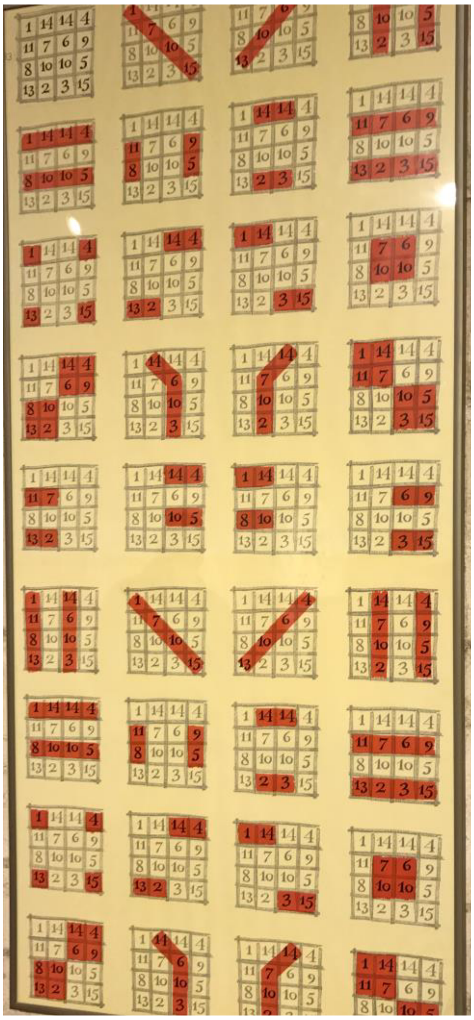
Å undervise matematisk problemløsing

Forfatter:

Svein H. Torkildsen

Publisert dato: November 2017

Endret: april 2022



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Hvorfor problemløsing?

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Paul Halmos

Abelprisvinner Andrew Wiles er kanskje mest kjent for å ha bevist Fermats siste teorem. Han ble nysgjerrig på problemet allerede da han, 10 år gammel, fant det i ei bok på biblioteket. Gutten glemte aldri det uløste problemet, og som professor i matematikk tok han fatt på arbeidet med å bevise teoremet. Det tok ham mer enn sju år å fullføre beviset. Wiles beskriver arbeidet som matematiker som å være kreativ, å møte mange vanskeligheter, å gjøre feil, å holde ut, å gjøre fremgang, å ha en drøm og å elske det du gjør så høyt at du er villig til å vie deg til det i lengre perioder (University of Cambridge; Singh, 2004).

I formålet for fellesfaget matematikk blir problemløsing løftet fram som en sentral kompetanse gjennom kjerneelementet *Utforsking og problemløsing*: «Problemløysing i matematikk handlar om at elevane utviklar ein metode for å løyse eit problem dei ikkje kjenner frå før. Algoritmisk tenking er viktig i prosessen med å utvikle strategiar og framgangsmåtar for å løyse problem og inneber å bryte ned eit problem i delproblem som kan løysast systematisk. Vidare inneber det å vurdere om delproblema best kan løysast med eller utan digitale verktøy. Problemløysing handlar òg om å analysere og forme om kjende og ukjende problem, løyse dei og vurdere om løysingane er gyldige». Forskere fremhever også betydningen av problemløsing for elevenes læring og forståelse i matematikk:

> Problem solving should be the site in which all of the strands of mathematics proficiency converge. It should provide opportunities for students to weave together the strands of proficiency and for teachers to assess students' performance on all the strands (Kilpatrick, Swafford & Findell (red), 2001).

Arbeid med problemløsing er tidkrevende, men det er det verdt:

> Hvis vi fokuserer på å undervise prosedyrer i aritmetikk i stedet for å utvikle innsikt, kommer vi til å vektlegge individuelle øvinger. Presset læreren føler på «å komme gjennom boka» fører til at læreren setter av for lite tid til samtale og diskusjon. Men det er nettopp disse samtalene og diskusjonene – og ikke mengden av løste oppgaver – som sikrer dybdelæringen hos elevene (Van Galen m. fl., 2008).

Å få tid til å arbeide med problemløsningsaktiviteter bidrar til økt forståelse og dybdelæring hos elevene.

Problem og problemløsing

I faglitteraturen møter vi ulike definisjoner av problem. I denne artikkelen definerer jeg et problem som «en oppgave der eleven ikke umiddelbart ser hvordan han kan komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes» (Leer, 2009; Johnson, Herr & Kysh, 2004). Dette betyr at det som er et problem for en elev ikke trenger å være det for en annen elev. Det betyr også at det som er et problem for en elev på et tidspunkt, ikke trenger være det på et senere tidspunkt.

> *Eksempel*
>
> Etter at Mattias hadde tatt ¼ av kakene i boksen, var det 18 kaker igjen.
> Hvor mange kaker hadde det vært i boksen?

Mange elever på 5.-6. trinn vil måtte tenke seg lenge og vel om for å finne en løsning som de kan begrunne gyldigheten av. For disse elevene vil både matematikken knyttet til brøk og måten å angripe problemet på være en utfordring. For eldre elever som har mer erfaring med brøk, vil dette være en rutineoppgave.

