LAB #6
Soluzione di equazioni non lineari

➢ Istruzioni utili:

- `X = fzero(FUN,X0)`, dove `X0` è uno scalare, cerca uno zero della funzione scalare `FUN` in prossimità di `X0`. Se la ricerca fallisce viene restituito `NaN`. Questa funzione utilizza il metodo di Dekker-Brent (non visto a lezione).
- `X = fsolve(FUN,X0)`, dove `X0` può essere scalare, vettore o matrice, cerca uno zero della funzione scalare, vettore o matrice `FUN` in prossimità di `X0`. Questa funzione utilizza il metodo "Trust-Region Dogleg" (richiede l'Optimization Toolbox).
- `OPTS = OPTIMSET('OPZIONE1',VALORE1,'OPZIONE2',VALORE2,…)` può essere utilizzato per impostare opzioni per la soluzione di equazioni non lineari: ad esempio, `'MaxIter'` imposta il numero massimo di iterazioni, `'TolFun'` imposta la tolleranza sul valore della funzione (ovvero il residuo), `'TolX'` imposta la tolleranza su `X` (vedasi `help optimset` per una lista delle opzioni disponibili). La variabile `OPTS` è una struttura da fornire come terzo argomento a `fzero` o `fsolve`, ad es. `X = fzero(FUN,X0,OPTS)`.
- `[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fzero(…)` restituisce il valore della funzione in `X` nella variabile `FVAL`, un flag che descrive la condizione di uscita in `EXITFLAG` ed una struttura `OUTPUT` con il numero di iterazioni in `OUTPUT.iterations`, più altre informazioni (vedasi `help fzero`); discorso analogo per `fsolve`.

1) L'equazione di stato di Van der Waals, scritta in forma implicita in funzione delle variabili termodinamiche indipendenti p e T, è:

$$\left[p + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) = kNT$$

dove N è il numero di molecole del gas nel volume V, T è la temperatura del gas, p è la pressione e k è la costante di Boltzmann ($k = 1.3806503\times10^{-23}$ J/K).
Per l'anidride carbonica (CO_2), i coefficienti a e b sono $a = 0.401$ Pa m^6 e $b = 42.7\times10^{-6}$ m^3.
Calcolare il volume V occupato dal gas, se $N = 1000$, $T = 300$ K e $p = 3.5 \times 10^7$ Pa. In particolare:

a. Risolvere il problema numericamente implementando il metodo di Newton in una funzione MATLAB dedicata, con una precisione di 10^{-12} (è possibile utilizzare sia le derivate analitiche sia quelle numeriche).
b. ***(A CASA)*** Risolvere il problema numericamente implementando il metodo di bisezione in una funzione MATLAB dedicata, con una precisione di 10^{-12}.
c. Confrontare il numero di iterazioni ed il tempo richiesto per arrivare a convergenza tra le funzioni di cui al punto a. e b. e la funzione MATLAB `fzero`.

2) La pompa disegnata in Fig. 1 genera un battente di 76 m di acqua. Determinare la velocità del fluido nelle tubazioni, considerando che i due bacini hanno tra loro un dislivello di 60 m.

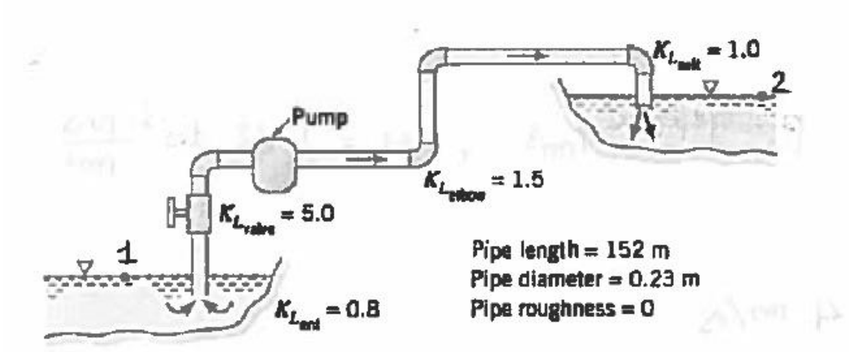

Figura 1

(Suggerimento: come si ricorderà dal corso di Termofluidodinamica, se si usa la correlazione di Haaland per un tubo liscio con deflusso turbolento, il problema richiede la soluzione del sistema di equazioni non lineari nelle incognite velocità v e fattore di attrito f:

$$\begin{cases} f = \left(0.79 \ln\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) - 1.64\right)^{-2} \\ \left(f \frac{l}{D} - \sum_i K_i\right) v^2 = 2 g h_L \end{cases}$$

Dove ρ è la densità dell'acqua (999 kg/m^3) e μ la sua viscosità (1.12×10^{-3} Pa×s), l è la lunghezza complessiva delle tubazioni e D il diametro, g è l'accelerazione di gravità, h_L è il battente di acqua che corrisponde alle perdite di carico totali e $\sum_i K_i$ è la somma dei diversi coefficienti di perdita localizzata, evidenziati in Fig. 1).

