sehen für rein Ohm'sche Last mit  $R = 100 \Omega$  die Ströme aus?

Zusatzfrage: Wie sehen die Ströme qualitativ für eine Reihenschaltung von L und R aus?

### Aufgabe 20.2

Ein DC-DC-Wandler mit einer Eingangsspannung von 18 V soll eine mittlere Spannung von 13,5 V abgeben (Schaltung analog zu Abb. 20.3, rechts, aber mit realer Spannungsquelle und so 18 V am Kondensator). Bei fester Taktfrequenz nach Abb. 20.10 ist der Spannungsanstieg bei der Taktfrequenz von  $f_T = 20$  kHz in guter Näherung konstant ( $\rightarrow$  Gerade).

Frage: Wie groß muss das Tastverhältnis sein und wie groß wird  $t_E$  bei  $f_T$ ?

<sup>275</sup> Nicht abschaltbare Ventile (z.B. Triacs) verlieren ihre Leitfähigkeit nur, wenn ihr Strom null wird.

<sup>276</sup> Hierbei sind auch „von - bis“ Angaben möglich.

## 20.2 Beispiele für Stromrichter

### 20.2.1 Phasenanschnittsteuerung für Wechselstromsteller

Für Anwendungen im Kleinleistungsreich (Haushalt, Heimwerkzeug u.ä.) werden zur Leistungsstellung (Dimmer für eine Lichtregelung, Drehzahlstellung von Universalmotoren z.B. bei Küchengeräten, Staubsaugern, Bohrmaschinen usw.) Wechselstromsteller mit Phasenanschnittsteuerung eingesetzt.

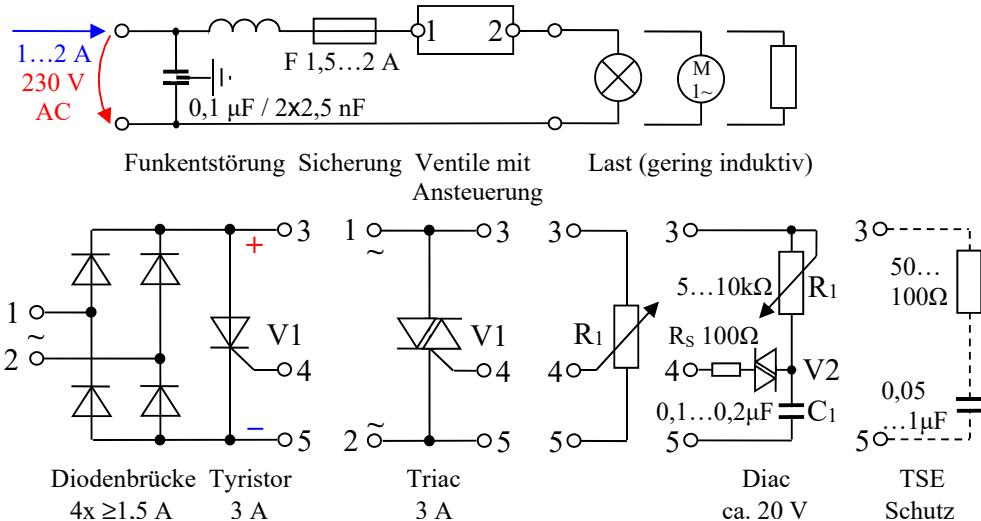


Abb. 20.13: Wechselstromsteller mit Phasenanschnittsteuerung

Diese Wechselstromsteller können die Spannung etwa von 20 bis 220 V (bei 230 V Netzsspannung) stellen und somit die Leistung der Geräte beeinflussen. Als Wechselstromsteller sollen positive und negative Halbwellen behandelt werden. Ein Thyristor, der nur eine Richtung zulässt, muss deshalb durch eine Gleichrichterbrücke ergänzt werden. Heute werden *Triacs* verwendet, die beide Richtungen ermöglichen. Vom Prinzip her werden für die Eingangssseite der *erste und dritte Quadrant* in Abb. 20.8, aber für die Gleichstromseite (bei der Thyristorvariante sichtbar) ein *Einquadrantenbetrieb* realisiert.

Die Einstellung des Zündzeitpunktes erfolgt im einfachsten Fall durch ein Potentiometer. Dabei wird ausgenutzt, dass ein Thyristor oder Triac bei einem bestimmten Gatestrom zündet. Wenn das Ventil noch nicht gezündet hat, liegt die volle Spannung über dem Ventil und steigt nach der Sinusfunktion an. Je nach Potentiometerstellung wird der notwendige Gatestrom früher oder später erreicht. Der Stellbereich und die Stabilität für diese einfache Variante ist nicht sehr gut (maximal bis 90°). Wird das Potentiometer höher eingestellt, flackert z.B. das Licht, sodass diese Schaltung kaum genutzt wird. Besser ist die *Variante mit Kondensatoraufladung und Diac*, der bei einer gegebenen Spannung von selbst zündet und den Kondensator (zwischen Katode und Gate, mit „+“ am Gate) über das Gate entlädt. Der Widerstand  $R_S$  dient dabei zur Strombegrenzung und somit zum Schutz des Gates. Mit dieser Variante wird ein guter Stellbereich etwa von der Zündspannung des Gates bis kurz vor 180° erreicht. Ein kleiner Sicherheitsabstand soll verhindern, dass die Zündung erst zur nächsten Halbwelle erfolgt und ebenfalls ein Flackern auftritt. Der Stellbereich kann aber mit dem Potentiometer (wegen der nicht konstanten Spannung) nur nicht linear verändert werden. Deshalb werden bei wichtigen Anlagen auch *Timerschaltkreise* eingesetzt.

Bei *induktiver Last* (z.B. schon bei einem Universalmotor) wird der Strom auch nach dem Spannungsnulldurchgang etwas weiterfließen, sodass bei Stromnulldurchgang ein schneller Spannungsanstieg möglich ist. Das kann zu einem Trägerstaueffekt im Thyristor bzw. Triac führen, wenn die Zeit nicht reicht, dass alle Ladungsträger aus der Gateschicht abfließen. Zur

Unterdrückung dieses Effekts ist die *TSE-Beschaltung* (C und R parallel zum Ventil) erprobt worden.

Zusätzlich sind unbedingt eine *Funkentstörung* (sonst wirken sich die Störungen bis mindestens in den UKW-Bereich aus) und eine *flinke Sicherung* zum Schutz der Ventile vorzusehen. Die Ventile können z.B. den Kurzschlussstrom einer defekten Last nicht bewältigen, bis eine normale Sicherung anspricht.

### 20.2.2 Messungen an einem Dimmer mit Phasenanschnitt

Die Arbeitsweise eines Dimmers mit Phasenanschnitt soll verdeutlicht werden.

#### Versuchsaufbau:

Anschluss des Dimmers (z.B. handelsübliche Unterputzausführung) und eines Oszilloskops über einen zusätzlichen Anschlusskasten (bei dessen Bau Sicherheitsvorschriften beachten!).

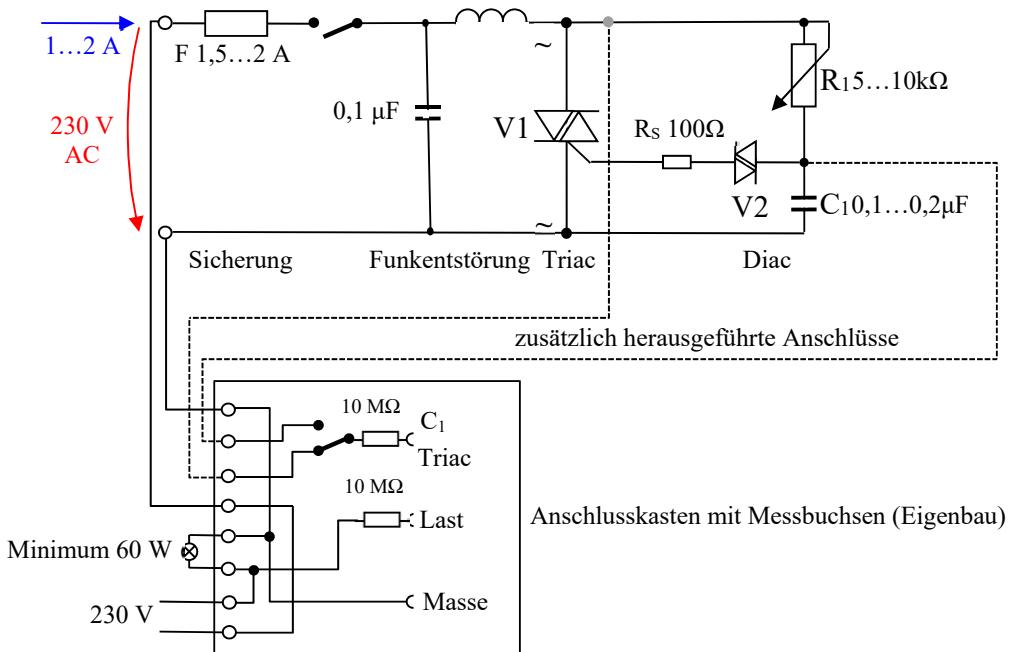


Abb. 20.14: Schaltung für den Versuchsaufbau

#### Versuchsdurchführung:

1. Öffnen des Dimmers zum Aufnehmen seiner Schaltung (nur dazu und spannungsfrei)
2. Inbetriebnahme und Funktionsprobe
3. Darstellen der Spannung an der Last (Glühlampe) in Abhängigkeit vom Zündwinkel  $\alpha$
4. Darstellen und Vergleich der Spannung am Thyristor in Abhängigkeit vom Zündwinkel
5. Darstellen der Spannung am Kondensator der Zeitsteuerung

#### Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

Der Phasenanschnitt ist gut zu erkennen und die Funktionsweise nachzuvollziehen.

### 20.2.3 Mit Frequenzumrichter gesteuerter Asynchronmotor

Frequenzumrichter für Asynchronantriebe sind in einem weiten Leistungsbereich verfügbar. Sie besitzen eine eigene Mikrorechnersteuerung. Ihr Ausgangstrom wird sinusförmig

moduliert mit Taktfrequenzen meist über 20 kHz. Für kleine Leistungen (ca. bis 2 kW) ist oft ein einphasiger Eingang trotz dreiphasigem Ausgang vorhanden. Mit dazugehöriger Software werden sie über eine Schnittstelle vom PC aus konfiguriert und gegebenenfalls gesteuert. Für den Betrieb stehen in der Regel neben der Frequenzsteuerung

- eine U/f-Abhängigkeit<sup>277</sup> für die Ausgangsspannungen oder
- eine Vektorsteuerung (vergleichbar mit einer Differenzbandsteuerung für alle drei Phasen mit der Möglichkeit einer lastabhängigen Regelung<sup>278</sup>)

zur Verfügung.

Zusätzlich sind Überlastsicherungen mit Strom- und Temperaturüberwachung vorhanden.

**Praxistipp:** Die Anwendung ist recht unkompliziert. Messungen im Inneren des Frequenzumrichters sind aus Sicherheitsgründen nicht möglich. Die gut geglätteten Ströme und Spannungen ( $f_T > 20$  kHz) außen zeigen nicht mehr als die dazugehörende Software.

## 20.2.4 Netzgelöschter Wechselrichter

Ein **Stromwechselrichter** nach Abb. 20.15 gestattet nur eine Stromrichtung durch die Ventile und somit auf der Gleichstromseite (vergleiche (Heu91 S. 116 ff) und (Mic92 S. 104 ff, 133)). Da immer das nächste Ventil den Strom übernimmt, werden keine Freilaufdioden benötigt. Bei der Untersuchung der Funktionsweise wird zur Vereinfachung die Induktivität  $L_d$  so groß angenommen, dass der Strom  $I_d$  völlig konstant bleibt. (In der Praxis wird er etwas ansteigen und abnehmen.)

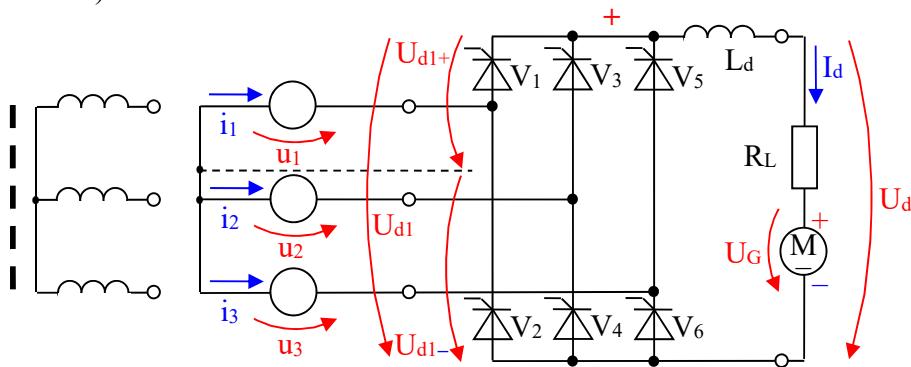
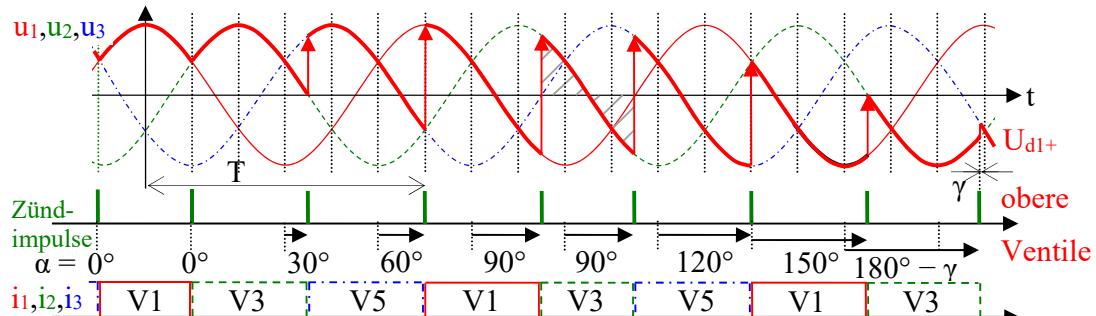


Abb. 20.15: Netzgeführter Gleich- und Wechselrichter (Zweiquadrantenbetrieb)

Das nachfolgende Ventil bei „+“ kann nur den Strom übernehmen, wenn seine Phase zu diesem Zeitpunkt eine höhere positive Spannung hat (z.B. bei  $t = T/6$  wird  $u_2 > u_1 = U_{d1+}$ ), sodass nach seinem Zünden am bisherigen Ventil eine negative Spannung anliegt und dasselbe gelöscht wird. Das zeigen die Pfeile in Abb. 20.16.

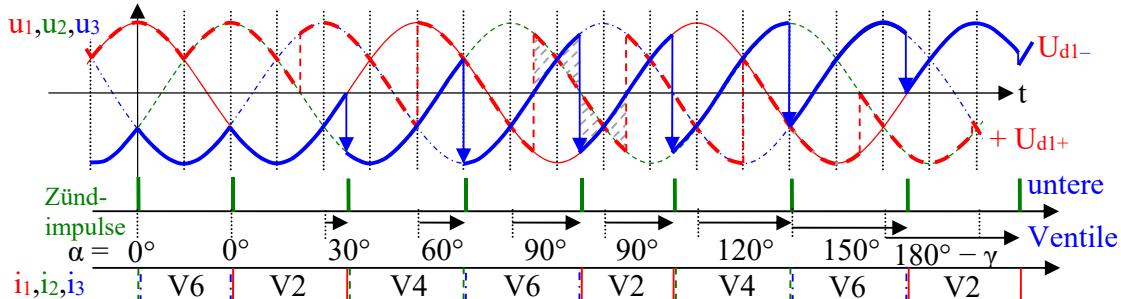
<sup>277</sup> Der Strom der Wicklungen wird ca.  $U/\omega L$ , sodass die Spannung entsprechend verringert werden muss, damit  $I_N$  nicht überschritten wird.

<sup>278</sup> Die Regelung und Pulsmustersteuerung erfolgt mit Algorithmen, die Raumzeiger verwenden. Die Bezeichnung der Steuerung variiert von „prädiktiver Stromsteuerung“ über „Modellführungsverfahren“ bis „Vektorsteuerung“.

Abb. 20.16: Spannung  $U_{d1+}$  und Strom in Abhängigkeit vom Zündwinkel  $\alpha$ 

Besonders kritisch ist das Löschen bei  $\alpha = 180^\circ$ , wo zur Sicherheit um den *Löschwinkel*  $\gamma$  vorher gezündet werden muss, damit bei  $180^\circ$  das Ventil sicher gelöscht ist, bevor das nächste Ventil nicht mehr höher positiv ist.

Bei kleiner Zündverzögerung werden zu  $U_{d1+}$  genau die jeweiligen Maxima der drei Phasen durchgeschaltet, die Energie liefert die Dreiphasenspannungsquelle und die Gleichspannungsquelle fungiert als Senke (Motor). Für eine Zündverzögerung  $> 30^\circ$  geht die Spannung etwas ins Negative. Sie ist gerade gleich viel im Positiven wie im Negativen bei genau  $90^\circ$  mit dem Mittelwert null (siehe Schraffur). Dabei wird jetzt die Energie zwischen Dreiphasen- und Gleichspannungsquelle hin- und hergespeichert. Trotz gleichbleibender Stromrichtung wird die Spannung  $U_{d1+}$  für eine Zündverzögerung  $> 90^\circ$  im Mittel negativ und hat bei  $180^\circ - \gamma$  den größten negativen Mittelwert. Dabei muss die Energie von der Gleichspannungsquelle geliefert werden und die Dreiphasenspannungsquelle fungiert als Senke (vergleiche Gleichstrommaschine im 1. und 4. Quadranten<sup>279</sup>, Abb. 19.4). Das entspricht z.B. bei einem Elektrofahrzeug dem Rückspeisen der Energie beim Generatorbremsen.

Abb. 20.17: Spannung  $U_{d1-}$  und Strom in Abhängigkeit vom Zündwinkel  $\alpha$ 

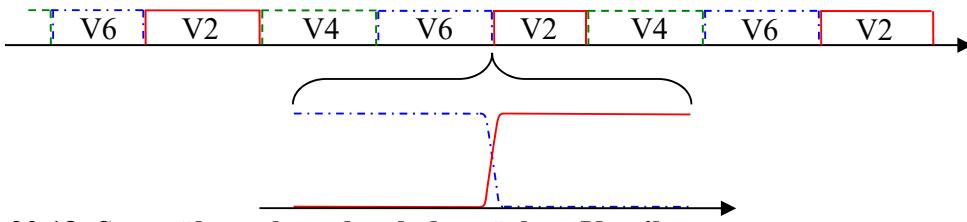
Die Spannung und den Strom bei  $U_{d1-}$  zeigt Abb. 20.17. Hier kann das nächste Ventil nur den Strom übernehmen, wenn die Spannung seiner Phase stärker negativ ist.

Zur Verdeutlichung ist neben der Spannung  $U_{d1-}$  die Spannung bei  $U_{d1+}$  gestrichelt eingezeichnet. Die Spannung zwischen „+“ und „-“ ist zu jedem Zeitpunkt  $U_{d1} = U_{d1+} + U_{d1-}$  (bei  $90^\circ$  wieder der schraffierte Bereich, der im Mittel null ergibt).

**Praxistipp:** Es ist deutlich erkennbar, wie die Spannung  $U_{d1}$  mit Vergrößerung der Zündverzögerung im Mittel kleiner, dann null und danach zunehmend negativ wird.

Den Spannungsunterschied zwischen  $U_{d1}$  und  $U_d$  muss die *Induktivität* tragen. Der Strom wird somit (wenn auch bei einer großen Induktivität gering) wegen  $Ldi/dt$  zu- bzw. abnehmen. Die Induktivität wirkt damit als Speicher für die Mittelwertbildung. Wenn der Strom fast konstant ist, ist auch  $R_L I_d$  und somit  $U_d$  fast konstant.

<sup>279</sup> Kennlinie mit Drehrichtungsumkehr bedeutet, dass der 3. zum 4. und der 1. zum 3. Quadranten wird.



**Abb. 20.18: Stromübernahme durch das nächste Ventil**

Die *Stromübernahme* geschieht in der Praxis innerhalb einiger  $\mu\text{s}$  (siehe Abb. 20.18). Dabei wird das vorhergehende Ventil gelöscht (alle Ladungsträger aus der Gateschicht entfernt) und das neue wird über die ganze Fläche vollständig leitend.

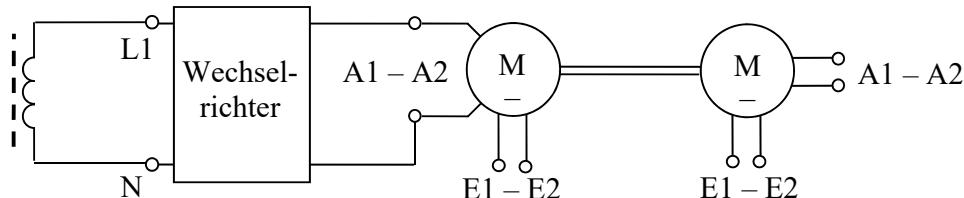
Nur wenn  $\gamma$  zu klein gewählt wurde, reicht die Zeit nicht zum vollständigen Löschen und der Thyristor zündet kurz danach bei positiver Spannung wieder durch. Dann sind nach kurzer Zeit gegenüberliegende Thyristoren leitend, was zum Kurzschluss von  $U_d$  führt. Das sogenannte *Kippen des Wechselrichters* kann schwere Schäden verursachen.

### 20.2.5 Messen an einem netzgelöschten Wechselrichter

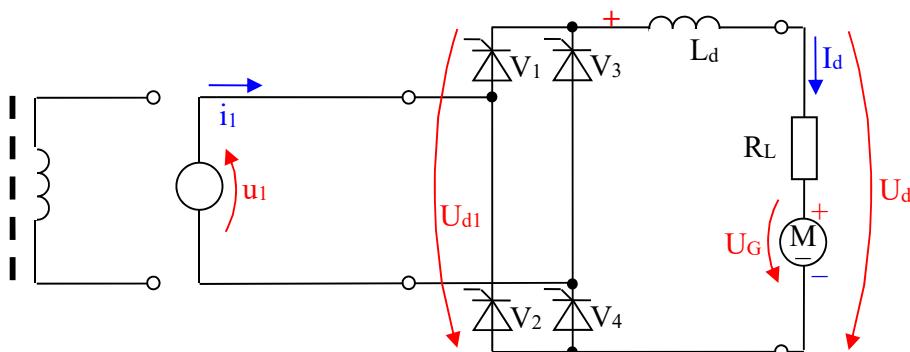
Der netzgelöschte Wechselrichter kann als das am einfachsten handhabbare Beispiel eines Wechselrichters untersucht werden.

#### Versuchsaufbau:

Von einem Maschinensatz (Abb. 20.19) mit Antriebsmaschine (Gleichstrommotor/-generator) und Stromerzeuger (Gleichstromgenerator /-motor) soll mit einem Wechselrichter (Abb. 20.20) Energie in ein Wechselstromnetz eingespeist werden. Dazu ist eine Messschaltung zur Messung von Wirk-, Scheinleistung ( $U_{\text{eff}}$  und  $I_{\text{eff}}$ ),  $U_d$ ,  $I_d$  und  $\cos\varphi$  zu erarbeiten und aufzubauen.



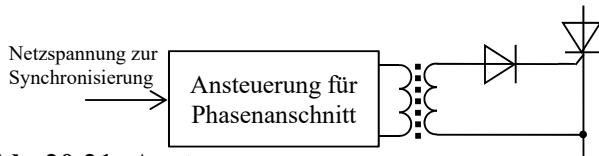
**Abb. 20.19: Netztrenntrafo, Wechselrichter und Maschinensatz**



**Abb. 20.20: Einphasenstromwechselrichter für Zweiquadrantenbetrieb**

Da die Katoden auf verschiedenen Potentialen liegen, muss in der Praxis die Ansteuerung zwischen Katode und Gate mit Impulsübertragern galvanisch getrennt werden (Abb. 20.21).

Eine Ansteuerung für die Impulse zum Phasenanschnitt sollte vorbereitet sein.

**Abb. 20.21: Ansteuerung**

Hinweis: Bei relativ kleinen Leistungen ( $< 200 \text{ W}$ ) muss zur Phasenmessung und zur Darstellung von Strömen und Spannungen ein Oszilloskop mit potentialfreien Eingängen und für den Strom einen Shunt mit ca.  $1 \Omega$  eingesetzt werden.

#### **Versuchsdurchführung:**

Mit dem Wechselrichter sind

1. der Gleichrichterbetrieb mit  $\alpha = 0^\circ$  bis  $90^\circ$  (Motorbetrieb mit Leistungsentnahme aus dem Wechselstromnetz) und
2. der Wechselrichterbetrieb mit  $\alpha = 90^\circ$  bis  $180^\circ - \gamma$  (Einspeisen von Leistung des Gleichstromgenerators ins Wechselstromnetz)

zu untersuchen und zu demonstrieren.

Eine kompetente fachliche Anleitung ist für den Versuch erforderlich!

#### **Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:**

Die in Abschnitt 20.2.4 erläuterten Verhältnisse können – übertragen auf einen Einphasenbetrieb – gut nachvollzogen werden.

## **20.3 Entwicklungstrends**

Entwicklungsziele sind kleinere Baugrößen, höherer Wirkungsgrad und bessere Netzqualität.

Dem dienen:

- Integration mehrerer Ventile und von Teilen der Steuerung in leistungselektronische Module,
- Erhöhung der Taktfrequenz, damit Verkleinerung von Induktivitäten,
- Weiterentwicklung abschaltbarer Ventile, insbesondere geringere Verluste, höhere Durchlassströme und höhere Sperrspannungen,
- Übergang zu neuen Halbleitermaterialien, insbesondere zu Siliciumkarbid (SiC) und Galliumnitrit (GaN) für Dioden und Leistungsfeldeffekttransistoren,
- Arbeiten an verbesserten Schaltungsdetails entsprechend der Anforderungen von den Anwendungen.

Daneben erfolgt außer der Weiterentwicklung bestehender die Erschließung immer neuer Anwendungen. Es geht z.B. um

- Verbesserungen der Wechselrichter in der Fotovoltaik,
- den Einsatz für doppeltgespeiste Asynchronmaschinen bei Windkraftanlagen,
- den Einsatz für neue Strecken zur Hochspannungsgleichstromübertragung,
- Lösungen für die Energiespeicherung mit Akkumulatoren,
- Verbesserungen der Steuerungen von leistungsstarken LED-Beleuchtungen.

## 21 Kurzes Fazit zur Arbeit im Beruf

Bei der Bearbeitung beruflicher Arbeitsprozesse sind vielfältige Aufgaben zu lösen, die außerhalb des engeren Fachgebietes und insbesondere der Anwendung deren theoretischen Kenntnisse liegen. Geschäfts- und Arbeitsprozesse müssen vom ersten Kundenkontakt bis zur Auftragsübergabe (und darüber hinaus) alle Arbeiten abdecken (vergleiche dazu z.B. (Häg02)). Das gilt (evtl. etwas abgeschwächt) auch, wenn in größeren Betrieben Geschäfts- und Arbeitsprozesse arbeitsteilig erfolgen. Hier kommt der eingangs erwähnte interdisziplinäre Charakter (siehe Kapitel 1) zur Geltung.

Schon die (etwas enger gefasste) Aufgabe zur Entwicklung einer einfachen Anwendung erfordert zuerst Klarheit über die zu erreichen und evtl. zusätzlich angestrebten Ziele, eine Einbeziehung notwendiger Anwendungsbedingungen und einen Vergleich mit den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten. In der Ingenieurstätigkeit wird dafür ein entsprechendes Vorgehen verwendet (z. B. die Methodik zum Entwickeln und Konstruieren technischer Systeme und Produkte nach der Richtlinie VDI 2221 oder nach dem Vorgehensmodell im System Engineering, wie z.B. in (Hab12) dargestellt).

Genau diese Gedanken und Probleme sind aber eine entscheidende Herausforderung an die unmittelbaren Fachkenntnisse zur Nutzung des vorhandenen Gestaltungsspielraums, um optimale Lösungen trotz der vielfältigen Anforderungen zu finden. Entscheidungen bei diesem Vorgehen erfordern exakte Kenntnisse (in unserem Fall) der elektrotechnischen Zusammenhänge. Oft sind dazu die Fachkenntnisse zu erweitern bzw. neue Anwendungsgebiete zu erschließen.

Die in diesem Lehrbuch aufgezeigten theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik mit ihren Anwendungen werden in der Facharbeit sowie der Ingenieurstätigkeit bei der täglichen Arbeit ständig angewandt. Deshalb werden z.B. in den Rahmenlehrplänen des Berufsschulunterrichts für die berufliche Facharbeit der Elektroberufe entsprechende Aufgabenbereiche häufig genannt. Diese sind in Tabelle 21.1 mit ihren Referenzen zu den relevanten Abschnitten dieses Buches aufgelistet.

In der gewerblich-technischen Berufsausbildung (insbesondere in der Fachrichtung Elektrotechnik) hat sich der Einsatz **technischer Lernsysteme** zur Förderung fachlicher Handlungskompetenzen etabliert. Im Rahmen des arbeitsprozessorientierten Berufsschulunterrichts sollen diese Lernsysteme die Durchführung von realitätsnahen Arbeitsprozessen ermöglichen und zugleich elektrotechnisches Wissen, wie es in diesem Buch beschrieben wird, fördern und herausbilden.

Für die Entwicklung und den Einsatz solcher technischen Lernsysteme sind dabei vielseitige didaktische Überlegungen, aber auch ein genaues Verständnis der beruflichen Aufgaben sowie der elektrotechnischen Grundlagen notwendig. In (Kal15) wird ein Vorgehensmodell entwickelt, das diese Anforderungen vereint und eine Handlungsempfehlung für Lehrkräfte und Ausbilder gibt.

<b>Lernfeld</b>	<b>Abschnitt</b>
Elektrotechnische Anlagen planen, installieren, ausführen und in Betrieb nehmen	4, 5, 6, 9
Elektroenergieversorgung und Sicherheit von Betriebsmitteln gewährleisten	4, 5, 6, 9
Elektrotechnische Systeme, Anlagen und Geräte analysieren und prüfen	4, 5, 6, 9
Steuerungen für Anlagen analysieren und anpassen, programmieren und realisieren	15, 17
Antriebssysteme auswählen und integrieren	4, 6, 9, 19, 20
Automatisierte Anlagen planen, installieren, in Betrieb nehmen und instand halten	15, 17
Informationstechnische Systeme bereitstellen	15
Kommunikationssysteme planen und realisieren	11, 15, 16
Elektronische Baugruppen und Bauelemente von Geräten analysieren, konzipieren, herstellen, konfigurieren und prüfen	5, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 20
Signalverarbeitungsvorgänge in Einrichtungen der Informationstechnik darstellen und erfassen	5, 6, 9, 11, 12, 13, 15, 16

**Tabelle 21.1: Zusammenhang Lernfelder – Abschnitte**

Auch bei der Arbeit in Ingenieurteams sollten z.B. Aufgaben und Vorstellungen unterschiedlicher Fachgebiete, dazu notwendige Begriffe und Strukturen bekannt sein und verstanden werden, um miteinander fachübergreifend tätig sein zu können.

Für die zielgerichtete Erarbeitung relevanter theoretischer Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik – im Hinblick auf die Analyse realer elektrotechnischer (Arbeits-)Prozesse – ist dieses Buch mit vielen Bezügen zu typischen Anwendungsfällen bestimmt.

# 22 Lösungen der Übungsaufgaben

## 22.1 Lösungen zu Abschnitt 4

### Zu Aufgabe 4.1

Frage 1: Der Strom ist  $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{t}$  für  $\frac{dQ}{dt} = \text{const}$  in t und die Gesamtladung ist  $Q = N \cdot q_0$ .

$$Q = I \cdot t \rightarrow Q = 1 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{3600 \text{ As}}}$$

$$N = Q/q_0 = 3600 \text{ As}/(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}) = \underline{\underline{2,25 \cdot 10^{22}}} \text{ Elektronen}$$

Frage 2: In  $1\text{cm}^3$  können so viele Elektronen zur Leitung beitragen, wie es Atome gibt.

$$n = \frac{\gamma}{m_{cu}} \quad \text{und} \quad \rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{Q}{V} = nq_0 \quad \text{für } \frac{dQ}{dV} = \text{const}$$

$$n = \frac{\gamma}{m_{cu}} = \frac{8,93 \text{ g/cm}^3}{106 \cdot 10^{-24} \text{ g}} = \underline{\underline{8,42453 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}}}$$

$$\rho = n q_0 = 8,42453 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} = \underline{\underline{13,5 \text{ As/mm}^3}}$$

Frage 3: Die Stromdichte war  $S = \frac{dI}{dA_\perp} = \frac{I}{A_\perp}$  für  $\frac{dI}{dA_\perp} = \text{const}$  über  $A_\perp$

$$S = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{1 \text{ A/mm}^2}}$$

Frage 4: Die Geschwindigkeit ist Weg pro Zeit. Dabei ist der Weg gleich Volumen des Leiters geteilt durch die Querschnittsfläche. Das Volumen muss genau die Anzahl Elektronen N enthalten, die der Strom in der gegebenen Zeit t benötigt.