Kongelf (2011) peker på at land som gjør det godt i matematikk har et sterkt fokus på problemløsing. Rammeverket for læreplanen i Singapore betrakter problemløsing som kjernen i matematikkundervisningen, og lærebøkene i Singapore vier hele kapitler på problemløsing med fokus på heuristikk - spesifikke strategier for problemløsing. I norsk skole er det derimot lite systematisk arbeid med generelle strategier for problemløsing.

Elevene bør lære problemløsing, og opplæringen bør starte allerede i de tidligste skoleårene. Det er en krevende oppgave for læreren som setter seg ambisiøse mål både for sin egen undervisning og elevenes læring. Pennant (2013) peker på åtte aspekter ved undervisningen som læreren bør reflektere over. Disse aspektene er sentrale for å lykkes med undervisning i problemløsing.

1	Hvem snakker mest i den delen av timen hele klassen er samlet?	Som en tommelfingerregel er et sterkt miljø for problemløsing kjennetegnet ved at læreren står for 30 % og elevene for 70 % av praten. Hvordan er denne balansen i ditt klasserom? Hva sier du når du har ordet? Forklarer hvordan noe skal gjøres? Stiller spørsmål?
2	Hvilken type spørsmål stiller jeg?	Stiller jeg lukkede spørsmål som «kan du se hvordan systemet fungerer?» eller åpne spørsmål som «hvilke system finner vi i dette problemet?»
3	Hvem svarer på spørsmålene?	Er det for det meste de samme elevene? Er det de som er ivrigst og mest taleføre? Er det oftere gutter enn jenter?

4	Hvor godt hører jeg etter på elevenes svar og prøver å forstå hva de sier?	Responderer jeg ved å fortelle hele klassen hva jeg tror en elev sier uten å sjekke med eleven om det stemmer? Omformulerer jeg litt på det de sier for at det skal være mer forståelig eller passe bedre til et «bedre/riktig» svar»? Stiller jeg eleven «oppklarende» spørsmål som «så du sier at …» eller «… er det det du mener»?
5	Hva gjør jeg med elevenes svar?	Roser jeg dem for fantastiske svar? Vurderer jeg ganske enkelt svarene deres med kommentarer som «Bra», «Godt gjort», «Riktig», «OK», «Nei», «Tenk om igjen»? Fortsetter jeg på det neste jeg hadde tenkt å si? Ber jeg andre elever kommentere det som blir sagt? Følger jeg opp med spørsmål som «er du sikker» eller «hvordan vet du det»?
6	Hvordan legger jeg til rette for læring?	Forklarer jeg nøyaktig hva elevene må gjøre og forsikrer meg om at de forstår det så godt som mulig før de setter i gang med arbeidet? Peker jeg på kritiske punkter, gir hint eller ledetråder for å hjelpe dem? Utnytter jeg elevenes tanker og ideer som utgangspunkt for å lede elevenes oppmerksomhet mot målet for timen?
7	Hvor trygge er elevene på å ta sjanser, prøve ut ideer og å gjøre feil?	Hvilke tegn finner du på at elevene våger å bidra med sine tanker i diskusjonen eller ideer de prøver ut? Hvilke kjennetegn ser jeg på at elevene prøver ut egne tanker snarere enn å gjenkalle mine tanker? Når er det nyttig for dem å gjenkalle mine tanker? Hva gjør jeg når elevene gjør feil eller kommer inn i ei blindgate?
8	Hva kommuniserer kroppsspråket mitt?	Kommuniserer jeg interesse/aksept/frustrasjon/uenighet …? Hvordan endrer kroppsspråket mitt seg i løpet av timen?

Undervise i problemløsing

Elevene bør samarbeide om å løse problemløsingsoppgaver, både fordi man kan lære av å lytte til andres ideer og av å formidle egne ideer til andre (Johnson, Herr & Kysh, 2004; NCTM, 2014). I artikkelen «Undervisning – planlegging, prosess og produkt»[1] beskriver jeg en struktur for en undervisningsøkt som passer godt til arbeid med problemløsing. Gruppearbeid spiller en sentral rolle i denne formen for undervisning.

Undervisning i problemløsing krever at elevene får en utfordring de ikke umiddelbart ser hvordan de kan løse. Elevene må derfor få tid til å tenke og å «leke» med problemet. De må prøve ut ideer som kanskje ender i en blindvei og justere retningen ut fra erfaringene de gjorde, diskutere erfaringene med andre og være villige til å ta risiko. Læreren kan støtte elevenes læring ved å utvikle en klassekultur som vektlegger innsats og strev, og der feil er en naturlig del av læringsprosessen (Pennant, 2013).

