Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe, $r := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

r existiert.

a) $r < 1$:

b) $r > 1$:

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k$

WT: $r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0$

$0 < 1 \Rightarrow$ Reihe abs. konv.

Leibniz-Kriterium

Ist $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (unendlich Folge) eine mon. fallende Nullfolge (Grenzwert 0), dann ist die (alternierende) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{k+7}{k^2}}_{a_k}$ $\quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

LK ✓ $\Rightarrow$ Reihe konvergiert

↳ Monotonie:

$a_k = \frac{k+7}{k^2}$

$a_{k+1} = \frac{\cancel{k+8}}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)+7}{(k+1)^2} = \frac{\cancel{(k+1)} \cdot \left(1 + \frac{7}{k+1}\right)}{(k+1)^{\cancel{2}}}$

$= \frac{1 + \frac{7}{k+1}}{k+1} \leq \frac{1 + \frac{7}{k}}{k+1} \leq \frac{1 + \frac{7}{k}}{k}$

$= \frac{k+7}{k^2} = a_k$

$a_{k+1} \leq a_k$