

Control Robusto del Sistema de Bola y Viga

Carlos G. Bolivar Vincenty

Universidad de Puerto Rico Recinto de Mayagüez, Mayagüez, Puerto Rico, carlos.bolivar@upr.edu

Kerian Z. Rosa Medina

Universidad de Puerto Rico Recinto de Mayagüez, Mayagüez, Puerto Rico, kerian.rosa@upr.edu

Dr. Gerson Beauchamp Baez

Universidad de Puerto Rico Recinto de Mayagüez, Mayagüez, Puerto Rico, gerson@ece.uprm.edu

RESUMEN

El objetivo de un sistema de control es regular el comportamiento dinámico de un sistema físico mediante retroalimentación. Dicha regulación debe satisfacer especificaciones de desempeño incluso en presencia de disturbios y perturbaciones. Cuando un sistema de control funciona adecuadamente en presencia de disturbios y perturbaciones, es robusto. Se presenta un acercamiento relativamente sencillo al problema de control robusto para el sistema de bola y viga que se puede presentar en cursos básicos de sistemas de control. El sistema de bola y viga presenta ruido de alta frecuencia en los sensores, dinámica de alta frecuencia no-modelada, disturbios en el proceso y variación de parámetros de la planta. Se presentan resultados de controladores diseñados mediante métodos de control robusto y se comparan con los de controladores diseñados por métodos convencionales, como el método Root Locus. Se demuestra que un diseño realizado a conciencia mediante métodos convencionales puede apartarse de las especificaciones de desempeño, dando lugar a un desempeño no-satisfactorio. Para demostrar esto, se presenta el desempeño del sistema real para ambos controladores y se compara con el desempeño simulado. El desempeño del sistema diseñado mediante Root Locus no cumple con las especificaciones de desempeño mientras que el desempeño del sistema diseñado mediante control robusto sí cumple. Estos resultados se obtuvieron mediante un proyecto de investigación subgraduada y se están aplicando actualmente en un curso introductorio de sistemas de control.

Palabras claves: Control Robusto, Sistema de Bola y Viga, controlador, Desempeño, Disturbios

ABSTRACT

The objective of a control system is to regulate the dynamic behavior of a physical system through feedback. Such regulation should satisfy performance specifications even in the presence of disturbances and perturbations. When a control system performs adequately in the presence of disturbances and perturbations, it is Robust. We present a relatively simple approach to the robust control problem of the Ball-and-Beam System that can be used in basic control systems courses. The Ball and Beam System exhibits high-frequency sensor noise, unmolded high-frequency dynamics, disturbances in the process, and parameter variations of the plant. Results of controllers designed through robust control methods are presented and compared with other controllers designed by conventional methods such as the Root Locus method. It is demonstrated that a conscious design using a conventional method can depart from the performance specifications, leading to unsatisfactory performance. To demonstrate this, the real system performance for the controllers using both methods is presented and compared to the simulated performance. The performance of the system designed by the Root Locus method does not meet the performance specifications, while the performance of the system designed by robust control method does. These results were obtained from an undergraduate research project and are currently being applied in an introductory course on control systems.

Keywords: Robust Control, Ball and Beam System, Controllers, Performance, Disturbances

1. INTRODUCCIÓN

El problema de control consiste en diseñar e implantar un sistema de control automático que regule el comportamiento dinámico de un sistema físico, inclusive en presencia de disturbios y perturbaciones. Dichos disturbios y perturbaciones se manifiestan en forma de ruido en los sensores, variación de parámetros en la planta y ruido en el proceso, entre otros. El sistema de Bola y Viga se estudia como un ejemplo de sistema a ser controlado en cursos básicos de control automático. En nuestro departamento lo utilizamos en el curso básico desde el modelaje no-lineal, linealización del modelo, diseño con el método de Root Locus y diseño con métodos de control robusto. Un ejemplo de este sistema desarrollado por la Compañía Quanser Consulting (Quanser, 2014) se ilustra en la Figura 1. Este sistema se compone de dos vigas metálicas, una viga superior, actuada por un servomecanismo y una viga inferior, fija sobre la mesa, sobre las cuales ruedan dos esferas metálicas. La inclinación de la viga superior es controlada por un servomecanismo que consiste de un motor y un conjunto de engranajes y que llamamos SRV-02. Los sensores de posición de las esferas son potenciómetros a lo largo de las vigas. La viga inferior provee la referencia, en donde se moverá la bola a una posición deseada y la bola en la viga superior debe imitar ese movimiento hasta llegar a dicha posición deseada en la viga superior. El objetivo principal de este proyecto es controlar el Sistema de Bola y Viga por un controlador diseñado mediante métodos de Control Robusto.

