

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares
Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil
Fone: +55 31 3409-3470



Sincronismo de Fase de Osciladores

Leandro Freitas Abreu

Orientador: Prof. Dr. Luis Antônio Aguirre

Belo Horizonte, 3 de dezembro de 2016

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares
Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil
Fone: +55 31 3409-3470



Sincronismo de Fase de Osciladores

Trabalho de Qualificação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Leandro Freitas Abreu

Orientador: Prof. Dr. Luis Antônio Aguirre

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Belo Horizonte
3 de dezembro de 2016

Resumo

O sincronismo de fase de osciladores é um fenômeno observado em várias áreas do conhecimento. O estudo e caracterização desse fenômeno tem recebido bastante atenção nos últimos anos, mas uma teoria geral, aplicável a qualquer classe de sistemas ainda não foi estabelecida. Este trabalho apresenta uma proposta de definição de fase para osciladores representados em espaço de estados, a partir do campo vetorial do sistema. A definição pode descrever melhor a dinâmica de evolução da fase do sistema, correspondente ao expoente nulo de Lyapunov. São propostos índices para avaliar a relação de uma variável de saída do sistema com a fase definida. São apresentados alguns resultados preliminares ilustrando possíveis uso dos índices e da definição de fase proposta. O trabalho traz ideias de continuidade, visando avaliar as propostas apresentadas e expandir suas aplicações para o projeto de controladores de sincronismo de fase.

Abstract

Phase synchronization is a phenomenon observed in several areas of knowledge. A good characterization of the phenomenon has received considerable attention in recent years, but a general theory, applicable to any class of systems was not developed. This work presents a novel phase definition for oscillators represented in state space format, based on its vector field. The definition can represent better the phase evolution of the system, corresponding to the zero Lyapunov exponent. It was proposed indices to measure the relation between an arbitrary system output and the phase proposed. Some preliminary results are described illustrating the use of the indices and the phase definition. Some ideas to evaluate the validity of the proposals and to expand its applications are presented.

Lista de Figuras

2.1	Sistema de Landau-Stuart: trajetórias.	10
2.2	Sistema de Landau-Stuart: isócronas.	11
2.3	Sistema de Landau-Stuart: línguas de Arnold.	15
3.1	Exemplos de centro de rotação apropriado e não apropriado para definição de fase.	19
3.2	Ilustração de um espaço ortogonal (exemplo 3.1).	24
3.3	Campos vetoriais $\mathbf{f}(\vec{x})$ e $\mathbf{f}^\perp(\vec{x})$ (exemplo 3.1)	25
3.4	Sistema de Poincaré.	25
3.5	Sistema de Poincaré: regiões de fase equivalente.	27
3.6	Sistema de Poincaré: variável fase.	28
3.7	Sistema de Van der Pol.	29
3.8	Sistema de Van der Pol: variável fase.	30
3.9	Sistema de Rössler: variável fase.	32
3.10	Atratores caóticos de Lorenz e Chua: variável fase.	33
3.11	Atratores Corda e Li: variável fase.	34
4.1	Ilustração da projeção das projeções $\mathbf{f}(\vec{x})$.	41
4.2	Regiões de sincronismo para o sistema de Poincaré.	51
4.3	Regiões de sincronismo para o sistema de Van der Pol.	52
4.4	Regiões de sincronismo para o sistema de Rössler.	53
4.5	Atrator de Chua: variável descritora de fase.	55
4.6	Atrator Corda: planos (y, z) e (x, z) .	56
4.7	Campos vetoriais do sistema de Van der Pol original e modificado.	57
4.8	Sistema de Van der Pol com dois valores de parâmetros distintos.	58
4.9	Evolução temporal da fase do sistema de Van der Pol original e modificado.	58
5.1	Regiões de sincronismo para o sistema de Rössler.	65
5.2	Regiões de sincronismo de fase entre Van der Pol e Rössler para dois tipos de acoplamento.	69

Lista de Tabelas

4.1	Índice de informação de fase para acoplamento dissipativo.	50
4.2	Índice de representação e informação de fase para variáveis de estados.	59
4.3	Índice de representação e informação de fase para variáveis descritoras de fase.	60

Lista de Siglas e Abreviações

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CPH Centro de Pesquisas Hidráulicas e Recursos Hídricos

DELT Departamento de Engenharia Eletrônica da UFMG

FAPEMIG Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

MACSIN Grupo de Pesquisa em Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-lineares

PLL Malha de captura de fase - *Phase-Locked Loop*

PPGEE Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

IFMG Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

UPO Órbita periódica instável - *unstable periodic orbit*

Símbolos e Notação

Aqui são descritos a notação e os principais símbolos utilizados.

Notação

a	Escalar
\vec{a}	Vetor
a_i	i -ésimo componente do vetor \vec{a}
A	Matriz
\vec{a}^T	Vetor transposto
A^T	Matriz transposta
$a(.)$	Campo escalar
$\mathbf{a}(.)$	Campo vetorial
\dot{a}	Derivada de a com relação ao tempo $t \in \mathbb{R}$
$\dot{\vec{a}}$	Derivada do vetor \vec{a} com relação ao tempo $t \in \mathbb{R}$
$\frac{\partial a(\vec{b})}{\partial \vec{b}}$	Vetor de derivadas parciais do campo escalar $a(\vec{b})$ com relação a cada componente do vetor \vec{b} , ou gradiente de a com relação a \vec{b}
$\frac{\partial \mathbf{a}(\vec{b})}{\partial \vec{b}}$	Matriz de derivadas parciais do campo vetorial \mathbf{a} com relação a cada componente do vetor \vec{b} , ou matriz jacobiana de \mathbf{a} com relação a \vec{b}
$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} b$	Derivada de Lie do campo escalar b na direção do campo vetorial \mathbf{a}
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^+	Conjunto dos números reais positivos
\mathbb{R}^{*+}	Conjunto dos números reais positivos sem o zero
\equiv	Equivalente
\coloneqq	Igual por definição
\approx	Aproximadamente

\langle , \rangle	Produto escalar
$\ . \ $	Operador norma

Principais símbolos utilizados

n	Escalar que representa a ordem do sistema dinâmico
x, y	Estados do sistema dinâmico de segunda ordem ($n = 2$)
x, y, z	Estados do sistema dinâmico de terceira ordem ($n = 3$)
\vec{x}, \vec{z}	Vetores de estados do sistema dinâmico, e.g. $\vec{x} = [x, y]^T$ ou $\vec{x} = [x, y, z]^T$
k, ε	Escalar (e.g. constante) que representa a força de interação entre dois osciladores
u	Escalar que representa uma entrada do sistema dinâmico
X, Z	Conjunto de todos estados possíveis de \vec{x} e \vec{z} , respectivamente
A, B	Matrizes constantes
$h(\cdot)$	Campo escalar de saída do sistema dinâmico
ω	Frequência de oscilação do sistema
T	Período de oscilação do sistema
$\phi(\cdot)$	Campo escalar que representa a <i>fase</i> “ideal” de um oscilador (detalhes no texto)
$\tilde{\phi}(\cdot)$	Campo escalar que representa a definição de <i>fase</i> proposta (detalhes no texto)
$\varphi(\cdot)$	Campo escalar que representa uma definição de <i>fase</i> genérica
$\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot)$	Campos vetoriais de deriva e direcionamento do sistema dinâmico
$\Phi(\vec{x})$	Mapeamento de $\vec{x} \in X$ para $\vec{z} \in Z$
$\Phi^{-1}(\vec{z})$	Mapeamento inverso de $\vec{z} \in Z$ para $\vec{x} \in X$
$\Gamma_{\mathcal{P}}$	Seção de Poincaré no atrator
Γ_0	Conjunto ω -limite, não unitário, do sistema dinâmico: ciclo limite ou atrator estranho
γ_i	i -ésima trajetória do sistema dinâmico, escolhida arbitrariamente

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
1.2	Estrutura do texto	1
2	Sincronismo de osciladores	3
2.1	Introdução	3
2.2	O que é sincronismo	3
2.3	Definição matemática	4
2.3.1	Oscilador autossustentável	4
2.3.2	Frequência e período	5
2.3.3	Fase	5
2.3.4	Oscilador com perturbação externa	6
2.3.5	Acoplamento	6
2.3.6	Formas de sincronismo	7
2.3.7	Outras formas de sincronismo	8
2.4	O Oscilador de Landau-Stuart	8
2.4.1	Isócronas	9
2.4.2	Sistema forçado	10
2.4.3	O método da média	13
2.5	Outros Osciladores	14
3	Fase de Osciladores	17
3.1	Definição de fase	17
3.1.1	Colocação do problema	17
3.1.2	Tempo de retorno a uma seção de Poincaré	18
3.1.3	Medida direta de ângulo no atrator	19
3.1.4	Curvatura	20
3.1.5	Outras definições	21
3.2	Proposta de Definição de fase	21
3.2.1	Regiões de fase equivalente (<i>isophases</i>)	23
3.2.2	O Sistema de Poincaré	24
3.2.3	Atratores Periódicos	27
3.2.4	Atratores caóticos	29
3.3	Detecção de Sincronismo	31

3.4	Conclusões do Capítulo	35
4	Informação de Fase	37
4.1	Introdução	37
4.1.1	Colocação do problema	38
4.1.2	Atuação na fase	39
4.1.3	Medição da fase	39
4.1.4	Acoplamento dissipativo	40
4.1.5	Acoplamento e sincronismo	40
4.2	Métricas Sobre a Fase de um Oscilador	42
4.2.1	Índice de Informação de Fase	42
4.2.2	Índice de Representação de Fase	43
4.2.3	Índice de Influência na Fase	44
4.2.4	Cálculo dos Índices Médios	44
4.2.5	Acoplamento Dissipativo	45
4.3	Resultados Preliminares	45
4.3.1	Escolha de Variável para Acoplamento Dissipativo	45
4.3.2	Determinação de uma Variável Descritora de Fase	49
4.4	Conclusões do Capítulo	59
5	Proposta de continuidade	63
5.1	Método da Redução de Fase	63
5.2	Controle de Sincronismo	65
5.2.1	Colocação do problema	66
5.2.2	Propostas de desenvolvimento	67
5.3	Principais Propostas e Continuidade do Trabalho	69
Bibliografia		78

Introdução

O estudo de sincronismo de fase entre osciladores tem sido importante para a expansão do entendimento humano em diversas áreas do conhecimento tais como biologia, ecologia, química, neurociência, engenharia. Exemplos nessas áreas envolvem sincronismo entre células cardíacas, cadeias alimentares, concentração de reagentes, redes neurais cerebrais, robótica. Porém, uma descrição matemática geral para caracterizar o sincronismo de *fase* entre osciladores ainda não foi estabelecida. Este trabalho é uma tentativa de desenvolver conceitos de sincronismo de fase para osciladores descritos no espaço de estados.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem o objetivo de apresentar propostas de desenvolvimento no contexto de sincronismo de fase de osciladores. As ideias colocadas no texto, em níveis distintos de aprofundamento e maturidade, têm o objetivo principal de fomentar a discussão e avaliação de qual o melhor caminho a seguir na continuidade do trabalho. Especificamente, objetiva-se propor uma definição de *fase* para osciladores, que seja válida para uma classe maior de sistemas. É apresentada também uma proposta de caracterização de uma interação entre osciladores, em termos de *medição*, *atuação* e *forma* de acoplamento. São propostos índices para quantificar esses aspectos.

1.2 Estrutura do texto

O capítulo primeiro é apenas uma breve introdução sobre o que se propõe o texto. O Capítulo 2 apresenta uma fundamentação teórica sobre o tema geral *sincronismo de osciladores*. O Capítulo 3 apresenta uma discussão acerca da definição de uma variável *fase* para osciladores e faz uma proposta de definição de fase nesse contexto. O Capítulo 4 apresenta proposta de métricas para avaliação da informação de fase contida numa variável ou função de saída do sistema oscilador. O Capítulo 5 sintetiza as principais ideias e apresenta possíveis caminhos para continuidade e aprofundamento do trabalho.

Sincronismo de osciladores

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados conceitos fundamentais de sincronismo de osciladores, tipos de sincronismos, descrição matemática e alguns exemplos de análise e aplicação dos conceitos. O texto segue, principalmente, a abordagem realizada por A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths (2003) e Boccaletti, Kurths et al. (2002), além de uma revisão bibliográfica contextualizando o presente trabalho.

2.2 O que é sincronismo

Sincronismo pode ser definido como o *ajuste do ritmo de objetos oscilantes devido a sua fraca interação* (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003). Essa definição, de cunho mais geral, traz consigo outros conceitos correlatos como *objetos oscilantes*, *ritmo*, *fraca interação*. No estudo de sincronismo de sistemas dinâmicos, esses conceitos são definidos tanto fisicamente – quando for o caso – como matematicamente. Esses conceitos são apresentados a seguir, num e noutro sentido.

Objetos oscilantes podem ser entendidos como osciladores autossustentáveis, ou seja, sistemas capazes de manter algum tipo de oscilação por si só. Um exemplo clássico de oscilador autossustentável é o relógio de pêndulo, estudado e patenteado pelo matemático holandês Christiaan Huygens (1629–1695), descrito em seu trabalho (Huygens 1673), que consiste num *sistema ativo* (fonte de energia interna) capaz de manter sua própria oscilação, isoladamente. Como contra-exemplo, pode-se citar o estudo clássico da população de lebres e linces canadenses ao longo de 70 anos (Lulich 1937), cujo número de indivíduos de uma espécie e de outra apresentam oscilações “síncronas”. Porém, neste caso, o conceito de *sincronismo* não é apropriado pelo fato de que um é causa do outro e, desta forma, o sistema “lince-lebre” não pode ser decomposto em dois subsistemas “lince” e “lebre” separadamente, ou seja, cada um não representa um oscilador autossustentável (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003).

O conceito de *ritmo* refere-se à relação da oscilação com o tempo, caracterizada pelo *período* (tempo de um ciclo de oscilação) ou pela *frequência* (oscilações por unidade de tempo). O ritmo de um oscilador autossustentável é caracterizado, portanto, por sua *frequência natural*, determinado por parâmetros internos do sistema. Dois sistemas em sincronia podem ajustar sua frequência natural de modo a atingir o estado síncrono – que nem sempre quer dizer “mesma frequência”. Por outro lado, o conceito de *frequência* não é suficiente para determinar *ritmos em sincronia*. Além de possuir uma relação fixa entre as frequências, dois osciladores síncronos precisam oscilar com alguma relação fixa entre as *fases*.

Fase é uma ideia chave da teoria de sincronismo e, num primeiro momento, pode ser conceituada como a quantidade que é incrementada em 2π após um ciclo de oscilação (A. Pikovsky, M. Rosenblum

e Kurths 2003). A frequência do oscilador autossustentável não é determinada pelas condições iniciais, porém a *fase* da oscilação pode ser influenciada por elas e ainda pela *fraca interação* com outro oscilador. Mais adiante, será mostrado um exemplo em que essa influência sobre a fase possibilita o sincronismo entre dois sistemas.

A *interação* entre dois osciladores permite que permaneçam em sincronia. Ademais, pressupõe-se que essa seja uma *interação fraca*, com intensidade inferior às forças presentes em cada subsistema. O estudo da população de lebres e linces, mencionado anteriormente, é um típico exemplo de “interação forte” entre as duas populações, tornando-os inseparáveis, o que torna o conceito de *sincronismo* inapropriado. A *interação fraca* pode ser exemplificada por dois relógios de pêndulo acoplados pela base de fixação, em que o movimento do pêndulo provoca uma vibração mínima na base e, após algum tempo, tornam-se sincronos (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003).

A interação entre dois osciladores pode ser ainda classificada em *unidirecional* ou *bidirecional*, que diz respeito à forma com que se dá a influencia de um sistema no outro. O acoplamento *unidirecional*, também chamado de mestre-escravo, traz uma hierarquia consigo, em que um sistema influencia outro, mas não o oposto. Como exemplo pode-se citar o ritmo cicardiano (ciclo biológico) de vários seres vivos que é influenciado pela rotação da Terra. Claramente, nosso ciclo biológico (sistema escravo) não influencia a rotação da terra (sistema mestre), mas essa rotação influencia nosso ritmo cicardiano, regulando a digestão, sono, renovação das células. O acoplamento *bidirecional*, também chamado de *sincronismo mútuo*, ocorre quando os sistemas “sentem” e exercem “influência” sobre os pares. Enxames de vagalumes da espécie *Photinus pyralis*, por exemplo, piscam num sincronismo mútuo, em que cada indivíduo percebe e sofre influência de seus pares mais próximos (Miroollo e Strogatz 1990).

2.3 Definição matemática

Os conceitos introduzidos serão formalizados matematicamente a seguir.

2.3.1 Oscilador autossustentável

Matematicamente, um oscilador autossustentável pode ser descrito como um sistema dinâmico *autônomo*, ou seja, sem a dependência explícita do tempo, e representado no espaço de estados na seguinte forma:

$$\mathcal{S} : \{\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}), \quad (2.1)$$

em que $\vec{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema e $\mathbf{f} \in V(X) : X \mapsto V(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ um campo vetorial não linear que, dada uma condição inicial $\vec{x}(0)$, leva o sistema a um conjunto ω -limite não unitário $\Gamma_0 \subset X$ periódico (ciclo limite), *quasi*-periódico ou atrator estranho. O formato da oscilação do sistema deve depender exclusivamente dos parâmetros internos do sistema, e não do seu estado transiente ou inicial (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003).

Note que um oscilador autossustentável não pode ser representado por um sistema *globalmente assintoticamente estável* e tampouco por um sistema *instável*. O oscilador deve possuir uma *região de estabilidade* no sentido de Lyapunov, em que, para qualquer estado inicial $\vec{x}_0 \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$, o sistema evolui de tal forma que, à medida que $t \rightarrow \infty$, seus estados são trazidos a uma região $\Gamma_0 \subset \mathcal{B}$, sendo Γ_0 um conjunto compacto e \mathbf{f} -invariante. A região \mathcal{B} é chamada de *bacia de atração* e seu subconjunto Γ_0 é chamado de *atrator* (Anishchenko et al. 2007).

2.3.2 Frequência e período

Em regime permanente, o oscilador autossustentável é caracterizado pelo seu ritmo, por vezes traduzido em termos de *período*, *frequência* e *fase*. A relação entre a *frequência cíclica* (número de oscilações por unidade de tempo) e o período (tempo de um ciclo de oscilação) é dada por:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.2)$$

É conveniente caracterizar a frequência também em termos de *frequência angular* ω , cuja relação com a *frequência cíclica* f se dá por:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.3)$$

sendo ω expresso em rad por unidade de tempo (e.g. rad/s).

2.3.3 Fase

Fase é a quantidade que é incrementada em 2π num ciclo de oscilação (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003). Em geral, diz-se que a evolução da fase é dada por (Malkin 1959; Winfree 1967; Kuramoto 1984; A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003):

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (2.4)$$

em que $\omega_0 \in \mathbb{R}$ é a frequência angular, *frequência natural* do sistema. Nessa descrição a evolução da fase se dá de forma constante. Apesar dessa descrição ser possível para qualquer regime periódico – ainda que não uniforme (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003), é difícil de aplicar em osciladores caóticos, que tem comportamento aperiódico e, portanto, é difícil definir ω_0 . Talvez uma possível descrição da evolução da fase do sistema pode ser escrita como:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(\vec{x}), \quad (2.5)$$

em que a frequência angular $\omega \in S(X) : X \mapsto S(X) \subseteq \mathbb{R}$ é escrita como um campo escalar, sendo esta uma função do estado do sistema. A Eq. 2.5, que deixa explícito que a frequência do sistema pode variar ao longo de sua trajetória, pode-se aplicar melhor a algumas classes de sistemas. Porém, para fins de conceituação da *fase* de um sistema, considere um sistema *quasilinear* que oscila em regime permanente sobre uma órbita periódica dada por:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0), \quad (2.6)$$

em que A é a amplitude da oscilação e ϕ_0 a fase inicial. Nesse caso a evolução da fase é dada por:

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0. \quad (2.7)$$

É claro que a Eq. 2.7 provém de um sistema relativamente simples, em que pressupõe-se uma frequência ω constante e livre de perturbações externas com relação à evolução de $\phi(t)$. Mas essa descrição traz conceitos valorosos no entendimento de osciladores.

Um primeiro conceito é que a *fase* de um sistema é, geralmente, definida em seu *regime permanente*, ou seja, a evolução de ϕ conforme a Eq. 2.7 se dá quando $\vec{x}(t) \in \Gamma_0$. A definição de fase fora do regime permanente foi definida para sistemas periódicos em termos de *isócronas* (*isochrones*) (Winfree 1967) e é explorada na Seção 2.4 em que é feita uma análise do sistema de Landau-Stuart (Landau 1944; Stuart 1960). Para sistemas caóticos a definição de *isócronas* é inapropriada, uma vez que o sistema não possui período fixo. Em geral, utilizam o conceito de *regiões de mesma fase* (*isophases*) no lugar. Uma aproximação entre um e outro conceito foi proposto nos trabalhos de Schwabedal e A. Pikovsky (2010) e Schwabedal, A. Pikovsky et al. (2012), em que foi utilizado um procedimento de otimização da variância do tempo de retorno para descrever as *regiões de mesma fase*.

A Eq. 2.7 mostra que a evolução da fase no tempo cresce indefinidamente, se descrita num sistema cartesiano. No entanto, como o sistema é periódico, isto é $\phi(t) = \phi(t + T) \forall t$, é possível descrever a fase também em coordenadas cilíndricas $\phi(t) \in \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi[$. Alguns trabalhos se dedicaram a nesse tipo de descrição para sistemas caóticos (Josić e Mar 2001; Beck e Josić 2003).

Outra propriedade interessante da fase (Eq. 2.7) é que esta é uma variável estável – não *assintoticamente estável*. Uma perturbação externa, por exemplo, se mantém constante, não cresce nem decai ao longo do tempo. Um ciclo limite estável possui um expoente de Lyapunov igual a zero, correspondente ao movimento ao longo do ciclo limite – os demais expoentes de Lyapunov são negativos e correspondem às direções transversais ao ciclo-limite. Essa é uma propriedade fundamental da teoria de sincronismo, que mostra que a fase de sistemas periódicos é susceptível a influências externas, o que torna possível a sincronização de um sistema. Essa propriedade da dinâmica da fase também reflete a característica de invariância a deslocamentos temporais de sistemas dinâmicos autônomos: se $\vec{x}(t)$ é uma solução, então a mesma função deslocada no tempo $\vec{x}(t + \Delta t)$ também é solução. No ciclo-limite, o deslocamento temporal Δt corresponde a um deslocamento de fase $\Delta\phi = \omega\Delta t$ (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003).

2.3.4 Oscilador com perturbação externa

O sistema da Eq. 2.1 pode sofrer a ação externa de uma *fraca interação*:

$$\mathcal{S} : \{\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(t), \quad (2.8)$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ denota a força (ganho) e \mathbf{p} a forma da interação. O oscilador autossustentável é estável a pequenas perturbações, em que, após a perturbação, o sistema volta rapidamente ao seu estado oscilatório de regime permanente (A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003).

2.3.5 Acoplamento

Osciladores síncronos podem estar dispostos de diferentes formas, o que dá origem aos tipos de sincronismo. No sincronismo *unidirecional*, ou sincronismo *mestre-escravo*, apenas o sistema *escravo* \mathcal{S}_2 tem a forma da Eq. 2.8 e sofre influência externa do sistema *mestre* \mathcal{S}_1 , que não é influenciado pelo escravo, e tem a forma da Eq. 2.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : & \{\dot{\vec{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\vec{x}_1), \\ \mathcal{S}_2 : & \{\dot{\vec{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) + \varepsilon \mathbf{p}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

No sincronismo *bidirecional*, ou sincronismo *mútuo*, todos os sistemas têm influência uns sobre os

outros e, portanto, todos têm a forma da Eq. 2.8, em que a $\mathbf{p}(t)$ em um sistema é função dos estados de outro(s) sistema(s). Um *sincronismo mútuo* entre dois sistemas \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 descritos conforme a Eq. 2.1, por exemplo, poderia ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 : \dot{\vec{x}}_1 &= \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) + \varepsilon_1 \mathbf{p}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t), \\ \mathcal{S}_2 : \dot{\vec{x}}_2 &= \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) + \varepsilon_2 \mathbf{p}_2(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Note que a forma e intensidade da interação $\varepsilon \mathbf{p}(t)$ pode ser diferente em cada sistema, mas há relações de influência de \mathcal{S}_1 em \mathcal{S}_2 e vice-versa, caracterizando assim o *sincronismo mútuo*.

2.3.6 Formas de sincronismo

O regime de *sincronismo completo* entre dois sistemas \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 ocorre quando ambos apresentam evolução idêntica dos estados:

$$\vec{x}_1(t) \approx \vec{x}_2(t). \quad (2.11)$$

Esse regime pode ser observado, por exemplo, no acoplamento de sistemas com campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$ idêntico em todos os subsistemas, i.e. $\mathbf{f}_1(\vec{x}_1) = \mathbf{f}_2(\vec{x}_2)$.

Por outro lado, o *sincronismo incompleto* ocorre quando a evolução dos estados dos sistemas ocorre de forma não idêntica, mas com alguma relação. Nesse caso, pode ocorrer o *sincronismo de fase*, em que, apesar da evolução dos estados não ser coincidente, a *fase* é síncrona. Considerando a evolução da fase descrita por um campo escalar $\phi(t) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ (Eq. 2.7), o estado síncrono ocorre quando:

$$k\phi_1(t) \approx l\phi_2(t), \quad (2.12)$$

em que k e $l \in \mathbb{N}^*$, considerando um sincronismo ressonante.

Além do estado síncrono, é possível ainda que os sistemas entrem em regime de *travamento de fase* (*phase locking*), em que a diferença de fase entre dois sistemas permanece sempre menor que um valor constante, i.e. sem *escorregamento de fase* (*phase slip*):

$$|k\phi_1(t) - l\phi_2(t)| < \psi_{\max}, \quad (2.13)$$

em que ψ_{\max} é um valor constante inferior a 2π . Neste trabalho, o regime de *travamento de fase* (Eq. 2.13) também será tratado como *sincronismo de fase*, salvo em casos particulares expressamente mencionados.

De forma mais ampla, há também o *sincronismo generalizado*, em que o estado síncrono ocorre quando os estados de um sistema são completamente determinados pelos estados de outro, por meio de uma função injetora que mapeia os estados de um sistema para outro:

$$\vec{x}_1 = \mathbf{H}(\vec{x}_2), \quad (2.14)$$

em que $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ é determinado por $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, por meio do mapeamento $\mathbf{H} : \mathbb{R}^{n_1} \mapsto \mathbb{R}^{n_2}$. Vale notar que, neste caso, a dimensão de ambos sistemas pode ser diferente (i.e. $n_1 \neq n_2$).

2.3.7 Outras formas de sincronismo

Na literatura científica há várias outras denominações e classificações de sincronismo. Algumas das principais são apresentadas brevemente a seguir.

Denomina-se *sincronismo com atraso (lag synchronization)* o sincronismo de sistemas não idênticos, $f_1 \neq f_2$, e ocorre quando os estados são coincidentes a menos de uma diferença temporal de τ_0 , ou seja, $\tilde{x}_1(t) \approx \tilde{x}_2(t + \tau_0)$ (M. Rosenblum, A. Pikovsky e Kurths 1997). O *sincronismo intermitente com atraso (intermittent lag synchronization)*, mostrado no trabalho de M. Rosenblum, A. Pikovsky e Kurths (1997) e estudado por Boccaletti e Valladares (2000), ocorre quando a força de interação ε já possibilita o regime de sincronismo de fase, mas ainda não é suficiente para exibir o regime de *sincronismo com atraso*, é um estágio intermediário entre os dois regimes.

O *sincronismo imperfeito de fase (imperfect phase synchronization)* ocorre quando um sistema caótico é influenciado por uma força periódica externa. Os sistemas ficam em *sincronia de fase* durante longos períodos de tempo, mas com interrupções de curtos períodos de escorregamento de fase. M. A. Zaks et al. (1999) mostrou esse fenômeno para sistemas caóticos com ampla distribuição de períodos (alto coeficiente de difusão).

O trabalho de Femat e Solís-Perales (1999) apresenta outras classificações para o problema de *controle de sincronismo*, em que a função forçante $p(t)$ (Eq. 2.8) provém de um sistema em malha fechada que tenta manter o sincronismo entre os (e.g. dois) sistemas, i.e. $p(t) := g(e(t))$ em que $e(t)$ representa o *erro de sincronismo*. Nesse tipo de problema ocorre o *sincronismo exato (exact synchronization)* quando garante-se que o erro de sincronismo $e(t)$ é assintoticamente estável, i.e. $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Denomina-se *sincronismo prático (practical synchronization)* quando o erro de sincronismo $e(t)$ é estável no sentido de Lyapunov, i.e. garante-se que $e(t) < \delta$ quando $t \rightarrow \infty$. Femat e Solís-Perales (1999) define *quase sincronismo (almost synchronization)* quando: (i) pelo menos um dos estados dos sistemas está em sincronismo, *exato* ou *prático*; e (ii) pelo menos um dos estados não esteja em sincronismo, nem *exato* e nem *prático*.

