# 离散数学

马汝辉 副教授

上海交通大学 计算机科学与工程系

电信群楼3-229

ruhuima@sjtu.edu.cn

Tel: 34207874

# 课程内容

- 数理逻辑
- 图论
- 教材及下载地址
  - **数理逻辑与集合论（第二版）：石纯一，清华大学出版社**
  - **图论与代数结构：戴一奇，清华大学出版社**

# 助教 TA

- 刘俊男（硕士生）、张家儒（博士生）
- 电院3号楼东309，答疑时间：每周五晚上7:00-8:00
- 课程网址：https://lan-qing.github.io/discrete_math/index

# 参考书籍

1. 离散数学：董晓蕾，曹珍富，机械工业出版社
2. 数理逻辑：莫绍揆，科学文献出版社
3. 数理逻辑教程：莫绍揆，华中工学院出版社
4. 集论与逻辑：沈恩绍，科学出版社
5. **A Mathematical Introduction to Logic, 2nd. Ed, H.Enderton, Academic Press**
6. **Logic for Applications, 2nd ed., A. Nerode, Springer**
7. 离散数学（第4版），**Richard Johnsonbaugh**，电子工业出版社

# 成绩评定

- 平时成绩（50%）＋期末考试成绩（50%）
- 准备2个作业本（注明专业、学号、姓名）
- 7-8次习题课、随堂练习

# 微信班级群


中国移动
下午6:37
群二维码名片
2019-2020秋季学期 离数班级群
该二维码7天内(9月15日前)有效，重新进入将更新

# 什么是离散数学?

- **离散数学**(*discrete mathematics*)是研究离散对象的数学分支.
  - 离散:由分离的元素组成.如自然数集.
    - 相对应的是连续对象. 如实数集.
      - 微积分就是研究连续函数的数学分支.
- 内容包括:
  - 集合,关系,函数
  - 数理逻辑
  - 图论
  - 抽象代数
  - 组合数学
  - 数论, ……

# 离散数学

- 研究对象：离散个体及其结构
- 离散数学是：
  - 现代数学的一个重要分支
  - 计算机科学与技术的理论基础
  - 是计算机应用必不可少的工具，所以又称为计算机数学
- 离散数学应用举例

# 在数字电路中的应用

交通信号灯控制

有红、黄、绿三灯，由3个开关分别控制

(1) 每次仅一种颜色灯亮

(2) 红灯及绿灯不会连续出现，即二者之间必须有黄灯

(3) 可加上延时：如红灯20秒，黄灯10秒，绿灯13秒

(4) 更复杂的情形：十字路口多信号灯、信号灯闪断等

本质上是数理逻辑

# 理发师悖论

在某个城市中有一位理发师，他的广告词是这样写的：

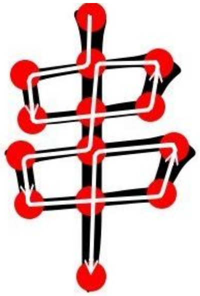
“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”

来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸，而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。

本质上是集合论

# 一笔画及社交网络

- 一笔画：给定一个由顶点和边所组成的图。能否无重复的遍历该图的边？



- 社交网络：在社交网络环境中，依据后台数据库，自动得到一个成员之间彼此直接/间接认识的最大群体

本质上是图论

# 围棋策略学习


围棋“人机大战”

# AlphaGo

**AlphaGo**，直译为**阿尔法围棋**，亦被音译为**阿尔法狗**等，是于2014年开始由英国伦敦Google DeepMind开发的人工智能围棋软件。

# 离散数学

- 事实上，从计算机产生到其发展每一步都离不开数学
  - 1936年，英国数学家图灵(A.M.Turing)发表了著名论文 “理想计算机”，从而给出了计算机的理论模型
  - 1946年在著名数学家冯·诺依曼(J.Von Neumann)的领导下，制造了世界上第一台现代意义的通用计算机EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer)
  - . . .
- 为什么离散数学对计算机科学来说如此重要？
  - 数字电子计算机是一个离散结构，它只能处理离散的或离散化了的数量关系
  - 无论计算机科学本身，还是与计算机科学及其应用密切相关的现代科学研究领域，都面临着如何对离散结构建立相应的数学模型；又如何将已用连续数量关系建立起来的数学模型离散化，从而可由计算机加以处理

# 离散数学与计算机科学的关系

- 数理逻辑：人工智能、程序正确性证明、程序验证等
- 集合论：关系数据库模型等
- 图论：数据结构、数据库模型、网络模型等
- 代数结构：软件规范、形式语义、编译系统、编码理论、密码学、数据仓库等
- 组合数学：算法分析与设计、编码理论、容错等

# 离散数学课程说明

- 研究对象----离散个体及其结构
- 研究思想----以集合和映射为工具、体现公理化和结构的思想
- 研究内容----包含不同的数学分支，模块化结构
  - 数理逻辑：推理、形式化方法
  - 集合论：离散结构的表示、描述工具
  - 图论：离散结构的关系模型
  - 代数结构：离散结构的代数模型
  - 组合数学：离散结构的存在性、计数、枚举、优化、设计
  - 离散概率（概率统计课程）

# 学习目标

- 理解、掌握命题逻辑的基本概念及命题逻辑的等值和推理演算
- 理解、掌握谓词逻辑的基本概念及谓词逻辑的等值和推理演算
- 理解、掌握集合概念、集合运算等
- 理解、掌握关系、关系表示、闭包等
- 理解、掌握图的基本概念及代数表示
- 理解、掌握道路与回路、欧拉道路与回路及哈密顿道路与回路
- 理解、掌握树的基本概念、Huffman树及最短树
- 应用逻辑推理、形式化方法、离散结构的关系模型（如树等）来解决实际问题