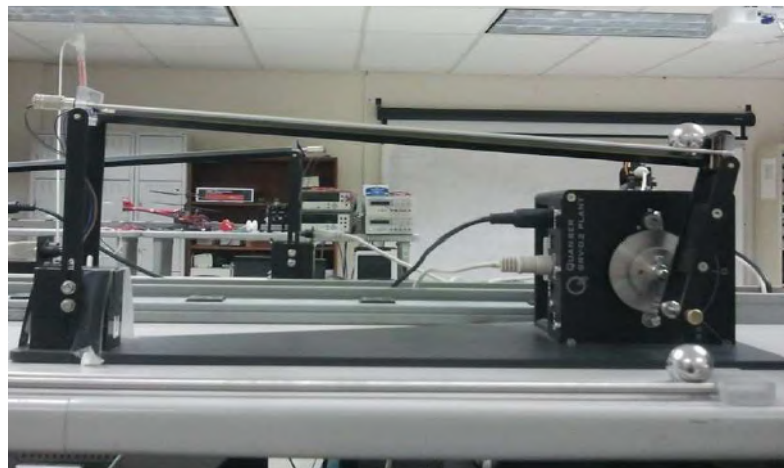


Figura 1: Foto del Sistema Bola y Viga de Quanser Consulting

Un Sistema de Control se dice que es Robusto si cumple una serie de criterios de desempeño a través de una gama de incertidumbres del modelo y las condiciones de funcionamiento. Posibles Incertidumbres incluyen variaciones de los parámetros, disturbios a la planta, la dinámica de alta frecuencia no modelados, y ruido en los sensores. Estas incertidumbres pueden llevar a resultados inesperados e incluso a inestabilidad del sistema. Un controlador robusto debe ser capaz de funcionar bien en presencia de todas las posibles incertidumbres del modelo y las condiciones de operación. La teoría de control robusto proporciona las herramientas para modelar el efecto de estas incertidumbres y comprender su efecto en el diseño del controlador. Proponemos que un controlador diseñado utilizando técnicas de control robusto proporcionará un mejor rendimiento que los controladores diseñados utilizando métodos convencionales. El problema de control robusto se puede afrontar desde los métodos de respuesta de frecuencia, como Margen de fase, Margen de Ganancia y el método de Nyquist. En este trabajo diseñamos controladores robustos para un sistema no-lineal y comparamos su desempeño con el de controladores diseñados utilizando métodos más convencionales como lo es el método del Lugar de las Raíces (*Root Locus*).

2. ROBUSTEZ

En el resto del artículo seguimos el desarrollo presentado por (Rohrs et al., 1992) ya que consideramos un sistema de una entrada y una salida. Para sistemas representados mediante variables de estado, el lector puede consultar (Doyle et al., 2009) y (Zhou et al., 1996).

Los modelos matemáticos son necesarios para conocer cómo se comporta el sistema para poder controlarlo. La Robustez es la capacidad del sistema de control para cumplir con las especificaciones a pesar de la incertidumbre. Definimos incertidumbre como la diferencia entre el modelo matemático y el sistema real. La Figura 2 muestra un modelo sencillo de un sistema de control de retroalimentación con ruido en los sensores $N(s)$ y disturbios en el proceso $D(s)$.

