SU1 001 bwiedermann

1 Folgen und Reihen

1.1 Grundidee

Baggersee 1500m^2 Fläche er wird so ausgehoben, dass er jede Woche um 200m^2 wächst Algen breiten sich aus.
Am Beginn: 1m^2 ->Verdreifacht sich wöchentlich

(n)Wochen	0	1	2	3	4...	8
See Fläche	1500	1700	1900	2500	2300...	3100
Algen Fläche	1	3	9	27	81...	6561

Gesetz: Seefläche: $1500 + 200n$
Algenfläche: $i * 3^n$
$n \epsilon \mathbb{N}_0$

1.2 Definition

Eine Folge ist eine Abbildung:
f: $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{R}$ bzw. f: $\mathbb{N}$ -> $\mathbb{C}$
($\mathbb{N}$ manchmal)

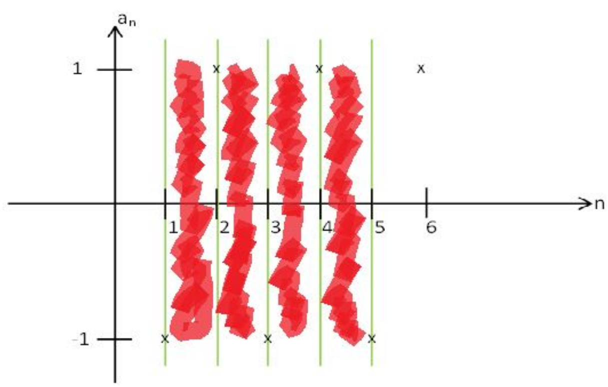


Abbildung 1: Darstellung einer Folge

SU1 002 mwelsch

1.3 Schreibweise:

$a_n = ...$ (ähnlich zu $a(n)$)
Erzeugender Term: $a_n = \frac{n^2}{n+1}$
Bedeutet so viel wie das Folgeglied an der Stelle n; zB: $a_8 \cdots$ Folgeglied an der Stelle 8.
Allerdings is das Folgelied an der Stelle 8 nicht zwangsweise das 8. Folgeglied!

Beispiele:

$a_n =< 1, 1, 1, 1, 1, 1, ... >$
$b_n =< 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, ... >$
$c_n = 2 + \frac{1}{n} =< 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, ... >$
$d_{n+1} = d_n + d_{n-1}, d_0 = 1, d_1 = 1 \Longleftrightarrow < 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... >$

1.4 Definition:

(a) $a_n = c$ heißt konstante Folge

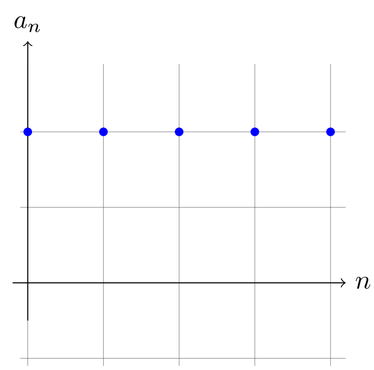


Abbildung 2: Darstellung einer konstanten Folge

(b) $a_n = c * (-1)^n$ heißt alternierende Folge

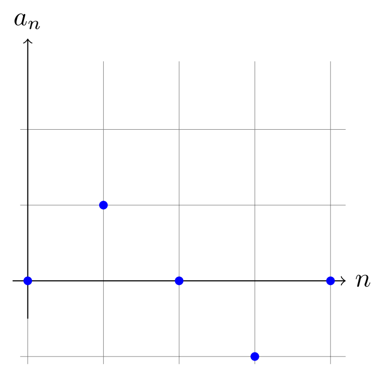


Abbildung 3: Darstellung einer alternierenden Folge

(c) $a_n = a_0 + d * n$ heißt arithmetische Folge, wobei d für die Differenz steht