# 主要内容

- 《图论与代数结构》
  - 第一章 基本概念

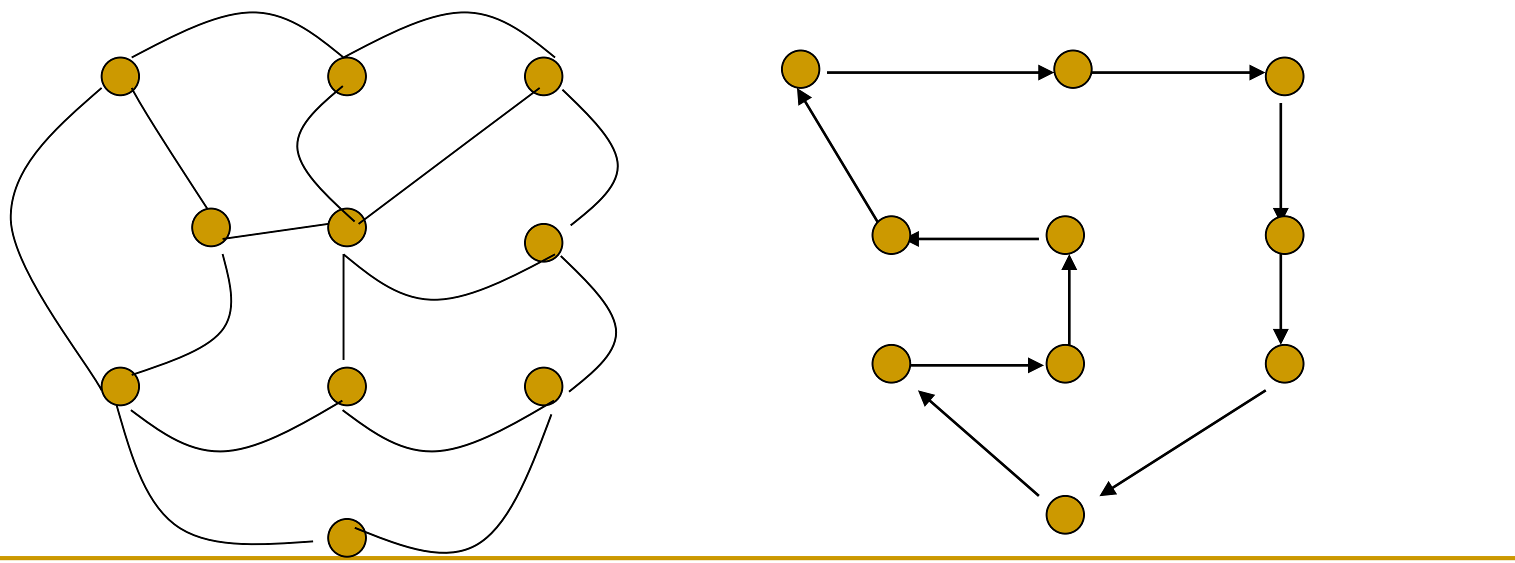
    1.1, 1.2(1,2,3,7)
  - 第二章 道路与回路

    2.1, 2.3, 2.4
  - 第三章 树

    3.1, 3.6, 3.7

# 实例

- 城市街道如图，市政府规定各街道只能单向行驶，问如何定向才能保证车辆能从一个地点到达任一个其他的地点。



# 图论

# 第一章　基本概念

## 1.1 图的概念

- 许多事物以及它们之间的联系可以用图形直观地表示
- 用结点表示事物

  用边表示它们之间的联系
- 图论的研究对象

  结点和边构成的图形

# 图的概念

- 定义1.1.1

  二元组(V(G),E(G))称为图。其中，

  V(G)是非空集合，称为结点集

  E(G)是V(G)诸结点之间边的集合

  常用G=(V,E)表示图
- 只讨论有限图, 即V和E都是有限集

  给定某个图G=(V, E), 如果不加特殊说明, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
  即结点数$|V|=n$, 边数$|E|=m$

# 边和图

- 用结点表示边

  $e_k=(v_i, v_j)$ (称$v_i$和$v_j$是相邻结点, 或者$e_k$分别与$v_i$,$v_j$相关联)
- 有向边(弧)，有向图

  $v_i$是$e_k$的始点，$v_j$是$e_k$的终点
- 无向边，无向图

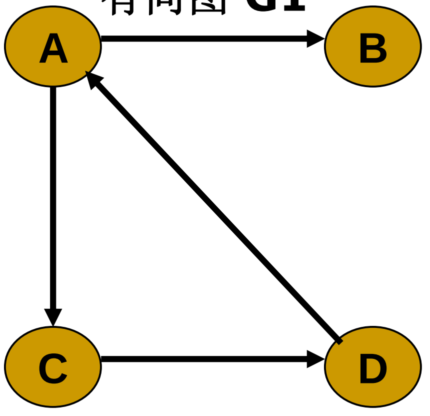
  $v_i$ , $v_j$是$e_k$的端点
- 自环(圈)

