Florence Alyssa Sakuma Shibata, Shayenne da Luz Moura

Método Simplex
Fase 2

São Paulo

2015

Sumário

Introdução

O método simplex é baseado em encontrar uma solução viável ótima para um problema de programação linear e realiza esta busca movendo-se de uma solução viável básica para outra, percorrendo os lados do poliedro que define a região viável, sempre numa direção onde o custo se reduz. Enfim, uma solução viável básica é alcançada quando nenhuma das direções viáveis reduzem o custo; então a solução viável básica é ótima e o algoritmo termina.

1 Descrição do algoritmo

O método simplex utilizado como base para o desenvolvimento do algoritmo está descrito em Bertsimas e Tsitsiklis (1997, pág. 90-91).

Dadas uma matriz $A \in \Re^{m \times n}$, uma solução viável básica $x \in \Re^n$, $b \in \Re^m$, o vetor de custos $c \in \Re^n$, o algoritmo realiza os seguintes passos:

1 Gera a matriz básica B associada a x.

2 Calcula o vetor de custos reduzidos para toda variável não básica. Se nenhuma componente é negativa, então a solução viável básica atual é ótima, acabou.

3 Caso contrário, armazena o índice da variável cujo custo reduzido foi menor. Calcula $u = B^{-1}A_j$. Se nenhum componente de u é positivo, então o custo ótimo é $-\infty$, acabou;

4 Caso contrário, toma $\theta^* = min_{(i=1,\dots,m|u_i>0)}\{\frac{x_{B(i)}}{u_i}\}$. Seja l o índice onde o mínimo foi encontrado. Forma uma nova base substituindo $A_{B(l)}$ por A_j. Sendo y é a nova solução viável básica, os valores das novas variáveis básicas são $y_j = \theta^*$, $y_{B(i)} - \theta^* u_i$, $i \neq l$. Volta ao passo 1.

É necessário que o problema possua pelo menos uma solução viável básica e que todas as soluções viáveis básicas sejam não degeneradas.

2 Funcionamento do algoritmo

A seguir está a descrição do funcionamento do algoritmo quando o problema de programação linear dado possue pelo menos uma solução ótima ou quando o custo ótimo é ilimitado.

2.1 Solução ótima

Existem duas possibilidades para este caso:

- A solução ótima é dada;
- A solução ótima é encontrada ao percorrer as direções viáveis que reduzem o custo.

Ao aplicar o algoritmo com os dados descritos a seguir, pode-se verificar seu funcionamento.

```
> A = [1 0 1 0 0; 0 1 0 1 0; 3 2 0 0 1];
> x = [0;0;4;6;18];
> b = [4;16;18];
> m = 3;
> n = 5;
> c = [3;5;0;0;0];

> [ind, v] = simplex(A, b, c, m, n, x);
#=====================================
           Iteracao: 0
#=====================================

Variaveis basicas:
3:  4.000000
4:  6.000000
5:  18.000000

Valor funcao objetivo: 0.000000
```

O algoritmo calcula quais são as váriáveis básicas a partir da solução x dada e o custo associado a essa solução $c^T x$.

```
Custos reduzidos:
1: 3.000000
2: 5.000000
```

Como o vetor de custos reduzidos das variáveis não básicas é positivo não existe direção viável que reduza o custo. Logo, o custo ótimo é alcançado em x. Assim, x é solução ótima.

```
Solucao otima com custo 0.000000:
1  0.000000
2  0.000000
3  4.000000
4  6.000000
5  18.000000
```

O algoritmo então devolve o valor da solução ótima que é igual a solução viável básica x dada.