Die Elektronen dieses Volumens müssen genau einmal durch die Querschnittsfläche fließen.

$$V = \frac{N}{n} = \frac{2,25 \cdot 10^{22}}{8,42453 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}} = 0,267 \text{ cm}^3$$

$$l_L = \frac{V}{A_\perp} = \frac{267 \text{ mm}^3}{1 \text{ mm}^2} = 267,08 \text{ mm}$$

$$v_d = \frac{l_L}{t} = \frac{267,08 \text{ mm}}{3600 \text{ s}} = \underline{\underline{0,074 \text{ mm/s} \approx 0,1 \text{ mm/s}}}$$

Oder aus  $S = v_d \rho$ :

$$v_d = \frac{S}{\rho} = \frac{1 \text{ A mm}^{-2}}{13,5 \text{ As/mm}^3} = \underline{\underline{0,074 \text{ mm/s} \approx 0,1 \text{ mm/s}}}$$

Dieses sind alltägliche Größenordnungen. Beachte:

- Es sind von der Größenordnung her ca.  $10^{22}$  Elektronen beteiligt.
- Diese bewegen sich für den Strom mit der winzigen Driftgeschwindigkeit  $\approx 0,1 \text{ mm/s}$ .
- Sie schieben sich aber durch die Kraftwirkungen ihrer Felder gegenseitig mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit des Stromes entsprechend der Lichtgeschwindigkeit des Mediums vorwärts. Dadurch kommt praktisch sofort der gesamte Stromkreis in Bewegung.
- Als zulässige Stromdichte bei Hausinstallationen wird  $6 \text{ A/mm}^2$  angesehen. Damit wären  $10 \text{ A}$  (und so die Driftgeschwindigkeit  $\approx 1 \text{ mm/s}$ ) schon zu viel für  $1 \text{ mm}^2$ .

**Zu Aufgabe 4.2**

Frage 1:  $S = \text{const}$  über  $A_{\perp}$  (der Fläche eines halben Zylinders des versunkenen Leiters)

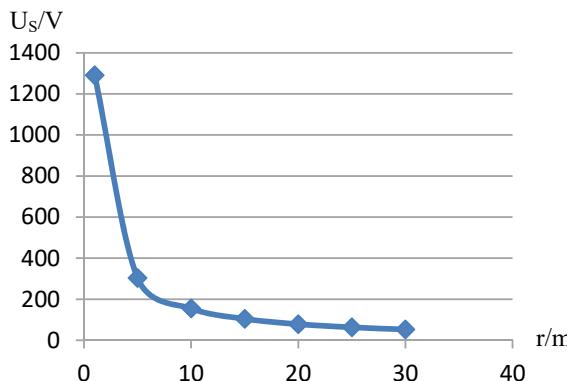
$$A_{\perp}(r) = \frac{2\pi r l}{2} = \pi r \cdot 1 \text{ m} = 314,15 \text{ cm} \cdot r.$$

$$S(r) = \frac{I}{A_{\perp}(r)} = \frac{100 \text{ A}}{3,1415 \text{ m} \cdot r} = \underline{\underline{31,8 \text{ A/m}}}; E(r) = \frac{S(r)}{\kappa_{\text{Erde}}} = \frac{31,8 \text{ A/m}}{r \cdot 10^{-2} \text{ A/Vm}} = \underline{\underline{\frac{3180 \text{ V}}{r}}}$$

Frage 2: Die Schrittspannung kommt durch die unterschiedlichen Potentiale zwischen den beiden Füßen zustande. Sie ist in diesem Fall gegeben durch:

$$U_s = \int_{r_l}^{r_l+0,5\text{m}} E(r) dr = 3180 \text{ V} \int_{r_l}^{r_l+0,5\text{m}} \frac{dr}{r} = 3180 \text{ V} \cdot \ln\left(\frac{r_l + 0,5 \text{ m}}{r_l}\right).$$

Abstand in m	1	5	10	15	20	25	30
Schrittspannung in V	1290,635	303,381	155,303	104,373	78,599	63,033	52,561



Die Schrittspannung beträgt über 1000 V und wird erst in einer Entfernung über 30 m kleiner als 50 V. Wenn man sich zufällig näher befindet, besteht nur die Möglichkeit, mit geschlossenen Füßen zu springen (ohne umzufallen!). Vergleiche auch Abschnitt 4.1.5 letzte Messaufgabe.

**Zu Aufgabe 4.3**

$$I_v = \frac{U}{R_v} = \frac{100 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} = \underline{\underline{0,01 \text{ A}}}$$

$$\text{Damit wird: } I_R = I_m - I_v = \underline{\underline{0,1 \text{ A}}}$$

$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{100 \text{ V}}{0,1 \text{ A}} = \underline{\underline{1 \text{ k}\Omega}} \quad G = \frac{1}{R} = \underline{\underline{1 \text{ mS}}}$$

**Zu Aufgabe 4.4**

$$A_{\perp} = \frac{\pi d^2}{4} = 0,071 \text{ mm}^2, \quad R = \frac{l_{\text{leiter}}}{\kappa \cdot A_{\perp}} \rightarrow$$

$$l_{\text{leiter}} = R \cdot \kappa \cdot A_{\perp} = 2 \text{ k}\Omega \cdot 56 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2 \cdot 0,071 \text{ mm}^2 = 7916 \text{ m}$$

Länge bis zur Fehlerstelle ist die Hälfte, also 3958 m.

**Zu Aufgabe 4.5**

$$\text{Frage 1: } \Delta \vartheta = 40 \text{ }^{\circ}\text{C} - 20 \text{ }^{\circ}\text{C} = 20 \text{ K}$$

$$R_{\vartheta} = R_{20} (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta \vartheta) = 2 \text{ k}\Omega (1 + 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 20 \text{ K}) = 2 \text{ k}\Omega \cdot 1,0786 = \underline{\underline{2157 \Omega}}$$

$$\text{Frage 2: } \ln R = \frac{l_{\text{leiter}}}{\kappa \cdot A_{\perp}} \text{ wird } \frac{1}{\kappa_{40}} = \frac{1}{\kappa_{20}} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta \vartheta), \text{ d.h., es wird}$$

$$\kappa_{40} = 56 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2 / (1 + 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 20 \text{ K}) = 51,92 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2 \text{ verwendet.}$$

(Änderung von l und A<sub>⊥</sub> sind vernachlässigbar)

$$l_{\text{leiter}} = R \cdot \kappa_{40} \cdot A_{\perp} = 2000 \Omega \cdot 51.92 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2 \cdot 0,071 \text{ mm}^2 = 7372 \text{ m}$$

Länge einer Ader beträgt die Hälfte 3686 m.

### Zu Aufgabe 4.6

$$R = \frac{l_{\text{leiter}}}{\kappa \cdot A_{\perp}} \rightarrow R = \frac{50 \text{ m}}{56 \text{ m}/\Omega \text{ mm}^2 \cdot 0,07 \text{ mm}^2} = \frac{50}{3,92} \Omega = 12,7 \Omega$$

Zu 4Ω des Lautsprechers kommen 2 x 12,7 Ω = 25,4 Ω hinzu und verringern den Strom.

### Zu Aufgabe 4.7

Frage 1: Mit den Werten aus der Kennlinie werden:

$$I_z(I_{\text{Last}}=0) = I_{z \max} = 100 \text{ mA} \rightarrow R_{\text{vor}} = (6 \text{ V} - 5,1 \text{ V}) / 100 \text{ mA} = \underline{\underline{9 \Omega}}$$

Frage 2: Mit den Werten aus der Kennlinie werden:

$$I_{\text{Last max}} = (6 \text{ V} - 4,9 \text{ V}) / 9 \Omega - 0,3 \text{ mA} = \underline{\underline{122 \text{ mA} > 65 \text{ mA}}}$$

Zusatzfrage: Mit den Werten aus der Kennlinie werden:

$$I_z(I_{\text{Last}}=0) = I_{z \max} = 100 \text{ mA} \rightarrow R_{\text{vor max}} = (6,3 \text{ V} - 5,1 \text{ V}) / 100 \text{ mA} = \underline{\underline{12 \Omega}}$$

$$I_{\text{Last max min}} = (5,9 \text{ V} - 4,9 \text{ V}) / 12 \Omega - 0,3 \text{ mA} = \underline{\underline{83 \text{ mA} > 65 \text{ mA}}}$$

### Zu Aufgabe 4.8

Frage 1: Spannungsteilerregel:

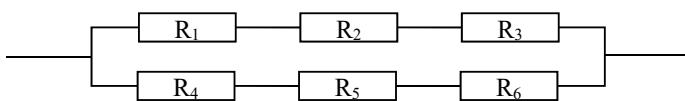
$$\frac{U_{\text{Osz}}}{U_{\text{Mess}}} = \frac{R_{\text{E Osz}}}{R_{\text{E Osz}} + R_V} \rightarrow R_V = \frac{U_{\text{Mess}} R_{\text{E Osz}}}{U_{\text{Osz}}} - R_{\text{E Osz}} = \frac{3000 \text{ V} \cdot 10 \text{ M}\Omega}{300 \text{ V}} - 10 \text{ M}\Omega = \underline{\underline{90 \text{ M}\Omega}}$$

Frage 2: Um einen Überschlag zu vermeiden, sind 9 mal 10 MΩ geradlinig hintereinander anzutragen, dadurch entsteht eine Gesamtlänge von 9 cm.

### Zu Aufgabe 4.9

Parallel- und Reihenschaltung, um einerseits den Strom aufzuteilen und andererseits 6 Ω zu erreichen

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{1}{12 \Omega} + \frac{1}{12 \Omega} \rightarrow R_{\text{ges}} = \underline{\underline{6 \Omega}}.$$



### Zu Aufgabe 4.10

Frage 1:

Im 10 V Messbereich ist R<sub>E</sub> = 10 · 10 kΩ = 100 kΩ.

$$\frac{U_{\text{Mess}}}{U_{\text{Batterie}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \rightarrow U_{\text{Mess}} = U_{\text{Batterie}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \text{ V} \cdot \frac{100 \text{ k}\Omega}{100 \text{ k}\Omega + 50 \text{ k}\Omega} = \underline{\underline{6,7 \text{ V}}}$$

mit Voltmeter:

$$\frac{U_{\text{Mess}}}{U_{\text{Batterie}}} = \frac{R_1 \parallel R_{\text{Mess}}}{R_1 \parallel R_{\text{Mess}} + R_2} \rightarrow U_{\text{Mess}} = U_{\text{Batterie}} \cdot \frac{R_1 \parallel R_{\text{Mess}}}{R_1 \parallel R_{\text{Mess}} + R_2} = 10 \text{ V} \cdot \frac{50 \text{ k}\Omega}{50 \text{ k}\Omega + 50 \text{ k}\Omega} = \underline{\underline{5 \text{ V}}}$$

Messfehler = (6,7 - 5)/6,7 = 25 %.

Frage 2:

Widerstand des Messgerätes ist 100-mal größer als  $100 \text{ k}\Omega$  → Fehler  $\leq 1\%$ .

### Zu Aufgabe 4.11

Für eine Wicklung:  $P_W = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$ ,  $P_b = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi$ ,  $P_s = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ ,  $\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} \rightarrow$

$$P_W = 3 U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 220 \text{ V} \cdot 0,93 \text{ A} \cdot 0,78 = \underline{\underline{479 \text{ W}}}$$

$$P_s = 3 U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 3 \cdot 220 \text{ V} \cdot 1,6 \text{ A} = \underline{\underline{614 \text{ W}}}$$

$$P_b = \sqrt{P_s^2 - P_W^2} = \underline{\underline{384 \text{ W}}}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{Mech}}}{P_W} = \frac{330 \text{ W}}{479 \text{ W}} = 0,69 = \underline{\underline{69\%}}.$$

### Zu Aufgabe 4.12

Frage 1:

$$I_{\text{Max}} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{0,125 \text{ W}}{470 \Omega}} = \underline{\underline{0,016 \text{ A}}}$$

Frage 2: Der Effektivwert ist der gleiche wie bei Frage 1.

### Zu Aufgabe 4.13

$$\text{Glühlampe } P_{\text{Licht}} = \eta \cdot P_{\text{el}} = 0,05 \cdot 100 \text{ W} = \underline{\underline{5 \text{ W}}}$$

$$\text{Energiesparlampe } P_{\text{el}} = \frac{P_{\text{Licht}}}{\eta} = \frac{5 \text{ W}}{0,25} = \underline{\underline{20 \text{ W}}}$$

Zusatzfrage:

$$\text{LED-Array } P_{\text{el}} = \frac{P_{\text{Licht}}}{\eta} = \frac{5 \text{ W}}{0,4} = \underline{\underline{12,5 \text{ W}}}$$

### Zu Aufgabe 4.14

Frage 1:

$$I_{\text{Max}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{20 \text{ V}}{4 \Omega} = \underline{\underline{5 \text{ A}}} \rightarrow P = U \cdot I = 20 \text{ V} \cdot 5 \text{ A} = \underline{\underline{100 \text{ W}}}$$

Frage 2:

$$I = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{20 \text{ V}}{8 \Omega} = \underline{\underline{2,5 \text{ A}}} \rightarrow P = U \cdot I = 20 \text{ V} \cdot 2,5 \text{ A} = \underline{\underline{50 \text{ W}}}$$

Frage 3

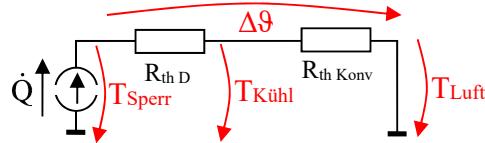
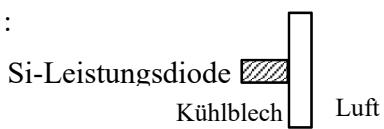
Die beiden Lautsprecher sind parallel anzuschließen →  $R_{\text{Gesamt}} = 4 \Omega$ .

### Zu Aufgabe 4.15

$$m = (96485^{-1}) (\text{A}_{\text{Ag}}/\text{z}) (\text{Q}/\text{As}) g = (96485^{-1}) (107,9/1) (1 \text{ A} 3600 \text{ s}/\text{As}) g = \underline{\underline{4,0 \text{ g}}}$$

**Zu Aufgabe 4.16**

Frage 1:



Frage 2:

$$\dot{Q} = P_{el\ Verl} = 20 \text{ A} \cdot 0,85 \text{ V} = 17 \text{ W}$$

$$\Delta\theta = T_{Sperr} - T_{Luft} = 150 \text{ }^{\circ}\text{C} - 25 \text{ }^{\circ}\text{C} = 125 \text{ K} \text{ entspricht dem Maschensatz}$$

$$R_{th\ Konv} = 1/(k A) = 1/(10^{-3} \text{ W cm}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ AKühl})$$

$$\Delta\theta = \dot{Q} (R_{th\ D} + R_{th\ Konv}) = \dot{Q} [R_{th\ D} + 1/(10^{-3} \text{ W cm}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ AKühl})] \rightarrow$$

$$AKühl = 1/[(\Delta\theta/\dot{Q} - R_{th\ D})10^{-3} \text{ W cm}^{-2} \text{ K}^{-1}] = 1/[(125 \text{ K}/17 \text{ W} - 2 \text{ K/W}) 10^{-3} \text{ W cm}^{-2} \text{ K}^{-1}]$$

$$= (10^3/5,35) \text{ cm}^2 = \underline{\underline{187 \text{ cm}^3}}$$

**Zu Aufgabe 4.17**

Frage 1:

$$\Phi = a P_{el} = 80 \text{ lm/W} \cdot 4 \text{ W} = \underline{\underline{320 \text{ lm}}}$$

Frage 2: Halbkugelfläche:  $A = 2\pi r^2$ 

$$E = \Phi/A = \Phi/(2\pi r^2) \rightarrow r = [\Phi/(2\pi E)]^{1/2} = [320 \text{ lm}/(2\pi 500 \text{ lm m}^{-2})]^{1/2} = 0,32 \text{ m} = \underline{\underline{32 \text{ cm}}}$$

**22.2 Lösungen zu Abschnitt 5****Zu Aufgabe 5.1**

Für die Spannungsfestigkeit müssen 2 Kondensatoren in Reihe verwendet werden.

$$U_{ges} = U_1 + U_2 = 15 \text{ V} + 15 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

$$\frac{1}{C_{Reihe}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{2000 \mu\text{F}} + \frac{1}{2000 \mu\text{F}} \rightarrow C_{Reihe} = 1000 \mu\text{F}$$

Für 2000 μF kann eine Parallelschaltung eingesetzt werden.

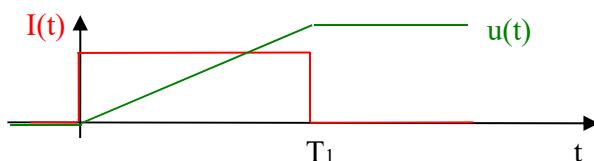
$$C_{ges} = C_{Reihe1} + C_{Reihe2} = 1000 \mu\text{F} + 1000 \mu\text{F} = 2000 \mu\text{F}$$

Es ist bei gleichem C egal, ob erst in Reihe und dann parallel oder umgekehrt geschaltet wird.

**Zu Aufgabe 5.2**Für einen konstanten Strom und  $u_c(0) = 0$  folgt:

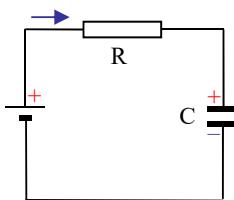
$$u_c(t) = \frac{I}{C} \int_0^t dt = \frac{I}{C} t \quad \text{von } 0 \leq t \leq T_1,$$

danach kommt nichts mehr dazu.



**Zu Aufgabe 5.3**

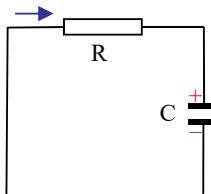
Aufgabe 1: Zur Lösung der DGL siehe Abschnitt 8.2.

Maschensatz

$$u_R + u_C - U_0 = 0$$

$$\rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0$$

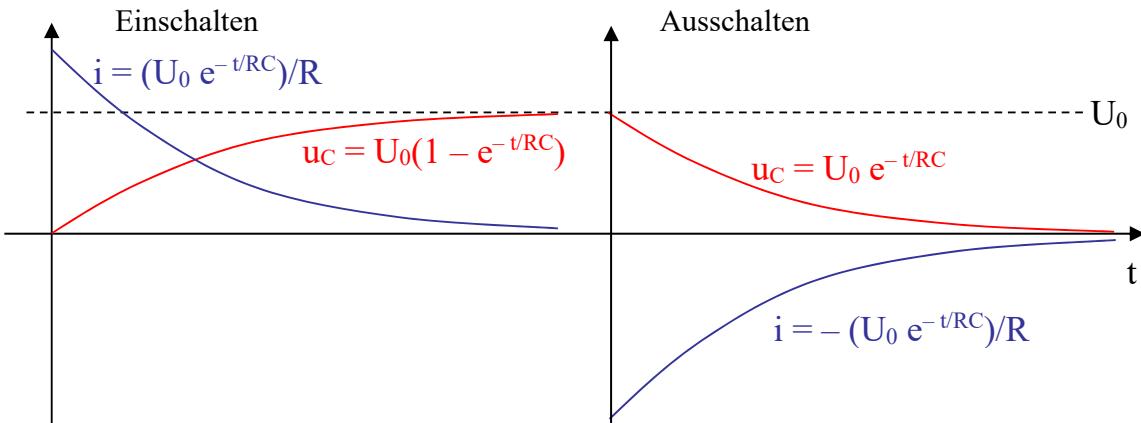
Lösung:  $u_C \text{ homogen} = k e^{-t/RC}$ ,  $u_C \text{ inhomogen} = U_0$  und  $u(t=0) = 0$   
 $u_C = U_0(1 - e^{-t/RC})$  und  $i = (U_0 e^{-t/RC})/R$



$$u_R + u_C = 0$$

$$\rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

Lösung:  $u_C \text{ homogen} = k e^{-t/RC}$  und  $u(t=0) = U_0$   
 $u_C = U_0 e^{-t/RC}$  und  $i = -(U_0 e^{-t/RC})/R$



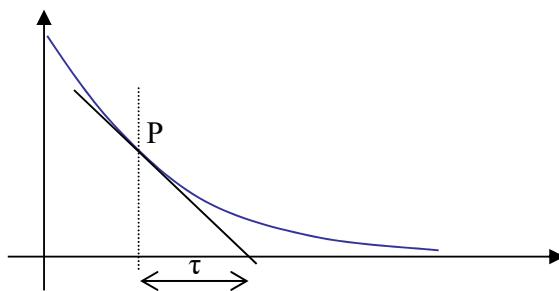
Aufgabe 2:

Für die Kurven gibt es zwei Parameter:  $U_0$  und  $\tau = RC$ . Die Zeitkonstante  $\tau$  bestimmt den Zeitverlauf der Vorgänge.

Zusatzfrage:

Für den Strom  $i = (U_0 e^{-t/RC})/R$  folgt zum Zeitpunkt  $t = \tau = RC$ :

$$i = (U_0 e^{-1})/R = U_0 / (e R) = i(0)/e \text{ oder } i_{\text{Max}}/e.$$

Es wird z.B. mit dem Kursor die Zeit gesucht, zu der  $i = i_{\text{Max}}/e$  ist.Die Subtangente (der Abschnitt unterhalb des Punkts P der Tangente und des Schnittpunkts der Tangente mit der t-Achse) ist bei dieser Exponentialfunktion immer gleich  $\tau$ .

**Zu Aufgabe 5.4**

Frage 1:

$$\tau = R \cdot C \rightarrow R = \frac{\tau}{C} = \frac{10 \text{ s}}{10 \mu\text{F}} = \underline{\underline{1 \text{ M}\Omega}}$$

Frage 2:

Der Leckwiderstand wirkt als Parallelwiderstand zu  $1 \text{ M}\Omega$ .

$$R \parallel R_{\text{Leck}} = 10 \text{ M}\Omega \cdot 1 \text{ M}\Omega / (10 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega) = 10/11 \text{ M}\Omega = 0,909 \text{ M}\Omega \text{ ca. } 10\% \text{ kleiner.}$$

$$\tau = R \cdot C = 0,909 \text{ M}\Omega \cdot 10 \mu\text{F} = \underline{\underline{9,09 \text{ s}}} \text{ ca. } 10\% \text{ kürzer.}$$

**Zu Aufgabe 5.5 \***

$$C = Q/U = D \cdot A/U = D \cdot A / [E_1(d - d_f) + E_2 d_f] \text{ mit } E = D / (\epsilon_0 \epsilon_r)$$

$$C = D \cdot A / [(d - d_f) D / (\epsilon_0 \epsilon_{r1}) + d_f D / (\epsilon_0 \epsilon_{r2})] = A \epsilon_0 / [(d - d_f) / \epsilon_{r1} + d_f / \epsilon_{r2}] \text{ entspricht } C_1 \parallel C_2$$

$$C = 0,1 \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1} / [0,5 \text{ mm} - d_f (1 + 1/2,4)]$$

$$C(d_f) = 885,4 \text{ pF mm} / (0,5 \text{ mm} + 1,42 d_f) = \underline{\underline{0,8854 \text{ nF} / (0,5 + 1,42 d_f / \text{mm})}}$$

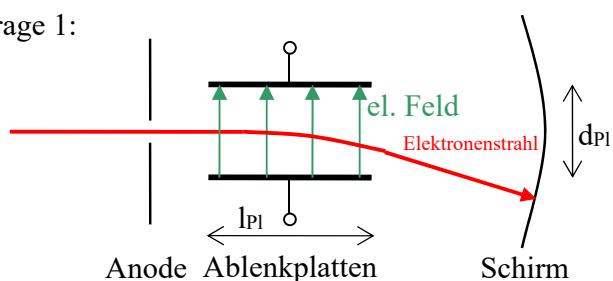
$$C(0,2 \text{ mm}) = 885,4 \text{ pF} / 0,784 = \underline{\underline{1,13 \text{ nF}}}$$

**Zu Aufgabe 5.6**

$$W = C U^2 / 2 = 250 \mu\text{F} (500 \text{ V})^2 / 2 = 250 \cdot 0,25 / 2 \text{ Ws} = \underline{\underline{31 \text{ Ws}}}$$

**Zu Aufgabe 5.7**

Frage 1:

Die Beschleunigung in y-Richtung ist konstant  $\rightarrow b_y = dv_y / dt = F / m_{\text{el}} = -q_0 \cdot E / m_{\text{el}}$  $\rightarrow$  Geschwindigkeit in y-Richtung  $v_y = b_y t_{\text{Ablenk}} = (-q_0 \cdot E / m_{\text{el}}) (l_{\text{Pl}} / v_0) = -q_0 \cdot E l_{\text{Pl}} / m_{\text{el}} v_0$ mit  $v_0 = 593 (\text{U/V})^{-1/2} \text{ km/s} = 593 (2000 \text{ V/V})^{-1/2} \text{ km/s} = 26000 \text{ km/s}$ 

$$v_y = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} (20 \text{ V/2 mm}) 2 \text{ cm} / (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} 26000 \text{ km/s})$$

$$v_y = -10^3 \cdot 1,6 \cdot 200 / (9,1 \cdot 26) \text{ A V s}^2 / \text{g m} = \underline{\underline{1350 \text{ km/s}}}$$

Frage 2: Dreieck der Geschwindigkeitskomponenten  $v_{\text{ges}}$ ,  $v_0$  und  $v_y$ .

$$\tan \alpha = v_y / v_0 = -q_0 \cdot E l_{\text{Pl}} / (m_{\text{el}} v_0^2) = -(1350 \text{ km/s}) / (26000 \text{ km/s}) = -0,052$$

$$\underline{\underline{\alpha = -3^\circ}}$$

**22.3 Lösungen zu Abschnitt 6****Zu Aufgabe 6.1**

Frage 1:

$$\Theta = I \cdot w = 1 \text{ A} \cdot 10 = \underline{\underline{10 \text{ A}}}$$

(oder 10 Amperewindungen)

Frage 2:

$$Rm_L = \frac{1}{A \cdot \mu_0} = \frac{0,001 \text{ m}}{0,0001 \text{ m}^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}} = \underline{\underline{8,0 \cdot 10^6 \text{ A/Vs}}}$$

$$Rm_{Fe} = \frac{1}{A \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{0,2 \text{ m}}{0,0001 \text{ m}^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am} \cdot 5000} = \underline{\underline{320 \cdot 10^3 \text{ A/Vs}}}$$

Frage 3:

$$\Phi = \frac{\Theta}{Rm_L + Rm_{Fe}} = \frac{10 \text{ A}}{(8,0 \cdot 10^6 + 320 \cdot 10^3) \text{ A/Vs}} = \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}}}$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}}{0,0001 \text{ m}^2} = \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ T}}}$$

Frage 4:

$$H_L = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ T}}{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}} = \underline{\underline{9600 \text{ A/m}}}$$

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{1,2 \cdot 10^{-2} \text{ T}}{1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am} \cdot 5000} = \underline{\underline{1,9 \text{ A/m}}}$$

$$Vm_L = Rm_L \cdot \Phi = 8 \cdot 10^6 \text{ A/Vs} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs} = \underline{\underline{9,6 \text{ A}}}$$

$$Vm_{Fe} = Rm_{Fe} \cdot \Phi = 320 \cdot 10^3 \text{ A/Vs} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs} = \underline{\underline{0,38 \text{ A}}}$$

## Zu Aufgabe 6.2

Frage:  $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2,5^2 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{19,6 \text{ cm}^2}} \rightarrow$

$$Rm_L = \frac{1}{A \cdot \mu_0} = \frac{0,5 \text{ m}}{0,00196 \text{ m}^2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}} = \underline{\underline{2 \cdot 10^8 \text{ A/Vs}}}$$

$$\Theta = I \cdot w = 1 \text{ A} \cdot 1000 = \underline{\underline{1000 \text{ A}}}$$

$$\Phi = \frac{\Theta}{Rm_L} = \frac{1000 \text{ A}}{2 \cdot 10^8 \text{ A/Vs}} = \underline{\underline{5 \mu Vs}}$$

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0,000005 \text{ Vs}}{0,00196 \text{ m}^2} = \underline{\underline{0,0026 \text{ T}}}$$

## Zu Aufgabe 6.3

Frage 1:

Die Funktion des FI-Schalters basiert auf dem Durchflutungsgesetz. Der zum Verbraucher fließende Strom wird  $w$ -mal umfasst (obere Windungen), der vom Verbraucher wegfließende Strom wird ebenfalls  $w$ -mal, aber mit umgekehrter Richtung umfasst (untere Windungen). Wird im Fehlerfall an einem Verbraucher ein Strom von 30 mA gegen Erde abgeleitet, so ist die Summe von hin- und zurückfließenden Strömen nicht mehr null. Es entsteht entsprechend der Stromdifferenz eine magnetische Uberspannung, die zur Auslösung des FI-Schalters und damit zur Abschaltung der Stromzufuhr führt.

Frage 2:

$$\Theta = (I + 30 \text{ mA} - I) \cdot w = 0,03 \text{ A} \cdot 5w = \underline{\underline{150 \text{ mA}}} \text{ oder } 150 \text{ Milliamperewindungen.}$$

**Zu Aufgabe 6.4**

Frage 1:

Für diese Anordnung ist als Standpunkt **nur** „ruhend zum Magnetfeld“ möglich, da ein konkreter Leiter nicht vorliegt.

Frage 2: Da der Betrag  $|v(r)|$  von  $r$  abhängt, muss  $du_{\text{ind}}$  für jedes „dr“ berechnet werden.

$$du_{\text{ind}} = -v_x(r)B_y dl_z \text{ mit } dl_z = dr \text{ und } n = \text{Drehzahl}, \text{ d.h. } v(r) = n \cdot 2\pi r \rightarrow$$

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}} &= \int_{r_{\text{innen}}}^{r_{\text{außen}}} du_{\text{ind}} = - \int_{r_{\text{innen}}}^{r_{\text{außen}}} v_x(r)B_y dr \\ u_{\text{ind}} &= \int_{r_{\text{innen}}}^{r_{\text{außen}}} du_{\text{ind}} = -n 2\pi B_y \int_{r_{\text{innen}}}^{r_{\text{außen}}} r dr = \underline{\underline{-n 2\pi B_y (r_{\text{außen}}^2 - r_{\text{innen}}^2)/2}} \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 6.5**

Frage 1:

Für diese Anordnung ist als Standpunkt **einmal** ruhend zum Magnetfeld und zum **anderen** ruhend zum Leiter möglich.

Frage 2:

**Standpunkt ruhend zum Magnetfeld:**

Da nur die Leitereile in z-Richtung einen Beitrag liefern ( $l_x$  und  $l_y$  sind nicht senkrecht zu  $\mathbf{v}$  **und** zu  $\mathbf{B}$ ), hängt der Betrag  $|v(r)|$  nicht von  $r$  ab.

Aus  $u_{\text{ind}} = -(v_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{\text{Leiter}} = -v_x B_y l_z$  folgt:

$$u_{\text{ind}} = -v_x B_y l_z = -v_{\text{außen}} \cdot \sin(\varphi) B_y 2 w l_z = \underline{\underline{-n 2\pi r_s \sin(\varphi) B_y 2 w l_z}} .$$

**Standpunkt ruhend zum Leiter:**

Die Leiterschleife erfährt einen sich mit der Zeit ändernden magnetischen Fluss.

$$\Phi = B_y A_{\perp} = B_y A_{\text{Schleife}} \cos(\varphi); \quad u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi}{dt}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega = 2\pi n \quad \text{und} \quad A_{\text{Schleife}} = 2r_s l_z$$

$$u_{\text{ind}} = w B_y (2 r_s l_z) \frac{d \cos \varphi}{dt} = w B_y 2 r_s l_z (-\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \underline{\underline{-w B_y 2 r_s l_z \sin(\varphi) 2\pi n}}$$

**Zu Aufgabe 6.6**

Frage 1:

Für diese Anordnung ist als Standpunkt **nur** ruhend zu den Leitern möglich, da das Magnetfeld nicht als ruhend fassbar ist.

Frage 2:

Die  $w_2$  Leiterschleifen erfahren einen sich mit der Zeit ändernden magnetischen Fluss

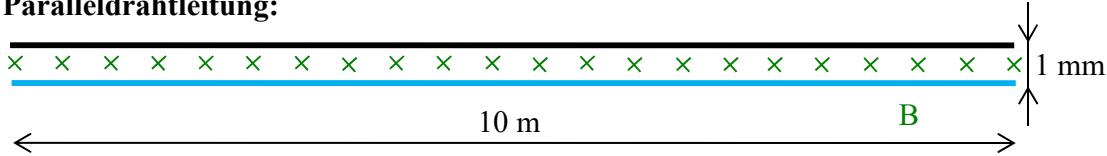
$$\Phi = \Theta_1 / R_m = w_1 \hat{I}_1 \sin(\omega t) / (l_{\text{Fe}} / \mu_0 \mu_r A) \rightarrow$$

$$u_{\text{ind}} = w_2 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{w_2 w_1 \hat{I}_1 \mu_0 \mu_r A}{l_{\text{Fe}}} \cdot \frac{d \sin \omega t}{dt} = \frac{w_2 w_1 \hat{I}_1 \mu_0 \mu_r A \omega}{l_{\text{Fe}}} \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} u_{\text{ind}} &= \frac{100 \cdot 10 \cdot 1 \text{ A} \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am} \cdot 5000 \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 2\pi 50 \text{ Hz}}{20 \text{ cm}} \cdot \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t) \\ &= 1 \text{ V} \cdot \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t) \rightarrow \underline{\underline{\hat{U}_{\text{ind}} = 1 \text{ V}}} \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 6.7**

Für die Anordnungen in den Aufgaben 6.4, 6.5 und 6.6 sind **teilweise** als Standpunkte **nur** jeweils einer der beiden nutzbar („ruhend zu den Leitern“ bzw. „ruhend zum Magnetfeld“). Somit ist keine der beiden Formen verzichtbar oder reine Redundanz.