2.4 O Oscilador de Landau-Stuart

Para uma melhor aprofundamento no estudo de sincronismo de osciladores é instrutivo iniciar a análise num sistema mais simples para possibilitar a comparação com situações mais complexas. Para a análise de sincronismo de osciladores, este texto seguirá a abordagem utilizada nos trabalhos de Winfree (1967) e Kuramoto (1984), em que é analisado o sistema isolado, com uma perturbação externa, e, a partir dessa análise, infere-se suas condições de sincronismo.

Dentre os osciladores periódicos mais analisados estão o sistema de van der Pol (Van der Pol 1927) e a equação de Landau-Stuart (Landau 1944; Stuart 1960). Outros modelos também foram utilizados para representar diferentes sistemas osciladores (e.g. em termos de *fase*) como as equações de Adler (Adler 1973), modelo de Kuramoto (Kuramoto 1984) e o modelo de Winfree (Winfree 1967). A seguir, será utilizada a equação de Landau-Stuart como ponto de partida em que, por se tratar de um sistema periódico, permite análises mais profundas das condições necessárias de sincronismo e caracterização dos fenômenos relacionados. O material apresentado aqui baseia-se em estudos anteriores no mesmo sistema (Kuramoto 1984; A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003; Bonnin, Corinto e Gilli 2010a).

A equação de Landau-Stuart (“modelo lambda-omega”) pode ser escrita como:

$$\dot{A} = (1 + i\eta)A - (1 + i\alpha)|A^2|A. \quad (2.15)$$

que, reescrevendo em coordenadas polares, $A = Re^{i\theta}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= R(1 - R^2), \\ \dot{\theta} &= \eta - \alpha R^2.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Em estado estacionário, o sistema evolui em um ciclo limite de raio unitário, $R = 1$. A Figura 2.1 mostra a evolução do sistema no plano de fases para quatro condições iniciais distintas. Para condições iniciais arbitrárias, $R(0) = R_0$ e $\theta(0) = \theta_0$, a solução da Eq. 2.16 é:

$$\begin{aligned}R(t) &= \left[1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2}e^{-2t}\right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \theta(t) &= \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 + (1 - R_0^2)e^{-2t}).\end{aligned} \quad (2.17)$$

No ciclo limite, o ângulo θ varia com velocidade constante de $\omega_0 = \eta - \alpha$ (frequência) mais uma parcela de fase proporcional a α . Após o estado transitório, quando $t \rightarrow \infty$ e o termo $e^{-2t} \rightarrow 0$, a fase do sistema pode então ser definida em todo o plano (R, θ) como:

$$\phi(R, \theta) = \theta - \alpha \ln R. \quad (2.18)$$

A Eq. 2.18 pode ser verificada tomando-se a derivada, que varia proporcionalmente a $\eta - \alpha$:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \dot{\theta} - \frac{\alpha}{R} \dot{R} \\ &= (\eta - \alpha R^2) - \frac{\alpha}{R} (R(1 - R^2)) \\ &= \eta - \alpha.\end{aligned} \quad (2.19)$$

Verifica-se que a fase para a equação de Landau-Stuart pode ser definida não apenas para o regime permanente, i.e. no ciclo limite, mas também em seus arredores, conforme Eq. 2.18. Outra forma de analisar a evolução da fase do sistema é por meio do conceito de isócronas (*isochrones*) (Winfree 1967; Guckenheimer 1975), explorado a seguir.

2.4.1 Isócronas

Para um oscilador autossustentável, considere o mapeamento:

$$\Phi(\vec{x}) : \vec{x}(t) \mapsto \vec{x}(t + T_0), \quad (2.20)$$

em que T_0 é exatamente o período de oscilação.

Com essa transformação estroboscópica todos os pontos do ciclo limite são pontos fixos, em que a Eq. 2.20 faz o mapeamento para o próprio ponto. Os pontos vizinhos, fora do ciclo limite, são atraídos para o ciclo limite. Considere um ponto arbitrário \vec{x}^* no ciclo limite e todos os pontos vizinhos que são atraídos para \vec{x}^* pela ação de $\Phi(\vec{x})$. Esse conjunto de pontos forma uma hipersuperfície \mathbf{I} de dimensão

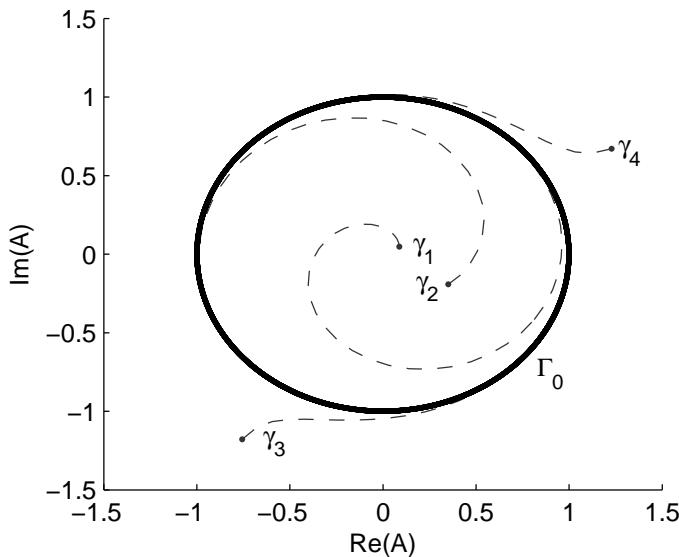


Figura 2.1: Evolução de quatro trajetórias γ_1 , γ_2 , γ_3 e γ_4 no espaço de estados do oscilador autossustentável de Landau-Stuart ($\alpha = 1$, $\eta = 2$), para quatro condições iniciais diferentes (pontos). A solução em estado estacionário é um ciclo limite estável Γ_0 (linha contínua).

($n - 1$) que cruza o ciclo limite no ponto \vec{x}^* , chamada de isócrona (*isochrone*). Desta forma, a fase pode ser definida para qualquer ponto do espaço de fases, baseado no período de evolução do ciclo limite.

A Figura 2.2 mostra um exemplo, para o sistema de Landau-Stuart, em que são representadas quatro hipersuperfícies \mathcal{I}_i , de dimensão 1 ($2 - 1$). Para uma condição inicial $\vec{x}_0 \in \mathcal{I}_i$, aplicando-se sucessivamente o mapeamento $\Phi(\vec{x})$, o sistema evolui sobre a isócrona \mathcal{I}_i até atingir o ponto $\vec{x}^* \in \Gamma_0$. Para o mapeamento (Eq. 2.20), o ponto \vec{x}^* no ciclo limite se comporta como um ponto fixo estável.

Numa outra perspectiva, se tomar uma hipersuperfície \mathcal{I} (*isochrone*) como uma *seção de Poincaré*, pode-se dizer que todos os pontos dessa seção tem o mesmo *tempo de retorno*. Inclusive para pontos não pertencentes ao ciclo limite.

Na equação de Landau-Stuart (Eq. 2.15), tomando-se a transformação de coordenadas realizada, uma isócrona pode ser entendida como um valor fixo para a fase:

$$\theta - \alpha \ln(R) = \text{constante}, \quad (2.21)$$

que, no espaço de estados, para $\alpha \neq 0$, representa espirais logarítmicos em todo o plano. A Figura 2.2 mostra quatro isócronas.

2.4.2 Sistema forçado

É possível reescrever a Eq. 2.15 (sistema de Landau-Stuart) na forma cartesiana:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y), \\ \dot{y} &= y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

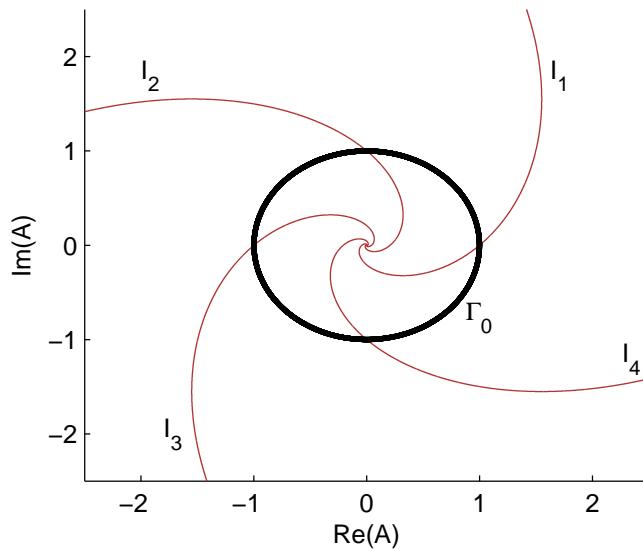


Figura 2.2: Oscilador de Landau-Stuart ($\alpha = 1, \eta = 2$), com o ciclo limite Γ_0 (linha espessa) e algumas isócronas (linhas finas).

e ainda reescrever a equação da fase (Eq. 2.18) como:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad (2.23)$$

em que sua derivada temporal é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\vec{x}) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \mathcal{L}_f \phi(\vec{x}) \\ &= \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \\ &= \omega_0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que $\mathcal{L}_f \phi(\vec{x})$ denota a derivada de Lie do campo escalar $\phi(\vec{x})$ ao longo do campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$, $d\phi/d\vec{x}$ o vetor de derivadas parciais (na equação aparece transposto) de $\phi(\vec{x})$ com relação aos estados \vec{x} e $\omega_0 := \eta - \alpha$, a velocidade angular do sistema, que, por definição, é a derivada temporal da fase ϕ .

Considerando o sistema sob a ação de uma *fraca interação* $\mathbf{p}(t)$ (Eq. 2.8), a Eq. 2.24 torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(\vec{x}) &= \mathcal{L}_f \phi(\vec{x}) + \mathcal{L}_p \phi(\vec{x}) \\ &= \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot [\mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(t)] \\ &= \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{p}(t) \\ &= \omega_0 + \varepsilon \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{p}(t), \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo que o segundo termo à direita da equação tem valor pequeno (proporcional a ε). Considerando-se

que os desvios de \vec{x} em relação ao ciclo limite Γ_0 sejam pequenos, é possível fazer a aproximação:

$$\dot{\phi}(\vec{x}) = \omega_0 + \varepsilon \left. \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \right|_{\Gamma_0} \cdot \mathbf{p}(t), \quad (2.26)$$

que pode ser útil quando não se tem fase bem definida fora do ciclo limite.

Considere que o sistema de Landau-Stuart sofra uma *fraca interação* periódica, apenas no estado x (Eq. 2.22), conforme a seguir:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A derivada temporal da fase (Eq. 2.25) é:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathcal{L}_f \phi(\vec{x}) + \mathcal{L}_p \phi(\vec{x}) \\ &= \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{p}(t) \\ &= \omega_0 + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos(\omega t) \\ &= \omega_0 - \varepsilon \frac{(\alpha x + y)}{x^2 + y^2} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Considerando o sistema no ciclo limite (vide Eq. 2.26), i.e. $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ e $\phi \equiv \theta$, e escrevendo a Eq. 2.28 em termos de ϕ , tem-se:

$$\dot{\phi} = \eta - \alpha - \varepsilon (\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos(\omega t). \quad (2.29)$$

A Eq. 2.29 é a expressão básica que descreve a dinâmica da fase de um oscilador periódico autossustentável forçado. Considere a diferença de fase ψ entre o sistema e a perturbação externa $\mathbf{p}(t)$:

$$\psi = \phi - \omega t, \quad (2.30)$$

em que a fase do sistema forçante é dada por ωt . Calcula-se a dinâmica da diferença de fase:

$$\dot{\psi} = \dot{\phi} - \omega, \quad (2.31)$$

considerando a Eq. 2.29 tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \eta - \alpha - \varepsilon (\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos(\omega t) - \omega \\ &= (\omega_0 - \omega) - \varepsilon (\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

e estabelecendo ν como a diferença de frequência entre o sistema e a perturbação externa:

$$\nu := \omega_0 - \omega, \quad (2.33)$$

tem-se:

$$\dot{\psi} = \nu - \varepsilon (\alpha \cos \phi + \sin \phi) \cos(\omega t). \quad (2.34)$$

Considerando a Eq. 2.30 ainda é possível escrever:

$$\dot{\psi} = \nu - \varepsilon \left[\alpha \cos(\psi + \omega t) + \sin(\psi + \omega t) \right] \cos(\omega t). \quad (2.35)$$

O estudo do sincronismo do oscilador periódico (Eq. 2.15) perturbado por uma força externa se reduz aqui ao estudo da estabilidade da dinâmica da fase (Eq. 2.35). Porém, nota-se que o lado direito da Eq. 2.35 há termos que dependem de $\psi(t)$ e termos que dependem de ωt , mas não apenas de $\psi(t)$. Em outras palavras, trata-se de um sistema não homogêneo de equações diferenciais. A fim de obter um sistema reduzido, dissociado de ωt , que pode ser escrito na forma $\dot{\psi} = f(\psi)$, diferentes considerações e simplificações são realizadas.

Uma simplificação possível foi realizada por Robert Adler em seu trabalho de 1946, em que modelou a dinâmica da diferença de fase de modo que o segundo termo à direita da Eq. 2.35 é representado por uma função senoidal apenas (Adler 1973):

$$\dot{\psi} = \nu - \varepsilon \sin \psi. \quad (2.36)$$

Esse modelo é utilizado ainda hoje para representar sistemas, conhecido como osciladores de fase de primeira ordem (Osipov, Kurths e C. Zhou 2007).

Uma abordagem mais formal para análise da Eq. 2.35 é o teorema de Malkin (Malkin 1949), que fornece uma forma explícita para esse sistema de equações diferenciais que regem o desvio de fase $\psi(t)$ (Hoppensteadt e Izhikevich 1997; Gilli e Corinto 2004). Entretanto, o teorema de Malkin apóia-se na consideração de que as frequências do oscilador ω_0 e do sistema forçante ω_0 sejam ressonantes, *comensuráveis*.

Outra abordagem considera a força de interação como *fraca*, i.e. $\varepsilon \ll 1$. Com essa consideração é possível utilizar métodos assintóticos (Bogoliubov e Mitropolsky 1961), que descrevem sistemas fracamente não lineares, para análise do problema. Dentre os métodos assintóticos, destaca-se o *método da média (averaging method)*, utilizado em vários trabalhos (Bogoliubov e Mitropolsky 1961; Kuramoto 1984; Nayfeh e Mook 1995; Lopatin 1995; Nayfeh 2000; Josić e Mar 2001; Ivanchenko et al. 2004; Bonnin, Corinto e Gilli 2010b; Bonnin, Corinto e Gilli 2010a). A seguir é apresentado o *método de média (averaging method)* e sua aplicação à Eq. 2.34.

2.4.3 O método da média

O *método da média*, também conhecido como método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski, permite a separação de escalas de tempo claramente distintas (Lopatin 1995). Uma variável que tem evolução muito mais lenta que a outra pode ser considerada, aproximadamente, constante durante um ciclo de variação da variável rápida. A equação da dinâmica da diferença de fase (Eq. 2.34) possui duas escalas de tempo distintas, uma 2π -periódica com relação a ϕ e outra T -periódica em relação a ωt . Considerando que as frequências sejam próximas – ou ressonantes $\omega \approx \frac{k}{T}\omega_0$, a diferença de frequência se aproxima de zero, i.e. $\nu \approx 0$. Com essa consideração e assumindo $\varepsilon \ll 1$, é possível afirmar que a evolução de $\psi(t)$ é mais lenta que ωt . Desta forma, é possível eliminar a dependência temporal explícita tomado-se a média temporal ao longo de um ciclo de oscilação referente a ω .

De forma mais geral, para o sistema abaixo:

$$\dot{\psi} = \nu - \varepsilon q(\psi + \omega t, t), \quad (2.37)$$

considerando que ν e ε possuem valores pequenos, o termo do lado direito da Eq. 2.37 assumirá valores pequenos e, portanto, considera-se que a dinâmica de evolução de ψ é mais lenta que a do sistema forçante ωt , i.e. $\dot{\psi} \ll \omega$. Desta forma, tomando-se a média temporal ao longo de um período T , obtém-se:

$$\dot{\bar{\psi}} = \nu - \varepsilon Q(\bar{\psi}), \quad (2.38)$$

em que $\bar{\psi}$ é a dinâmica da diferença *média* de fase e $Q(\bar{\psi})$ o funcional:

$$Q(\bar{\psi}) = \frac{1}{T} \int_0^T q(\psi + \omega t, t) dt. \quad (2.39)$$

Nota-se que a técnica utilizada transforma a equação de fase não homogênea (Eq. 2.35) em uma equação diferencial homogênea (Eq. 2.38), em que é possível determinar os limites e condições de sincronismo baseado na estabilidade da equação dinâmica da diferença de fase. Se a Equação 2.38 tiver um ponto de equilíbrio estável é possível atingir o regime de *travamento de fase* (Eq. 2.13). Se o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, tem-se o regime de *sincronismo de fase* (Eq. 2.12).

Como a Eq. 2.38 representa a equação média em *um ciclo de oscilação* do sistema forçante, uma interpretação possível é que, para atingir o regime síncrono, o termo $\varepsilon Q(\bar{\psi})$ deve conseguir compensar a diferença de frequência ν . Avaliando-se $\varepsilon Q(\bar{\psi})$ em termos de limites máximo e mínimo é possível traçar conclusões dos limiares de sincronismo de um sistema sujeito à uma perturbação externa.

Para o sistema de Landau-Stuart, aplicando-se o método da média, a Eq. 2.35 torna-se:

$$\dot{\bar{\psi}} = \nu - \frac{\varepsilon}{2} (\alpha \cos \bar{\psi} + \sin \bar{\psi}). \quad (2.40)$$

Nesse caso, fica claro que o segundo termo a direita da Eq. 2.40 é limitado em $\pm \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\alpha^2 + 1}$. Nota-se então que, para valores de ν além dos limiares, o sincronismo não é possível. Assim, para atingir o sincronismo é possível estabelecer os limites de ν :

$$-\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\alpha^2 + 1} \leq \nu \leq \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\alpha^2 + 1}. \quad (2.41)$$

Aqui os limites foram estabelecidos para $\omega \approx \omega_0$, mas, sem nenhum prejuízo da análise realizada, o mesmo procedimento poderia ser realizado para os casos ressonantes em que $\nu = \omega \approx \frac{k}{l} \omega_0$. A desigualdade (Eq. 2.41), considerando os casos ressonantes, dá origem as *línguas de Arnold* que são limites de sincronismo definidos no plano $(\frac{\omega}{\omega_0}, \varepsilon)$, conforme mostra a Figura 2.3.

2.5 Outros Osciladores

A extensão das análises feitas na Seção 2.4 para outros osciladores e outras formas de sincronismo – mesmo para sistemas periódicos, se esbarra em algumas dificuldades. Ivanchenko et al. (2004) analisou dois sistemas de Van der Pol em sincronismo por meio de equações de fase e amplitude (método *averaging*), em que descreveu vários regimes dinâmicos (e.g. mono-estabilidade, bi-estabilidade, multi-estabilidade,

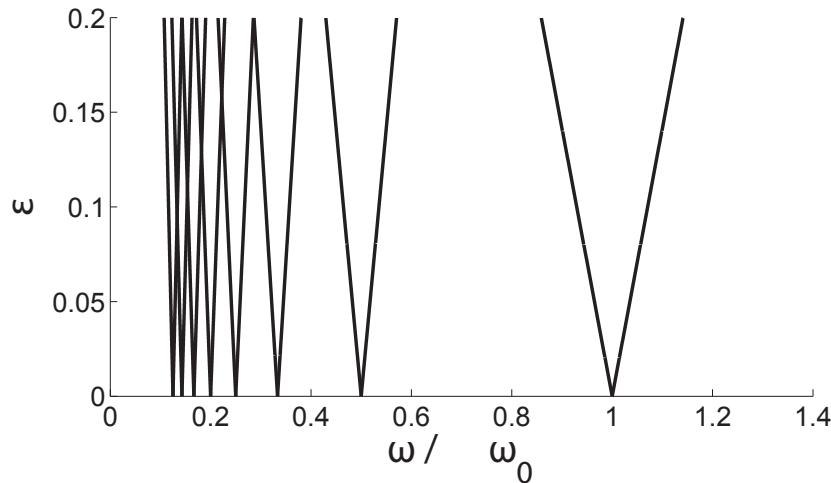


Figura 2.3: Línguas de Arnold, definidas no plano $(\frac{\omega}{\omega_0}, \varepsilon)$, calculadas conforme desigualdade (2.41), considerando os casos ressonantes de $1 : n$ até $n = 8$ para o sistema de Landau-Stuart. Fonte: Bonnin, Corinto e Gilli (2010a).

batimentos) e alguns tipos de bifurcação. Porém, mesmo no caso clássico de osciladores de Van Der Pol acoplados, ainda falta uma completa descrição dos regimes dinâmicos, suas transições e características (Ivanchenko et al. 2004). Talvez uma das grandes dificuldades seja a própria definição de uma variável que descreva a fase, em que nem sempre é possível sua obtenção de forma trivial, ou mesmo a garantia de que a variável obtida representa bem a dinâmica de evolução do sistema.

Para osciladores caóticos as dificuldades são maiores, especialmente para o uso do *método da média*. A falta de um período fixo de oscilação e encontrar uma transformação para um sistema de coordenadas do tipo $\mathbb{R}^{(n-1)} \times \mathbb{S}^1$ (vide, por exemplo, a transição da Eq. 2.28 para Eq. 2.29) são os principais desafios (Josić e Mar 2001). Alguns trabalhos (Josić e Mar 2001; Beck e Josić 2003) mostraram que é possível aplicar o método de redução de fase para osciladores caóticos *forçados* por uma entrada periódica. Josić e Mar (2001) mostrou ainda que uma transformação de coordenadas, em termos de *fase* e *amplitude*, existe para maioria dos sistemas de fase coerente, apresentando condições suficientes para tal. Porém, um procedimento geral para obtenção de uma variável *fase* de um oscilador ainda não está disponível. O capítulo seguinte discute com maior profundidade quais os principais requisitos de uma variável descritora de fase (*phase-like variable*) e apresenta uma proposta de obtenção.

Fase de Osciladores

Conforme apresentado no capítulo anterior, a definição de uma grandeza denominada *fase* para um oscilador periódico, como o sistema de Landau-Stuart, é bem aceita na comunidade científica. Porém, a generalização dessa definição para osciladores não periódicos está longe de um consenso. Neste capítulo serão discutidos os principais trabalhos que propõem tal definição e, na Seção 3.2, uma proposta será apresentada. Possíveis aplicações dessa nova proposta no contexto de sincronismo de osciladores são discutidas.

3.1 Definição de fase

Como discutido anteriormente, a fase de osciladores caóticos não possui uma definição válida para qualquer atrator. Entretanto, parece haver consenso com relação a alguns aspectos que uma suposta variável *fase* deve ter. Vários autores se referem a *fase* como (i) *uma variável que cresce monotonicamente ao longo do tempo* (A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Boccaletti, Kurths et al. 2002; Osipov, Hu et al. 2003; M. Rosenblum, A. Pikovsky, Kurths et al. 2003; Pereira, Baptista e Kurths 2007a; Follmann, Macau e Rosa 2009; Bonnin, Corinto e Gilli 2010a; Schwabedal e A. Pikovsky 2010; Schwabedal, A. Pikovsky et al. 2012; Zou, Donner e Kurths 2012; Follmann, Rosa et al. 2013; Clemson e Stefanovska 2014). Outra referência comum é relacionar a definição de fase do sistema como (ii) *uma variável que corresponde ao expoente nulo de Lyapunov* (A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Blasius e L. Stone 2000; M. Rosenblum, A. Pikovsky, Kurths et al. 2003; Osipov, Hu et al. 2003; Anishchenko et al. 2007; Pereira, Baptista e Kurths 2007a; Suprunenko, Clemson e Stefanovska 2014; Hramov, Koronovskii et al. 2015). Apesar da definição ainda não ser consenso, espera-se que uma definição de *fase* exista para um atrator genérico, devido à existência de um expoente de Lyapunov nulo (Haken 1983), mas seu cálculo explícito pode ser impossível (Pereira, Baptista e Kurths 2007a). Quando a definição se refere a órbitas periódicas, o valor da *fase* pode fornecer a posição geométrica exata no ciclo limite (Anishchenko et al. 2007). Nesse caso também é comum definir a fase como (iii) *uma variável que aumenta de 2π a cada ciclo de oscilação*. Essas três características principais de uma variável que descreve a fase de um sistema balizará as discussões sobre as diferentes definições. Antes de apresentar as definições, apresenta-se o problema de *definição de uma variável descritora da fase de um oscilador*.

3.1.1 Colocação do problema

Seja um oscilador descrito na forma da Eq. 2.1, em que, dada uma condição inicial $\vec{x}(0)$, o estado do sistema é levado a um conjunto não unitário, \mathbf{f} -involutivo $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n$. Deseja-se definir uma variável que

descreva a *fase (phase-like variable)* do sistema:

$$\tilde{\phi} := h(\vec{x}), \quad (3.1)$$

em que $\vec{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $h : X \mapsto S(X) \subseteq \mathbb{R}$.

Para que a evolução temporal de $\tilde{\phi}$ seja monotonicamente crescente (i), a seguinte desigualdade deve ser verificada:

$$\mathcal{L}_f h(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in X, \quad (3.2)$$

em que $\mathcal{L}_f h(\vec{x})$ denota a derivada de Lie do campo escalar $h(\vec{x})$ na direção do campo vetorial $f(\vec{x})$.

Como Γ_0 é um conjunto não unitário, não contém pontos fixos. Qualquer trajetória infinita, limitada, que não converge para um ponto fixo é caracterizada pela existência de pelo menos um expoente de Lyapunov nulo, que corresponde a uma perturbação do estado *ao longo de sua trajetória* (Haken 1983). Espera-se que exista alguma correspondência de $\tilde{\phi}$ com essa direção (ii). É desejável também que a variável $\tilde{\phi}$ incremente 2π a cada revolução em Γ_0 (iii).

A seguir serão discutidas as principais definições de *fase* abordadas na literatura e uma proposta de definição é apresentada na sequência.

3.1.2 Tempo de retorno a uma seção de Poincaré

Quando o atrator Γ_0 possui um centro de revolução bem definido é possível estabelecer uma seção de Poincaré Γ_P e a fase pode ser determinada a partir do cruzamento da trajetória com Γ_P (M. G. Rosenblum, a. S. Pikovsky e Kurths 1996). Para tal, considera-se que há um incremento de 2π a cada encontro com a seção e calcula-se:

$$\tilde{\phi}_1(t) := 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} + 2\pi k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (3.3)$$

em que os sub-índices $k \in \mathbb{N}$ denotam o k -ésimo ponto de cruzamento com Γ_P e t_k os respectivos valores de tempo. Verifica-se que quando $t \neq t_k \quad \forall k$ é realizada uma interpolação linear entre um cruzamento e outro com a seção, gerando pontos não diferenciáveis. Outra característica intrínseca à definição é que considera-se que todos os pontos $\vec{x} \in \Gamma_P$ possuem o mesmo valor de fase (*isophase*).

Essa definição é bastante utilizada e pode produzir bons resultados na detecção de sincronismo de fase (e.g. detecção de escorregamentos de fase, *phase-slips*) e estimativa de um período médio de oscilação. No entanto, a própria definição de uma seção de Poincaré pode ser um obstáculo importante, em que nem sempre é trivial encontrar uma superfície adequada (Letellier e Gilmore 2009). O trabalho de Schwabedal, A. Pikovsky et al. (2012), por exemplo, dedicou-se a encontrar condições para melhor definição de uma superfície de Poincaré, de modo a minimizar a variância do tempo de retorno à seção. Verifica-se também que $\tilde{\phi}_1(t)$ é definido após completar a $(k+1)$ -ésima revolução, em que a determinação do valor da fase não é instantânea. Isso pode dificultar possíveis aplicações de *controle de sincronismo*.