3) Una parete di spessore L_e = 1 m, che funziona come catalizzatore di reazioni chimiche, è raffreddata da CO_2 a T_{CO2} = 300 °C (coefficiente di scambio termico h = 50 W/m^2/K) su entrambe le superfici esterne. Una sorgente volumetrica di calore all'interno della parete segue il profilo spaziale:

$$q_v(z) = 8 \times 10^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L_e}\right) \qquad \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

La conducibilità termica della parete e':

$$k = \frac{100}{11.8 + 0.0238T} + 8.775 \times 10^{-11} \times T^3 \left[\frac{W}{mK}\right]$$

Calcolare il profilo di T a stazionario, utilizzando prima il metodo di Newton, poi la funzione MATLAB `fsolve` e infine il metodo delle iterazioni di punto fisso, prima con una formulazione che privilegi la semplicità alla accuratezza, e poi con una formulazione che privilegi l'accuratezza alla semplicità. Confrontare i risultati ottenuti.

4) ***(A CASA)*** Una barretta di combustibile in un reattore nucleare sperimentale (diametro D = 20 cm, lunghezza L = 1 m) è raffreddata da CO_2 a T_{CO2} = 300 °C (coefficiente di scambio termico h = 50 W/m^2/K) su tutte le superfici esterne (si veda la Fig. 2, l'origine degli assi di riferimento è posta al centro della barretta). La sorgente volumetrica di calore all'interno della barra segue il profilo spaziale

$$q_v(z) = q_{v,max} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad \left[\frac{W}{m^3}\right],$$

dove z è la coordinata assiale con origine al centro della barretta e $q_{v,max}$ = 80 kW/m^3 è la potenza volumetrica di picco.

Si considerino le seguenti proprietà termofisiche della barra di combustibile: densità ρ = 10 g/cm^3, c_p = 300 J/kg/K, conducibilità termica (dove T è la temperatura della barretta di combustibile in °C):

$$k = \frac{100}{11.8 + 0.0238T} + 8.775 \times 10^{-11} \times T^3 \quad \left[\frac{W}{mK}\right]$$

Ipotizzando che la barretta possa essere considerato un oggetto 1D lungo la direzione *z*, si risolva l'equazione della conduzione 1D sfruttando le differenze finite, rappresentando chiaramente in una figura la distribuzione di temperatura in condizioni stazionarie.
Si confronti la soluzione che si ottiene risolvendo il sistema di equazioni non lineari, risultante dalla discretizzazione spaziale, utilizzando:
- il metodo di Newton;
- le iterazioni di punto fisso, approssimando la conducibilità termica sulla riga i-esima del sistema di equazioni non lineari con k_i (nonostante si sappia che questa ricetta non conserva l'energia)
- le iterazioni di punto fisso, approssimando la conducibilità termica sulla riga i-esima del sistema di equazioni non lineari con una formulazione che conservi l'energia.
- la funzione MATLAB `fsolve`.

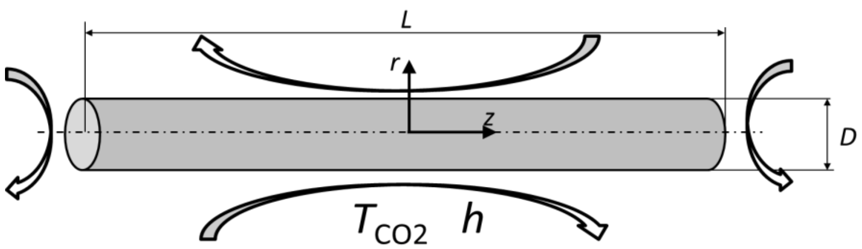

Figura 2

5) ***(A CASA)*** La prima parete di un reattore a fusione nucleare di tipo tokamak è sottoposta a enormi carichi termici provenienti dal plasma, e deve essere refrigerate utilizzando acqua a 70 °C. Si approssimi la prima parete come una lastra composta di Cu-Be (spessore 2 cm, conducibilità termica 400 W/(m K)), e la si consideri da un lato irraggiata da un plasma alla temperatura di 2000 K e dall'altro refrigerata dall'acqua, con un coefficiente di scambio termico tra l'acqua e la parete di ~10 kW/(m^2 K). Si calcoli il profilo di temperatura nella prima parete, valutando a stazionario il carico termico radiativo sulla parete e verificando che la superficie esposta al plasma non superi la temperatura limite di 550K.

6) ***(A CASA)*** In uno scambiatore di calore a tubi e mantello, elio gassoso viene utilizzato lato tubi per raffreddare una portata di acqua lato mantello. Ciascun tubo (di acciaio, con conducibilità termica pari a 13 W/mK) è lungo 4 m, ha diametro 33.7 mm e spessore 2.9 mm. Lo scambio termico sull'esterno dei tubi con acqua in cambiamento di fase mantiene la temperatura di superficie costante a 100 ^{o}C, mentre il coefficiente di scambio termico lato interno si può ricavare dalla correlazione di Dittus-Boelter per il Nu, sapendo che per l'elio: Pr =0.7, Re = 10^5 e la conducibilità termica k è funzione della temperatura in [K] e della pressione in [bar]:

$$k = 2.682 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + 1.123 \cdot 10^{-3} \cdot p) \cdot T^{0.71\cdot(1-2\cdot 10^{-4}\cdot p)}$$

Calcolare il profilo di temperatura dove c'è il massimo gradiente nei tubi, sapendo che l'elio, a 5 bar, entra nei tubi a 20 ^{o}C e ne esce a 100 ^{o}C.