Sommario

In questo documento daremo la dimostrazione del Teorema di Shapley vista durante la lezione del 23/05/2023.

Per dimostrare il teorema serviranno diversi risultati preliminari, non tutti visti a lezione.

Documento scritto e formattato in LaTeX da Andrea Marino.

Ogni segnalazione di errori è più che bene accetta. Potete scrivermi per e-mail all'indirizzo `a.marino47@studenti.unipi.it`

Introduzione

Notazione. Denotiamo con N, o con $[n]$, l'insieme $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Ricordiamo che il gruppo simmetrico su n elementi, S_n, è naturalmente in bigezione con l'insieme $[n]!$ delle permutazioni degli elementi di $[n]$.

Definizione 1. Introduciamo l'insieme

$$V_{[n]} = \big\{ v \in \mathrm{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R}) \mid v(\emptyset) = 0 \big\}.$$

Lemma 1. *$V_{[n]}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2^n - 1$.*

Dimostrazione. Sia $V \coloneqq \mathrm{Fun}\left(\mathcal{P}(N), \mathbb{R}\right)$ e consideriamo la valutazione sull'insieme vuoto:

$$\begin{array}{rccc} val_\emptyset \colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & v\left(\emptyset\right) \end{array}$$

V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$. $val_\emptyset$ è lineare e $V_{[n]} = \ker val_\emptyset$, mentre ovviamente $\operatorname{rank} val_\emptyset = 1$ Si conclude per la formula delle dimensioni $\dim V = \dim \ker val_\emptyset + \operatorname{rank} val_\emptyset$. $\square$

Può essere utile scendere un po' di più nel dettaglio. Gli spazi vettoriali V e $\mathbb{R}^{2^n}$ sono isomorfi. Un isomorfismo esplicito è dato da

$$\begin{array}{rccc} \Phi \colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2^n} \\ & v & \longmapsto & \begin{pmatrix} v(\emptyset) \\ v(S_1) \\ \vdots \\ v(S_{2^n-1}) \end{pmatrix} \end{array}$$

Con $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, S_1, \dots, S_{2^n-1}\}$.

Osservazione 1. In questo contesto, risulta ovvia la linearità di $val_\emptyset$. Questa funzione infatti coincide con $\pi_1 \circ \Phi$, dove $\pi_1 \colon \mathbb{R}^{2^n} \to \mathbb{R}$ è la proiezione sulla prima componente.

In maniera analoga, possiamo pensare ogni $v \in V_{[n]}$ (precisamente, a $v\big|_{\mathcal{P}(N)\setminus\{\emptyset\}}$) come a un vettore di $2^n - 1$ componenti.

Definizione 2. Per ogni $T \in \mathscr{D} := \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$ definiamo il *gioco portatore* di T come $([n], u_T)$, dove $u_T(S) = \begin{cases} 1 & T \subseteq S \\ 0 & T \not\subseteq S. \end{cases}$

Osserviamo che l'insieme $\{u_T\}_{T \in \mathscr{D}}$ *non* corrisponde, tramite l'isomorfismo Φ[1] alla base canonica di $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

Lemma 2. *$\{u_T\}_{T\in\mathscr{D}}$ è una base di $V_{[n]}$.*

Dimostrazione. Siano $\{\lambda_T\}_{T\in\mathscr{D}}$ degli scalari reali e consideriamo una combinazione lineare nulla $\sum_{T\in\mathscr{D}} \lambda_T u_T = 0$, ovvero $\sum_{T\in\mathscr{D}} \lambda_T u_T(S) = 0 \quad \forall\, S \subseteq [n]$.

Sia $\mathscr{C} := \{T \in \mathscr{D} \mid \lambda_T \neq 0\}$ e supponiamo per assurdo $\mathscr{C} \neq \emptyset$. Sia $\hat{S} \in \mathscr{C}$ minimo per inclusione, ossia $T \in \mathscr{C}, T \neq \hat{S} \implies T \not\subseteq \hat{S}$.