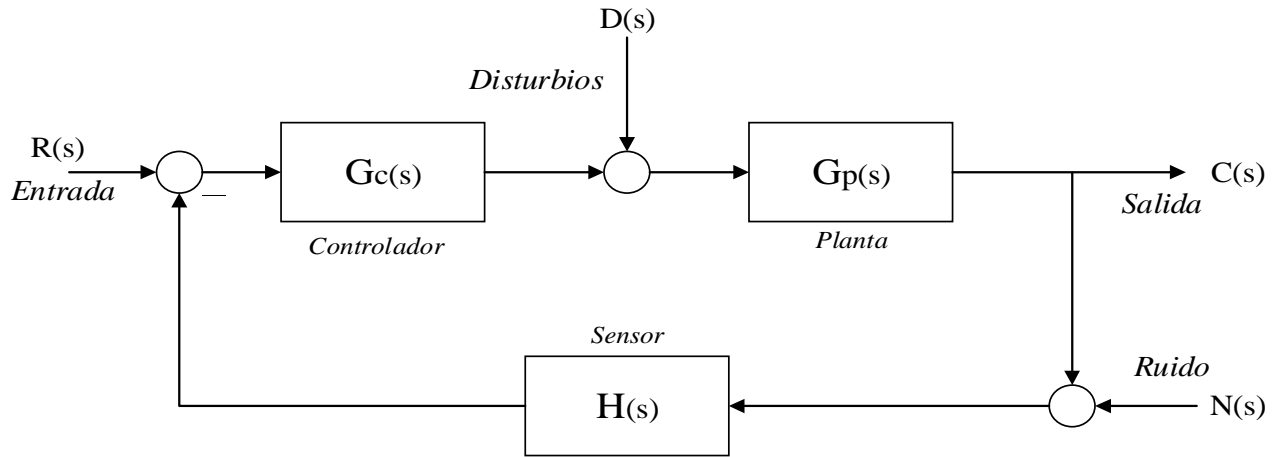


Figura 2: Sistema Equivalente de Control Robusto

Los disturbios afectan adversamente la salida y son imposibles de eliminar ya que son intrínsecos al proceso, solo podemos reducir su efecto mediante retroalimentación. La función de Transferencia desde $D(s)$ hasta $C(s)$, fijando $R(s)=0$ y $G_c(s) = 1$ es

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)H(s)} \quad (1)$$

Para este caso se requiere que la diferencia de retorno $1 + G_p(s)H(s)$ sea grande para frecuencia a las que está presente el disturbio para poder reducir su efecto. LA Función de Transferencia desde $N(s)$ hasta $C(s)$ es

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{-G_p(s)H(s)}{1 + G_p(s)H(s)} \quad (2)$$

Para reducir los efectos del ruido se requiere que el producto $G_p(s)H(s)$ sea pequeño en la banda de frecuencias donde existe $N(s)$.

3. ESTABILIDAD ROBUSTA

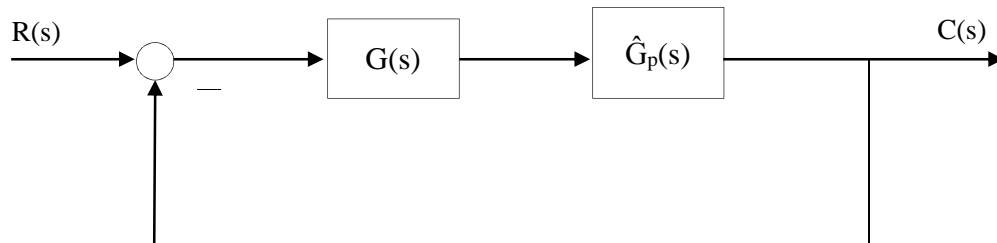


Figura 3: Diagrama de Bloques para sistema con Perturbaciones

La Figura 3 ilustra un sistema de control con la planta perturbada $\tilde{G}_p(s)$. La condición de estabilidad robusta con perturbaciones multiplicativas es solo función de la ganancia del lazo. El modelo de la planta perturbado es

$$\tilde{G}_p(s) = G_p(s)(1 + L_m(s)) \quad (3)$$

donde $L_m(s)$ es la perturbación multiplicativa de la planta para la cual se conoce una cota superior $l_m(j\omega)$

$$|L_m(j\omega)| < l_m(j\omega) \quad (4)$$

Aquí $L_m(s)$ es una perturbación multiplicativa que es estable por si sola, no contiene polos en el lado derecho del plano complejo y $l_m(j\omega)$ es una cota superior conocida para la magnitud de $L_m(j\omega)$. La condición para estabilidad robusta con perturbaciones multiplicativas es (Rohrs et al., 1992)

$$|l_m(j\omega)G(j\omega)| < |1 + G(j\omega)| \quad (5)$$

$$l_m(j\omega) \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| < 1 \quad (6)$$

Una forma de estructurar la dinámica no modelada de un sistema es a través de las perturbaciones multiplicativas haciéndolas pequeñas a bajas frecuencias y que aumentan a frecuencias altas.

4. DESEMPEÑO ROBUSTO

Para la estabilidad robusta se deben cumplir ciertas condiciones, pero es necesario exigir que el desempeño del sistema se mantenga satisfactorio en presencia de perturbaciones de la planta. Se establece una medida de desempeño que sea capaz de rechazar disturbios y disminuir la sensibilidad a la variación de parámetros. Podemos esperar que un sistema con una diferencia de retorno grande en una gama de frecuencias ancha tenga como consecuencia un desempeño satisfactorio.