  只与一个结点相关联的边
- 重边、多重图

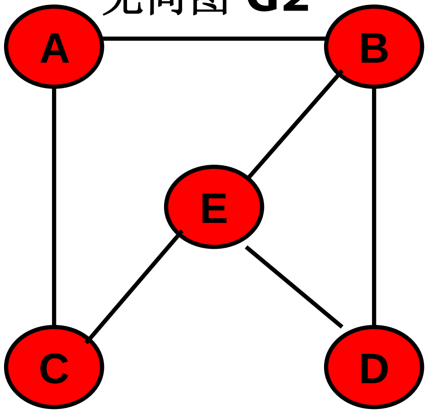
  同一对结点之间存在多条边

# 有向图与无向图

有向图 G1




无向图 G2




**G1 =（V1, E1）**

**V1 = {A, B, C, D}**

**E1 = {(A,B), (A,C), (C,D), (D,A)}**

**G2 =（V2, E2)**

**V2 = {A, B, C, D, E}**

**E2 = {(A,B), (A,C), (B,D), (B,E), (C,E), (D,E)}**

# 图的概念

- 定义1.1.2

  G=(V,E)的某结点v所关联的边数称为该结点的度，用d(v)表示。如果v带有自环，则自环对d(v)的贡献为2

- 有向图

  出度(正度)$d^+(v)$: 以结点v为始点的边的数目

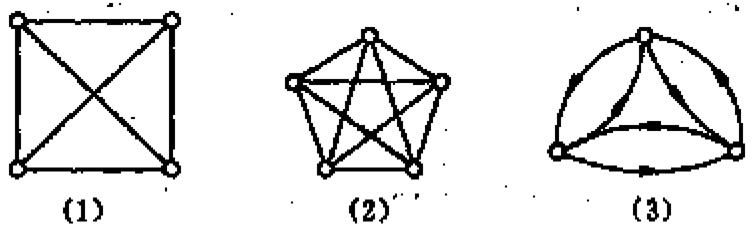
  入度(负度)$d^-(v)$: 以结点v为终点的边的数目

  $d(v) = d^+(v)+d^-(v)$

# 图的概念

- 定义1.1.3

  任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为简单图
- 没有任何边的简单图(V, Ø)叫空图，用$N_n$表示. 若此时恰有|V|=1, 称为平凡图
- 任何两个结点间都有边的简单图称为完全图，用$K_n$表示. $K_n$中每个结点的度都是n-1



# 图的概念

- 性质1.1.1
  设G=(V, E)有n个结点，m条边，则

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

**证明：由于每条边e=(u,v)对结点u和v度的贡献各为1，因此m条边对全部结点的总贡献为2m**

# 图的概念

- 性质1.1.2

  G中度为奇数的结点必为偶数个.

证明：G中任一结点的度或为偶数或为奇数，设$V_e$是度为偶的结点集，$V_o$是度为奇的结点集，于是有

$$\sum_{v\in V_e} d(v) + \sum_{v\in V_0} d(v) = 2m$$

**因此上式左边第二项也为偶数，也即度为奇数的结点必为偶数个**

# 图的概念

- 性质1.1.3

  有向图G中正度之和等于负度之和.

这是因为每条边对结点的正、负度贡献各为1

- 性质1.1.4

  $K_n$的边数是n(n-1)/2.

证明: $K_n$中各结点的度都是(n-1), 由性质1.1.1就可以得到

# 图的概念

- 性质1.1.5

  非空简单图G中一定存在度相同的结点.

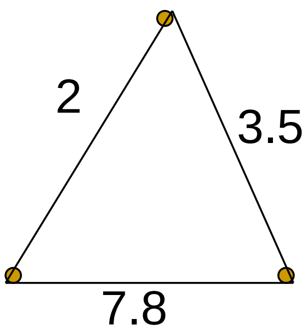
证明：设在G中不存在孤立结点，则对n个结点的简单图，每个结点度d(v)的取值范围是1~(n-1)，由抽屉(鸽巢)原理，一定存在两个度相同的结点.

若存在一个孤立的结点，亦类似可证.

# 图的概念

- 定义1.1.4

  如果图G=(V,E)的每条边$e_k=(v_i, v_j)$ 都赋以一个实数$w_k$作为该边的权，则称G是赋权图．特别地，如果这些权都是正实数，就称G是正权图
- 权可以表示该边的长度、时间、费用或者容量等



