

## Sommario

In questo documento daremo la dimostrazione del Teorema di Shapley vista durante la lezione del 23/05/2023.

Per dimostrare il teorema serviranno diversi risultati preliminari, non tutti visti a lezione.

Documento scritto e formattato in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X da Andrea Marino.

Ogni segnalazione di errori è più che bene accetta. Potete scrivermi per e-mail all'indirizzo [a.marino47@studenti.unipi.it](mailto:a.marino47@studenti.unipi.it)

## Introduzione

*Notazione.* Denotiamo con  $N$ , o con  $[n]$ , l'insieme  $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ .

Ricordiamo che il gruppo simmetrico su  $n$  elementi,  $S_n$ , è naturalmente in bigezione con l'insieme  $[n]!$  delle permutazioni degli elementi di  $[n]$ .

**Definizione 1.** Introduciamo l'insieme

$$V_{[n]} = \{v \in \text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R}) \mid v(\emptyset) = 0\}.$$

**Lemma 1.**  $V_{[n]}$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $2^n - 1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $V := \text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R})$  e consideriamo la valutazione sull'insieme vuoto:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\emptyset}: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto v(\emptyset) \end{aligned}$$

$V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  di dimensione  $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$ .  $\text{val}_{\emptyset}$  è lineare e  $V_{[n]} = \ker \text{val}_{\emptyset}$ , mentre ovviamente  $\text{rank } \text{val}_{\emptyset} = 1$ . Si conclude per la formula delle dimensioni  $\dim V = \dim \ker \text{val}_{\emptyset} + \text{rank } \text{val}_{\emptyset}$ .  $\square$

Può essere utile scendere un po' di più nel dettaglio. Gli spazi vettoriali  $V$  e  $\mathbb{R}^{2^n}$  sono isomorfi. Un isomorfismo esplicito è dato da

$$\begin{aligned} \Phi: V &\longrightarrow \mathbb{R}^{2^n} \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} v(\emptyset) \\ v(S_1) \\ \vdots \\ v(S_{2^n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con  $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, S_1, \dots, S_{2^n-1}\}$ .

*Osservazione 1.* In questo contesto, risulta ovvia la linearità di  $\text{val}_{\emptyset}$ . Questa funzione infatti coincide con  $\pi_1 \circ \Phi$ , dove  $\pi_1: \mathbb{R}^{2^n} \rightarrow \mathbb{R}$  è la proiezione sulla prima componente.

In maniera analoga, possiamo pensare ogni  $v \in V_{[n]}$  (precisamente, a  $v|_{\mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}}$ ) come a un vettore di  $2^n - 1$  componenti.

**Definizione 2.** Per ogni  $T \in \mathcal{D} := \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$  definiamo il *gioco portatore* di  $T$  come  $([n], u_T)$ , dove  $u_T(S) = \begin{cases} 1 & T \subseteq S \\ 0 & T \not\subseteq S. \end{cases}$

Osserviamo che l'insieme  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  non corrisponde, tramite l'isomorfismo  $\Phi^1$  alla base canonica di  $\mathbb{R}^{2^n-1}$ .

**Lemma 2.**  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  è una base di  $V_{[n]}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\{\lambda_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  degli scalari reali e consideriamo una combinazione lineare nulla  $\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T = 0$ , ovvero  $\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T(S) = 0 \quad \forall S \subseteq [n]$ .

Sia  $\mathcal{C} := \{T \in \mathcal{D} \mid \lambda_T \neq 0\}$  e supponiamo per assurdo  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ . Sia  $\hat{S} \in \mathcal{C}$  minimo per inclusione, ossia  $T \in \mathcal{C}, T \neq \hat{S} \implies T \not\subseteq \hat{S}$ .

Ma allora si ha

$$0 = \sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \sum_{T \subseteq \hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di gioco portatore di  $\hat{S}$ . Dalla definizione di  $\hat{S}$  ricaviamo

$$\sum_{T \subseteq \hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}} u_{\hat{S}}(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}},$$

ma  $\lambda_{\hat{S}} \neq 0$ . Siamo caduti in contraddizione.