Ma allora si ha

$$0 = \sum_{T\in\mathscr{D}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \sum_{T\subseteq\hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di gioco portatore di $\hat{S}$. Dalla definizione di $\hat{S}$ ricaviamo

$$\sum_{T\subseteq\hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}} u_{\hat{S}}(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}},$$

ma $\lambda_{\hat{S}} \neq 0$. Siamo caduti in contraddizione.

Ne segue che $\mathscr{C} = \emptyset$; dunque $\lambda_T = 0 \quad \forall\, T \in \mathscr{D}$ e di conseguenza $\{u_T\}_{T\in\mathscr{D}}$ è un sistema linearmente indipendente. Ma la sua cardinalità coincide con $\dim V_{[n]}$, quindi è una base. □

Il Teorema di Shapley

Definizione 3. Una funzione $\phi \colon V_{[n]} \to \mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà di

- **Efficienza** (o *razionalità collettiva*) se $\sum_{i\in[n]} \phi_i(v) = v(N)$
- **Simmetria** se $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall\, S \subseteq [n] \setminus \{i,j\} \implies \phi_i(v) = \phi_j(v)$
- **Additività** se $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \quad \forall\, v, w \in V_{[n]}$
- **Giocatore nullo** se $v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall\, S \subseteq [n] \implies \phi_i(v) = 0$.

Enunciamo, e dimostriamo, un piccolo lemma che renderà pressoché immediata la dimostrazione del teorema 1.

[1] Precisamente, tramite $\pi_{\mathrm{Span}\{e_1\}^\perp} \circ \Phi\big|_{V_{[n]}}$

Lemma 3. *Ogni $\phi\colon V_{[n]} \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa le proprietà della definizione 3 è tale che*

$$\phi_i(\lambda u_T) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{T} & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{u_T\}_{T \in \mathscr{D}}$ sono le funzioni introdotte nella definizione 2.

Dimostrazione. Sia $T \in \mathscr{D}$. Osserviamo che ogni $i \notin T$ è un giocatore nullo, infatti per ogni $S \subseteq [n]$ si ha $T \subseteq S \implies T \subseteq S \cup \{i\}$ e $T \not\subseteq S \implies T \not\subseteq S \cup \{i\}$. Quindi $u_T(S \cup \{i\}) = u_T(S) \quad \forall\, i \notin T$, e per la proprietà del giocatore nullo $i \notin T \implies \phi_i(\lambda u_T) = 0$.

Siano $i, j \in T, i \neq j$. i e j sono giocatori simmetrici: per ogni $S \subseteq [n] \setminus \{i, j\}$ si ha $u_T(S \cup \{i\}) = 0$, dato che $T \not\subseteq S \cup \{i\}$ dato che $j \in T$ ma $j \notin S \cup \{i\}$; ma $u_T(S \cup \{j\}) = 0$ per un motivo analogo.

Ne segue che $\phi_i(\lambda u_T) = C_T \quad \forall\, i \in T$, dove C_T è un'opportuna costante che dipende da $T \in \mathscr{D}$.

Ora,

$$|T| \cdot C_T = \sum_{i \in T} \phi_i(\lambda u_T) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\lambda u_T).$$

Ma per efficienza

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(\lambda u_T) = \lambda u_T(N) = \lambda$$

ossia $C_T = \frac{\lambda}{|T|}$. □

Definizione 4. Sia $v \in V_{[n]}$. Il *valore di Shapley* di v è una funzione $Sh\colon V_{[n]} \to \mathbb{R}^n$, dove il valore di ciascuna componente è dato da

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v\left(P_i(\sigma) \cup \{i\}\right) - v\left(P_i(\sigma)\right)$$

dove $P_i(\sigma) \coloneqq \{j \in [n] \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$.