Podemos afirmar que la configuración de control de $\tilde{G}(s)$ (Figura 3) tendrá desempeño adecuado si

$$|1 + \tilde{G}(s)| > p(j\omega) \quad (7)$$

Aquí $p(j\omega)$ es una función de desempeño que garantiza un desempeño adecuado. La condición de desempeño (7) puede escribirse en la forma,

$$p(j\omega) \left| \frac{1}{1 + \tilde{G}(s)} \right| < 1 \quad (8)$$

Podemos notar que la condición de desempeño está en términos de la ganancia del lazo de perturbada $\tilde{G}(s)$. Se desea diseñar un controlador basado en el modelo nominal de la planta $G(j\omega)$ que cumpla con (7) para cualquier planta con perturbaciones multiplicativas. La función de Sensitividad del sistema perturbado es

$$\tilde{S}(j\omega) \equiv \frac{1}{1 + \tilde{G}(j\omega)} \quad (9)$$

Se necesita garantizar que la función de sensibilidad del sistema de control perturbado sea pequeña para todas las posibles perturbaciones $L_m(j\omega)$. Para esto, es útil determinar cuán grande puede tornarse $\tilde{S}(j\omega)$ en el peor de los casos de $L_m(j\omega)$. De modo que la restricción ahora se torna en

$$|S(j\omega)| \left(\frac{1}{1 - |T(j\omega)l_m(j\omega)|} \right) < \frac{1}{p(j\omega)} \quad (10)$$

La restricción se puede escribir en la forma

$$\left| \frac{1}{1 + G(j\omega)} \right| p(j\omega) + \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| l_m(j\omega) < 1 \quad (11)$$

Garantiza *Garantiza*
Desempeño *Estabilidad*
adecuado *Robusta*

Para frecuencias bajas donde $G(j\omega) \gg 1$, esta condición se reduce a

$$|G(j\omega)| > \frac{p(j\omega)}{1 - l_m(j\omega)} \quad (12)$$

De forma similar, para frecuencias altas donde $G(j\omega) \ll 1$, la condición de estabilidad robusta se reduce a

$$|G(j\omega)| < \frac{1 - p(j\omega)}{l_m(j\omega)} \quad (13)$$

5. SISTEMA DE CONTROL PARA SISTEMA DE BOLA Y VIGA

La Figura 4 muestra un diagrama de bloques del sistema de control propuesto para el sistema de Bola y Viga.

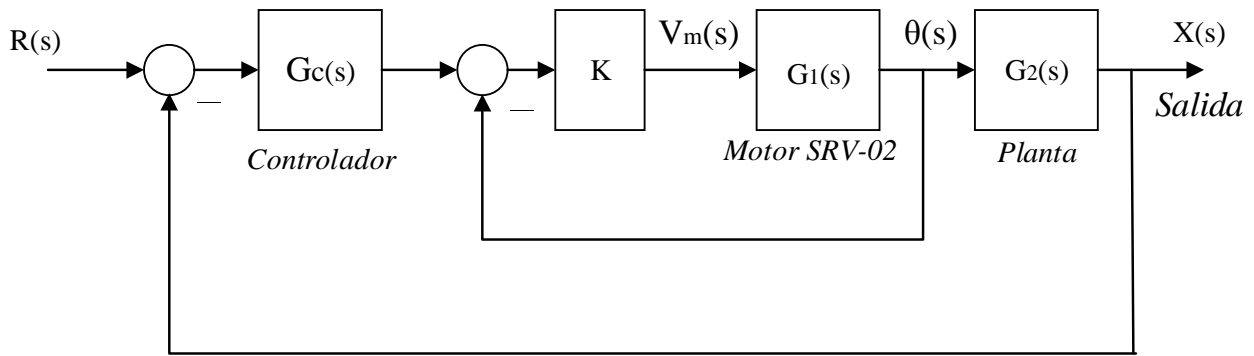


Figura 4: Diagrama de Bloques para Sistema de Control de la Bola y Viga

$X(s)$ -Transformada de Laplace de la posición de la bola en la viga

$\theta(s)$ - Transformada de Laplace del ángulo de la viga

$V_m(s)$ - Transformada de Laplace del voltaje aplicado al motor

La Función de Transferencia del SRV-02 es (Quanser, 2014)

$$\frac{\theta(s)}{V_m(s)} = \frac{64}{s(s + 36)} \quad (14)$$

La Función de Transferencia del Sistema de Bola y Viga es (Quanser, 2014)

