Coordenadas Polares

Marcos R. Pesante Colón

7 de mayo de 2019

1) Determina las coordenadas rectangulares de los puntos con las siguientes coordenadas polares: $(6, \frac{\pi}{6})$.

$$x = r\cos\theta = 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta = 6 \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

Coordenadas cartesianas: $(3\sqrt{3}, 3)$

2) Determine las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son: $(-1, -\sqrt{3})$.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Coordenadas polares: $(2, \frac{4\pi}{3})$

3) Transforma la ecuación $4xy = 9$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$4xy = 9$$

$$4r^2 \cos\theta \sin\theta = 9$$
$$2r^2 \sin(2\theta) = 9$$

Ecuación: $2r^2 \sin(2\theta) = 9$

4) Transforma la ecuación $r = 6\cos\theta$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

$$r = 6\cos\theta$$
$$r^2 = 6r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = 6x$$
$$x^2 - 6x + y^2 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

Ecuación: $(x-3)^2 + y^2 = 9$

5) Escribe el siguiente número complejo en su forma polar: $-2+3i$.

$$Z = x + yi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \pi + \arctan(\frac{y}{x})$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$\theta = \pi + \arctan 3/-2 = \pi + -0.98 = 2.16$$
$$(\sqrt{13}, 2.16)$$

Número: $(\sqrt{13}, 2.16)$

6) Escribe de la forma $a+bi$: $(\sqrt{3}+i)^6$. Use el Teorema de Moivre.

Teorema de Moivre:

Si Z es un número complejo de la forma $Z = r(\cos\theta + \sin\theta i)$, entonces $Z^n = r^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)i)$ donde $n \in \mathbb{N}$

$$Z = x + yi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \pi + \arctan(\frac{y}{x})$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 1.05$$

$$(\sqrt{3}+i) = 2(\cos 1.05 + \sin(1.05)i) = 2^6\left[\cos(6\times 1.05) + \sin(6\times 1.05)i\right]$$
$$= 64\left(\cos 6.3 + \sin 6.3i\right) = 63.99 + 1.08i$$

Número: $63.99 + 1.08i$

7) Dado el punto (-1,3,5) y radio 2 representa la ecuación de la esfera.

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-j)^2$$

$$(2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 \Longrightarrow 4 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2$$
$$\Longrightarrow 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 + z^2 - 10x + 25$$

Ecuación: $4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 + z^2 - 10x + 25$

8) Dada la ecuación de la esfera $x^2 + 4x - 2 + y^2 - 6y + z^2 + 8z = 0$ hallar el centro y el radio

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 + 8z + 16 = 0 + 4 + 9 + 16 + 2$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (y+4)^2 = 29$$

Centro: $(-2, 3, -4)$, Radio:$\sqrt{29}$