# 图的概念

- 定义1.1.5

  给定G=(V, E), 如果存在另一个G’=(V’, E’), 满足V’$\subseteq$V, E’ $\subseteq$ E, 则称G’是G的一个子图

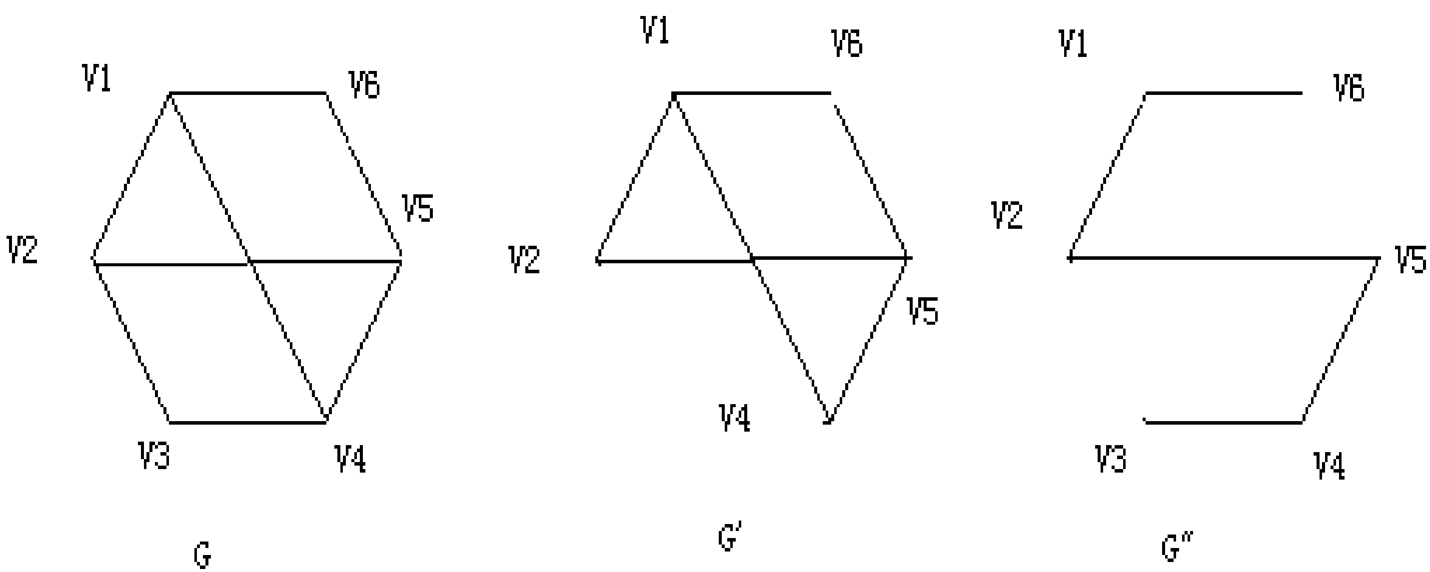
  特别地，如果V’=V, 就称G’是G的支撑子图或者生成子图

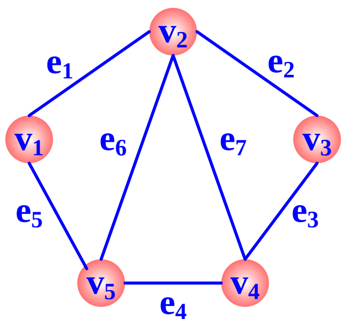
  如果V’$\subseteq$V, 且E’包含了G在结点子集V’之间的所有边, 则称G’是G的导出子图
- G自身既是支撑子图，又是导出子图;

  空图是G的支撑子图;

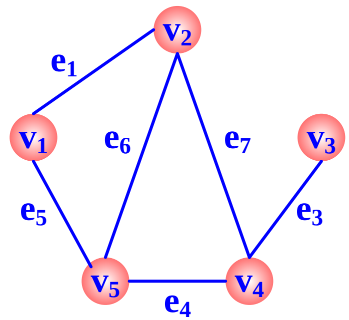
  G自身和空图称为平凡子图

- 在如下图中，给出了图G以及它的真子图G’和G ’’，其中，G’是结点集为{$v_1$，$v_2$，$v_4$，$v_5$，$v_6$}的导出子图;
G’’是支撑子图(或生成子图)。

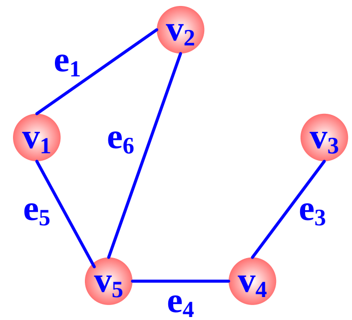




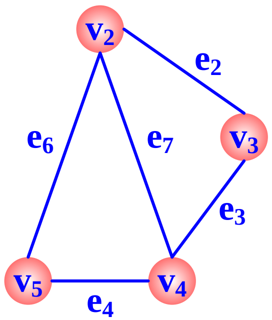

$G$



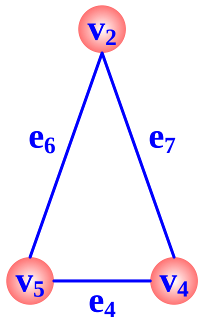

$G-e_2$



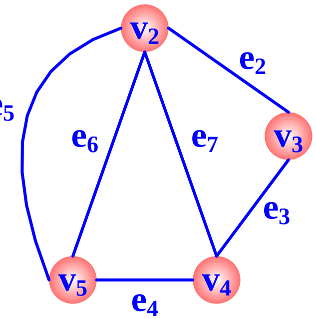

$G-\{e_2, e_7\}$




$G-v_1$




$G-\{v_1, v_3\}$



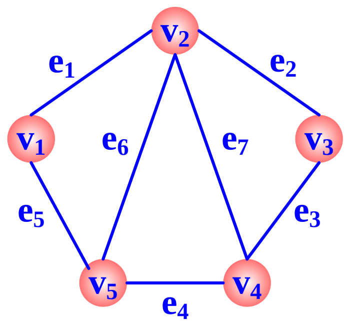

$G-v_1+e_{25}$

# 图的概念

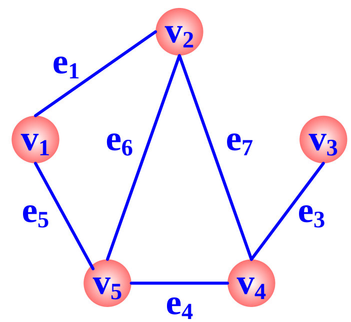
- 定义1.1.6
  给定两个图$G_1=(V_1,E_1)$,$G_2=(V_2,E_2)$.令
  $G_1\cup G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cup V_2$,$E=E_1\cup E_2$;
  $G_1\cap G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cap V_2$,$E=E_1\cap E_2$;
  $G_1\oplus G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cup V_2$,$E=E_1\oplus E_2$;
  分别称为$G_1$和$G_2$的并，交和对称差