Ne segue che  $\mathcal{C} = \emptyset$ ; dunque  $\lambda_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{D}$  e di conseguenza  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  è un sistema linearmente indipendente. Ma la sua cardinalità coincide con  $\dim V_{[n]}$ , quindi è una base.  $\square$

## Il Teorema di Shapley

**Definizione 3.** Una funzione  $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$  soddisfa le proprietà di

- **Efficienza** (o *razionalità collettiva*) se  $\sum_{i \in [n]} \phi_i(v) = v(N)$
- **Simmetria** se  $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall S \subseteq [n] \setminus \{i, j\} \implies \phi_i(v) = \phi_j(v)$
- **Additività** se  $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \quad \forall v, w \in V_{[n]}$
- **Giocatore nullo** se  $v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall S \subseteq [n] \implies \phi_i(v) = 0$ .

Enunciamo, e dimostriamo, un piccolo lemma che renderà pressoché immediata la dimostrazione del teorema 1.

---

<sup>1</sup>Precisamente, tramite  $\pi_{\text{Span}\{e_1\}^\perp} \circ \Phi|_{V_{[n]}}$

**Lemma 3.** Ogni  $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$  che soddisfa le proprietà della definizione 3 è tale che

$$\phi_i(\lambda u_T) = \begin{cases} \frac{\lambda}{T} & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  sono le funzioni introdotte nella definizione 2.

*Dimostrazione.* Sia  $T \in \mathcal{D}$ . Osserviamo che ogni  $i \notin T$  è un giocatore nullo, infatti per ogni  $S \subseteq [n]$  si ha  $T \subseteq S \implies T \subseteq S \cup \{i\}$  e  $T \not\subseteq S \implies T \not\subseteq S \cup \{i\}$ . Quindi  $u_T(S \cup \{i\}) = u_T(S) \quad \forall i \notin T$ , e per la proprietà del giocatore nullo  $i \notin T \implies \phi_i(\lambda u_T) = 0$ .

Siano  $i, j \in T, i \neq j$ .  $i$  e  $j$  sono giocatori simmetrici: per ogni  $S \subseteq [n] \setminus \{i, j\}$  si ha  $u_T(S \cup \{i\}) = 0$ , dato che  $T \not\subseteq S \cup \{i\}$  dato che  $j \in T$  ma  $j \notin S \cup \{i\}$ ; ma  $u_T(S \cup \{j\}) = 0$  per un motivo analogo.

Ne segue che  $\phi_i(\lambda u_T) = C_T \quad \forall i \in T$ , dove  $C_T$  è un'opportuna costante che dipende da  $T \in \mathcal{D}$ .

Ora,

$$|T| \cdot C_T = \sum_{i \in T} \phi_i(\lambda u_T) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\lambda u_T).$$

Ma per efficienza

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\lambda u_T) = \lambda u_T(N) = \lambda$$

ossia  $C_T = \frac{\lambda}{|T|}$ . □

**Definizione 4.** Sia  $v \in V_{[n]}$ . Il *valore di Shapley* di  $v$  è una funzione  $Sh: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove il valore di ciascuna componente è dato da

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v(P_i(\sigma) \cup \{i\}) - v(P_i(\sigma))$$

dove  $P_i(\sigma) := \{j \in [n] \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$ .

*Osservazione 2.* Un'espressione alternativa per il valore di Shapley è

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{i\}} |S|! (n - |S| - 1)! (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \quad (1)$$

**Proposizione 1.** Il valore di Shapley soddisfa tutte le proprietà della definizione 3.

*Dimostrazione.* Si tratta di una verifica diretta

- **Additività** Si veda l'esercizio 3.
- **Giocatore nullo** Si veda l'esercizio 3.

- **Efficienza** Per l'osservazione 2 si ha

$$\sum_{i=1}^n Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{i\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \quad (2)$$

Fissiamo  $\hat{i} \in [n]$  e sia  $\hat{S} \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\}$ .

- Se  $|\hat{S}| < n - 1$  allora  $\exists j \neq \hat{i} \quad j \notin \hat{S}$ . Ma allora sia  $\hat{S}$  sia  $\hat{S} \cup \{\hat{i}\}$  compaiono nella sommatoria relativa all'indice  $j$  e i termini  $v(\hat{S} \cup \{\hat{i}\}), v(\hat{S})$  si elidono nella (2).
- Se  $|\hat{S}| = n - 1$  allora  $\hat{S} = [n] \setminus \{\hat{i}\}$ .  $\hat{S}$  se ne va nella somma, basta considerare  $j \neq \hat{i}$  e si ha  $\hat{S} = \underbrace{[n] \setminus \{\hat{i}, j\}}_{\in \mathcal{P}(N \setminus \{j\})} \cup \{j\}$ .