[1] Artikkel utarbeidet til MAM-prosjektet, Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning
http://www.matematikksenteret.no/mam/

Elever som får eksplisitt undervisning i sentrale matematiske problemløsingsstrategier blir bedre problemløsere enn elevene som får tradisjonell undervisning. I den tradisjonelle undervisningen er fokus på selve aktiviteten eller oppgaven elevene skal arbeide med. Strategien – måten å angripe problemet på – blir ikke gjenstand for spesiell oppmerksomhet. Læreren gjør ikke elevene oppmerksomme på hva som kjennetegner strategien og når den kan være nyttig. I den eksplisitte undervisningen i problemløsing er målet for timen knyttettil strategien (Amit og Portnov-Naaman, 2017). Det setter krav til valg av problem læreren skal presentere. Problemet må være slik at den aktuelle strategien blir et naturlig valg – i alle fall for noen av elevene (Johnson; Herr & Kysh, 2004). Problemet bør også være slik at elevene med litt anstrengelse kan trenge inn i de matematiske utfordringene problemet rommer. Når nye problemløsingsstrategier blir introdusert, vil det være naturlig å ha både et prosessmål og et faglig matematisk mål for timen. Boaler anbefaler å la elevene arbeide med problemet før metoden elevene bruker blir gjenstand for drøfting (Boaler).

Denne artikkelen gir i fortsettelsen eksempler på problem som naturlig inviterer til å ta i bruk seks problemløsingsstrategier som er særlig aktuelle for barnetrinnet.

1. Lage en visualisering
2. Gjett, sjekk og juster
3. Lage en systematisk tabell
4. Se etter et mønster
5. Arbeide baklengs
6. Forenkle problemet

Følgende eksempler viser at det kan være naturlig å bruke mer enn en av disse strategiene under arbeidet med et problem. I oppsummeringen bør læreren løfte fram både matematikken som ligger til grunn for løsningen og strategien som inngår i målet for timen.

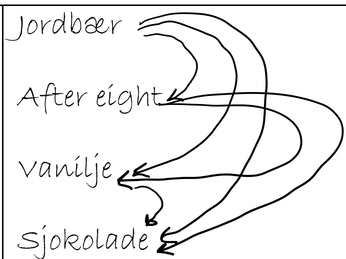
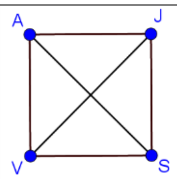
Lage en visualisering

Visualiseringen kan ta form av en tegning eller et diagram. I denne sammenheng kan vi føye til bruk av konkreter, selv om visualisering og konkreter (fysiske gjenstander) ofte kategoriseres som to ulike representasjoner (NCTM, 2014). Visualiseringen bidrar til å se sammenhenger som virker kompliserte når de presenteres som en tekst. Teksten tolkes gjennom en visualisering, og visualiseringen gir støtte til å uttrykke sammenhengene i et mer formelt matematisk språk.

Iskremoppgave

Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire smaker. Du vil kjøpe en is med to kuler. På hvor mange måter kan du sette sammen den isen du vil kjøpe?	

Svorkmo (2007) beskriver hvordan elever i 5. klasse arbeidet i par med denne oppgaven. Premissene de arbeidet ut fra var at det skulle være to forskjellige smaker på iskulene og at rekkefølgen på smakene ikke spiller noen rolle. Elevene fant at det var seks ulike kombinasjoner ved å sette opp en oversikt. Noen brukte ord, andre brukte en visuell representasjon med piler:

Vanilje og sjokolade Aftereight og sjokolade Vanilje og jordbær Jordbær og aftereight Vanilje og aftereight Jordbær og sjokolade		 Et alternativ til diagram med piler.

Da elevene ble utfordret på om de var sikre på at de hadde fått med alle kombinasjonene, fikk elevene som hadde satt opp en oversikt uten en spesiell systematikk problemer med å begrunne at det ikke fantes flere muligheter. Elevene som brukte piler har en mer direkte måte å vise at det kun er seks mulige kombinasjoner. Deres måte å representere problemet på kalles ofte et diagram, og ved å betrakte diagrammet ser vi at alle smaker er forbundet til hverandre med ei pil. Denne måten å representere problemet på viser en 3-2-1 struktur som er interessant for matematikken i dette problemet: Summer av påfølgende heltall fra 1.

En annen klasse arbeidet med oppgaven ut fra at det var tillatt med to kuler av samme smak, og det var forskjell på om vaniljen lå underst og sjokoladen øverst, eller motsatt. Ei gruppe brukte plastbrikker med ulik farge for å representere smakene, og fikk etter hvert et system som på bildet. Ved å analysere systemet brikkene lå i kunne gruppen koble løsningen til både kvadrattallene og summer av oddetall.

