

- Grenzwertsätze

Definition: Seien a_n und b_n Folgen,
sowie $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

ii) Jede Folge, die konvergiert, ist notwendigerweise beschränkt.

iii) Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = a b$$

d) Falls $b \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

iv) Ist a_n konvergent gegen a und $a_n \geq c$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $a \geq c$.

Analog für $a_n \leq c$.

Sandwich-Lemma: Seien a_n und b_n zwei
reelle konvergente Folgen mit dem selben Grenzwert
 a (also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$)

So gilt: $a_n \leq c_n \leq b_n$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

Bsp: $a_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}$ sicher kleiner: $\sqrt[n]{7^n}$
sicher größer: $\sqrt[n]{7^n + 7^n}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_7 \leq \sqrt[n]{4^n + 7^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{7^n + 7^n}}_{7 \cdot \sqrt[n]{2} = 7} \quad \sqrt[n]{m} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n} = \underline{\underline{7}}$$