**Zu Aufgabe 6.8****Paralleldrahtleitung:**

Die Leiterschleife erfährt einen sich mit der Zeit ändernden magnetischen Fluss

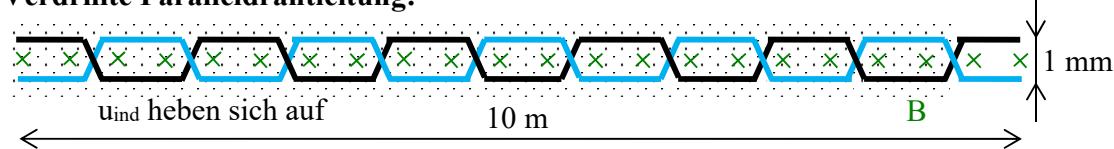
$$\Phi = B \cdot A = B \cdot l \cdot d = B_{\text{Max}} \sin(\omega t) \cdot l \cdot d \quad \text{und aus } u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi}{dt} \text{ folgt:}$$

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = B_{\text{Max}} \cdot l \cdot d \frac{d \sin \omega t}{dt} = B_{\text{Max}} \cdot l \cdot d \cdot \omega \cos \omega t$$

$$u_{\text{ind}} = 0,002 \text{ Vs/m}^2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 2\pi 50 \text{ Hz} \cdot \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t)$$

$$= 6,3 \text{ mV} \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t)$$

$$\hat{U}_{\text{ind}} = 6,3 \text{ mV}$$

**Verdrillte Paralleldrahtleitung:**

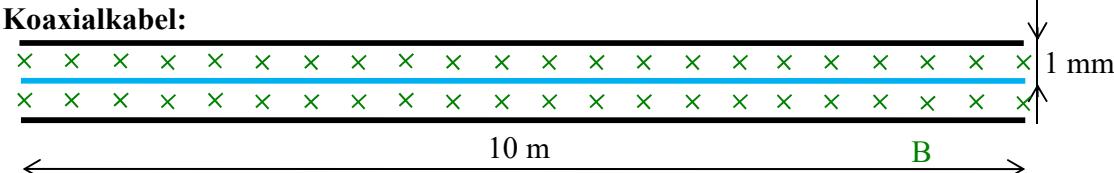
Die Leiterschleife wird durch den Drill ständig umgedreht, wodurch sich die induzierten Spannungen umpolen und somit aufheben. Nur die letzte Verdrillung erfährt einen sich mit der Zeit ändernden magnetischen Fluss, der sich nicht aufhebt (bei ungerader Anzahl Verdrillungen = ungünstiger Fall).

$$\Phi = B \cdot A = B \cdot l_{\text{Drill}} \cdot d = B_{\text{Max}} \sin(\omega t) \cdot l_{\text{Drill}} \cdot d \quad \text{und aus } u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi}{dt} \text{ folgt:}$$

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = B_{\text{Max}} \cdot l_{\text{Drill}} \cdot d \frac{d \sin \omega t}{dt} = B_{\text{Max}} \cdot l_{\text{Drill}} \cdot d \cdot \omega \cos \omega t$$

$$u_{\text{ind}} = 0,002 \text{ Vs/m}^2 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 1 \text{ mm} \cdot 2\pi 50 \text{ Hz} \cdot \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t) = 19 \mu\text{V} \cos(2\pi 50 \text{ Hz} t)$$

$$\hat{U}_{\text{ind}} = 19 \mu\text{V}$$

**Koaxialkabel:**

Der in der Mitte liegende Hinleiter bildet z.B. mit dem oberen Teil des Rückleiters eine Leiterschleife (gegen den Uhrzeigersinn) und mit dem genau gegenüberliegenden unteren Teil des Rückleiters eine Leiterschleife (mit dem Uhrzeigersinn), wodurch sich die induzierten Spannungen gegenseitig aufheben. Nur wenn durch ungenaue Zentrierung der Mittelleiter nicht immer genau in der Mitte liegt, haben die Leiterschleifen ungleiche Flächen und es bleibt eine Differenz.

$$u_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt} = B_{\text{Max}} A_{\text{Differenz}} \frac{d \sin \omega t}{dt} = B_{\text{Max}} A_{\text{Differenz}} \omega \cos \omega t$$

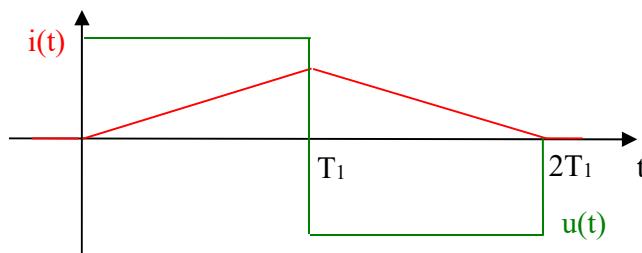
Da die Flächendifferenz schlecht theoretisch gefasst werden kann, soll von ca. 1 % ausgegangen werden. Es ergibt sich damit  $\hat{U}_{\text{ind}} = 6,3 \mu\text{V}$ .

**Zu Aufgabe 6.9**

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

mit  $\frac{di_L(t)}{dt} = \text{const} \rightarrow$

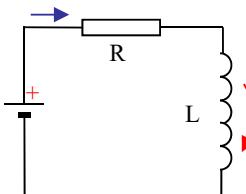
$$u_L(t) = L \cdot \text{const}$$

**Zu Aufgabe 6.10**

Die Bemessungsgleichung lautet  $L = w^2/R_m$ , daraus folgt:

$$L_{\text{Test}} = \frac{w_{\text{Test}}^2}{R_m} \quad \text{und} \quad L_{\text{Soll}} = \frac{w_x^2}{R_m} \quad \text{somit} \quad \frac{w_x^2}{L_{\text{Soll}}} = \frac{w_{\text{Test}}^2}{L_{\text{Test}}} = R_m.$$

$$\frac{w_x^2}{1 \text{ mH}} = \frac{10^2}{5 \mu\text{H}} \quad \text{und} \quad w_x = \sqrt{\frac{1 \text{ mH} \cdot 100}{5 \mu\text{H}}} = \sqrt{20000} = 141$$

**Zu Aufgabe 6.11**

Maschensatz

$$u_R + u_L - U_0 = 0$$

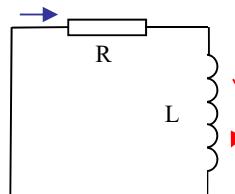
$$\underline{\text{Strom-Spannungs-Beziehungen}}$$

$$u_R = i R \quad i = 1/L \int u_L(t) dt$$

$$\rightarrow R/L \int u_L(t) dt + u_L = U_0 \rightarrow R/L u_L + du_L/dt = 0$$

$$\text{Lösung: } u_L \text{ homogen} = k e^{-t R/L}, \quad u_L \text{ inhomogen} = 0 \quad \text{und} \quad i_L(t=0) = 0$$

$$\underline{u_L = U_0 e^{-t R/L} \quad i = U_0(1 - e^{-t R/L})/R}$$



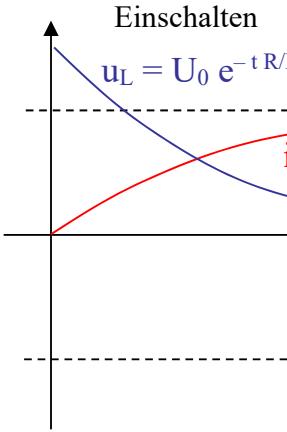
$$u_R + u_C = 0$$

$$u_R = i R \quad i = 1/L \int u_L(t) dt$$

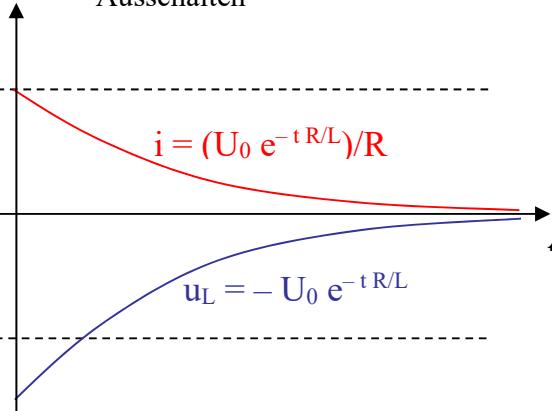
$$\rightarrow R/L \int u_L(t) dt + u_L = 0 \rightarrow R/L u_L + du_L/dt = 0$$

$$\text{Lösung: } u_L \text{ homogen} = k e^{-t R/L}, \quad u_L \text{ inhomogen} = 0 \quad \text{und} \quad i(t=0) = U_0/R$$

$$\underline{u_C = -U_0 e^{-t R/L} \quad i = (U_0 e^{-t R/L})/R}$$



Ausschalten



Für die Kurven gibt es zwei Parameter:  $U_0$  und  $\tau = L/R$ . Die Zeitkonstante  $\tau$  bestimmt den Zeitverlauf der Vorgänge.

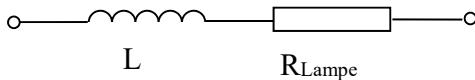
Zusatzfrage:

Für den Strom  $u_L = U_0 e^{-t R/L}$  folgt zum Zeitpunkt  $t = \tau = L/R$ :

$$u_L = U_0 e^{-1} = U_0 / e = u_L(0)/e \quad \text{oder} \quad u_L \text{ Max}/e.$$

Es wird z.B. mit dem Cursor die Zeit gesucht, zu der  $u_L = u_{L\text{ Max}}/e$  ist.  
(Zur Subtangente siehe Aufgabe 5.3)

### Zu Aufgabe 6.12



$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow \text{solange die Induktivität im linearen Bereich betrieben wird:}$$

$$L = u_L(t) \left( \frac{di_L(t)}{dt} \right)^{-1}.$$

$$L = \left( \sqrt{2} \cdot (230 \text{ V} - 30 \text{ V}) \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t) \right) \left( \frac{d\{\sqrt{2} \cdot 0,4 \text{ A} \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t)\}}{dt} \right)^{-1}$$

$$L = \left( \sqrt{2} \cdot (230 \text{ V} - 30 \text{ V}) \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t) \right) ((2\pi \cdot 50 \text{ Hz}) \sqrt{2} \cdot 0,4 \text{ A} \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t))^1$$

$$L = (230 \text{ V} - 30 \text{ V}) / (2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0,4 \text{ A})$$

$$L = 200 / (2\pi \cdot 50 \cdot 0,4) \text{ Vs/A} = \underline{\underline{1,6 \text{ H}}}$$

Weil die Spannung an dem Widerstand der Lampe mit dem Strom gleichphasig ist, die an der Induktivität aber  $90^\circ$  vorläuft, kann für genaue Rechnungen nicht  $230 - 30$  gesetzt werden. Es müsste  $\sqrt{230^2 - 30^2} = 228$  genutzt werden – siehe Abschnitt 11.1 – damit folgt 1,8 H.

### Zu Aufgabe 6.13

Die Strom-Spannungs-Beziehungen lauten:

$$\underline{i_R(t)} = \frac{u(t)}{R_{Fe}} = (\hat{U}/R) \cos(\omega t) \equiv \hat{i}_R \cos(\omega t) \quad \text{und}$$

$$\underline{i_L(t)} = \frac{1}{L} \int u(t) dt = \frac{1}{L} \int \hat{U} \cos(\omega t) dt = \frac{\hat{U}}{L} \int \cos(\omega t) dt = \frac{\hat{U}}{\omega L} \sin(\omega t) \equiv \hat{i}_L \sin(\omega t).$$

$i_R(t)$  ist dabei zeitgleich mit  $u(t)$ , dagegen ist  $i_L(t)$  um  $90^\circ$  später ( $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ$ ).

Die Summe wird nach den Additionstheoremen für sin- und cos-Funktionen:

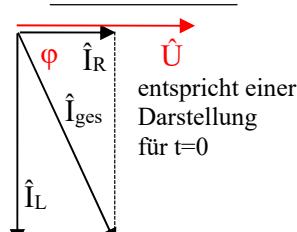
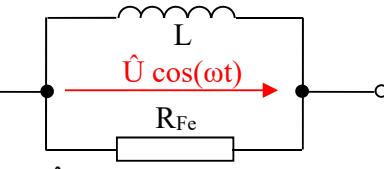
$$\underline{i(t)} = i_R(t) + i_L(t) = \sqrt{(\hat{U}/R_{Fe})^2 + (\hat{U}/\omega L)^2} \cos(\omega t - \varphi) \equiv \hat{i}_{\text{ges}} \cos(\omega t - \varphi)$$

$\hat{U}$  und die  $\hat{i}$ -Werte können mit ihren Winkeln dargestellt werden. Die Dreiecke davon zeigen:

$$\hat{i}_R = \hat{i}_{\text{ges}} \cos \varphi \quad \text{und}$$

$$\hat{i}_L = \hat{i}_{\text{ges}} \sin \varphi \rightarrow$$

$$(\text{mit } \hat{U}/\hat{i} = U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}})$$



$$R_{Fe} = \hat{U}/\hat{i}_R = \hat{U}/(\hat{i}_{\text{ges}} \cos \varphi) = 200 \text{ V} / (0,4 \text{ A} \cos 87^\circ) = 500 \Omega / 0,052 = \underline{\underline{9600 \Omega}}$$

$$\omega L = \hat{U}/\hat{i}_L = \hat{U}/(\hat{i}_{\text{ges}} \sin \varphi) = 200 \text{ V} / (0,4 \text{ A} \sin 87^\circ) = 500 \Omega / 0,998 = 500,7 \Omega$$

$$L = \omega L / \omega = 500,7 \Omega / (2\pi \cdot 50 \text{ Hz}) = \underline{\underline{1,6 \text{ H}}}$$

$R_{Fe}$  ist hier ca. 20-mal größer als  $\omega L$ .

(Vergleiche auch Abschnitt 19.2.1 und 19.2.4.)

**Zu Aufgabe 6.14**

Frage 1:

$L = \frac{\Phi_{\text{kopp}}}{I}$  kann für einen linearen Bereich als Differenzengleichung geschrieben werden:

$$L = \frac{\Delta \Phi_{\text{kopp}}(\Delta I)}{\Delta I} \rightarrow \text{im linearen Bereich um den Nullpunkt}$$

$$L = 0,04 \text{ Vs} / (0,02 \text{ A}) = \underline{\underline{2 \text{ H}}}$$

Frage 2:

$$L_{\text{diff}}(I_0) = \frac{d\Phi_{\text{kopp}}}{dI} \approx \frac{\Delta \Phi_{\text{kopp}}(\Delta I)}{\Delta I} \text{ für ein lineares Stück der Kennlinie} \rightarrow$$

$$L_{\text{diff}}(I_0 = 0,11 \text{ A}) = \frac{0,0788 - 0,0775}{0,12 - 0,1} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \underline{\underline{0,065 \text{ H}}}$$

Frage 3:

Ein Absinken der wirkenden Induktivität von 2 auf 0,065 H würde bei gleicher Spannung den kleinen Strom (um seinen Gleichanteil  $I_0$ ; lineare Betrachtung ist so möglich) gemäß

$$i_L(t) = \frac{1}{L_{\text{diff}}(I_0)} \int u_L(t) dt$$

um den Faktor  $2 / 0,065 = 30$  steigen lassen. Das wurde früher für Magnetverstärker verwendet.

Bei großer Aussteuerung ergibt sich eine Art wirksame Induktivität (je nachdem, wie lange der Strom in der Sättigung ist). Das führt bis zur Zerstörung. Genaue Rechnungen sind nur bei Einbeziehung der Kennlinie mit einer Simulation möglich.

**Zu Aufgabe 6.15**

$$\mathbf{F}_{\text{magn}} = Q (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{\text{Fieh}} = m (v_0/R)^2 \mathbf{R}$$

Aus dem Gleichgewicht folgt für die Beträge:

$$\begin{aligned} F_{\text{magn}} &= Q v_0 B = m \left( \frac{v_0}{r} \right)^2 r = F_{\text{Fieh}} \rightarrow \\ r &= \frac{m v_0^2}{Q v_0 B} = \frac{m v_0}{Q B} = \frac{1,57 \cdot 10^{-24} \text{ g} \cdot 200\,000 \text{ km/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 48 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/m}^2} = \underline{\underline{41 \text{ km}}} \end{aligned}$$

**Zu Aufgabe 6.16**

Aus  $\mathbf{F} = I_2 \mathbf{l}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}$  folgt für die Beträge:

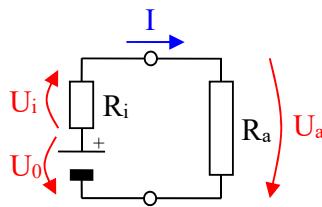
$$F = I_2 l_{\text{Leiter}} B \quad F = 1 \text{ A} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 1 \text{ Vs/m}^2 = 0,1 \text{ Ws/m} = \underline{\underline{0,1 \text{ N}}}$$

**Zu Aufgabe 6.17**

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} A \rightarrow F = (1 \text{ Vs/m}^2)^2 \cdot (2 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am})^{-1} \cdot 1 \text{ cm}^2 = 40 \text{ Ws/m} = \underline{\underline{40 \text{ N}}}$$

## 22.4 Lösungen zu Abschnitt 9

### Zu Aufgabe 9.1



Maschensatz:  
 $0 = U_i + U_a - U_0$   
daraus folgt  
 $U_a = U_0 - R_i I$   
mit  
 $I = U_0 / (R_i + R_a)$

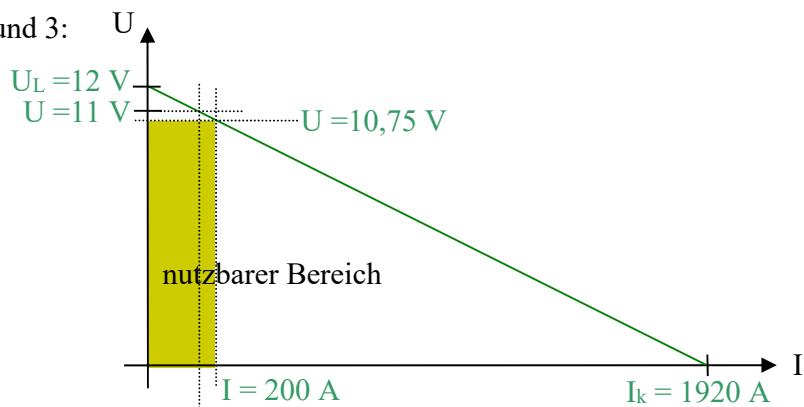
Frage 1:

Für den Leerlauf gilt:  $U_a = U_0 = 12 \text{ V}$ , für den Startvorgang gilt:  $U_a = 11 \text{ V}$  und  $I = 160 \text{ A}$ ,

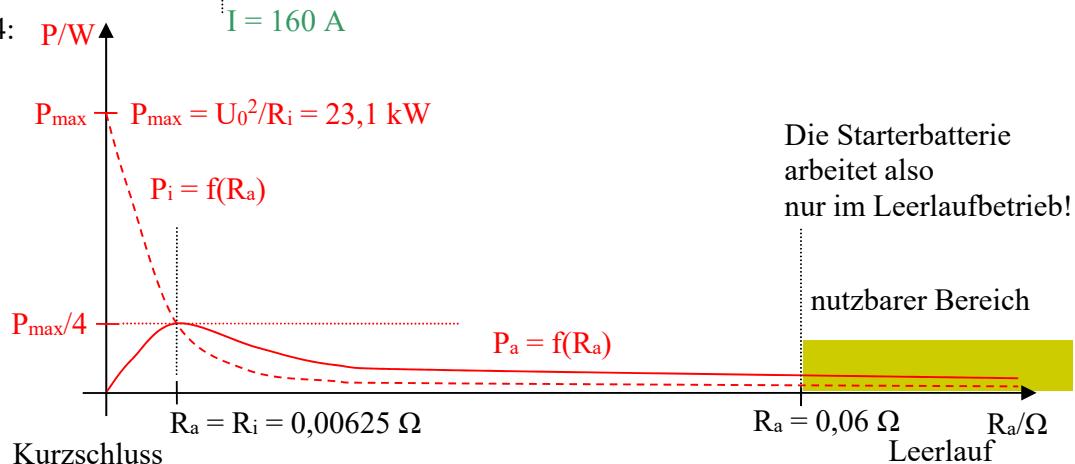
$$U_i = U_0 - U_a = 12 \text{ V} - 11 \text{ V} = 1 \text{ V}, \quad R_i = U_i / I = 1 \text{ V} / 160 \text{ A} = 0,00625 \Omega$$

$$I_k = U_0 / R_i = 12 \text{ V} / 0,00625 \Omega = 1920 \text{ A}$$

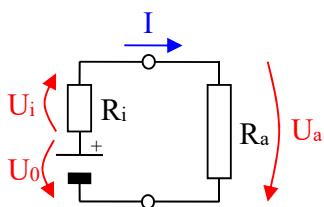
Frage 2 und 3:



Frage 4:



### Zu Aufgabe 9.2



Maschensatz:  
 $0 = U_i + U_a - U_0$   
daraus folgt  
 $U_a = U_0 - R_i I$   
mit  
 $I = U_0 / (R_i + R_a)$

Frage 1:

1. Messung  $U_{a1} = U_0 - R_i I_1$  mit  $U_{a1} = 7,5 \text{ V}$  und  $I_1 = 0,3 \text{ A}$

2. Messung  $U_{a2} = U_0 - R_i I_2$  mit  $U_{a2} = 8,5 \text{ V}$  und  $I_2 = 0,1 \text{ A} \rightarrow$

$$U_0 = U_{a1} + R_i I_1 = U_{a2} + R_i I_2$$

$$R_i = (U_{a2} - U_{a1}) / (I_1 - I_2)$$

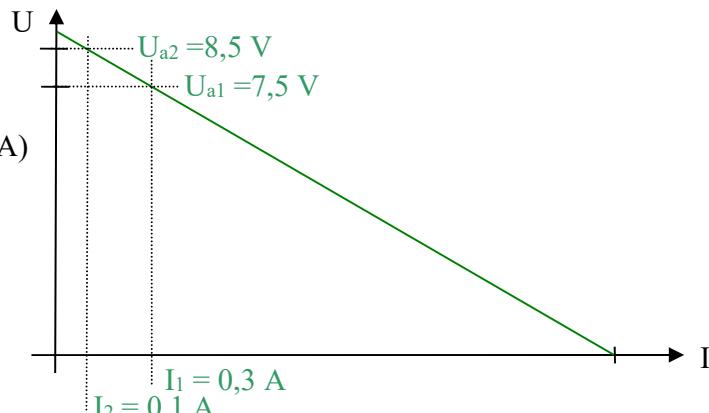
$$R_i = (8,5 \text{ V} - 7,5 \text{ V}) / (0,3 \text{ A} - 0,1 \text{ A})$$

$$R_i = 5 \Omega$$

$$U_0 = U_{a1} + R_i I_1$$

$$U_0 = 7,5 \text{ V} + 5 \Omega \cdot 0,3 \text{ A}$$

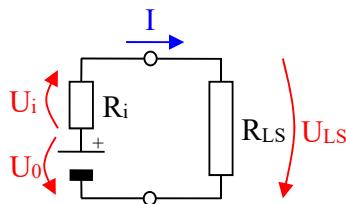
$$U_0 = 9 \text{ V}$$



Frage 2:

Solange das Verhalten der Batterie durch eine Gerade entsprechend  $U_0$  und  $R_i$  genügend genau beschrieben werden kann, ist diese Gerade durch **zwei Punkte** vollständig bestimmt.

### Zu Aufgabe 9.3



Maschensatz:

$$0 = U_i + U_{LS} - U_0$$

daraus folgt

$$U_{LS} = U_0 - R_i I$$

mit

$$P_{LS} = U_0^2 / R_{LS}$$

Frage 1:

$$1. \text{ Messung: } U_{LS1} = U_0 - R_i I_1 \text{ mit } U_{LS1} = \sqrt{P_{LS1} \cdot R_{LS1}} = \sqrt{80 \text{ W} \cdot 4 \Omega} = 17,9 \text{ V und} \\ I_1 = U_{LS1} / R_{LS1} = 4,47 \text{ A}$$

$$2. \text{ Messung: } U_{LS2} = U_0 - R_i I_2 \text{ mit } U_{LS2} = \sqrt{50 \text{ W} \cdot 8 \Omega} = 20 \text{ V und } I_2 = 2,5 \text{ A} \rightarrow$$

$$U_0 = U_{LS1} + R_i I_1 = U_{LS2} + R_i I_2$$

$$R_i = (U_{LS2} - U_{LS1}) / (I_1 - I_2) = (20 \text{ V} - 17,9 \text{ V}) / (4,47 \text{ A} - 2,5 \text{ A}) = 1,07 \Omega$$

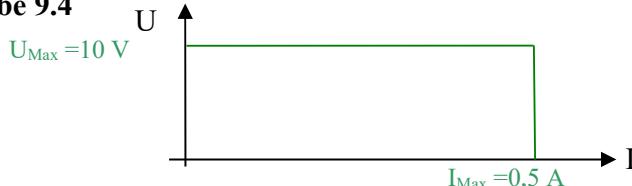
$$U_0 = U_{LS1} + R_i I_1 = 17,9 \text{ V} + 1,07 \Omega \cdot 4,47 \text{ A} = 22,7 \text{ V}$$

Frage 2:

$$P_{LS2} = U_{LS1}^2 / R_{LS2} = 17,9^2 \text{ V}^2 / 8 \Omega = 40,1 \text{ W}$$

Da die Spannung aber durch die geringere Belastung etwas ansteigt, ergaben sich 50 W.

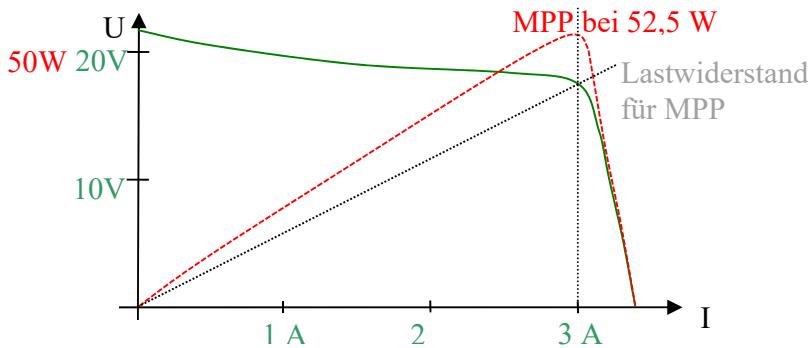
### Zu Aufgabe 9.4



### Zu Aufgabe 9.5

Frage 1 und 2:

U/V	21,7	20,5	19	17,5	10	5	0
I/A	0	0,5	1,5	3,0	3,2	3,3	3,4
P = U · I W	0	10,25	28,5	52,5	32	16,5	0



Frage 3:

Wird ein Lastwiderstand an das Solarpanel angeschlossen, der den MPP als Arbeitspunkt ergibt, kann die größtmögliche Leistung entnommen werden.

### Zu Aufgabe 9.6

Frage 1:

Es gibt drei Maschen und zwei Knoten. Davon sind zwei Maschen und ein Knoten unabhängig. Die Schritte der Rechnung erfolgen wie in Abschnitt 9.2.1 → die Ergebnisse:

$$I_1 = \frac{U_{01}(R_{i2} + R_L) - U_{02}R_L}{R_{i1}R_L + R_{i2}R_L + R_{i1}R_{i2}} = 0,3 \text{ A} \quad \text{nach oben}$$

$$I_2 = \frac{-U_{01}R_L + U_{02}(R_{i1} + R_L)}{R_{i1}R_L + R_{i2}R_L + R_{i1}R_{i2}} = 0,1 \text{ A} \quad \text{nach oben}$$

$$I_L = \frac{U_{01}R_{i2} + U_{02}R_{i1}}{R_{i1}R_L + R_{i2}R_L + R_{i1}R_{i2}} = 0,4 \text{ A} \quad \text{nach unten}$$

Frage 2:

Gleiche Formeln mit veränderten Parametern →

$$I_1 = 0,214 \text{ A}$$

$$I_2 = 0,214 \text{ A}$$

$$I_L = 0,428 \text{ A}$$

Die Last bekommt bei dieser Variante einen höheren Strom.

### Zu Aufgabe 9.7

Frage 1:

$$\text{Widerstand } R_L \text{ einer Lampe: } R_L = \frac{U_{LNenn}}{I_{LNenn}} = \frac{6 \text{ V}}{0,1 \text{ A}} = 60 \Omega$$

$$\text{Widerstand } R_7 \text{ einer Lampenkette: } R_7 = \sum_1^7 R_L = \sum_1^7 60 \Omega = \underline{\underline{420 \Omega}}$$

$$\text{Widerstand } R_{Lges} \text{ der drei parallelen Lampenketten: } R_{Lges} = R_7 / 3 = \underline{\underline{140 \Omega}} \rightarrow$$

$$I_{ges} = U_0 / (R_i + R_{Lges}) = 45 \text{ V} / (10 \Omega + 140 \Omega) = 0,3 \text{ A}$$

Durch jede Lampenreihe und somit durch jede Lampe fließen 1/3 also 0,1 A

Frage 2:

$$\text{Widerstand der Kette mit zwei ausgefallenen Lampen: } R_5 = \sum_1^5 R_L = \underline{\underline{300 \Omega}}$$

Widerstand  $R_{L2ges}$  der drei parallelen Lampenketten:

$$\frac{1}{R_{L2ges}} = \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{420 \Omega} + \frac{1}{420 \Omega} + \frac{1}{300 \Omega} = 123,5 \Omega \rightarrow$$

$$I_{2ges} = U_0 / (R_i + R_{L2ges}) = 45 \text{ V} / (10 \Omega + 123,5 \Omega) = 0,337 \text{ A}$$

Nach der Stromteilerregel folgt:

$$I_3/I_{ges} = R_{Lges}/R_5 \text{ und } I_3 = I_{ges} \cdot R_{Lges}/R_5 = 0,337 \text{ A} \cdot 123,5 \Omega / 300 \Omega = \underline{\underline{0,138 \text{ A}}}$$

Der Strom steigt von 0,1 auf 0,138 A; die Lampen sollten also möglichst schnell ausgewechselt werden.

### Zu Aufgabe 9.8

Da an den drei Klemmen für **alle möglichen** Ströme und Spannungen diese jeweils an beiden Schaltungen gleich sein müssen, können auch die folgenden Spezialfälle genutzt werden.

1. Für die Punkte A und B mit offenem C

$$\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_{1s} + R_{2s}$$

2. Für die Punkte B und C mit offenem A

$$\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_{2s} + R_{3s}$$

3. Für die Punkte C und A mit offenem B

$$\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_{1s} + R_{3s}$$

Das sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten und nur bekannten Widerständen an einer Schaltung. Die Lösung lautet von Dreieck zu Stern:

$$R_{1s} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{aus } 1. - 2. + 3. \text{ folgt } 2R_{1s}$$

$$R_{2s} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{aus } 1. + 2. - 3. \text{ folgt } 2R_{1s}$$

$$R_{3s} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \text{aus } -1. + 2. + 3. \text{ folgt } 2R_{1s}$$

### Zu Aufgabe 9.9

$$R_{Amp} = \frac{U}{I} = \frac{100 \text{ mV}}{50 \mu\text{A}} = 2000 \Omega$$

Der Shunt liegt parallel zum Amperemeter.

$$\frac{I_{Shunt}}{I_{Amp}} = \frac{R_{Amp}}{R_{Shunt}} = \frac{I_{Mess} - I_{Amp}}{I_{Amp}} \rightarrow$$

$$R_{Shunt} = \frac{I_{Amp} R_{Amp}}{I_{Mess} - I_{Amp}} = \frac{50 \mu\text{A} \cdot 2000 \Omega}{10^6 \mu\text{A} - 50 \mu\text{A}} = \frac{10^5 \Omega}{999950} = \underline{\underline{\underline{0,100005 \Omega}}}$$

### Zu Aufgabe 9.10

$$R_{Motges} = R_{Mot1} \parallel R_{Mot2} = \frac{R_{Mot1}}{2} = 100 \Omega$$

Eingangswiderstand des Messverstärkers  $10 \text{ k}\Omega$  parallel zu  $20 \Omega$  kann vernachlässigt werden.  
 $(1/20 + 1/10^4 = 501/10^4 \text{ d.h. } 0,2\% \text{ Abweichung})$

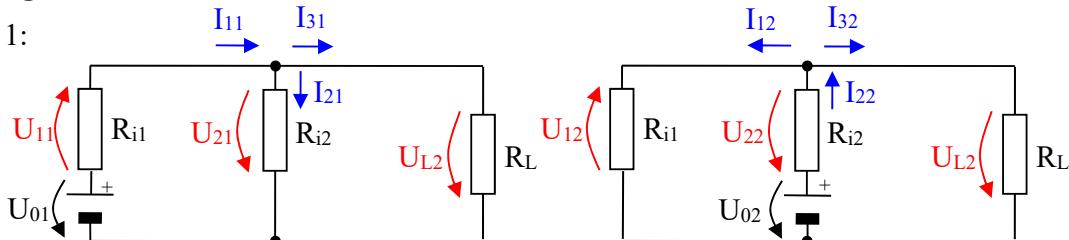
$$R_{\text{ges}} = R_{\text{Mess}} + R_{\text{Motges}} = 120 \Omega$$

Innenwiderstand der Quelle  $0,1 \Omega$  in Reihe mit  $R_{\text{ges}}$  kann vernachlässigt werden.  
 $(0,1 + 120 = 120,1 \text{ d.h. weniger als } 0,1\% \text{ Abweichung})$

$$I = \frac{U_0}{R_{\text{ges}}} = \frac{24 \text{ V}}{120 \Omega} = 0,2 \text{ A}$$

### Zu Aufgabe 9.11

Frage 1:



$$\frac{I_{31}}{I_{11}} = \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_L} \quad I_{11} = \frac{U_{01}}{R_{i1} + \frac{R_{i2}R_L}{R_{i2} + R_L}} \quad \text{und} \quad \frac{I_{21}}{I_{11}} = \frac{R_L}{R_{i2} + R_L}$$

$$\frac{I_{32}}{I_{22}} = \frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_L} \quad I_{22} = \frac{U_{02}}{R_{i2} + \frac{R_{i1}R_L}{R_{i1} + R_L}}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = \frac{U_{01}R_{i2} + U_{02}R_{i1}}{R_{i1}R_L + R_{i2}R_L + R_{i1}R_{i2}} = 0,4 \text{ A}$$

$$I_2 = -I_{21} + I_{22} = \frac{-U_{01}R_L + U_{02}(R_{i1} + R_L)}{R_{i1}R_L + R_{i2}R_L + R_{i1}R_{i2}} = 0,1 \text{ A}$$

$$I_1 = -I_2 + I_3 = 0,3 \text{ A}$$

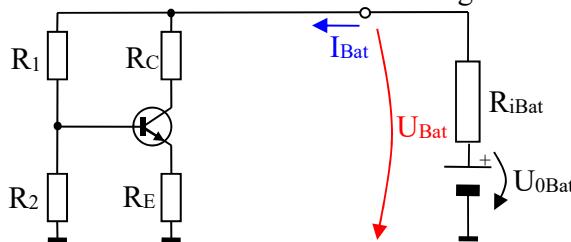
Frage 2: Es sind nur andere Zahlenwerte in die Gleichungen einzusetzen.

$$I_3 = 0,428 \text{ A} \quad I_2 = I_1 = 0,214 \text{ A}$$

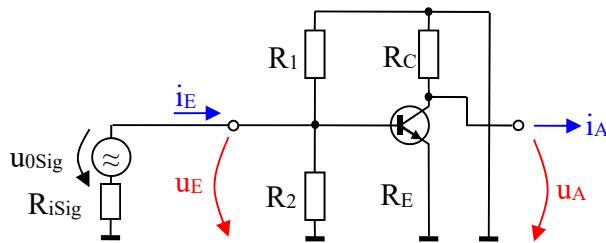
Die Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen von Aufgabe 9.6 überein.

