3.) Model z n neodv. realizacijami $Ber(p) = Bin(1,p)$, $p_0 \in (0,1)$, $\phi_{p_0} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$

Preizkus za $H_0 : p = p_0$ proti $p \neq p_0$ velikosti 0.05, ki je enakomerno najmočnejši nedvomni nepr. za H_0 proti A st. znač. 0.05:

$$\phi_{p_0}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 ; & \sum_{i=1}^n x_i < C_1(p_0) \text{ ali } C_2(p_0) < \sum_{i=1}^n x_i \\ \gamma_j(p_0) ; & \sum_{i=1}^n x_i = C_j(p_0) \\ 0 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

Diagram nam prikazuje graf funkcij $C_1(p_0)$ in $C_2(p_0)$, ki sta def. kot:

$C_1(p_0) = \max\{C \mid P(Bin(n,p_0) < C) \leq \frac{\alpha}{2}\}$

$C_2(p_0) = \min\{C \mid P(Bin(n,p_0) > C) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ → če poračunamo to za $\forall p_0$, dobimo diagram?

a) I.Z. z inverzijo

"C.I. consists of all possible values of ϑ_0 that test would not reject for given data. If we invert equation, we get boundry values and all values in between are in the interval."

↳ na neki točki bomo morali obrniti (narediti inverzijo) enačb za I.Z.!

Iz predavanj vemo, da je $C(x) = \{p_0 \mid \phi_{p_0}(x) < 1\}$ območje zaupanja st. zaupanja $1-\alpha$.

$\forall p_0 : P_{p_0}(p_0 \in C(x)) = P_{p_0}(\phi_{p_0}(x) < 1)$

↳ iščemo torej take p_0, da bo $\phi_{p_0}(x) < 1$, torej da bo:

$$\underbrace{c_j(p_0) = \sum_{i=1}^n X_i}_{} \quad \text{in} \quad C_1(p_0) \leq \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{in} \quad C_2(p_0) > \sum_{i=1}^n X_i$$

Dejansko nas zanima samo 1. pogoj, ker je mejni, če najdemo tega bosta držala tudi druga dva.

Kako bomo to našli iz diagrama?

Točke na grafu diagramu so delitev intervala (0,1) na m delov. Za dan n "23" in vsako izmed delitev se po formulah za C_1 in C_2 poračuna pripadajoči C in se ga nariše na graf. Pri 2 zaporednih vrednostih p dobimo tako bodisi enako, bodisi različno (+1) vrednost c_j. Radi bi ugotovili pri katerih p se te "skoki" zgodijo.

Po principu inverzije potrebujemo torej najmanjši (spodnja meja) in največji tak p_0, da bo $c_j(p_0) = \sum_{i=1}^n x_i$ za $j \in \{1,2\}$.

Zapišimo torej enačbi za spodnjo in zgornjo mejo:

spodnja meja: $S(x) = \min\{p_0 \mid C_2(p_0) = \sum_{i=1}^n x_i\}$

zgornja meja: $Z(x) = \max\{p_0 \mid C_1(p_0) = \sum_{i=1}^n x_i\}$

Za vsako vrednost $\sum_{i=1}^n x_i \in \{0, 1, \dots, 23\}$ iz grafa preberemo približno vrednost p_0.

Tabela rezultatov sledi na naslednji strani.

$n=23$ $\sum_{i=1}^{n} X_i$	$S(x)$	$T(x)$
0	0.001	0.143
1	0.002	0.216
2	0.004	0.278
3	0.016	0.334
4	0.038	0.386
5	0.066	0.436
6	0.096	0.484
7	0.128	0.530
8	0.158	0.574
9	0.192	0.616
10	0.228	0.656
11	0.266	0.698
12	0.304	0.736
13	0.344	0.772
14	0.384	0.808
15	0.426	0.842
16	0.470	0.872
17	0.516	0.906
18	0.564	0.936
19	0.614	0.962
20	0.668	0.984
21	0.724	0.996
22	0.786	0.998
23	0.858	0.999

b) $p_0 = \frac{6}{10}$. Izračunajte γ_1 in γ_2 iz ϕ_{p_0} iz a)

Vemo: $n = 23$, $p_0 = \frac{6}{10}$. Iz diagrama preberemo $C_1(p_0) = 9$ in $C_2(p_0) = 18$.