$$\frac{X(s)}{\theta(s)} = 0.42 \frac{1}{s^2} \quad (15)$$

6. ANÁLISIS Y DISEÑO MEDIANTE MATLAB

Para determinar la perturbación multiplicativa, se desarrolló un modelo de la planta que toma en consideración las posibles variaciones en los parámetros de la planta. Estos parámetros se modelaron usando la función “ureal” de Matlab. Esta función nos permite definir un parámetro, su valor nominal y el porcentaje de error asociado con el mismo. También se tomaron en consideración los efectos de saturación del motor, cuantización de los codificadores ópticos de posición, la inductancia del motor DC, y los filtros analógicos no-modelados de los sensores. Utilizando el mando “ulinearize” de Matlab, se linealizó el sistema para poder graficar su diagrama de Bode. Graficamos el diagrama de Bode del sistema perturbado y lo comparamos con el del sistema nominal para determinar los efectos de la dinámica no-modelada. La Figura 6 muestra las gráficas resultantes. La gráfica verde es la de la planta nominal y la gráfica azul es la de la planta perturbada. Note que hay varias gráficas azules sobreimpuestas. Notamos que hay poca variación entre la planta nominal y las plantas perturbadas para bajas frecuencias. Sin embargo, para altas frecuencias, el comportamiento de los sistemas perturbados se aparta considerablemente del modelo nominal. Esta variación se debe a la dinámica no-modelada del sistema.

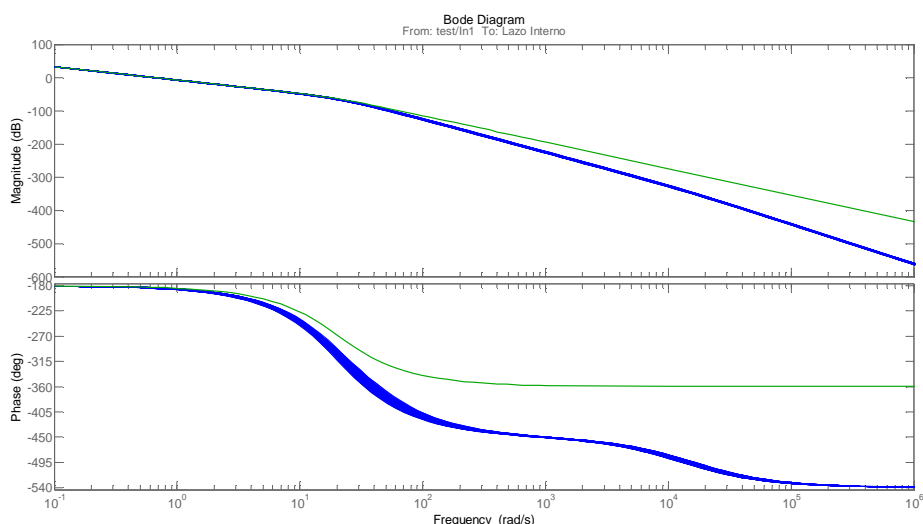


Figura 6. Respuesta de Frecuencia de Planta Nominal y Planta Perturbada

Utilizando el mando “ucover”, determinamos una Función de Transferencia acotada para todas las posibles perturbaciones multiplicativas. Sin embargo, esto no toma en consideración el efecto de ruido en los sensores. Para cuantificar este efecto, tomamos datos experimentales con el sistema físico de la Bola y Viga y determinamos que si el ancho de banda del sistema de lazo cerrado excede 3 rad/s, el ruido en los sensores empieza a afectar la salida del sistema considerablemente. Por lo tanto, es necesario ajustar la perturbación multiplicativa para incluir este fenómeno. En particular, para frecuencias mayores que 3 rad/s la perturbación multiplicativa debe ser grande. La siguiente cota es adecuada para describir la dinámica no-modelada del sistema

$$l_m(s) = \frac{0.08046s^4 + 2.802s^3 + 26.44s^2 + 38.66s + 14.94}{s^2 + 38.11s + 414.5} \quad (16)$$

La Figura 7 es el diagrama de Bode de la cota (16).

