

## LAB #8

### Soluzione dell'equazione del calore monodimensionale transitoria e studio di convergenza nel tempo.

- 1) In Si consideri una barra cilindrica di lunghezza  $L = 10$  cm e con diffusività  $\alpha = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ , isolata lateralmente, in cui il calore si propaga solo per conduzione nella direzione  $x$  (assiale), senza alcuna generazione di calore. La distribuzione di temperatura iniziale è  $T(x, 0) = T_0 + 50 \sin(\pi x/L)$  (il dominio è assunto da 0 a  $L$ ), mentre i bordi sono mantenuti ad una temperatura costante  $T_0 = 300 \text{ K}$ . Calcolare numericamente l'evoluzione della distribuzione di temperatura  $T(x, t)$  della barra fino al tempo  $t_{\text{end}} = 100 \text{ s}$ .

a) Usare il metodo delle differenze finite con lo schema temporale *implicito* di Eulero all'indietro con  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$  e  $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$ , e confrontare la soluzione calcolata con quella analitica

$$T_a(x, t) = T_0 + 50 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \alpha t}$$

a diversi istanti di tempo ( $t = 20 \text{ s}, 40 \text{ s}, 60 \text{ s}, 80 \text{ s}, 100 \text{ s}$ ) in Figura #1.

b) Verificare la **convergenza nel tempo** dell'algoritmo (fissare  $\Delta x$  a 0.01 m e/o a 0.005 m e variare il  $\Delta t$  su diversi ordini di grandezza) calcolando l'errore relativo al tempo  $t_{\text{end}}$ .

c) Verificare la **convergenza nello spazio** dell'algoritmo (fissare  $\Delta t$  a 0.1 s e/o a 0.05 s e variare il  $\Delta x$  su diversi ordini di grandezza) calcolando l'errore relativo al tempo  $t_{\text{end}}$ .

d) Calcolare nuovamente la distribuzione di temperatura nella barretta utilizzando le differenze finite con uno schema temporale *esplicito*. Confrontare le soluzioni ottenute a  $t = 100 \text{ s}$  con  $\Delta x = 0.5 \text{ cm}$  e  $\Delta t = 1.0 \text{ s}, 1.25 \text{ s}$  e  $2 \text{ s}$  in Figura #4. Cosa succede alla soluzione se il  $\Delta t$  aumenta? Perché?

e) Verificare che se  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$  simultaneamente, l'errore tende a zero.

f) Confrontare lo schema implicito ed esplicito dal punto di vista del tempo di calcolo, prima utilizzando lo stesso  $\Delta t$  uguale al massimo ammesso per il FE fissando  $\Delta x = 0.005 \text{ m}$ .

g) Valutare l'evoluzione della temperatura nel tempo con il metodo di Crank-Nicolson e verificarne la convergenza temporale fissando il  $\Delta x = 0.001 \text{ m}$ .

- 2) (a casa) Una corrente elettrica pari a 50 A scorre in un conduttore elettrico (isolato lateralmente, con lunghezza  $L = 1 \text{ m}$ , resistività  $r = 1.75 \times 10^{-8} \Omega \times \text{m}$ , diffusività  $\alpha = 11 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , conducibilità  $k = 350 \text{ W}/(\text{m K})$ ), con diametro interno  $D = 4 \text{ mm}$ . Calcolare l'evoluzione di temperatura nel punto medio del conduttore, inizialmente ad una temperatura  $T(x, 0) = T_0 = 300 \text{ K}$ . L'estremo destro del conduttore è mantenuto ad una temperatura costante  $T_0$ , mentre la temperatura sul bordo sinistro è misurata da un sensore; le misure sono disponibili nel file Tleft.dat. Risolvere il problema numericamente utilizzando le differenze finite ed uno schema temporale implicito.

