LAB #7

Soluzione di equazioni differenziali ordinarie

1) La parte meccanica rappresentata in Fig. 1, a 450 °C, subisce un trattamento termico di tempra mediante immersione in un grande volume di acqua a T_w = 15 °C. Il coefficiente di scambio termico h fra l'oggetto e il fluido è costante e uguale a 100 W/m^2/K. Una parte della superficie dell'oggetto è coperta da un sottile strato di acciaio inossidabile, mentre il resto dell'oggetto è composto di alluminio.
Si calcoli l'evoluzione della temperatura media dell'oggetto $T_{ave}(t)$, considerandolo come un oggetto 0D descritto dalla seguente equazione:

$$V\rho c\frac{dT_{\mathrm{ave}}}{dt} = hA(T_{\mathrm{w}} - T_{\mathrm{ave}})$$

dove V è il volume dell'oggetto, ρ la sua densità, c il calore specifico, A la superficie di scambio termico e t il tempo. Nello specifico:

- Si implementi uno schema numerico adatto alla soluzione della ODE (giustificando la propria scelta);
- Si rappresenti l'evoluzione temporale della temperatura media $T_{ave}(t)$ (Si fermi la simulazione quando viene raggiunto l'equilibrio (con una tolleranza $\leq 10^{-4}$).
- Si compari la simulazione numerica con la soluzione analitica del problema.

Proprietà materiali	**Alluminio**	**Acciaio inox AISI 347**	**Acqua**
Conduttività termica k (W/m/K)	237	14.2	0.6
Densità ρ (kg/m^3)	2700	7978	1000
Calore specifico c (J/kg/K)	897	480	4186

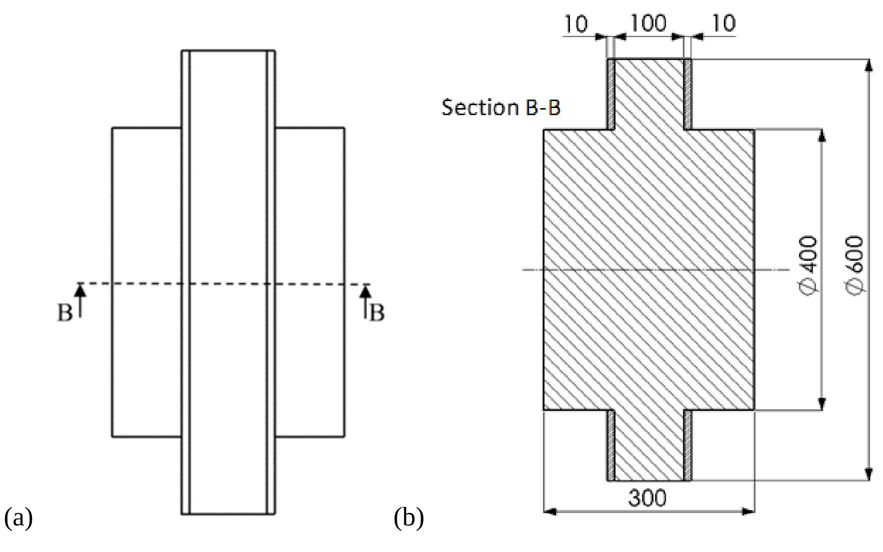

Fig. 1: Schizzo della parte meccanica in esame: vista superiore (a) vista laterale (b) e vista laterale della sezione trasversale, rispettivamente. Tutte le quote sono in millimetri.

2) In un processo industriale, una barra di titanio (Ti) con una sezione trasversale circolare (diametro d = 10 cm, lunghezza L = 20 cm) è riscaldata ad una temperatura uniforme pari a $T_{Ti,0}$ = 600 °C e poi è improvvisamente raffreddata fino a temperature ambiente in un bagno contenente 5 litri di olio, inizialmente a $T_{oil,0}$ = 15 °C. Il coefficiente di scambio termico fra la superficie della barra e l'olio è costante e pari a 100 W/m^2/K.