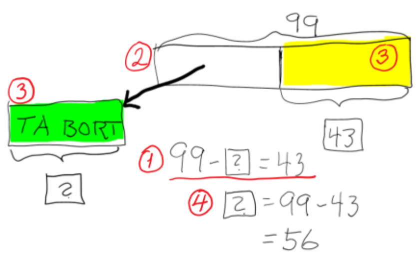
Matematikkundervisningen i Singapore legger betydelig vekt på blokk-modellen (bar model) i arbeid både med rene talloppgaver og med tekstoppgaver. Modellen blir introdusert allerede i første klasse på enkle problem. Erfaring med modellen er nyttig når elevene skal få oversikt på mer omfattende problem på høyere klassetrinn. Et eksempel hentet fra *http://thesingaporemaths.com* viser hvordan læreren gjennom interaksjon med elevene skal legge opp til en grundig gjennomgang av problemet. Samtaletrekkene står sentralt i denne fasen. Denne måten å arbeide på gir et solid grunnlag for seinere arbeid med algebra. Målet er ikke bare å finne svaret, men også å se på sammenhenger.

Eksempel fra de første skoleårene

Finn det ukjente tallet i boksen: 99 – $\boxed{?}$ = 43. Tegn din egen modell og sjekk svaret.

Etter at elevene har arbeidet med problemet vil læreren under oppsummeringen først få fram strukturen i regnestykket:

1. Vi har en mengde som det blir tatt noe bort fra, og da er det en del igjen. Skriver 99 – ? = 43.



Deretter bruker læreren samtaletrekkene aktivt mens han leder klassen gjennom problemløsingsprosessen.

2. Vi har en mengde vi kan tenke på som et rektangel. Læreren tegner rektanglet og spør elevene hvor stor mengden er. Skriver klammeparentes og 99 etter innspill fra elever.
3. Det blir tatt bort en del. Læreren stiller spørsmål som: Hvordan kan vi vise det i tegningen? Hvor i regnestykket finner vi det som blir tatt bort? Hvor mye er det igjen? Læreren markerer deler og skriver tall og symboler etter hvert som elevene kommer med innspill.
4. Hvilket regnestykke kan vi nå lage for å finne ut hvor mye som blir tatt bort?

Gjennom en prosess av denne typen vil læreren kunne få fram sammenhengen mellom den visuelle og den symbolske representasjonen. Tegningen skal nettopp være en hjelp til å forstå sammenhengen mellom de to regnestykkene 99 – ? = 43 og ? = 99 – 43. Det er verd å merke seg at slike sammenhenger er sentrale når elevene seinere skal arbeide med å løse likninger.

Følgende eksempler er knyttet til introduksjon av problemløsingsstrategier med elever på 5.-7. trinn i forbindelse med utvikling av ressurser til MAM-prosjektet. De valgte problemene skulle sette søkelyset på tre av de seks strategiene som er nevnt over. Flere elevgrupper brukte mer enn en strategi for å arbeide med hvert problem slik at alle disse seks strategiene blir belyst gjennom eksemplene.

Prøve og feile

Ofte kan det være vanskelig for elevene å vite hvordan et problem skal angripes. En løsning kan da være å «bare prøve noe» og se hvordan det går. Om forsøket «mislykkes» prøver man på nytt. Men forsøkene bør ikke være tilfeldige. En systematisk utprøving av muligheter vil lede fram til en eller flere løsninger på problemet.

Bestefars tiere

Prosessmål: Gjett og sjekk, Lag en systematisk tabell
Matematisk mål: Se sammenheng mellom de tre løsningene

Bestefar har spart slik at han har 65 tiere.
Han vil gi penger til barnebarna sine.
De små skal få 3 tiere hver og de store skal få 7 tiere hver.
Da alle barnebarna hadde fått det de skulle ha,
var det ingen tiere igjen!

Hvor mange barnebarn kan bestefar ha?

Presentasjon av oppgaven

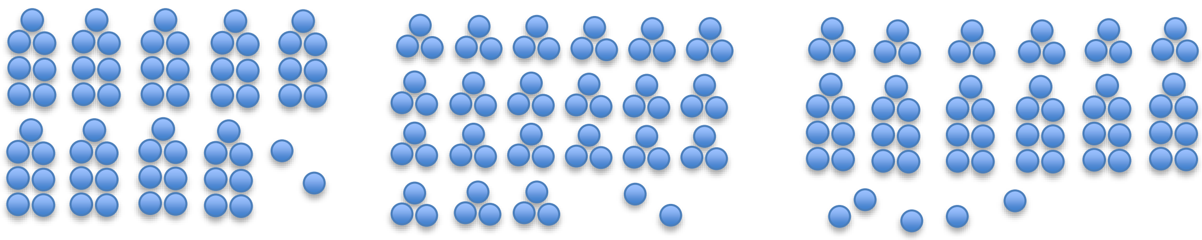
Læreren presenterte oppgaven som en fortelling før elevene fikk oppgavearket og opplyste samtidig om at de kunne bruke plastbrikker hvis de ønsket å bruke dem under arbeidet.

Arbeid i gruppestørrelse på fire

Gruppene ble først bedt om å snakke sammen om hvordan de ville angripe problemet. Samtlige grupper mente at de bare kunne prøve seg fram til de fant en løsning.

Flere av elevgruppene valgte å bruke brikker med noe ulik tilnærming. Noen ordnet brikkene i 7-ere, andre i 3-ere mens noen startet med like mange 3-ere og7-ere.