Outra crítica importante a essa definição é que o mapa de Poincaré definido não contém nenhuma informação sobre a temporalidade da fase associada ao fluxo (Yalcinkaya e Lai 1997). Isso significa que para intervalos menores que um período de oscilação a dinâmica da fase é simplesmente desprezada nesse tipo de abordagem, assumindo que $\tilde{\phi}_1(t)$ tenha crescimento uniforme com o tempo em $t_k < t < t_{k+1}$. Em problemas de estabilização do erro de fase, por exemplo, a dinâmica de $\tilde{\phi}$ é de suma importância para projeto de controle de sincronismo ou mesmo sua análise em escalas de tempo inferiores ao período de

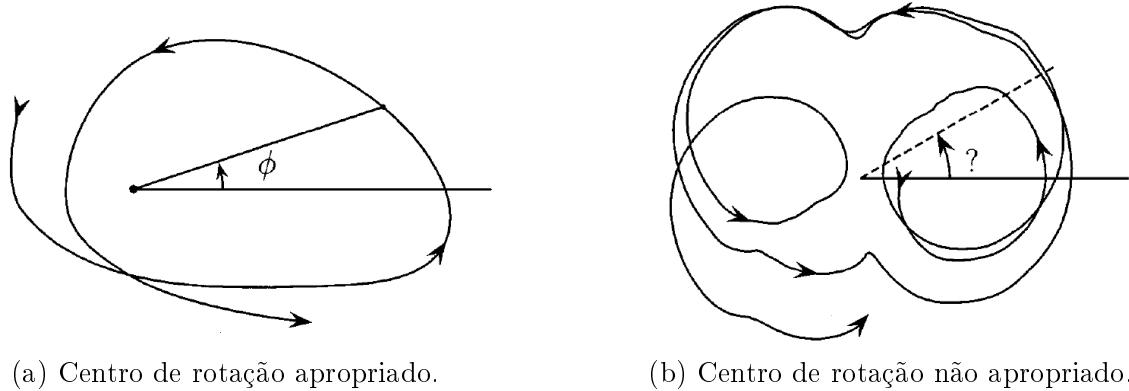


Figura 3.1: Exemplos ilustrativos de centro de rotação (a) escolhido apropriadamente, em que a fase pode ser definida a partir do centro escolhido; e (b) centro de rotação não escolhido apropriadamente, em que o sistema possui vários centros de rotação. Fonte: Yalçinkaya e Lai (1997).

rotação.

3.1.3 Medida direta de ângulo no atrator

A medida direta de ângulo no atrator é uma das definições mais empregadas (E. F. Stone 1992; A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Yalçinkaya e Lai 1997; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum e Kurths 2000; Chen, Wong e Shuai 2001; A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003), especialmente nos casos em que o atrator possui um centro e um sentido de rotação bem definidos num plano. Considerando a rotação projetada no plano (x, y) , define-se:

$$\tilde{\phi}_2(t) := \tan^{-1} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right), \quad (3.4)$$

em que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é o centro de rotação e a função \tan^{-1} é calculada com dois argumentos (e.g. $\text{atan2}(y, x)$) para identificação do ângulo nos quatro quadrantes $\tilde{\phi}_2(t) \in [-\pi, \pi]$. Em geral, exige-se que $(x_0, y_0) \notin \Gamma_0$ a fim de evitar singularidades.

Para que essa definição seja apropriada, as trajetórias devem possuir um sentido bem definido (horário ou anti-horário) em todo atrator. Isso equivale a exigir que o produto vetorial entre o raio de rotação $\rho(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ e a velocidade $\mathbf{f}(\vec{x})$ tenham o mesmo sinal em todo atrator, e.g. $(\rho(\vec{x}) \times \mathbf{f}(\vec{x})) > 0 \ \forall \vec{x} \in \Gamma_0$, ou ainda exigir que $d\tilde{\phi}_2(\vec{x})/dt > 0 \ \forall \vec{x} \in \Gamma_0$. A Figura 3.1 ilustra situações em que essa condição é atendida e quando não é. Encontrar modos de rotação que atendam a essas condições em alguns atratores caóticos foi um dos assuntos tratados por Yalçinkaya e Lai (1997).

Os pontos frágeis dessa descrição de fase estão intrínsecos na própria definição: quando não é possível (ou trivial) encontrar um centro de rotação apropriado, ou quando a rotação não é bem definida no plano. Para atratores do tipo ciclo-limite definidos em \mathbb{R}^2 (e.g. sistemas de Poincaré e Van der Pol) essa definição é quase natural, enquanto que, em atratores caóticos, se restringe a alguns sistemas (e.g. Rössler em regime *espiral*). Para os casos não triviais (e.g. sistema de Lorenz, Rössler em regime funil) alguns trabalhos propuseram mapeamentos para obter um centro de rotação apropriado (A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Chen, Wong e Shuai 2001). Para o sistema de Lorenz, A. S. Pikovsky,

M. G. Rosenblum, Osipov et al. (1997) propôs:

$$\tilde{\phi}_2(t) := \tan^{-1} \left(\frac{u(t) - u_0}{z(t) - z_0} \right), \quad (3.5)$$

em que $u := \sqrt{x^2 + y^2}$ e $(z_0 = 27, u_0 = 12)$ são as coordenadas do ponto de equilíbrio na projeção em (u, z) .

Para o sistema de Rössler em regime funil, Chen, Wong e Shuai (2001) propôs usar:

$$\tilde{\phi}_2(t) := \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right), \quad (3.6)$$

que ajudou a definir melhor um centro de rotação nesse atrator. Contudo, quando $(\dot{x} = 0) \in \Gamma_0$, $\tilde{\phi}_2$ não se define.

Em geral, as propostas de descrição de fase baseadas em medidas diretas de ângulos no atrator (Eq. 3.4) ou em projeções deste (Eqs. 3.5 e 3.6) são sensíveis a uma análise topológica apropriada do atrator e de suas projeções. Quando bem definido para $\vec{x} \in \Gamma_0$, os riscos da aplicação de $\tilde{\phi}_2(t)$ envolvem mudanças no atrator (e.g. devido ao sincronismo) que podem alterar a posição do centro previamente definido, as direções de rotação ou até a própria topologia do atrator (e.g. devido a bifurcações). Esse tipo de definição de fase é empregada assumindo-se que o sistema acoplado possui atrator próximo a Γ_0 . A menos desses cuidados a variável $\tilde{\phi}_2(t)$ pode capturar bem a dinâmica de rotação com valores de fase e periodicidade bem definidas em todo atrator.

3.1.4 Curvatura

As definições de fase $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{\phi}_2$ apresentadas funcionam bem para atratores relativamente simples, com centro de rotações específicos e frequência principal de rotação bem definida, e.g. atratores de *fase coerente*¹. No caso de atratores de fase não coerente, há a necessidade de uma definição de cunho mais geral, como a definição baseada em curvatura proposta por Osipov, Hu et al. (2003).

Para uma curva bidimensional qualquer $\gamma_1 = (u, v)$ a velocidade angular em cada ponto é $\nu = (ds/dt)/R$, em que $ds/dt = \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}$ é a velocidade ao longo da curva e $R = (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)^{3/2}/[\dot{v}\ddot{u} - \dot{u}\ddot{v}]$ o raio da curvatura. Se $R > 0$ em cada ponto, então $\nu = \frac{d\tilde{\phi}_3}{dt} = (\dot{v}\ddot{u} - \dot{u}\ddot{v})/(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$ é sempre positivo e a fase é descrita como:

$$\tilde{\phi}_3(t) := \int \nu dt = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}} \right). \quad (3.7)$$

Geometricamente, isso significa que a projeção (\dot{u}, \dot{v}) é uma curva que gira monotonicamente ao redor de um certo ponto.

Essa definição mais formal, de certa maneira, justifica melhor a Eq. 3.6 proposta por Chen, Wong e Shuai (2001), mas ainda se restringe a uma projeção no plano bidimensional.

A aplicabilidade da medida baseada em curvatura inclui vários osciladores (Osipov, Hu et al. 2003; Kurths et al. 2006). Uma das dificuldades dessa definição é a exigência de que $R > 0$. Essa condição não permite pontos de inflexão da curvatura, i.e. que as trajetórias alternem o sentidos de rotação (horário, anti-horário) na projeção (\dot{u}, \dot{v}) . A projeção no plano bidimensional também é um obstáculo, especialmente para atratores de dimensão mais elevada. O trabalho de Pereira, Baptista e Kurths (2007b) propôs o uso do mapa de Gauss, com mapeamento de uma curva para o espaço circular de raio unitário

¹Vide Zou, Donner e Kurths (2012) para uma discussão acerca da coerência de fase em atratores.

$\gamma \mapsto \mathbb{S}^1$. Essa definição, apesar de mais geral, traz consigo as mesmas características mencionadas quanto ao raio de curvatura da curva: em caso de inflexões na curvatura, a derivada da fase se torna negativa e a fase deixa de ser monotonicamente crescente com o tempo. Outra proposta na mesma linha é a do uso de um ângulo generalizado (Liu e J. Zhou 2009), que permitiu a caracterização de sincronismo generalizado para sistemas de dimensões elevadas ($n > 2$).

3.1.5 Outras definições

Outras formas de extrair uma algum tipo de informação sobre a fase de um oscilador é utilizando técnicas de análises de sinais temporais. Uma das técnicas mais utilizadas é a transformada de Hilbert, que foi empregada no trabalho de M. G. Rosenblum, a. S. Pikovsky e Kurths (1996) – um dos primeiros a caracterizar sincronismo de fase entre dois sistemas caóticos, e em inúmeros outros trabalhos (e.g. Yalçinkaya e Lai 1997; Le Van Quyen et al. 2001; Zou, Donner e Kurths 2012). Análise espectral e transformada Wavelet (Le Van Quyen et al. 2001; Hramov e Koronovskii 2005; Follmann, Macau e Rosa 2009; Follmann, Macau e Rosa 2011; Ferreira 2014; Ferreira, Nóbrega Freitas et al. 2015; Ferreira, Domingues e Macau 2016) também são utilizadas para extrair a fase de um sinal temporal.

Essas técnicas trazem bons resultados em diferentes classes de problemas e aplicações, especialmente quando não se conhece as equações de estado que regem o sistema. Porém, quando se conhece $f(\vec{x})$, naturalmente emerge uma questão: *qual sinal usar para calcular a fase?* Geralmente escolhe-se uma das variáveis de estado que tem fase “bem comportada”. Porém, os critérios para avaliação desse “bom comportamento” são análises posteriores à aplicação das técnicas de extração de fase ou são escolhidos sinais que se assemelham a uma senóide, por exemplo. Para sistemas bastante conhecidos (e.g. Rössler, Lorenz), cujo comportamento das variáveis de estado foram objeto de estudo em vários trabalhos de sincronismo, a escolha do sinal é considerada quase natural. Ao contrário dessa abordagem, a proposta de definição de fase presente neste capítulo pressupõe o conhecimento das equações de estado, buscando trabalhar a seguinte questão: *o que é a fase para um oscilador caótico conhecido?* Essa pergunta pode levar ainda a um caminho para responder a questão anterior, sobre qual sinal escolher para extração da fase, que é um dos assuntos discutidos no Capítulo 4.

3.2 Proposta de Definição de fase

Uma variável que (i) cresce monotonicamente ao longo do tempo com a evolução do sistema e (ii) está fortemente relacionada com a direção correspondente ao expoente nulo de Lyapunov é definida a seguir.

Definição 3.1. A *fase* de um oscilador pode ser descrita por uma variável cuja direção de maior crescimento se dá na direção do campo vetorial de evolução do sistema. \square

A Definição 3.1 apresentada pode ser aplicada em qualquer classe de osciladores, em qualquer sistema de coordenadas utilizado. No entanto, um detalhamento maior da definição se faz necessário. Considerando um oscilador descrito pela Eq. 2.1, uma nova definição de fase, baseada na Definição 3.1, é apresentada.

Definição 3.2. A *fase* pode ser descrita por uma grandeza escalar, cujo vetor de derivadas parciais é

dado por:

$$\frac{d\tilde{\phi}(\vec{x})}{d\vec{x}} = c(\vec{x}) \mathbf{f}(\vec{x}), \quad (3.8)$$

sendo $\mathbf{f} : X \mapsto V(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ o campo vetorial de evolução do sistema, $c(\vec{x})$ um campo escalar $c : X \mapsto S(X) \subseteq \mathbb{R}^{*+}$ que assume apenas valores positivos não nulos em $\vec{x} \in X$. \square

Verifica-se que $\tilde{\phi}$ é definida por suas derivadas parciais² sendo que, dependendo do sistema, pode não haver solução analítica para $\tilde{\phi}(\vec{x})$. Mas atendida a definição verifica-se que a variável é monotonicamente crescente com o tempo, conforme mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.1. *A fase $\tilde{\phi}$ de um sistema dinâmico descrita por:*

$$\begin{cases} \frac{dh(\vec{x})}{d\vec{x}} &= c(\vec{x}) \mathbf{f}(\vec{x}) \\ \tilde{\phi} &= h(\vec{x}) \end{cases} \quad (3.9)$$

sendo $c(\vec{x})$ um campo escalar $c : X \mapsto S(X) \subseteq \mathbb{R}^{*+}$ e $dh(\vec{x})/d\vec{x}$ o vetor de derivadas parciais de h com relação aos estados \vec{x} , atende à condição da Eq. 3.2 (evolução temporal monotonicamente crescente) para todo $\vec{x} \in X$.

Demonstração. Calcula-se derivada temporal de $\dot{\tilde{\phi}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\phi}}(t) &= \frac{d\tilde{\phi}}{dt} \\ &= \frac{d\tilde{\phi}}{d\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h(\vec{x}) \\ &= \frac{dh(\vec{x})}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \\ &= [c(\vec{x}) \mathbf{f}(\vec{x})]^T \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \\ &= c(\vec{x}) \|\mathbf{f}(\vec{x})\|^2 \end{aligned}, \quad (3.10)$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma L_2 . Como $c : X \mapsto \mathbb{R}^{*+}$ é por definição (ver Def. 3.2) sempre positivo e não nulo, tem-se $\mathcal{L}_{\mathbf{f}} h(\vec{x}) > 0 \ \forall \vec{x} \in X$, i.e. derivada temporal $\dot{\tilde{\phi}}(t)$ sempre positiva e evolução temporal monotonicamente crescente. \square

Logo, por construção, a variável definida (Eq. 3.8) é monotonicamente crescente com o tempo (Teorema 3.1) e tem maior crescimento na direção correspondente ao expoente nulo de Lyapunov. Porém, um desafio intrínseco à proposta é a definição do campo escalar $c(\vec{x})$, que tem papel fundamental para que a variável $\tilde{\phi}$ incremente 2π a cada ciclo de evolução. Para o caso de um ciclo limite é possível encontrar tal função, mas torna-se um problema para osciladores não periódicos.

²Neste texto evitou-se usar o termo *gradiente* para referir-se ao vetor de derivadas parciais $d\tilde{\phi}/d\vec{x}$ por não haver garantia de que $\tilde{\phi}$ obedece ao Teorema do Gradiente (ou Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha), que define que a integral de linha de uma curva depende apenas da avaliação da função ($\tilde{\phi}(\vec{x})$) nos pontos inicial e final. É fácil verificar que essa solução existe se $\mathbf{f}(\vec{x})$ é um campo vetorial conservativo – o que não é pressuposto na definição.

Verificou-se que a Eq. 3.8 trata-se de uma equação diferencial parcial e $\tilde{\phi}(\vec{x})$ pode não ter solução analítica. Contudo, é possível fazer a integração numérica do valor da fase para uma trajetória γ :

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 + \int_{\gamma} c(\vec{x}) \mathbf{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}, \quad (3.11)$$

em que $\gamma \subset \Gamma_0$ é a trajetória e $\tilde{\phi}_0 \in \mathbb{R}$ um valor constante. Essa integral de linha, pode ser resolvida ao longo do tempo:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t) &= \tilde{\phi}_0 + \int_0^t c(\vec{x}) \mathbf{f}^T(\vec{x}) \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) \cdot d\tau \\ \tilde{\phi}(t) &= \tilde{\phi}_0 + \int_0^t c(\vec{x}) \|\mathbf{f}(\vec{x})\|^2 \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.1 Regiões de fase equivalente (*isophases*)

As regiões de fase equivalente (*isophases*) podem ser obtidas a partir de $\tilde{\phi}$ proposto na Definição 3.2. Basicamente, essas regiões consistem nas curvas (superfícies, hipersuperfícies) de nível de $d\tilde{\phi}(\vec{x})/d\vec{x}$. Como os campos vetoriais $d\tilde{\phi}(\vec{x})/d\vec{x}$ e $\mathbf{f}(\vec{x})$ são colineares, é possível definir as regiões de fase equivalente a partir de $\mathbf{f}(\vec{x})$ apenas. Essas regiões são formadas pelo *espaço ortogonal*³ ao campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$, definido por $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f}$ conforme abaixo.

Definição 3.3. O *espaço ortogonal* $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f}$ de um campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x}) \in V(X)$ no ponto $\vec{x} \in X$ é definido pelo conjunto $F^\perp(X) = \left\{ \mathbf{f}^\perp(\vec{x}) \in V(X) \mid \langle \mathbf{f}^\perp(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{x}) \rangle = 0, \forall \vec{x} \in X \right\}$, formado por todos os vetores *ortogonais* a $\mathbf{f}(\vec{x})$ no ponto \vec{x} . Observa-se que $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f} \equiv \mathcal{T}_{\vec{x}}F^\perp$, sendo $\mathcal{T}_{\vec{x}}F^\perp$ o espaço tangente a F^\perp em \vec{x} . \square

Desta forma, dada uma condição inicial arbitrária $\vec{x}(0)$, a *fase* em relação a $\mathbf{f}(\vec{x})$ permanecerá constante quando \vec{x} estiver sob a ação de um campo vetorial $\mathbf{f}^\perp(\vec{x}) \in F^\perp(X)$ qualquer. Essa questão é explorada no exemplo abaixo e também aplicada ao sistema de Poincaré na seção seguinte.

Exemplo 3.1. Considere um oscilador periódico no espaço de dimensão $n = 2$, descrito pela Eq. 2.1. Deseja-se encontrar um campo vetorial $\mathbf{f}^\perp(\vec{x}) \in F^\perp(X)$ a partir de $\mathbf{f}(\vec{x})$, de modo que ambos sejam ortogonais entre si, i.e. $\langle \mathbf{f}^\perp(\vec{x}), \mathbf{f}(\vec{x}) \rangle = 0$. Isso é possível por meio da transformação:

$$\mathbf{f}^\perp(\vec{x}) = M_\perp(\vec{x}) \cdot \mathbf{f}(\vec{x}), \quad (3.13)$$

em que $M_\perp(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz de rotação do campo vetorial, dada por:

$$M_\perp(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(\vec{x}) \\ -\alpha(\vec{x}) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

sendo $\alpha(\vec{x}) \in S(X) \subseteq \mathbb{R}$ um campo escalar qualquer.

A Figura 3.2 mostra o espaço ortogonal $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f}$, e vetores dos campos vetoriais $\mathbf{f}(\vec{x})$ e $\mathbf{f}^\perp(\vec{x})$ para um \vec{x} específico. A Figura 3.3 mostra, para o mesmo sistema com atrator Γ_0 , o campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$ e um campo $\mathbf{f}^\perp(\vec{x})$, rotacionado, mostrando direções de crescimento nulo da fase.

³A expressão *espaço ortogonal* é usada aqui com um certo abuso de nomenclatura, com definição semelhante à de *espaço tangente*.

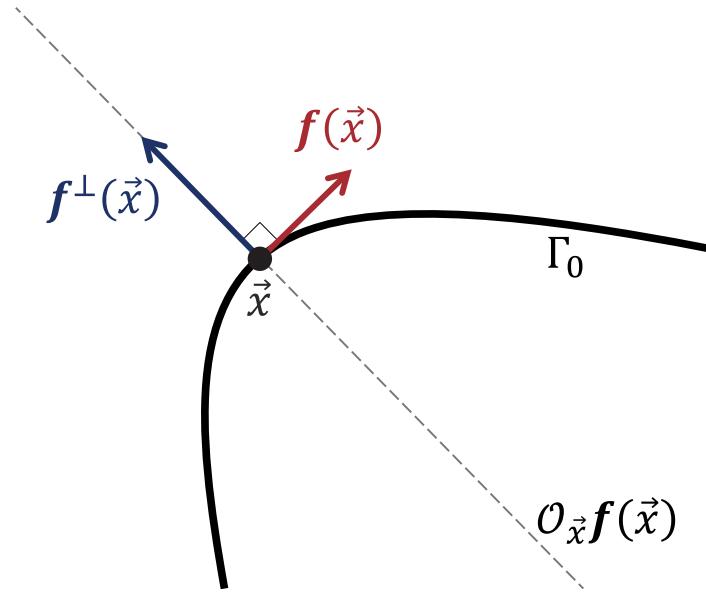


Figura 3.2: Ilustração representando o espaço ortogonal $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f}$ (linha tracejada) e dois vetores $\mathbf{f}(\vec{x})$ e $\mathbf{f}^\perp(\vec{x})$ para um \vec{x} específico. A linha escura contínua representa um trecho de trajetória no atrator Γ_0 (exemplo 3.1).

3.2.2 O Sistema de Poincaré

O sistema de Poincaré pode ser descrito por:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = -\omega y - \lambda(x^2 + y^2 - p^2)x \\ \dot{y} = \omega x - \lambda(x^2 + y^2 - p^2)y \end{cases} . \quad (3.15)$$

em que $\vec{x} := [x \ y]^T \in X \subseteq \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados e $(\omega, p, \lambda) \in \mathbb{R}^{*+}$ parâmetros do sistema. Em regime permanente ($t \rightarrow \infty$) os estados do sistema evoluem para um ciclo limite Γ_0 de raio p e frequência angular ω . Nesse caso, $\sqrt{x^2 + y^2}$ se iguala a p , anulando os termos que multiplicam λ (segundo termo do lado direito das equações de estado, Eq. 3.15) e o sistema evolui como um oscilador harmônico: $\dot{x} = -\omega y$ e $\dot{y} = \omega x$. A Figura 3.4 mostra o espaço de estados do sistema com quatro trajetórias a partir de condições iniciais distintas e a evolução temporal das variáveis de estado em regime permanente.

O sistema de Poincaré (Eq. 3.15) pode ser mapeado para coordenadas polares $\vec{z} := [\theta \ \rho]^T \in Z \subseteq \mathbb{R}^2$ por meio de $\Phi(\vec{x}) : X \mapsto Z$:

$$\vec{z} = \Phi(\vec{x}) := \begin{bmatrix} \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

cujo mapeamento inverso é dado por:

$$\vec{x} = \Phi^{-1}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

No contexto de sincronismo de osciladores, a variável *fase*, em geral, é definida no conjunto ω -limite Γ_0 .

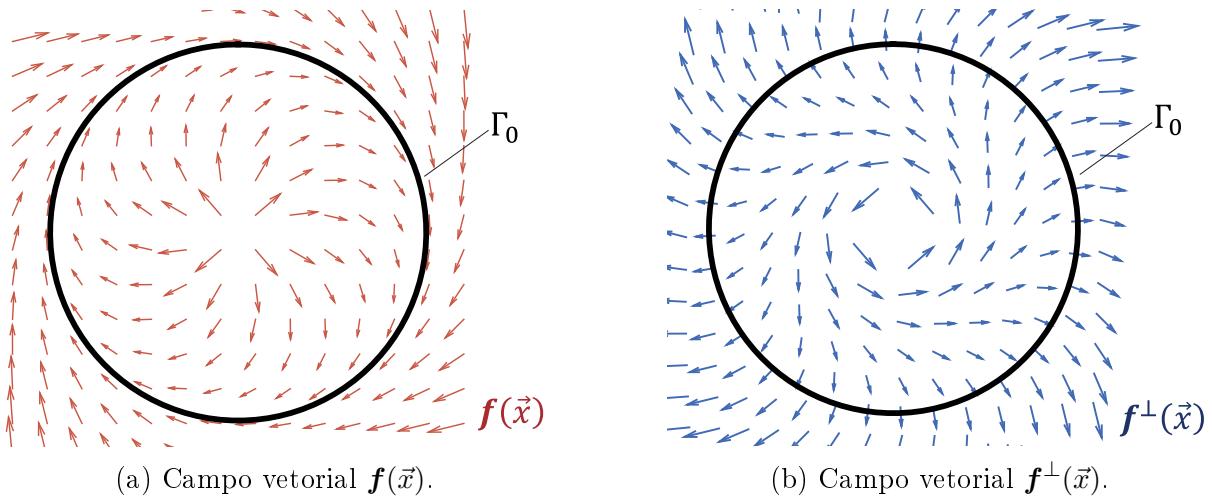


Figura 3.3: Campos vetoriais $\mathbf{f}(\vec{x})$ e $\mathbf{f}^\perp(\vec{x})$ de um mesmo sistema, com atrator Γ_0 representado pela linha escura contínua (exemplo 3.1).

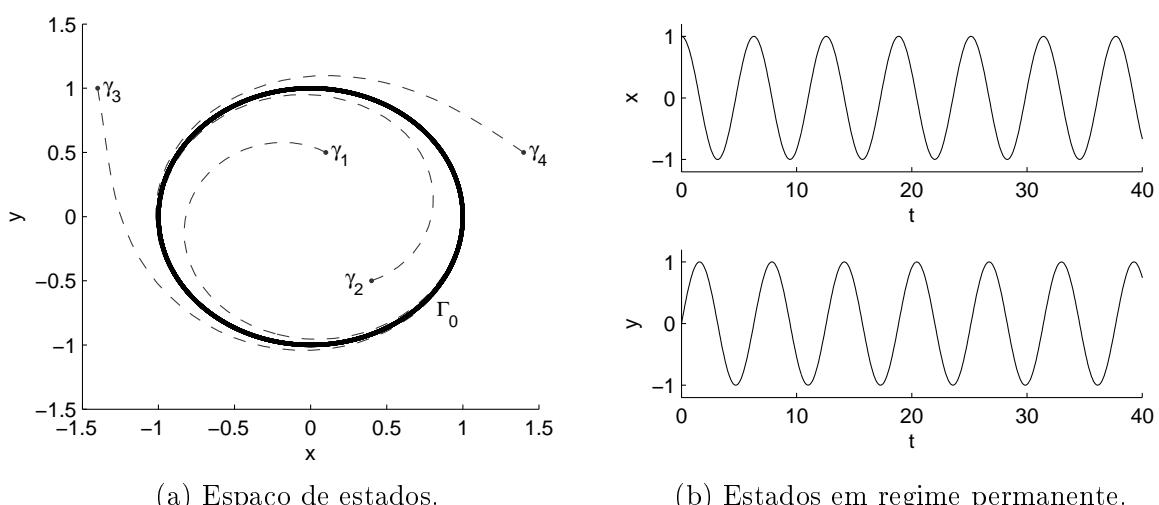


Figura 3.4: Sistema de Poincaré: (3.4a) espaço de estados mostrando quatro trajetórias ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$) com condições iniciais distintas; (3.4b) evolução temporal das variáveis de estado em regime permanente. Parâmetros utilizados $(\omega, \lambda, p) = (1, 0; 0, 5; 1, 0)$.

Para o sistema de Poincaré, há um certo consenso em representá-la como a definição da variável θ acima, em que suas derivadas parciais são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta(\vec{x})}{d\vec{x}} &= \frac{d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{d\vec{x}} \\ &= \begin{bmatrix} -y \\ \frac{x}{(x^2+y^2)} \\ \frac{x}{(x^2+y^2)} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (3.18)$$

e sua derivada temporal com frequência fixa ω :

$$\mathcal{S}_\Phi : \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\rho} = \lambda\rho(p^2 - \rho^2) \end{cases}, \quad (3.19)$$

em que \mathcal{S}_Φ é o sistema \mathcal{S} representado nas coordenadas polares \vec{z} .

Para aplicação da Definição 3.2, faz-se necessário especificar adequadamente o campo escalar $c(\vec{x})$. Para o sistema de Poincaré uma possível proposta é dada por:

$$c(\vec{x}) := \frac{1}{\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{x} - \vec{x}_0\|}, \quad (3.20)$$

em que \vec{x}_0 é o centro de referência ($x = 0, y = 0$) do atrator Γ_0 . Como o sistema de Poincaré descreve uma trajetória perfeitamente circular no atrator, $\dot{\phi}$ pode ser descrito como frequência angular num círculo, dada pela razão entre a velocidade linear e o raio, i.e. $\dot{\phi} = \vec{f}(\vec{x})/\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$. O campo escalar $c(\vec{x})$ proposto na Eq. 3.20 foi concebido para proporcionar essa relação (vide Eq. 3.10), fazendo com que $\dot{\phi}$ possua periodicidade de 2π .