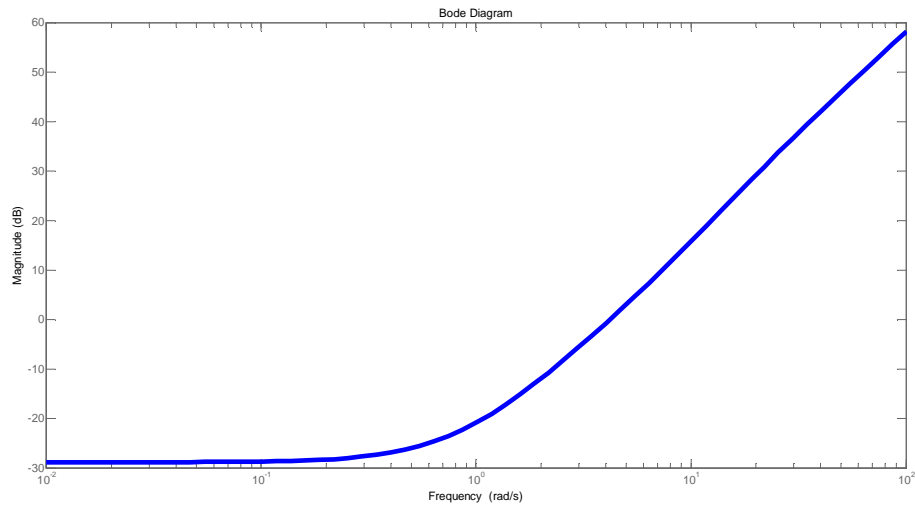


Figura 7: Diagrama de Bode de $L_m(s)$

DESEMPEÑO ROBUSTO

Se establecieron los siguientes criterios de desempeño para el sistema $\%OS \leq 20\%$ (porcentaje de rebase) y $T_s \leq 3 \text{ seg}$ (tiempo de establecimiento en la banda del 2% del valor final). Estas especificaciones corresponden a un sistema con polos dominantes caracterizados por un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.47$ y una frecuencia natural $\omega_n = 2.12 \text{ rad/s}$. Un sistema de lazo cerrado con estos polos dominantes tiene magnitud cerca de uno para $\omega < 2.12 \text{ rad/s}$. Para que esto se cumpla, la diferencia de retorno tiene que ser grande para estas frecuencias. Tomando esto en consideración, establecimos el siguiente índice de desempeño

$$p(s) = \frac{2.516s + 0.2328}{s^2 + 0.02197s} \quad (17)$$

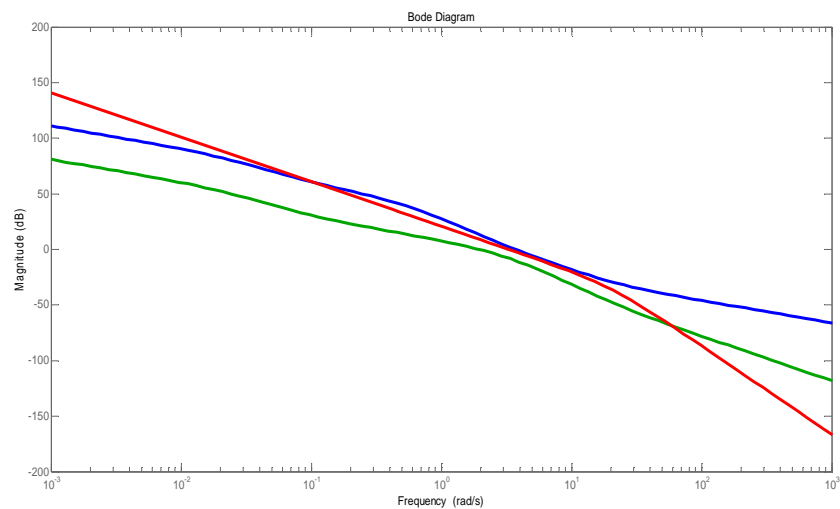


Figura 8: Diagrama de Bode para el Diseño con Compensador Proporcional

La Figura 8 ilustra las siguientes gráficas, la gráfica verde es la de $\frac{p(j\omega)}{1-l_m(j\omega)}$, la azul es la de $\frac{1-p(j\omega)}{l_m(j\omega)}$ y la roja es la $G(j\omega)$. Para un desempeño adecuado se requiere que la gráfica roja esté por encima de la gráfica verde para frecuencias bajas y por debajo de la azul para frecuencias altas.

La condición de desempeño robusto se cumple para frecuencias bajas. Notamos que la condición de estabilidad robusta también se cumple para frecuencias altas. Sin embargo, la pendiente de la gráfica de la planta es de 40 dB/dec cerca de la frecuencia de cruce. Esto significa que el margen de fase es pequeño y la respuesta será oscilatoria o muy probablemente el sistema será inestable. Para remediar este problema, le añadimos un cero y un polo al compensador. El compensador propuesto es