# 图的增删

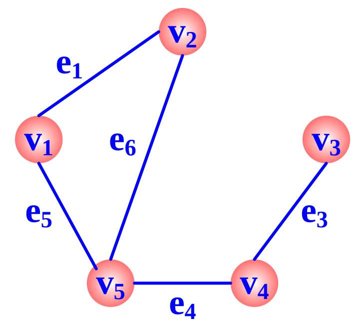
- G-H
  表示在G中删去一个子图H，即删掉H中的各条边(支撑子图)
  特别地，对于简单图G，称$K_n$-G为G的补图
- G-v
  表示从G中删去结点v及其关联的边(导出子图)
- G-e
  表示从G中删去边e(支撑子图)
- $G+e_{ij}$
  表示在G中增加某条边$e_k=(v_i, v_j)$



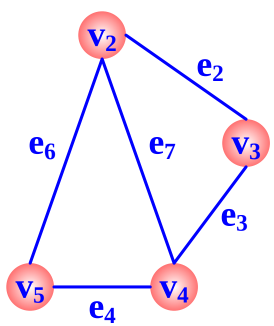

G



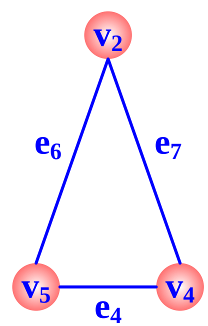

G-$e_2$



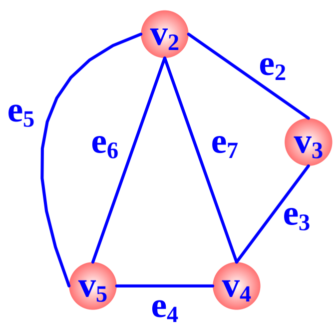

G-$\{e_2, e_7\}$




G-$v_1$




G-$\{v_1, v_3\}$




G-$v_1$+$e_{25}$

# 图的概念

- 无向图的邻点集

  $\Gamma(v)=\{u|(v, u)\in E\}$

- 定义1.1.7

  设v是有向图G的一个结点，则

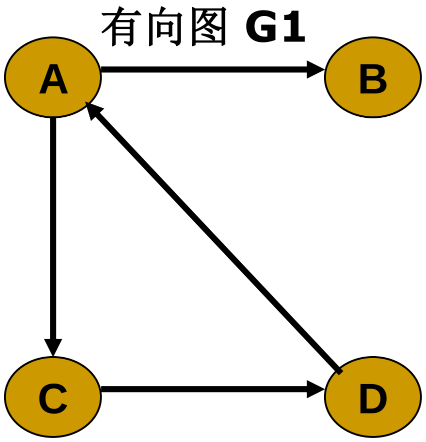
  $\Gamma^{+}(v)=\{u|(v, u)\in E\}$

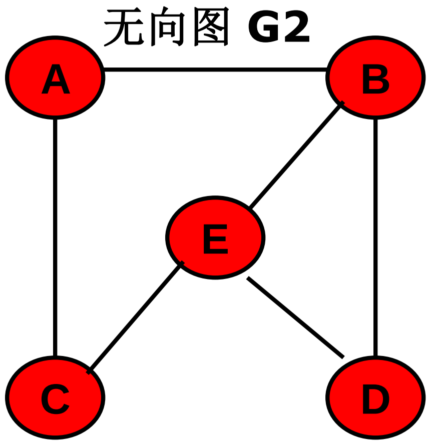
  称为v的直接后继集或者外邻集; 相应地

  $\Gamma^{-}(v)=\{u|(u, v)\in E\}$

  称为v的直接前趋集或者内邻集

# 有向图与无向图




**G1 =（V1, E1）**

**V1 = {A, B, C, D}**

**E1 = {(A,B), (A,C), (C,D), (D,A)}**

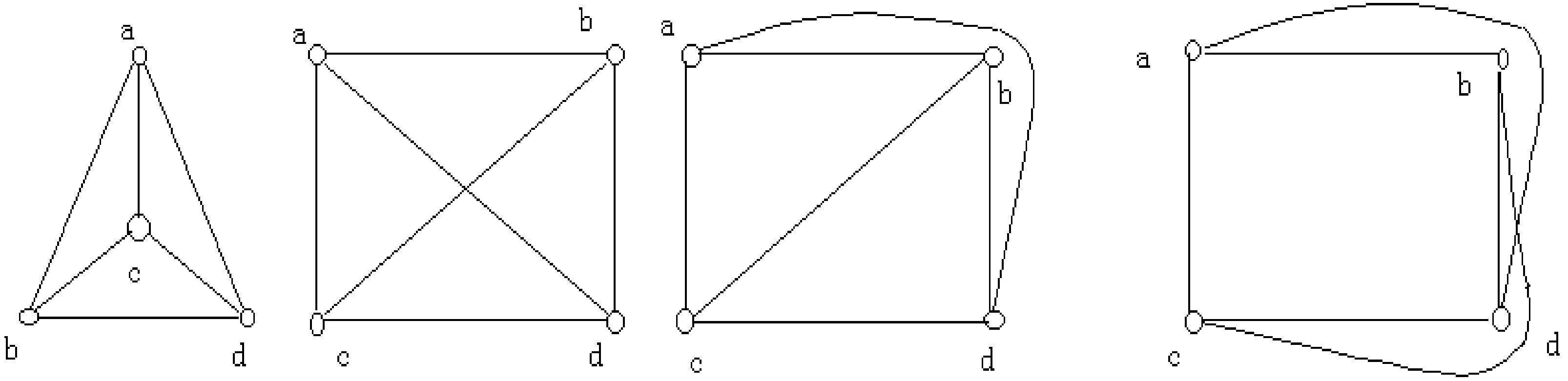
**G2 =（V2, E2)**

**V2 = {A, B, C, D, E}**

**E2 = {(A,B), (A,C), (B,D), (B,E), (C,E), (D,E)}**

# 图的同构

如下四张图所表示的图形实际上都是一样的



# 图的同构

- 定义1.1.8

  两个图$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$,如果$V_1$和$V_2$之间存在双射f, 而且$(u, v)\in E_1$, 当且仅当$(f(u), f(v))\in E_2$时, 称$G_1$和$G_2$同构