Desta forma, usando a Definição 3.2 e a Equação 3.20, as derivadas parciais de $\tilde{\phi}$ podem ser expressas como:

$$\frac{d\tilde{\phi}(\vec{x})}{d\vec{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{\omega y + \lambda x (x^2 + y^2 - p^2)}{\sqrt{(\omega y + \lambda x (x^2 + y^2 - p^2))^2 + (\omega x - \lambda y (x^2 + y^2 - p^2))^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\omega x - \lambda y (x^2 + y^2 - p^2)}{\sqrt{(\omega y + \lambda x (x^2 + y^2 - p^2))^2 + (\omega x - \lambda y (x^2 + y^2 - p^2))^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Verifica-se claramente que $\frac{d\tilde{\phi}(\vec{x})}{d\vec{x}} \neq \frac{d\theta(\vec{x})}{d\vec{x}}$. No entanto, em regime permanente ($\vec{x} \in \Gamma_0$), tem-se $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ e todos os termos que multiplicam λ se tornam nulos, fazendo com que:

$$\frac{d\tilde{\phi}(\vec{x})}{d\vec{x}} \equiv \frac{d\theta(\vec{x})}{d\vec{x}}, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_0. \quad (3.22)$$

Para o sistema de Poincaré, a fase proposta na Definição 3.2 coincide com a definição da variável $\theta(t)$, largamente utilizada como *fase* do sistema, quando os estados do sistema estão sobre o ciclo-limite Γ_0 .

Fora do atrator ($\vec{x} \in \{X - \Gamma_0\}$), as variáveis $\tilde{\phi}$ e θ possuem definições distintas. Enquanto $\theta(\vec{x})$ é uma

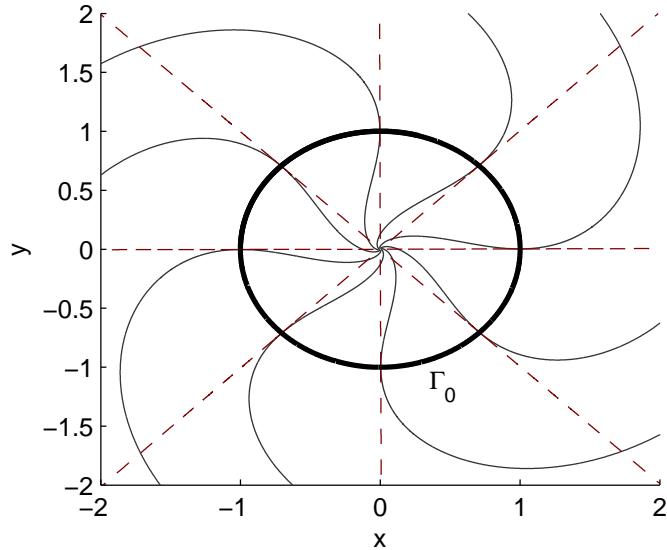


Figura 3.5: Regiões correspondentes a θ constante (linha tracejada) e $\tilde{\phi}$ constante (linha contínua). O atrator Γ_0 é mostrado ao centro (linha contínua espessa). Note que as regiões de fase equivalentes para θ e $\tilde{\phi}$ se tangenciam apenas no atrator Γ_0 . Sistema de Poincaré utilizado com valores de parâmetros $(\omega, \lambda, p) = (1, 0; 0, 5; 1, 0)$.

medida do ângulo a partir da origem (Eq. 3.16) e possui valores idênticos para retas de mesma inclinação a partir do centro do atrator, a variável $\tilde{\phi}(\vec{x})$ tem regiões de mesma fase definidas pelo espaço ortogonal $\mathcal{O}_{\vec{x}}\mathbf{f}$ (Definição 3.3), que podem ser encontradas pela transformação apresentada no Exemplo 3.1⁴. A Figura 3.5 mostra algumas regiões de fase constantes para ambas variáveis $\tilde{\phi}$ e θ para o sistema de Poincaré. Observa-se que as regiões de fase equivalentes para $\theta(t)$ e $\tilde{\phi}(t)$ se tangenciam apenas no atrator Γ_0 .

Além da análise no espaço de estados, explorar a evolução temporal dessas variáveis também se faz importante. Como $\tilde{\phi}$ pode não ter solução analítica (Definição 3.2), essa evolução foi calculada numericamente, dada uma condição inicial, conforme Eq. 3.12. Por outro lado, a evolução de $\theta(t)$ é uma rampa, para qualquer condição inicial, dada por $\theta(t) = \omega t$. A Figura 3.6 mostra as trajetórias no espaço de estados e a evolução temporal das variáveis. Verifica-se que $\tilde{\phi}$ e $\theta(t)$ são monotonicamente crescentes e, em estado estacionário, evoluem com mesma inclinação ω .

3.2.3 Atratores Periódicos

Seja um sistema descrito pela Eq. 2.1 e atrator tipo ciclo limite Γ_0 com período T . O perímetro do atrator no espaço de estados pode ser definido pelo comprimento do arco do atrator em uma revolução (e.g. Spivak 1999, p. 312):

$$\ell = \int_0^T \|\mathbf{f}(\vec{x})\| dt \quad \forall \vec{x} \in \Gamma_0. \quad (3.23)$$

O teorema a seguir mostra uma possível escolha de $c(\vec{x})$ (vide Definição 3.2) para essa classe de osciladores, de modo que $\tilde{\phi}$ incremente 2π a cada ciclo de oscilação.

⁴Para a presente análise do sistema de Poincaré, a matriz de transformação M (Exemplo 3.1) foi utilizada com $\alpha(\vec{x}) := 1$.

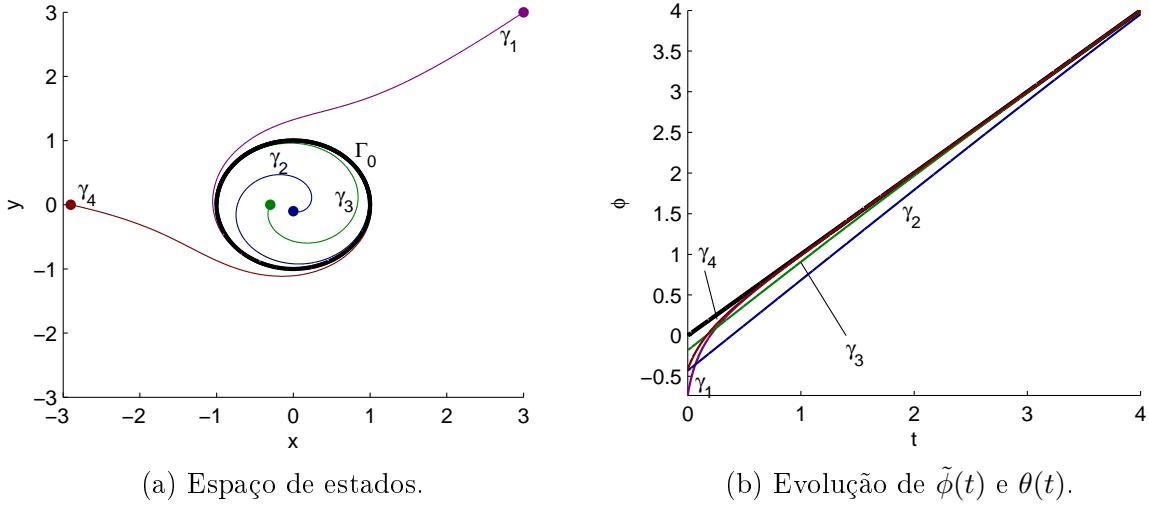


Figura 3.6: Evolução da variáveis descritoras de fase do Sistema de Poincaré: (a) espaço de estados do mostrando quatro trajetórias ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$) com condições iniciais distintas; (b) evolução temporal de $\tilde{\phi}(t)$ para as quatro trajetórias (traços finos) e evolução temporal de $\theta(t)$ (linha espessa). Parâmetros utilizados $(\omega, \lambda, p) = (1, 0; 0, 5; 1, 0)$.

Teorema 3.2. Seja um oscilador periódico descrito pela Eq. 2.1, com período T , atrator ciclo limite Γ_0 . A fase é descrita pela variável $\tilde{\phi}$, conforme Definição 3.2, com:

$$c(\vec{x}) = \frac{2\pi}{\ell \|\mathbf{f}(\vec{x})\|}, \quad (3.24)$$

sendo $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ um valor não nulo constante determinado pela Eq. 3.23, incrementa 2π a cada ciclo de oscilação no atrator.

Demonstração. Fazendo $c(\vec{x})$ conforme Eq. 3.24, é possível calcular o valor de incremento $\tilde{\phi}(t)$ num ciclo de oscilação (Eq. 3.12):

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(t) \Big|_0^T &= \int_0^T c(\vec{x}) \|\mathbf{f}(\vec{x})\|^2 \, dt \\ &= \int_0^T \frac{2\pi}{\ell \|\mathbf{f}(\vec{x})\|} \|\mathbf{f}(\vec{x})\|^2 \, dt \\ &= \frac{2\pi}{\ell} \int_0^T \|\mathbf{f}(\vec{x})\| \, dt \\ &= \frac{2\pi}{\ell} \ell \\ &= 2\pi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

□

É fácil verificar que a proposta de $c(\vec{x})$ na Eq. 3.24 e a utilizada para o sistema de Poincaré (Eq. 3.20) são equivalentes, uma vez que, nesse caso, o perímetro do atrator é dado por $\ell = 2\pi \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$.

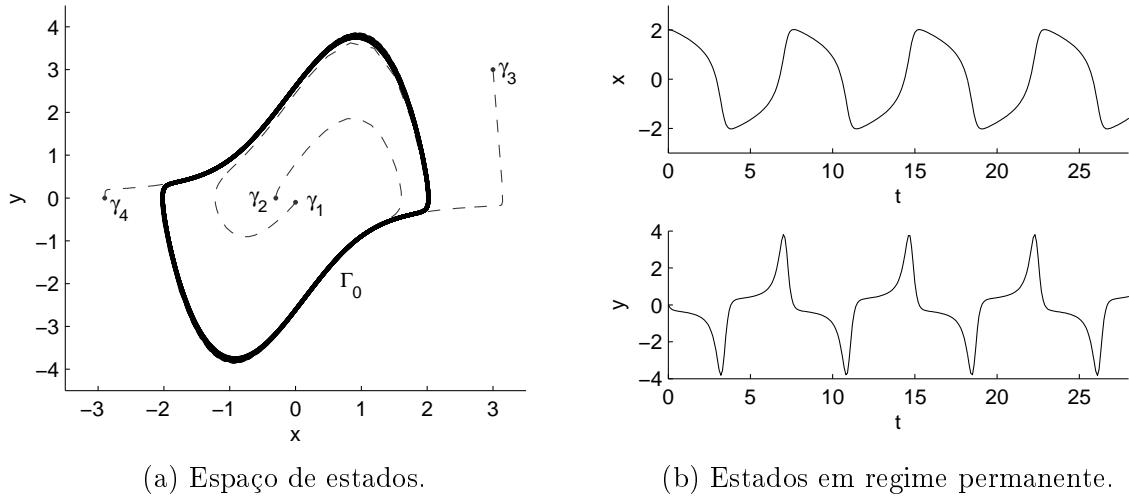


Figura 3.7: Sistema de Van der Pol: (a) espaço de estados do mostrando quatro trajetórias ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$) com condições iniciais distintas; (b) evolução temporal das variáveis de estado em regime permanente. Parâmetros utilizados $(\omega, \mu, \beta) = (1, 0; 1, 0; 1, 0)$.

Sistema de Van der Pol

O sistema de Van der Pol (Van der Pol 1927) é representado por:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\mu y(1 - \beta x^2) - \omega^2 x \end{cases}, \quad (3.26)$$

em que $(\omega, \mu, \beta) \in \mathbb{R}^{+*}$ são parâmetros do sistema. A Figura 3.7 mostra o atrator Γ_0 , algumas trajetórias a partir de condições iniciais distintas e a evolução temporal das variáveis de estado em regime permanente para valores de parâmetros $(\omega, \mu, \beta) = (1, 0; 1, 0; 1, 0)$.

Para esse atrator, o período foi calculado por meio de simulação numérica e usando função de autocorrelação nos estados para obter o valor $T \approx 7,63$ s. Com o valor de período obtido, calculou-se o perímetro $\ell \approx 18,26$, usando a Eq. 3.23. Foi aplicada a definição de fase proposta (Def. 3.2), usando o $c(\vec{x})$ proposto no Teorema 3.2, e a evolução de $\tilde{\phi}(t)$ no ciclo limite foi calculada por integração numérica da Eq. 3.12. A Figura 3.8 mostra a evolução temporal da fase proposta junto com algumas regiões de fase equivalente do atrator, conforme Definição 3.3. Verifica-se que a evolução temporal de $\tilde{\phi}(t)$ tem frequência (inclinação) média igual à calculada pelo tempo de retorno a uma seção de Poincaré adequada (Sec. 3.1.2), dada por $\bar{\omega} = 1/(2\pi T)$, mostrada em linha tracejada na Figura 3.8b. As variações na inclinação de $\tilde{\phi}(t)$ se devem às acelerações e desacelerações na evolução dos estados.

3.2.4 Atratores caóticos

A aplicação da proposta de Definição 3.2 de fase para osciladores caóticos tem uma dificuldade quanto à definição do campo escalar $c(\vec{x})$. Uma alternativa é aproximar o atrator caótico por um ciclo limite e proceder a análise, como feito na Seção 3.2.3, utilizando um perímetro médio $\bar{\ell}$. Nesse caso, talvez seja interessante utilizar alguma(s) UPO(s) (órbita periódica instável, do inglês *unstable periodic orbit*) como

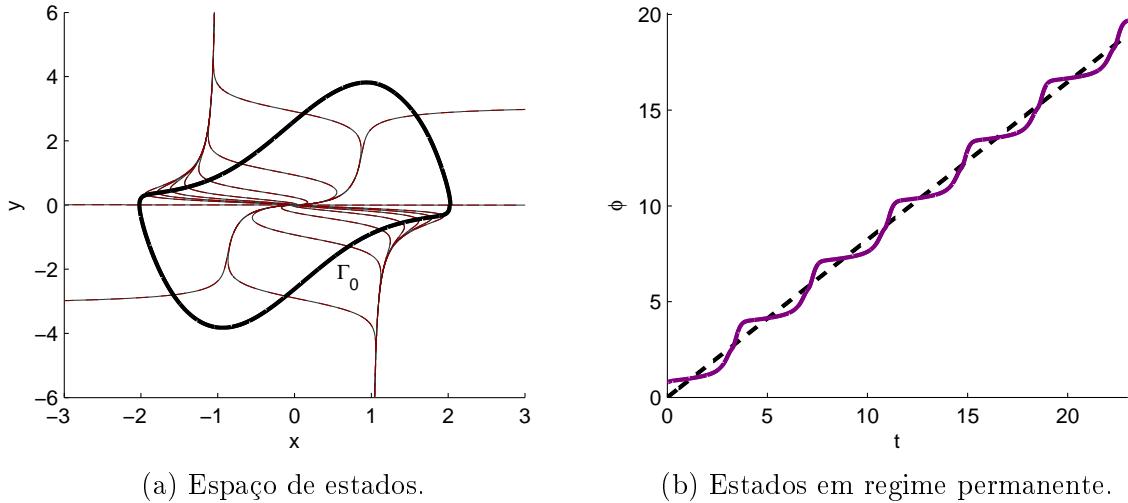


Figura 3.8: Sistema de Van der Pol: (a) regiões de fase equivalentes calculadas conforme Definição 3.3; (b) evolução temporal da variável $\tilde{\phi}(t)$ no atrator Γ_0 conforme proposta usada no Teorema 3.2 (traço contínuo) e evolução de $t/(2\pi T)$ (linha tracejada), em que T é o período de oscilação. Parâmetros utilizados $(\omega, \mu, \beta) = (1, 0; 1, 0; 1, 0)$.

referência, já que as UPOs são consideradas o “esqueleto” do atrator caótico (A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997).

No caso em que o perímetro (i.e. comprimento do arco em uma revolução) do atrator varia muito conforme a trajetória no atrator, uma solução possível seria buscar uma transformação de coordenadas que comprimam as trajetórias no espaço, de modo a reduzir a variabilidade do seu perímetro. Para isso seria necessário uma análise cuidadosa da topologia do atrator e possíveis transformações. Note que, para a definição proposta, acelerações abruptas na evolução dos estados não interferem na definição de $c(\vec{x})$, uma vez que esse tipo de informação já está contido em $\mathbf{f}(\vec{x})$, que é parte da definição, dando um pouco mais de liberdade para a escolha da transformação de coordenadas. Para outras definições de fase que possuem um vínculo estreito com a evolução temporal (e.g. *tempo* de retorno a uma seção de Poincaré), acelerações bruscas na evolução dos estados pode prejudicar muito a estimativa da fase e detecção de sincronismo.

Por outro lado, aproximando o oscilador caótico como um ciclo limite, a aplicação da definição proposta pode ficar restrita a atratores “bem comportados” (e.g. de fase coerente). Uma alternativa viável seria estimar $\hat{c}(\vec{x})$ de tal maneira a atender a condição de incremento de 2π em $\tilde{\phi}$ a cada revolução no atrator. Como referência para essa estimação, o uso da definição de fase pela seção de Poincaré pode ser interessante, especialmente se essa seção for definida como uma variedade do espaço ortogonal (Def. 3.3) do campo vetorial do oscilador.

Outra abordagem possível é definir fase de forma híbrida, com o uso da seção de Poincaré e da Definição 3.2. Desta forma, a seção de Poincaré detecta bem possíveis escorregamentos de fase e a definição proposta captura bem a dinâmica de evolução em escalas de tempo inferiores a um período de oscilação. A ideia é usar uma técnica como complemento da outra.

Envolver a definição de fase por curvatura no espaço ou ângulo generalizado também seria uma alternativa. Nesse caso vale uma análise mais criteriosa acerca do crescimento monotônico com o tempo da variável fase nos casos de inflexões na curvatura da trajetória.

Apenas para fins de ilustração, as Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 mostram a evolução temporal da variável $\tilde{\phi}(t)$ para alguns atratores. A evolução temporal foi calculada por integração numérica da Eq. 3.12 com $c(\vec{x}) := 1/\|\mathbf{f}(\vec{x})\|$, escolhido de forma arbitrária. Nesse caso não se espera incremento de 2π a cada revolução no atrator, mas é possível verificar a dinâmica de evolução da variável para diferentes sistemas.

3.3 Detecção de Sincronismo

O problema de detecção de sincronismo em sistemas dinâmicos consiste na identificação da existência de regime síncrono entre dois osciladores e sua classificação, e.g. em *sincronismo completo*, *sincronismo de fase*, *sincronismo generalizado*, sem sincronismo, etc. Vários trabalhos se propuseram a resolver tal problema de formas diversas e em diferentes contextos. Este trabalho se atém à detecção do *sincronismo de fase* entre osciladores descritos no espaço de estados (Eq. 2.1), conforme definição do problema a seguir.

Considere dois osciladores acoplados, descritos por:

$$\mathcal{S}_{1,2} : \begin{cases} \dot{\vec{x}}_{1,2} &= \mathbf{f}_{1,2}(\vec{x}_{1,2}) + \varepsilon_{1,2} \mathbf{g}_{1,2}(\vec{x}_{1,2}, \vec{x}_{2,1}) \\ \varphi_{1,2} &= H_{1,2}(\mathbf{f}_{1,2}, \vec{x}_{1,2}) \end{cases}, \quad (3.27)$$

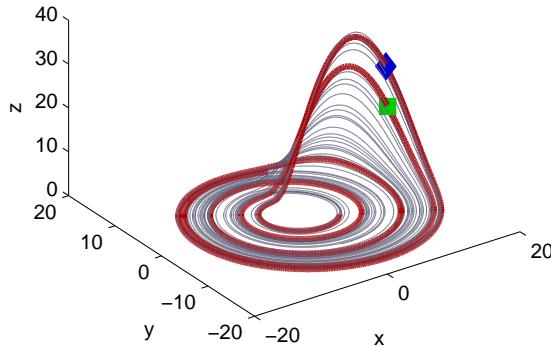
em que $\vec{x}_{1,2} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ são os estados dos sistemas, $\mathbf{f}_{1,2} \in V(X)$ os campos vetoriais dos osciladores não acoplados, $\varepsilon_{1,2} \in \mathbb{R}$ a força de acoplamento, $\mathbf{g}_{1,2} \in V(X)$ o campo vetorial de acoplamento, $H_{1,2} : V(X) \mapsto S \subseteq \mathbb{R}$ um funcional⁵ que define a saída $\varphi_{1,2}$ de cada sistema. Os subíndices denotam cada um dos osciladores \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

Para o caso de detecção de *sincronismo de fase* a abordagem mais utilizada é tentar determinar $H_{1,2}$ de modo que $\varphi(t)$ descreva a evolução da fase no tempo e seja possível verificar diretamente se $|k\varphi_1(t) - l\varphi_2(t)| < 2\pi$, $\forall t > t_0$ e $(k, l) \in \mathbb{N}^*$.

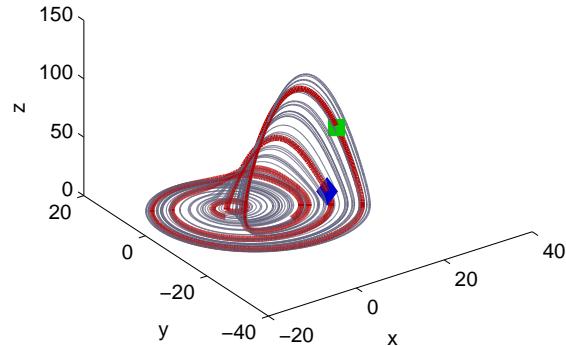
Algumas abordagens consideram os estados $\vec{x}_{1,2}$ e os campos vetoriais $\mathbf{f}_{1,2}$ e $\mathbf{g}_{1,2}$ desconhecidos e tentam descrever formas de obter a *fase do sistema* a partir de uma única série temporal $h(\vec{x}, t)$. Nesse caso as técnicas mais utilizadas são as transformadas de Hilbert (M. G. Rosenblum, a. S. Pikovsky e Kurths 1996; Yalçinkaya e Lai 1997; Le Van Quyen et al. 2001; Quian Quiroga et al. 2002; Romano et al. 2005; Zheng et al. 2014), Wavelet (Quian Quiroga et al. 2002; A. A. Koronovskii 2005; Hramov e Koronovskii 2005; Ferreira 2014; Ferreira, Nóbrega Freitas et al. 2015; Ferreira, Domingues e Macau 2016) e métodos baseados na estimativa de frequência (Quian Quiroga et al. 2002; Bruns 2004; Hramov e Koronovskii 2005; Follmann, Macau e Rosa 2009; Follmann, Macau e Rosa 2011; Follmann, Rosa et al. 2013), em que um possível ruído no sinal medido $h(\vec{x}, t)$ eleva o grau de dificuldade de estimativa. Em vários trabalhos em que se emprega tais métodos é comum escolher de forma empírica (vide Capítulo 4 para uma discussão detalhada) uma das variáveis de estados e utilizá-la como medição.

Considerando que $\vec{x}_{1,2}$, $\mathbf{f}_{1,2}$ e $\mathbf{g}_{1,2}$ são conhecidos, resta tentar responder à pergunta: *como calcular a fase de um atrator?* Ou: *Como determinar o funcional $H_{1,2}(\mathbf{f}_{1,2}, \vec{x}_{1,2})$?* Os métodos mencionados no parágrafo anterior se mostraram eficazes na estimativa da fase de um *sinal*, porém, num oscilador caótico, por exemplo, existem, no mínimo, três variáveis que podem ser medidas e estimadas a *fase* de cada uma delas. É nesse contexto que a Definição 3.2 pode auxiliar na detecção de sincronismo de fase.

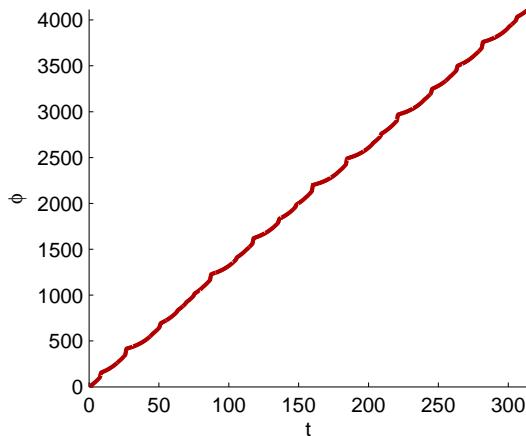
⁵Aqui foi considerado como funcional, mas em alguns casos consiste em apenas uma função $H_{1,2}(\mathbf{f}_{1,2}, \vec{x}_{1,2}) := h(\vec{x})$.



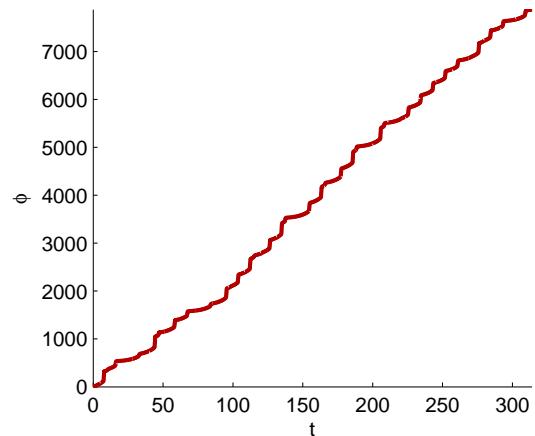
(a) Atrator Rössler espiral.



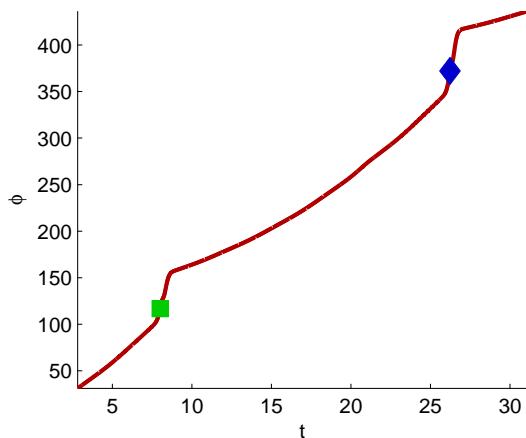
(b) Atrator Rössler funil.



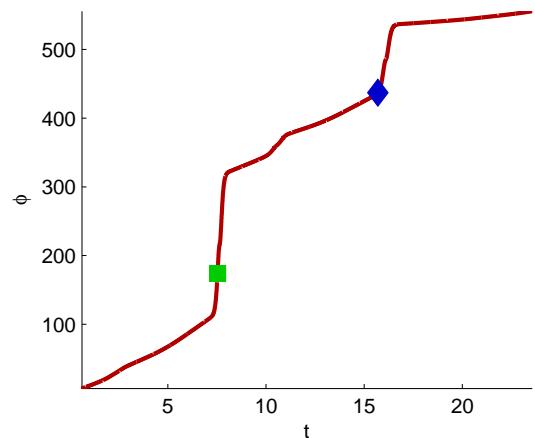
(c) Evolução da fase (espiral).



(d) Evolução da fase (funil).

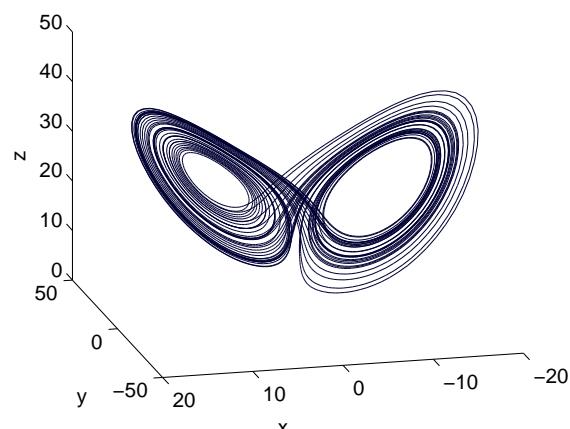


(e) Detalhe evolução da fase (espiral).

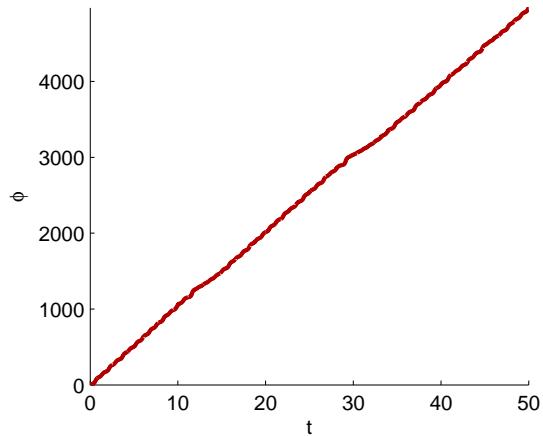


(f) Detalhe evolução da fase (funil).