$\hat{S} \cup \{\hat{i}\} = [n]$  non viene eliminato da nessuno, e compare in tutto  $n$  volte nella sommatoria più esterna (una per ciascun indice  $i \in [n]$ ). Quindi nella (2) rimane  $\frac{1}{n!} \cdot (n - 1)! \cdot n \cdot v(N) = v(N)$ .

- **Simmetria** Siano  $\hat{i}, \hat{j} \in [n], \hat{i} \neq \hat{j}$  giocatori simmetrici. Possiamo riscrivere la (1) come:

$$\begin{aligned} Sh_i(v) &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) + \\ &\quad - \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) + \\ &\quad - \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S)) \end{aligned} \quad (3)$$

Per ogni  $S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\}$  definiamo

$$\begin{aligned} S^- &:= S \setminus \{\hat{j}\} \\ S^+ &:= S^- \setminus \{\hat{i}\} = (S \cup \{\hat{i}\}) \setminus \{\hat{j}\}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$S \cup \{\hat{i}\} = S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\} = S^+ \cup \{\hat{j}\}$$

e che dunque

$$\begin{aligned} v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S) &= v(S^+ \cup \{\hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\}) \\ &= v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\}). \end{aligned} \quad (4)$$

Dalla (4) segue che

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{i\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) = \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{S^- \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S^- \cup \{\hat{j}\}|! (n - |S^- \cup \{\hat{j}\}| - 1)! \\
& \quad (v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\})) = \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{S^- \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S^- \cup \{\hat{j}\}|! (n - |S^- \cup \{\hat{j}\}| - 1)! \\
& \quad (v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{i}\})), \tag{5}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che i giocatori  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  sono simmetrici e non appartengono a  $S^-$ . Ora possiamo riscrivere la (5) nella forma

$$\frac{1}{n!} \sum_{\substack{S^+ \subseteq [n] \setminus \{\hat{j}\} \\ \hat{i} \in S^+}} |S^+|!(n - |S^+| - 1)! (v(S^+ \cup \{\hat{j}\}) - v(S^+)).$$

Sostituendo nella (3) otteniamo

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{j}\} \\ \hat{i} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S)) + \\
&+ \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S)) = \\
&= Sh_j(v).
\end{aligned}$$

Dunque la funzione  $Sh$  è simmetrica rispetto ai giocatori  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ .  $\square$

**Teorema 1.** Il valore di Shapley è l'unica funzione che soddisfa le proprietà di efficienza, simmetria, additività e la proprietà del giocatore nullo.

*Dimostrazione.* Per il lemma 1  $V_{[n]}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  di dimensione  $2^n - 1$ , una cui base è data – per il lemma 2 – da  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ .

Sia  $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione che soddisfa le quattro proprietà della definizione 3. Per la proposizione 1 anche la funzione  $Sh$  soddisfa tali proprietà, ma quindi per il lemma 3 si ha che

$$\phi_i(\lambda u_T) = Sh_i(\lambda u_T) \quad \forall i \in [n]. \tag{6}$$

Sia  $v \in V_{[n]}$ . Poiché  $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  è una base, esistono degli scalari  $\{\lambda_T\}_{T \in \mathcal{D}}$  tali che  $v = \sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T$ . Ora, per ogni  $i \in [n]$  si ha

$$\phi_i(v) = \phi_i\left(\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T\right) = \sum_{T \in \mathcal{D}} \phi_i(\lambda_T u_T)$$

poiché  $\phi$  soddisfa la proprietà di additività. Ma per la (6)

$$\begin{aligned}\sum_{T \in \mathcal{D}} \phi_i(\lambda_T u_T) &= \sum_{T \in \mathcal{D}} Sh_i(\lambda_T u_T) = \\ &= Sh_i\left(\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T\right) = Sh_i(v). \quad \square\end{aligned}$$

## Esercizi

**Esercizio 1.** *Dimostrare direttamente che  $\text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale reale.*

**Esercizio 2.** *Dimostrare il contenuto dell'osservazione 2.*

**Esercizio 3.** *Dimostrare che il valore di Shapley soddisfa la proprietà di additività e la proprietà del giocatore nullo.*

**Esercizio 4.** *Dimostrare che nell'insieme  $\mathcal{C}$  introdotto nella dimostrazione del teorema 1, nell'ipotesi (assurda) in cui esso sia non vuoto, un minimo per inclusione  $\hat{S}$  esiste.*