$$G_c(s) = 95 \frac{s + 1}{s + 10} \quad (18)$$

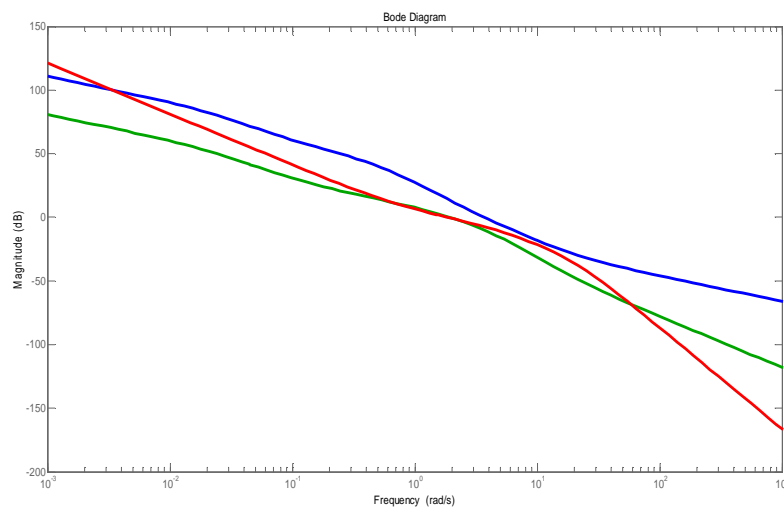


Figura 9: Diagrama de Bode para el Diseño con Compensador Propuesto

El compensador en (18) es uno de adelanto en fase, el cual es lógico diseñarlo a partir del diagrama de Root Locus para estabilizar el sistema. La Figura 9 ilustra que la pendiente en la frecuencia de cruce se redujo a aproximadamente 20 dB/dec. Sin embargo, ahora la condición de desempeño robusto no se cumple. Para remediar esto, añadimos otro polo y otro cero. Esto tiene el propósito de aumentar la ganancia a bajas frecuencias. El nuevo compensador es

$$G_c(s) = 95 \frac{(s + 1)(s + 0.1)}{(s + 10)(s + 0.01)} \quad (19)$$

Lo que hemos hecho es añadir un compensador de retraso en fase que permite aumentar la ganancia del lazo a frecuencias bajas sin cambiar significativamente las características de desempeño y estabilidad. La Figura 10 muestra que ahora se cumple la condición de desempeño para frecuencias bajas. También se cumple la condición de estabilidad robusta para frecuencias altas. Además de esto, la pendiente cerca de la frecuencia cruce es de 20 dB/dec. Por lo tanto, concluimos que el diseño es aceptable.

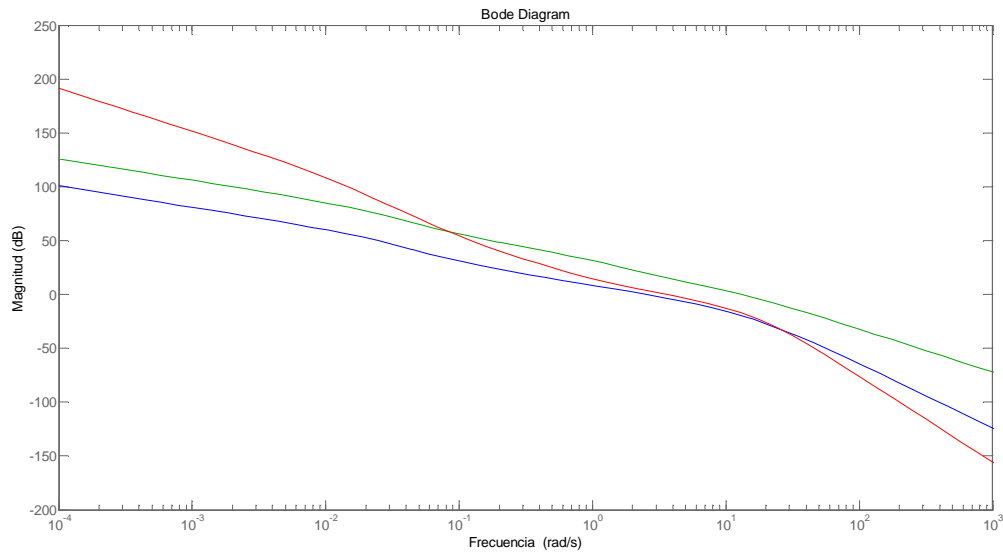


Figura 10: Diagrama de Bode del Diseño Final

Utilizando el compensador diseñado y un pre-filtro en la entrada fuera del lazo, con un polo es $s = -1$ para cancelar el efecto del cero del compensador de adelanto en fase, se obtiene la respuesta a un escalón del sistema verdadero que se ilustra en la Figura 11. La curva morada es la señal de referencia y la curva amarilla es la respuesta real de la posición de la bola en la viga. La escala vertical está en cm y la escala horizontal está en segundos. Esta respuesta exhibe un porcentaje de rebase $\%OS = 20\%$ y un tiempo de establecimiento $T_s = 3$ segundos, según esperado.