Max antall store barnebarn | Max antall små barnebarn | Like mange store og små



Slik så første «mislykkede» forsøk ut for disse gruppene. Med dette utgangspunktet startet omgrupperingen slik at alle brikkene som representerte ti-kroner ble tatt i bruk.

- Gruppen med max antall store barnebarn tok en brikke fra en 7-er sammen med de to ekstra brikkene og delte de resterende seks i to 3-ere. De fikk da 8 store og 3 små barnebarn.
- Gruppen med max antall små barnebarn tok to 3-ere sammen med hver av de to ekstra brikkene og fikk 17 små og 2 store barnebarn.
- Gruppen som startet med like mange store og små lagde først en ekstra 3-er av de fem brikkene som var til overs. Deretter brukte de brikkene i en 7-er og de to ekstra brikkene til å lage tre 3-ere. Disse fikk da en løsning med 5 store og 10 små barnebarn.

Gruppene var fornøyd med svaret de hadde funnet og anså problemet for løst. Læreren utfordret dem på om det var eneste mulige løsning, eller om det kanskje var flere? Gruppene fant da nye løsninger ved å fortsette omgrupperingen: tre 7-ere ga sju 3-ere, og sju 3-ere ga tre 7-ere. Ved hjelp av brikkene og **systematisk** omgruppering fant alle gruppene to eller tre løsninger.

Ei gruppe elever fant et mønster som viste at det kun var tre løsninger. Gruppen hadde laget en **systematisk tabell** med utgangspunkt i at det ikke kunne være mer enn 9 store barnebarn. Hvis det var 10 måtte det være 70 tiere, og så mange tiere hadde ikke bestefar.

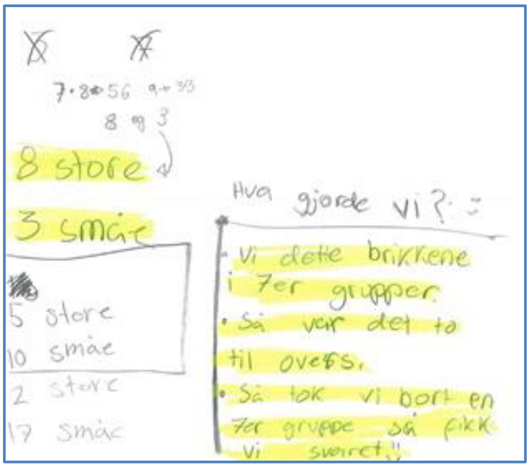
Barnebarn	Tiere		Barnebarn
Store	Antall	Rest	Små
9	63	2	X
8	56	9	3
7	49	16	X
6	42	23	X
5	35	30	10
4	28	37	X
3	21	44	X
2	14	51	17

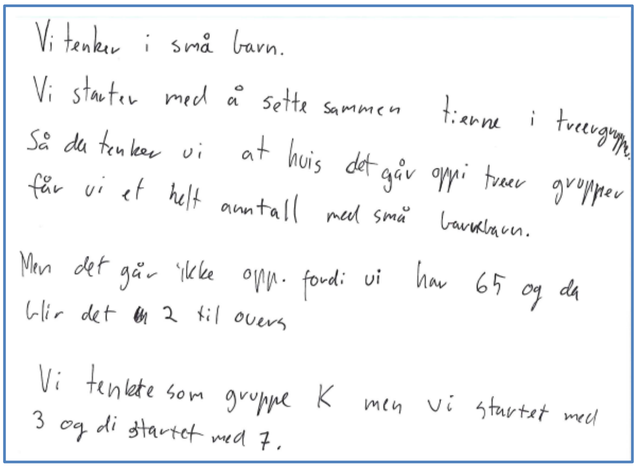
Disse elevene la merke til et **mønster** som gir en forklaring på at det bare er tre mulige løsninger: For hver løsning som går opp, er det to som ikke går opp. Den neste løsningen ville være med to minus tre store barnebarn. Det blir minus et stort barnebarn, og det går ikke.

Oppsummering

Under oppsummeringen fortalte først hver gruppe hvordan de hadde arbeidet, og læreren konkluderte med at elevene hadde brukt to viktige måter å arbeide på. De hadde alle startet med strategien som blir kalt «Gjett, sjekk og juster». Men i tillegg hadde de også gjort en systematisk utforsking, enten med brikkene eller ved å lage en tabell.

Ei elevgruppe kunne forklare matematikken bak omgrupperingene: siden $3 \cdot 7$ er det samme som $7 \cdot 3$ kan vi enten lage tre 7-ere eller sju 3-ere med 21 brikker. Med utgangspunkt i tabellen kunne denne elevgruppen begrunne at det kun var disse tre mulige kombinasjonene av store og små barnebarn. Arbeidet ble avsluttet med at elevene skrev en forklaring på hvordan de hadde arbeidet med problemet. Figurene viser refleksjonene fra to av gruppene.





Arbeide baklengs

Mange problem er slik at man kan arbeider seg fram gjennom informasjonen som gis fra begynnelse til slutt i oppgaven. I noen problem vil utgangspunktet være ukjent. Da kan man skifte fokus, starte med informasjonen som er kjent, og den står kanskje i slutten av teksten.