  记作$G_1 \cong G_2$
- 如何判断两个图是否同构呢？

  答案：迄今为止还没有有效的算法。

# 图的同构

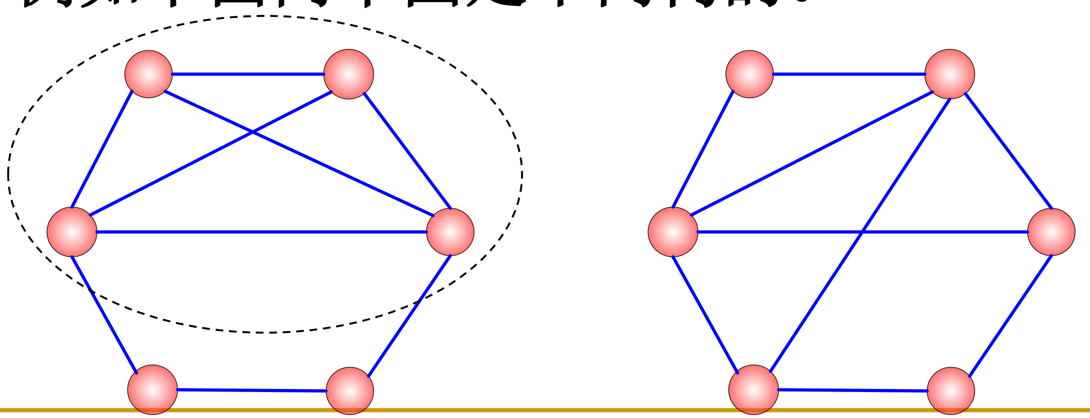
假如$G_1 \cong G_2$，则必须满足：

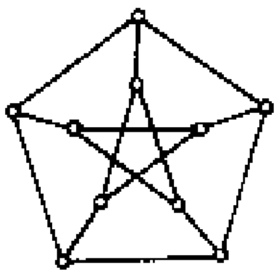
(1) $|V(G_1)|=|V(G_2)|$, $|E(G_1)|=|E(G_2)|$

(2) $G_1$和$G_2$结点度的非增序列相同

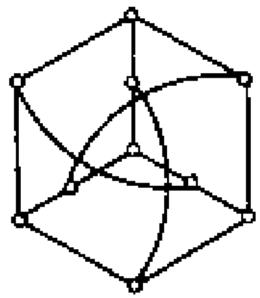
(3) 存在同构的导出子图(用来判断不同构)

上述是必要条件, 但不是充分条件，只能用来判断图的不同构。例如下面两个图是不同构的。

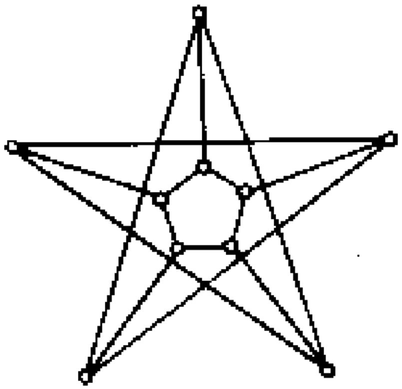




(d)



(e)



(f)

**(d)≅(e)≅(f). (d)**所示图称为彼德森图

# 1.2 图的代数表示

- 邻接矩阵
- 权矩阵
- 关联矩阵
- 邻接表

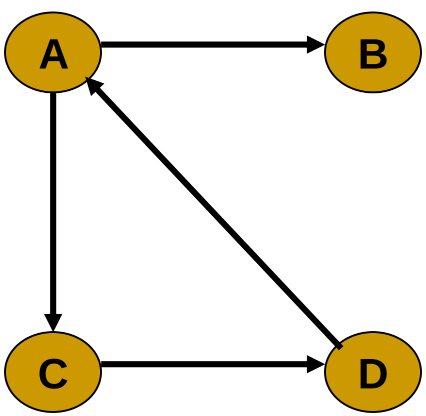
# 邻接矩阵

- 邻接矩阵表示结点之间的邻接关系
  - 无权值的有向图的邻接矩阵

    设有向图具有n个结点，则用n行n列的布尔矩阵A表示该有向图；并且A[i,j]=1, 如果i至j有一条有向边；A[i,j]=0, 如果i至j没有一条有向边

    $v_i$出度: 第i行之和; $v_j$入度: 第j列之和

    注: 可以表示自环，但无法表示重边




表示成右图矩阵

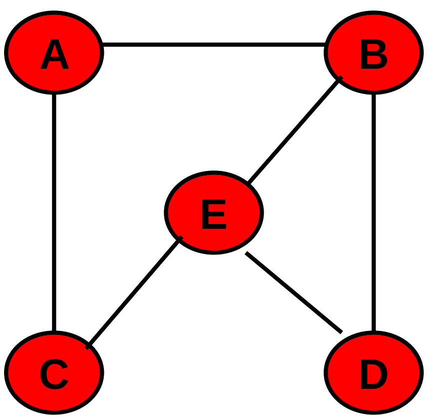
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 邻接矩阵

