

# 1 Grenzwertsätze

## Definition:

Seien  $a_n$  und  $b_n$  Folgen, sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$

- i) Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.
- ii) Jede Folge, die konvergiert, ist notwendigerweise beschränkt.
- iii) Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 
  - (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
  - (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$
  - (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
  - (d) Falls  $b \neq 0$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$
- iv) Ist  $a_n$  konvergent gegen  $a$  und  $a_n \geq c \forall n \in \mathbb{N}$ , dann ist auch  $a \geq c$ .  
Analog für  $a_n \leq c$

## 2 Sandwich-Lemma:

Seien  $a_n$  und  $b_n$  zwei reelle konvergente Folgen mit dem selben Grenzwert  $a$   
(also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ )  
so gilt:  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

### Bsp:

$$a_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}$$

sicher kleiner:  $\sqrt[n]{7^n}$

sicher größer:  $\sqrt[n]{7^n + 7^n}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_7 \geq \sqrt[n]{4^n + 7^n} \geq \underbrace{\sqrt[n]{7^n + 7^n}}_{7 \cdot \sqrt[n]{2} = 7}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n} = \underline{\underline{7}}$$