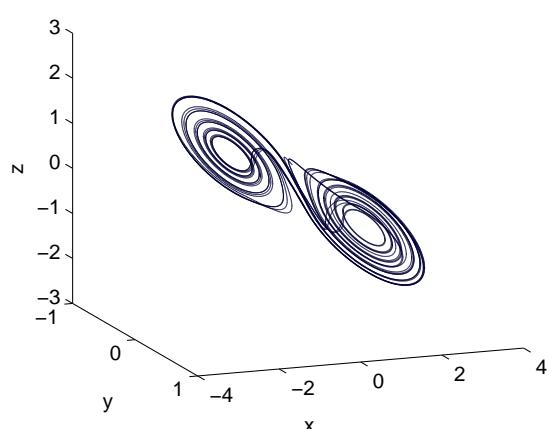
Figura 3.9: Sistema de Rössler: (a, b) atrator com alguns trechos de trajetória destacados; (c, d) evolução temporal da fase; (e, f) detalhe da evolução da fase. Parâmetros utilizados $(\omega, a, b, c) = (1, 0 ; 0.15 ; 0.2 ; 10)$ para regime espiral e $(\omega, a, b, c) = (1, 0 ; 0, 2925 ; 0, 1 ; 8.5)$ para regime funil.



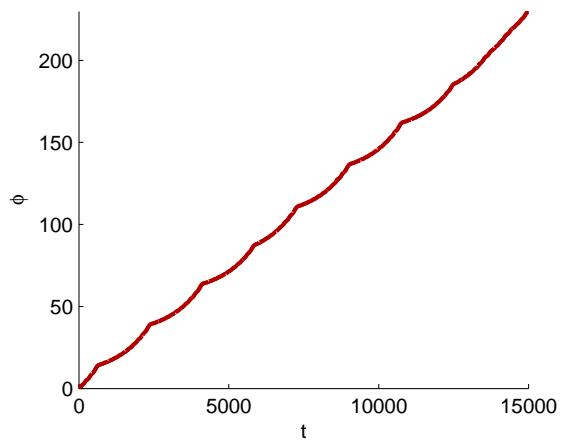
(a) Atrator de Lorenz.



(b) Lorenz: evolução temporal da fase.

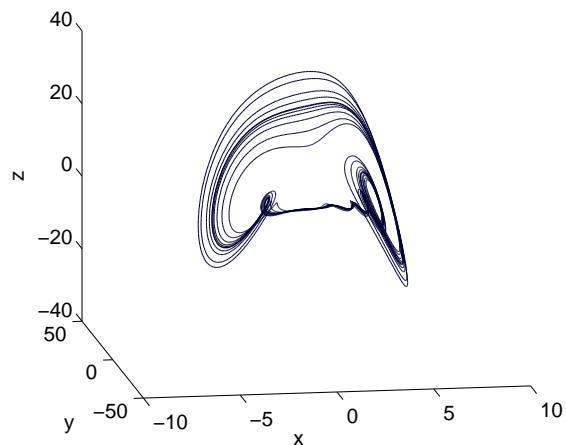


(c) Atrator de Chua.

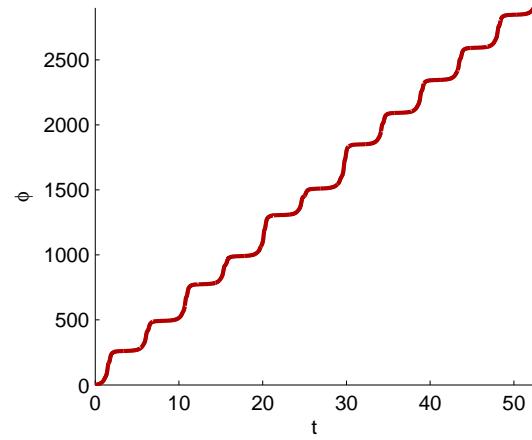


(d) Chua: evolução temporal da fase.

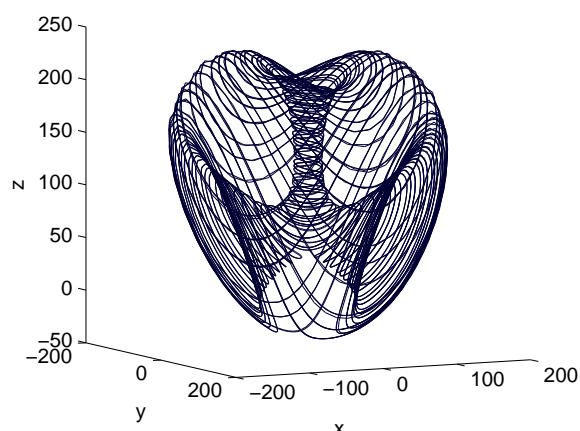
Figura 3.10: Sistemas de Lorenz e Chua: (a, c) atratores caóticos e (b, d) as respectivas evoluções temporais da variável fase.



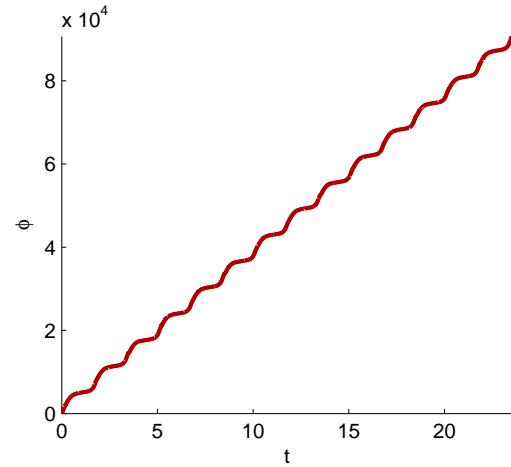
(a) Atrator Corda.



(b) Corda: evolução temporal da fase.



(c) Atrator de Li.



(d) Li: evolução temporal da fase.

Figura 3.11: Sistemas Corda e de Li: (a, c) atratores e (b, d) as respectivas evoluções temporais da variável fase.

Dentre os métodos mais utilizados para determinação de $H_{1,2}(\mathbf{f}_{1,2}, \vec{x}_{1,2})$ estão a medida direta de um ângulo a partir de um centro de rotação (E. F. Stone 1992; A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Chen, Wong e Shuai 2001; A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003) e o tempo de retorno a uma seção de Poincaré (M. G. Rosenblum, a. S. Pikovsky e Kurths 1996; A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Park, M. a. Zaks e Kurths 1999; Schwabedal, A. Pikovsky et al. 2012). Esses métodos podem se tornar ineficazes ou inaplicáveis para atratores de fase *não coerente* (Zou, Donner e Kurths 2012), sendo que, em alguns casos, é difícil até definir uma seção de Poincaré adequada (Romano et al. 2005).

Definições de $H_{1,2}(\mathbf{f}_{1,2}, \vec{x}_{1,2})$ que têm bom desempenho para atratores de *fase não coerente* foram propostas, tal como uma medida baseada na ideia geral de curvatura (Osipov, Hu et al. 2003; Kurths et al. 2006), mas se restringe a sistemas de baixa dimensão (Romano et al. 2005; Marwan et al. 2007). Outras abordagens incluem gráficos de recorrência (Romano et al. 2005; Kurths et al. 2006) e conjuntos localizados (Pereira, Baptista e Kurths 2007a), que, apesar de abranger uma classe maior de sistemas, não geram uma expressão contínua no tempo para a fase do oscilador.

Por outro lado, a variável *fase* proposta na Definição 3.2 pode aplicar-se a osciladores caóticos de diferentes classes, desde que definido adequadamente o campo escalar $c(\vec{x})$ – obstáculo importante a ser transposto. Espera-se que tal definição ajude no problema de detecção de sincronismo de fase entre osciladores. Testes numéricos preliminares, não descritos aqui, verificaram a aplicabilidade para osciladores periódicos.

3.4 Conclusões do Capítulo

Neste capítulo foi apresentada uma proposta de definição de fase (Def. 3.1) para o contexto de sincronismo de osciladores. Mostrou-se que a proposta permite o cálculo de uma variável descritora de fase para qualquer sistema periódico, utilizando o perímetro do atrator (Teorema 3.2). Para o atrator (perfeitamente circular) de Poincaré, mostrou-se que a proposta coincide com a definição de fase calculada por arcotangente. Para atratores não periódicos há um desafio – ainda não superado, na aplicação da definição, mas que pode gerar ganhos em termos de representação da dinâmica da fase em intervalos de tempo inferiores a um ciclo de oscilação.

Este capítulo apresentou uma análise sobre o conceito de *fase* para um oscilador. O capítulo seguinte, baseado nas discussões aqui apresentadas, trabalha sobre formas de *atuar* e *medir* essa fase, com vistas ao sincronismo de fase.

Informação de Fase

O sincronismo de fase de osciladores, na maioria das definições presentes em trabalhos científicos, pressupõe a existência de uma grandeza denominada *fase* proveniente dos osciladores. A busca de um conceito que caracterize esta grandeza foi o tema do Capítulo 3. Neste capítulo estuda-se como forças externas (e.g. acoplamento com outro oscilador) podem influenciar a dinâmica da fase de um oscilador e como informações sobre essa grandeza podem ser extraídas do sistema, considerando a proposta do capítulo anterior. Sob essa perspectiva, são estudadas formas de acoplamento, especialmente para osciladores vastamente utilizados em trabalhos de sincronismo. São propostas três métricas para quantificar i) a *informação* sobre a fase que um sinal de saída pode ter, ii) a *representatividade* de fase de um sinal de saída e iii) a *influência* na fase que um sinal de entrada pode exercer. São apresentados exemplos em que as métricas são utilizadas para escolha da variável de acoplamento e para avaliação de uma variável descritora de fase (*phase-like variable*).

4.1 Introdução

Neste capítulo serão considerados osciladores descritos por uma equação de estado, tal qual a Eq. 2.1, e que estes admitem apenas *uma* variável que descreva a *fase* da oscilação. Sistemas que admitem nenhuma (e.g. nenhum expoente de Lyapunov nulo) ou mais de uma (e.g. mais de um expoente de Lyapunov nulo) variável *fase* não são considerados.

As análises são realizadas considerando a Definição 3.1: a direção de maior crescimento da fase é a mesma do campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$. Assumindo tal definição, é possível dizer que a evolução da fase durante a oscilação pode ser percebida em qualquer projeção $\mathbf{f}(\vec{x})$, em maior ou menor grau. Isso significa que qualquer variável de estado (e.g. x) possui alguma informação sobre a evolução da fase do sistema no instante em que sua derivada é não nula (e.g. $\dot{x} \neq 0$), já que a derivada de uma variável de estado é uma projeção do campo vetorial e, portanto, uma projeção do crescimento da fase. É possível imaginar então que um oscilador, definido num espaço de dimensão adequada, pode alcançar o sincronismo de fase com acoplamento em qualquer uma das variáveis de estado. Essa assertiva não se verifica na prática, uma vez que a projeção nos estados não é igualmente balanceada, sendo que algumas variáveis possuem mais *informação de fase* em relação a outras e, ainda, algumas possuem mais *influência na fase* do sistema do que outras.

A seguir será analisado o problema de sincronismo de fase do ponto de vista dos conceitos de *informação* e *influência* de fase. Será avaliado o quanto de informação sobre a fase do oscilador pode estar contida numa variável de estado – ou num sinal de saída do sistema, e o quanto um sinal de entrada pode influenciar a dinâmica da fase. A discussão será direcionada sempre com vistas ao sincronismo de fase de

osciladores.

4.1.1 Colocação do problema

Sejam dois osciladores acoplados unidirecionalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 : & \left\{ \dot{\vec{x}}_0 = \mathbf{f}_0(t) \right. \\ \mathcal{S} : & \left\{ \dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{p}(t) . \right. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assume-se que os sistemas \mathcal{S}_0 e \mathcal{S} admitem uma fase ϕ_0 e ϕ , respectivamente. O acoplamento entre os sistemas é realizado pelo campo vetorial $\mathbf{p}(t)$. Para uma primeira análise, assume-se que o sincronismo de fase ocorre quando:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t) \approx \phi_0(t) \\ \dot{\phi}(t) \approx \dot{\phi}_0(t). \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Para que ocorra o sincronismo de fase entre \mathcal{S}_0 e \mathcal{S} , o acoplamento \mathbf{p} tem papel fundamental no controle de $\phi(t)$. Nesse papel distingue-se duas atribuições: (i) *medição* e (ii) *atuação*. A primeira refere-se a (i) levar a \mathcal{S} informação sobre a evolução da fase de \mathcal{S}_0 , enquanto a segunda diz sobre (ii) a direção de atuação em \mathcal{S} de modo a influenciar ao máximo sua fase para atingir o sincronismo, fazendo com que $\phi_0 \approx \phi$. Para distinguir essas duas atribuições, define-se¹:

$$\mathbf{p}(t) := \mathbf{g}(t)u(t), \quad (4.3)$$

em que \mathbf{g} é um campo vetorial de norma unitária $\|\mathbf{g}(t)\| = 1 \ \forall t$ que diz respeito à *direção* de atuação em \mathcal{S} , enquanto que $u(t)$ diz respeito à *forma* de atuação – que deve conter alguma informação sobre a fase do oscilador \mathcal{S}_0 . Em outras palavras, $u(t)$ está relacionado à (i) *medição* da fase ϕ_0 e \mathbf{g} está relacionado com a (ii) *atuação* na fase ϕ , cuja dinâmica é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathcal{L}_{(\mathbf{f}+\mathbf{p})}\phi \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{f}}\phi + \mathcal{L}_{\mathbf{p}}\phi \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{f}}\phi + (\mathcal{L}_{\mathbf{g}}\phi) u(t) \\ &= \left(\frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f} \right) + \left(\frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{g} \right) u(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

em que \mathcal{L} denota a derivada de Lie e as dependências explícitas de \vec{x} e t foram omitidas por concisão².

¹Esse desmembramento de \mathbf{p} é considerado razoável, já que se pressupõe que a variável fase ϕ , que se deseja controlar (i.e. sincronizar), é unidimensional, não sendo necessário, por exemplo, considerar mais de um sinal de entrada (e.g. u_1, u_2, u_3, \dots).

²A partir deste ponto algumas dependências explícitas de \vec{x} e t serão omitidas, para maior simplicidade.

4.1.2 Atuação na fase

Para análise da *atuação* de $u(t)$ na equação dinâmica $\dot{\phi}$ (Eq. 4.4), supõe-se que $u(t)$ é um sinal adequado para atingir o sincronismo (Eq. 4.2) e tem norma limitada por $\|u(t)\| < u_{\max} \forall t$. Nesse caso, o papel de $\mathbf{g}(t)$ é maximizar a influência de $u(t)$ em $\dot{\phi}$. Como o segundo termo entre parênteses da Eq. 4.4 é um produto interno entre campos vetoriais, não é difícil perceber que $u(t)$ exerce maior influência na fase quando $\mathbf{g}(t)$ apontar na mesma direção de $d\phi/d\vec{x}$. Considerando a Definição 3.2, isso equivale a dizer que:

$$\mathbf{g}(t) := \frac{1}{\|\mathbf{f}(\vec{x})\|} \mathbf{f}(\vec{x}), \quad (4.5)$$

em que a divisão pela norma é colocada para atender a condição $\|\mathbf{g}(t)\| = 1$. Note que isso é válido para todo espaço de estados, a menos dos pontos fixos em que $\|\mathbf{f}(\vec{x})\| = \mathbf{0}$. Com essa direção de *atuação* em \mathcal{S} , e assumindo a Definição 3.2, a dinâmica de ϕ (Eq. 4.4) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \left(\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{f} \right) + \left(\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{g} \right) u(t) \\ &= \left(\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{f} \right) + \left(\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{f} \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|} u(t) \\ &= \left(c \|\mathbf{f}\|^2 \right) + \left(c \|\mathbf{f}\|^2 \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|} u(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note que nesse caso o sinal de acoplamento atua diretamente na frequência natural do sistema, com norma máxima dada por $u_{\max}/\|\mathbf{f}\|$. É possível dizer ainda que a influência de $u(t)$ nunca vai a zero – a menos dos pontos fixos de \mathbf{f} , onde a ação de controle não se define.

Logo, assumindo a Definição 3.2, a direção de atuação que exerce maior influência na fase de um oscilador é a direção do próprio campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$ que rege o comportamento dinâmico do sistema.

4.1.3 Medição da fase

Para determinar qual informação $u(t)$ precisa conter, será exigido que a dinâmica das fases de \mathcal{S}_0 e \mathcal{S} seja *idêntica*. Esse tipo de definição é mais forte do que o usual em trabalhos de sincronismo de fase de osciladores – que costumam exigir travamento de fase apenas. Porém, o intuito é proporcionar uma referência de comparação para o “sinal ideal” de $u(t)$, buscado aqui.

Desta forma, para que $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$, manipula-se a Eq. 4.4:

$$u(t) = \frac{\dot{\phi}_0 - \left(\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{f} \right)}{\frac{d\phi^T}{d\vec{x}} \cdot \mathbf{g}}. \quad (4.7)$$

Do lado direito da equação, o termo entre parênteses no numerador é a frequência natural $\dot{\phi}$ de oscilação de \mathcal{S} e o termo no denominador é caracterizado pela direção de atuação (dicutido na seção anterior), i.e. esses termos não dependem de \mathcal{S}_0 . A Eq. 4.7 mostra que $u(t)$ deve conter informação sobre a fase do sistema \mathcal{S}_0 , sobretudo a respeito de sua dinâmica $\dot{\phi}_0$.

4.1.4 Acoplamento dissipativo

O acoplamento dissipativo, vastamente utilizado em trabalhos de sincronismo, diz respeito tanto à *medição* quanto à *atuação* nos osciladores envolvidos. Geralmente esse tipo de acoplamento é realizado em um dos estados do sistema. Considerando o acoplamento dissipativo na primeira variável de estado tem-se o caso particular:

$$\left\{ \begin{array}{l} u := \varepsilon(x_0 - x) \\ \mathbf{g} := [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \end{array} \right. , \quad (4.8)$$

em que $x_0, x \in \mathbb{R}$ são as primeiras variáveis de estado de $\vec{x}_0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, respectivamente, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é uma constante que representa a força de acoplamento e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ um vetor constante.

Assumindo a Definição 3.2, a dinâmica da fase de \mathcal{S} (Eq. 4.4) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \left(\frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f} \right) + \left(\frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{g} \right) u(t) \\ &= \left(\frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \varepsilon(x_0 - x) \\ &= \left(c \|\mathbf{f}\|^2 \right) + \left(c \|f_x\|^2 \right) \varepsilon(x_0 - x), \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que $\partial \phi / \partial x$ denota a derivada parcial de ϕ com relação à variável x , f_x o primeiro elemento de \mathbf{f} que, por definição, é a derivada temporal \dot{x} do sistema não forçado.

Para avaliar a *atuação* do acoplamento dissipativo, compare o segundo termo entre parênteses do lado direito da Eq. 4.6 com o da Eq. 4.9 – ignore o termo c que é igual nas duas equações. Enquanto no primeiro caso a atuação de $u(t)$ era ponderada por $\|\mathbf{f}\|^2$, no segundo essa ponderação é feita por uma projeção deste i.e. $\|f_x\|^2$. É fácil notar que o acoplamento dissipativo só tem atuação relevante na dinâmica da fase de \mathcal{S} quando f_x for suficientemente grande, ou seja, quando há projeção significativa de \mathbf{f} sobre f_x . Pelo mesmo raciocínio, a *influência* (*atuação*) do acoplamento é grande quando $\|f_x\| \approx \|\mathbf{f}\|$, ou seja, quando a derivada temporal \dot{x} do sistema *não acoplado* tiver a maior “participação” na composição do vetor de derivadas \mathbf{f} . A Figura 4.1 ilustra três situações num trecho de trajetória em que \mathbf{f} tem diferentes projeções em $f_x := \dot{x}$.

Para avaliar a *medição* da fase no acoplamento dissipativo compara-se a Eq. 4.7 com a Eq. 4.8. O termo no denominador da Eq. 4.7 não está presente no acoplamento dissipativo e, como consequência, a influência na *atuação* em \mathcal{S} oscila conforme comentado no parágrafo anterior. Nos demais termos, é possível estabelecer uma comparação entre $(\dot{\phi}_0 - \dot{\phi})$ e $(x_0 - x)$ – Eqs. 4.7 e 4.8 respectivamente, porém esta relação não está clara. Mas, de alguma forma, x_0 contém alguma informação sobre a evolução da fase ϕ_0 . As análises em termos *medição* se aterão a tentar quantificar o quanto de ϕ_0 está presente numa variável.

4.1.5 Acoplamento e sincronismo

Cabe aqui uma observação importante: o desmembramento do papel do acoplamento em termos de *medição* e *atuação* foi proposto aqui apenas para análise, para tentar enxegar melhor os fatores que podem influenciar a fase de um oscilador. É claro que o *sincronismo de fase* entre dois osciladores

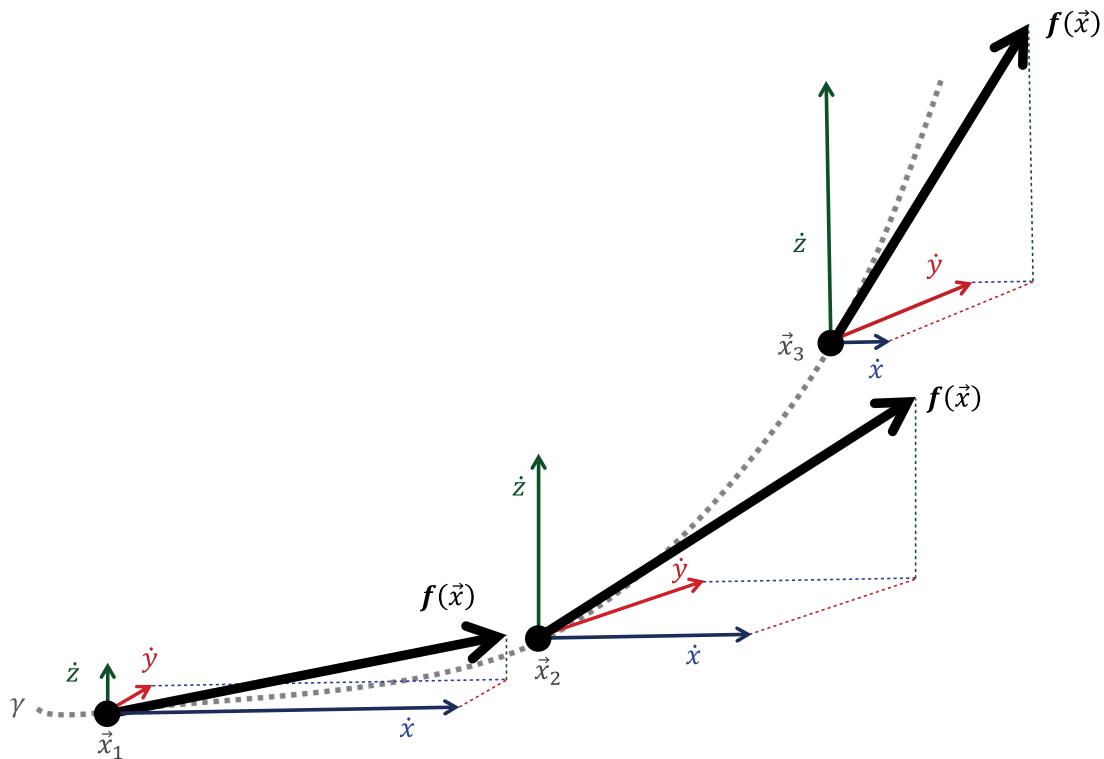


Figura 4.1: Trecho da trajetória γ em três pontos distintos $\vec{x} \in \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Em \vec{x}_1 observa-se que $\mathbf{f}(\vec{x})$ tem maior projeção sobre $f_x := \dot{x}$, i.e. $\|\dot{x}\| \approx \|\mathbf{f}(\vec{x})\|$; em \vec{x}_2 a projeção de $\mathbf{f}(\vec{x})$ é equivalentemente distribuída, i.e. $\|\dot{x}\| \approx \|\dot{y}\| \approx \|\dot{z}\|$; mas em \vec{x}_3 verifica-se que $\|\dot{x}\| \ll \|\mathbf{f}(\vec{x})\|$, situação em que a atuação nessa direção provoca pouca alteração na fase.

depende de ambos, de maneira não trivial. Não adiantaria, por exemplo, ter a “melhor” variável de *medição* sendo que a *atuação* é inadequada, e vice-versa.

Outra peça fundamental desse quebra-cabeça é a *forma* com que $u(t)$ influencia $\phi(t)$ para atingir o sincronismo. A Eq. 4.7 mostrou que o sinal $u(t)$ deve conter alguma informação sobre ϕ_0 , mas determinar a exata relação entre $u(t)$ e ϕ_0 que pode ou não estabelecer um *sincronismo de fase* entre dois osciladores é um problema mais complexo. Essa discussão tem sido abordada em termos de *sincronizabilidade* entre osciladores, em que alguns trabalhos tentaram investigar sua relação com conceitos de observabilidade e controlabilidade (Letellier e Aguirre 2010; Kerfourn, Laval e Letellier 2012; Aguirre e Letellier 2016), sem resultados claros sobre essa relação, que parece depender dessa *forma* de acoplamento. No Capítulo 5 são discutidas questões acerca da *forma*.

A seguir são propostas métricas que tentam quantificar a qualidade da *medição* da fase de um oscilador e também a *atuação* na fase de um oscilador. Vale reiterar que esse tipo de proposta não se atreve a quantificar exatamente a *qualidade* de um acoplamento (e.g. depende da *forma*), mas pode ajudar, por exemplo, na escolha de uma variável para extrair a fase de um oscilador ou pode servir de guia na escolha da variável de acoplamento.

4.2 Métricas Sobre a Fase de um Oscilador

Seja um oscilador definido tal qual a Eq. 2.1, mas com sinais de entrada e saída:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{g}(\vec{x}) u(t) \\ y = h(\vec{x}), \end{cases} \quad (4.10)$$

em que $\mathbf{g} : X \mapsto V(X)$ é o campo vetorial de direcionamento, $u(t) \in \mathbb{R}$ uma entrada do sistema, $h : X \mapsto S(X)$ um campo escalar, $y \in \mathbb{R}$ o sinal de saída do sistema.

A seguir serão propostos três índices que objetivam quantificar as relações externas, de *atuação* e *medição*, com a fase do sistema oscilador. Os índices são propostos para três diferentes contextos:

- 4.2.1 - **Índice de *informação de fase* (ι)**: verifica o quanto de informação sobre a fase ϕ do sistema contém na variável de saída y ;
- 4.2.2 - **Índice de *representação de fase* (ζ)**: verifica o quanto a evolução de $y(t)$ ao longo do tempo se assemelha a $\phi(t)$ – pode ser usado quando deseja-se que y seja uma variável descritora de fase (*phase-like variable*);
- 4.2.3 - **Índice de *influência de fase* (χ)**: quantifica a influência que a entrada $u(t)$ pode ter na dinâmica da fase do sistema, de acordo com o campo vetorial $\mathbf{g}(\vec{x})$.

Esses índices são detalhados nas seções seguintes.

4.2.1 Índice de Informação de Fase

Na Seção 4.1 mostrou-se a importância da informação sobre a dinâmica da fase num sinal de acoplamento. Uma forma de tentar quantificar a informação dinâmica de ϕ contida em y é calculando suas derivadas temporais: $\dot{\phi} = (d\phi/d\vec{x})^T \cdot \mathbf{f}$ e $\dot{y} = (dh/d\vec{x})^T \cdot \mathbf{f}$. Para fins de comparação entre as derivadas, ignora-se

o termo comum (f), restando dois vetores de derivadas parciais de \vec{x} . A métrica proposta compara justamente esses dois vetores, conforme a seguir.

Definição 4.1. O *índice de informação de fase* de uma variável y sobre um sistema S , conforme Eq. 4.10, é dado por:

$$\iota(t) = \frac{\left\| \left\langle \frac{dh}{d\vec{x}}, \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\rangle \right\|}{\left\| \frac{dh}{d\vec{x}} \right\| \left\| \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\|}, \quad (4.11)$$

em que \langle , \rangle denota o produto interno. \square

O índice proposto assume valores normalizados $\iota \in [0, 1]$, em que $\iota = 1$ indica colinearidade entre $(dh/d\vec{x})$ e $(d\phi/d\vec{x})$, enquanto $\iota = 0$ indica ortogonalidade entre eles. Note que a métrica não distingue *sentido* entre esses vetores, mas apenas quantifica a projeção entre os módulos dos vetores. Para ilustrar essa característica veja o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1. Considere o oscilador de Poincaré descrito pela Eq. 3.15 com um sinal de saída igual a $h(\vec{x}) = x$. No atrator Γ_0 , a evolução de $x(t)$ assume forma senoidal, com ciclos de incremento e decremento, i.e. num ciclo de oscilação, $(dh/d\vec{x}) > 0$ até metade do ciclo e $(dh/d\vec{x}) < 0$ na outra metade. O *índice de informação de fase* proposto (Eq. 4.11), ao considerar o *módulo* da projeção entre $(dh/d\vec{x})$ e $(d\phi/d\vec{x})$, presume-se que a quantidade de *informação* sobre a fase do sistema de Poincaré em $h(\vec{x})$ na primeira metade do ciclo é a mesma da segunda metade. É claro que, se o objetivo for extrair a fase $\phi(t)$ a partir de $h(\vec{x})$, essa troca de sinal deve ser levada em consideração, i.e. a *forma* de extração deve ser adequada – e pode se tornar um grande problema em alguns casos. Verifica-se então que o índice tenta mensurar a quantidade de informação, sem quantificar a *forma* de extração dessa informação.