- Si calcoli l'evoluzione della temperatura media dell'olio $T_{oil,ave}(t)$ e la temperatura media della barra $T_{Ti,ave}(t)$, considerandoli entrambi come oggetti puntiformi (0D), fino al raggiungimento dell'equilibrio termico, considerando il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} V_{oil}\rho_{oil}c_{oil}\dfrac{dT_{oil,ave}}{dt} = Q_{Ti\rightarrow oil} \\ V_{Ti}\rho_{Ti}c_{Ti}\dfrac{dT_{Ti,ave}}{dt} = Q_{oil\rightarrow Ti} \end{cases}$$

Dove V è il volume, ρ è la densità, c è il calore specifico, T è la temperatura, t è il tempo, *oil* e *Ti* sono indici riferiti all'olio e alla barra, rispettivamente, Q è il flusso termico trasferito dall'olio al Ti (oil→Ti) o viceversa. Nello specifico:

- Si implementi uno schema numerico adatto alla soluzione del Sistema lineare di Equazioni Differenziali Ordinarie (giustificando la vostra scelta)
- Si rappresenti sullo stesso grafico l'evoluzione delle due temperature $T_{oil,ave}(t)$ e $T_{Ti,ave}(t)$, salvandole in un file in cui la prima colonna riporta il tempo t, la seconda la variabile $T_{oil,ave}(t)$ e la terza la variabile $T_{Ti,ave}(t)$.
- Si rappresenti anche l'evoluzione del calore scambiato dalla barra all'olio.

Proprietà materiali	**Ti**	**oil**
Conduttività k (W/m/K)	21.9	0.1
ρ (kg/m^3)	4500	900
c_p (J/kg/K)	520	7200

- Si risolva di nuovo l'esercizio considerando la capacità termica dell'acciaio inossidabile (SS) dipendente dalla temperatura secondo la seguente legge, confrontando i risultati con quelli ottenuti nel caso di proprietà costanti (**T è sempre espressa in K**):

$$c_{p,oil}(T) = 7200 + \left(\frac{\mathrm{T}}{273}\right)^{1.2}$$

and

$$c_{Ti}(T) = \frac{AT}{(a+T)^{n_a}} + \frac{BT^2}{(b+T)^{n_b}} + \frac{CT^3}{(c+T)^{n_c}} + \frac{DT^4}{(d+T)^{n_d}}$$

A	-468.77
B	-81.24
C	827.20
D	29.98

a	422.11
b	1235598
c	51.27
d	0.44

n_a	0.57
n_b	2
n_c	2.79
n_d	3.26

3) **(A CASA)** Sistemi per l'accumulo di energia termica spesso coinvolgono letti di sferette solide (packed beds) attraverso cui viene fatto passare un gas caldo nella fase di "carica" e un gas freddo nella fase di "scarica". Nel processo di carica (in Fig. 2), lo scambio termico dal gas caldo aumenta l'energia termica immagazzinata nelle sfere, che si trovano a temperatura inferiore; durante la fase di scarica, l'energia termica immagazzinata diminuisce perché viene trasferita dalle sfere calde al gas più freddo.

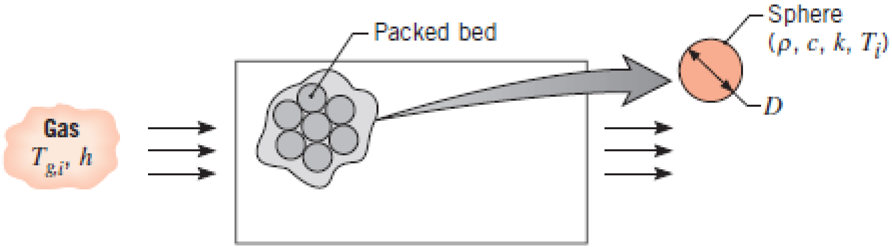

Fig. 2: Schema di funzionamento dell'accumulatore con letto di sfere [tratto dal libro di F.Incropera et al, "Introduction to heat transfer", 6th edition, Wiley]

Si consideri un letto formato da sfere di alluminio da 75 mm di diametro (densità pari a 2700 kg/m3, calore specifico di 950 J/kg/K, conducibilità di 240 W/m/K) e un processo di carica nel quale il gas entra nell'unità di accumulo a una temperatura Tg,i = 300°C. Se la temperatura iniziale delle sfere è Ti = 25°C e il coefficiente di scambio termico h pari a 75 W/m^{2}K, determinare numericamente, dopo aver verificato che il problema possa essere trattato con un modello a parametri concentrati, quanto tempo impiega il sistema ad accumulare il 90% della massima energia termica accumulabile. Verificare il risultato confrontandolo con la soluzione analitica.
Valutare infine se e quale sarebbe il risparmio di tempo per accumulare la stessa quantità di energia se le sferette fossero di rame (densità pari a 8900 kg/m3, calore specifico di 400 J/kg/K) invece che di alluminio, pur avendo la stessa dimensione.