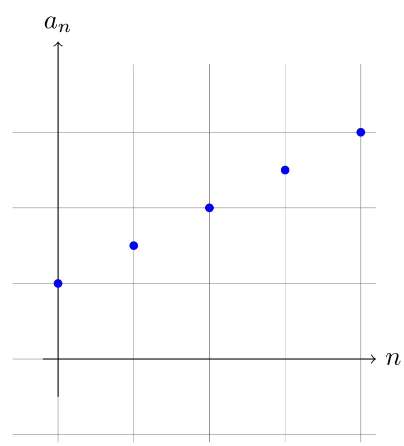


Abbildung 4: Darstellung einer arithmetischen Folge

(d) $a_n = b_0 * q^n$ heißt geometrische Folge, wobei q für den Quotient steht

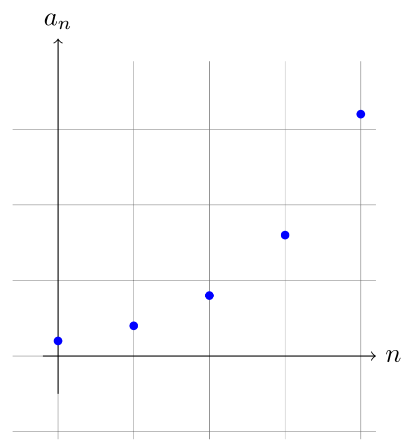


Abbildung 5: Darstellung einer geometrischen Folge

SU1 004 swahl

2 Konvergenz / Divergenz

2.1 Definition:

Eine Folge a_n heißt konvergent, falls eine Zahl a existiert, soo dass die folgende Bedingung erfüllt ist:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass ab diesem Folgeglied alle Folgeglieder innerhalb der ϵ-Umgebung um a liegen.

D.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$

a heißt Grenzwert von a_n
Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$
Ist a_n nicht konvergent, dann heißt a_n divergent.

2.2 Erklärung:

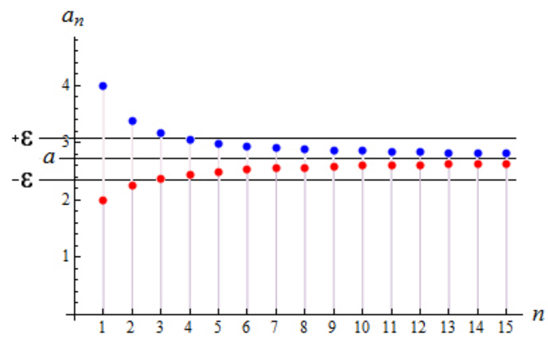


Abbildung 6: Darstellung anhand eines Graphen

Wichtigster Grenzwert:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Wie viele Grenzwerte kann eine Folge besitzen? $\Rightarrow$ Es kann nur einen Grenzwert geben!

SU1 005 lpay

3 Grenzwertsätze

3.1 Definition:

Seien a_n und b_n Folgen, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$

i) Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

ii) Jede Folge, die konvergiert, ist notwendigerweise beschränkt.

iii) Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

   (d) Falls $b \neq 0$
   $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{a}{b}$

1. Ist a_n konvergent gegen a und $a_n \geqslant c \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $a \geqslant c$.
   Analog für $a_n \leqslant c$

4 Sandwich-Lemma:

Sein a_n und b_n zwei reelle konvergente Folgen mit dem selben Grenzwert a
(also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$)
so gilt: $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

Bsp:

$a_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}$
sicher kleiner: $\sqrt[n]{7^n}$
sicher größer: $\sqrt[n]{7^n + 7^n}$

$\underbrace{\sqrt[n]{7^n}}_{7} \geqslant \sqrt[n]{4^n + 7^n} \geqslant \underbrace{\sqrt[n]{7^n + 7^n}}_{7\cdot\sqrt[n]{2}=7}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 7^n} = 7$

SU2 001 mwustinger

5 Reihen

5.1 Definition

Folge der Partialsummen heißt Reihe.
Reihe konvergent, wenn eine Summe existiert.
Reihe divergent, wenn die Folge der Partialsummen divergent.

5.2 Absolute Konvergenz

5.2.1 Definition

Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt genau dann absolut konvergent, wenn die zugehörige Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bsp

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$
$a_k = -\frac{1}{2k-1} <-$ ungeraden
$b_k = \frac{1}{2k} <-$ geraden

b_k ist harmonische Reihe
$\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$a_k : a_k = -\frac{1}{2k-1}$
$M := 1 + \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k} \right|$
Umsortieren der Glieder von a_k und b_k. Anfang aller Glieder von b_k kommen bis die Summe größer als $M + 1$ ist, dann das nächste a_k wählen, so ist die nächste Partialsumme größer als M.

SU2 004 kurbaniec

5.3 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, $r := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ r existiert.

(a) $r < 1$:

(b) $r > 1$:

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{k})^k$
WT: $r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\frac{2}{k})^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{4} = 0$
$0 < 1 \implies$ Reihe absolut konvergent.

5.4 Leibniz-Kriterium

Ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (unendliche Folge) eine monoton fallende Nullfolge (Grenzwert 0), dann ist die (alternierende) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, a_k$ konvergent.

Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, \frac{k+7}{k^2}$
$\frac{k+7}{k^2} = a_k \longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$
Lk$\surd \implies$ Reihe konvergiert

Monotonie:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{k+7}{k^2} \\
a_{k+1} &= \frac{k+8}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)+7}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)\cdot(1+\frac{7}{k+1})}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1+\frac{7}{k+1}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k+1} \leq \frac{1+\frac{7}{k}}{k} \\
&= \frac{k+7}{k^2} = a_k
\end{aligned}$$

$$a_{k+1} \leq a_k$$

SU3 004 bwiedermann

Bsp:

$a_n = (-1)^{n+1} * \frac{3}{7n^2+3}$
$\epsilon = \frac{1}{40}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n + 1 * \frac{3}{7n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n + 1 * \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{7n^2+3} = 0$

$|a_n - a| < \epsilon$

$\left|(-1)^{n+1} * \frac{3}{7n^2+3}\right|$

Fall Unterscheidung:
1.Fall: n ... grade
$\left|-\frac{3}{7n^2+3}\right| < \frac{1}{40}$

$120 < 7n^2 + 3$
$117 < 7n^2$
$\frac{117}{7} < n^2$
$n > \sqrt{\frac{117}{7}}$

Antwort: Für n gerade sind bis zum 7ten Glied alle Folfeflierder außerhalb der ϵ-Umgebung.

2.Fall: n ... ungerade

$\left|\frac{3}{7n^2+3}\right| < \frac{1}{40}$ wie oben

SU3 005 mwelsch

6 Differenzengleichung

Beispiel:

Ein Wald wächst jährlichg um 12% und hat momentan 12 000 Bäume. Jährlich werden 500 Bäume geschlägert.
$B_0 = 12000$
$B_1 = 12000 * 1,12 - 500$
$B_2 = B_1 * 1,12 - 500 = 1200 * 1,12^2 - 500 * 1,12 - 500$
...
Wird angewandt bei beschänktem und logistischem Wachstum.

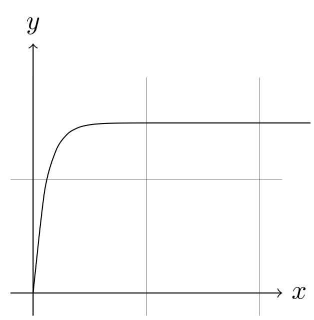


Abbildung 7: Darstellung von begrenztem Wachstum

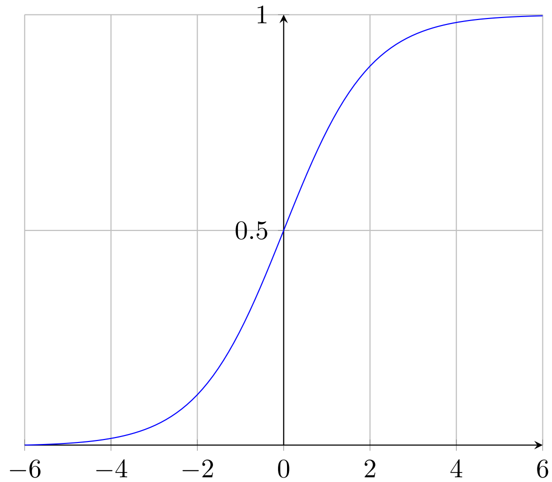


Abbildung 8: Darstellung von logistischem Wachstum

diff1 002 swahl

6.1 Berechnung des Differentialquotient

Beispiel:

Funktion für dieses Beispiel: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
Steigung von $f(x)$ an der Stelle 2

Differentialquotienten: $k = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x} \Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

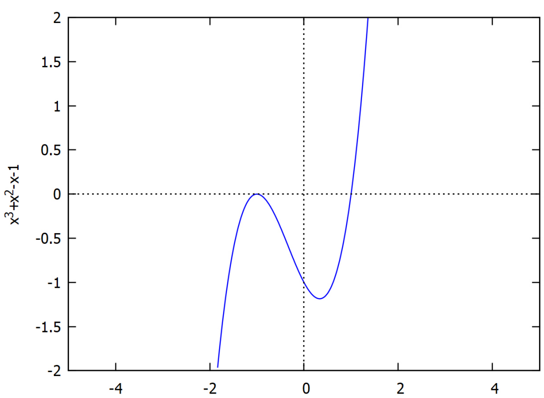


Abbildung 9: Darstellung der Funktion

$\Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^3+(x+\triangle x)^2-(x+\triangle x)-1-(x^3+x^2-x-1)}{\triangle x}$
$\Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{x^3+3x^2*\triangle x+3x*(\triangle x)^2+(\triangle x)^3+x^2+2x*\triangle x+(\triangle x)^2-x-\triangle x-1-x^3-x^2+x+1}{\triangle x}$
$\Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{3x^2*\triangle x+3x*(\triangle x)^2+(\triangle x)^3+2x*\triangle x+(\triangle x)^2-\triangle x}{\triangle x}$
$\Rightarrow \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x*(3x^2+3x*\triangle x+(\triangle x)^2+2x+\triangle x-1)}{\triangle x}$
$\Rightarrow k = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow k$ an 2 $\Rightarrow 12 + 4 - 1 = 15$