Mortens klinkekuler

Prosessmål: Arbeide baklengs
Matematisk mål: Se sammenheng mellom motsatte regnearter

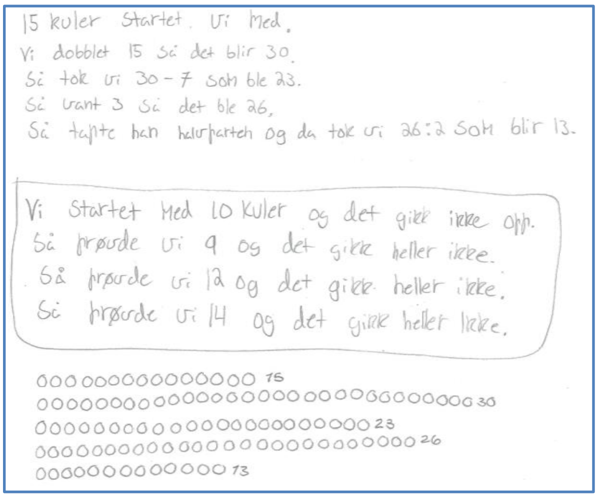
Morten og vennene spilte med klinkekuler i friminuttene.
Han hadde klinkekulene sine i en boks.
I første friminutt vant Morten så mye at han doblet antall klinkekuler.
I andre friminutt gikk det ikke så bra. Da tapte han 7 klinkekuler.
I tredje friminutt var han heldig og vant 3 klinkekuler.
I fjerde friminutt var han skikkelig uheldig og tapte halvdelen av kulene!
Da hadde han 13 klinkekuler igjen i boksen.
Hvor mange klinkekuler hadde Morten til å begynne med?

Oppstart

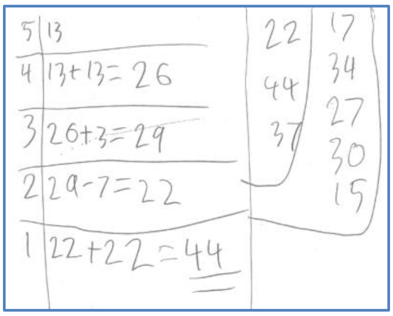
Problemet ble presentert på samme måte som *Bestefars tiere*: Først muntlig, og så skriftlig. På spørsmål om hvordan gruppene ville starte arbeidet med problemet foreslo noen grupper at de kunne prøve noen forskjellige tall. Andre grupper mente de kunne starte med de 13 kulene og arbeide videre ut fra dem. Gruppene fikk også her tilbud om å bruke plastbrikker om de mente det ville være en fordel.

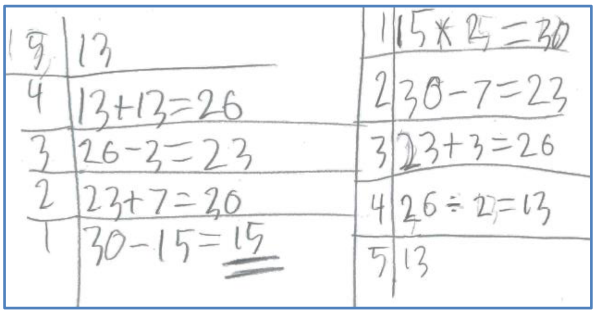
Gruppearbeid

Eksempelet fra ei gruppe som brukte strategien Gjett og sjekk viser at det kan ta tid å arbeide slik, og at det er en strategi som kan være tidskrevende på denne type problem.

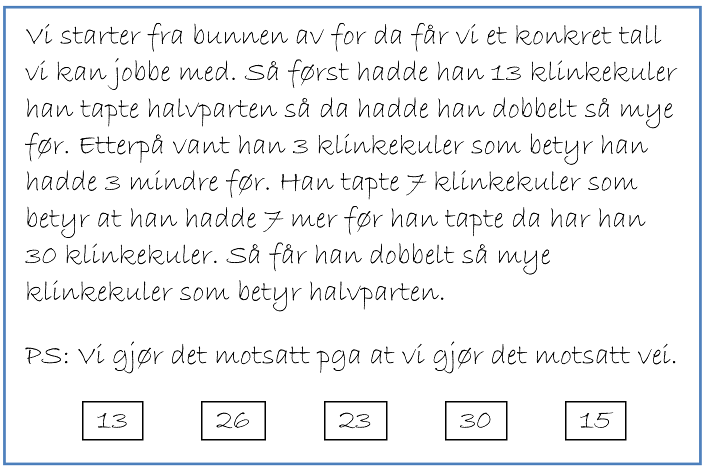


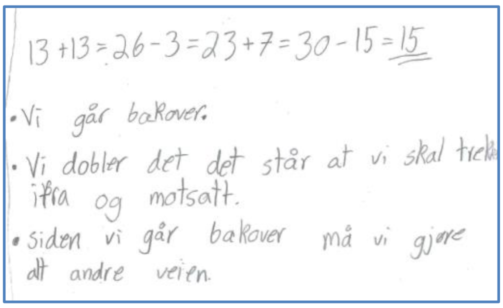
Ei av gruppene som arbeidet baklengs viser tydelig hvordan de har tenkt og hvordan de har kontrollert resultatet. De erfarte at de hadde gjort noe feil på første forsøk og måtte tenke grundigere gjennom metoden de hadde benyttet:





Flere av gruppene forklarte hvorfor de brukte motsatte regnearter.