Osservazione 2. Un'espressione alternativa per il valore di Shapley è

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{i\}} |S|!\,(n - |S| - 1)!\,\left(v\left(S \cup \{i\}\right) - v(S)\right). \tag{1}$$

Proposizione 1. Il valore di Shapley soddisfa tutte le proprietà della definizione 3.

Dimostrazione. Si tratta di una verifica diretta

- **Additività** Si veda l'esercizio 3.
- **Giocatore nullo** Si veda l'esercizio 3.

- **Efficienza** Per l'osservazione 2 si ha

$$\sum_{i=1}^{n} Sh_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{S\subseteq[n]\setminus\{i\}}|S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{i\})-v(S)) \tag{2}$$

Fissiamo $\hat{\imath}\in[n]$ e sia $\hat{S}\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath}\}$.

  - Se $|\hat{S}| < n-1$ allora $\exists j \neq \hat{\imath} \quad j \notin \hat{S}$. Ma allora sia $\hat{S}$ sia $\hat{S}\cup\{\hat{\imath}\}$ compaiono nella sommatoria relativa all'indice j e i termini $v(\hat{S}\cup\{\hat{\imath}\}), v(\hat{S})$ si elidono nella (2).
  - Se $|\hat{S}| = n-1$ allora $\hat{S}=[n]\setminus\{\hat{\imath}\}$. $\hat{S}$ se ne va nella somma, basta considerare $j\neq\hat{\imath}$ e si ha $\hat{S} = \underbrace{[n]\setminus\{\hat{\imath},j\}}_{\in\mathcal{P}(N\setminus\{j\})}\cup\{j\}$.

  $\hat{S}\cup\{\hat{\imath}\}=[n]$ non viene eliminato da nessuno, e compare in tutto n volte nella sommatoria più esterna (una per ciascun indice $i\in[n]$). Quindi nella (2) rimane $\frac{1}{n!}\cdot(n-1)!\,n\cdot v(N) = v(N)$.

- **Simmetria** Siano $\hat{\imath},\hat{\jmath}\in[n], \hat{\imath}\neq\hat{\jmath}$ giocatori simmetrici. Possiamo riscrivere la (1) come:

$$\begin{aligned}Sh_i(v) = &\frac{1}{n!}\sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath}\}\\ \hat{\jmath}\in S}}|S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat{\imath}\})-v(S))+\\ &-\frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}}|S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat{\imath}\})-v(S))=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\frac{1}{n!}\sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath}\}\\ \hat{\jmath}\in S}}|S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat{\imath}\})-v(S))+\\ &-\frac{1}{n!}\sum_{S\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}}|S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat{\jmath}\})-v(S))\end{aligned} \tag{3}$$

Per ogni $S\subseteq[n]\setminus\{\hat{\imath}\}$ definiamo

$$\begin{aligned}S^- &:= S\setminus\{\hat{\jmath}\}\\ S^+ &:= S^-\setminus\{\hat{\imath}\} = (S\cup\{\hat{\imath}\})\setminus\{\hat{\jmath}\}.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$S\cup\{\hat{\imath}\} = S^-\cup\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\} = S^+\cup\{\hat{\jmath}\}$$

e che dunque

$$\begin{aligned}v(S\cup\{\hat{\imath}\}-v(S) &= v(S^+\cup\{\hat{\jmath}\})-v(S^-\cup\{\hat{\jmath}\})\\ &= v(S^-\cup\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\})-v(S^-\cup\{\hat{\jmath}\}).\end{aligned} \tag{4}$$