### Zu Aufgabe 9.12

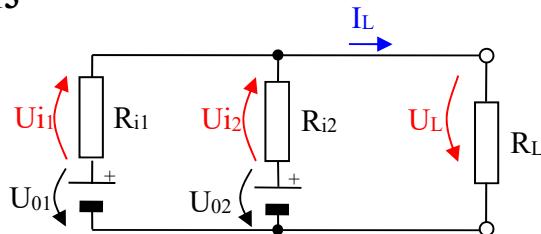
Für die Gleichstromversorgung haben die Kondensatoren einen „Widerstand“ von  $\infty$  und die Schaltung kann entsprechend vereinfacht werden. Das Ersetzen von  $U_{0\text{sig}}$  durch einen Kurzschluss tritt danach nicht mehr in Erscheinung.



Für die Signalfrequenz haben die Kondensatoren (so wurden diese dimensioniert) einen vernachlässigbaren „Widerstand“ (d.h. null, entspricht Kurzschluss). Das Ersetzen von  $U_{0\text{bat}}$  durch einen Kurzschluss tritt auch hier danach nicht mehr in Erscheinung.

**Zu Aufgabe 9.13**

Frage 1:



$$I_{c\text{ ers}} = I_k = U_{01}/R_{i1} + U_{02}/R_{i2} = 9/6 \text{ A} + 8,1/9 \text{ A} = 2,4 \text{ A} \quad (\text{hier die einfache Rechnung})$$

$$R_{i\text{ ers}} = R_{i1} \parallel R_{i2} = 6 \cdot 9 / (6 + 9) = 3,6 \Omega$$

$$\rightarrow U_{0\text{ ers}} = I_{c\text{ ers}} R_{i\text{ ers}} = 2,4 \cdot 3,6 \text{ V} = 8,64 \text{ V}$$

$$I_L = U_{0\text{ ers}} / (R_{i\text{ ers}} + R_L) = 8,64 / 21,6 \text{ A} = \underline{\underline{0,4 \text{ A}}}$$

Frage 2:

Es sind die neuen Parameter einzusetzen.

$$I_{c\text{ ers}} = 3 \text{ A}$$

$$R_{i\text{ ers}} = 3 \Omega$$

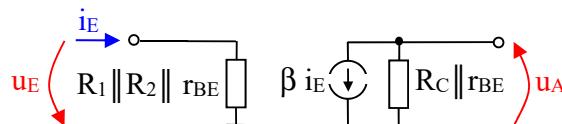
$$\rightarrow U_{0\text{ ers}} = 9 \text{ V}$$

$$I_L = 9 / 21 \text{ A} = \underline{\underline{0,428 \text{ A}}}$$

Die Ergebnisse stimmen mit den Ergebnissen der Aufgaben 9.6 und 9.11 überein.

**Zu Aufgabe 9.14**

Die Bestimmung von Ersatzzweipolen für den Ein- und Ausgang der Transistorverstärkerstufe in Bezug auf die Signalquelle (z.B. durch eine Messung im einjustierten Gleichstromarbeitspunkt entspr. Aufgabe 9.12) zeigt folgende Abbildung:



Am Ausgang erscheint für den Transistor eine gesteuerte Stromquelle mit  $I_c = \beta i_E$  ( $\beta$  Stromverstärkungsfaktor,  $i_E$  Eingangsstrom, vergleiche Abschnitt 12.3.3).

Frage 1:

$$\text{Die Eingangsspannung wird } u_E = i_E R_{i\text{Ein}} = 10 \mu\text{A} \cdot 10 \text{ k}\Omega = \underline{\underline{0,1 \text{ V}}}$$

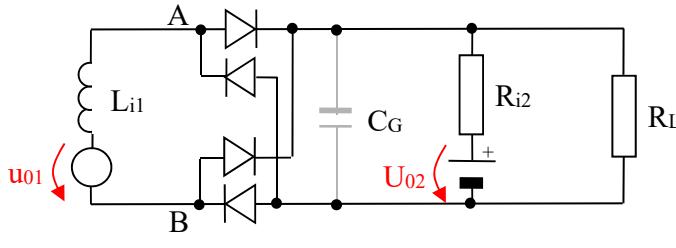
$$\text{und die Ausgangsspannung wird } u_A = I_c R_{i\text{Aus}} = \beta i_E R_{i\text{Aus}} = 200 \cdot 10 \mu\text{A} \cdot 5 \text{ k}\Omega = \underline{\underline{10 \text{ V}}} \rightarrow$$

$$v_0 = u_A/u_E = \beta i_E R_{i\text{Aus}} / i_E R_{i\text{Ein}} = \beta R_{i\text{Aus}}/R_{i\text{Ein}} = 200 \cdot 5 \text{ k}\Omega / 10 \text{ k}\Omega = 10 \text{ V} / 0,1 \text{ V} = \underline{\underline{100}}$$

$$\text{Frage 2: } R_{i\text{AusNeu}} = R_{i\text{Aus}} \parallel R_{i\text{EinNächste}} = 5 \text{ k}\Omega \parallel 10 \text{ k}\Omega = 5 \cdot 10 / 15 \text{ k}\Omega = 3,33 \text{ k}\Omega \rightarrow$$

$$u_A = I_c R_{i\text{AusNeu}} = \beta i_E R_{i\text{Aus}} = 200 \cdot 10 \mu\text{A} \cdot 3,33 \text{ k}\Omega = \underline{\underline{6,66 \text{ V}}}$$

$$v_0 = u_A/u_E = 6,66 \text{ V} / 0,1 \text{ V} = \underline{\underline{66,6}}$$

**Zu Aufgabe 9.15**

$U_{01\text{eff}}$	= 12 V
$U_{02}$	= 12 V
$L_{i1}$	= 64 $\mu\text{H}$
$C_G$	= 2000 $\mu\text{F}$
$R_{i2}$	= 0,1 $\Omega$
$R_L$	= 6 $\Omega$
$\omega_1$	= 50 Hz

Frage 1: Ein Modell der Schaltung ist mit den Möglichkeiten der Simulationssoftware einzugeben. Die Zeitverläufe der interessierenden Spannungen und Ströme können dann berechnet und grafisch ausgegeben werden.

Frage 2: Das Modell der Schaltung ist um  $C_G$  zu erweitern. Die Zeitverläufe der interessierenden Spannungen und Ströme sind neu zu berechnen und grafisch auszugeben.

**22.5 Lösungen zu Abschnitt 11****Zu Aufgabe 11.1**

Frage 1:

Bei  $f = 0$  (bzw.  $f \ll f_{\text{Grenz}}$ ) wird  $X_C \gg R$  und so fällt die gesamte Spannung an  $C$  (also am Ausgang) ab. Bei  $f = f_{\text{Grenz}}$  werden die Beträge der Spannungsabfälle an  $R$  und  $C$  gleich, und für  $f \gg f_{\text{Grenz}}$  fällt die gesamte Spannung an  $R$  ab (damit nichts am Ausgang). Es werden also tiefe Frequenzen durchgelassen und hohe gesperrt.

Frage 2:

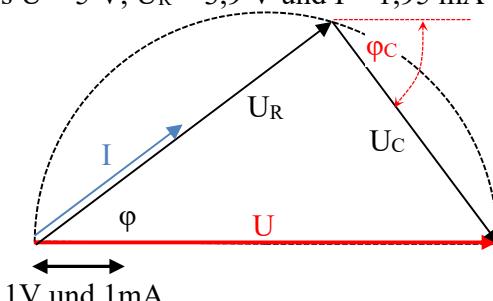
$$Z^2 = R^2 + 1/\omega^2 C^2, U^2 = U_R^2 + U_C^2 \rightarrow \text{Spannungsteilerregel}$$

$$U_R/U = R/Z = R/(R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} \rightarrow$$

$$U_R = U R / (R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} = 5V \cdot 2 \text{ k}\Omega / [(2 \text{ k}\Omega)^2 + 1/(2\pi 100\text{Hz} \cdot 1 \text{ }\mu\text{F})^2]^{1/2} = \underline{\underline{3,9 \text{ V}}}$$

$$I = U_R / R = \underline{\underline{1,95 \text{ mA}}}$$

→ in Thaleskreis  $U = 5 \text{ V}$ ,  $U_R = 3,9 \text{ V}$  und  $I = 1,95 \text{ mA}$  einzeichnen →



$U_C = \underline{\underline{3 \text{ V}}}$  sowie Winkel von  $\angle U, I > \varphi = \underline{\underline{37^\circ}}$  werden im Zeigerbild gemessen. Damit werden der Winkel von  $U_R = 37^\circ$  und von  $U_C = -53^\circ$  gegen die Richtung von  $U$ .

Frage 3:

$$U_C = (U^2 - U_R^2)^{1/2} = [(5 \text{ V})^2 - (3,9 \text{ V})^2]^{1/2} = \underline{\underline{3,1 \text{ V}}}$$

$$\varphi = \arctan(U_C / U_R) = 3,1 \text{ V} / 3,9 \text{ V} = \underline{\underline{38,5^\circ}}, \varphi_C = -\arctan(U_R / U_C) = -3,9 \text{ V} / 3,1 \text{ V} = \underline{\underline{-51,5^\circ}}$$

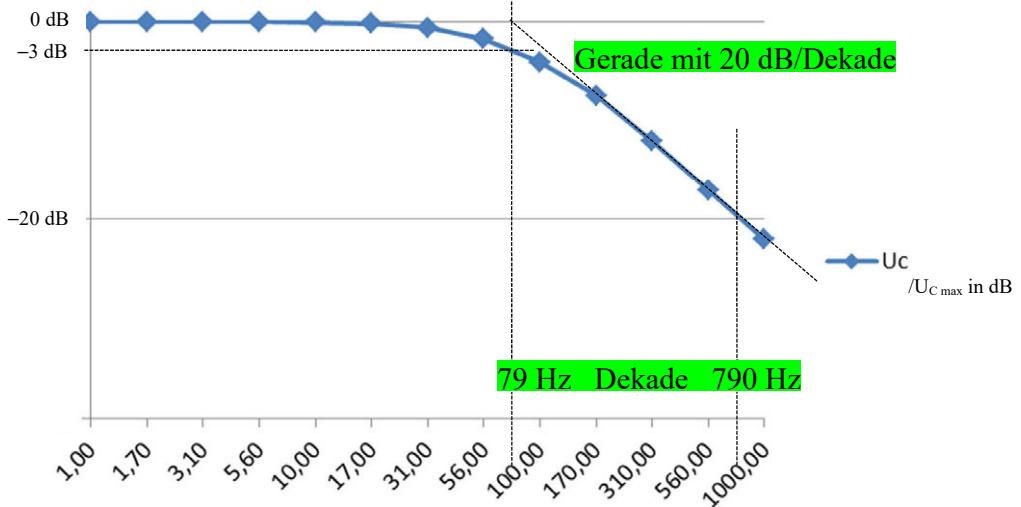
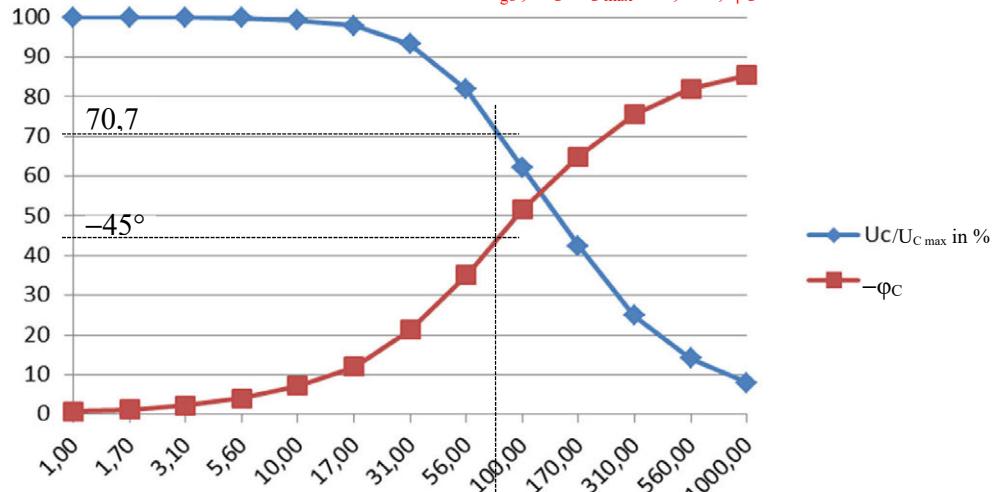
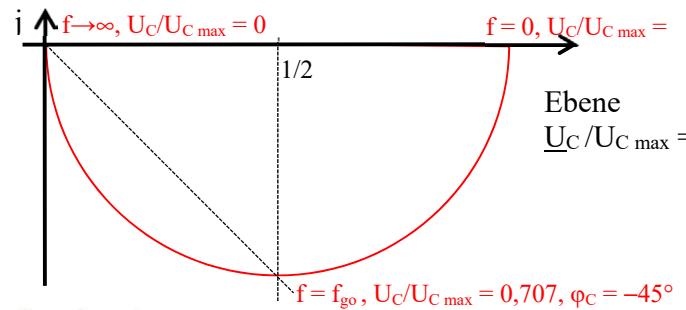
Frage 4:

$$1/(2\pi f_{\text{go}} C) = R \rightarrow f_{\text{go}} = 1/(2\pi CR) = 1/(2\pi 1\mu\text{F} \cdot 2\text{k}\Omega) = \underline{\underline{79 \text{ Hz}}}$$

So war bei 100 Hz  $U_C$  bereits kleiner als  $U_R$ .

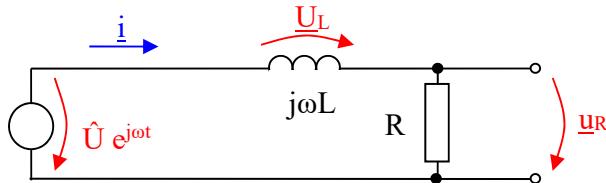
Frage 5:

f /Hz	$\omega$	$U_c/U_{C \text{ max}} \text{ in \%}$	$-\varphi_c$	$(1/\omega C)$	R	$(R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2}$
1,00	6,28318531	99,99	0,719962104	159154,9431	2000	159167,5090
1,70	10,6814150	99,98	1,223813852	93620,55476	2000	93641,91515
3,10	19,4778745	99,92	2,230871969	51340,30422	2000	51379,24520
5,60	35,1858377	99,75	4,025363986	28420,52555	2000	28490,81032
10,00	62,8318531	99,22	7,162455807	15915,49431	2000	16040,66579
17,00	106,814150	97,79	12,05873887	9362,055476	2000	9573,300514
31,00	194,778745	93,18	21,28377354	5134,030422	2000	5509,833789
56,00	351,858377	81,78	35,13469315	2842,052555	2000	3475,235636
79,00	496,371639	70,97	44,79135412	2014,619533	2000	2838,783518
100,00	628,318531	62,27	51,48811275	1591,549431	2000	2555,979184
170,00	1068,14150	42,39	64,91557566	936,2055476	2000	2208,275532
310,00	1947,78745	24,86	75,60294777	513,4030422	2000	2064,844470
560,00	3518,58377	14,07	81,91226803	284,2052555	2000	2020,092232
1000,00	6283,18531	7,933	85,45013469	159,1549431	2000	2006,322580



Mit  $U_C = U(1/\omega C) / (R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2}$  und  $\varphi_C = -\arctan\{(1/\omega C)/R\} \rightarrow$  Ortskurve sowie eine lineare und logarithmische (in dB) Darstellung über der logarithmischen Frequenz. Die Ausgangsamplitude eines Tiefpasses 1. Ordnung nimmt nach der Grenzfrequenz mit 20 dB/Dekade ab (1/10 der Anfangsamplitude bei  $10 \cdot f_{go}$ ).

Zusatzfrage:



### Zu Aufgabe 11.2

Frage 1:

Bei  $f = 0$  (bzw.  $f \ll f_{Grenz}$ ) wird  $X_C \gg R$  und so fällt die gesamte Spannung an C ab (damit nichts am Ausgang). Bei  $f = f_{Grenz}$  werden die Beträge der Spannungsabfälle an R und C gleich, und für  $f \gg f_{Grenz}$  fällt die gesamte Spannung an R ab (also am Ausgang). Es werden demnach hohe Frequenzen durchgelassen und tiefe gesperrt.

Frage 2:

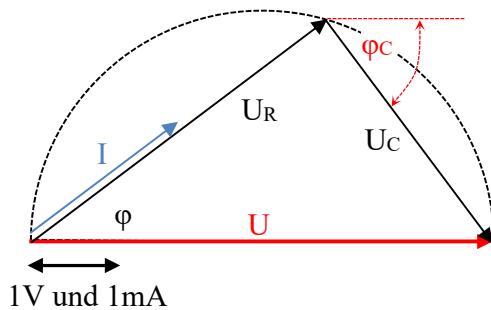
$$Z^2 = R^2 + 1/\omega^2 C^2, U^2 = U_R^2 + U_C^2 \rightarrow \text{Spannungsteilerregel}$$

$$U_R/U = R/Z = R / (R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} \rightarrow$$

$$U_R = U R / (R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2} = 5 \text{ V} \cdot 2 \text{ k}\Omega / [(2 \text{ k}\Omega)^2 + 1/(2\pi 100 \text{ Hz} \cdot 1 \mu\text{F})^2]^{1/2} = \underline{\underline{3,9 \text{ V}}}$$

$$I = U_R / R = \underline{\underline{1,95 \text{ mA}}}$$

→ in Thaleskreis  $U = 5 \text{ V}$ ,  $U_R = 3,9 \text{ V}$  und  $I = 1,95 \text{ mA}$  einzeichnen →



$U_C = \underline{\underline{3 \text{ V}}}$  sowie Winkel von  $\langle U, I \rangle \varphi = \underline{\underline{37^\circ}}$  werden im Zeigerbild gemessen. Damit werden der Winkel von  $U_R = 37^\circ$  Winkel und von  $U_C = -53^\circ$  gegen die Richtung von U.

Frage 3:

$$U_C = (U^2 - U_R^2)^{1/2} = [(5 \text{ V})^2 - (3,9 \text{ V})^2]^{1/2} = \underline{\underline{3,1 \text{ V}}}$$

$$\varphi = \arctan(U_C / U_R) = 3,1 \text{ V} / 3,9 \text{ V} = \underline{\underline{38,5^\circ}}, \varphi_C = -\arctan(U_R / U_C) = -3,9 \text{ V} / 3,1 \text{ V} = \underline{\underline{-51,5^\circ}}$$

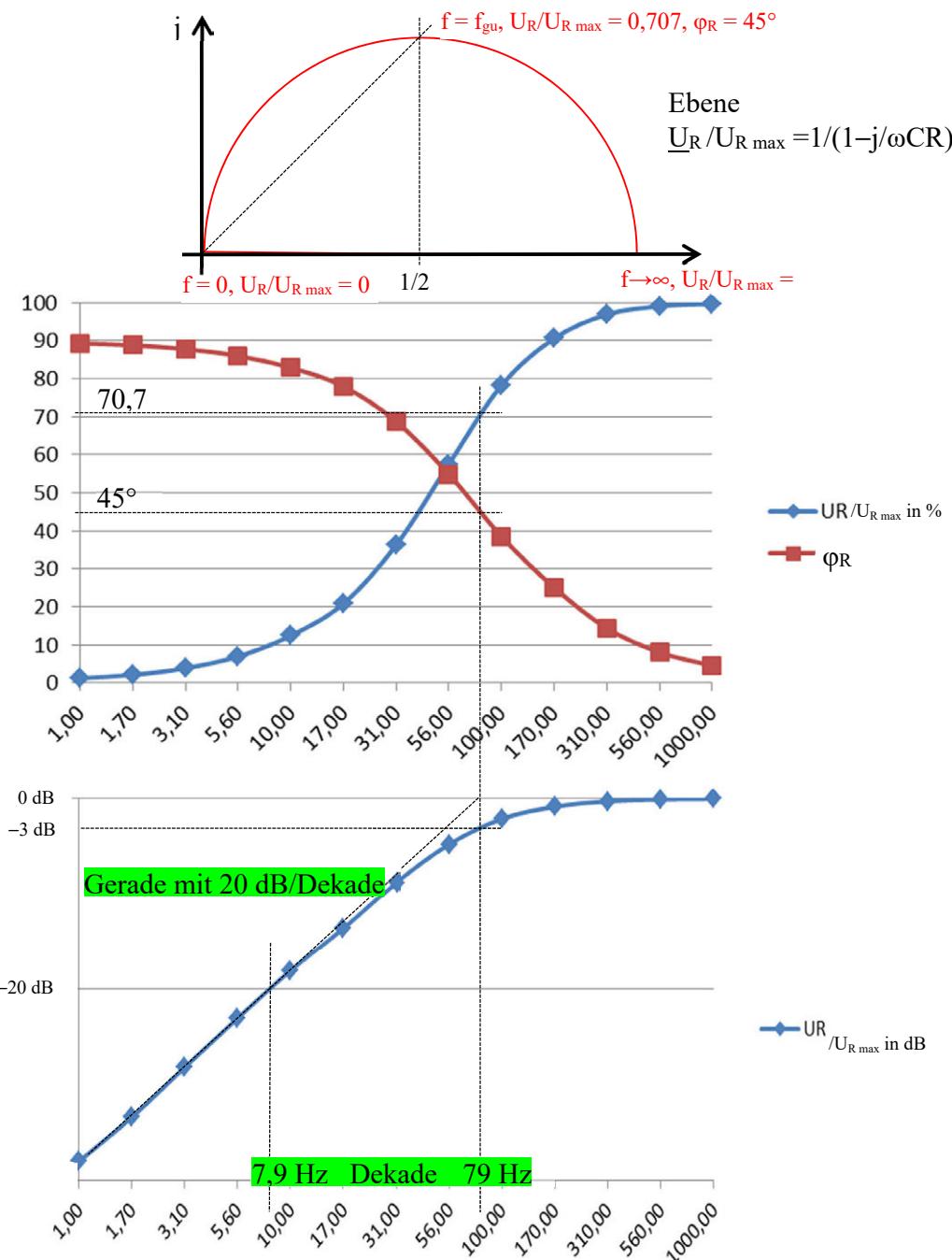
Frage 4:

$$1/(2\pi f_{gu} C) = R \rightarrow f_{gu} = 1/(2\pi CR) = 1/(2\pi 1 \mu\text{F} \cdot 2 \text{ k}\Omega) = \underline{\underline{79 \text{ Hz}}}$$

So war bei 100 Hz  $U_C$  bereits kleiner als  $U_R$  (der Ausgangsspannung).

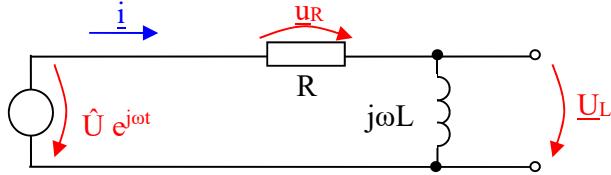
Frage 5:

$f / \text{Hz}$	$\omega$	$U_R / U_{R \max} \text{ in \%}$	$\varphi = \varphi_R$	$(1 / \omega C)$	$R$	$(R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2}$
1,00	6,28318531	1,26	89,2800379	159154,9431	2000	159167,5090
1,70	10,6814150	2,14	88,7761861	93620,55476	2000	93641,91515
3,10	19,4778745	3,89	87,7691280	51340,30422	2000	51379,24520
5,60	35,1858377	7,02	85,9746360	28420,52555	2000	28490,81032
10,00	62,8318531	12,47	82,8375442	15915,49431	2000	16040,66579
17,00	106,814150	20,89	77,9412611	9362,055476	2000	9573,300514
31,00	194,778745	36,30	68,7162265	5134,030422	2000	5509,833789
56,00	351,858377	57,55	54,8653068	2842,052555	2000	3475,235636
79,00	496,371639	70,45	44,7913541	2014,619533	2000	2838,783518
100,00	628,318531	78,25	38,5118873	1591,549431	2000	2555,979184
170,00	1068,14150	90,57	25,0844243	936,2055476	2000	2208,275532
310,00	1947,78745	96,86	14,3970522	513,4030422	2000	2064,844470
560,00	3518,58377	99,01	8,08773197	284,2052555	2000	2020,092232
1000,00	6283,18531	99,68	4,54986531	159,1549431	2000	2006,322580



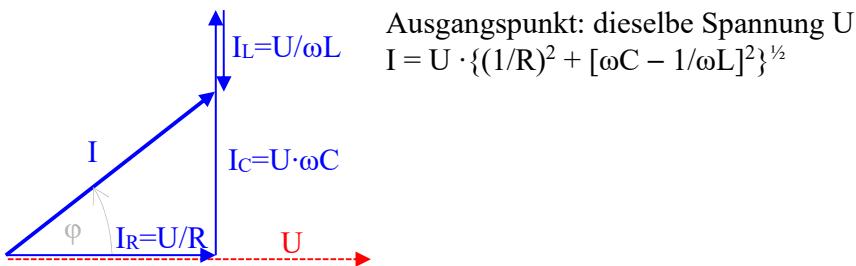
Mit  $U_R = UR / (R^2 + 1/\omega^2 C^2)^{1/2}$  und  $\varphi_R = \arctan(R/\omega C) \rightarrow$  Ortskurve sowie eine lineare und logarithmische (in dB) Darstellung über der logarithmischen Frequenz. Die Ausgangsamplitude eines Hochpasses 1. Ordnung nimmt bis zur Grenzfrequenz mit 20 dB/Dekade zu (1/10 der Endamplitude bei  $f_{gu}/10$ ).

Zusatzfrage:



### Zu Aufgabe 11.3

Frage 1:



Frage 2:

$$U = I / G_{ges} = I / \{(1/R)^2 + [\omega C - 1/\omega L]^2\}^{1/2}, \varphi = \arctan\{(\omega C - 1/\omega L)/(1/R)\}$$

$$U = 2,5 \text{ mA} / \{1/(2 \text{ k}\Omega)^2 + [2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 1 \mu\text{F} - 1/(2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 40 \text{ mH})]^2\}^{1/2} = 64 \text{ mV}$$

$$\varphi_I = \arctan\{(\omega C - 1/\omega L)/(1/R)\} = \arctan\{[2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 1 \mu\text{F} - 1/(2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 40 \text{ mH})] \cdot 2000 \Omega\}$$

$$\varphi_I = -89^\circ, \varphi_U = 89^\circ$$

(d.h.,  $1/\omega L > \omega C$  und so läuft der Strom um  $89^\circ$  der Spannung hinterher)

Frage 3:

$$f_0 = 1/[2\pi(C L)^{1/2}] = 1/[2\pi(1 \mu\text{F} \cdot 40 \text{ mH})^{1/2}] = 796 \text{ Hz}$$

Bei 100 Hz war somit  $\omega L = 25 \Omega$  in der Parallelschaltung der kleinste Widerstand mit dem größten Strom; dessen Leitwert wurde durch C nur geringfügig verkleinert.

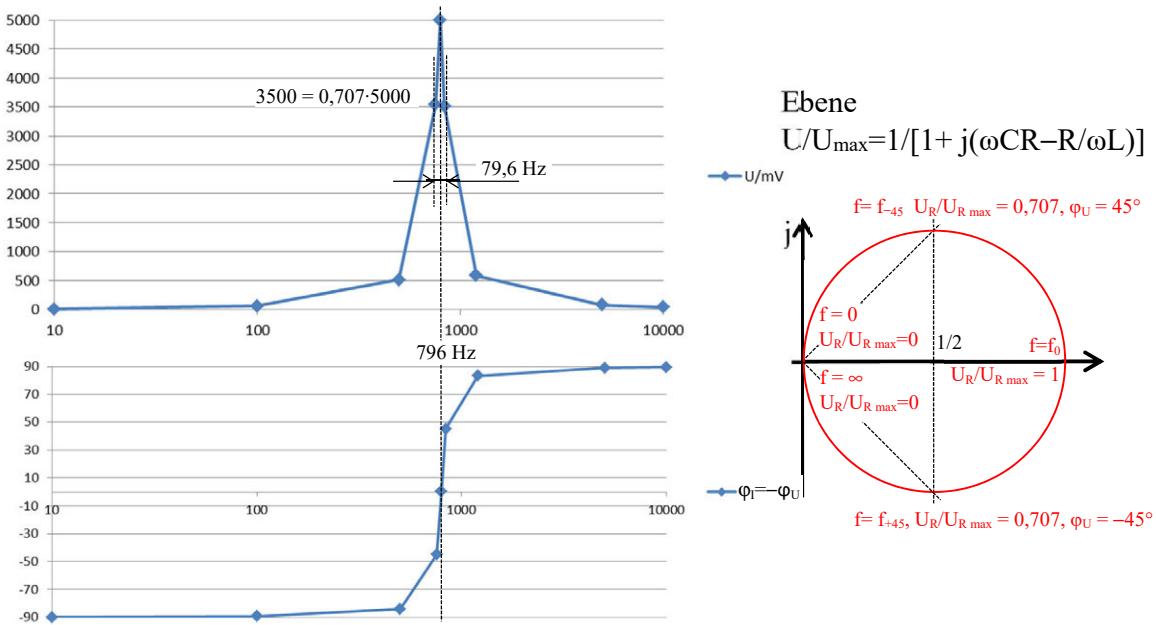
$$\Delta f_B = f_0 / [R(C/L)^{1/2}] = 1/(2\pi RC) = 1/(2\pi \cdot 2000 \Omega \cdot 1 \mu\text{F}) = 79,6 \text{ Hz}$$

Das ist ein relativ schmales Band.

$$\Delta f_B = f_0/10, \text{ d.h. } Q = 10 \text{ und bei } f_0 \text{ wird } I_C = I_L = Q \cdot I = 10 \cdot I = 25 \text{ mA} .$$

Frage 4:

f/Hz	$2\pi \cdot f \cdot 1 \mu\text{F}$	$1/(2\pi \cdot f \cdot 40 \text{ mH})$	$B_C - B_L$	$B^2 + 1/R^2$	U/mV	$\varphi_I (= -\varphi_U)$
10	$6,28319 \cdot 10^{-5}$	0,397887358	-0,39782453	0,158264603	6,284172701	-89,9279887
100	0,000628319	0,039788736	-0,03916042	0,001533788	63,83477051	-89,2684875
757	0,004756371	0,005256108	-0,00049974	$4,99737 \cdot 10^{-7}$	3536,465690	-44,9848978
796	0,005001416	0,004998585	2,8306 $\cdot 10^{-6}$	$2,50008 \cdot 10^{-7}$	4999,919878	0,32436037
837	0,005259026	0,004753732	0,00050529	$5,05322 \cdot 10^{-7}$	3516,865784	45,3017367
1000	0,006283185	0,003978874	0,00230431	$5,55985 \cdot 10^{-6}$	1060,250221	77,7574828
10000	0,062831853	0,000397887	0,06243397	0,003898250	40,04102264	89,5411588

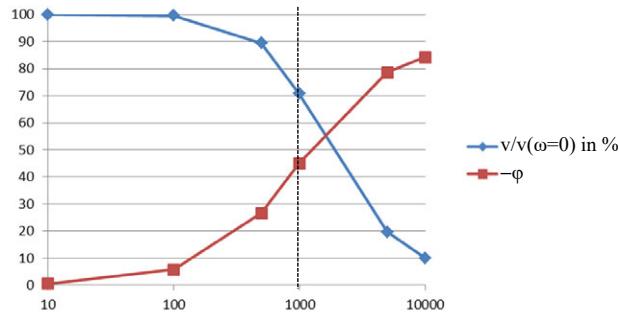
**Zu Aufgabe 11.4**

Frage 1:

$$\underline{v}_u = -\frac{R_F \| 1/j\omega C_F}{R_L} = \frac{R_F}{R_L} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_F R_F} = v_u(\omega = 0) \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_F R_F} \rightarrow \omega_{go} = 1/(C_F R_F) \rightarrow$$
 $C_F = 1/(2\pi f_{go} R_F) = 1/(2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 100 \text{ k}\Omega) = \underline{\underline{1,59 \text{ nF}}}$

Frage 2:

$$\frac{v_u}{v_u(\omega = 0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C_F R_F)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = -\arctan(\omega C_F R_F) \quad (-, \text{ weil im Nenner})$$

**Zu Aufgabe 11.5**

Frage 1:

Siehe Aufgabe 4.11

$$P_W = 3 U_{\text{eff LI-N}} \cdot I_{\text{eff LI-N}} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 220 \text{ V} \cdot 0,93 \text{ A} \cdot 0,78 = \underline{\underline{479 \text{ W}}}$$

$$P_s = 3 U_{\text{eff LI-N}} \cdot I_{\text{eff LI-N}} = 3 \cdot 220 \text{ V} \cdot 1,6 \text{ A} = \underline{\underline{614 \text{ W}}}$$

$$P_b = \sqrt{P_s^2 - P_W^2} = \underline{\underline{384 \text{ W}}}$$

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{\text{Mech}}}{P_W} = \frac{330 \text{ W}}{479 \text{ W}} = 0,69 = \underline{\underline{69 \%}}$$

Frage 2:

$$R = \frac{U_{\text{eff L1-N}} \cos \varphi}{I_{\text{eff L1-N}}} = \frac{P_w / 3}{I_{\text{eff L1-N}}^2} = \frac{479 \text{ W}/3}{0,93^2 \text{ A}^2} = 184,6 \Omega$$

$$L = \frac{U_{\text{eff L1-N}} \sin \varphi}{\omega I_{\text{eff L1-N}}} = \frac{P_b / 3}{\omega I_{\text{eff L1-N}}^2} = \frac{384 \text{ W}/3}{2 \pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 0,93^2 \text{ A}^2} = 0,471 \text{ H}$$

Frage 3:

Es können je drei Kondensatoren zwischen den Leitern angeschlossen werden. Leistung ist aus der Sicht der drei Leiter gleich der zwischen Leitern und Nullpunkt.

$$P_{bC} = U_{\text{eff L1-L2}}^2 \omega C = P_b / 3 \rightarrow$$

$$C = P_b / (3U_{\text{eff L1-L2}}^2 \omega) = 384 \text{ W} / (3 \cdot 380^2 \text{ V}^2 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}) = 2,8 \mu\text{F}$$

Die drei Kondensatoren müssen für Wechselstrom ausgelegt sein.