Ao realizar outro teste, mudando apenas a função de custo, obtemos a resposta a seguir.

```
> c = [-3;-5;0;0;0];

> [ind, v] = simplex(A, b, c, m, n, x);
#=====================================
           Iteracao: 0
#=====================================
Variaveis basicas:
3:  4.000000
4:  6.000000
5:  18.000000

Valor funcao objetivo: 0.000000

Custos reduzidos:
1: -3.000000
2: -5.000000
```

O algoritmo calcula quais são as váriáveis básicas da solução viável básica x, o custo associado a ela e os custos reduzidos das variáveis não básicas. Quando encontra um valor negativo sabe-se que existe uma solução viável básica, diferente de x, cujo custo associado é menor.

```
Entra na base: 1

Direcao
3: 1.000000
4: 0.000000
5: 3.000000

Theta*: 4.000000

Sai da base: 3
```

É calculada a direção viável que reduz o custo, além do θ máximo que se pode andar para estar sobre uma nova solução viável básica. A primeira variável encontrada que possuir custo reduzido negativo entra na base e uma das variáveis básicas torna-se não básica. Neste caso, aquela que torna o θ máximo. Uma nova iteração se inicia.

```
#=====================================
           Iteracao: 1
#=====================================
Variaveis basicas:
1:  4.000000
4:  6.000000
5:  6.000000

Valor funcao objetivo: -12.000000

Custos reduzidos:
3: 3.000000
2: -5.000000

Entra na base: 2

Direcao
1: 0.000000
4: 1.000000
5: 2.000000
```

```
Theta*: 3.000000

Sai da base: 5
```

Nesta iteração novamente se calcula as variáveis básicas, agora da solução viável básica encontrada na iteração anterior, e seu custo associado. Ao calcular o vetor de custos reduzidos encontra uma componente negativa. Outra vez, sabe-se que a solução em que está não é ótima. Calcula a direção viável que reduz o custo associado, colocando na base a variável que possui custo reduzido negativo, e saindo a que torna o θ máximo. Outra iteração se inicia.

```
#=====================================
           Iteracao: 2
#=====================================
Variaveis basicas:
1:  4.000000
4:  3.000000
2:  3.000000

Valor funcao objetivo: -27.000000
Custos reduzidos:
3: -4.500000
5: 2.500000

Entra na base: 3

Direcao
1: 1.000000
4: 1.500000
2: -1.500000

Theta*: 2.000000

Sai da base: 4
```

Idêntica a iteração anterior. Novamente sabe-se que há uma solução melhor que a dada no início da iteração pois o vetor de custos reduzidos não é positivo. Segue os mesmos passos já descritos e encontra-se uma nova solução viável básica com custo associado menor. Mais uma iteração se inicia.

```
#=====================================
           Iteracao: 3
#=====================================
Variaveis basicas:
1:  2.000000
3:  2.000000
2:  6.000000

Valor funcao objetivo: -36.000000

Custos reduzidos:
4: 3.000000
5: 1.000000

Solucao otima com custo -36.000000:
1  2.000000
2  6.000000
3  2.000000
4  0.000000
5  0.000000
```

Esta possui o vetor de custos reduzidos positivo. Logo não existe direção viável que reduza o custo. O algoritmo devolve a solução viável básica em que está como solução ótima, pois esta possui menor custo associado.

2.2 Custo ótimo ilimitado

3 Resultados

O desenvolvimento do algoritmo em linguagem Octave baseado no método simplex descrito em Bertsimas e Tsitsiklis (1997).

Além da análise do funcionamento do algoritmo, conforme descrito na seção anterior, que demonstrou a corretude do mesmo, desde que fossem garantidas as hipóteses sobre os parâmetros de inicialização.

Conclusão

O algoritmo simplex implementado para resolver problemas de programação linear com soluções viáveis básicas não degeneradas e com pelo menos uma ótima é correto.

Mantendo as hipóteses em todos os casos, obtêm-se os resultados esperados em problemas cuja solução ótima é dada, quando o custo ótimo é ilimitado, ou seja necessário encontrar uma direção viável cujo custo seja menor, encontrando a solução ótima.

Referências

BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Introduction to Linear Optimization*. [S.l.]: Athena Scientific, 1997. (Athena Scientific series in optimization and neural computation). ISBN 9781886529199. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 9.