- 3) (a casa) Un filamento superconduttivo (diametro  $D = 0.81$  mm, lunghezza  $L = 1$  m, diffusività  $\alpha = 11\text{e-}5$  m<sup>2</sup>/s, conducibilità termica  $k = 350$  W/m/K), inizialmente a 4.5 K trasporta una corrente  $I = 50$  A. Il campo elettrico generato dalla corrente mentre il filamento è superconduttivo è  $E = E_0 (I/I_C)^n$ , dove  $E_0 = 1\text{e-}5$  V/m e  $n = 1.2$ .  $I_C$  è la corrente critica (ovvero la massima che può essere trasportata dal conduttore in stato superconduttivo) e diminuisce con l'aumentare della temperatura:  $I_C = 50 - T^2$ . Le estremità sono mantenute a 4.5 K. Calcolare numericamente l'aumento di temperatura fino al tempo 15000 s utilizzando il metodo di Eulero all'indietro. Riportare in un grafico l'evoluzione nel tempo della potenza volumetrica e della temperatura valutate nel punto medio del filamento.
- 4) (a casa) Una corrente elettrica pari a 10 A scorre in un cilindro cavo (diametro interno  $D_{\text{in}} = 2$  mm, diametro esterno  $D_{\text{out}} = 4$  mm, resistività  $r = 2.5 \times 10^{-7}$   $\Omega \times \text{m}$ , diffusività  $\alpha = 11 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s, conducibilità  $k = 3.5$  W/(m K)), di lunghezza molto maggiore della dimensione trasversale. Il conduttore è isolato sulla superficie esterna, mentre nella parte interna contiene un fluido ad una temperatura costante  $T_0 = 300$  K, che è anche la temperatura iniziale del cilindro (coefficiente di scambio termico con il fluido  $h = 100$  W/(m<sup>2</sup> K)) (Figura 1).

Risolvere numericamente il problema transitorio finché la differenza di temperatura relativa tra due passi successivi di tempo sia al più  $1\text{E-}05$ .

Calcolare il profilo di temperatura nella sezione trasversale del conduttore e plottarlo a diversi istanti di tempo.

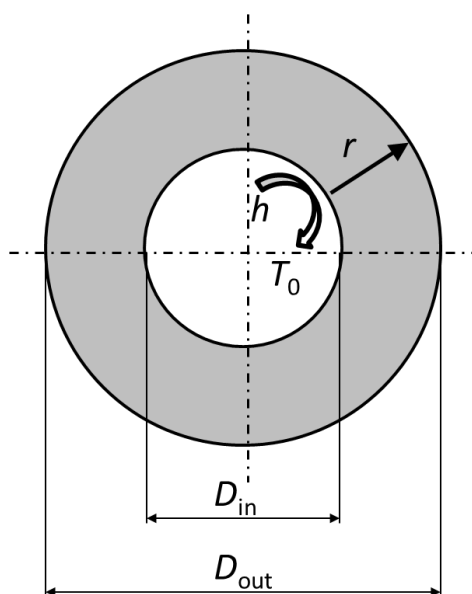


Figura 1

- 5) (a casa) Delle sfere di acciaio di diametro 12 mm (conducibilità = 40 W/m/K, densità = 7800 kg/m<sup>3</sup>, e calore specifico = 600 J/kg/K) vengono tembrate scaldandole molto rapidamente a 1150 K e poi raffreddandole lentamente fino alla temperatura finale di 400K in un ambiente con aria, la cui temperatura  $T_{aria}$  aumenta nel tempo:  $T_{aria} = 325 \text{ K} + 0.1875 \text{ K/s} \times t$ , dove  $t$  è il tempo dall'inizio del processo di raffreddamento. Calcolare numericamente con lo schema di Eulero implicito l'evoluzione nel tempo della temperatura delle sferette, supponendo che il coefficiente di scambio termico sia pari a 20 W/m<sup>2</sup>K e che tutta la superficie esterna delle sfere sia in contatto con l'aria. Svolgere **un'analisi monodimensionale**, per mostrare l'evoluzione nel tempo della temperatura media delle sfere e per determinare dopo quanto tempo essa diventa uguale a quella dell'aria. Verificare il risultato ottenuto utilizzando lo schema di Eulero in avanti. Infine, confrontare i risultati ottenuti, **con l'analisi 0-dimensionale** svolta nell'esercizio 4 del Lab #7.