### Zu Aufgabe 11.6

Frage 1:

Es kann eine Schaltung analog zu Abb. 11.35 modelliert und simuliert werden. Die Grund- und die ersten Oberschwingungen ( $n = 3, 5, 7$ ) werden einzeln grafisch ausgegeben.

Frage 2:

Die Grund- und die ersten Oberschwingungen ( $n = 3, 5, 7$ ) werden entsprechend addiert grafisch ausgegeben.

Frage 3:

Das Amplituden- und das Phasenspektrum ( $U_{cn}$  und  $\varphi_n$ ) berechnen lassen und grafisch anzeigen.

### Zu Aufgabe 11.7

Frage 1:

Es kann eine Schaltung mit einer Rechteckquelle modelliert und simuliert werden. Das Amplituden- und das Phasenspektrum berechnen lassen und grafisch anzeigen ( $U_{an}$  und  $U_{bn}$  oder  $U_{cn}$  und  $\varphi_n$ ).

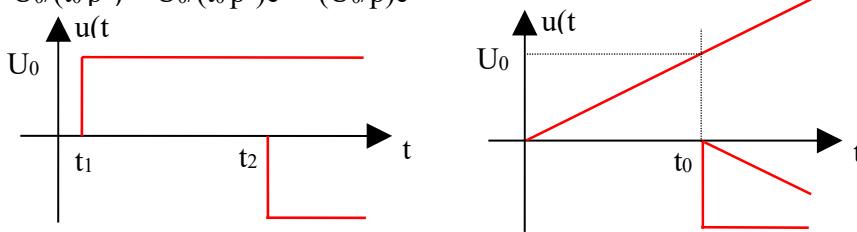
Frage 2: Es können die Signale grafisch angegeben werden.

### Zu Aufgabe 11.8

Linkes Signal  $u(t) = U_0 \{1(t-t_1) - 1(t-t_2)\} \leftrightarrow U(p) = (U_0/p)(e^{pt_1} - e^{pt_2})$

Rechtes Signal  $u(t) = (U_0 t) \cdot 1(t/t_0) - U_0(t-t_0) \cdot 1(t-t_0) \leftrightarrow$

$U(p) = U_0/(t_0 p^2) - U_0/(t_0 p^2)e^{pt_0} - (U_0/p)e^{pt_0}$



Beachte: Bei Nutzung von Tabelle 10.1 muss immer anstatt „t“ „(t - tx)“ stehen.

### Zu Aufgabe 11.9

$$U(p) = (I_c/p)/(1/R + pC + 1/pL) = (I_c/C)/[p^2 + p/RC + 1/4R^2C^2 - 1/4R^2C^2 + 1/LC]$$

$$U(p) = (I_c/C)/[(p + 1/2RC)^2 + (1/LC - 1/4R^2C^2)] \quad (\text{nach Tabelle 10.1, 6. Zeile, 4. Spalte})$$

$$u(t) = (I_c/C) (1/LC - 1/4R^2C^2)^{-1/2} e^{t/2RC} \sin\{t (1/LC - 1/4R^2C^2)^{-1/2}\}$$

Dabei folgt die Resonanzfrequenz aus  $\omega_0^2 = 1/LC$ , die Dämpfung aus  $\delta = 1/2RC$  bzw. die Eigenfrequenz aus  $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ .

$$I_x/I = Z_{\text{ges}}/X = 1/Y_{\text{ges}}X$$

$$I_R = (I_c/p)/(1/R + pC + 1/pL)R = (I_c/RC)/[(p + 1/2RC)^2 + (1/LC - 1/4R^2C^2)]$$

(nach Tabelle 10.1, 6. Zeile, 4. Spalte)

$$i_R(t) = (I_c/\omega_e CR) e^{-t/2RC} \sin\{\omega_e t\} = u(t)/R$$

$$I_L = (I_c/p)/(1/R + pC + 1/pL)pL = (I_c/LC)/p[(p + 1/2RC)^2 + (1/LC - 1/4R^2C^2)]$$

(nach Tabelle 10.1, 8. Zeile, 4. Spalte)

$$i_L(t) = I_c \{1 - e^{-t/2RC} [\cos(\omega_e t) + (\delta/\omega_e)\sin(\omega_e t)]\} = (1/L) \int u(t) dt$$

$$I_C = (I_c/p) pC/(1/R + pC + 1/pL) = I_c p/[(p + 1/2RC)^2 + (1/LC - 1/4R^2C^2)]$$

(nach Tabelle 10.1, 7. Zeile, 4. Spalte)

$$i_C(t) = I_c e^{-t/2RC} [\cos(\omega_e t) - (\delta/\omega_e)\sin(\omega_e t)] = C du/dt$$

### Zu Aufgabe 11.10

$$\delta = \omega_0 \rightarrow R/2L = (LC)^{-1/2}$$

$$R = 2L (LC)^{-1/2} = 2(L/C)^{1/2} = 2(60 \mu H/200 \mu F)^{1/2} = \underline{1,1 \Omega}$$

### Zu Aufgabe 11.11

Frage 1:

$$U_2(p)/U_m(p) = 1/pC(R + 1/pC) = 1/(pCR + 1)$$

$$U_m(p)/U_1(p) = (1/pC)[(R + 1/pC)/(R + 1/pC)]$$

$$U_m(p)/U_1(p) = (p/CR + 1/C^2R^2)[p^2 + 3p/CR + 1/C^2R^2]^{-1}$$

$$U_2(p)/U_1(p) = (1/C^2R^2)(pCR + 1)/(pCR + 1) [p^2 + 3p/CR + 1/C^2R^2]^{-1}$$

$$U_2(p)/U_1(p) = (1/C^2R^2) [p^2 + 3p/CR + 1/C^2R^2]^{-1}$$

Nur für den aperiodischen Fall kann es als Filter genutzt werden.

$$U_2(p)/U_1(p) = (1/C^2R^2) [(p - p_1)(p - p_2)]^{-1} \text{ mit } p_{1,2} = -3/2CR \pm [(3/2CR)^2 - 1/C^2R^2]^{1/2} = -\delta_{1,2}$$

$$U_2(p)/U_1(p) = (1/C^2R^2) [(p + \delta_1)(p + \delta_2)]^{-1}$$

$$U_2(p) = (U_0/C^2R^2) \{p[(p + \delta_1)(p + \delta_2)]\}^{-1} \quad (\text{Tabelle 10.1, 8. Zeile, 2. Spalte})$$

$$u_2(t) = U_0 [\omega_0^2/\delta_1\delta_2(\delta_1 - \delta_2)] [\delta_1(1 - e^{-\delta_2 t}) - \delta_2(1 + e^{-\delta_1 t})] \quad \text{mit } \omega_0^2 = 1/C^2R^2$$

Damit werden  $u_2(t=0) = 0$ ,  $u_2(t \rightarrow \infty) = U_0$ .

Besser wäre der aperiodische Grenzfall mit  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  (Tabelle 10.1, 3. Zeile, 4. Spalte)

$$u_2(t) = U_0 [\omega_0^2/\delta^2] [1 - e^{-\delta t} - t \delta e^{-\delta t}] \quad \text{mit } \omega_0^2 = 1/C^2R^2$$

Damit werden  $u_2(t=0) = 0$ ,  $u_2(t \rightarrow \infty) = U_0$  mit zwei gleichen Zeitkonstanten, was zu 40 dB pro Dekade führt.

Frage 2:

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = (1/C^2R^2) [(p + \delta_1)(p + \delta_2)]^{-1} \quad \text{bzw. } H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = (1/C^2R^2) (p + \delta)^{-2}$$

### Zur zusätzlichen Aufgabe 11.12

Frage 1:

Überprüfung:  $\tau = L/R = 100 \text{ mH}/10 \Omega = 10 \text{ ms}$  ist ausreichend groß gegenüber 1 ms.

$di/dt = U_L/L \approx \text{const} \rightarrow I \approx I_m = \text{const}$  (mit  $v = t_E/(t_E + t_A)$  und  $t_E + t_A = T$ )

→ für Einschalten  $U_L = L di/dt = U_0 - I_m R \rightarrow \Delta I_{\text{Ein}} = t_E (U_0 - I_m R)/L = v T (U_0 - I_m R)/L$

→ für Ausschalten  $U_L = L di/dt = -I_m R \rightarrow \Delta I_{\text{Aus}} = t_A (-I_m R)/L = (1-v) T (-I_m R)/L$

$\Delta I = t di/dt \rightarrow \Delta I_{\text{Ein}} = -\Delta I_{\text{Aus}} = v T (U_0 - I_m R)/L = (1-v) T I_m R/L \rightarrow$

$v U_0 = -I_m R \rightarrow I_m = v U_0/R$

→ für Einschalten  $U_L = U_0 (1 - v)$

→ für Ausschalten  $U_L = -v U_0$

→  $P_{\text{Quelle}} = v U_0 I_m = v U_0 v U_0/R$

→  $P_{\text{Last}} = R I_m^2 = R (v U_0/R)^2$

Überprüfung:  $P_{\text{Quelle}} = v U_0 v U_0/R = R (v U_0/R)^2 = P_{\text{Last}} = (v U_0)^2/R$

(Bei idealen Schaltern ohne  $R_i$  und  $R_L$  treten keine Verluste auf.)

Frage 2:

$I_m = v U_0/R \rightarrow I_m(0,1) = 0,1 \cdot 10 \text{ V}/10 \Omega = 0,1 \text{ A}; I_m(0,5) = 0,5 \text{ A}; I_m(0,9) = 0,9 \text{ A}$

$U_R = R I_m \rightarrow U_R(0,1) = 1 \text{ V}; U_R(0,5) = 5 \text{ V}; U_R(0,9) = 9 \text{ V}$

Der mittlere Eingangsstrom  $I_{\text{Ein}}$  wird:

$I_{\text{Ein}} = v I_m = v^2 U_0/R \rightarrow I_{\text{Ein}}(0,1) = 0,01 \text{ A}; I_{\text{Ein}}(0,5) = 0,25 \text{ A}; I_{\text{Ein}}(0,9) = 0,81 \text{ A}$

## 22.6 Lösungen zu Abschnitt 12

### Zu Aufgabe 12.1

Frage 1: Die Berechnung erfolgt nach der Formel  $\kappa = q_0(b_n n + b_p p)$  und Tabelle 12.2.

Germanium (Ge):

$$\kappa = q_0(b_n n + b_p p) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \left( 3900 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot 2,33 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} + 1900 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot 2,33 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \right)$$

$$\kappa = \underline{\underline{21,65 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} \Omega^{-1}}}$$

Silicium (Si):

$$\kappa = \underline{\underline{5,38 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \Omega^{-1}}}$$

Galliumarsenid (GaAs):

$$\kappa = \underline{\underline{1,85 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \Omega^{-1}}}$$

Kupfer (Cu): (bei  $p = 0$ )

$$\kappa = \underline{\underline{546,3 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1} \Omega^{-1}}}$$

Frage 2: Der Widerstand folgt aus der Bemessungsgleichung  $R = \frac{1}{\kappa \cdot A} = \frac{U}{I}$  (→ der Strom).

Germanium (Ge):

$$I = \kappa U \frac{A}{1} = 21,65 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1} \cdot 5 \text{ V} \cdot \frac{0,1 \cdot 0,1 \text{ mm}^2}{0,1 \text{ mm}} = \underline{\underline{1,08 \cdot \text{mA}}} \approx 1 \text{ mA}$$

Silicium (Si):

$$I = \underline{\underline{269 \cdot \text{nA}}} \approx 300 \text{ nA}$$

Galliumarsenid (GaAs):

$$\underline{\underline{I = 92,5 \cdot pA \approx 100 \ pA}}$$

Kupfer (Cu):

$$\underline{\underline{I = 27 \cdot 10^3 \ A}}$$

Zusatzaufgabe:

Das entspricht etwa den **Sperrströmen** einer Diode **dieser Materialien**.

(Bei Kupfer können an die kleine Probe keine 5 V angelegt werden.)

### Zu Aufgabe 12.2

Frage 1: Alle Phosphoratome geben bei Raumtemperatur ein Valenzelektron ins Leitband ab.

$$\underline{\underline{n = 1 \cdot 10^{15} \ cm^{-3}}}$$

Mit dem Massenwirkungsgesetz  $n \cdot p = n_i^2$  und Tabelle 12.2 folgt:

$$p = n_i^2 / n = (1,6 \cdot 10^{10} \ cm^{-3})^2 / (10^{15} \ cm^{-3}) = \underline{\underline{2,56 \cdot 10^5 \ cm^{-3}}}$$

$$\kappa = q_0 (b_n n + b_p p) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot \left( 1500 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} + 600 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot \cancel{2,56 \cdot 10^5 \ cm^{-3}} \right)$$

$$\underline{\underline{\kappa = 0,24 \ cm^{-1} \Omega^{-1}}} \quad (\text{vergleiche } \kappa = 5,38 \cdot 10^{-6} \ cm^{-1} \Omega^{-1} \text{ bei Eigenleitung})$$

$$\text{Frage 2: Mit } R = \frac{1}{\kappa \cdot A} = \frac{1}{q_0 \cdot b_n n \cdot A} \text{ (bei } p \approx 0) \rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{q_0 \cdot R \cdot n \cdot A} = \frac{8 \text{ mm}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 400 \Omega \cdot 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \cdot 1 \text{ mm}^2} = 1250 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}.$$

Die Beweglichkeit hat also gegenüber  $1500 \text{ cm}^2/\text{Vs}$  etwas abgenommen.

### Zu Aufgabe 12.3

Mit  $S = I / A_{\perp} = I / (h b) = q_0 v_D n \rightarrow$

$v_D = I / (h b q_0 n) \rightarrow$  Lorentzkraft  $\rightarrow$  el. Feld  $\rightarrow$  Spannung (über  $h \cdot b$  sind  $v_D$ ,  $F$ ,  $E = \text{const}$  und  $v_D$  senkrecht zu  $\mathbf{B}$  sowie beide senkrecht zu  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}$ )

$$U_H = b E = b F / q_0 = b (q_0 v_D B) / q_0 = b v_D B = b \{ I / (h b q_0 n) \} B = I B / (h q_0 n)$$

$$U_H = 1 \cancel{mA} 2000 \cancel{Vs} 10^{-4} \cancel{cm}^2 / (0,02 \cancel{cm} 1,6 \cdot 10^{19} \cancel{As} 10^{15} \cancel{cm}^{-3})$$

$$U_H = 2 \text{ V} / (0,02 \cdot 1,6)$$

$$U_H = \underline{\underline{62,5 \text{ V}}}$$

In der Halbleiterentwicklung wird dieser Zusammenhang umgekehrt zur Messung der Trägerkonzentration genutzt:  $U_H = I B / (h q_0 n) \rightarrow n = I B / (h q_0 U_H)$

(Offensichtlich sind 2000 T bei  $n = 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  ein recht hoher Wert. Bei einer Dotierung von  $n = 1 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  würden nur 0,625 V entstehen.)

### Zu Aufgabe 12.4

Photonen entsprechender Energie (Bandabstand) erzeugen durch Fotogeneration Elektronen/Loch-Paare. Dadurch wird die Leitfähigkeit durch mehr bewegliche Träger erhöht. Soll dieser Effekt möglichst deutliche Auswirkungen auf die Leitfähigkeit haben, muss die Leitfähigkeit ohne Lichteinstrahlung möglichst klein sein.

Damit ergibt sich eine niedrige Dotierung.

**Zu Aufgabe 12.5**

Wärmeenergie ermöglicht die Generation von Elektronen/Loch-Paaren, dadurch wird die Leitfähigkeit erhöht. Soll dieser Effekt möglichst deutliche Auswirkungen auf die Leitfähigkeit haben, muss die Leitfähigkeit bei Raumtemperatur möglichst klein sein.

**Damit ergibt sich eine niedrige Dotierung.**

Der Widerstand von  $1000 \Omega$  für  $20^\circ\text{C}$  kann durch Querschnittsfläche und Dicke (Länge) eingestellt werden.

**Zu Aufgabe 12.6**

Frage 1: Mit  $n_p \cdot p_p = n_i^2 = 2,56 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-6}$  und völlige Ausnutzung von  $n_D, n_A$  bei  $300 \text{ K} \rightarrow$

$$\text{Für die P-Schicht } n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{2,56 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-6}}{10^{17} \text{ cm}^{-3}} = \underline{\underline{2560 \text{ cm}^{-3}}}.$$

Für die N-Schicht wird gleichfalls  $p_n = \underline{\underline{2560 \text{ cm}^{-3}}}$ .

Frage 2:  $n_p/n_n = f_F(W_{LP}\text{-Elektrode}) / f_F(W_{LN}\text{-Elektrode})$  mit  $f_F = \left(1 + e^{\frac{(W-W_F)}{k \cdot T}}\right)^{-1}$ , somit wird

$$\begin{aligned} \frac{n_p}{n_n} &= \frac{f_F(W_{LP})}{f_F(W_{LN})} = \frac{\left(1 + e^{\frac{(W_{LP}-W_F)}{k \cdot T}}\right)^{-1}}{\left(1 + e^{\frac{(W_{LN}-W_F)}{k \cdot T}}\right)^{-1}} = \frac{\left(1 + e^{\frac{(W_{LN}-W_F)}{k \cdot T}}\right)}{\left(1 + e^{\frac{(W_{LP}-W_F)}{k \cdot T}}\right)} \approx \frac{\left(e^{\frac{(W_{LN}-W_F)}{k \cdot T}}\right)}{\left(e^{\frac{(W_{LP}-W_F)}{k \cdot T}}\right)} = e^{\left[\frac{(W_{LN}-W_F)}{k \cdot T} - \frac{(W_{LP}-W_F)}{k \cdot T}\right]} \\ \ln\left(\frac{n_p}{n_n}\right) &= \ln\left(e^{\left[\frac{(W_{LN}-W_F)}{k \cdot T} - \frac{(W_{LP}-W_F)}{k \cdot T}\right]}\right) = \frac{W_{LN} - W_{LP}}{k \cdot T}. \end{aligned}$$

Mit  $W_{LN} = -q_0 \varphi_N$  und  $W_{LP} = -q_0 \varphi_P$  (siehe Abb. 12.10 Energien negativ und  $W_{LN} < W_{LP}$ ;  $\varphi_N$  und  $\varphi_P$  sind die Potentiale an den Elektroden der N- und P-Schicht) ergibt sich:

$$\ln\left(\frac{n_p}{n_n}\right) = \frac{-q_0 \cdot \varphi_N - (-q_0) \cdot \varphi_P}{k \cdot T} = (\varphi_N - \varphi_P) \cdot \frac{-q_0}{k \cdot T}.$$

Mit  $kT/q_0 = 26 \text{ mV}$  wird daraus:

$$U_D = \ln\left(\frac{n_p}{n_n}\right) \cdot \frac{k \cdot T}{-q_0} = \ln\left(\frac{2560 \text{ cm}^{-3}}{10^{17} \text{ cm}^{-3}}\right) \cdot (-26 \text{ mV}) = (-31,3) \cdot (-26 \text{ mV}) = \underline{\underline{0,81 \text{ V}}}.$$

**Zu Aufgabe 12.7**

Frage 1: Aus I folgt die Anzahl (N) Elektronen und somit die Anzahl Rekombinationen  $\rightarrow$

$$I = \Delta Q / \Delta t \rightarrow \Delta Q = N q_0 = I \Delta t$$

$$N = I \Delta t / q_0 = 20 \text{ mA} \cdot 1 \text{ s} / 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$N = \underline{\underline{12,5 \cdot 10^{16}}}$$

Frage 2:

Aus  $P_{el} = U I$  und  $W_{ph} = h c / \lambda \rightarrow P_{Licht} = W_{Licht} / \Delta t = N W_{ph} / \Delta t = N h c / (\lambda \Delta t) \rightarrow$

$$P_{el} = 1,35 \text{ V} \cdot 20 \text{ mA} = \underline{\underline{27 \text{ mW}}}$$

$$P_{Licht} = 12,5 \cdot 10^{16} \cdot 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} / (940 \text{ nm} \cdot 1 \text{ s}) = \underline{\underline{26 \text{ mW}}}$$

Damit wird  $\eta = P_{\text{Licht}} / P_{\text{el}} = 26 / 27 = 0,96 = \underline{\underline{96\%}}$

Frage 3:  $\eta_Q = P_{\text{MessLicht}} / P_{\text{Licht}}$  und  $P_{\text{MessLicht}} = \eta_{\text{Mess}} P_{\text{el}} = \eta_{\text{Mess}} P_{\text{Licht}} / \eta \rightarrow$

$$\eta_Q = \eta_{\text{Mess}} P_{\text{Licht}} / (\eta P_{\text{Licht}}) = \eta_{\text{Mess}} / \eta$$

$$\eta_Q = 35\% / 96\% = \underline{\underline{37\%}}$$

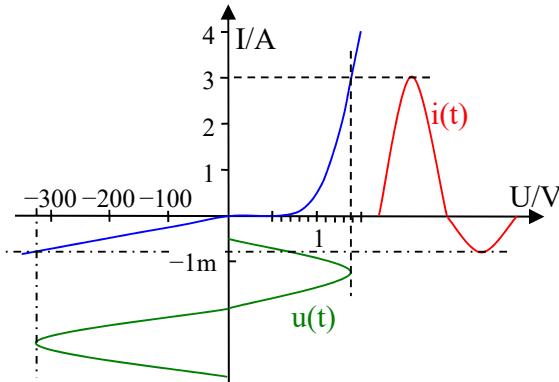
### Zu Aufgabe 12.8

Frage 1:

Graphische Lösung →

$i(t)$  einzeichnen und  $u(t)$  daraus konstruieren.

(Die Nichtlinearität ist im Bereich sehr kleiner Spannungen kaum sichtbar und somit vernachlässigbar.)



Frage 2: In einer Periode entstehen die Leistungen  $p(t) = i \cdot u \cdot f_{t1} + i \cdot u \cdot f_{t2}$  mit

$$f_{t1} = 1(t) - 1(t-10 \text{ ms})$$

und

$$f_{t2} = 1(t-10 \text{ ms}) - 1(t-20 \text{ ms}).$$

$$p(t) = 3 \text{ A} \cdot 0,88 \text{ V} \cdot \sin^2(2\pi t/20 \text{ ms}) \cdot f_{t1} + 0,8 \text{ mA} \cdot 320 \text{ V} \cdot \sin^2(2\pi t/20 \text{ ms}) \cdot f_{t2}$$

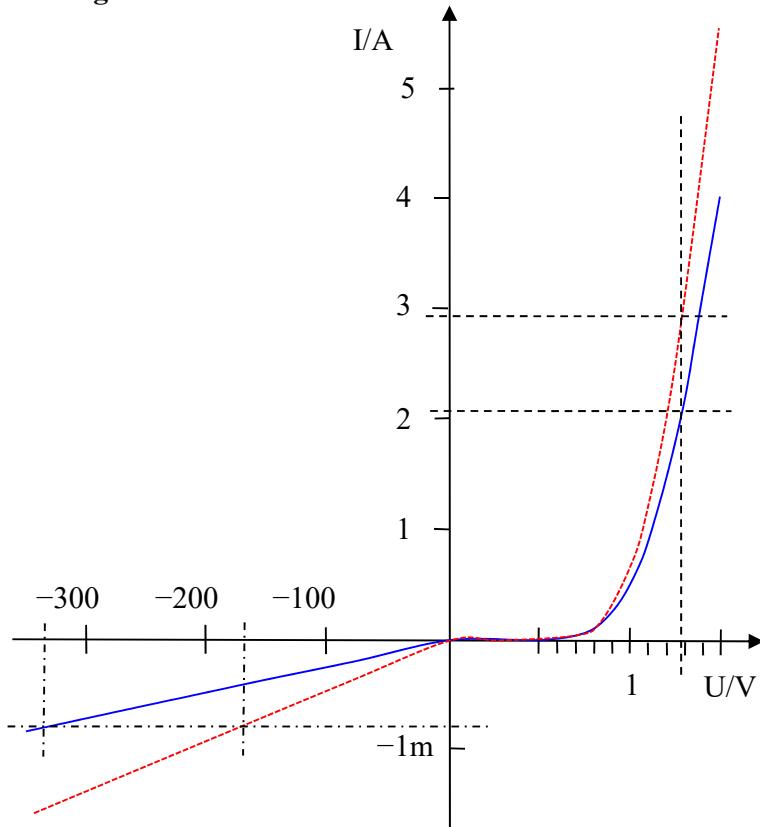
$$p(t) = 2,64 \text{ W} \sin^2(\dots) f_{t1} + 0,256 \text{ W} \sin^2(\dots) f_{t2}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{20 \text{ ms}} \int_0^{20 \text{ ms}} p(t) dt = \frac{1}{10 \text{ ms}} \int_0^{10 \text{ ms}} 2,64 \text{ W} \sin^2(\omega t) dt + \frac{1}{10 \text{ ms}} \int_{10 \text{ ms}}^{20 \text{ ms}} 0,256 \text{ W} \sin^2(\omega t) dt$$

$$\bar{P} = \frac{(2,64 \text{ W} + 0,256 \text{ W})}{10 \text{ ms}} \int_0^{10 \text{ ms}} \sin^2(\omega t) dt = \frac{2,9 \text{ W}}{10 \text{ ms}} \left( \frac{1}{2} t \Big|_0^{10 \text{ ms}} - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \Big|_0^{10 \text{ ms}} \right)$$

$$\bar{P} = \frac{2,9 \text{ W}}{10 \text{ ms}} 5 \text{ ms} = \underline{\underline{1,45 \text{ W}}}$$

Der Kühlkörper muss 1,45 W kühlen.

**Zu Aufgabe 12.9 und 12.10**

Frage 1: Grafische Lösung

Parallelschaltung:  
 $2,05 \text{ A} + 2,95 \text{ A} = 5 \text{ A}$

Reihenschaltung:  
 $330 \text{ V} + 170 \text{ V} = 500 \text{ V}$

Frage 2:

In beiden Fällen ist der Einsatz möglich, jeweils die bessere Diode muss den größeren Strom bzw. die höhere Spannung tragen.

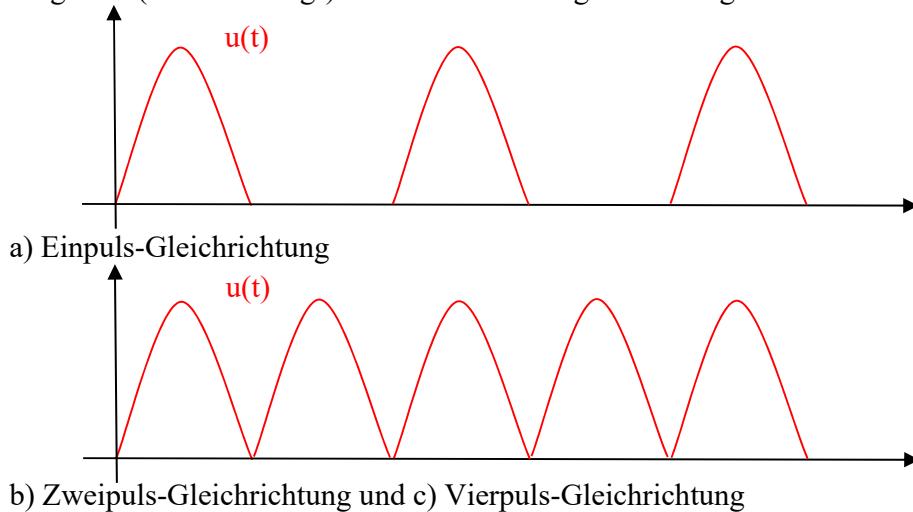
**Zusatzaufgabe:**

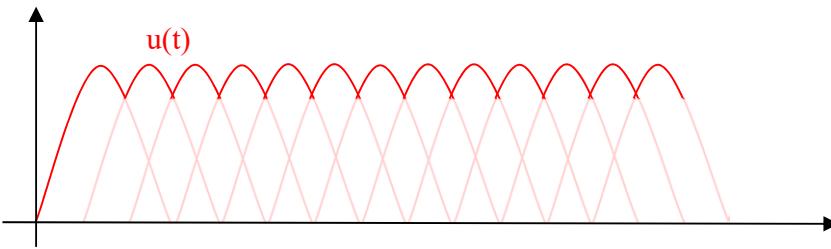
Bei Parallelschaltung beide Ströme kontrollieren und Gesamtstrom langsam erhöhen. Wenn der Strom einer Diode  $I_{FM} = 3 \text{ A}$  erreicht, Messung abbrechen. Erreicht vorher der Gesamtstrom 5 A, sind die Dioden einsetzbar.

Bei Reihenschaltung beide Spannungen kontrollieren und Gesamtspannung langsam erhöhen. Wenn die Spannung an einer Diode  $U_{RM} = 350 \text{ V}$  erreicht, Messung abbrechen. Erreicht vorher die Gesamtspannung 500 V, sind die Dioden einsetzbar.

**Zu Aufgabe 12.11**

Frage:  $U_+$  (ohne Siebung!) wird über der Zeit grafisch dargestellt.





d) Sechspuls-Gleichrichtung

**Zu Aufgabe 12.12**

Frage 1: Für Schaltung Abb. 12.24 a)

$$U_{Rc} = U_{Bat} - U_{CE} = 12 \text{ V} - 5 \text{ V} = 7 \text{ V} \rightarrow \text{mit } I_C = 2 \text{ mA}$$

$$R_C = \frac{7 \text{ V}}{2 \text{ mA}} = 3.500 \Omega \approx \underline{\underline{3,3 \text{ k}\Omega}}$$

Mit  $B = 180$  und  $I_C = 2 \text{ mA}$  kann  $I_B$  ausgerechnet werden.

$$I_B = \frac{I_C}{B} = \frac{2 \text{ mA}}{180} = 11 \mu\text{A} .$$

Mit  $R_1 + R_2 = \frac{U_{Bat}}{10 I_B}$  und  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_{BE}}{U_{Bat}}$  lassen sich nun  $R_1$  und  $R_2$  berechnen.

$$R_1 + R_2 = \frac{U_{Bat}}{10 \cdot I_B} = \frac{12 \text{ V}}{10 \cdot 11 \mu\text{A}} = 109 \text{ k}\Omega \approx 100 \text{ k}\Omega$$

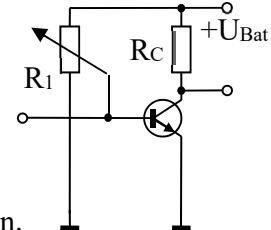
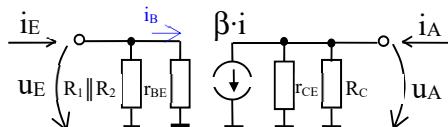
$$R_2 = \frac{U_{BE}}{U_{Bat}} (R_1 + R_2) = \frac{0,7 \text{ V}}{12 \text{ V}} \cdot 100 \text{ k}\Omega = 5,8 \text{ k}\Omega \approx \underline{\underline{6,8 \text{ k}\Omega}}$$

d.h., es bleibt  $R_1 \approx \underline{\underline{100 \text{ k}\Omega}}$ 

Frage 2:

$$\text{Mit } R_E \text{ wird } R_C = 3300 \Omega - 220 \Omega = 3080 \Omega \approx \underline{\underline{3,3 \text{ k}\Omega}}$$

Frage 3:

Mit  $R_1 \approx 100 \text{ k}\Omega$  kann die nebenstehende Schaltung gewählt werden.**Zu Aufgabe 12.13**Frage 1: Leerlaufspannungsverstärkung  $v_U = u_A/u_E$  (bei Leerlauf:  $i_A = 0$ ).

Aus der Ersatzschaltung mit Ersatzvierpol folgt (beachte die reinen Parallelschaltungen):

$$i_B = u_E/r_{BE} \rightarrow u_E = i_B r_{BE}$$

$$u_A = -\beta i_B (r_{CE} \parallel R_C) \quad (\text{Bei obigen Zählpfeilen})$$

$$v_U = u_A/u_E = -\beta i_B (r_{CE} \parallel R_C) / (i_B r_{BE})$$

$$v_U = u_A/u_E = -\beta (r_{CE} \parallel R_C) / r_{BE} \quad (\text{d.h. } u_A \text{ nach oben - umgekehrt wie } u_E)$$

$$v_U = u_A/u_E = -220 \cdot [(1/18 \mu\text{S}) \parallel (3,3 \text{ k}\Omega)] / (2,7 \text{ k}\Omega)$$

$$v_U = -220 \cdot 3,1 \text{ k}\Omega / (2,7 \text{ k}\Omega) = \underline{\underline{253}}$$

Mit den Näherungen  $1/18 \mu\text{S} \gg 3,3 \text{ k}\Omega$  wird:

$$v_U = -\beta R_C / r_{BE} = -269$$

( $v_U$  wird in der Näherung geringfügig zu groß.)