Um cálculo semelhante poderá servir, inclusive, para determinar uma variável descritora de fase adequada, conforme apresentado na próxima seção.

4.2.2 Índice de Representação de Fase

Considere a Eq. 4.10. Deseja-se agora que $y(t)$ represente a fase $\phi(t)$ do oscilador S , i.e. que $y(t)$ seja uma variável descritora de fase (*phase-like variable*). A métrica proposta para tal fim é apresentada a seguir.

Definição 4.2. O *índice de representação de fase* de uma variável y sobre um sistema S , conforme Eq. 4.10, é dado por:

$$\zeta = \frac{\left\langle \frac{dh}{d\vec{x}}, \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\rangle}{\left\| \frac{dh}{d\vec{x}} \right\| \left\| \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\|}. \quad (4.12)$$

\square

O índice proposto assume valores normalizados $\zeta \in [-1, 1]$, em que $\zeta \approx 1$ indica $\dot{y}(\vec{x}) \approx \dot{\phi}(\vec{x})$, e $\zeta(\vec{x}) \approx 0$ indica o caso em que não há informação de fase em $h(\vec{x})$.

A métrica proposta aqui é semelhante à anterior (Def. 4.1) e observa-se a relação $\iota = \|\zeta\|$. A diferença é que, agora, $y(t)$ se propõe a comportar-se tal qual $\phi(t)$. Nesse caso considera-se que a obtenção de ϕ

a partir de $y(t)$ deve ser direta, i.e. $y(t) \approx \phi(t)$. Ou seja, a *forma* de obtenção de $\phi(t)$ a partir do sinal de saída também é avaliada no índice ζ – e penalizada em caso de troca de sinal das derivadas parciais numa trajetória (vide Exemplo 4.1). De certa maneira, é também uma forma de quantificar a condição de monotonicidade de crescimento com o tempo (Eq. 3.2).

4.2.3 Índice de Influência na Fase

Seja um oscilador definido tal qual a Eq. 4.10. O sinal de entrada exerce influência no sistema conforme a direção do campo vetorial $\mathbf{g}(\vec{x})$. Deseja-se quantificar essa atuação no sistema com relação à influência na fase ϕ do oscilador. Baseado na análise realizada na Seção 4.1, propõe-se o *índice de influência de fase* a seguir.

Definição 4.3. O *índice de influência de fase* de um campo vetorial $\mathbf{g}(\vec{x})$ sobre um sistema \mathcal{S} , conforme Eq. 4.10, é dado por:

$$\chi = \frac{\left\| \left\langle \mathbf{g}^T, \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\rangle \right\|}{\|\mathbf{g}\| \left\| \frac{d\phi}{d\vec{x}} \right\|}. \quad (4.13)$$

□

Esse índice assume valores normalizados $\chi \in [0, 1]$, em que $\chi = 1$ indica colinearidade entre \mathbf{g} e $(d\phi/d\vec{x})$, enquanto $\chi = 0$ indica ortogonalidade entre eles. Assumindo a Definição 3.2, o cálculo do índice pode ser realizado substituindo $(d\phi/d\vec{x})$ por $\mathbf{f}(\vec{x})$ na equação.

Note que o cálculo do índice, assumindo a Definição 3.2, valoriza o caso em que $\mathbf{g}(\vec{x})$ e $\mathbf{f}(\vec{x})$ são colineares. Ao estabelecer $\mathbf{g}(\vec{x}) := \mathbf{f}(\vec{x})$, por exemplo, o índice assumiria valor máximo $\chi = 1$. Por outro lado, do ponto de vista de *controle de sistemas dinâmicos*, a *controlabilidade* (Hermann e Krener 1977) desse campo vetorial de deriva seria baixíssima, uma vez que a matriz de controlabilidade não-linear teria posto unitário (i.e. *não controlável*), pois $\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{f} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^*$ (sendo ad o operador colchete de Lie). Mas no contexto de *sincronismo de fase*, esse tipo de atuação pode maximizar a influência sobre a fase do oscilador e ajudar no sincronismo.

4.2.4 Cálculo dos Índices Médios

O cálculo dos índices propostos, no contexto de *sincronismo de fase* entre osciladores, é interessante que seja feito não em *todo* espaço de estado, mas em alguma região deste (e.g. no atrator). Para uma dada trajetória, é possível calcular os índices *médios*:

$$\bar{\iota} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \iota \, dt, \quad (4.14)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \zeta \, dt, \quad (4.15)$$

$$\bar{\chi} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \chi \, dt, \quad (4.16)$$

em que t_0 e t_f denotam os tempos inicial e final.

O cálculo dos índices propostos (Defs. 4.1, 4.2 e 4.3) pressupõe o conhecimento das derivadas parciais de ϕ com relação a \vec{x} . Porém, considerando a Definição 3.2, é fácil notar que o termo $(d\phi/d\vec{x})$ nas Equações 4.11, 4.12 e 4.13 pode ser substituído por $\mathbf{f}(\vec{x})$. Esse aspecto de ordem prática permite o cálculo do índice para qualquer classe de osciladores, mesmo sem uma variável descritora de fase (*phase-like variable*) bem estabelecida.

4.2.5 Acoplamento Dissipativo

No caso particular do acoplamento dissipativo entre sistemas idênticos, o índice de *informação* de fase e o índice de *influência* de fase produzem o mesmo resultado.

Teorema 4.1. *Dois osciladores descritos conforme Eq. 4.1, idênticos $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{f}$, com acoplamento dissipativo na primeira variável $\varepsilon(x - x_0)$, conforme Eq. 4.8, possuem índice de informação de fase (Def. 4.1) da variável acoplada $h(\vec{x}_0) := x_0$ e índice de influência de fase (Def. 4.3) de \mathbf{g} equivalentes:*

$$\iota \equiv \chi. \quad (4.17)$$

Demonstração. Para o caso considerado calcula-se:

$$\begin{aligned} \frac{dh(\vec{x}_0)}{d\vec{x}_0} &= \frac{dx_0}{d\vec{x}_0} \\ &= [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Verifica-se que $(dh/d\vec{x}_0) = \mathbf{g}$ (Eq. 4.8). Como $\mathbf{f}_0 \equiv \mathbf{f}$, os índices de *informação* (Def. 4.1) e de *influência* (Def. 4.3) de fase calculados são equivalentes, conforme verifica-se diretamente nas respectivas equações (Eqs. 4.11 e 4.13). \square

4.3 Resultados Preliminares

Nesta seção serão apresentados alguns resultados preliminares com relação à aplicação dos índices propostos, tentando verificar sua relação com o sincronismo de fase entre os osciladores. Nos testes foram utilizados os osciladores de Poincaré, Van der Pol, Rössler, Lorenz e Corda, em diferentes representações. Primeiro será mostrado para o caso de acoplamento dissipativo entre osciladores a aplicação do índice de *informação* de fase (Def. 4.1) que, nesse caso, é equivalente ao índice de *influência* de fase (Def. 4.3), conforme Teorema 4.1. Em seguida, o índice de *representação* de fase (Def. 4.2) será utilizado para caracterizar um conjunto de variáveis descritoras de fase.

4.3.1 Escolha de Variável para Acoplamento Dissipativo

Sejam dois osciladores descritos conforme Eq. 2.1, acoplados unidirecionalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 : &\left\{ \dot{\vec{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) \right. \\ \mathcal{S}_2 : &\left\{ \dot{\vec{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) + \varepsilon G(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \right. \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ são as variáveis de estado; $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in V(X) : X \mapsto V(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ são os campos vetoriais dos osciladores não forçados; $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ uma constante que determina a força de acoplamento; $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante que estabelece em qual variável se dará o acoplamento; sendo $n \in \{2, 3\}$ a ordem dos sistemas. Dada uma condição inicial $\vec{x}_{1,2}(0)$, os estados dos osciladores evoluem para um atrator $\Gamma_{1,2}$, periódico ou caótico, à medida que $t \rightarrow \infty$.

Para cada sistema, duas opções de valores para a matriz G foram utilizadas, de acordo com a variável de acoplamento. Acoplamento na primeira variável:

$$G_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n = 2), \quad G_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n = 3). \quad (4.20)$$

Acoplamento na segunda variável:

$$G_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (n = 2), \quad G_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n = 3). \quad (4.21)$$

Os campos vetoriais \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 serão descritos por um dos seguintes osciladores:

\mathcal{S}_p : sistema de Poincaré, descrito em coordenadas cartesianas (Eq. 4.22),

\mathcal{S}_p^Φ : sistema de Poincaré, descrito em coordenadas polares (Eq. 4.25),

\mathcal{S}_v : sistema de Van der Pol, descrito em coordenadas cartesianas (Eq. 4.26),

\mathcal{S}_v^Φ : sistema de Van der Pol, descrito em coordenadas polares (Eq. 4.29),

\mathcal{S}_r : sistema de Rössler, descrito em coordenadas cartesianas (Eq. 4.30),

\mathcal{S}_r^Φ : sistema de Rössler, descrito em coordenadas cilíndricas (Eq. 4.33).

Sistema de Poincaré

O sistema de Poincaré é descrito por:

$$\mathcal{S}_p : \begin{cases} \dot{x} = -\omega y - \lambda(x^2 + y^2 - p^2)x \\ \dot{y} = \omega x - \lambda(x^2 + y^2 - p^2)y \end{cases}, \quad (4.22)$$

em que $(\omega, \lambda, p) = (1, 0; 0, 5; 1, 0)$, sendo que ω assumirá outros valores nos testes.

Nesse sistema é possível fazer o mapeamento $\Phi_p(\vec{x}) : \vec{x} \mapsto \vec{z}$ para coordenadas polares $\vec{z} := [\theta \rho]^T \in Z \subseteq \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^1\}$:

$$\vec{z} = \Phi_p(\vec{x}) := \begin{bmatrix} \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

cujo mapeamento inverso é:

$$\vec{x} = \Phi_p^{-1}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

que é válido para todo $\vec{x} \neq [0 \ 0]^T$. Aplicando esse mapeamento em \mathcal{S}_p (Eq. 4.22) tem-se o sistema descrito em coordenadas polares:

$$\mathcal{S}_p^\Phi : \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\rho} = \lambda\rho(p^2 - \rho^2) \end{cases}. \quad (4.25)$$

Sistema de Van der Pol

O sistema de Van der Pol (Van der Pol 1927) é descrito por:

$$\mathcal{S}_v : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\mu y(1 - \beta x^2) - \omega^2 x \end{cases}, \quad (4.26)$$

em que $(\omega, \mu, \beta) = (1, 0; 1, 0; 1, 0)$, sendo que ω assumirá outros valores nos testes.

O mapeamento $\Phi_v(\vec{x}) : \vec{x} \mapsto \vec{z}$ para coordenadas polares $\vec{z} := [\theta \ \rho]^T \in Z \subseteq \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^1\}$ é:

$$\vec{z} = \Phi_v(\vec{x}) := \begin{bmatrix} -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

cujo mapeamento inverso é:

$$\vec{x} = \Phi_v^{-1}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \rho \cos(-\theta) \\ \rho \sin(-\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

válido para todo $\vec{x} \neq [0 \ 0]^T$. Aplicando esse mapeamento tem-se:

$$\mathcal{S}_v^\Phi : \begin{cases} \dot{\theta} = \mu \sin(2\theta) + \sin(\theta)^2 + \omega^2 \cos(\theta)^2 - \beta\mu\rho^2 \sin(2\theta) \cos(\theta)^2 \\ \dot{\rho} = 2\mu\rho \sin(\theta)^2 - \frac{1}{2}\rho \sin(2\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 \rho \sin(2\theta) - 2\beta\mu\rho^3 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 \end{cases}. \quad (4.29)$$

Sistema de Rössler

O sistema de Rössler (Rössler 1976) é descrito por:

$$\mathcal{S}_r : \begin{cases} \dot{x} = -\omega y - z \\ \dot{y} = \omega x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c_r) \end{cases}, \quad (4.30)$$

em que $(\omega, a, b, c_r) = (1, 0; 0, 15; 0, 2; 10)$, sendo que ω assumirá outros valores nos testes.

O mapeamento $\Phi_r(\vec{x}) : \vec{x} \mapsto \vec{z}$ para coordenadas cilíndricas $\vec{z} := [\theta \ \rho \ z]^T \in Z \subseteq \{\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2\}$ é:

$$\vec{z} = \Phi_r(\vec{x}) := \begin{bmatrix} \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

cujo mapeamento inverso é:

$$\vec{x} = \Phi_r^{-1}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ z \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

válido para todo $(x, y) \neq (0 \ 0)$. Aplicando esse mapeamento tem-se:

$$\mathcal{S}_r^\Phi : \begin{cases} \dot{\theta} = \omega + a \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{1}{\rho} z \sin(\theta) \\ \dot{\rho} = a \rho \sin^2(\theta) - z \cos(\theta) \\ \dot{z} = b - c_r z + \rho z \cos(\theta) \end{cases}. \quad (4.33)$$

Metodologia

Tomou-se dois sistemas idênticos (ex.: dois sistema de Poincaré: $\mathcal{S}_{1,2} \equiv \mathcal{S}_p$), acoplados por uma variável (ex. pela variável y , fazendo $G \equiv G_b$, Eq. 4.21), conforme Eq. 4.19. Para o sistema e acoplamento escolhido, estimou-se³ as regiões de sincronismo (e.g. língua de Arnold) para variações no parâmetro $\omega_2 = \{\omega_2 \mid 0,85 \leq \varepsilon \leq 1,15\}$, com $\omega_1 = 1$ e forças de acoplamento de acordo com o sistema, sendo $\varepsilon = \{\varepsilon \mid 0,0 \leq \varepsilon \leq 0,4\}$ para os sistemas de Poincaré (\mathcal{S}_p e \mathcal{S}_p^Φ), $\varepsilon = \{\varepsilon \mid 0,0 \leq \varepsilon \leq 1,0\}$ para os sistemas de Van der Pol (\mathcal{S}_v e \mathcal{S}_v^Φ) e $\varepsilon = \{\varepsilon \mid 0,0 \leq \varepsilon \leq 0,2\}$ para os sistemas de Rössler (\mathcal{S}_r e \mathcal{S}_r^Φ). Para cada caso, as simulações foram realizadas com 51 valores distintos de ε e 61 valores de ω_2 , ambos distribuídos uniformemente nos intervalos especificados, totalizando 3111 combinações.

Todas as simulações foram realizadas a partir de condições iniciais aleatórias próximas ao atrator, com tempo de simulação de 3000s, sendo os primeiros 2000s descartados das análises. Considerou-se que os sistemas estão em regime de *sincronismo de fase* quando $|\theta_1(t) - \theta_2(t)| < 2\pi \ \forall t > 2000s$. Calculou-se, para as 3111 combinações, o percentual α de ocorrência de sincronismo nos testes.

Para cada sistema, individualmente, com $\omega = 1$ e $\varepsilon = 0$, foi calculado o índice médio de *informação* de fase (Eq. 4.14), considerando a Definição 3.2, para cada forma de acoplamento (i.e. G_a e G_b). O intuito é comparar o índice com as regiões de sincronismo obtidas (α) e verificar se existe alguma relação. Reitera-se que nos casos analisados o índice de *influência* de fase (Def. 4.3) é equivalente ao de *informação* de fase, conforme Teorema 4.1. Apenas para registro, foi calculado também o índice médio de *representação* de fase $\bar{\zeta}$ para cada situação.

³Foi realizado procedimento de integração numérica usando a função `ode` do software Matlab.

Resultados e discussão

Antes de iniciar as análises dos resultados, é feito aqui uma observação sobre a diferença prática no resultado dos índices $\bar{\zeta}$ e \bar{t} , em que é possível observar o que foi ilustrado no Exemplo 4.1. Considere o sistema de Poincaré com acoplamento em x . Os índices de *informação* de fase \bar{t} e de *representação* de fase $\bar{\zeta}$ são apresentados na linha 1 da Tabela 4.1. Observa-se que, enquanto $\bar{\zeta}$ é nulo, tem-se $\bar{t} \gg 0$ (i.e. mais próximo de 1 do que de 0). A interpretação desses valores é que a evolução de $x(t)$ no sistema de Poincaré traz consigo alguma informação sobre a evolução da fase do sistema ($\bar{t} \gg 0$), mas essa informação se relaciona com $x(t)$ em diferentes sentidos na trajetória ($\bar{\zeta} = 0$), i.e. hora a fase evolui com o crescimento de $x(t)$, hora ela evolui com seu decrescimento (vide Exemplo 4.1).

A Tabela 4.1 mostra os resultados obtidos. Uma consideração a ser feita é quanto à *representação do sistema* antes e após o mapeamento Φ . O sistema de Poincaré (Tabela 4.1, linhas 1 – 4), por exemplo, representado por \mathcal{S}_p nota-se um certo balanceamento entre as variáveis quanto à informação de fase \bar{t} . O mesmo sistema, representado nas coordenadas \mathcal{S}_p^Φ , parece deslocar a informação de fase para a variável θ . O mesmo efeito é observado nos demais casos, em menor grau.

Verifica-se também na Tabela 4.1 que as variáveis ρ , que representam amplitude, para os sistemas de Rössler e Poincaré tem os menores índices de informação de fase. Isso se deve à direção de maior crescimento de ρ ser majoritariamente ortogonal às trajetórias nos atratores desses sistemas. Para o sistema de Van der Pol, que tem a órbita do ciclo limite menos circular, a variável ρ apresenta um valor mais elevado de \bar{t} . Em contrapartida, θ possui valor menor em relação aos demais sistemas.

O principal resultado apresentado na Tabela 4.1 é que, para um mesmo sistema, o índice de *informação* de fase permite uma ordenação semelhante à quantificada empiricamente pelo cálculo do percentual de ocorrência de sincronismo α . Em outras palavras, o cálculo de \bar{t} , feito antes do acoplamento, permitiu, nos casos apresentados, determinar quais as melhores variáveis para o acoplamento dissipativo. Porém, relacionar as diferenças nos valores de \bar{t} e α para cada sistema é mais complicado, em que não parece haver uma relação quantitativa clara. As Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 mostram as regiões de sincronismo obtidas nos testes empíricos, em que algumas escalas foram ajustadas para visualização de detalhes.

4.3.2 Determinação de uma Variável Descritora de Fase

Seja um oscilador descrito conforme Eq. 4.10 em que se deseja determinar a função de saída $h(\vec{x})$ para que a saída represente uma variável descritora de fase (*phase-like variable*). Para algumas funções $h(\vec{x})$ escolhidas, foi calculado o *índice de representação de fase* (Definição 4.2). Apenas para comparação, foi calculado também o *índice de informação de fase* (Definição 4.1). Os sistemas e funções analisadas são especificados a seguir.

Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz (Lorenz 1963) é descrito por:

$$\mathcal{S}_l : \begin{cases} \dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= (r - z)x - y \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{cases}, \quad (4.34)$$

Tabela 4.1: Resultados do cálculo dos índices de *informação* de fase $\bar{\iota}$, de *representação* de fase $\bar{\zeta}$ e percentual de pontos em que se obteve o sincronismo α , para diferentes sistemas e representações com diferentes variáveis de acoplamento.

#	Sistema	$[\mathcal{S}_{1,2}]$	Acoplamento	$[G]$	Variável	$\bar{\iota}$	$\bar{\zeta}$	α
1	Poincaré	\mathcal{S}_p		G_a	x	0,64	0,00	86%
2	Poincaré	\mathcal{S}_p		G_b	y	0,64	0,00	86%
3	Poincaré	\mathcal{S}_p^Φ		G_a	θ	1,00	1,00	98%
4	Poincaré	\mathcal{S}_p^Φ		G_b	ρ	0,00	0,00	8%
5	Van der Pol	\mathcal{S}_v		G_a	x	0,63	-0,01	70%
6	Van der Pol	\mathcal{S}_v		G_b	y	0,68	0,01	82%
7	Van der Pol	\mathcal{S}_v^Φ		G_a	θ	0,76	0,76	98%
8	Van der Pol	\mathcal{S}_v^Φ		G_b	ρ	0,55	-0,23	57%
9	Rössler	\mathcal{S}_r		G_a	x	0,63	0,02	42%
10	Rössler	\mathcal{S}_r		G_b	y	0,59	-0,07	41%
11	Rössler	\mathcal{S}_r^Φ		G_a	θ	0,95	0,95	98%
12	Rössler	\mathcal{S}_r^Φ		G_b	ρ	0,09	0,05	8%

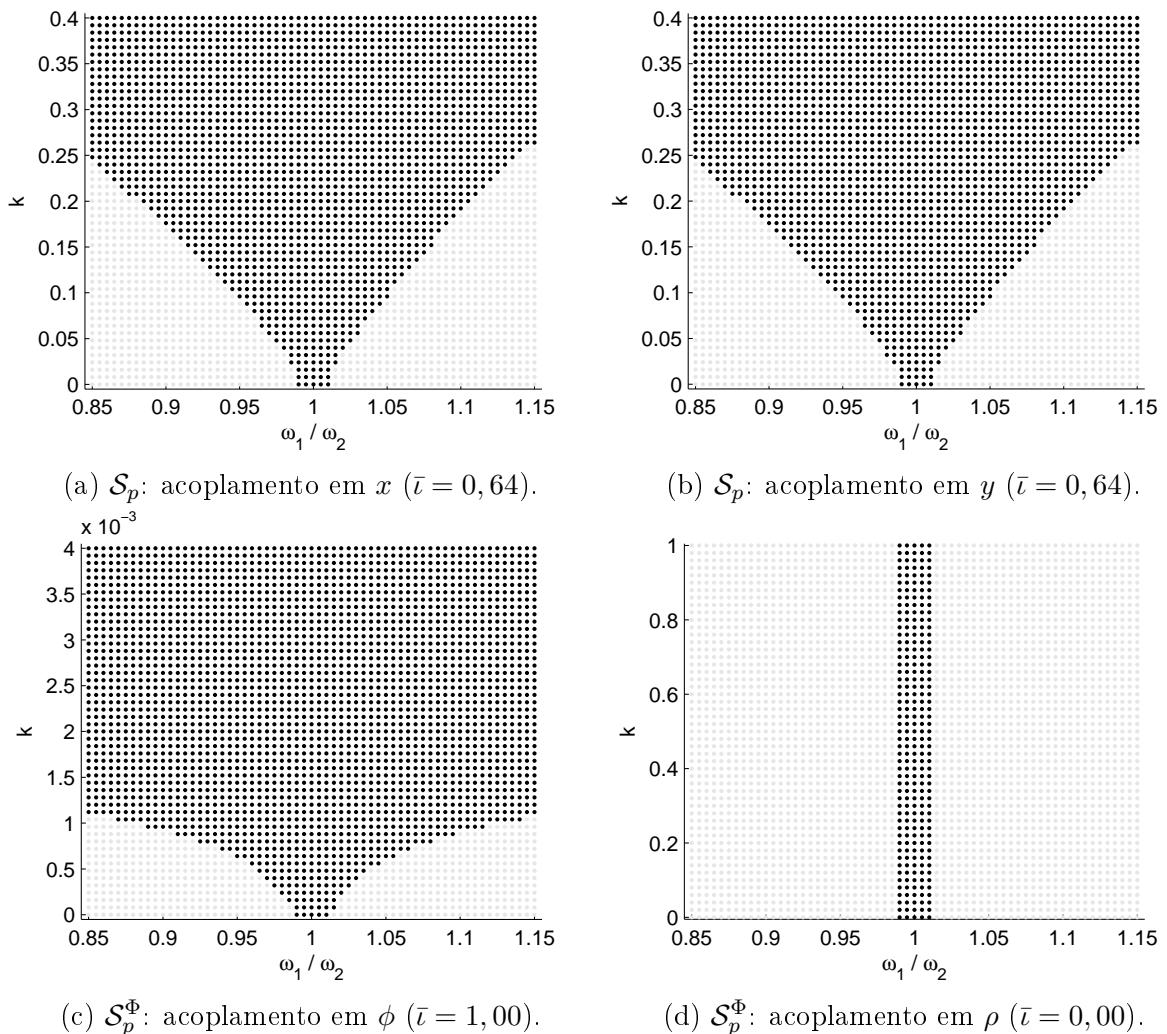


Figura 4.2: Regiões de sincronismo para sistemas de Poincaré representados por \mathcal{S}_p e \mathcal{S}_p^Φ com acoplamento unidirecional dissipativo (Eq. 4.19) nas variáveis (a) x , (b) y , (c) ϕ , (d) ρ .

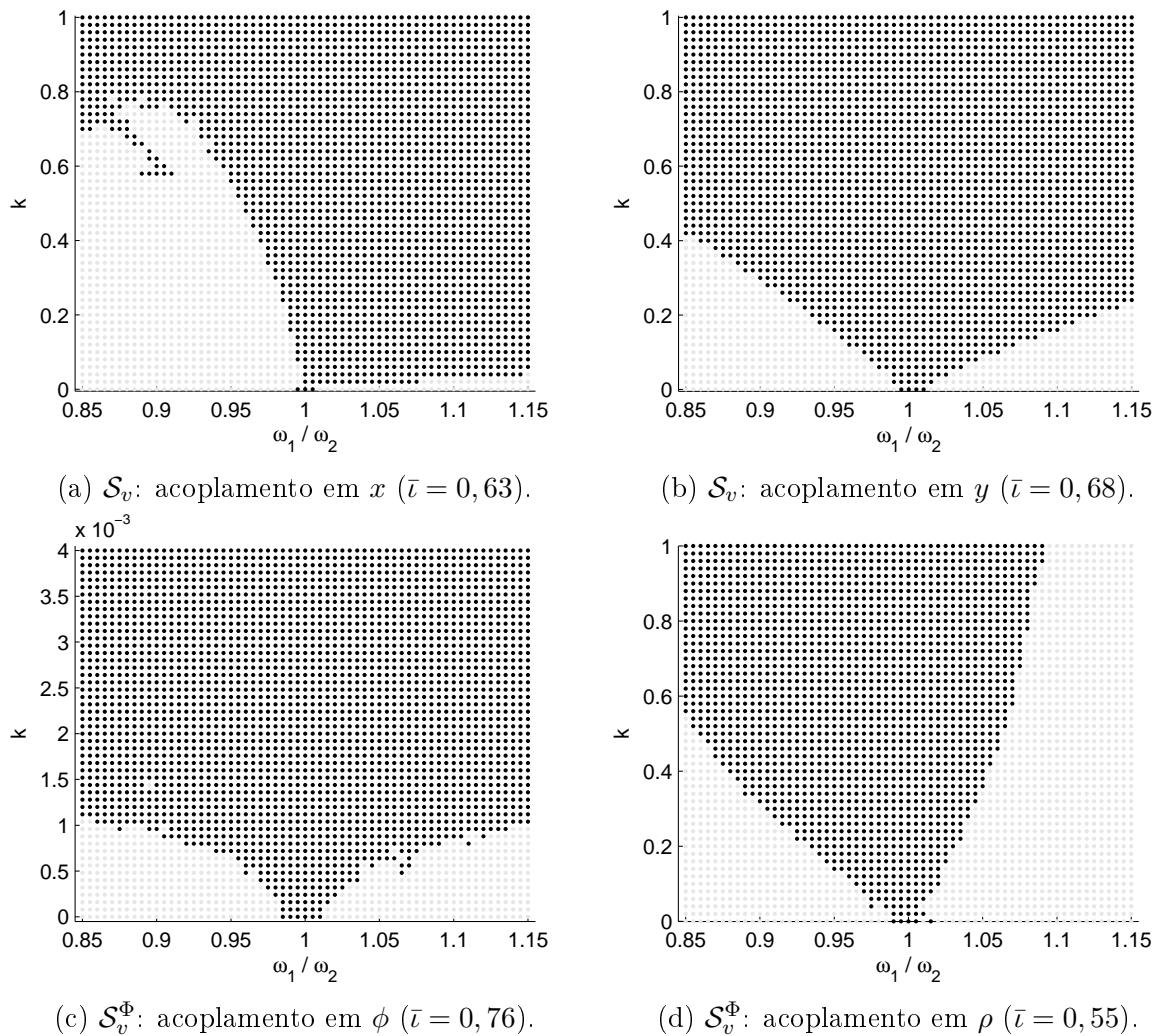


Figura 4.3: Regiões de sincronismo para sistemas de Van der Pol representados por \mathcal{S}_v e \mathcal{S}_v^Φ com acoplamento unidirecional dissipativo (Eq. 4.19) nas variáveis (a) x , (b) y , (c) ϕ , (d) ρ .

