

Sommario

In questo documento daremo la dimostrazione del Teorema di Shapley vista durante la lezione del xx/05/2023.

Per dimostrare il teorema serviranno diversi risultati preliminari, non tutti visti a lezione.

Documento scritto e redatto in L^AT_EX da Andrea Marino.

Introduzione

Notazione. Denotiamo con N , o con $[n]$, l'insieme $\{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.

Ricordiamo che il gruppo simmetrico su n elementi, S_n , è naturalmente in bigezione con l'insieme $[n]!$ delle permutazioni degli elementi di $[n]$.

Definizione 1. Introduciamo l'insieme

$$V_{[n]} = \{v \in \text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R}) \mid v(\emptyset) = 0\}.$$

Lemma 1. $V_{[n]}$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2^n - 1$.

Dimostrazione. Sia $V := \text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R})$ e consideriamo la valutazione sull'insieme vuoto:

$$\begin{aligned} \text{val}_\emptyset: V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto v(\emptyset) \end{aligned}$$

V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$. val_\emptyset è lineare e $V_{[n]} = \ker \text{val}_\emptyset$, mentre ovviamente $\text{rank } \text{val}_\emptyset = 1$. Si conclude per la formula delle dimensioni $\dim V = \dim \ker \text{val}_\emptyset + \text{rank } \text{val}_\emptyset$. \square

Può essere utile scendere un po' di più nel dettaglio. Gli spazi vettoriali V e \mathbb{R}^{2^n} sono isomorfi. Un isomorfismo esplicito è dato da

$$\begin{aligned} \Phi: V &\longrightarrow \mathbb{R}^{2^n} \\ v &\longmapsto \begin{pmatrix} v(\emptyset) \\ v(S_1) \\ \vdots \\ v(S_{2^n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, S_1, \dots, S_{2^n-1}\}$.

Osservazione 1. In questo contesto, risulta ovvia la linearità di val_\emptyset . Questa funzione infatti coincide con $\pi_1 \circ \Phi$, dove $\pi_1: \mathbb{R}^{2^n} \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione sulla prima componente.

In maniera analoga, possiamo pensare ogni $v \in V_{[n]}$ (precisamente, a $v|_{\mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}}$) come a un vettore di $2^n - 1$ componenti.

Definizione 2. Per ogni $T \in \mathcal{D} := \mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$ definiamo il *gioco portatore* di T come $([n], u_T)$, dove $u_T(S) = \begin{cases} 1 & T \subseteq S \\ 0 & T \not\subseteq S \end{cases}$.

Osserviamo che l'insieme $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ non corrisponde, tramite l'isomorfismo Φ^1 alla base canonica di \mathbb{R}^{2^n-1} .

Lemma 2. $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ è una base di $V_{[n]}$.

Dimostrazione. Siano $\{\lambda_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ degli scalari reali e consideriamo una combinazione lineare nulla $\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T = 0$, ovvero $\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T(S) = 0 \quad \forall S \subseteq [n]$.

Sia $\mathcal{C} := \{T \in \mathcal{D} \mid \lambda_T \neq 0\}$ e supponiamo per assurdo $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Sia $\hat{S} \in \mathcal{C}$ minimo per inclusione, ossia $T \in \mathcal{C}, T \neq \hat{S} \implies T \not\subseteq \hat{S}$.

Ma allora si ha

$$0 = \sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \sum_{T \subseteq \hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla definizione di gioco portatore di \hat{S} . Dalla definizione di \hat{S} ricaviamo

$$\sum_{T \subseteq \hat{S}} \lambda_T u_T(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}} u_{\hat{S}}(\hat{S}) = \lambda_{\hat{S}},$$

ma $\lambda_{\hat{S}} \neq 0$. Siamo caduti in contraddizione.

Ne segue che $\mathcal{C} = \emptyset$; dunque $\lambda_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{D}$ e di conseguenza $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ è un sistema linearmente indipendente. Ma la sua cardinalità coincide con $\dim V_{[n]}$, quindi è una base. \square

Il Teorema di Shapley

Definizione 3. Una funzione $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfa le proprietà di

- **Efficienza** (o *razionalità collettiva*) se $\sum_{i \in [n]} \phi_i(v) = v(N)$
- **Simmetria** se $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \quad \forall S \subseteq [n] \setminus \{i, j\} \implies \phi_i(v) = \phi_j(v)$
- **Additività** se $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \quad \forall v, w \in V_{[n]}$
- **Giocatore nullo** se $v(S \cup \{i\}) = v(S) \quad \forall S \subseteq [n] \implies \phi_i(v) = 0$.