### Zu Aufgabe 12.14

Frage 1: Für Schaltung Abb. 12.24 a)

$$U_{Rc} = U_{\text{Bat}} - U_{CE} = 12 \text{ V} - 2 \text{ V} = 10 \text{ V} \rightarrow \text{mit } I_C = 150 \text{ mA}$$

$$R_C = \frac{10 \text{ V}}{150 \text{ mA}} = 67 \Omega \approx \underline{\underline{68 \Omega}}$$

Mit  $B = 100$  und  $I_C = 150 \text{ mA}$  kann  $I_B$  ausgerechnet werden.

$$I_B = \frac{I_C}{B} = \frac{150 \text{ mA}}{100} = 1,5 \text{ mA}$$

Mit  $R_1 + R_2 = \frac{U_{\text{Bat}}}{10 I_B}$  und  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_{BE}}{U_{\text{Bat}}}$  lassen sich nun  $R_1$  und  $R_2$  berechnen.

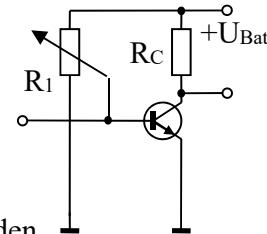
$$R_1 + R_2 = \frac{U_{\text{Bat}}}{10 \cdot I_B} = \frac{12 \text{ V}}{10 \cdot 1,5 \text{ mA}} = 800 \Omega \approx 820 \Omega$$

$$R_2 = \frac{U_{BE}}{U_{\text{Bat}}} (R_1 + R_2) = \frac{0,7 \text{ V}}{12 \text{ V}} \cdot 800 \Omega = 47 \Omega \approx \underline{\underline{47 \Omega}}$$

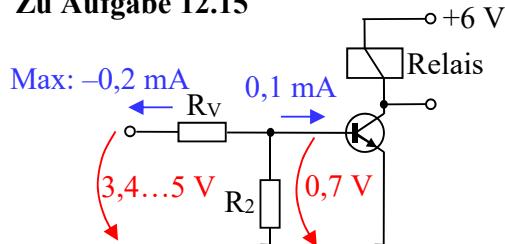
d.h., es bleibt  $R_1 = \underline{\underline{820 \Omega}}$  (bei E12)

Frage 2:

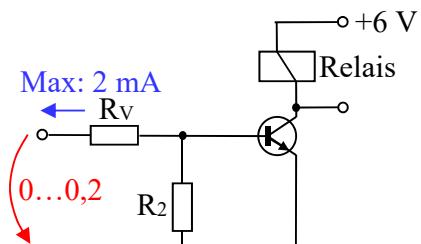
Mit  $R_1 \approx 820 \Omega$  kann die nebenstehende Schaltung gewählt werden.



### Zu Aufgabe 12.15



$$I_C = 9,75 \text{ mA}, U_{CE} = 0,15 \text{ V}, I_B = 0,1 \text{ mA}, \\ U_{BE} \approx 0,7 \text{ V}$$



$$I_C = 0,5 \text{ mA}, U_{CE} = 5,7 \text{ V}, I_B \approx 0 \text{ mA}, \\ U_{BE} < 0,4 \text{ V}$$

1. Durchgeschalteter Transistor:

Es dürfen auch bei der größten Spannung maximal  $-0,2 \text{ mA}$  gezogen werden (entsprechend gezeichneter Stromrichtung!).

$$\rightarrow R_V = U_{\text{MaxRV}} / (-I_{\text{MaxRV}}) = (5 \text{ V} - 0,7 \text{ V}) / 0,2 \text{ mA} = 21,5 \text{ k}\Omega \rightarrow \underline{\underline{22 \text{ k}\Omega}}$$

$$\text{Bei } U_{\text{Min}} \text{ wird } -I_{RV} = -(3,4 \text{ V} - 0,7 \text{ V}) / 22 \text{ k}\Omega = -0,123 \text{ mA.}$$

Auch in diesem Fall muss davon  $I_B = 0,1 \text{ mA}$  bekommen.

$$\rightarrow R_2 = U_{BE} / (-I_{RV} - I_B) = 0,7 \text{ V} / (0,123 - 0,1 \text{ mA}) = 0,7 \text{ V} / 0,023 \text{ mA} = 30,4 \text{ k}\Omega \rightarrow \underline{\underline{33 \text{ k}\Omega}}$$

Test bei  $U_{\text{Max}}$  für  $I_{R2}(0,7 \text{ V}) = 0,023 \text{ mA}$ :

$$I_B = 0,2 \text{ mA} - 0,023 \text{ mA} = 0,177 \text{ mA} \text{ schaltet sogar noch besser und ist ungefährlich.}$$

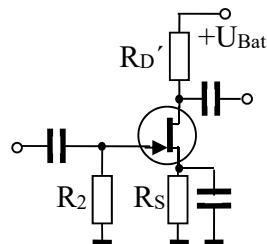
2. Überprüfung gesperrter Transistor:

$$U_2 / U_{\text{Max}} = R_2 / (R_V + R_2)$$

$$\rightarrow U_2 = U_{\text{Max}} R_2 / (R_V + R_2) = 0,2 \text{ V} \cdot 33 \text{ k}\Omega / (22 \text{ k}\Omega + 33 \text{ k}\Omega) = 0,12 \text{ V} < 0,4 \text{ V} \text{ ist ausreichend. Damit ist die Schaltung dimensioniert.}$$

**Zu Aufgabe 12.16**

Frage 1:



$$R_D' + R_s = (U_{\text{Bat}} - U_{\text{DS}}) / I_D = (9 \text{ V} - 5,5 \text{ V}) / 1,5 \text{ mA} = 2,3 \text{ k}\Omega$$

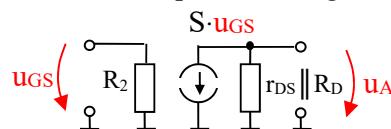
Für  $U_{\text{GS}} = 0,6 \text{ V}$  beträgt  $R_s$  bei  $I_D = 1,5 \text{ mA}$ :

$$R_s = U_{\text{GS}} / I_D = 0,6 \text{ V} / 1,5 \text{ mA} = 400 \Omega \rightarrow \underline{470 \Omega} \text{ (bei E 6) oder } 390 \Omega \text{ (bei E 12)}$$

Für  $R_D'$  folgt:  $R_D' = (R_D' + R_s) - R_s = 2,3 \text{ k}\Omega - 470 \Omega = 1,83 \text{ k}\Omega \rightarrow \underline{1,8 \text{ k}\Omega}$  (bei E 12).

Eine bessere Einstellung ist nur mit Einstellreglern möglich. Für eine normale Funktion dürfte der etwas veränderte Arbeitspunkt verträgliche Abweichungen ergeben.

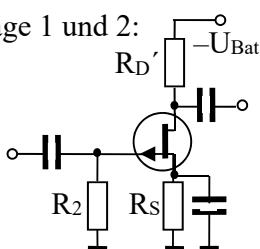
Frage 2:



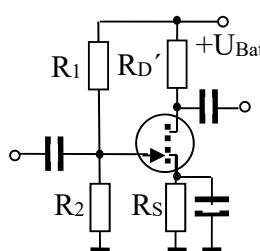
$$v_u \text{ Leer} = u_A / u_{GS} = S \cdot u_{GS} R_D / u_{GS} = 6 \text{ mS} \cdot 1,8 \text{ k}\Omega = \underline{10,8}$$

(Bei  $U_{\text{Bat}} = 24 \text{ V}$  würde  $R_D' = 12 \text{ k}\Omega$  und somit  $v_u \text{ Leer} = 72$  werden.) Entscheidend ist vor allem die Steilheit  $S$  des Feldeffekttransistors.

Zusatzfrage 1 und 2:



selbstleitender P-Kanal MOS-FET



selbstsperrender N-Kanal MOS-FET

(R1 und R2 hochohmiger Spannungsteiler für  $U_{\text{GS}} = \text{positiv}$  – entsprechend Arbeitspunkt)**22.7 Lösungen zu Abschnitt 13****Zu Aufgabe 13.1**

Frage 1:  $v_u = u_{A\max} / u_{1\max} = 200 \text{ mV} / 2,5 \text{ mV} = \underline{80}$

Der invertierende Verstärker hätte einen typischen Eingangswiderstand von  $10 \dots 20 \text{ k}\Omega$ . Am Innenwiderstand des Messwandlers von  $200 \Omega$  würden  $200 / (10000 \dots 20000) + 200 = 2 \dots 1 \%$  der Wandlerspannung verloren gehen. Es kann der invertierende Verstärker gewählt werden.Frage 2: Wir wählen für  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  und aus Symmetriegründen auch für  $R_2$ . Daraus ergibt sich die Spannungsverstärkung für den invertierenden Verstärker zu  $v = -80$ .

$$R_F = |v| R_1 = 80 \cdot 20 \text{ k}\Omega = \underline{1,6 \text{ M}\Omega}$$

Frage 3: Es kann für  $U_A = \pm 200 \text{ mV}$  die kleinste Batteriespannung gewählt werden  $\pm 4 \text{ V}$ .

### Zu Aufgabe 13.2

Zu a)

Frage 1:  $R_V$  folgt aus der unteren Grenzfrequenz.

$$R_V = 1/(2\pi f_{gu} C) = 1/(2\pi \cdot 20 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ pF}) = 795 \text{ M}\Omega \approx \underline{820 \text{ M}\Omega} \text{ (bei E12)}$$

Frage 2:  $R_1$  ist null und  $R_2$  unendlich (Impedanzwandler).

$$R_F = 0 \text{ (Impedanzwandler)}$$

Frage 3: Für die Aussteuerbarkeit ( $\pm 2,5 \text{ mV}$ ) können  $>$  bzw.  $< \pm 4 \text{ V}$  gewählt werden, d.h. evtl. Batterien.

Frage 4: Laut Tabelle 13.1 sind für den Operationsverstärker ohne äußere Bauelemente

$$R_{Ein} = 2 \text{ M}\Omega \text{ und } R_{Aus} = 75 \Omega.$$

Der Eingangswiderstand wird  $R_E = R_{Ein} v_0/v_u = 2 \text{ M}\Omega \cdot 5000 = \underline{10 \text{ G}\Omega} \gg 820 \text{ M}\Omega$   
Ausgangswiderstand, Frequenzgang und Drift sind hierbei unkritisch.

### Zu Aufgabe 13.3

Frage 1: Daraus ergibt sich die Spannungsverstärkung:  $v_u = 10 \text{ V}/250 \text{ mV} = \underline{40}$ .

Der invertierende Verstärker hätte den typischen Eingangswiderstand  $10 \dots 20 \text{ k}\Omega$ .

Am Innenwiderstand des Messwandlers ( $200 \Omega$ ) würden von der Wandlerspannung  $200/(10000 \dots 20000 + 200) = 2 \dots 1 \%$  verloren gehen.

Es kann der invertierende Verstärker gewählt werden (für den invertierenden Verstärker wird  $v = -40$ ).

Frage 2: Wir wählen für  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  und aus Symmetriegründen auch für  $R_2$  und nehmen 2% Verlust in Kauf.

$$R_F = |v| R_1 = 40 \cdot 10 \text{ k}\Omega = \underline{400 \text{ k}\Omega}.$$

Frage 3: Die Ausgangsspannung soll von  $-10$  bis  $+10 \text{ V}$  linear dargestellt werden. Die Versorgungsspannung muss  $\pm 0,7 \dots 2 \text{ V}$  größer/kleiner sein. Die Versorgungsspannungen werden zu  $-12 \text{ V}$  und  $+12 \text{ V}$  gewählt.

Frage 4: Laut Tabelle 13.1 sind  $R_{Ein} = 2 \text{ M}\Omega$  und  $R_{Aus} = 75 \Omega$ .

Der Eingangswiderstand des Verstärkers wird:

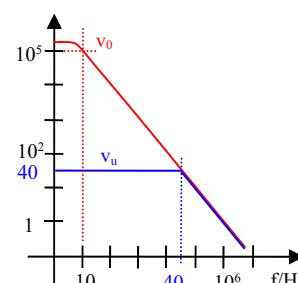
$$R_E = R_1 = \underline{10 \text{ k}\Omega}, \text{ d.h. nicht verbessert.}$$

Der Ausgangswiderstand des Verstärkers wird:

$$R_A = R_{Aus} v_u/v_0 = 75 \Omega \cdot 40/200000 = \underline{15 \text{ m}\Omega}.$$

Der Frequenzgang wird grafisch bestimmt.  $\rightarrow \underline{40 \text{ kHz}}$

Die Drift von 90 dB wird um  $v_0/v_u = 5000$  (folglich 74 dB) verbessert, d.h. 164 dB.



## 22.8 Lösungen zu Abschnitt 15

### Zu Aufgabe 15.1

Ein mögliches Verfahren:

- Die Dezimalzahl A wird durch die Zahl B geteilt. Hexadezimalsystem B=16, Oktalsystem B=8 und Binärsystem B=2.
- Die Division ergibt eine ganze Zahl  $C_1$  und den Rest  $D_1$ .
- $C_1$  wird erneut durch B geteilt. Es folgen die ganze Zahl  $C_2$  und der Rest  $D_2$ .
- $C_2$  wird weiter durch B geteilt und man erhält die ganze Zahl  $C_3$  und einen Rest  $D_3$ .
- Das wird solange fortgesetzt, bis die ganze Zahl  $C_x$  gleich null ist und der Rest  $D_x$  bleibt.
- Ist z.B.  $C_4 = 0$ , lautet die gesuchte Zahl:  $D_4 D_3 D_2 D_1$ .

Hexadezimal:

$$\begin{array}{rcl} 128 & / & 16 = 8 \text{ Rest } 0 = D_1 \\ 8 & / & 16 = 0 \text{ Rest } 8 = D_2 \end{array} \quad 128_D = 80_H = D_2 D_1$$

$$192_D = C0_H$$

$$240_D = F0_H$$

Oktal:

$$\begin{array}{rcl} 128 & / & 8 = 16 \text{ Rest } 0 \\ 16 & / & 8 = 2 \text{ Rest } 0 \\ 2 & / & 8 = 0 \text{ Rest } 2 \end{array} \quad 128_D = 200_O$$

$$192_D = 300_O$$

$$240_D = 360_O$$

Binär:

$$\begin{array}{rcl} 128 & / & 2 = 64 \text{ Rest } 0 \\ 64 & / & 2 = 32 \text{ Rest } 0 \\ 32 & / & 2 = 16 \text{ Rest } 0 \\ 16 & / & 2 = 8 \text{ Rest } 0 \\ 8 & / & 2 = 4 \text{ Rest } 0 \\ 4 & / & 2 = 2 \text{ Rest } 0 \\ 2 & / & 2 = 1 \text{ Rest } 0 \\ 1 & / & 2 = 0 \text{ Rest } 1 \end{array} \quad 128_D = 10000000_B$$

$$192_D = 11000000_B$$

$$240_D = 11110000_B$$

### Zu Aufgabe 15.2

Zuerst die dezimalen Zahlen in binäre Zahlen umwandeln:

$$134_D = 10000110_B$$

$$28_D = 11100_B$$

$$125_D = 1111101_B$$

$$31_D = 11111_B$$

$$255_D = 11111111_B$$

$$128_D = 10000000_B$$

Bitweise UND-Verknüpfung

$$10000110.00011100.01111101.00011111 = 134.028.125.031$$

$$\underline{1111111.11111111.11111111.10000000} = \underline{255.255.255.128}$$

$$10000110.00011100.01111101.00000000 = 134.028.125.000 = \text{bitweise UND.}$$

Das gleiche Ergebnis erzeugen alle IP-Adressen von 134. 28.125.0 bis 134. 28.125.127, ( $127_D = 0111111_B$ ); darauf beruht die Subnetzerkennung.

### Zu Aufgabe 15.3

Addition von 10 + 118:

$$\begin{array}{r} 118 \quad 1110110 \\ +10 \quad +0001010 \\ \hline \textcolor{red}{111111} \quad \textcolor{red}{Übertrag} \\ =128 = 10000000 \end{array}$$

Multiplikation von  $10 * 118$  (die Rechnung erfolgt analog zu Dezimalzahlen):

$$\begin{array}{r}
 \underline{\textcolor{red}{1010}} * \underline{\textcolor{blue}{1110110}} \\
 1010 \\
 1010 \\
 1010 \\
 \phantom{0}0 \\
 1010 \\
 1010 \\
 \phantom{0}0 \\
 \textcolor{red}{11111} \\
 \hline
 10010011100
 \end{array}$$

Übertrag

$$\begin{array}{r}
 \underline{10 * 118} \\
 10 \\
 10 \\
 80
 \end{array}$$


---


$$1180$$

Probe:

$$10010011100 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 = 1024 + 128 + 16 + 8 + 4 = 1180$$

Multiplikation von  $8 * 118$  (die Rechnung erfolgt analog zu Dezimalzahlen):

$$\begin{array}{r}
 \text{Multiplikation von } 3 \cdot 1110 \text{ (die} \\
 \underline{\textcolor{red}{1000}} * \underline{\textcolor{red}{1110110}} \\
 1000 \\
 1000 \\
 1000 \\
 0 \\
 1000 \\
 1000 \\
 0 \\
 \hline
 1110110000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{8 * 118} \\ 8 \\ 8 \\ 64 \end{array}$$


---

944

Probe:

$$1110110000 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 = 512 + 256 + 128 + 32 + 16 = 944.$$

Die Multiplikation entspricht jeweils einer Linksverschiebung (mit Auffüllen von Nullen am Ende) um entsprechend viele Stellen. Im letzten Fall hätte auch 1110110 um drei Stellen nach links verschoben werden können 1110110000.

## Zu Aufgabe 15.4

Mit drei bit können 8 Abschnitte unterschieden werden  $10/8 = 1,25$ .

000	100	110	010	011	111	101	001

$$0 < x_1 \leq 1,25 < x_2 \leq 2,5 < x_3 \leq 3,75 < x_4 \leq 5 < x_5 \leq 6,25 < x_6 \leq 7,5 < x_7 \leq 8,75 < x_8 \leq 10$$

Bei jedem Übergang ändert sich nur ein bit.

5,4 liegt im 5. Abschnitt „011“, der  $5 < x_5 \leq 6,25$  beinhaltet.

Alternativ zum graphischen Weg:

$5,4 : 1,25 = 4,32$ , also liegt es im 5. von 8 Abschnitten.

Bei 4 bit Auflösung könnten 16 Abschnitte eingeteilt werden  $10/16 = 0,625$ .

Bei 4:04 Rangziffern kann mit 16 Abschnitten eingeteilt werden:  $16 \cdot 0,3 = 4,8$ ,  $5,4: 0,625 = 8,64$ , also liegt es im 9. von 16 Abschnitten und ist „0011“.

**Zu Aufgabe 15.5**

Belegungstabelle &amp;

Nr.	x	v1	$\bar{v}_2$	y	
1	0	0	0	0	$x=0$
2	1	0	0	0	keine Sicherheit
3	0	1	0	0	$x=0$
4	1	1	0	0	halbe Sicherheit
5	0	0	1	0	$x=0$
6	1	0	1	0	halbe Sicherheit
7	0	1	1	0	$x=0$
8	1	1	1	1	Sicherheit

disjunktive kanonische Normalform:  $y = x v_1 \bar{v}_2$ Belegungstabelle  $\geq 1$  negiert

Nr.	$\bar{x}$	$\bar{v}_1$	v2	y	
1	1	1	1	0	$x=0$
2	0	1	1	0	keine Sicherheit
3	1	0	1	0	$x=0$
4	0	0	1	0	halbe Sicherheit
5	1	1	0	0	$x=0$
6	0	1	0	0	halbe Sicherheit
7	1	0	0	0	$x=0$
8	0	0	0	1	Sicherheit & $x=1$

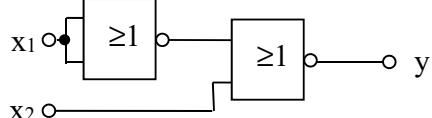
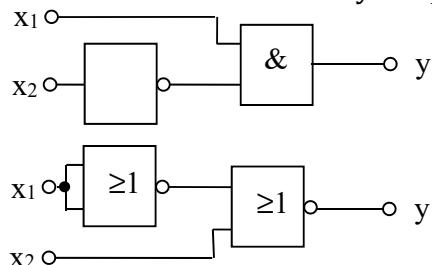
disjunktive kanonische Normalform:  $y = \bar{x} \bar{v}_1 \bar{v}_2$  ( $= x v_1 \bar{v}_2$ )

Beide Funktionen sind identisch.

**Zu Aufgabe 15.6**

Belegungstabelle &gt;

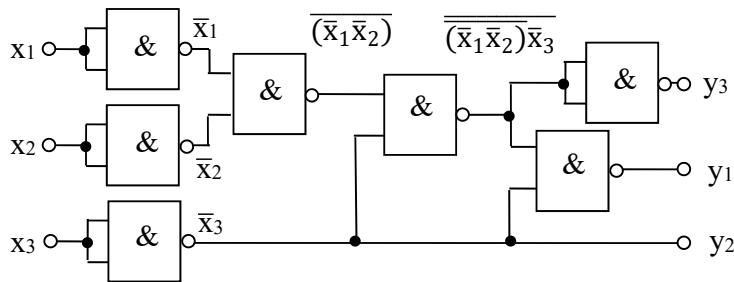
Nr.	x1	x2	y	
1	0	0	0	$x_1 = x_2$
2	1	0	1	$x_1 > x_2$
3	0	1	0	$x_1 < x_2$
4	1	1	0	$x_1 = x_2$

disjunktive kanonische Normalform:  $y = x_1 \bar{x}_2$  ( $= \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \vee x_2$ )**Zu Aufgabe 15.7**

$$y_3 = (x_1 \vee x_2) \bar{x}_3 = \overline{(x_1 \vee x_2)} \bar{x}_3 = \overline{(x_1 x_2)} \bar{x}_3 = \overline{(x_1 x_2)} \overline{\bar{x}_3}$$

$$\bar{y}_2 = \bar{x}_3$$

$$y_1 = (x_1 \vee x_2) \bar{x}_3 \vee x_3 = \overline{\overline{(x_1 x_2)}} \bar{x}_3 \vee x_3 = \overline{[(x_1 x_2) \bar{x}_3]} \bar{x}_3$$



Kontrolle an der Belegungstabelle

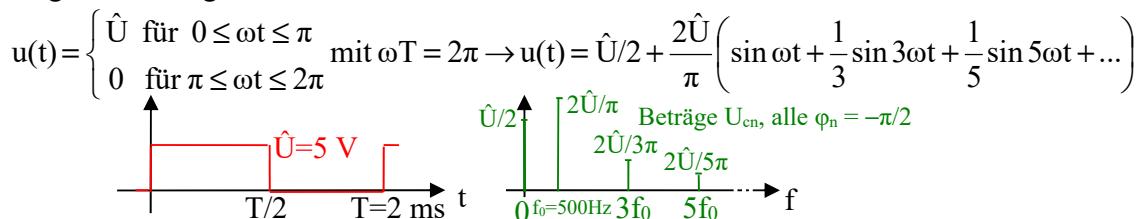
Nr.	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	
1	0	0	0	0	1	0	nur Kontrollleuchten sollen ein sein
2	1	0	0	1	1	1	wenn Taster 1 betätigt, Licht und Zeitschalter ein
3	0	1	0	1	1	1	wenn Taster 2 betätigt, Licht und Zeitschalter ein
4	1	1	0	1	1	1	gleichfalls, wenn zufällig beide Taster betätigt
5	0	0	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
6	1	0	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
7	0	1	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren
8	1	1	1	1	0	0	wenn Licht ein, alles ignorieren

Es sind 7 Gatter notwendig (damit in der Regel 2 Bausteine mit je 4 Gattern).

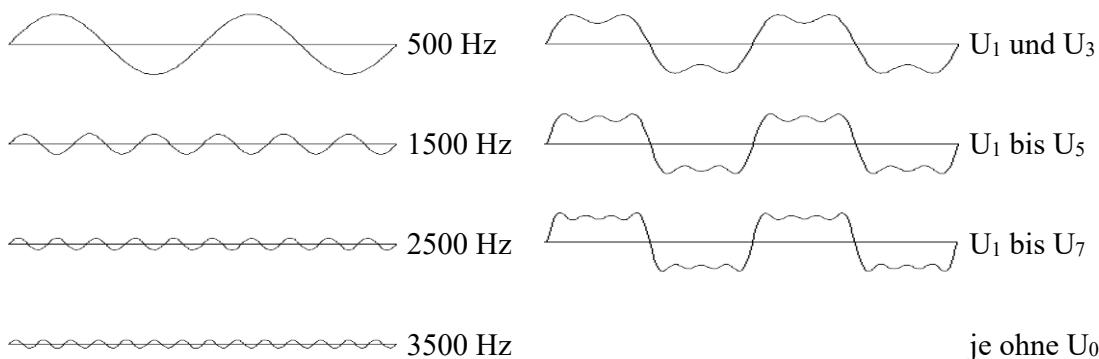
## 22.9 Lösungen zu Abschnitt 16

### Zu Aufgabe 16.1

Frage 1 und Frage 2:



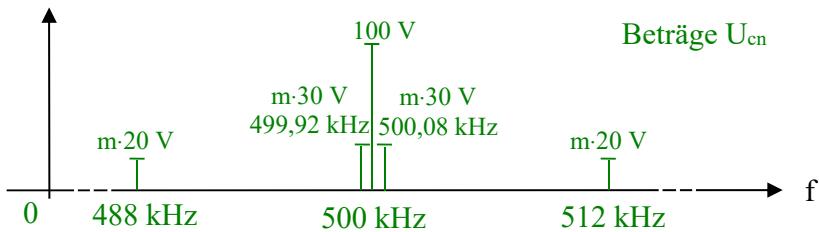
$$U_0 = 5 \text{ V}/2 = 2,5 \text{ V}; U_1 = 10 \text{ V}/\pi = 3,18 \text{ V}, U_3 = 10 \text{ V}/3\pi = 1,06 \text{ V}, U_5 = 0,64 \text{ V}, U_7 = 0,45 \text{ V}$$



Frage 3: Amplituden- und Phasenspektrum siehe oben.

**Zu Aufgabe 16.2**

Frage 1: Die Beträge der Amplituden (für  $m = 1$  dargestellt)



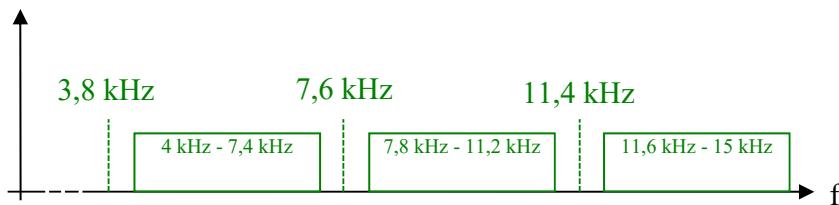
Frage 2: Die Übertragungsbandbreite reicht von < 488 kHz bis > 512 kHz →

$$\Delta f > 512 \text{ kHz} - 488 \text{ kHz}$$

$$\Delta f > 24 \text{ kHz}$$

**Zu Aufgabe 16.3**

Frage 1: Welche Oszillatorkreisfrequenzen können für eine Frequenzumsetzung gewählt werden?



Oszillatorkreisfrequenzen können 3,8 kHz, 7,6 kHz und 11,4 kHz sein (alternativ 7,6 kHz mit 7,4 bis 4 kHz, 11,4 kHz mit 11,2 kHz bis 7,8 kHz und 15,2 kHz mit 15 kHz bis 11,6 kHz; dadurch werden die Frequenzbereiche aber umgedreht).

Frage 2: Bei einer Multiplikationsschaltung sind die unteren Seitenfrequenzen wieder zu entfernen: 0,2 kHz bis 3,6 kHz, 4 kHz bis 7,4 kHz und 7,8 kHz bis 11,2 kHz (alternativ die oberen Seitenfrequenzen 7,8 kHz bis 11,2 kHz, 11,6 kHz bis 15 kHz und 15,4 kHz bis 18,8 kHz).

**Zu Aufgabe 16.4**

Frage 1: Soll  $\Delta\varphi = \Delta f/f_s = 5$  (bei der höchsten UKW-Übertragungsfrequenz  $f_s = 15 \text{ kHz}$ ) beibehalten werden, gilt  $\Delta f = 75 \text{ kHz}$  nur für  $f_s = 15 \text{ kHz}$ . Demzufolge werden

$$\Delta f(10 \text{ kHz}) = \Delta\varphi 10 \text{ kHz} = 5 \cdot 10 \text{ kHz} = 50 \text{ kHz},$$

$$\Delta f(1 \text{ kHz}) = 5 \text{ kHz} \text{ oder}$$

$$\Delta f(80 \text{ Hz}) = 0,4 \text{ kHz}.$$

$$\omega(t) = \omega_T + \Delta\omega \cdot \cos\omega_S t = 2\pi f_T + 2\pi \Delta f \cdot \cos\omega_S t = 2\pi [100 \text{ MHz} + (0,4 \text{ bis } 75 \text{ kHz}) \cdot \cos\omega_S t]$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_S} = \frac{\Delta f}{f_S} = \frac{5 \text{ kHz}}{1 \text{ kHz}} = 5 \quad \text{bzw.} \quad \frac{50 \text{ kHz}}{10 \text{ kHz}} = 5$$

$$u(t) = \hat{U}_T \cos\left(\omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_S} \cdot \sin\omega_S t\right) = 10 \text{ V} \cdot \cos\left(628 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \cdot t + 5 \cdot \sin(2\pi f_S \text{ s}^{-1} \cdot t)\right)$$

Frage 2: Mit  $R_1 \parallel (1/j\omega C_1) \rightarrow |Z_1| = R_1/(1 + \omega^2 \cdot \tau^2)^{-1/2} \rightarrow$  mit  $v(f=0) = v_0$

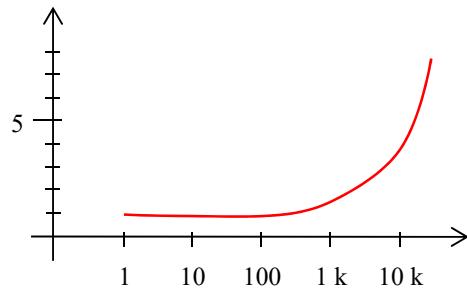
$$|v| = (R_F/R_1)(1 + \omega^2 \cdot \tau^2)^{-1/2} = v_0 (1 + \omega^2 \cdot \tau^2)^{-1/2}$$

$$v/v_0 = 1 + 2\pi \cdot 15 \text{ kHz} \cdot 50 \mu\text{s} = \underline{\underline{5,7}}$$

$$v/v_0 = 1 + 2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot 50 \mu\text{s} = \underline{\underline{4,1}}$$

$$v/v_0 = 1 + 2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 50 \mu\text{s} = \underline{\underline{1,31}}$$

$$v/v_0 = 1 + 2\pi \cdot 0,1 \text{ kHz} \cdot 50 \mu\text{s} = \underline{\underline{1,03}}$$



Damit würde formal  $U_{Smax}(f) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot (v_f/v_0)/(V_{15 \text{ kHz}}/v_0)$  und genauso

$\Delta f = 15 \text{ kHz} \cdot (v_f/v_0)/(V_{15 \text{ kHz}}/v_0)$ , da  $\Delta f \sim U_s$ .

$$U_{Smax}(15 \text{ kHz}) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot 1 \rightarrow \Delta f_{15 \text{ kHz}} = 75 \text{ kHz} \rightarrow \Delta\varphi = 5$$

$$U_{Smax}(10 \text{ kHz}) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot 0,72 \rightarrow \Delta f_{10 \text{ kHz}} = 54 \text{ kHz} \rightarrow \Delta\varphi = 5,4$$

$$U_{Smax}(1 \text{ kHz}) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot 0,23 \rightarrow \Delta f_{1 \text{ kHz}} = 17 \text{ kHz} \rightarrow \Delta\varphi = 17$$

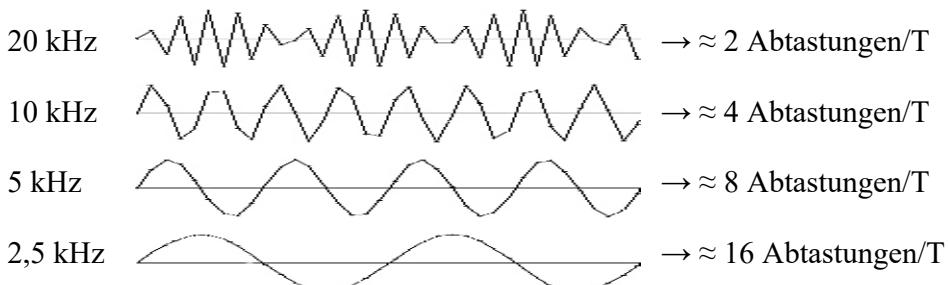
$$U_{Smax}(0,1 \text{ kHz}) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot 0,18 \rightarrow \Delta f_{0,1 \text{ kHz}} = 14 \text{ kHz} \rightarrow \Delta\varphi = 140$$

$$U_{Smax}(80 \text{ Hz}) = U_{Smax}(15 \text{ kHz}) \cdot 0,18 \rightarrow \Delta f_{80 \text{ Hz}} = 14 \text{ kHz} \rightarrow \Delta\varphi = 175$$

Das funktioniert, weil mehr Seitenbänder bei geringeren Signalfrequenzen die Bandbreite von  $\Delta\varphi = 5$  bei 15 kHz nicht überschreiten.

### Zu Aufgabe 16.5

Sinusschwingungen mit 44 kHz abgetastet:



Ab acht Abtastungen pro Periodendauer ist die Qualität befriedigend.