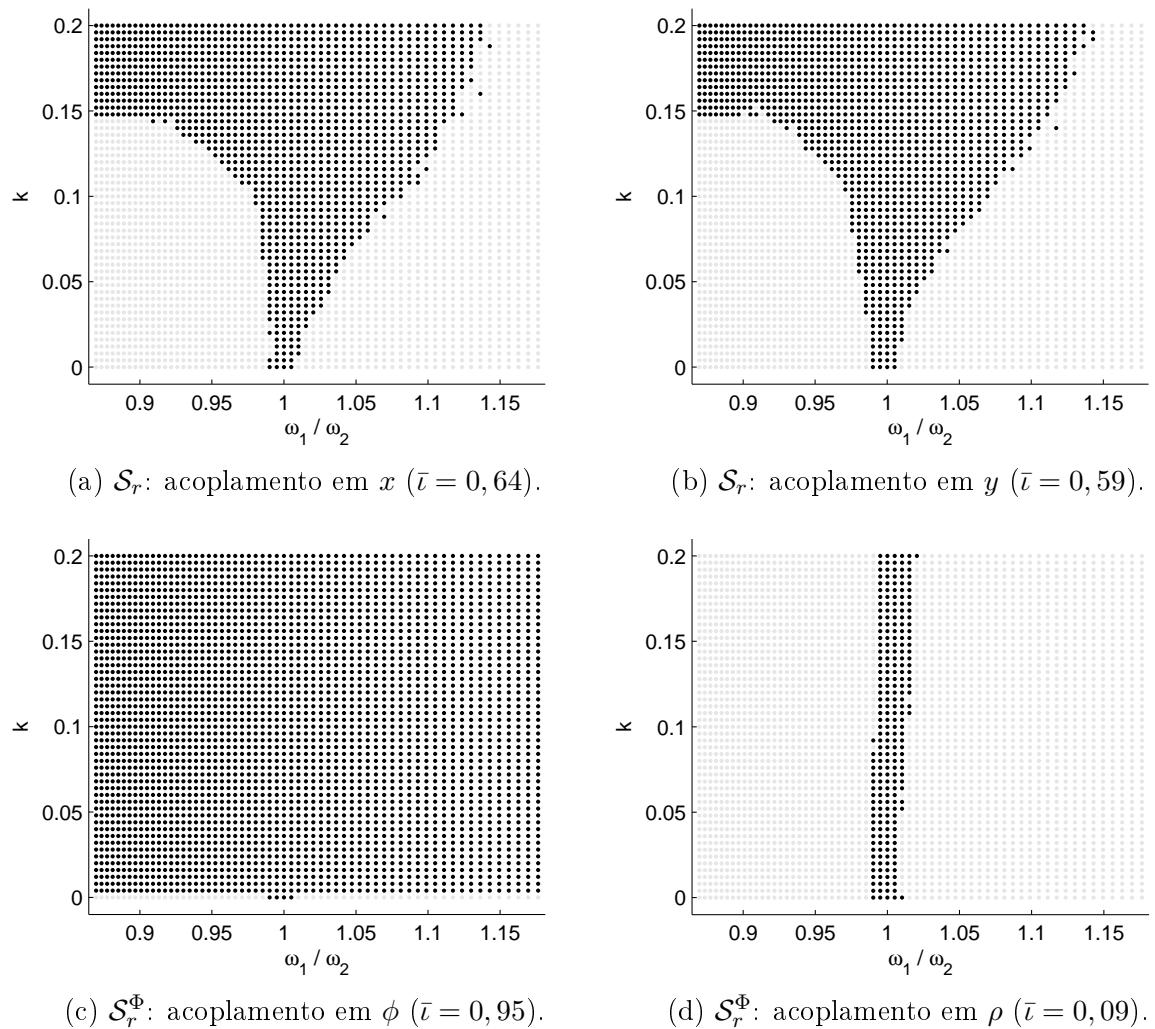


Figura 4.4: Regiões de sincronismo para sistemas de Rössler representados por \mathcal{S}_r e \mathcal{S}_r^Φ com acoplamento unidirecional dissipativo (Eq. 4.19) nas variáveis (a) x , (b) y , (c) ϕ , (d) ρ .

em que $(\sigma, b, r) = (10; 8/3; 28)$. Como variáveis descritoras de fase foram consideradas algumas transformações de coordenadas ou projeções utilizadas em outros trabalhos (Miranda e E. Stone 1993; A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, Osipov et al. 1997; Letellier e Gilmore 2000; Aguirre e Letellier 2011). Usando a transformação de coordenadas $(x', y', z') = (x^2 - y^2, 2xy, z)$, é possível fazer com que as trajetórias no atrator girem em torno de um centro no plano (y', z') :

$$h_{l1}(\vec{x}) := \tan^{-1} \left(\frac{z - 27}{\sqrt{x^2 + y^2} - 12} \right). \quad (4.35)$$

Outra transformação comum é considerar o plano $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$:

$$h_{l2}(\vec{x}) := \tan^{-1} \left(\frac{z - 27}{2xy - 150} \right). \quad (4.36)$$

Sistema de Chua

O sistema de Chua (Madan 1993) é descrito por:

$$\mathcal{S}_{ch} : \begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{C_1} \left(\frac{y - x}{R} - g(x) \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{C_2} \left(\frac{x - y}{R} + z \right) \\ \dot{z} &= -\frac{1}{L}y \end{cases}, \quad (4.37)$$

em que $g(x) = m_0x + 0,5(m_1 - m_0)|x + B_p| + 0,5(m_0 - m_1)|x - B_p|$ e $(m_0, m_1, C_1, C_2, L, R, B_p) = (-0,37; -0,68; 10; 100; 18; 1,795; 1)$. Para esse sistema foram utilizadas funções obtidas de forma empírica. A primeira considera o plano (y, z) (Fig 4.5a) de rotação:

$$h_{ch1}(\vec{x}) := -\tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right). \quad (4.38)$$

A outra função considera o giro em torno da reta $(z = 0,5689x; y = 0)$:

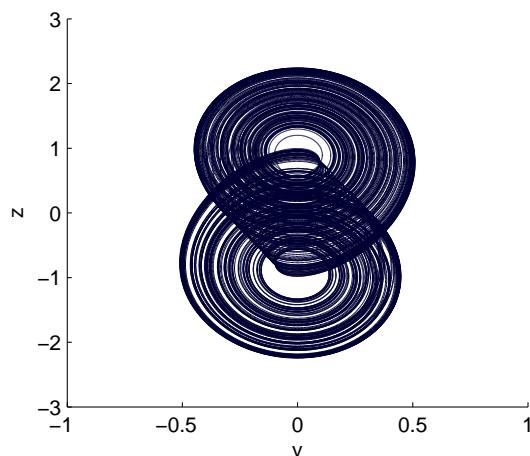
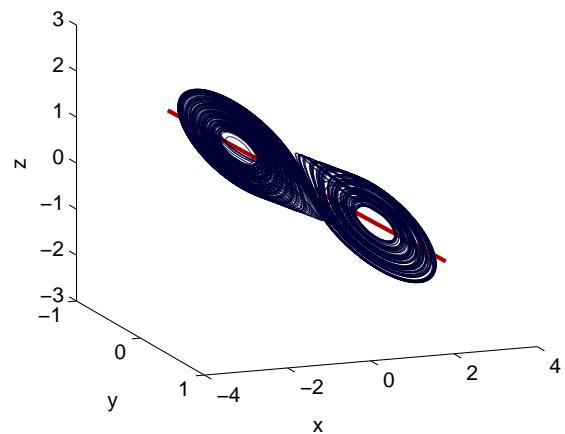
$$h_{ch2}(\vec{x}) := -\tan^{-1} \left(\frac{z + 0,5689x}{y} \right). \quad (4.39)$$

A Figura 4.5 mostra vistas do atrator com a reta $(z = 0,5689x; y = 0)$, considerada centro de rotação. Verifica-se que a reta não toca o atrator (Fig 4.5d).

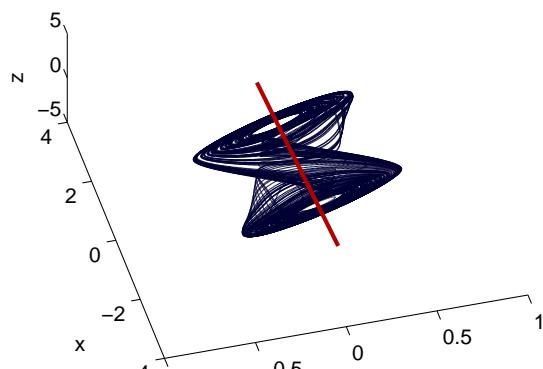
Sistema de Corda

O sistema Corda (Aguirre e Letellier 2011), obtido por uma modificação do sistema de Lorenz'84 (Lorenz 1984), é dado por:

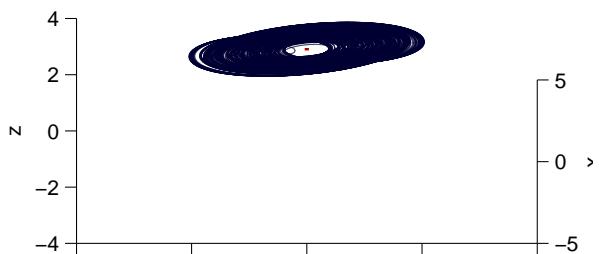
$$\mathcal{S}_{co} : \begin{cases} \dot{x} &= -y - z - ax + aF \\ \dot{y} &= xy - bxz - y + G \\ \dot{z} &= bxy + xz - z \end{cases}, \quad (4.40)$$

(a) Vista do plano (y, z) .

(b)



(c)



(d) A reta é vista (como um ponto) ao centro.

Figura 4.5: Atrator de Chua (Eq. 4.37): (a) plano (y, z) ; (b,c,d) vistas do atrator e reta (em vermelho) dada por $(z = 0,5689x; y = 0)$, considerada centro de rotação.

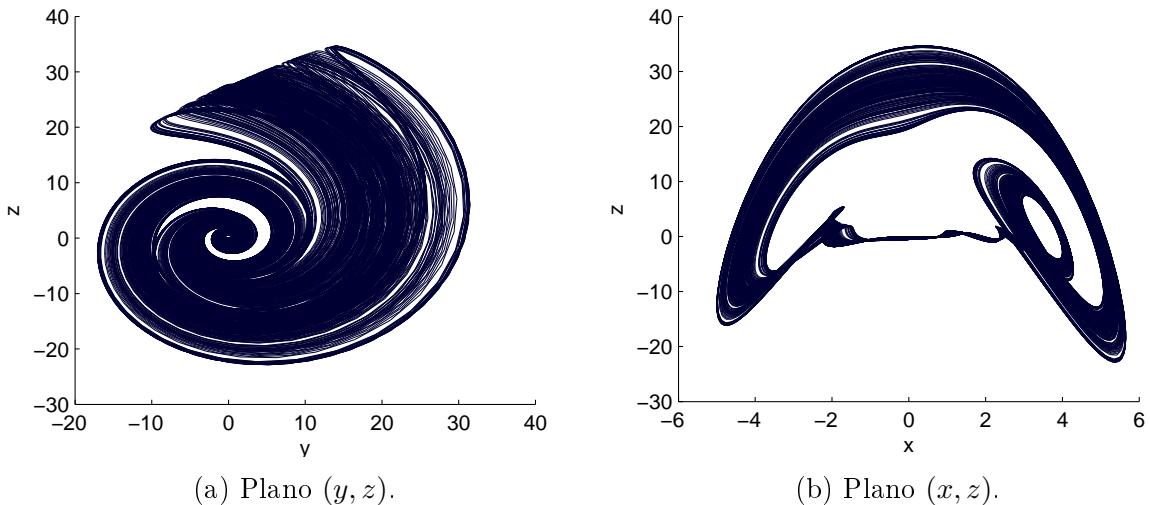


Figura 4.6: Atrator Corda (Eq. 4.40): (a) plano (y, z) ; (b) plano (x, z) . O sistema rotaciona no plano (y, z) , mas em sentidos de rotação opostos de acordo com o valor de x .

em que $(a, b, F, G) = (0, 258; 4, 033; 8, 0; 1, 0)$. Para esse sistema também foram utilizadas funções obtidas de forma empírica. A projeção do atrator no plano (y, z) aparenta um ciclo de rotação (Fig 4.6a). No entanto, essa rotação se dá em sentidos opostos, de acordo com o valor de x (Fig 4.6). Assim, propõe-se:

$$h_{co1}(\vec{x}) := -x \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right). \quad (4.41)$$

Considerando uma rotação, maior e mais lenta, no plano (x, z) , propõe-se:

$$h_{co2}(\vec{x}) := \tan^{-1} \left(\frac{z - 10}{x} \right) + x \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right). \quad (4.42)$$

Exemplo com sistema de Van der Pol modificado

Antes de mostrar os resultados para os osciladores caóticos, será apresentado um exemplo da aplicação do *índice de representação de fase* ζ no sistema de Van der Pol (Eq. 4.26) para a função de saída $h(\vec{x}) := \tan^{-1}(y/x)$. Esse índice proposto quantifica, principalmente, a dinâmica da variável descritora de fase. Se $\dot{\phi}$ evolui junto com dh/dt o índice resulta em valor elevado. A variável fase apresentada pela Definição 3.2 tem, por construção, índice $\zeta_{\tilde{\phi}} = 1$. Desta forma, para o sistema de Van der Pol, o cálculo da fase proposta no Capítulo 3 é comparado com $h(\vec{x})$, principalmente em termos de dinâmica.

Para isso, além do sistema de Van der Pol original \mathcal{S}_v (Eq. 4.26) será utilizado também um sistema de Van der Pol modificado \mathcal{S}_{v2} , que se diferencia do original por ter $\|\mathbf{f}(\vec{x})\|$ constante⁴. Ambos sistemas têm o mesmo período de oscilação e mesmo conjunto ω -limite. O que os diferencia é apenas a dinâmica, comportamento temporal, em que \mathcal{S}_v possui regiões de acelerações e desacelerações no espaço de estados,

⁴Para obtenção do sistema modificado $\mathbf{f}_m(\vec{x})$, fez-se $\mathbf{f}_m(\vec{x}) := \frac{\ell}{T} \frac{\mathbf{f}(\vec{x})}{\|\mathbf{f}(\vec{x})\|}$, em que ℓ é o perímetro do atrator e T o período de oscilação.

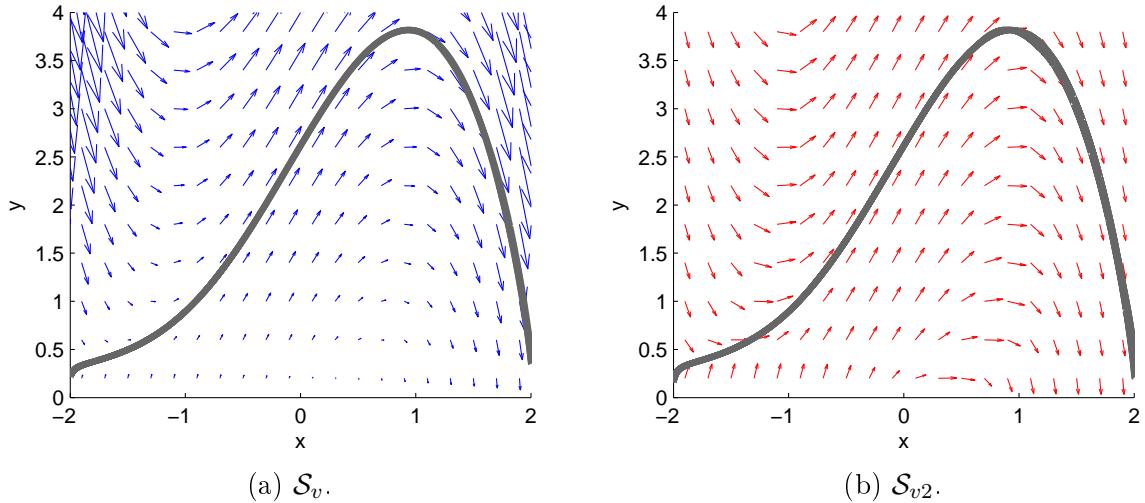


Figura 4.7: Campos vetoriais de dois osciladores topologicamente equivalentes. (a) \mathcal{S}_v : Van der Pol original; (b) \mathcal{S}_{v2} : Van der Pol modificado. Enquanto \mathcal{S}_v possui regiões de acelerações e desacelerações, \mathcal{S}_{v2} evolui com velocidade constante em todo o atrator.

enquanto \mathcal{S}_{v2} evolui com velocidade constante. A Figura 4.7 mostra parte dos campos vetoriais desses sistemas, em que é possível verificar essas diferenças.

Foram considerados ainda dois valores de parâmetros $\mu \in \{1; 4\}$, em que o valor maior representa não linearidade mais acentuada. A Figura 4.8 mostra a evolução no atrator dos sistemas \mathcal{S}_v e \mathcal{S}_{v2} para os dois valores de parâmetros. Números iguais, no mesmo gráfico, indicam intervalos de tempos iguais. É possível verificar a regularidade na evolução do sistema modificado em relação ao sistema original, principalmente para $\mu = 4$.

A Figura 4.9 mostra a evolução temporal das fases $\tilde{\phi}$ (Def. 3.2) e $h(\vec{x})$, para o sistema original e modificado. Para o sistema original \mathcal{S}_v , verifica-se que $\tilde{\phi}(t) \approx h(t)$ a menos de algumas pequenas flutuações. No entanto os valores ζ_h e $\zeta_{\tilde{\phi}} = 1$ são diferentes, especialmente para $\mu = 4$. O que essa diferença representa? Olhando para o resultado do sistema modificado é possível ver o que indica essa diferença de valores de ζ . Como não há acelerações na evolução do sistema, a evolução temporal de $\tilde{\phi}(t)$ é uma reta de inclinação constante. Por outro lado, a variável $h(\vec{x})$ definida apresenta variações de inclinação. Isso remete a uma questão filosófica sobre a dinâmica da fase de osciladores. Enquanto $\tilde{\phi}(t)$ representa bem a dinâmica de acelerações e desacelerações sobre o perímetro ao longo da órbita do atrator (correspondente ao expoente nulo de Lyapunov), a evolução irregular de $h(t)$ representa o quão diferente é o atrator de um círculo – devido ao cálculo do arcotangente. Como o atrator de Van der Pol não descreve uma órbita completamente circular no espaço de estados, variações na inclinação da evolução de $h(t)$ são observadas, não por evoluir mais rápido ou lentamente no atrator. O índice ζ proposto quantifica esse tipo de diferença na representatividade de $h(t)$ com a dinâmica de evolução dos estados ao longo da trajetória. A seguir são apresentados alguns cálculos para outros sistemas e variáveis descritoras de fase.

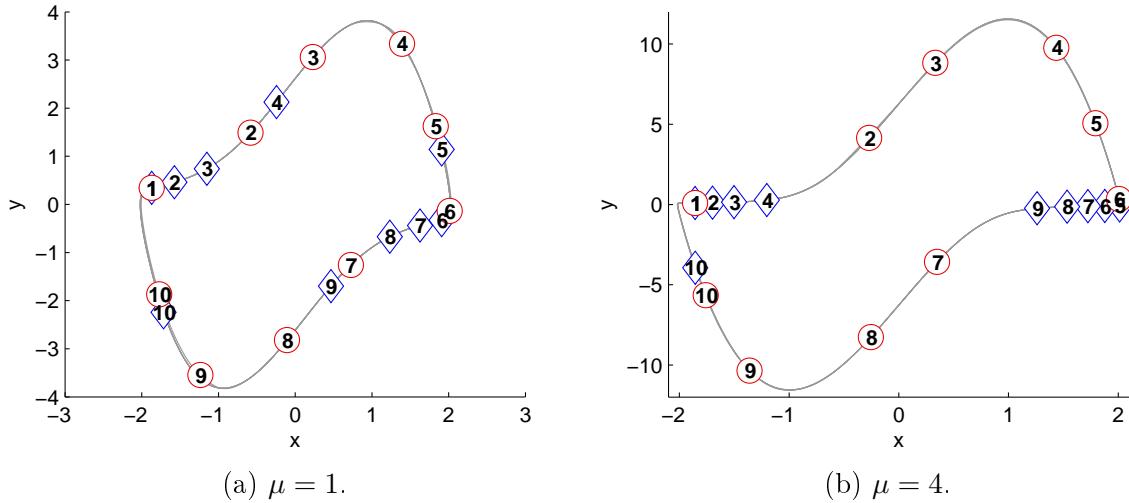


Figura 4.8: Oscilador de Van der Pol. No mesmo atrator, pontos com números iguais representam instantes de tempos iguais, em que o sistema original \mathcal{S}_v é representado pelos losangos e o sistema modificado \mathcal{S}_{v2} pelos círculos. Nota-se que o sistema modificado apresenta os intervalos regularmente espaçados no atrator, enquanto o original tem regiões de aceleração e desaceleração. É apresentado para o parâmetro (a) $\mu = 1$ e (b) $\mu = 4$, sendo este último com evolução menos regular.

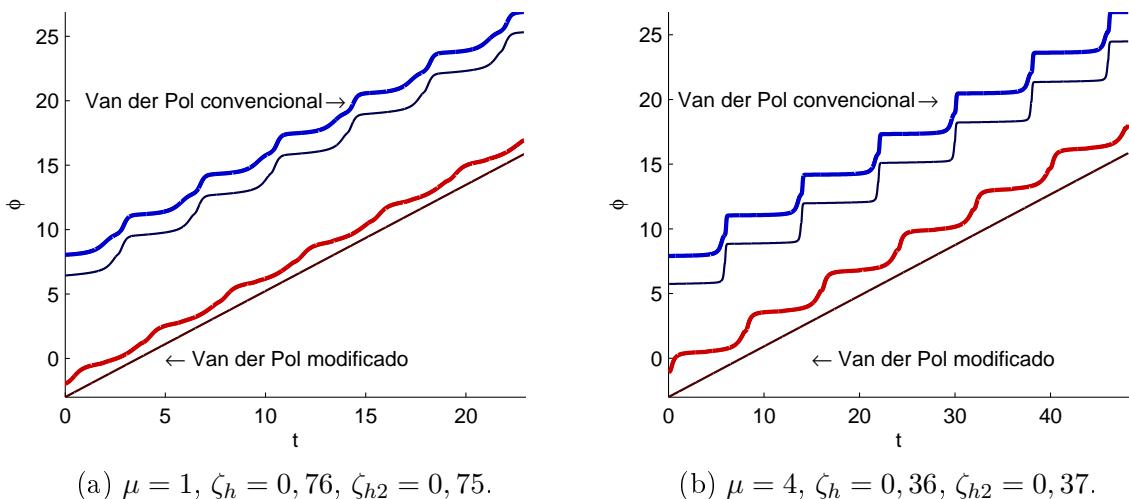


Figura 4.9: Evolução temporal da fase do oscilador de Van der Pol original \mathcal{S}_v e modificado \mathcal{S}_{v2} , para dois valores de parâmetros distintos. A linha espessa representa a evolução de $h(t)$ e a linha fina representa a evolução de $\tilde{\phi}(t)$ (Def. 3.2). Os índices de representação de fase são mostrados, em que ζ_h foi calculado para \mathcal{S}_v e ζ_{h2} para \mathcal{S}_{v2} .

Tabela 4.2: Resultados do cálculo dos índices de *informação* $\bar{\iota}$ (Def. 4.1) e *representação* $\bar{\zeta}$ (Def. 4.2) de fase para variáveis de estado dos sistemas de Lorenz, Chua e Corda.

#	Sistema	$\bar{\iota}_x$	$\bar{\iota}_y$	$\bar{\iota}_z$	$\bar{\zeta}_x$	$\bar{\zeta}_y$	$\bar{\zeta}_z$
1	Lorenz	0,3586	0,4688	0,6687	-0,0006	-0,0051	-0,2464
2	Chua	0,5527	0,2963	0,6690	-0,0045	-0,0006	0,0038
3	Corda	0,3046	0,5747	0,5561	0,2641	-0,0154	0,0377

Resultados e discussão

Para os sistemas considerados, foram calculados os índices médios de *informação* $\bar{\iota}$ e *representação* $\bar{\zeta}$ de fase considerando, primeiro, as variáveis de estado como saída: $\bar{\iota}_x$ e $\bar{\zeta}_x$ para $h(\vec{x}) = x$; $\bar{\iota}_y$ e $\bar{\zeta}_y$ para $h(\vec{x}) = y$; $\bar{\iota}_z$ e $\bar{\zeta}_z$ para $h(\vec{x}) = z$. Esses índices são mostrados na Tabela 4.2. A Tabela 4.3 mostra os índices para as funções de saída propostas para cada sistema.

A Tabela 4.2 mostra os índices calculados para cada variável de estado. Um índice $\bar{\iota}$ elevado para determinada variável de estado indica que o sistema evolui majoritariamente na direção desse eixo. É o caso, por exemplo, de y ($\approx z$) para o sistema Corda e z para os sistemas de Lorenz e Chua.

A Tabela 4.2 mostra a diferença prática entre $\bar{\iota}$ e $\bar{\zeta}$. Para o sistema de Chua, por exemplo, enquanto $\bar{\iota}_z \approx 0,67$, $\bar{\zeta}_z$ é quase nulo. Essa diferença indica que há informação sobre a fase do atrator em z ($\bar{\iota}_z > 0$), mas a variável não cresce monotonicamente com a evolução do sistema e, portanto não cresce monotonicamente com o tempo. Por outro lado, para $h_{ch2}(\vec{x})$ (Eq. 4.39), tem-se $\bar{\iota} \approx \bar{\zeta}$ (linha 4 da Tabela 4.3). Isso indica que essa função de saída tem alguma informação de fase e, ainda, é majoritariamente crescente com a evolução do sistema, ou seja, $f(\vec{x})$ aponta para uma direção de crescimento da variável de saída.

Como o índice $\bar{\zeta}$ avalia o sentido de maior crescimento da variável de saída $dh/d\vec{x}$, seu valor quantifica o comportamento *dinâmico* da variável descritora de fase. Ao comparar, por exemplo, $\bar{\zeta}_x$ com $\bar{\zeta}_y$ está se verificando se \dot{x} representa melhor a evolução de $\dot{\phi}$ do que \dot{y} (considerando a Definição 3.2). Para o oscilador de Lorenz, por exemplo, ambas definições de fase propostas representam bem a dinâmica de evolução do sistema $\bar{\zeta}_h \approx 0,90$ (Tab. 4.3), enquanto que nos osciladores Chua e Corda as segundas definições representam melhor a dinâmica de evolução do sistema. Isso pode ter implicações no projeto de *controladores* para sincronismo de fase, por exemplo, em que todo o projeto do controlador é realizado a partir de uma variável descritora de fase (*variável controlada*) preestabelecida. Se a dinâmica da *variável controlada* é mais simples do que o real corre-se o risco do controle ser falho e, no caso oposto (i.e. variável com dinâmica mais complexa do que o real) o controlador pode se tornar muito agressivo e pouco eficiente.

4.4 Conclusões do Capítulo

O problema de *sincronismo de osciladores* foi segregado em três fatores: i) *medição* de fase; ii) *atuação* na dinâmica da fase; e iii) *forma* de acoplamento. Nesse capítulo foram abordados os problemas de (i) *medição* de fase e (ii) *atuação* na dinâmica da fase. Sobre *medição*, foram apresentadas propostas para quantificar a *informação* sobre a fase do oscilador que uma variável pode ter: *índice de informação de fase* ι (Def. 4.1); e a *representatividade* da evolução da fase de uma saída do sistema: *índice de representação de fase* ζ (Def. 4.2). Sobre o problema de *atuação*, foi proposto uma métrica para quantificar a influência

Tabela 4.3: Resultados do cálculo dos índices de *informação* $\bar{\iota}$ (Def. 4.1) e *representação* $\bar{\zeta}$ (Def. 4.2) de fase para algumas variáveis descritoras de fase dos sistemas de Lorenz, Chua e Corda.