- 无权值的无向图的邻接矩阵(对称矩阵)

  设无向图具有n个结点，则用n行n列的布尔矩阵 A 表示该无向图；并且A[i,j]=1 , 如果i至j有一条无向边；A[i,j]=0, 如果i至j没有一条无向边

  $v_i$结点的度: 第i行或i列之和



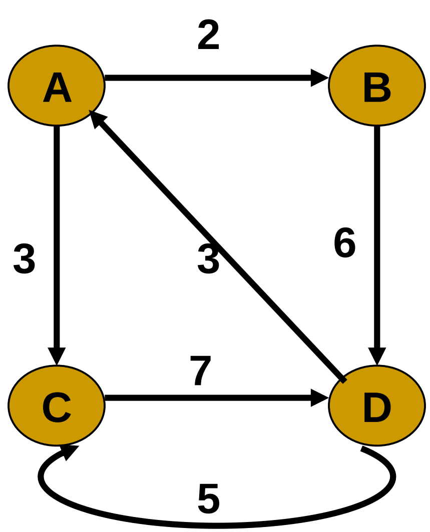


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 权矩阵

- 用来表示赋权图
  - 例如：有向图的加权邻接矩阵

  设有向图具有n个结点，则用n行n列的矩阵 A 表示该有向图；并且 A[i,j]=$w_{ij}$ , 如果i至j有一条有向边且它的权值为$w_{ij}$;
  A[i,j]=0, 如果i至j没有一条有向边




表示成右图矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

# 关联矩阵

- 关联矩阵表示结点与边之间的关联关系
- 设$G=(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=m$. 则G的关联矩阵B是$n \times m$的矩阵
- 有向图的关联矩阵

B[i,j]=1,   如果$v_i$是边$e_j=(v_i,v_k)$的始点

B[i,j]=-1, 如果$v_i$是边$e_j=(v_k,v_i)$的终点

B[i,j]=0,   其他($v_i$既不是$e_j$的始点亦非终点)

# 关联矩阵

- 有向图关联矩阵的性质
  - 每列只有两个非零元：1和-1
  - 第i行非零元的数目恰是结点$v_i$的度，其中1元的数目是出度，-1元的数目是入度
  - 能够表示重边，但不能表示自环

# 关联矩阵

- 无向图的关联矩阵

  B[i,j]=1， 如果$v_i$是边$e_j$的端点

  B[i,j]=0， 如果$v_i$不是边$e_j$的端点

# 矩阵表示的特点

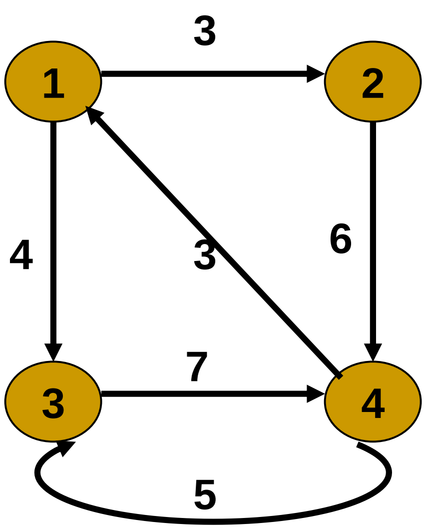
- 如果可以用邻接矩阵/关联矩阵表示某个图G，则表示是唯一的
- 邻接矩阵不能表示重边

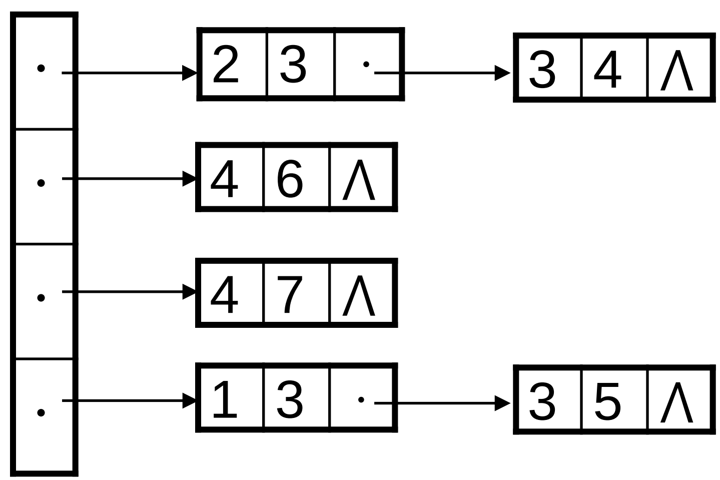
  关联矩阵不能表示自环
- 从数据结构和算法的角度来看，矩阵表示法占据的存储空间较大，可能增加计算复杂度