4) **(A CASA)** Delle sfere di acciaio di diametro 12 mm (conducibilità = 40 W/m/K, densità = 7800 kg/m3, e calore specifico = 600 J/kg/K) vengono temprate scaldandole molto rapidamente a 1150 K e poi raffreddandole lentamente fino alla temperatura finale di 400K in un ambiente con aria, la cui temperatura T_{aria} aumenta nel tempo: T_{aria} = 325 K + 0.1875 K/s × t, dove t è il tempo dall'inizio del processo di raffreddamento. Calcolare numericamente con lo schema di Eulero implicito l'evoluzione nel tempo della temperatura delle sferette, supponendo che il coefficiente di scambio termico sia pari a 20 W/m2K e che tutta la superficie esterna delle sfere sia in contatto con l'aria. Dopo aver fatto il grafico dell'evoluzione nel tempo della temperatura delle sfere, determinare dopo quanto tempo essa diventa uguale a quella dell'aria. Verificare il risultato ottenuto utilizzando lo schema di Eulero in avanti.

5) **(A CASA)** Si scriva un codice MATLAB per risolvere il seguente problema,

$$\frac{dT}{dt} = sin(t) + T, \quad t \in (0,1], \qquad \text{con } T(0) = 0$$

usando:

a. Il metodo di Eulero esplicito (Eulero in avanti)
b. Il metodo di Eulero implicito (Eulero all'indietro)
c. Il metodo di Crank-Nicolson.

Si implementino i vari metodi in funzioni separate.
Si rappresenti la soluzione e si compare l'andamento della velocità di convergenza per i vari metodi rispetto alla soluzione analitica usando una discretizzazione temporale di 10^{-1} s, 10^{-2} s e 10^{-3} s.

Si risolva poi lo stesso problema sfruttando **le funzioni pre-definite di MATLAB *ode23* e *ode45***, e si confrontino le soluzioni con quelle dei metodi dei punti a-c.

6) **(A CASA)** Si implementi un codice MATLAB che risolva il seguente sistema lineare di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{4}{3} \cdot (y-3) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{4} \cdot (x-2) \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = 2$, $y(0) = 6$, nell'intervallo $0<t<2\pi$.

a. Verificare (manualmente) che l'ellisse dato dall'equazione $\left(\dfrac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y-3}{3}\right)^2 = 1$ risolva l'insieme di equazioni proposto.
b. Rappresentare la traiettoria descritta dal sistema sul piano (x, y).
c. Risolvere il problema usato il metodo di Eulero all'indietro (implementato negli esercizi precedenti), poi rappresentare graficamente i risultati ottenuti con passi temporali differenti.
d. Risolvere il problema con una funzione predefinita di MATLAB e confrontarla con la soluzione valutata al punto c.

7) **(A CASA)** Nel modello Lotka-Volterra (dinamica preda-predatore), si assume la presenza di una popolazione di animali (predator) che si ciba di un'altra popolazione di animali (prede):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot y \\ \dfrac{dy}{dt} = \gamma \cdot x \cdot y - \delta \cdot y \end{cases}$$

La funzione $x(t)$ denota il numero di lepri delle nevi (prede) mentre la funzione $y(t)$ il numero di linci (predatori) in vita al tempo t. Le lepri delle nevi sono vegetariane e si assume che il numero di lepri sia proporzionale (con rateo di nascita α) al numero di lepri viventi al tempo t. La probabilità di un incontro fatale fra una lince ed una lepre è proporzionale (con rateo di morte β) al prodotto fra il numero di linci ed il numero di lepri. Si assume anche che le linci non abbiano una specie in competizione e che il numero di morti sia proporzionale (con rateo di morte δ) al numero stesso di linci in vita. Inoltre si ipotizza che il numero di linci nate sia proporzionale (con rateo di nascita γ) al numero di linci stesso. Infine, si ipotizza che il numero di linci nate sia proporzionale al numero di lepri. Si considerino $\alpha = 1$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.02$, $\delta = 1$, $x_0 = 20$, $y_0 = 20$. Si risolva il problema usando il metodo di Eulero e una delle funzioni predefinite di MATLAB, e si comparino i risultati in un grafico.