Ker so $X_i \sim Bin(1, p_0)$ je $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim n \cdot Bin(1, p_0) = Bin(n, p_0) = Bin(23, p_0)$.

Za binomsko porazdeljeno s.s. vemo: $P(Bin(n, p_0) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Vemo, da mora veljati $E_{p_0}(\phi_{p_0}) = \alpha = 0.05$

Razpisano:

$$E_{p_0}(\phi_{p_0}) = P(Bin(n,p_0) < C_1) + P(Bin(n,p_0) > C_2) + \gamma_1 \cdot P(Bin(n,p_0) = C_1) + \gamma_2 \cdot P(Bin(n,p_0) = C_2)$$

$$= \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} + \sum_{i=C_2+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} + \gamma_1 \cdot \binom{n}{C_1} p_0^{C_1} (1-p_0)^{n-C_1} + \gamma_2 \binom{n}{C_2} p_0^{C_2} (1-p_0)^{n-C_2}$$

$$= \alpha = 0.05$$

Imamo 2 neznanki, potrebujemo 2 enačbi za sistem. Odvajajmo $\frac{\partial E_{p_0}(\cdot)}{\partial p_0} = \ldots = 0$

$$\text{odvod 1. člena} = \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} i \cdot p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i} + \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^i (n-i)(1-p_0)^{n-i-1}(-1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} \left(i(1-p_0) - (n-i) p_0 \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0)$$

Odvodi ostalih členov so podobni:

$$\text{odvod 2. člena} = \sum_{i=C_2+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0)$$

$$\text{odvod 3. člena} = \gamma_1 \binom{n}{C_1} p_0^{C_1-1} (1-p_0)^{n-C_1-1} (C_1 - n p_0)$$

$$\text{odvod 4. člena} = \gamma_2 \binom{n}{C_2} p_0^{C_2-1} (1-p_0)^{n-C_2-1} (C_2 - n p_0)$$

$$\frac{\partial E_{p_0}}{\partial p_0} = \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0) + \sum_{i=C_2+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0) +$$
$$+ \gamma_1 \binom{n}{C_1} p_0^{C_1-1} (1-p_0)^{n-C_1-1} (C_1 - n p_0) + \gamma_2 \binom{n}{C_2} p_0^{C_2-1} (1-p_0)^{n-C_2-1} (C_2 - n p_0) = 0$$

Imamo 2 enačbi za 2 neznanki. Označimo:

$$a_1 = \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} = P(Bin(n, p_0) < C_1)$$

$$a_2 = \sum_{i=C_2+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i} = P(Bin(n, p_0) > C_2)$$

$$a_3 = \binom{n}{C_1} p_0^{C_1} (1-p_0)^{n-C_1} = \gamma_1 \cdot P(Bin(n, p_0) = C_1)$$

$$a_4 = \binom{n}{C_2} p_0^{C_2} (1-p_0)^{n-C_2} = \gamma_2 \cdot P(Bin(n, p_0) = C_2)$$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{C_1-1} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0)$$

$$b_2 = \sum_{i=C_2+1}^{n} \binom{n}{i} p_0^{i-1} (1-p_0)^{n-i-1} (i - n p_0)$$

$$b_3 = \binom{n}{C_1} p_0^{C_1-1} (1-p_0)^{n-C_1-1} (C_1 - n p_0)$$

$$b_4 = \binom{n}{C_2} p_0^{C_2-1} (1-p_0)^{n-C_2-1} (C_2 - n p_0)$$

Zapišimo v obliki sistema enačb:

$a_1 + a_2 + \gamma_1 \cdot a_3 + \gamma_2 \cdot a_4 = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 a_3 + \gamma_2 a_4 = 0.05 - a_1 - a_2$