6.2 Definition:

Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$ existiert.
Dieser Grenzwert heißt erste Ableitung. $f'(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}$

Bemerkung:

i) $f'(x_0)$ heißt erste Ableitung an der Stelle x_0

ii) Eine differenzierbar Funktion ist dort im Intervall stetig. Das heißt eine stetige Funktion kann differenzierbar sein, muss es aber nicht.

diff1 003 lpay

6.3 Tabelle wichtiger 1. Ableitungen

f(x) =	f'(x) =
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
sin x	cos x
cos x	-sin x
e^x	e^x
a^x	$log(a) \cdot a^x$
log a	$\frac{1}{x}$
$log_a x$	$\frac{1}{log(a) \cdot x}$

6.4 Ableitungsregeln: (!!!)

i) Faktorregel:

f(x) = $c \cdot g(x) \qquad (c \in \mathbb{R})$

f'(x) = $c \cdot g'(x)$
Konstanter Faktor darf vorgezogen werden
Bsp:
f(x) = $2x^2$
f'(x) = $(2x^2)' = 2 \cdot 2x =$ 4x

ii) Summenregel:

f(x) = g(x) + h(x) ⇒ f'(x)= g'(x) + h'(x)
Bsp:
f(x) = $x^3 + x^2 - x - 1 \leftarrow$ fällt weg $(-1 \cdot x^0 \rightarrow 0 \cdot (-1) \cdot x^{-1})$
f'(x) = $3x^2 + 2x - 1$

iii) Produktregel:

f(x) = g(x) · h(x) ⇒ $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Bsp:
f(x) = $x \cdot sin(x)$
f'(x) = $1 \cdot sin(x) + x \cos(x)$

diff 006 mwustinger

7 Kurvendiskussion (extended)

Gegeben: f(x)

1) Definitionsmenge (+ Polstelllen/Lücken)
2) Nullstellen: $f(x) = 0$
3) Extremstellen:
   - Notwendige: $f'(x) = 0$
   - Hinreichende: $f''(x) \neq 0$
     $f''(x) > 0 => Minimum$
     $f''(x) < 0 => Maximum$
4) Monotonieverhalten (tabellarisch)
5) Wendestellen: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
6) Krümmungsverhalten (tabelarisch)
7) Wendetangenten : $t(x) = kx + d$

8) Graph

9) Symmetrie

10) Periodizität

Bsp:

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

1) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

2) Nullstellen: $f(x) = 0$
   $N = +1, -1, -1$

3) Extremstellen:

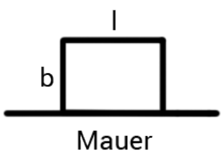
   - Notwendige:
     $f'(x) = 0$
     $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
     $f'(x) = 0 => 0 = 3x^2 + 2x - 1$
     ${}_1x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-12)}}{6}$ $x_1 = \dfrac{1}{3}$ $x_2 = -1$
   - Hinreichende:
     $f''(x) = 6x + 2$
     $f''(\dfrac{1}{3}) = 6 * \frac{1}{3} + 2 > 0 => Minimum$
     $f''(-1) = 6 * (-1) + 2 < 0 => Maximum$

4) Monotonieverhalten

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}), +\infty)$
$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

diff1 009 kurbaniec

7.1 Extremwertaufgaben

Beispiel	Theorie
An eine Mauer soll mit 20m Maschendrahtzaun ein rechteckiges Areal begrenzt werden, sodass das Areal möglichst Flächengroß ist. Wie sind die Maße zu wählen?	Angabe
	Skizze
$A \to Max$ $A(l, b) = b \cdot l$	Hauptbedingung aufstellen(HB)
$2b + l = 20$	Nebenbedingung aufstellen (NB)
$l = 20 - 2b$ $A(b) = b(20 - 2b)$ $A(b) = 20b - 2b^2$	Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen (NB $\to$ HB)
$A'(b) = 20 - 4b$ $A''(b) = -4$	Ableiten
$A'(b) = 0$ $0 = 20 - 4b$ $\implies b = 5$ $A''(b) < 0$ $\implies b = 5$ Maximum	Extremstellen bestimmen

$l = 20 - 2 \cdot 5 = 10$	Andere Variable berechnen
/	Randwerte betrachten
Das ideal an die Mauer angelehnte Areal besitzt die Maße 10x5.	Antwort