Dalla (4) segue che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{\hat\imath\} \\ \hat\jmath\in S}} |S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat\imath\})-v(S)) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{S^-\subseteq[n]\setminus\{\hat\imath,\hat\jmath\}} \left|S^-\cup\{\hat\jmath\}\right|!\,\left(n-\left|S^-\cup\{\hat\jmath\}\right|-1\right)! \\
&\qquad\qquad \left(v(S^-\cup\{\hat\imath,\hat\jmath\})-v(S^-\cup\{\hat\jmath\})\right) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{S^-\subseteq[n]\setminus\{\hat\imath,\hat\jmath\}} \left|S^-\cup\{\hat\jmath\}\right|!\,\left(n-\left|S^-\cup\{\hat\jmath\}\right|-1\right)! \\
&\qquad\qquad \left(v(S^-\cup\{\hat\imath,\hat\jmath\})-v(S^-\cup\{\hat\imath\})\right), \qquad (5)
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che i giocatori $\hat\imath$ e $\hat\jmath$ sono simmetrici e non appartengono a S^-. Ora possiamo riscrivere la (5) nella forma

$$\frac{1}{n!} \sum_{\substack{S^+\subseteq[n]\setminus\{\hat\jmath\} \\ \hat\imath\in S^+}} \left|S^+\right|!(n-\left|S^+\right|-1)!\,\left(v(S^+\cup\{\hat\jmath\})-v(S^+)\right).$$

Sostituendo nella (3) otteniamo

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) =& \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S\subseteq[n]\setminus\{\hat\jmath\} \\ \hat\imath\in S}} |S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat\jmath\})-v(S)) + \\
&+ \frac{1}{n!} \sum_{S\subseteq[n]\setminus\{\hat\imath,\hat\jmath\}} |S|!(n-|S|-1)!\,(v(S\cup\{\hat\jmath\})-v(S)) = \\
&= Sh_j(v).
\end{aligned}$$

Dunque la funzione Sh è simmetrica rispetto ai giocatori $\hat\imath$ e $\hat\jmath$. □

Teorema 1. Il valore di Shapley è l'unica funzione che soddisfa le proprietà di efficienza, simmetria, additività e la proprietà del giocatore nullo.

Dimostrazione. Per il lemma 1 $V_{[n]}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 2^n-1, una cui base è data – per il lemma 2 – da $\{u_T\}_{T\in\mathscr{D}}$.

Sia $\phi\colon V_{[n]}\to\mathbb{R}^n$ una funzione che soddisfa le quattro proprietà della definizione 3. Per la proposizione 1 anche la funzione Sh soddisfa tali proprietà, ma quindi per il lemma 3 si ha che

$$\phi_i(\lambda u_T) = Sh_i(\lambda u_T) \quad \forall\, i\in[n]. \tag{6}$$

Sia $v\in V_{[n]}$. Poiché $\{u_T\}_{T\in\mathscr{D}}$ è una base, esistono degli scalari $\{\lambda_T\}_{T\in\mathscr{D}}$ tali che $v=\sum_{T\in\mathscr{D}}\lambda_T u_T$. Ora, per ogni $i\in[n]$ si ha

$$\phi_i(v) = \phi_i\left(\sum_{T\in\mathscr{D}}\lambda_T u_T\right) = \sum_{T\in\mathscr{D}}\phi_i(\lambda_T u_T)$$

poiché ϕ soddisfa la proprietà di additività. Ma per la (6)

$$\sum_{T\in\mathscr{D}} \phi_i(\lambda_T u_T) = \sum_{T\in\mathscr{D}} Sh_i(\lambda_T u_T) =$$
$$= Sh_i\left(\sum_{T\in\mathscr{D}} \lambda_T u_T\right) = Sh_i(v). \qquad \square$$

Esercizi

Esercizio 1. *Dimostrare direttamente che* $\mathrm{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R})$ *è uno spazio vettoriale reale.*

Esercizio 2. *Dimostrare il contenuto dell'osservazione 2.*

Esercizio 3. *Dimostrare che il valore di Shapley soddisfa la proprietà di additività e la proprietà del giocatore nullo.*

Esercizio 4. *Dimostrare che nell'insieme* $\mathscr{C}$ *introdotto nella dimostrazione del teorema 1, nell'ipotesi (assurda) in cui esso sia non vuoto, un minimo per inclusione* $\hat{S}$ *esiste.*