$b_1 + b_2 + \gamma_1 b_3 + \gamma_2 b_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 b_3 + \gamma_2 b_4 = 0 - b_1 - b_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\gamma} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.05 - a_1 - a_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Rešujemo v R matrično: $A \cdot \gamma = B \Rightarrow \gamma = A^{-1} B$

Dobimo: $\gamma_1 = 0.5120652$ $\quad \gamma_2 = 0.1968924$

c) Graf pokritosti in koeficient zaupanja

Pokritost pri $\vartheta_0 \in \Theta$ je verjetnost $P_{\vartheta_0}(\{X \mid \vartheta_0 \in C(X)\})$

Interval $(0,1)$ razdelimo na N točk. Iz točke a) dobimo I.Z. za vsako različno vrednost C. Za $\forall\, \vartheta_0$ iz delitve pogledamo pri katerih vrednostih C pade v razbrane intervale zaupanja

Primer: za $p_0 = \frac{6}{10}$ lahko razberemo, da je znotraj I.Z. za $C \in \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

Za $\forall\, C$ iz dobljenega nabora izračunamo verjetnost $P(Bin(n, p_0) = C)$ $\quad (n = 23)$.

Nato seštejemo vse dobljene verjetnosti in dobljeno je pokritost za vrednost p_0.

(Pokritost namreč pomeni dejansko verjetnost, da interval vsebuje pravo vrednost).

Izračunamo pokritost za $\forall\, p_0 \in (0,1)$, narišemo in dobimo graf v R / priloga.

Koeficient zaupanja območja C je natančna spodnja meja pokritosti.

Torej koeficient zaupanja = min(pokritost) (najmanjša vr. na grafu)

Za $N = 999$ je koeficient zaupanja $= 0.9548513$

za $N = 9990$ je koeficient zaupanja $= 0.954727$

d) $n_1 = n + 10 = 33$, $p_0 = \frac{6}{10}$. $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2 = ?$

Postopek je podoben kot v b) le da moramo sproti preverjati še ustreznost C_1 in C_2.

Sistem enačb ostaja identičen kot v b):

$$E_{p_0}(\phi_{p_0}) = \alpha \qquad \frac{\partial E_{p_0}(\phi_{p_0})}{\partial p_0} = 0$$

Konstrukcija sistema je identična kot v b):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\gamma} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.05 - a_1 - a_2 \\ -b_1 - b_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

A ostane enak kot v b)

γ nas zanima

Pri B (ker imamo vsote z mejami odvisnimi od C_j) moramo paziti na robne primere:

- Če $C_1 = 0$ in $C_2 = n_1 \Rightarrow a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$
- Če $C_1 = 0$ in $C_2 \neq n_1 \Rightarrow a_1 = b_1 = 0$; a_2 in b_2 sta kot v b)
- Če $C_1 \neq 0$ in $C_2 = n_1 \Rightarrow a_2 = b_2 = 0$; a_1 in b_1 sta kot v b)
- Sicer: B je enak kot v b)

Preverjati moramo tudi, da sta $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$, drugače rešitev ni pravilna.

Implementiramo v R in dobimo: $C_1 = 14$, $C_2 = 25$, $\gamma_1 = 0.6147129$, $\gamma_2 = 0.2786467$

e) Za $n_1 = n + 10 = 33$ naprav ite diagram kot v a)

Kako se lotimo:

- interval $(0,1)$ razdelimo na M delov $\rightarrow$ vsak del predstavlja eno vrednost parametra p
- za $\forall p_i$ iz delitve poračunamo $C_1(p_i)$ in $C_2(p_i)$ po formulah:

$$C_1(p_i) = \max\{C \mid P(Bin(n_1, p_i) < C) \leq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$C_2(p_i) = \min\{C \mid P(Bin(n_1, p_i) > C) \leq \frac{\alpha}{2}\}$$

Nastavimo: $n_1 = 33$, $\alpha = 0.05$, $M = 999$ (interval vzamemo $(0.001, 0.999)$ da se lepše izide)

V R poračunamo C_j $\forall p_i$ in dobimo priloženi diagram.

Vidimo tudi, da se za $p = \frac{6}{10}$ diagram ujema z rezultatom iz d), kar je spodbudno.