Enunciamo, e dimostriamo, un piccolo lemma che renderà pressoché immediata la dimostrazione del teorema 1.

Lemma 3. Ogni $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che soddisfa le proprietà della definizione 3 è tale che

$$\phi_i(\lambda u_T) = \begin{cases} \frac{\lambda}{T} & i \in T \\ 0 & i \notin T \end{cases}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ sono le funzioni introdotte nella definizione 2.

¹Precisamente, tramite $\pi_{\text{Span}\{e_1\}^\perp} \circ \Phi|_{V_{[n]}}$

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{D}$. Osserviamo che ogni $i \notin T$ è un giocatore nullo, infatti per ogni $S \subseteq [n]$ si ha $T \subseteq S \implies T \subseteq S \cup \{i\}$ e $T \not\subseteq S \implies T \not\subseteq S \cup \{i\}$. Quindi $u_T(S \cup \{i\}) = u_T(S) \quad \forall i \notin T$, e per la proprietà del giocatore nullo $i \notin T \implies \phi_i(\lambda u_T) = 0$.

Siano $i, j \in T, i \neq j$. i e j sono giocatori simmetrici: per ogni $S \subseteq [n] \setminus \{i, j\}$ si ha $u_T(S \cup \{i\}) = 0$, dato che $T \not\subseteq S \cup \{i\}$ dato che $j \in T$ ma $j \notin S \cup \{i\}$; ma $u_T(S \cup \{j\}) = 0$ per un motivo analogo.

Ne segue che $\phi_i(\lambda u_T) = C_T \quad \forall i \in T$, dove C_T è un'opportuna costante che dipende da $T \in \mathcal{D}$.

Ora,

$$|T| \cdot C_T = \sum_{i \in T} \phi_i(\lambda u_T) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\lambda u_T).$$

Ma per efficienza

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\lambda u_T) = \lambda u_T(N) = \lambda$$

ossia $C_T = \frac{\lambda}{|T|}$. □

Definizione 4. Sia $v \in V_{[n]}$. Il *valore di Shapley* di v è una funzione $Sh: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dove il valore di ciascuna componente è dato da

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v(P_i(\sigma) \cup \{i\}) - v(P_i(\sigma))$$

dove $P_i(\sigma) := \{j \in [n] \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$.

Osservazione 2. Un'espressione alternativa per il valore di Shapley è

$$Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{i\}} |S|! (n - |S| - 1)! (v(S \cup \{i\}) - v(S)). \quad (1)$$

Proposizione 1. Il valore di Shapley soddisfa tutte le proprietà della definizione 3.

Dimostrazione. Si tratta di una verifica diretta

- **Additività** Si veda l'esercizio 3.
- **Giocatore nullo** Si veda l'esercizio 3.
- **Efficienza** Per l'osservazione 2 si ha

$$\sum_{i=1}^n Sh_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{i\}} |S|! (n - |S| - 1)! (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \quad (2)$$

Fissiamo $\hat{i} \in [n]$ e sia $\hat{S} \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\}$.

- Se $|\hat{S}| < n - 1$ allora $\exists j \neq \hat{i} \quad j \notin \hat{S}$. Ma allora sia \hat{S} sia $\hat{S} \cup \{\hat{i}\}$ compaiono nella sommatoria relativa all'indice j e i termini $v(\hat{S} \cup \{\hat{i}\}), v(\hat{S})$ si elidono nella (2).
- Se $|\hat{S}| = n - 1$ allora $\hat{S} = [n] \setminus \{\hat{i}\}$. \hat{S} se ne va nella somma, basta considerare $j \neq \hat{i}$ e si ha $\hat{S} = \underbrace{[n] \setminus \{\hat{i}, j\}}_{\in \mathcal{P}(N \setminus \{j\})} \cup \{j\}$.

$\hat{S} \cup \{\hat{i}\} = [n]$ non viene eliminato da nessuno, e compare in tutto n volte nella sommatoria più esterna (una per ciascun indice $i \in [n]$). Quindi nella (2) rimane $\frac{1}{n!} \cdot (n - 1)! \cdot n \cdot v(N) = v(N)$.