13 Klinkekuler	Vi regner bakover!
13 + 13 = 26 26 - 3 = 23 23 + 7 = 30 30 : 2 = 15	Han har jo 13 klinkekuler igjen i boksen. Så vi regner bakover og vi starter med 13 + 13 siden han tapte halvparten av kulene. Og 13 + 13 = 26 så da har vi plussa på halvdelen. Så forrige friminutt vinner han 3 kuler, så da må vi ta 26 - 3 (26 - 3 = 23) siden vi går bakover. Og så taper han 7 kuler og da må vi ta pluss 7 kuler. Det blir da 23 + 7 kuler. Det blir da 23 + 7 = 30 og da må vi ta å dele 30 : 2 siden han doblet kulene i begynnelsen og da blir det 15 kuler.

Oppsummering

Under oppsummeringen får først ei gruppe som har benyttet strategien Gjett og sjekk presentere sitt arbeid. Klassen hadde arbeidet med Bestefars tiere tidligere og da benyttet denne strategien.

Gruppe 1 forteller hvordan de har prøvd seg fram med ulike tall for å finne et som passer.
Lærer: Hva kan vi kalle den metoden dere har brukt for å løse problemet?
Elev 1: Tallsøking.
Lærer: Tallsøking - søker etter det riktige tallet? … Ja, er det noen som har løst problemet på samme måte som de har gjort det? (Peker på gruppa som står framme).
Ei gruppe bekrefter.
Lærer: Det har dere gjort. Måtte dere også prøve med mange tall før dere traff …
Elev 2: Vi prøvde med non tall før vi fant ut det.
Lærer: Dere måtte prøve med noen tall før dere fant ut at det var 15?
Elev 2: Ja
Lærer: Vi pleier kalle den strategien for Gjett og sjekk. Vi gjetter bare noe, og så blir det kanskje feil. Vi gjetter noe nytt og så blir det også feil. Vi gjetter noe nytt, og til slutt så gjetter vi noe som blir riktig.

Ei av gruppene som hadde arbeidet baklengs forklarte strategien sin slik:

Vi starta ca på samme måte som di forrigan. Vi starta med 13 og så doblet vi det fordi det var … fordi han hadde mistet halvparten, og da ble det 26. Men så fortsatte vi å tenke at det som er pluss, det som han fikk, det måtte vi trekke fra. Så trakk vi fra 3 så fikk vi 23. Så stod det at han mistet, så plusset vi på det, det ble 7 til så ble det 30. Så måtte vi bare halvere det, for han hadde doblet.

Lærer: Du måtte gjøre motsatt sa du?

En annen elev i gruppa overtar:

Ja, fordi at – ikke sant – vi tar jo bakover i tid. Og så hvis han får noka – for eksempel hvis æ får noka – så er det … vi skal finne ut kordan det var før den personen fikk det, eller før den personen mista det. Derfor må vi plusse på det som den personen mista og trekke fra det som han fikk.

Lærer: Denne strategien kalle vi «Arbeid baklengs».

Forenkle problemet

Noen problem kan være så omfattende at det ser uoverkommelig ut å starte på det. Da kan strategien forenkle problemet være til hjelp. Man løser en enklere utgave av samme problem og ser om det er et mønster som kan hjelpe oss videre.

Elevskapene

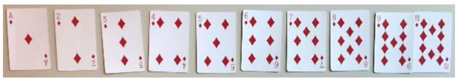
Prosessmål: Forenkle problemet
Matematisk mål: Finne et mønster i hvilke skap som er åpne

100 elevskap var lukket, men ikke låst. 100 elever gikk forbi skapene.
Den første eleven åpnet alle skapene.
Den andre eleven lukket skap nummer 2, 4, 6, 8, osv.
Den tredje eleven gikk til skap nummer 3, 6, 9, 12 osv.
Han lukket de som var åpne og åpnet de som var lukket.
Den fjerde eleven gjorde det samme med skap nummer 4, 8, 12, 16 osv.
Slik fortsatte den femte og sjette eleven og så videre til alle de 100 elevene hadde åpnet og lukket skap etter samme system.

Hvilke skap var åpne etter at alle de 100 elevene hadde gått forbi?

En elevgruppe brukte vanlige spillkort for å representere åpne og lukkede dører.

De startet med 50 kort, men fant fort ut at det var for mange kort. Det ble rot i arbeidet med å åpne og lukke, så de mistet oversikten. Da læreren anbefalte dem å redusere antallet til 10 kort ble det mer system i arbeidet:


Etter at elev 1 har passert er alle dørene åpne.