### Zu Aufgabe 16.6

Frage 1: Wie viele Oberschwingungen werden jeweils bestimmt?

Bei 8 Abtastungen werden 4 Frequenzwerte davon 3 Oberschwingungen bestimmt.

Bei 16 Abtastungen werden 8 Frequenzwerte davon 7 Oberschwingungen bestimmt.

Bei 32 Abtastungen werden 16 Frequenzwerte davon 15 Oberschwingungen bestimmt.

Bei 512 Abtastungen werden 256 Frequenzwerte davon 255 Oberschwingungen bestimmt.

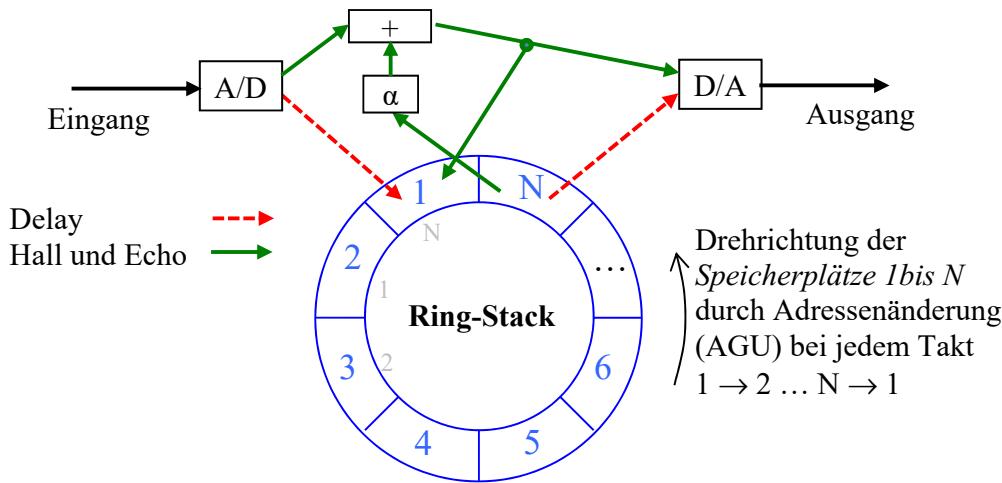
Es sind aber alle geraden Oberschwingungen null, evtl. besteht zusätzlich ein Gleichanteil.

Frage 2: Die Amplitude der jeweils höchsten ermittelten Oberschwingung wird immer kleiner und bei 512 Abtastungen sind die Amplituden ca. ab der 31. Oberschwingung < 1%.

Zusatzfrage: Wenn an die Periode mit n Intervallen ein Intervall der nächsten Periode angehängt wird, hat das Spektrum auch gerade Oberschwingungen, veränderte Phasen der Schwingungen und somit große Fehler.

**Zu Aufgabe 16.7**

Frage 1: Die wesentlichen Unterschiede bei der Erzeugung der Effekte Delay , Hall und Echo sind die Folgenden. Bei Hall sind nur wesentlich kürzere Verzögerungszeiten als beim Echo einzusetzen. ( $\alpha$  ist der Faktor zur Abschwächung des Signals.)



Frage 2: Die wichtigsten Parameter dafür sind:

Delay → Verzögerungszeit z.B. 0,0–2730,0 ms

Hall → Verzögerungszeit des Halleffekts z.B. 0,0–500,0 ms  
Halldauer z.B. 0,3–99,0 s (Länge des Halleffekts)

Echo → Verzögerungszeit z.B. 0,0–1350,0 ms  
Rückkopplungsintensität z.B. -99 bis +99% (- für invertiertes Signal)

**Zu Aufgabe 16.8**

Frage 1: Mit 24 bit ist theoretisch ein Dynamikumfang von  $20\log(2^{24}) = 144$  dB erreichbar.

Frage 2: Praktisch nutzen:

UKW-Rundfunk → ca. 50 dB

Konzertsaal → bis ca. 70 dB

CD → 96 dB

**Zu Aufgabe 16.9**

Frage 1: Mit einer Abtastfrequenz von 96 kHz darf als höchste Signalfrequenz 48 kHz (mit gerade 2 Abtastungen pro Periode) auftreten. Bei 4 Abtastungen werden noch 24 kHz und bei 8 Abtastungen 12 kHz erreicht (vergleiche Aufgabe 16.5).

Frage 2: Z.B. genutzte Geräte:

Radio von 1968 → 80 Hz bis 16 kHz ( $\pm 3$  dB)

VHS-Videorekorder → 20 Hz bis 20 kHz ( $\pm 3$  dB mit 75 dB Dynamikumfang)  
(auf der Stereospur)

Stereo PC-Lautsprecher → 80 Hz bis 18 kHz

Es werden heute kaum Angaben gemacht (geschweige denn garantiert).

## 22.10 Lösungen zu Abschnitt 17

### Zu Aufgabe 17.1

Die Grafik legt einen einfachen exponentiellen Anstieg nahe. Aus Tabelle und Grafik folgt für  $100 \text{ }^{\circ}\text{C} \cdot 0.632 = 63,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , sodass die Zeitkonstante  $\tau = 2,5 \text{ min}$  ist. Die Überprüfung weiterer Kurvenpunkte bestätigt mit guter Näherung das Übertragungsverhalten:  $\underline{u_A} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C} (1 - e^{-t/\tau})$ .

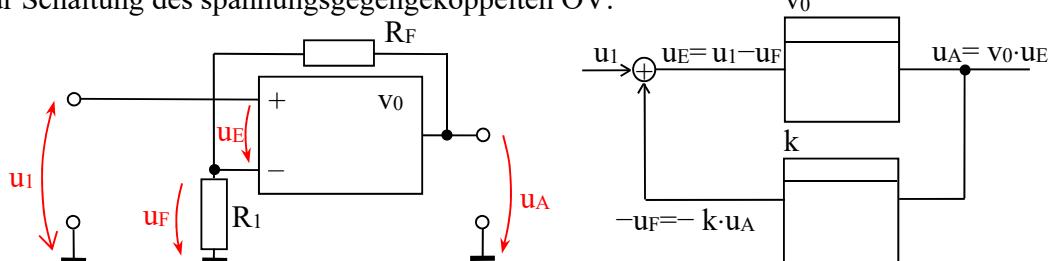
### Zu Aufgabe 17.2

$$u_A = (1/C_F) \int i_F dt = (1/C_F) \int (-u_1/R_1) dt = -[1/(C_F R_1)] \int u_1 dt, \text{ d.h. } \underline{u_A} = -(1/\tau) \int u_1 dt$$

So wird  $U_A(p) = -(1/\tau) U_1(p)/p$  und  $\underline{H(p)} = U_A(p)/U_1(p) = -(1/\tau)(1/p)$

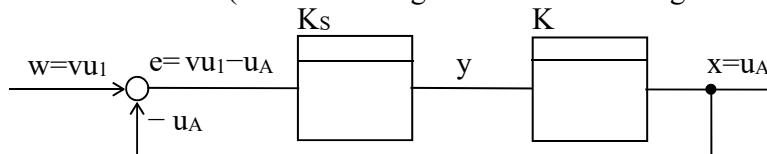
### Zu Aufgabe 17.3

Zur Schaltung des spannungsgegengekoppelten OV:



$$u_A = v_0 \cdot (u_1 - k \cdot u_A) = v_0 \cdot u_1 / (v_0 \cdot k + 1) \approx u_1 / k \text{ mit } k = R_1 / (R_1 + R_F) \text{ (Spannungsteilung)}$$

Oder entsprechend Abb. 17.1. (w vor dem Regler muss um 1/k vergrößert werden)



$$x = u_A = K_S \cdot K_R \cdot u_E = K_S \cdot K_R \cdot (vu_1 - u_A) \quad \text{mit } v = (1 + R_F/R_1)$$

$$u_A = K_S \cdot K_R \cdot vu_1 / (1 - K_S \cdot K_R) \approx vu_1 \quad \text{für } K_R = v_0 \rightarrow \infty \text{ und } K_S = 1$$

Das entspricht einem P-Glied als Regler mit  $K_S = 1$  und einem P-Glied als Strecke mit  $K_R = v_0$ . Der Sollwert ist (das tatsächlich gewünschte)  $w = vu_1$ .

So wird das Übertragungsverhalten zu  $\underline{u_A} \approx (1 + R_F/R_1) u_1$  und infolge  $K_R = v_0 \rightarrow \infty$  die Regelabweichung praktisch null.

Zur Spannungsregelung:

Schaltung drehen und Kleinsignalersatzschaltung erstellen (vergleiche: Abschnitt 12.3.3, Abb. 12.33). Die Referenzspannung ist praktisch konstant, d.h.  $\Delta U_{ZD} = w = 0$ . Es gibt zwei Störungen  $\Delta U_N$  und  $\Delta R_L$ . Mit  $U_L = R_L \cdot I_L$  folgt dessen Änderung aus dem totalen Differential  $\Delta U_L = (\partial U_L / \partial I_L) \cdot \Delta I_L + (\partial U_L / \partial R_L) \cdot \Delta R_L = R_L \cdot \Delta I_L + I_L \cdot \Delta R_L = (R_{L0} + \Delta R_L) \cdot \Delta I_L + (I_{L0} + \Delta I_L) \cdot \Delta R_L$ , (so folgt die entsprechende Ersatzschaltung für  $R_L$  bei Kleinsignalaussteuerung). Da  $U_N$  nicht konstant ist (ideale Quellen wären sonst einfach ein Kurzschluss), bleibt  $\Delta U_N$  bei Kleinsignal-aussteuerung bestehen.

$$u_{BE} = \Delta U_{ZD} - \Delta U_L = -\Delta U_L,$$

$$u_{CE} = \Delta U_N - \Delta U_L$$

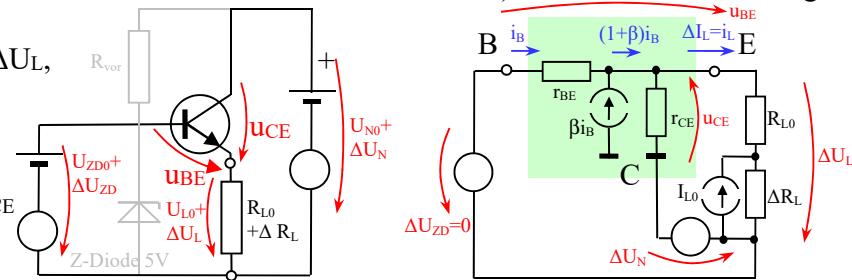
$$i_B = u_{BE} r_{BE}$$

$$i_E = (1+\beta)u_{BE}/r_{BE}$$

$$i_L = (1+\beta)u_{BE}/r_{BE} + u_{CE}/r_{CE}$$

$$\Delta U_L = i_L(R_{L0} + \Delta R_L) + I_{L0}\Delta R_L$$

$$\Delta U_L = [(1+\beta)u_{BE}/r_{BE} + u_{CE}/r_{CE}](R_{L0} + \Delta R_L) + I_{L0}\Delta R_L$$



$$\Delta U_L = [(1+\beta)(-\Delta U_L)/r_{BE} + (\Delta U_N - \Delta U_L)/r_{CE}](R_{L0} + \Delta R_L) + I_{L0}\Delta R_L$$

$$\Delta U_L = \{(\Delta U_N/r_{CE})(R_{L0} + \Delta R_L) + I_{L0}\Delta R_L\}/\{1 + [(1+\beta)/r_{BE} + 1/r_{CE}](R_{L0} + \Delta R_L)\}$$

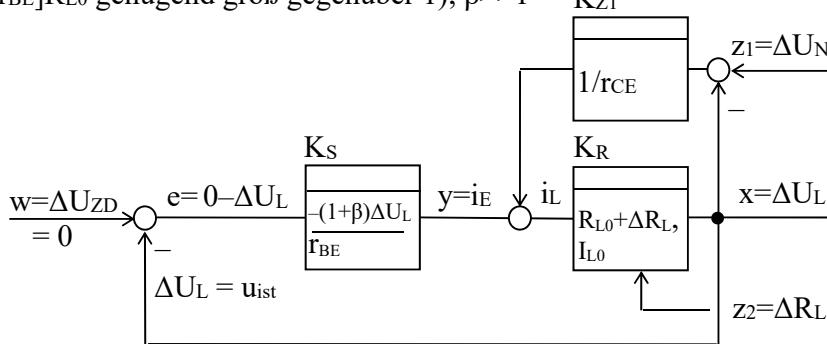
$$\Delta U_L(\Delta U_N=0) = I_{L0}\Delta R_L/\{1 + [(1+\beta)/r_{BE} + 1/r_{CE}](R_{L0} + \Delta R_L)\}$$

$$\underline{\Delta U_L(\Delta U_N=0) \approx \Delta R_L I_{L0}/\beta(0,02\dots 1)}$$

$$\Delta U_L(\Delta R_L=0) = \{(\Delta U_N/r_{CE})R_{L0}\}/\{1 + [(1+\beta)/r_{BE} + 1/r_{CE}]R_{L0}\}$$

$$\underline{\Delta U_L(\Delta R_L=0) \approx \Delta U_N (R_{L0}/r_{CE})/\beta(0,02\dots 1)}$$

für  $\Delta U_L/r_{CE} \approx 0$  bei  $r_{CE} > 10 \text{ k}\Omega$ ;  $\Delta R_L \ll R_{L0}$ ;  $1 \ll [(1+\beta)/r_{BE}]R_{L0}$  für  $R_{L0}/r_{BE} \approx 0,02\dots 1$  (und so  $[(1+\beta)/r_{BE}]R_{L0}$  genügend groß gegenüber 1);  $\beta \gg 1$

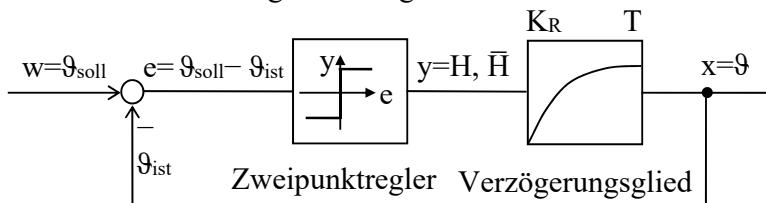


Da in der Praxis  $r_{BE}$ ,  $r_{CE}$  und  $\beta$  nicht konstant sind, wenn die Aussteuerung größer ist, handelt es sich nur um eine lineare Näherung. Es ist zu sehen, dass auch bei einer relativ einfachen Anordnung die theoretische Analyse kompliziert werden kann (Kleinsignalbetrachtung zur Linearisierung, Abhängigkeiten für  $U_L$  und Wirkungsweise der Transistorschaltung).

Durch Hinzufügen eines Operationsverstärkers, der  $U_{ZD} - U_L$  verstärkt an die Basis übergibt, würden mit  $\beta(0,02\dots 1) \cdot v$  die  $\Delta U_L$  noch deutlich kleiner werden.

### Zu Aufgabe 17.4

Reglerstruktur der Heizungssteuerung von Abschnitt 15.3.2



Damit wird nur die Temperaturregelung, aber es werden keine weiteren Funktionen (Ein/Aus, Pumpe) erfasst. Die Heizungsanlage kann komplizierter als ein Verzögerungsglied 1. Ordnung sein (so ist z.B. eine zusätzliche Totzeit vorhanden). Hier hilft die Messung einer Sprungantwort der Strecke und die Näherung der Messkurve durch mehrere Glieder.

## 22.11 Lösungen zu Abschnitt 19

### Zu Aufgabe 19.1

Frage 1:

$$\eta = P_{ab}/P_{zu} = 150 \text{ kW} / (220 \text{ V} \cdot 750 \text{ A} + 220 \text{ V} \cdot 12 \text{ A}) = \underline{89\%}$$

Frage 2: Mit  $P_{N \text{ mech}} = \omega M_N \rightarrow$

$$M_N = P_{N \text{ mech}}/(2\pi n) = 150 \text{ kW} / (2\pi \cdot 650 \text{ U/min}) = 150 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} / (2\pi \cdot 650) = \underline{2200 \text{ Nm}}$$

**Zu Aufgabe 19.2**

Frage 1:

$$P_{el} = U_N I_N = 220 \text{ V} \cdot 610 \text{ A} = \underline{\underline{134 \text{ kW}}}$$

Frage 2:

$$\eta = P_{ab}/P_{zu} = 220 \text{ V} \cdot 610 \text{ A} / (150 \text{ kW} + 220 \text{ V} \cdot 12 \text{ A}) = \underline{\underline{88\%}}$$

Frage 3:

Für den Generator ist:  $P_{zu} = P_{N \text{ mech}} + P_{\text{Erregung}} \rightarrow$  Verluste aus der Antriebsleistung

Für den Motor ist:  $P_{zu} = P_{N \text{ el}} + P_{\text{Erregung}} \rightarrow$  Verluste aus dem Elektroanschluss

Wenn dieselbe Maschine verwendet wird, dürfen weder  $U_N$ ,  $I_N$  noch  $P_{N \text{ mech}}$  überschritten werden. So ist im Motorbetrieb  $P_{\text{mech}} < P_{N \text{ el}}$  und im Generatorbetrieb  $P_{el} < P_{N \text{ mech}}$ .

**Zu Aufgabe 19.3**

$U_{eff}$  wie  $I_{eff}$  sind durch Spannungsfestigkeit bzw. Strombelastbarkeit begrenzt. Für beide muss der Nennbelastungsfall benutzt werden. Mit  $P_s = U_{eff} \cdot I_{eff} \rightarrow$

$$I_N = P_{SN} / U_N = 550 \text{ VA} / 220 \text{ V} = \underline{\underline{2,5 \text{ A}}}$$

**Zu Aufgabe 19.4**

Frage 1: Die Leistung ist ausreichend, denn die vorgesehene Leistung belastet den Trafo vergleichbar stark. Bei Leerlauf entspricht das Spannungsverhältnis sehr gut dem Windungsverhältnis.  $\rightarrow U_{Last}/U_{Leer}$  entspricht näherungsweise auch dem gewünschten Verhältnis.

$$(24 \text{ V})/(27 \text{ V}) = (18 \text{ V})/U_L \rightarrow U_L = 18 \text{ V} \cdot 27 / 24 = 20,25 \text{ V}$$

Es müssen 27 V – 20,25 V = 6,75 V weniger werden (bei Leerlauf). Aus den Testwindungen folgt: (5 Wind)/(4,3 V) = Wzusätzlich /(6,75 V)

$$Wzusätzlich = 6,75 \cdot 5 / 4,3 = 6,97 \approx \underline{\underline{7 \text{ Windungen}}}$$

Frage 2:

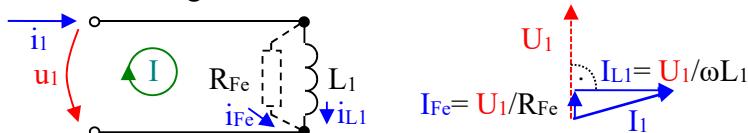
Die Windungen sind mit gegensinniger Wicklungsrichtung anzuschließen, damit gemäß Aufgabe die Spannung abgezogen wird.

Halbe (oder nicht ganzzahlige Wicklungen) sind nicht möglich, da ein geschlossener Stromkreis immer eine Windung darstellt (auch wenn sie etwas „weitläufig“ gewickelt ist).

**Zu Aufgabe 19.5**

Frage 1:

Aus dem Leerlauf folgt:



An  $R_{Fe}$  liegt  $U_1$  und es fließt  $I_1 \cdot \cos\phi$ , d.h.

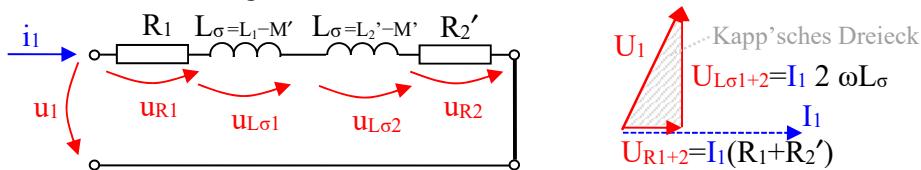
$$R_{Fe} = U_1 / (I_1 \cos\phi) = 230 \text{ V} / (102 \text{ mA} \cdot 0,2) = \underline{\underline{11274 \Omega}}$$

An  $\omega L_1$  liegt  $U_1$  und es fließt  $I_1 \cdot \sin\phi$ , d.h.

$$\omega L_1 = U_1 / (I_1 \sin\phi) = 230 \text{ V} / (102 \text{ mA} \cdot 0,9797) = 2301 \Omega$$

$$L_1 = 2301 \Omega / (2\pi \cdot 50 \text{ Hz}) = \underline{\underline{7,32 \text{ H}}}$$

Aus dem Kurzschluss folgt:



An  $R_1 + R_{2'}$  liegt  $U_1 \cos\varphi$  und es fließt  $I_1$ , d.h.

$$R_1 + R_{2'} = U_1 \cos\varphi / I_1 = 105 \text{ V} \cdot 0,66 / 2,5 \text{ A} = 27,7 \Omega$$

$$2 \omega L_\sigma = U_1 \sin\varphi / I_1 = 105 \text{ V} \cdot 0,751 / 2,5 \text{ A} = 31,6 \Omega$$

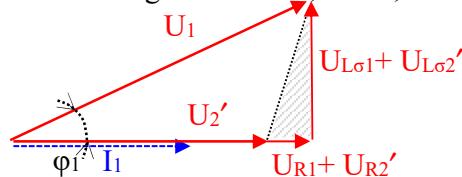
$$L_\sigma = 31,6 \Omega / (2 \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}) = 50 \text{ mH}$$

$$L_\sigma = (1-k) L_1, \text{ d.h.}$$

$$k = 1 - L_\sigma / L_1 = 1 - 0,05 / 7,32 = 0,993$$

Frage 2:

Ohm'sche Nennbelastung  $U_1 = 230 \text{ V}$ ,  $I_1 = 2,5 \text{ A}$  Vernachlässigung von  $R_{Fe}$  und  $M'$



$$(U_2' + U_{R1} + U_{R2'})^2 + (U_{L\sigma 1} + U_{L\sigma 2'})^2 = U_1^2, \text{ d.h.}$$

$$\{U_2' + (R_1 + R_{2'}) I_1\}^2 + (2\omega L_\sigma I_1)^2 = U_1^2, \text{ daraus folgt}$$

$$U_2' = \{U_1^2 - (2\omega L_\sigma I_1)^2\}^{1/2} - (R_1 + R_{2'}) I_1$$

$$U_2' = \{230^2 - (31,6 \cdot 2,5)^2\}^{1/2} - (27,7 \cdot 2,5) \text{ V} = 173,9 \text{ V}$$

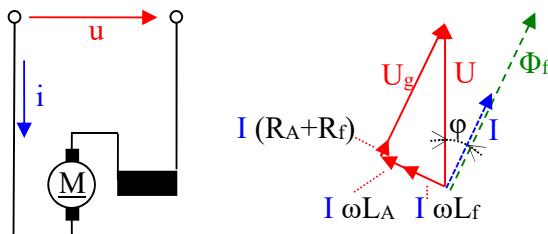
mit  $U_2'/U_2 = w_1/w_2$  wird

$$U_2 = U_2' / (w_1/w_2) = 173,9 \text{ V} / 12 = 14,5 \text{ V}$$

$$\eta = P_{ab} / P_{zu} = \{U_1 I_1 - (R_1 + R_{2'}) I_1^2\} / U_1 I_1$$

$$\eta = \{230 \cdot 2,5 - 27,7 \cdot 2,5^2\} / (230 \cdot 2,5) = 0,7$$

### Zu Aufgabe 19.6



$$\eta = P_{ab} / P_{zu} = P_{mech} / (U_N I_N \cos\varphi) = 70 \text{ W} / (220 \cdot 0,8 \cdot 0,75 \text{ VA}) = 0,53$$

Zusatzfrage: Aus dem Spannungsdreieck des Zeigerbildes folgt:

$$U_g + I(R_A + R_f) = U_N \cos\varphi, \text{ d.h.}$$

$$U_g = U_N \cos\varphi - I(R_A + R_f) = 220 \text{ V} \cdot 0,75 - 0,8 \text{ A} \cdot 75 \Omega = 105 \text{ V}$$

### Zu Aufgabe 19.7

Frage 1:  $P_w = U I \cos\varphi \rightarrow \cos\varphi = P_w / (U I) \rightarrow$

$$\cos\varphi_1 = 920 \text{ W} / (230 \text{ V} \cdot 5 \text{ A}) = 0,8$$

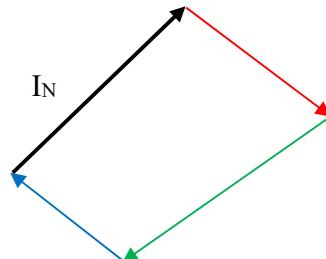
$$\text{d.h. } \varphi_1 = -37^\circ$$

$$\cos\varphi_2 = 1450 \text{ W} / (230 \text{ V} \cdot 7 \text{ A}) = 0,9$$

$$\text{d.h. } \varphi_2 = -25^\circ - 120^\circ = -145^\circ$$

$$\cos\varphi_3 = 855 \text{ W} / (230 \text{ V} \cdot 4 \text{ A}) = 0,93$$

$$\text{d.h. } \varphi_3 = +22^\circ - 240^\circ = -218^\circ$$



$I_N$  ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm der drei Ströme. Gemessen: Breite 4,76, Höhe 4,6  $\rightarrow I_N = 6,6 \text{ A}$  und  $\varphi_N = -44^\circ$

Rechnung nach Komponenten entsprechend der Zeichnung:

$$\text{waagerecht: } 5 \text{ A} \cos\varphi_1 + 7 \text{ A} \cos(\varphi_2 - 120^\circ) + 4 \text{ A} \cos(\varphi_3 - 240^\circ) = 4,88 \text{ A}$$

$$\text{senkrecht: } 5 \text{ A} \sin\varphi_1 + 7 \text{ A} \sin(\varphi_2 - 120^\circ) + 4 \text{ A} \sin(\varphi_3 - 240^\circ) = 4,56 \text{ A}$$

$$I_N = (4,88^2 + 4,56^2)^{1/2} \text{ A} = 6,7 \text{ A}, \quad \varphi_N = \arctan(4,56/4,88) = 43^\circ \rightarrow \text{geringe Abweichung}$$

Frage 2:

- symmetrisches *Mitsystem*:

$$i_{m1} = I_m \cos(\omega t - \varphi_m), \quad i_{m2} = I_m \cos(\omega t - \varphi_m - 2\pi/3) \text{ und } i_{m3} = I_m \cos(\omega t - \varphi_m - 4\pi/3),$$

- symmetrisches *Gegensystem*:

$$i_{g1} = I_g \cos(\omega t - \varphi_g), \quad i_{g2} = I_g \cos(\omega t - \varphi_g + 2\pi/3) \text{ und } i_{g3} = I_g \cos(\omega t - \varphi_g + 4\pi/3) \text{ und}$$

- *Nullsystem*:

$$i_{01} = i_{02} = i_{03} = I_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \quad (\text{für jede der drei Drehstromphasen})$$

In der Zeigerdarstellung gilt für die drei Zeiger der Drehstromphasen  $I_1, I_2$  und  $I_3$ :

$$I_1 = I_m + I_g$$

$$I_2 = I_m \exp(-j2\pi/3) + I_g \exp(+j2\pi/3) + I_0$$

$$I_3 = I_m \exp(-j4\pi/3) + I_g \exp(+j4\pi/3) + I_0$$

Dabei sind in dieser Darstellung auf der linken wie auf der rechten Seite je 3 Parameter bei 3 Gleichungen. Nach Umordnen zu  $I_m, I_g$  und  $I_0$  folgt daraus:

$$I_m = 1/3 \{ I_1 + I_2 \exp(j2\pi/3) + I_3 \exp(j4\pi/3) \}$$

$$I_g = 1/3 \{ I_1 + I_2 \exp(j4\pi/3) + I_3 \exp(j2\pi/3) \}$$

$$I_0 = 1/3 \{ I_1 + I_2 + I_3 \}$$

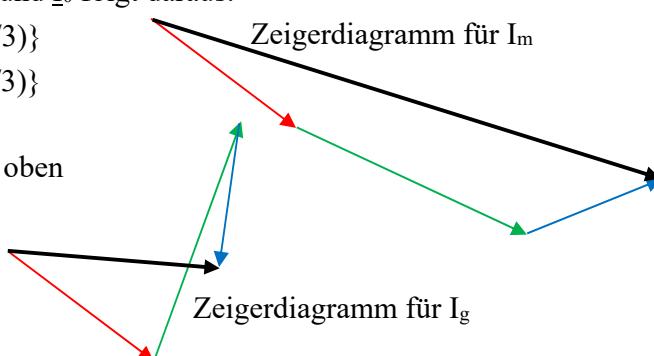
$I_0$  wird  $1/3$  des Nullleiterstromes  $I_N$  von oben

$$\rightarrow I_N = 2,2 \text{ A} \text{ und } \varphi_N = -44^\circ.$$

Gemessen:

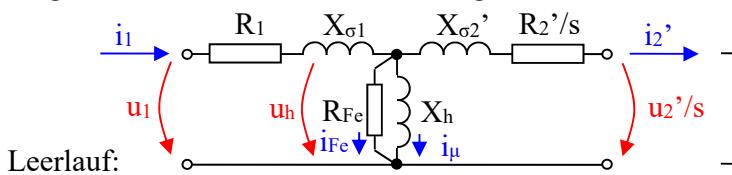
$$I_m = 14,7 \text{ A} \text{ und } \varphi_m = -17,4^\circ$$

$$I_g = 5,9 \text{ A} \text{ und } \varphi_g = -4,7^\circ$$



## Zu Aufgabe 19.8

Frage 1: Aus dem Ersatzschaltbild folgt:



Leerlauf:

$$R_{Fe} = U / I_w = 220 \text{ V} / (0,05 \text{ A} \cdot 0,2) = 22 \text{ k}\Omega$$

$$X_h = U / I_b = 220 \text{ V} / (0,05 \text{ A} \cdot 0,98) = 4,45 \text{ k}\Omega$$

Kurzschluss:

$$R_1 + R_2' = U_w / I = 140 \text{ V} \cdot 0,14 / 0,93 \text{ A} = 21 \Omega$$

$$X_{\sigma 1} + X_{\sigma 2}' = U_b / I = 140 \text{ V} \cdot 0,99 / 0,93 \text{ A} = 149 \Omega$$

Frage 2: Belastung:

$$R_2' = (R_1 + R_2') - R_1 = 21 \Omega - 12,4 \Omega = 8,6 \Omega$$

$$P_{\text{mech}} = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot I_1^2 \cdot R_2' / s, \text{ d.h.}$$

$$s = 3 \cdot I_1^2 \cdot R_2' / P_{\text{mech}} = 3 \cdot 0,93^2 \text{ A}^2 \cdot 8,6 \Omega / 330 \text{ W} = 0,068, \text{ d.h. } n = n_0 - s \cdot n_0 = 2796 \text{ U/min}$$

$$\eta = P / (3 \cdot I_N \cdot U_N \cos \varphi_N) = 330 \text{ W} / (3 \cdot 220 \text{ V} \cdot 0,93 \text{ A} \cdot 0,78) = 0,74$$

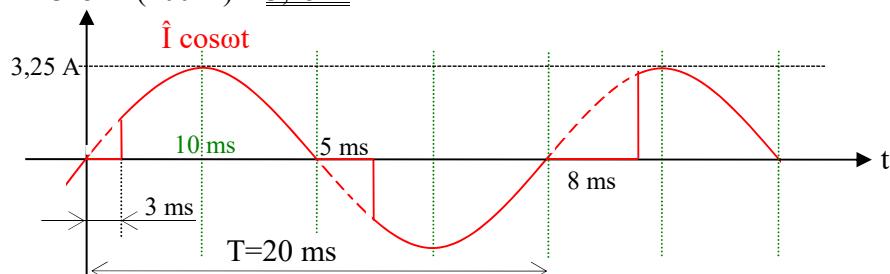
Zusatzaufgabe:

Das Vorgehen ist identisch mit dem Transformator, wenn die Sekundärseite als Mechanik verstanden wird. Leerlauf  $n = n_0$ , Kurzschluss  $n = 0$  und Belastung  $n = n_N$  bei  $P = P_N$ .

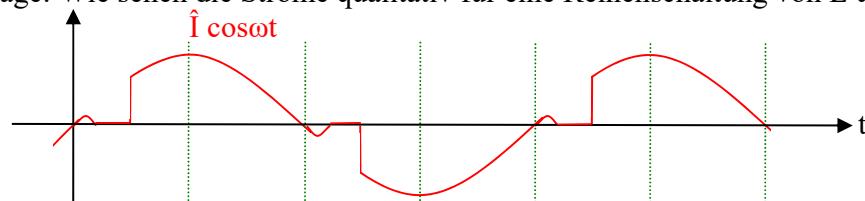
## 22.12 Lösungen zu Abschnitt 20

### Zu Aufgabe 20.1

$$\hat{I} = \hat{U} / R = 325 \text{ V} / (100 \Omega) = 3,25 \text{ A}$$

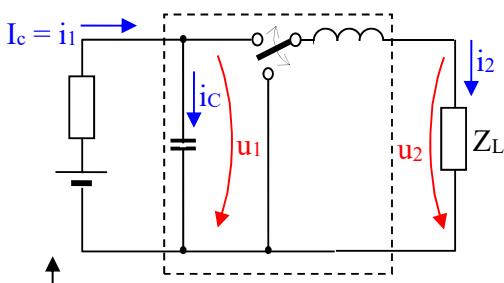


Zusatzafrage: Wie sehen die Ströme qualitativ für eine Reihenschaltung von L und R aus?



Der Strom fließt etwas weiter und wird dann erst etwas später zu null.

