0.1 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, $r := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ r existiert.

(a) $r < 1$:

(b) $r > 1$:

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{k})^k$

WT: $r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\frac{2}{k})^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{4} = 0$
$0 < 1 \Longrightarrow$ Reihe absolut konvergent.

0.2 Leibniz-Kriterium

Ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (unendliche Folge) eine monoton fallende Nullfolge (Grenzwert 0), dann ist die (alternierende) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, a_k$ konvergent.

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+7}{k^2}$

$\frac{k+7}{k^2} = a_k \longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$
Lk$\surd \Longrightarrow$ Reihe konvergiert

Monotonie:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{k+7}{k^2} \\
a_{k+1} &= \frac{k+8}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)+7}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)\cdot(1+\frac{7}{k+1})}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1+\frac{7}{k+1}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k} \\
&= \frac{k+7}{k^2} = a_k
\end{aligned}
$$

$$a_{k+1} \leq a_k$$