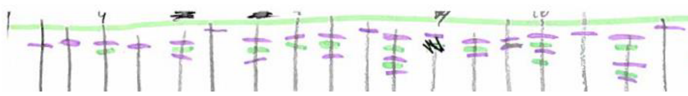

Etter at elev 2 har passert er hver andre dør åpen.

………


Etter at elev 10 har passert er dør 1, 4 og 9 åpne.

Etter å ha utvidet til 25 skap kunne elevene lage en oversikt:

En annen gruppe brukte grønn farge for å markere åpent skap og lilla for lukket skap:


Skap 1, 4, 9 og 16 har grønn strek nederst. De skapene vil være åpne.

Elevene i klassen identifiserte to mønstre i hvilke skap som var åpne: Summer av oddetall, **1**, 1 + 3 = **4**, 1 + 3 + 5 = **9** osv., og det ledet til kvadrattallene som gir full oversikt på problemet.

Lærerens rolle

Det er lett å undervurdere betydningen lærerens opptreden har for å etablere et miljø for matematisk problemløsing i en klasse. I tillegg til at læreren legger vekt på eksplisitt undervisning når elevene skal lære nye problemløsingsstrategier, bør problemløsing utgjøre en sentral del av matematikkundervisningen. (NRICH Primary Team and Jenny Earl). I tillegg til de åtte aspektene ved kommunikasjon som er nevnt innledningsvis, er det verd å tenke over fem andre momenter knyttet til implementering av problemløsingsoppgaver (NCTM, 2014). Det er lærerens oppgave

- å motivere elevenes matematikklæring ved å gi dem mulighet til å utforske og løse problemer som bygger på og utvider den matematikkforståelsen de allerede har
- å velge problem som gir elevene mulighet til å velge flere ulike strategier, verktøy og representasjoner
- å prioritere kognitivt krevende oppgaver fremfor rutineoppgaver
- å støtte elevene som utforsker en problemstilling uten å ta over elevenes tenking
- å oppfordre elevene til bruke ulike tilnærminger og strategier for å forstå og løse oppgavene

Oppgavene i eksemplene over er utformet med tanke på at målet for timen primært er å løfte fram en problemløsingsstrategi. Etter hvert som elevene behersker flere problemløsingsstrategier, bør de matematiske ideene i oppgaven være målet. Oppgaver med lav inngangsterskel og stor takhøyde (LIST-oppgaver) er da særlig egnet til bruk i hel klasse. Slike oppgaver er enkle å komme i gang med samtidig som de bærer i seg muligheter til utvidelser som leder til interessante matematiske sammenhenger. Iskremoppgaven er uformet slik at den åpner opp for flere mulige tolkninger enn de to som er nevnt:

Du skal kjøpe kuleis og kan velge mellom fire smaker.
Du vil kjøpe en is med to kuler.
På hvor mange måter kan du sette sammen
den isen du vil kjøpe?

Spørsmålene som automatisk reiser seg gir mulighet for å utforske problemet i flere retninger: Kan det være to kuler med samme smak? Har rekkefølgen på smakene noen betydning? Det kan være et godt utgangspunkt for drøfting av sentrale begrep knyttet til kombinatorikk: Utvalg med og uten tilbakelegging. Ordnet og uordnet utvalg.

Der problemløsing er en sentral del av matematikkundervisningen vil matematiske problem både være en inngang til å lære ny matematikk og til å utvide og trenge dypere inn i temaer elevene allerede har en viss innsikt i.

Referanser

Amit M., Portnov-Naaman Y. (2017). *"Explisit Teaching" as an Effective Method of Acquiring Problem Solving Strategies –The Case of "Working Backwards".* https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0392.pdf

Boaler, J. *Recommendations for Task/Lesson Design*. Lastet fra www.youcubed.com oktober 2017

Johnson, K., Herr, T., Kysh, J. (2004). *Crossing the River with Dogs. Problem Solving for College Students*. Emeryville, CA: Key College Publishing.

KD (2019). *Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Kongelf, T. R. (2011). *What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway*? NOMAD 16(4), s 5-44.

Leer, L. G. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsing*. Masteroppgave NTNU.

NCTM (2014). *Principles to Actions. Ensuring Mathematical Success for All*.

NRICH Primary Team and Jenny Earl. *The Problem-solving Classroom*. Lastet 10.1.17 fra http://nrich.maths.org/

Pennant, J. (2013). *Developing a Classroom Culture That Supports a Problem-solving Approach to Mathematics*. Lastet 13.2.17 fra http://nrich.maths.org/

Singh, S. (2004). *Fermats siste sats*. Oslo: Aschehoug.

Svorkmo, A-G. (2007). *Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer I matematikkundervisningen*. Masteroppgave NTNU.

University of Cambridge. https://wild.maths.org/andrew-wiles-and-fermats-last-theorem

Van Galen, F. m. fl. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: SensePublishers.

The Singapore Maths Teacher: http://thesingaporemaths.com/index.html