## VECCHI TEMI D'ESAME

31 Gennaio 2020

Al fine di studiare un processo industriale innovativo, si costruisce e si prova in un forno a induzione un oggetto solido di materiale omogeneo e di forma cilindrica, come mostrato in Figura 2. Il cilindro è, in prima approssimazione, refrigerato su tutte le superfici con un gas inerte, che si trova a una temperatura costante di 20 °C con un coefficiente di scambio termico pari a 10 W/(m<sup>2</sup> K) (si trascuri il sistema di ancoraggio).

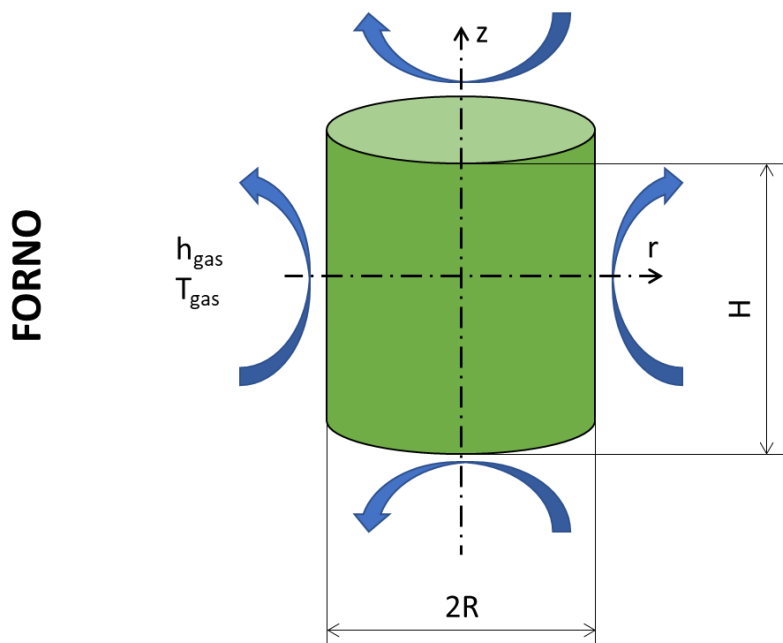


Figura 2

Durante il funzionamento nominale, il riscaldamento induttivo deposita una potenza totale di ~10 kW, distribuita secondo la funzione

$$q'''(r, z) = A \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \cos \left( \frac{\pi}{H} z \right) \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right], \quad (1)$$

dove  $r$  è la coordinata radiale,  $z$  è la coordinata assiale con origine nel punto medio dell'asse del cilindro, la costante  $A$  vale  $23 \text{ kW/m}^3$ ,  $R$  è il raggio (60 cm) e  $H$  è l'altezza del cilindro (120 cm).

Si vuole studiare la distribuzione stazionaria di temperatura nel cilindro. A questo scopo, si produca una relazione dettagliata e completa che includa:

- La distribuzione della temperatura calcolata con due modelli 1D (assiale e radiale, rispettivamente).
- Lo studio di convergenza, con la verifica dell'ordine di convergenza, per uno dei casi 1D trattati nel punto c. a scelta.

Proprietà materiali	
Conducibilità termica $k$ [W/(m K)]	7
Densità $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1600
Calore specifico $c$ [J/(kg K)]	2400

**21 Luglio 2011**

In una lavastoviglie, la parte superiore (60 cm x 60 cm) è composta da due strati (acciaio inossidabile e isolamento acustico) come mostrato nella Figura 3.

