

Vaje 2: Splošni linearni model

Obravnavamo splošni linearni model

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}\beta + \epsilon,$$

kjer je $X \in \mathbb{R}^n$ vektor opazovanj, $\beta \in \mathbb{R}^d$ vektor parametrov, $Z \in \mathbb{R}^{n \times d}$ matrika konstant, $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ vektor slučajnih odstopanj, za katerega vedno privzamemo $E(\epsilon) = 0$. Zapišemo $Z = SP$ za matriko $S \in \mathbb{R}^{n \times d}$ s paroma pravokotnimi stolpci, od katerih so nekateri lahko 0 (na stolpcih matrike Z izvajamo Gramm-Schmidtovo ortogonalizacijo). P je zgornjetrikotna matrika s pozitivni elementi na glavni diagonali. Tedaj je

$$Z^T Z = P^T J P,$$

kjer je $J = \text{diag}(j_1, \dots, j_d)$, $j_i = \|S^i\|^2$. Za reševanje enačbe $(Z^T Z)\hat{\beta} = Z^T \mathbf{x}$ konstruiramo konkretno rešitev

$$\hat{\beta} = (Z^T Z)^+ Z^T \mathbf{x},$$

kjer je $(Z^T Z)^+ = P^{-1} J P^{-T}$.

NALOGA: Za dano matriko Z (in vektor X) konstruiraj posplošeni inverz $(Z^T Z)^+$ ter poišči oceno $\hat{\beta}$.