### Zu Aufgabe 20.2



Bei konstantem Stromanstieg gilt

$$u_L \approx U_L \text{ Mittel} = \text{const.}$$

Maschengesetze für Einschalten bzw. Kurzschluss:

$$0 = u_L + u_2 - u_1 \text{ bzw. } 0 = u_L + u_2$$

Spannung der Induktivität:  $u_L = L \frac{di_2}{dt} \rightarrow$

$$i_2 \approx I_{\text{min}} + [(u_1 - u_2)/L](t - t_i) \text{ für } t_i \leq t \leq t_i + t_E$$

$$i_2 \approx I_{\text{max}} + (-u_2/L)(t - t_i) \text{ für } t_i + t_E \leq t \leq t_i + t_T$$

$$I_{\text{max}} = I_{\text{min}} + [(u_1 - u_2)/L]t_E \rightarrow I_{\text{max}} - I_{\text{min}} = t_E(u_1 - u_2)/L$$

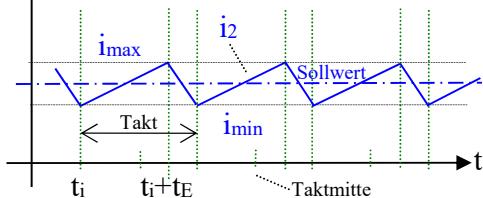
$$I_{\text{min}} = I_{\text{max}} + (-u_2/L)(t_T - t_E) \rightarrow I_{\text{max}} - I_{\text{min}} = (t_T - t_E)u_2/L$$

$$\rightarrow t_E(u_1 - u_2)/L = (t_T - t_E)u_2/L \rightarrow$$

$$(t_T - t_E)/t_E = t_T/t_E - 1 = [(u_1 - u_2)/L]/(u_2/L) = u_1/u_2 - 1$$

$$t_E/t_T = u_2/u_1 = 13,5 \text{ V}/(18 \text{ V}) = 0,75$$

$$t_E = (t_T/t_T)/f_T = 37 \mu\text{s}$$



## Literaturverzeichnis

- AEG70, AEG-Telefunken. 1970.** *AEG-Telefunken-Handbücher, Band 12: Synchronmaschinen*. Berlin : AEG-Telefunken, 1970.
- Bed75, Bederke, Hans-Jürgen, Ptassek, Robert, Rothenbach, Georg, Vaske, Paul. 1975.** *Elektrische Antriebe und Steuerungen*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1975.
- Bei13, Beier, Thomas , Wurl, Petra. 2013.** *Regelungstechnik*. München : Carl Hanser Verlag, 2013.
- Boe12, Boeck, Erich. 2012.** *Relativitätstheorie und Elektrotechnik*. Aachen : Shaker Verlag GmbH (ISBN 978-8440-1385-6), (vergleiche <http://www.erich-boeck.de/43048.html>), 2012.
- Boe78, Boeck, Erich. 1978.** Theoretische Untersuchungen des Impulsverhaltens von Lumineszenzdioden. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock*. 27. Jahrgang Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe, 1978, Heft 9, S. 989-994, (vergleiche <http://www.erich-boeck.de/media/Promotion.pdf>).
- Boe93, Boeck, Erich. 1993.** Sinusförmige Modulation für direkte Umrichter bei Pulsbetrieb. [Buchverf.] Prof. Dr. Peter-Klaus Budig (Hrsg.). *12. Internationale Fachtagung "Industrielle Automatisierung - Automatisierte Antriebe"*. Chemnitz : Techn. Universität Chemnitz-Zwickau Fachbereich Elektrotechnik, (vergleiche <http://www.erich-boeck.de/43023.html>), 1993.
- Bor69, Born, Max. 1969.** *Die Relativitätstheorie Einsteins (Fünfte Auflage)*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1969.
- Bro79, Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. 1979.** *Taschenbuch der Mathematik (19. Auflage)*. Leipzig und Moskau : G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig und Verlag Nauka Moskau, 1979.
- Büh77, Bühler, Hansruedi. 1977.** *Einführung in die Theorie geregelter Drehstromantriebe, Band 2*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1977.
- Büh77a, Bühler, Hansruedi. 1977.** *Einführung in die Theorie geregelter Drehstromantriebe, Band 1*. Basel : Birkhäuser Verlag, 1977.
- Dör89, Dörner, Dietrich. 1989.** *Die Logik des Misslingens*. Reinbek bei Hamburg : Rowohlt Verlag GmbH, 1989.
- Ein70, Einstein, Albert. 1970.** *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Berlin : Akademie-Verlag, 1970.
- Fis79, Fischer, Rolf. 1979.** *Elektrische Maschinen*. München, Wien : Carl Hanser Verlag, 1979.
- Föl08, Föllinger, Otto. 2008.** *Regelungstechnik (10. Auflage)*. Heidelberg : Hüthig Verlag, 2008.
- Fri85, Fritsche, Gottfried. 1985.** *Signale und Funktionaltransformationen*. Berlin : VEB Verlag Technik, 1985.
- Hab12, Haberfellner, Reinhart, Vössner, Siegfried, Fricke, Ernst, De Weck, Olivier L. 2012.** *Systems Engineering: Grundlagen und Anwendung (12. Auflage)*. Zürich : Orell Füssli Verlag, 2012.
- Häg02, Hägele, Thomas, Knutzen, Sönke. 2002.** Arbeitsprozessorientierte Entwicklung schulischer Lernsituationen. *lernen & lehren (Heft 67)*. 2002, S. 115-118.
- Heu91, Heumann, Klemens. 1991.** *Grundlagen der Leistungselektronik*. Stuttgart : B.G. Teubner, 1991.
- Kal15, Kallies,Hanno. 2015.** *Entwicklung technischer Lernsysteme*. Herzogenrath : Shaker Verlag GmbH, 2015.
- Kar11, Kark, Klaus W. 2011.** *Antennen und Strahlungsfelder*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien GmbH, 2011.
- Küp84, Küpfmüller, Karl. 1984.** *Einführung in die theoretische Elektrotechnik (11. Auflage)*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer- Verlag, 1984.

- Lan73, Lange, Franz-Heinrich.** 1970 und 1973. *Signale und Systeme* (2. überarbeitete Auflage), Bände 1 bis 3 . Berlin : Verlag Technik, 1970 und 1973.
- Lin93, Lindner, Brauer, Lehmann.** 1993. *Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik*. Leipzig, Köln : Fachbuchverlag, 1993.
- Lun08, Lunze, Jan.** 2008. *Regelungstechnik 1* (7. Auflage). Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
- Lun91, Lunze, Klaus.** 1991. *Einführung in die Elektrotechnik* (13. Auflage). Berlin : Verlag Technik GmbH, 1991.
- Lun91a, Lunze, Klaus.** 1991. *Theorie der Wechselstromschaltungen* (8. Auflage). Berlin : Verlag Technik GmbH, 1991.
- Max76, Maxwell, James Clerk.** 1976. *Über physikalische Kraftlinien (Deutsch herausgegeben von Ludwig Boltzmann)*, Nachdruck von 1898. Braunschweig : Friedr. Vieweg u. Sohn GmbH (für Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt), 1976.
- Mic92, Michel, Manfred.** 1992. *Leistungselektronik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.
- Mie70, Mierdel, Georg.** 1970. *Elektrophysik*. Berlin : VEB Verlag Technik, 1970.
- Nol12, Nolting, Wolfgang.** 2012. *Grundkurs Theoretische Physik 4*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.
- Pau07, Paus, Hans J.** 2007. *Physik in Experimenten und Beispielen* (3. Auflage). München : Carl Hanser Verlag, 2007.
- Pau74, Paul, Reinholt.** 1974. *Halbleiterphysik*. Berlin : VEB Verlag Technik, 1974.
- Phi76, Philippow, Eugen.** 1976. *Taschenbuch Elektrotechnik, Band 1*. München, Wien : Carl Hanser Verlag, 1976.
- Poh44, Pohl, Robert Wichard.** 1944. *Einführung in die Elektrizitätslehre* (10. u. 11. Auflage). Berlin : Springer Verlag, 1944.
- Reb05, Rebhan, Eckhard.** 2005. *Theoretische Physik II*. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2005.
- Reb99, Rebhan, Eckhard.** 1999. *Theoretische Physik I*. Heidelberg, Berlin : Spektrum Akademischer Verlag, 1999.
- Sch09, Schmidt, Ulrich.** 2009. *Professionelle Videotechnik*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009.
- Spe65, Spenke, Eberhard.** 1965. *Elektronische Halbleiter*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer Verlag, 1965.
- Tae70, Taegen, Frank.** 1970. *Einführung in die Theorie der elektrischen Maschinen I*. Braunschweig : Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, 1970.
- Tie10, Tietze, Ulrich, Schenk, Christoph.** 2010. *Halbleiterschaltungstechnik* (13. Auflage). Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.
- Vog80, Vogel, Johannes.** 1980. *Grundlagen der elektrischen Antriebstechnik*. Heidelberg : Hüthig Verlag, 1980.
- Wei08, Weinzierl, Stefan.** 2008. *Handbuch der Audiotechnik*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
- Wei81, Weißmantel, Christian, Hamann, Claus.** 1981. *Grundlagen der Festkörperphysik*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1981.

# Sachverzeichnis

analoge Schaltungstechnik	
Betriebsweise .....	211
Arbeitspunkte A, AB, B, C .....	211
D-Betrieb.....	212
Gegentaktbetrieb .....	212
Differenzverstärker (Prinzip) .....	213
Messung .....	221
am Operationsverstärker .....	221
Operationsverstärker .....	213
Eigenverstärkung $v_0$ .....	215
Eingangsruhestrom.....	215
Frequenzgang .....	216
Gleichtaktunterdrückung .....	216
Offsetspannung.....	216
Offsetspannungsdrift .....	216
Offsetstrom.....	215
Parameter Standardtypen.....	214
Phasengang.....	217
Schaltbilder für OV .....	214
Verstärkung-Bandbreite-Produkt ..	216
OV-Schaltungen .....	219
Dimensionierung für OV.....	219, 220
Eingangswiderstand .....	218, 219
Gesamtverstärkung $v_u$ .....	217, 218
invertierender Verstärker.....	218
nichtinvertierender Verstärker.....	217
Schaltungsbeispiele .....	222
Spannungsgegenkopplung.....	217
Stromgegenkopplung .....	218
Asynchronmaschine .....	316
Bremsmotore .....	320
doppelt gespeiste ASM.....	317, 331
Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie....	319
Drehzahlstellung.....	320
Frequenz .....	320
Frequenzumrichter .....	320
Läuferwiderstände .....	320
Ständerspannung .....	320
Einphasenbetrieb .....	321
mit Anlaufkondensator.....	322
Ersatzschaltung.....	318
Stromverdrängung im Läuferstab..	318
Verlust, mechanische Leistung .....	318
Zeigerbild und Ortskurve .....	318
feldorientierte Regelung.....	320
Funktionsprinzip.....	317
Generator.....	321
Kühlung.....	321
Kurzschlussläufer .....	317
Anfahren mit Stern-Dreieck .....	320
Phasenschiebertransformator.....	316
Schaltbilder .....	317
Schleifringläufer .....	317
Anfahren mit Widerständen.....	320
Schlupf.....	318
Strom-Drehmoment-Kennlinie .....	319
Kippmomente .....	319
stabiler Betriebsbereich .....	319
synchrone Drehzahl .....	317
Auswahl eines Motors .....	330
Analyse der Antriebsaufgabe.....	330
digitale Schaltungstechnik .....	231
Ablaufsteuerung.....	247
Funktionsplan .....	248
Schrittfolge .....	249
Abtasttheorem.....	235
Analog-Digital-Umsetzer	
Balanceverfahren .....	234
Dreiecksverfahren.....	234
inkrementelle Geber.....	235
Spannungs-Frequenz-Umsetzer....	235
Treppenverfahren.....	235
digitale Signale .....	231
Analog-Digital-Wandlung .....	233
binär codierte Signale .....	232
Codescheiben, -lineale .....	233
Einteilung der Signale.....	231
Gray-Code.....	233
Information .....	231
inkrementelle Geber.....	233
pulsmodulierte Signale .....	232
Signal .....	231
Wertquantisierung.....	233
Zeichen .....	231
Zeitquantisierung .....	233
kombinatorische Schaltungen .....	239
Belegungstabelle.....	239
EXOR .....	241
Funktionen erweitern .....	240
Halbaddierer .....	242
nur mit NAND-Gattern.....	243
nur mit NOR-Gattern.....	240
Volladdierer .....	242
Messung .....	243
an einem Schaltwerk.....	243
an einer Ablaufsteuerung.....	250
mono-, astabile Kipstufe .....	247
Schaltalgebra.....	236

disjunktive Normalform .....	237, 239
Minimalform .....	238
NAND .....	237
NOR .....	237
Reaktionszeit, Hazard.....	237
Realisierung AND, OR, NOT .....	236
sequentielle Schaltungen .....	243
JK-Master-Slave-Flipflop.....	245
Ringzähler .....	246
RS-Flipflop.....	243
RS-Master-Slave-Flipflop .....	244
Schieberegister .....	246
synchrone Kippstufe.....	244
Teilerschaltung .....	245
Zählerschaltung .....	246
Drehfeld.....	315
Aufbau Statorwicklung .....	315
konstanter Fluss.....	316
Ströme, Statorflussdichten .....	315
Dreiphasensystem.....	312
Dreieckschaltung.....	312
Last mit Blindanteil.....	313
Leistung Aronschaltung .....	314
Leistung Messung .....	314
Leistung Stern, Dreieck.....	314
Leiter-, verkettete Spannung .....	313
Sternschaltung .....	312
symmetrische.....	312
unsymmetrische Last.....	314
Gegensystem .....	315
Mitsystem .....	315
Nullsystem.....	315
symmetrische Komponenten .....	315
Durchflutungsgesetz.....	68
FI-Schalter .....	74
Rogowskispule .....	68
elektrische Energie .....	35
am Kondensator.....	59
an der Induktivität .....	86
elektrische Leistung.....	35
am Widerstand.....	35
bei Sinusform .....	151
Blindleistung .....	37, 151
Leistungsfaktor $\cos\phi$ .....	37, 151
Scheinleistung .....	151
Wirkleistung .....	37, 151
elektrische Spannung.....	16
Effektivwert.....	38
im Nichtleiter.....	48
Spannungsabfall .....	15
Urspannung .....	16
elektrisches Feld .....	15, 48
Feldlinien, Feldlinienbilder.....	21, 49
elektrisches Potential .....	16
Äquipotentiallinien .....	23
elektrochemische Spannungsreihe.....	40
elektrolytischer Trog.....	21
elektrotechnische Prozesse .....	1
Ersatzschaltungen Prinzip.....	124
Vierpole allgemein.....	200
Vierpolformen.....	202
Zweipole .....	124
Gegenkopplung Prinzip .....	217
Gleichstrommaschine .....	298, 331
Aufbau .....	298
Ankerrückwirkung .....	301
Ankerwicklung .....	299
Feldwicklung .....	299
Kompensationswicklung.....	299
Wendepolwicklung .....	299
Bezeichnung Anschlussklemmen .....	304
Definition Anker .....	298
Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie .....	300
Leerlaufdrehzahl Nebenschluss .....	300
Nebenschlussmaschine .....	300
ohne Last Reihenschluss .....	303
Reihenschlussmaschine .....	303
Reihenschlussverhalten .....	303
Ersatzschaltungen .....	299
Ankerkreis .....	299
Generatorbetrieb .....	298, 302, 303
Messung .....	304
Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie .....	304
Motorbetrieb .....	298
Nebenschlussmaschine .....	299
Reihenschlussmaschine .....	302
Schaltungen .....	299
Anlassvorgang Nebenschluss .....	301
Anlasswiderstand Nebenschluss .....	300
Drehrichtung Nebenschluss .....	301
Drehrichtung Reihenschluss .....	303
Drehzahlstellung Nebenschluss .....	301
Drehzahlstellung Reihenschluss .....	303
Maschinenkonstanten .....	300, 302
Nebenschlussmaschine .....	299
Reihenschlussmaschine .....	302
Strom-Drehmoment-Kennlinie .....	300
Nebenschlussmaschine .....	300
Reihenschlussmaschine .....	303
Verbundmaschine .....	303
Größen der Wärmelehre .....	42
Grundstromkreis .....	105

aktiver Zweipol, Kennlinie.....	106	Transistorverstärker .....	205
Kennlinie $f(R_a)$ .....	109	Metall-Halbleiter-Übergang .....	189
Messung .....	112	Austrittsarbeit .....	189
Kennlinie, Kenngrößen .....	112	Gleichgewicht Diffusion - Feld ....	189
passiver Zweipol, Kennlinie.....	107	leitende Kontakte .....	189
Spannungs-, Stromquellenschaltung.	108	Schottkydioden .....	189
Halbleiterbauelemente.....	175	Spitzendioden .....	189
Bändermodell .....	179	Varianten.....	190
Akzeptoren .....	180	PN-Übergang .....	184
Atome im Kristall.....	177	Avalancheeffekt.....	188
Atommodell.....	176	Diffusionsspannung .....	185
Beweglichkeit Elektronen .....	179	Durchlassrichtung .....	185
Beweglichkeit Löcher .....	179	Ersatzschaltung Diode .....	191
Dichten n und p .....	179	Gleichgewicht Diffusion - Feld ....	185
Donatoren .....	180	mit äußerer Spannung .....	185
Dotierung.....	180	Raumladungszone .....	185
Eigenleitung .....	178	Sperrrichtung .....	185
einige Kennwerte.....	182	Tunneleffekt.....	188
Einkristallstruktur Silicium .....	178	Verteilung n, p, $\rho$ , E, $\phi$ .....	184, 185
Ferminiveau.....	179	vollständige Kennlinie .....	187
Fermi-Verteilung.....	179	Wagner'sche Kennlinie .....	187
Generation .....	178	Zehnereffekt.....	188
Leiter, Halbleiter, Isolator .....	180	Vierschichtbauelemente.....	209
Majoritäts-, Minoritätsträger .....	182	Diac, Triac .....	209
Massenwirkungsgesetz.....	181	IGBT .....	210
Rekombination .....	178	Vierschichtdiode, Tyristor .....	209
Bipolartransistor .....	196	Induktionsgesetz .....	71
Bändermodell mit Spannungen .....	197	Bewegungsinduktion .....	71
Bändermodell, n und p .....	196	insgesamt .....	73
Basisschaltung.....	203	Ruheinduktion.....	72
Emitterschaltung.....	202	Selbst- und Gegeninduktion .....	74
Kennliniendarstellung .....	199	Selbstinduktion .....	73
Kleinsignalersatzschaltung.....	202	volle Verkopplung .....	73
Kollektorschaltung .....	203	Induktivität.....	76
Schaltung für Arbeitspunkt .....	199	Bemessungsgleichung.....	77
Stromaufteilung .....	198	Definitionsgleichung.....	77
Trägerinjektion .....	196	Messung .....	85
Feldeffekttransistor (FET) .....	205	Zeitverhalten .....	85
CMOS Inverter.....	207	Parallelenschaltung.....	79
FET Typen.....	206	Permeabilitätskonstante .....	80
Kennlinie .....	207	Reihenschaltung.....	78
Kleinsignalersatzschaltung.....	208	Spannungsteilerregel.....	78
MOS-FET .....	205	Strom-Spannungs-Beziehung .....	77
Schaltung für Arbeitspunkt .....	208	Stromteilerregel .....	79
Sperrsicht-FET .....	205	Kapazität .....	50
Leitungsmechanismus .....	177	Bemessungsgleichung.....	50
Elektronen im Leitband .....	177	Definitionsgleichung.....	50
Leitfähigkeit .....	178	Dielektrizitätskonstante .....	50, 58
Löcher im Valenzband .....	177	Ladungsaufteilung .....	53
Messung .....	194	Messung .....	56
Kennlinie Diode .....	194	Zeitverhalten .....	56

Parallelschaltung .....	53	Beispiele .....	132
Reihenschaltung .....	52	Fouriertransformation .....	133
Spannungsteilerregel .....	52	Rechenregeln .....	134
Strom-Spannungs-Beziehung.....	50	Komplexe Zahlen.....	129
Zeitverhalten.....	53	Grafische Darstellung - Zeiger ....	130
Kirchhoff'sche Sätze.....	31	Ortskurven .....	131
Knotenpunktsatz.....	31	Rechenregeln .....	129
Maschensatz .....	32	Laplacetransformation .....	135
Kleinsignalaussteuerung Prinzip .....	200	Beispiele .....	136
Kräfte im Magnetfeld .....	70, 86	Korrespondenztabelle .....	137
auf eine bewegte Ladung.....	87	Rechenregeln .....	135
auf Grenzflächen .....	88	logische Funktionen.....	228
auf stromführenden Leiter.....	87	Rechenregeln .....	228
Lorenzkraft .....	70	Vorrangregeln .....	229
Richtungsdefinition .....	70	Lösung linearer DGL .....	102
zwischen zwei Leitern .....	87	Lösung linearer Gleichungssysteme ..	101
Kräfte im Nichtleiter .....	59	Cramer'sche Regel.....	101
auf Grenzflächen .....	60	Gauß'scher Algorithmus.....	101
auf Punktladungen.....	60	Raumzeiger .....	295
Coulomb'sches Gesetz.....	60	Definition .....	295
Ladung.....	6, 7	drei symmetrische Phasen.....	295
Elementarladung.....	7	Produktregel bei Ableitung .....	295
Raumladungsdichte .....	7	Raumzeigerrücktransformation .....	295
Torsionswaage.....	6	Raumzeigertransformation .....	295
Leitwert .....	26	Rechenregeln mit Logarithmen .....	137
spezifischer Leitwert .....	26, 178	unstetige Zeitfunktionen .....	133
magnetische Flussdichte.....	65	Vektorfelder .....	10
Flussdichte, Feld und Permeabilität ....	66	Differentiation.....	10
magnetische Spannung.....	64	Integration.....	10
Analogie zum elektrischen Stromkreis	64	partielle Ableitung .....	11
Spannungsabfall .....	65	Vektorrechnung .....	9
Urspannung - Durchflutung .....	64	Rechenregeln .....	9
magnetischer Fluss .....	64	Zahlensysteme .....	227
magnetischer Widerstand .....	66	BCD-Code .....	227
Bemessungsgleichung .....	66	Dezimalzahlen .....	227
Definitionsgleichung .....	66	Dualzahlen .....	227
Permeabilitätskonstante.....	66	Hexadezimalzahlen.....	227
magnetisches Feld .....	65	Oktalzahlen .....	227
eines geraden Leiters .....	68	Rechnen mit verschiedenen .....	229
Feldlinien, Feldbilder .....	69	Maxwell'sche Gleichungen.....	94
Mathematik.....	9	Messoszilloskop.....	99
diskrete Fouriertransformation -DFT	135	Messverfahren.....	97
diskrete Fouriertransformation -FFT.	135	Kompensationsmethode .....	97
Dualzahlen.....	228	Messfehler.....	98
Aussagenlogik .....	228	Substitutionsmethode .....	97
Disjunktion – ODER, OR.....	228	Netzwerkberechnung .....	115
Grundfunktionen .....	228	Knotenspannungsanalyse.....	127
Konjunktion – UND, AND .....	228	Maschenstromanalyse.....	128
Negation – NICHT, NOT .....	228	mit Kirchhoff'schen Sätzen.....	116
technische Realisierung.....	228	mit Stern-Dreieck-Umformung .....	120
Fourierreihe .....	131	mit Strom-, Spannungsteilung .....	118

mit Zweipoltheorie .....	124
Modellierung, Simulation.....	126
Regelungstechnik .....	283
Arbeitsablauf .....	292
Analyse, Entwurf.....	292
Implementierung .....	292
Blöcke.....	284
Messeinrichtung .....	284
Regeleinrichtung .....	284
Regelglied.....	284
Regelstrecke .....	284
Regler .....	284
Stelleinrichtung .....	284
Steller .....	284
Stellglied.....	284
Steuereinrichtung .....	284
Vergleichsglied.....	284
Funktionsblock .....	285
linear zeitinvariant.....	285
rückwirkungsfrei .....	285
generelle Reglerstruktur .....	285
Beobachtbarkeit.....	283
Steuerbarkeit.....	283
Zustandsraum .....	283
lineare Regler .....	287
D-Glied.....	287
I-Glied .....	287
P-Glied .....	287
PID-Regler .....	287
nichtlinearer Regler .....	287
Begrenzer .....	287
Kennlinienregler.....	287
strukturumschaltender Regler .....	287
Zweipunktregrler .....	287
Regelstrecke .....	286
PT <sub>1</sub> -Glied.....	286
PT <sub>2</sub> -Glied.....	286
T <sub>t</sub> -Glied .....	286
Regelstruktur .....	288
Definition Stabilität .....	289
digitale Regelung.....	291
Führungsverhalten .....	288
Kaskadenregelung .....	290
lineare Regelung.....	288
nichtlineare Regelung.....	290
quasistationäre Regelung.....	290
Regelabweichung .....	288
Störgrößenaufschaltung.....	291
Störverhalten .....	289
Signale .....	284
Führungsgröße.....	284
Regelabweichung.....	284
Regelgröße .....	284
Reglerausgangsgröße .....	284
Rückführgröße .....	284
Stellgröße .....	284
Störgröße.....	284
Steuerung, Regelung.....	283
Übertragungssystem .....	285
im Frequenzbereich .....	285
im Zeitbereich.....	285
Laplacetransformation .....	285
Reluktanzmotor.....	331
Schrittmotor .....	331
Signale und Systeme.....	253, 329
Abtastsysteme .....	253
Amplitudenmodulation .....	264
Amplitudenhüllkurve .....	264
Bandbreite .....	264
Demodulation .....	264
Einseitenbandmodulation .....	264
Modulationsgrad .....	264
Seitenänder .....	264
Spektrum.....	264
Audiorbearbeitung .....	256
analoges Mischpult .....	256
Kompressor.....	258
Lautstärkeregelung .....	258
Mischen, Summation .....	258
Panoramaregler .....	258
parametrische Filter .....	257
Audiosignal kennwerte .....	255
Dynamikumfang .....	255
Frequenzgang.....	256
Klirrfaktor .....	256
Signalpegel dB .....	255
digitale Modulation.....	275
DVB-T, DSL.....	275
Frequenzbänder bei DSL .....	277
Modulation bei ADSL .....	276
Multiplexen, QAM bei ADSL .....	276
QPSK, QAM, OFDM .....	275
diskrete Signale.....	272
Aliasingfehler .....	273
Darstellung Signal-Spektrum.....	272
diskrete Fouriertransformation .....	272
Eigenschaften und Nutzung .....	273
Fensterfunktion .....	273
Kurzzeitspektren .....	273
diskrete Signale Bearbeitung .....	273
Delay, Echo, Hall.....	275
digitales Mischpult.....	275

Signalprozessor DSP .....	274
Frequenzdemodulation .....	267
Diskriminator .....	268
PLL Demodulator.....	268
Frequenzmodulation .....	266
Anzahl Seitenbänder .....	267
Deemphase .....	267
Fourierreihe des Signals .....	267
Frequenzhub .....	266
moduliertes Signal.....	266
notwendige Bandbreite.....	267
Phasenhub.....	266
Präemphase.....	267
Spektrum .....	267
Frequenzumsetzung.....	265
Überlagerungsempfänger .....	265
Überlagerungsverfahren .....	265
Zwischenfrequenzverstärker .....	265
Kanalcodierung .....	280
Kette der Signalverarbeitung.....	254
lineare zeitinvariante Systeme.....	253
Messung	
am Mischpult.....	329
an RGB-Signalen.....	263
Phasenmodulation .....	268
Quellencodierung .....	280
Signalcodierung.....	277
Signalkompression .....	277, 278
verlustbehaftet .....	279
verlustfrei .....	279
Signalprotokoll.....	277
Fehlerkorrektur.....	278
Paritätsbit.....	279
Prüfsumme .....	279
Rückwärtsfehlerkorrektur.....	279
S/PDIF-Protokoll.....	277
Verschlüsselung .....	278
Vorwärtsfehlerkorrektur.....	279
wav-Dateiprotokoll.....	278
Stereosignal .....	268
Videosignale.....	260
Composite-Signal .....	270
Farbdifferenzsignal.....	262
Farbintensität, Farbwert .....	261
FBAS-Signal .....	260
PAL-Signal.....	269
Quadraturmoduliertes Signal.....	262
RGB-Signal .....	270
Signal einer Zeile .....	262
Signal Zeile mit Ton.....	269
Y/C-Signal (S-Video).....	270
YPbPr-Signal .....	270
YUV-Farbraum.....	261
YUV-Signal .....	270
Zeit-, Frequenzdarstellung.....	253
Skineffekt.....	95
Spaltmotor.....	322
Strom.....	13
Effektivwert .....	38
Stromdichte .....	14
Stromdichte, Feld und Leitfähigkeit... <td>17</td>	17
Stromdichtelinien.....	23
Stromrichter .....	333
Brückenschaltung .....	337
Ein-, Zwei-, Vierquadranten ....	337, 338
Frequenzumrichter.....	343
Gleichrichterbetrieb .....	337
idealisierte Schaltungen .....	333
für Drehstrom.....	336
für Wechselstrom.....	336
idealer Umschalter .....	333
mit Glättungselementen .....	334
praktischer Umschalter .....	334
Saugkreis.....	336
Schaltungsvarianten .....	335
Leistungsverluste .....	335
Messung .....	343
am Dimmer .....	343
am Wechselrichter .....	346
Mittelpunktschaltung .....	337
netz-, selbstgelöscht.....	338
Steueralgorithmen .....	338
Differenzbandverfahren.....	338
feste Taktfrequenz .....	339
fester Takt je Umschaltung .....	339
Phasenanschnittsteuerung .....	340
Störungen .....	338
Netzrückwirkungen.....	338
Umrichterbetrieb.....	337
Direkt-, Zwischenkreis-UR .....	338
un-, halb-, vollgesteuert .....	337
Ventile .....	336, 338
ungesteuerte, ein-, ausschaltbare ..	338
Verläufe, Mittelwerte .....	334
Strom, Spannung.....	334
Tastverhältnis.....	335
Wechselrichterbetrieb .....	337
Kippen.....	346
Löschwinkel.....	345
netzgelöscht .....	344
Strom-, Spannungs-WR.....	338
Stromübernahme .....	346

U, I = f(Zündwinkel) .....	345	Kapp'sches Dreieck .....	307
Zündwinkel.....	345	Überlagerungsprinzip .....	122
Wechselstromsteller .....	342	Übertragungsfunktion .....	169
Phasenanschnittsteuerung.....	342	Universalmotor .....	309
Synchronmaschine .....	322	Aufbau .....	309
Anlauf.....	328	Bahnmotore.....	310
Aufbau .....	323	Blindleistung.....	309
Erregerfeld.....	323	Drehzahl-Drehmoment-Kennlinie ..	309
Polrad .....	323	Kleinmaschinen .....	309
Ständerfeld .....	323	Schaltung .....	309
Ersatzschaltung.....	324	Zeigerbild.....	309
Generatorenspannung.....	324	Verschiebungsfloss .....	48
vereinfacht.....	324	Verschiebungsflossdichte .....	48
Zeigerbild .....	324	Flussdichte, Feld und Dielektrizität ..	49
Generatorbetrieb.....	323, 324	Wellenleitung .....	95
Kennlinien .....	327	Widerstand .....	26
alle Betriebszustände.....	327	Bemessungsgleichung.....	26
Kippmomente .....	327	Definition, Ohm'sches Gesetz.....	26
stabiler Betriebsbereich .....	327	Parallelschaltung .....	33
Kühlung .....	328	Reihenschaltung .....	33
Motorbetrieb.....	323	Spannungsteilerregel .....	33
Parallelbetrieb zum Netz .....	325	spezifischer Widerstand .....	26
Blindleistungübernahme .....	326	Stromteilerregel .....	34
Netzfrequenz nicht konstant.....	326	Temperaturabhängigkeit .....	27
Regelung mit Statik.....	326	Temperaturkoeffizient .....	27
Veränderung der Antriebsleistung	325	Wheatston'sche Messbrücke .....	29
Veränderung der Erregung .....	325	Wirkungsgrad .....	36
Wirkleistungübernahme.....	326	Zählpfeilrichtungen .....	17
Stromrichtermotor .....	328, 331	zeitveränderliche Signale .....	139
System Engineering.....	349	Frequenzverhalten .....	147
Vorgehensmodell .....	349	Bandbreite .....	148
Transformator.....	305	Frequenz-, Phasengang .....	148
Aufbau .....	306	Ortskurve .....	148
Ersatzschaltung.....	306	Resonanz-, 45°-Frequenz .....	148
bei Kurzschluss .....	307	Lösung durch Transformation .....	139
bei Leerlauf .....	307	bei Schaltvorgängen .....	161
mit Eisenverlusten .....	306	bei Wechselstrom .....	141
nach Vierpolgleichungen.....	306	Messung .....	171
reduziert.....	307	am Reihenschwingkreis .....	171
Kühlung .....	308	nicht Simusform, periodisch .....	155
Kurzschlussfestigkeit .....	307	Lösung mit Fourierreihe - FR .....	156
Leistungsverluste.....	308	mehrere Frequenzen .....	155
Messung .....	311	Regeln für Spektren der FR .....	157
Kennwerte der Ersatzschaltung .....	311	Schwebung .....	156
Sättigungsgrenze .....	308	wichtige Testsignale .....	157
Spezialformen.....	309	Zusammensetzen von Signalen .....	156
Transformatorgleichungen .....	306	nichtperiodisch .....	159
Zeigerbild .....	307	DFT .....	160
bei Kurzschluss .....	307	FFT .....	160
bei Leerlauf .....	307	Fouriertransformation - FT .....	159
bei Nennlast.....	308	Schaltvorgänge .....	161

Analyse Reihenschwingkreis .....	162
aperiodischer Fall .....	164, 166
aperiodischer Grenzfall .....	163, 166
periodischer Fall .....	163, 165
transformierte Widerstände .....	161
Wechselstrom (Sinusform).....	140
Wechselstromrechnung.....	140
Darstellung als Ortskurven .....	146
komplexe Widerstände .....	141
Lösung mit komplexer Rechnung.	140
Strom, Spannung als Zeiger.....	144
Zeigerbilder.....	143