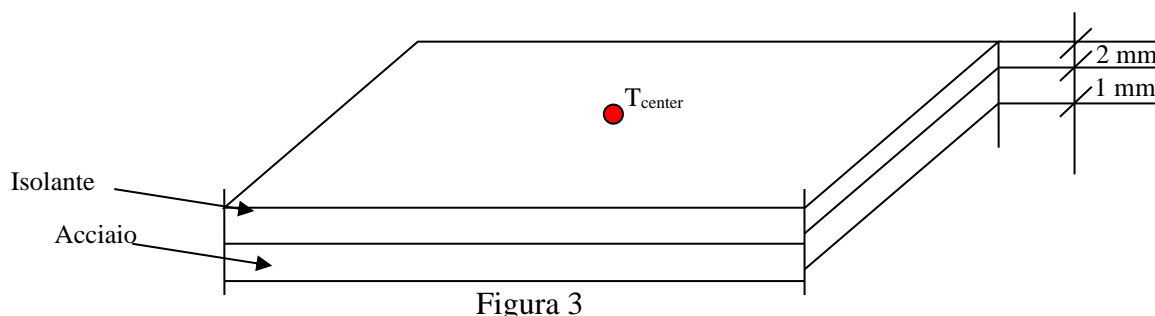


Figura 3

Durante il ciclo di lavaggio la superficie inferiore della parete multistrato, inizialmente a  $20^\circ\text{C}$ , è soggetta all'evoluzione di temperature riportata nella Figura 4, mentre la parte superiore è raffreddata con aria a  $20^\circ\text{C}$  con un coefficiente di scambio termico di  $15 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

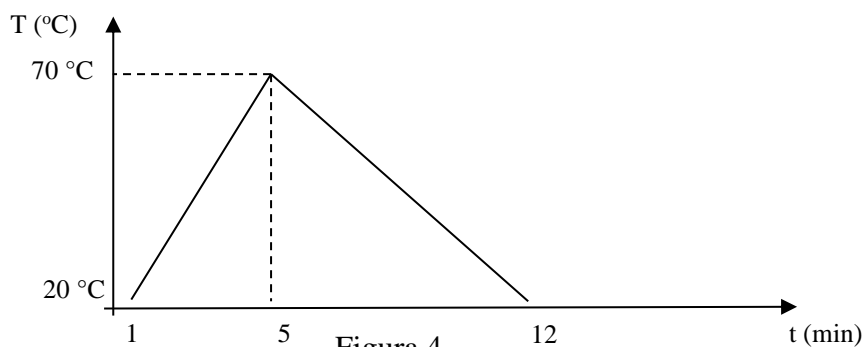


Figura 4

a) Valutare e rappresentare l'evoluzione della temperatura al centro della parete sulla superficie esterna e all'interfaccia tra l'acciaio e l'isolante. Salvare lo script in un file chiamato **ES1\_nome.estensione** e salvare il plot (contenente tutte le curve nella stessa figura) in un file chiamato **ES1\_cognome\_plot.estensione**

b) Mostrare la convergenza nello spazio del proprio algoritmo in un plot chiamato **ES1\_cognome\_convergenza**.

Le proprietà dei materiali da usare sono:

- Acciaio: densità=7800 kg/m<sup>3</sup>, conducibilità = 15 W/mK,  $c_p$  = 500 J/kgK
- isolante: densità = 2000 kg/m<sup>3</sup>, conducibilità = 1 W/mK,  $c_p$  = 1000 J/kgK

### 14 febbraio 2020 (testo completo)

Per dimenticare i pessimi risultati dei propri studenti, un gruppo di dottorandi di un noto Ateneo del nordovest decide di concludere la giornata lavorativa bevendo una bottiglia di vodka. La bottiglia viene estratta da un pozzetto congelatore, in cui stava alla temperatura di -20 °C. Nonostante a quella temperatura la bevanda si trovi già nello stato di aggregazione liquido, per evitare il rischio di congestione vista la giornata afosa, la bottiglia viene posta fuori dalla finestra perché la sua temperatura salga al valore ottimale  $T_{\text{drink}} = 5$  °C (si assuma una temperatura dell'aria esterna costante e pari a 30 °C, ed un coefficiente di scambio convettivo pari a 10 W/m<sup>2</sup>/K). La bottiglia, trascurando la base ed il tappo (che possono essere assunti adiabatici), può essere approssimata con un cilindro, le cui dimensioni sono riportate in Figura 5.