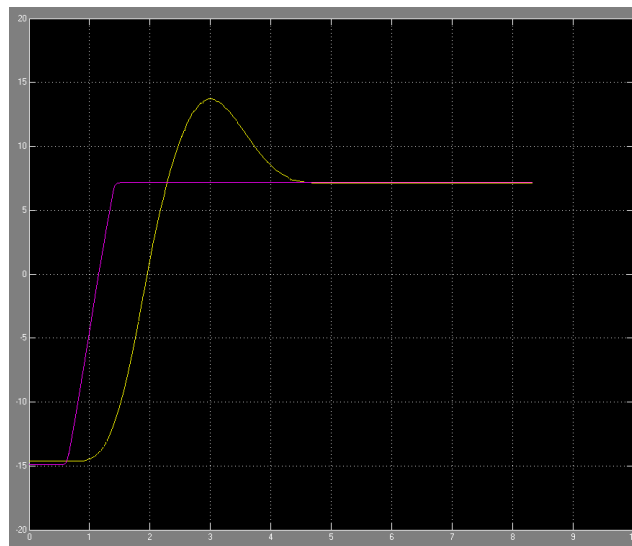


Figura 11: Respuesta a un Escalón del Sistema Real con Compensador Robusto

Se realizó un diseño mediante el método de Root Locus que cumple con las especificaciones de desempeño y cuya simulación funciona adecuadamente. El compensador resultante fue

$$G_c(s) = 260 \frac{(s + 1)(s + 0.1)}{(s + 20)(s + 0.01)} \quad (20)$$

Sin embargo, el desempeño real del sistema no fue satisfactorio. La Figura 12 ilustra la respuesta del sistema verdadero con este controlador. El efecto del polo en $s = -20$ causa la respuesta errática y oscilatoria. En el diagrama de Root Locus, los polos dominantes con ambos compensadores son bien similares y las respuestas simuladas también. Sin embargo, la respuesta verdadera con el controlador que permite un ancho de banda mayor, no fue satisfactoria.

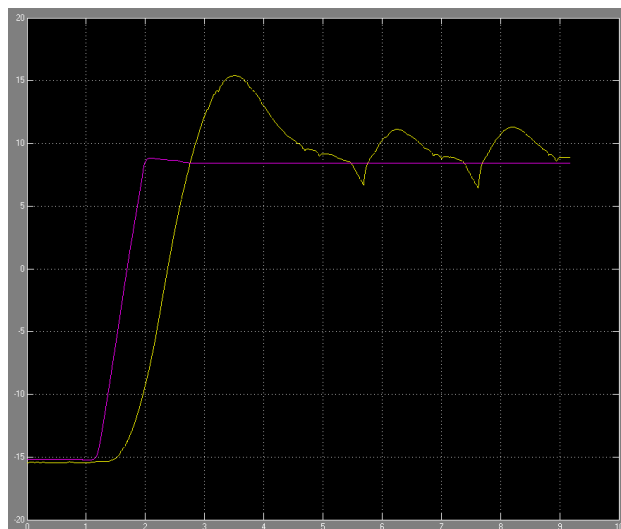


Figura 11: Respuesta a un Escalón del Sistema Real con Compensador Convencional

7. CONCLUSIÓN

El objetivo de este trabajo era diseñar un controlador para el sistema de bola y viga mediante el método de control robusto y comparar su estabilidad y desempeño con controladores diseñados mediante Root Locus. Se demostró que el sistema diseñado mediante control robusto cumple con las especificaciones de desempeño en presencia de disturbios. Diseñamos además un controlador mediante el método de Root Locus que no cumple con las especificaciones porque la acción de control se torna extremadamente ruidosa debido a que el ancho de banda del sistema de lazo cerrado permite el paso del ruido intrínseco en los sensores. Esto demuestra que es necesario tomar en cuenta los criterios de diseño de control robusto cuando diseñamos mediante el método de Root Locus. En el Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computadoras de la UPR en Mayagüez, se utiliza el problema de la bola y la viga como un ejemplo en un primer curso de sistemas de control de 15 semanas. Se comienza desarrollando el modelo no-lineal en las primeras tres semanas del curso, luego se diseña un controlador para el SRV-02 utilizando álgebra y apareo de modelos y finalmente, en las últimas tres semanas del curso, se diseña el controlador del sistema completo mediante Root Locus y mediante técnicas de control robusto para ilustrar los conceptos expuestos en este trabajo. Una estación como esta puede tener un costo aproximado de \$9,000 USD. En el departamento contamos con cuatro estaciones completas de bola y viga.

REFERENCIAS

- Doyle, J., Francis, B., & Tannenbaum, A., Feedback Control Theory, Dover Publications (2009).
 “Quanser - Ball and Beam.” [Online]. Available: http://www.quanser.com/products/ball_beam. [Accessed: 02-Mar-2014].
 Rohrs, C.E., Melsa, J., & Shultz, D, Linear Control Systems, McGraw-Hill College (1992).
 Zhou, K., Doyle, J., & Glover, K. Robust and Optimal Control. Prentice Hall (1996).

Authorization and Disclaimer

Authors authorize LACCEI to publish the paper in the conference proceedings. Neither LACCEI nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.