- **Simmetria** Siano $\hat{i}, \hat{j} \in [n], \hat{i} \neq \hat{j}$ giocatori simmetrici. Possiamo riscrivere la (1) come:

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) + \\
&\quad - \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) + \\
&\quad - \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S))
\end{aligned} \tag{3}$$

Per ogni $S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}\}$ definiamo

$$\begin{aligned}
S^- &:= S \setminus \{\hat{j}\} \\
S^+ &:= S^- \setminus \{\hat{i}\} = (S \cup \{\hat{i}\}) \setminus \{\hat{j}\}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$S \cup \{\hat{i}\} = S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\} = S^+ \cup \{\hat{j}\}$$

e che dunque

$$\begin{aligned}
v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S) &= v(S^+ \cup \{\hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\}) \\
&= v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\}).
\end{aligned} \tag{4}$$

Dalla (4) segue che

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{i\} \\ \hat{j} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{i}\}) - v(S)) = \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{S^- \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S^- \cup \{\hat{j}\}|! (n - |S^- \cup \{\hat{j}\}| - 1)! \\
& \quad (v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{j}\})) = \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{S^- \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S^- \cup \{\hat{j}\}|! (n - |S^- \cup \{\hat{j}\}| - 1)! \\
& \quad (v(S^- \cup \{\hat{i}, \hat{j}\}) - v(S^- \cup \{\hat{i}\})), \tag{5}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che i giocatori \hat{i} e \hat{j} sono simmetrici e non appartengono a S^- . Ora possiamo riscrivere la (5) nella forma

$$\frac{1}{n!} \sum_{\substack{S^+ \subseteq [n] \setminus \{\hat{j}\} \\ \hat{i} \in S^+}} |S^+|!(n - |S^+| - 1)! (v(S^+ \cup \{\hat{j}\}) - v(S^+)).$$

Sostituendo nella (3) otteniamo

$$\begin{aligned}
Sh_i(v) &= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{j}\} \\ \hat{i} \in S}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S)) + \\
&+ \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq [n] \setminus \{\hat{i}, \hat{j}\}} |S|!(n - |S| - 1)! (v(S \cup \{\hat{j}\}) - v(S)) = \\
&= Sh_j(v).
\end{aligned}$$

Dunque la funzione Sh è simmetrica rispetto ai giocatori \hat{i} e \hat{j} . \square

Teorema 1. Il valore di Shapley è l'unica funzione che soddisfa le proprietà di efficienza, simmetria, additività e la proprietà del giocatore nullo.

Dimostrazione. Per il lemma 1 $V_{[n]}$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione $2^n - 1$, una cui base è data – per il lemma 2 – da $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$.

Sia $\phi: V_{[n]} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione che soddisfa le quattro proprietà della definizione 3. Per la proposizione 1 anche la funzione Sh soddisfa tali proprietà, ma quindi per il lemma 3 si ha che

$$\phi_i(\lambda u_T) = Sh_i(\lambda u_T) \quad \forall i \in [n]. \tag{6}$$

Sia $v \in V_{[n]}$. Poiché $\{u_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ è una base, esistono degli scalari $\{\lambda_T\}_{T \in \mathcal{D}}$ tali che $v = \sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T$. Ora, per ogni $i \in [n]$ si ha

$$\phi_i(v) = \phi_i\left(\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T\right) = \sum_{T \in \mathcal{D}} \phi_i(\lambda_T u_T)$$

poiché ϕ soddisfa la proprietà di additività. Ma per la (6)

$$\begin{aligned}\sum_{T \in \mathcal{D}} \phi_i(\lambda_T u_T) &= \sum_{T \in \mathcal{D}} Sh_i(\lambda_T u_T) = \\ &= Sh_i\left(\sum_{T \in \mathcal{D}} \lambda_T u_T\right) = Sh_i(v). \quad \square\end{aligned}$$

Esercizi

Esercizio 1. *Dimostrare direttamente che $\text{Fun}(\mathcal{P}(N), \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale.*

Esercizio 2. *Dimostrare il contenuto dell'osservazione 2.*

Esercizio 3. *Dimostrare che il valore di Shapley soddisfa la proprietà di additività e la proprietà del giocatore nullo.*

Esercizio 4. *Dimostrare che nell'insieme \mathcal{C} introdotto nella dimostrazione del teorema 1, nell'ipotesi (assurda) in cui esso sia non vuoto, un minimo per inclusione \hat{S} esiste.*