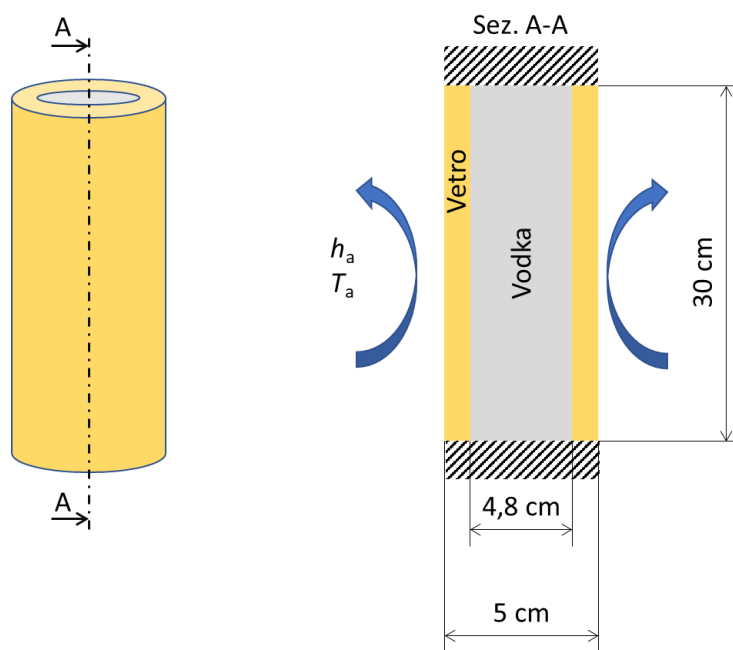


Figura 5: Schema dell'approssimazione suggerita.

Si vuole determinare il tempo  $t_{\text{drink}}$  necessario a raggiungere la temperatura desiderata. A tale scopo (assumendo la vodka come stagnante, e quindi come mezzo puramente conduttivo), si produca una relazione dettagliata e completa che includa:

1. Una prima valutazione di:
  - a.  $t_{\text{drink}}$ , fatta attraverso un opportuno modello 0D nello spazio e che utilizzi uno schema di avanzamento in tempo implicito: si produca un grafico con l'evoluzione della temperatura nel tempo;
  - b. potenza assorbita dal sistema durante il transitorio;
  - c. energia complessivamente assorbita nel transitorio perché la bevanda arrivi a  $T_{\text{drink}}$ .

2. Una valutazione più accurata di
  - a.  $t_{\text{drink}}$ , fatta attraverso una opportuna modellazione 1D nello spazio, che sia il più possibile rappresentativa del comportamento del sistema (si giustifichino le ipotesi che vengono fatte): si produca un grafico con l'evoluzione della temperatura delle temperature minima, media e massima della vodka nel tempo;
  - b. potenza assorbita dal sistema durante il transitorio;
  - c. energia complessivamente assorbita nel transitorio fino a  $t_{\text{drink}}$ .
3. Un confronto dei risultati ottenuti con i due modelli dei punti 1 e 2
4. Uno studio di convergenza temporale per lo schema numerico implementato nel punto 1, con la verifica dell'ordine di convergenza.

Le proprietà termofisiche di vodka e vetro sono riportate in Tab. 1.

Tab. 1: Proprietà termofisiche.

<b>Proprietà materiali</b>	<b>Vodka</b>	<b>Vetro</b>
Conducibilità termica $k$ [W/(m K)]	0.67	3.2
Densità $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	897	4310
Calore specifico $c$ [J/(kg K)]	$c_{vo}(T)$	310

$$c_{vo}(T) = 3700 + 0.2T$$

(Nell'espressione sopra  $T$  è assunta in gradi Celsius)

NB: se dovesse essere necessario calcolare  $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ , l'integrale può essere ottenuto numericamente su MATLAB con l'istruzione `trapz(x, f(x))`.