# 邻接表

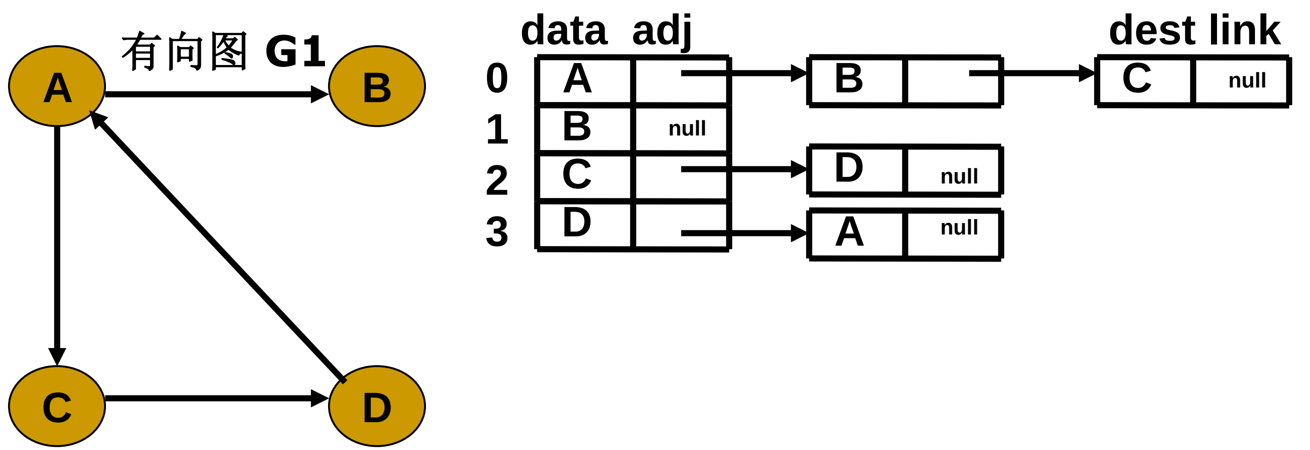
- 单链表
- 表结点的结构

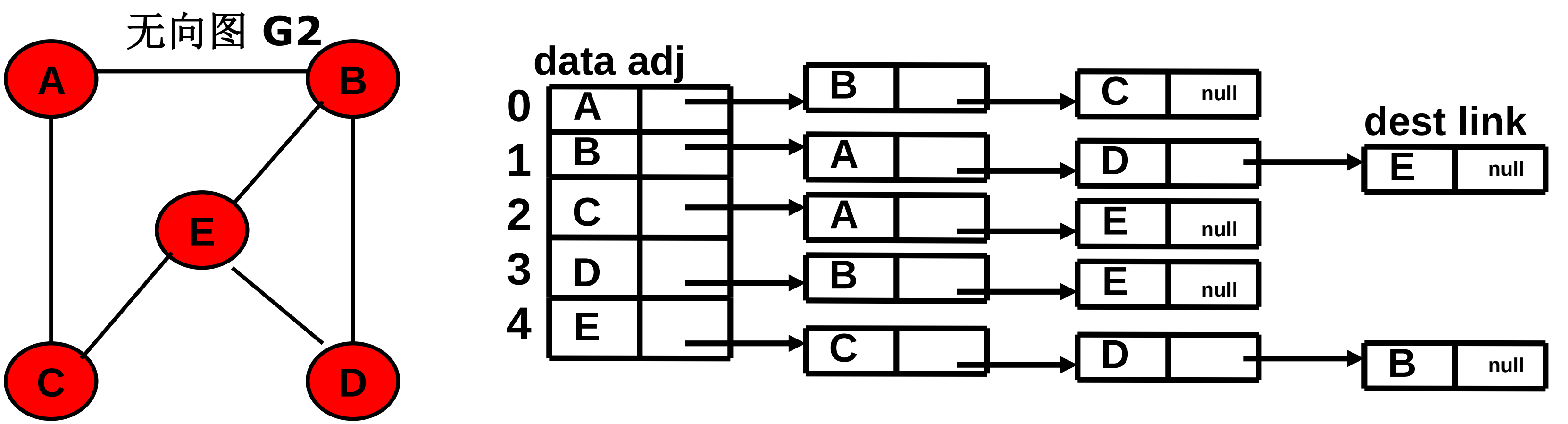
| | | |
|---|---|---|
| 邻接点的编号 | 边权值 | 下一个结点的地址指针 |



# 邻接表


有向图 G1
A
B
C
D
data adj
dest link
0
1
2
3
A
B
C
D
null
B
C
null
D
null
A
null


无向图 G2
A
B
E
C
D
data adj
dest link
0
1
2
3
4
A
B
C
D
E
B
C
null
A
D
E
null
A
E
null
B
E
null
C
D
B
null

# 邻接表

- 特点
  - 便于增加和删除边
  - 可以表示重边和自环
  - 可以唯一表示任意一个图
  - 所需存储空间较小

# 图的应用

- 三个量杯容量分别是8升，5升，3升，现8升的量杯装满了水，问怎样才能把水分成2个4升的。

初始状态(8,0,0)，终止状态(4,4,0)

状态转移图：状态看作点，状态间的转化看作边

答案: (8,0,0)→(5,0,3)→(5,3,0)→(2,3,3)→(2,5,1)→(7,0,1)→(7,1,0)→(4,1,3)→(4,4,0)

# 图的应用

- 人狼羊菜过河
  有一个人带着一只狼，一只羊，一筐菜过河，当这个人在狼和羊身边时，狼不敢吃羊，羊也不敢吃菜，但是当人不在它们身边时，狼就可能把羊吃掉，羊也可能把菜吃掉，现在，渡船时只有一只船，能承载一个人及一件东西或物品，问怎样渡才能使人.狼.羊.菜安全过河？

使用有限状态机，初始状态(0,0,0,0)，终止状态(1,1,1,1)

答案：

1、人羊坐船过河

2、人单独回

3、人白菜过河

4、人羊一起回

5、人狼过河

6、人单独回

7、人羊过河

# 作业

- P9

  1

  2

  3

  7

  8(邻接矩阵、关联矩阵)