#	Sistema	$h(\vec{x})$	$\bar{\iota}_h$	$\bar{\zeta}_h$
1	Lorenz	$\tan^{-1} \left(\frac{z-27}{\sqrt{x^2+y^2-12}} \right)$	0,8968	0,8968
2		$\tan^{-1} \left(\frac{z-27}{2xy-150} \right)$	0,8999	0,8999
3	Chua	$-\tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right)$	0,4066	0,3290
4		$-\tan^{-1} \left(\frac{z+0,5689x}{y} \right)$	0,5225	0,5223
5	Corda	$-x \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right)$	0,6571	0,5686
6		$\tan^{-1} \left(\frac{z-10}{x} \right) + x \tan^{-1} \left(\frac{z}{y} \right)$	0,6662	0,6341

que uma entrada pode exercer na dinâmica da fase do oscilador: *índice de influência de fase* χ (Def. 4.3).

A concepção dos índices basearam-se nas definições e proposições do Capítulo 3, mas podem ser aplicados usando outras definições de fase ϕ . Porém, ao adotar a Definição 3.1, o cálculo dos índices pode ser efetuado usando as próprias equações de estado do sistema. Foram apresentados resultados ilustrativos sobre a aplicação dos índices propostos.

Os índices de *informação* e de *influência* de fase foram aplicados no acoplamento dissipativo entre osciladores. Observou-se, para os casos analisados, alguma concordância entre a métrica proposta e o tamanho da região de sincronismo de fase, calculada experimentalmente para diferentes valores de força de acoplamento e diferença de frequência. O índice permitiu obter a mesma ordenação sobre quais variáveis de acoplamento proporcionam maior ocorrência de sincronismo de fase, testada empiricamente. Porém, ao comparar valores absolutos dos índices, não há uma relação direta com os resultados experimentais. Acredita-se que o índice pode ajudar a quantificar informações sobre a fase, sobretudo a respeito da sua *dinâmica*, mas determinar o sincronismo (*sincronizabilidade*) requer um cuidado maior.

O índice de *representação* de fase foi utilizado para avaliar algumas definições de fase comumente utilizadas, em que foram ilustradas algumas características da métrica. O índice proposto quantifica mais a *dinâmica* de evolução da variável, se está ou não de acordo com a evolução do sistema na direção do campo vetorial. Porém, comprovar a eficácia do índice traz uma dificuldade prática: como estabelecer uma referência de comparação se não há consenso entre a comunidade científica sobre a fase – quiçá sobre sua dinâmica. Outros experimentos devem ser concebidos para verificar a eficácia desse índice. Um caminho seria relacionar com as direções correspondentes ao expoentes nulos de Lyapunov dos sistemas, calculados numericamente. Outra possibilidade é tomar um oscilador bem conhecido (ex. sistema de Poincaré), que possui dinâmica mais simples, e realizar transformações de coordenadas, pressupondo que a dinâmica da fase pode ser avaliada nas coordenadas convencionais, e avaliar os índices nas novas

coordenadas.

Os índices propostos podem ajudar a caracterizar um acoplamento, mas como comentado anteriormente, a questão sobre *sincronizabilidade* entre dois sistemas é uma discussão maior, em que se deve levar em consideração mais fatores. As propostas apresentadas nesse capítulo não têm o objetivo de fornecer uma solução para essa questão, mas pode ajudar a esclarecer as partes que a compõe.

A terceira peça deste problema – e talvez a mais crucial e complexa, diz respeito à *forma* de efetuar o sincronismo. Essa questão é discutida no Capítulo 5, com uma tentativa de chegar a uma abordagem em termos de *controle de sistemas dinâmicos*. Essa abordagem pode permitir estabelecer leis ou sinais de controle que promovem o sincronismo, mas determinar previamente se o sincronismo será alcançado a partir de acoplamentos preestabelecidos ainda é um desafio que merece investigação mais profunda. As discussões que seguem visam esclarecer esse tipo de problema.

Proposta de continuidade

Neste trabalho, o sincronismo de fase de osciladores foi caracterizado em termos de *definição de fase* (Capítulo 3), *atuação e medição* da fase (Capítulo 4). Este capítulo apresenta propostas de continuidade do trabalho. Nas duas primeiras seções são apresentadas propostas sobre como caracterizar a *forma* do acoplamento para o sincronismo de fase, utilizando duas abordagens: redução de fase (Kuramoto 1984; Hoppensteadt e Izhikevich 1997; Bonnin, Corinto e Gilli 2010a; Dörfler e Bullo 2014; Ferrari et al. 2015) e controle de sistemas não lineares (Nijmeijer e Schaft 1990; Vidyasagar 1993; Khalil 2002). O presente trabalho não apresenta resultados sobre esses assuntos, mas, em sua continuidade, espera-se que esses tópicos sejam discutidos com maior profundidade e resultados alcançados. A terceira seção destaca as principais propostas apresentadas neste documento e os pontos que merecem mais atenção, para melhoria ou amadurecimento do assunto.

5.1 Método da Redução de Fase

No contexto de sincronismo de osciladores, um dos métodos mais utilizados para descrição da evolução dinâmica da fase é o método da *redução de fase* (*phase reduction*) – também chamado de método de *descrição de fase* (*phase description*). Esse método, apresentado na Seção 2.4, foi utilizado nos trabalhos pioneiros de Winfree (1967) e Kuramoto (1984) que estudaram o sincronismo em redes de osciladores por meio de modelos *analíticos* para a fase do sistema. Para o sistema de Landau-Stuart (Seção 2.4), foi possível determinar as regiões de sincronismo (i.e. línguas de Arnold) para o sistema forçado. Trabalhos recentes apontam que o cálculo e a análise das equações dinâmicas que regem a fase de sistemas periódicos é a abordagem mais proveitosa para o estudo de sincronismo de fase (Hoppensteadt e Izhikevich 1997; A. Pikovsky, M. Rosenblum e Kurths 2003; Bonnin, Corinto e Gilli 2010a).

Basicamente, o *método da redução de fase* consiste em reduzir um problema de sincronismo entre osciladores (ex. dois osciladores de ordem n acoplados) a um problema unidimensional, que descreva apenas a dinâmica da diferença de fase entre os osciladores (e.g. $\dot{\psi}$). Desta forma, a análise do sincronismo de um sistema de ordem elevada (ex. ordem $2n$) se reduz à análise de estabilidade de um sistema de ordem unitária (ex. $\dot{\psi}$, de ordem 1).

Considere dois osciladores acoplados. O *método da redução de fase* pode ser empregado executando os seguintes passos:

1. Para cada oscilador é definida uma variável fase: φ_1 e φ_2 ;
2. Define-se a variável *diferença de fase*: $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$;
3. Escreve-se a dinâmica da diferença de fase: $\dot{\psi}(\varphi_1, \varphi_2) = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$;

4. Na equação de $\dot{\psi}(\varphi_1, \varphi_2)$, substitui-se $\varphi_2 = \varphi_1 - \psi$, para obter $\dot{\psi}(\varphi_1, \psi)$;
5. Emprega-se o método da média (*averaging*, vide Seção 2.4.3) para eliminar as dependências explícitas de $\dot{\psi}$ com outras variáveis (e.g. φ_1);
6. Analisa-se a estabilidade da equação $\dot{\psi}(\psi)$, de ordem $n = 1$.

A análise de modelos de fase (passos 5 e 6) tem sido estudada em detalhes (Strogatz 2000; Acebrón et al. 2005; Dörfler e Bullo 2014), mas a redução de um sistema não-linear de ordem n para seu modelo de fase (passos 1, 2, 3 e 4) recebeu menos atenção (Bonnin, Corinto e Gilli 2010a). Geralmente essa redução é realizada para sistemas periódicos com ciclos-limite quase circulares definidos num plano (e.g. osciladores de Van der Pol, Poincaré, Landau-Stuart), com definição de fase $\varphi(\vec{x}) = \tan^{-1}(y/x)$. A Definição 3.2, junto com o Teorema 3.2, poderia permitir a aplicação do método de redução de fase para sistemas periódicos em que dificilmente se define uma variável $\varphi(\vec{x})$. Isso inclui sistemas de dimensão elevada e aqueles que não apresentam uma projeção circular num plano.

Um exemplo pitoresco é o atrator de Li (Letellier e Gilmore 2009), apresentado na Figura 3.11c, em que foram utilizados os parâmetros $(a, c, d, e, k, f) = (40 ; 11/6 ; 0,16 ; 0,65 ; 55 ; 20)$, cuja evolução do atrator se dá num ciclo limite, T -periódico. Para esse sistema, estabelecer uma variável $\varphi(\vec{x})$ que descreva a fase não é trivial. Porém, o Teorema 3.2 permitiria obter uma expressão para $\dot{\varphi}(\vec{x}) := (\tilde{d\phi}/d\vec{x}) \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ e assim obter $\dot{\psi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ (os subíndices denotam osciladores diferentes). Note que, como o sistema é periódico, $\dot{\psi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ é $T_{1,2}$ -periódico em $\vec{x}_{1,2}$.

Transformar a expressão $\dot{\psi}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, obtida em função dos estados, em uma expressão do tipo $\dot{\psi}(\vec{x}_1, \psi)$, i.e. em função da própria diferença de fase ψ , é um desafio. Para isso, é necessário encontrar uma relação $\vec{x}_2 = h(\vec{x}_1, \psi)$.

Uma tentativa nessa direção é escrever a fase como (dependências explícitas de \vec{x} serão omitidas):

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \mathbf{f} dt, \quad (5.1)$$

em que fazendo integração por partes¹, obtém-se:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{d\phi}{d\vec{x}}^T \cdot \vec{x} - \int \vec{x}^T \cdot \frac{d^2\phi}{d\vec{x}^2} \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) dt. \quad (5.2)$$

Escreve-se então a equação $\psi = \phi_1 - \phi_2$ como:

$$\psi = \left(\frac{d\phi_1}{d\vec{x}_1}^T \cdot \vec{x}_1 - \int \vec{x}_1^T \cdot \frac{d^2\phi_1}{d\vec{x}_1^2} \cdot \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) dt \right) - \left(\frac{d\phi_2}{d\vec{x}_2}^T \cdot \vec{x}_2 - \int \vec{x}_2^T \cdot \frac{d^2\phi_2}{d\vec{x}_2^2} \cdot \mathbf{f}_2(\vec{x}_2) dt \right). \quad (5.3)$$

A relação $\vec{x}_2 = h(\vec{x}_1, \psi)$ poderia, talvez, ser inferida a partir dessa equação, utilizando os conceitos trabalhados no Capítulo 3, usando $d\phi/d\vec{x} := c(\vec{x})\mathbf{f}(\vec{x})$ (Definição 3.2). A partir disso seria possível utilizar o método da média (passo 5) e calcular regiões de sincronismo entre dois osciladores (passo 6).

Porém a relação $\vec{x}_2 = h(\vec{x}_1, \psi)$ não foi encontrada com clareza. As integrais do lado direito da Equação 5.3 tornam inviável o isolamento da variável \vec{x}_2 por este meio. Talvez uma simplificação ou análise mais cuidadosa dessa parte da equação viabilize o procedimento. Outra abordagem seria estimar

¹A integração por partes: $\int u dv = uv - \int v du$, foi realizada com $u := (d\phi/d\vec{x})^T$ e $dv := \mathbf{f}(\vec{x}) dt$. Calculou-se $du = (d^2\phi/d\vec{x}^2) \cdot \mathbf{f}(\vec{x}) dt$ e $v = \int \mathbf{f}(\vec{x}) dt$, usando a relação $\int \mathbf{f}(\vec{x}) dt = \vec{x}$ nesta última equação.

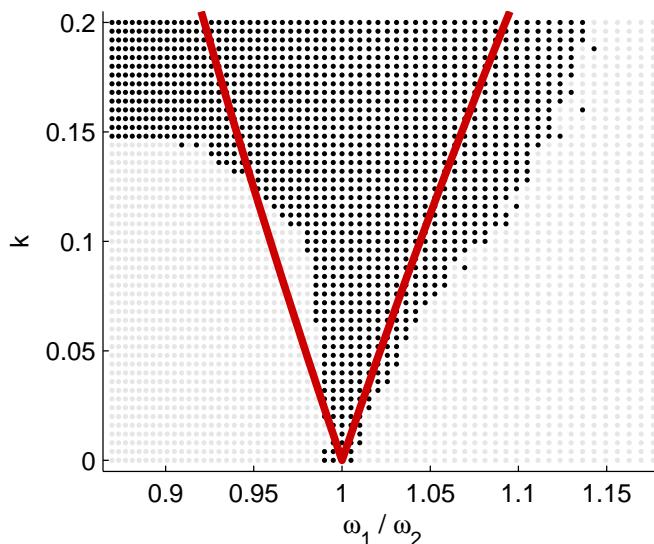


Figura 5.1: Regiões de sincronismo para dois sistemas de Rössler (Eq. 4.30), com acoplamento dissipativo unidirecional na variável x .

uma função $\hat{h}(\vec{x}_1, \psi)$, usando técnicas de *identificação de sistemas dinâmicos* para aplicação do método de redução de fase, com \vec{x}_1 e \vec{x}_2 medidos e ψ dado pela Eq. 5.3.

Um teste muito preliminar, feito sem o devido rigor matemático, foi realizado para estimar as regiões de sincronismo para dois sistemas Rössler (Eq. 4.30), em regime espiral (caótico), com acoplamento dissipativo unidirecional na variável x . Nesse teste, as integrais do lado direito da Equação 5.3 foram simplesmente desprezadas. O resultado é apresentado na Figura 5.1. Verifica-se que o resultado não é satisfatório, em comparação com o experimental. Mas esse desenvolvimento pode apontar para um caminho que, até o presente momento, ainda não foi visualizado.

Análises do sincronismo de fase por meio da redução de fase é uma alternativa interessante. Porém, características do sistema original podem não ser bem preservadas no modelo reduzido. Uma análise direta das equações de estados pode produzir resultados mais fidedignos ao oscilador original (Dörfler e Bullo 2014). A próxima seção apresenta tentativas nesse sentido.

5.2 Controle de Sincronismo

Técnicas de controle de sistemas dinâmicos não lineares podem ser utilizadas para vários fins no sincronismo de osciladores. As propostas e definições apresentadas no Capítulo 3 podem permitir rearranjar o problema de sincronismo de fase entre osciladores em um problema de controle. Utilizando técnicas adequadas, seria possível verificar a aplicabilidade e a eficácia da definição de fase e dos índices e propostos. Outro possível resultado seria o projeto de controladores para alcançar o sincronismo de fase em diferentes osciladores, ou cadeia de osciladores. Primeiro o problema será colocado para que, em seguida, sejam apresentadas as propostas de desenvolvimento.

5.2.1 Colocação do problema

A seguir serão mostradas três possíveis tentativas de predispor o problema de *sincronismo de fase* de tal modo que possa ser escrito como um problema de *controle de sistemas dinâmicos* (e.g. Nijmeijer 2001; Tôrres e Aguirre 2004; Torres, Hespanha e Moehlis 2015), valendo-se das propostas apresentadas nos capítulos anteriores². Essa colocação do problema geralmente é feita definindo-se uma saída $\varphi(\vec{x})$ que descreva a fase (*phase-like variable*) do sistema em função dos estados \vec{x} . Porém, a proposta de definição de fase apresentada (Def. 3.2) pode não ter solução analítica em que não é possível escrever $\tilde{\phi}$ em função de \vec{x} diretamente. A questão aqui é como trazer as propostas dos capítulos anteriores para ajudar no problema de controle de sincronismo? A seguir serão apresentadas três opções de colocação do problema. Nos desenvolvimentos das equações, algumas dependências explícitas dos estados \vec{x} serão omitidas, por questão de concisão, mas espera-se que esteja claro no contexto.

Transformação de coordenadas

Pela Definição 3.2, um oscilador descrito pela Eq. 2.1, tem a derivada temporal da fase:

$$\dot{\phi} = c(\vec{x}) \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}. \quad (5.4)$$

A Equação 5.4 pode permitir explicitar a variável fase nas equações do sistema, por uma transformação de coordenadas Φ , fazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \\ \end{array} \right. \xrightarrow{\Phi} \left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{\eta}} = \mathbf{f}_\eta(\vec{\eta}, \phi) \\ \dot{\phi} = f_\phi(\vec{\eta}, \phi), \end{array} \right. \quad (5.5)$$

em que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$, $\phi \in \mathbb{R}$. Com dois sistemas descritos na forma da Eq. 5.5, o sincronismo de fase pode ser analisado pela estabilidade da variedade síncrona $\|\phi_1 - \phi_2\| = 0$ – semelhante ao que é realizado para análise de sincronismo completo (Nijmeijer 2001).

A dificuldade, nesse caso, é encontrar a transformação de coordenadas Φ . A função f_Φ é dada pela Eq. 5.4, porém em função de \vec{x} . Para achar Φ seria necessário encontrar uma relação do tipo $\phi = h(\vec{x})$. Isso poderia ser feito estimando $\hat{\phi} = \hat{h}(\vec{x})$ via procedimentos de identificação de sistemas dinâmicos, utilizando $\tilde{\phi}$ (Def. 3.2) e \vec{x} como variáveis medidas.

Expansão dinâmica

Outra forma de trabalhar o problema seria, ao invés de fazer transformação de coordenadas, fazer a *expansão dinâmica*³ do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \\ \dot{\phi} = f_\phi(\vec{x}), \end{array} \right. \quad (5.6)$$

²A ideia é realmente aproveitar as propostas apresentadas nos Capítulos 3 e 4 para colocação do problema e verificar se as propostas trazem algum ganho para o problema de *controle de sincronismo*.

³Aqui esse termo refere-se apenas à elevação da ordem da equação no espaço de estados, de n para $(n+1)$, pela adição da última equação em (5.4).

sendo que $f_\phi(\vec{x})$ é dado pela Eq. 5.4. Desta forma seria possível trabalhar o controle de $\phi(t)$ proveniente da equação.

Frequência de oscilação

O sincronismo pode ser trabalhado em termos de frequência, definido pela variável $\omega = \dot{\phi}(\vec{x})$, em que poderia ser possível encontrar uma transformação de coordenadas Ω tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \\ \dot{\vec{\eta}} = \mathbf{f}_\eta(\vec{\eta}, \omega) \\ \dot{\omega} = f_\omega(\vec{\eta}, \omega), \end{array} \right. \xrightarrow{\Omega} \quad (5.7)$$

em que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^{(n-1)}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Nesse caso, seria possível verificar, por exemplo, se dois sistemas possuem a mesma frequência de oscilação, $\omega_1 \approx \omega_2$. Note que ω é a frequência instantânea – e não *frequência média*. Para dois osciladores acoplados, poderia ser analisada a estabilidade da variedade $|\omega_1 - \omega_2| = 0$, por exemplo. Para garantir travamento de fase seria necessário introduzir ϕ via integração de $\omega(t)$.

Ainda não está claro qual das formas de colocar o problema é mais vantajosa, ou ainda se há uma outra forma melhor. É necessário evoluir mais essas ideias, talvez com experimentos numéricos, para chegar a alguma conclusão a esse respeito.

5.2.2 Propostas de desenvolvimento

Com uma das três formulações do problema de sincronismo de fase apresentadas, é possível utilizar técnicas de controle já estabelecidas (Nijmeijer e Schaft 1990; Vidyasagar 1993; Khalil 2002) para a resolução de alguns problemas. A seguir são apresentados alguns desses assuntos.

Verificação dos índices propostos

Os índices propostos no Capítulo 4 para avaliação do acoplamento em termos de *medição* e *atuação* podem ser melhor avaliados, quanto à sua aplicabilidade e eficácia, quando isolados os efeitos da *forma* do acoplamento. Um sinal de controle $u(t)$ com a *forma* apropriada, por exemplo, permitiria a comparação entre a *atuação* em duas variáveis distintas para verificar em qual delas gasta-se menos energia. A *medição*, por sua vez, poderia ser avaliada em termos de reconstrução da variável *fase* do sistema. O exemplo a seguir mostra um caso particular que ilustra essas possíveis aplicações.

Exemplo 5.1. Considere o sincronismo bidirecional de fase entre dois sistemas Corda (Eq. 4.40). A Tabela 4.2 mostra índices de *informação* de fase $\bar{\iota}$ calculados para as variáveis de estado (x, y, z) . Para o acoplamento dissipativo, esses índices são equivalentes ao índice de *influência* de fase, $\chi_i \equiv \iota_i \forall i \in \{x, y, z\}$.

Apesar de $\bar{\iota}_y \approx \bar{\iota}_z$, quando acoplado por y é necessária uma força de acoplamento ε menor para sincronizar os osciladores do que por z (Aguirre e Letellier 2016), usando *acoplamento dissipativo* em uma única variável⁴. Conjectura-se que o *acoplamento dissipativo* não consegue aproveitar bem a informação

⁴ Apesar de ε estar sendo usado aqui como indicador de “facilidade de sincronismo”, observa-se que uma *força de acoplamento* menor não significa, necessariamente, que seja mais “fácil” atingir o sincronismo, é apenas um indício. Em geral depende da energia contida nas *variáveis* de acoplamento. Talvez um teste

de fase contida em z , mas ela está lá. Essa *medição* poderia ser melhor avaliada se o objetivo não fosse o sincronismo, que envolve outros dois fatores (i.e. *forma* e *atuação*), mas sim a reconstrução de $\phi(t)$. É possível reconstruir a evolução da fase a partir de uma única variável de estado? Quais variáveis teriam melhor desempenho? O índice $\bar{\iota}$ apresenta resultados coerentes com essa avaliação? Note que isso se assemelha ao problema de *observabilidade*, mas com o objetivo de reconstruir a evolução de uma única variável, e não de todos os estados. Deve-se verificar também se uma coisa não implica a outra, isto é, se para reconstruir a *fase* é necessário reconstruir *todos os estados*. Analisar se dois estados são *distinguíveis* com relação a fase seria necessário nesse caso.

Para avaliar melhor a *atuação* nos estados x e z , cujos índices calculados $\bar{\chi}_y \approx \bar{\chi}_z$ (mostrado na Tabela 4.2 os índices $\bar{\iota}$, que, nesse caso, $\bar{\zeta} \equiv \bar{\iota}$ conforme Teorema 4.1), seria necessário isolar as influências da *forma* e da *medição*. Para isso, seria possível utilizar técnicas de *controle ótimo* para encontrar o sinal $u^*(t)$, de energia mínima, que leve os sistemas ao sincronismo de fase⁵. Espera-se que, para índices $\bar{\chi}$ semelhantes, sejam obtidos sinais $u^*(t)$ com energia semelhante. Isso poderia verificar a validade ou não do índice proposto. \square

A questão da *atuação* poderia ainda ser relacionada ao conceito de *alcançabilidade* (Nijmeijer e Schaft 1990; Vidyasagar 1993), mas de apenas uma variável: a fase. Verificar de maneira geral, para uma dada função $g(\vec{x})$, qual a *região alcançável* de fase é possível atingir é um desafio. Não seria absurdo imaginar também uma análise da *dinâmica zero* (Nijmeijer e Schaft 1990) do sistema acoplado, com a diferença fase controlada ($\psi = 0$). Nesse caso, por exemplo, *dinâmica zero* estável implicaria sincronismo completo.

Experimentos como outros sistemas podem ser realizados para verificação dos índices. Isso poderia ajudar a esclarecer quais os principais fatores que influenciam o sincronismo de fase de osciladores.

Avaliação de formas de acoplamento

Nos trabalhos que tratam sincronismo de *fase*⁶, uma das formas mais utilizadas é o *acoplamento dissipativo* (M. G. Rosenblum, a. S. Pikovsky e Kurths 1996; M. Rosenblum, A. Pikovsky e Kurths 1997; Andrade, Davidchack e Lai 2000; Boccaletti e Valladares 2000; Osipov, Hu et al. 2003; Ivanchenko et al. 2004; Oh, Reischmann e Rial 2014; Aguirre e Letellier 2016). Quando é estudado o sistema sozinho, é comum usar também a ação de uma *força externa*, e.g. $u(t) := \varepsilon \operatorname{sen}(\omega t)$, colocada em uma das equações de estados (A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; A. Pikovsky, M. Zaks et al. 1997; Park, M. a. Zaks e Kurths 1999; M. A. Zaks et al. 1999; Josić e Mar 2001; Aguirre e Letellier 2016). Uma forma mais sofisticada de acoplamento foi usada no trabalho de Belykh et al. (2005), que se assemelha ao controladores comumente usados em PLL (*phase-locked loop*), e foram obtidos resultados interessantes de sincronismo com diferentes sistemas.

A Definição 4.3, porém, indica que a influência na fase de um sistema é máxima quando $\mathbf{g}(\vec{x}) := \mathbf{f}(\vec{x})$. Essa forma de acoplamento poderia ser comparada às formas existentes, em termos de *esforço de sincronismo*, quantificado em energia do sinal de controle $u^*(t)$ otimizado. A ideia seria avaliar essa forma de acoplamento para diferentes sistemas.

mais adequado para mensurar essa “facilidade de sincronismo” seja medir a energia do sinal de influência no sistema, e.g. medir a energia de $\varepsilon p(t)$ na Eq. 2.8.

⁵Trabalhos semelhantes foram realizados para sincronismo de cadeias de osciladores, mas usando o método de redução de fase (Harada et al. 2010; Zlotnik et al. 2013).

⁶Para sincronismo completo, técnicas como *substituição completa* (ou parcial) e controladores diversos são utilizados.

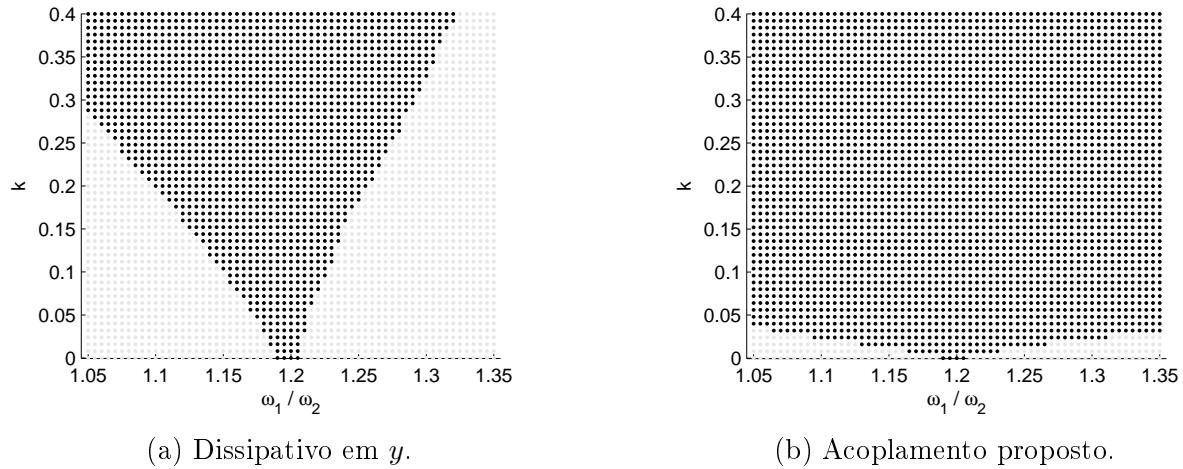


Figura 5.2: Regiões de sincronismo para um acoplamento unidirecional entre os sistemas de Van der Pol (mestre) e Rössler (escravo). Foi utilizado o (a) acoplamento dissipativo na variável y de ambos osciladores e (b) acoplamento proposto fazendo $\mathbf{g}(\vec{x}) := \mathbf{f}(\vec{x})$ e $u(t) := (\theta_1 - \theta_2)$, sendo θ_1 e θ_2 definidos pela Eq. 4.29 e 4.33, respectivamente.

Um teste preliminar foi realizado com acoplamento unidirecional, de um sistema de Van der Pol (mestre, Eq. 3.26) com um sistema de Rössler (escravo, Eq. 4.30). A Figura 5.2 mostra regiões de sincronismo para (a) acoplamento dissipativo em y ; (b) acoplamento proposto, fazendo $\mathbf{g}(\vec{x}) := \mathbf{f}(\vec{x})$, com $u(t) := (\theta_1 - \theta_2)$, sendo θ_1 e θ_2 definidos pela Eq. 4.29 e 4.33, respectivamente. Verifica-se que o acoplamento proposto apresenta mais condições de sincronismo. Porém, nesse experimento há outros fatores envolvidos (e.g. *medição* e *forma*) que impossibilita uma conclusão categórica. Mas mostra que é possível atingir sincronismo de fase com esse tipo de influência na dinâmica do oscilador e que talvez valha a pena aprofundar esse estudo.

Projeto de controladores

Projeto de controladores visando o sincronismo também podem ser efetuados para diferentes sistemas, com acoplamentos e estratégias de controles variadas. Ressalva-se que, no contexto de sincronismo de *fase*, não é interessante o projeto de controladores muito agressivos, por exemplo, que anulem completamente a dinâmica natural de oscilação do sistema para imposição de uma *dinâmica desejada*. É preferível o uso de estratégias mais sutis, em que a potência do sinal de controle seja comparável à de uma *fraca interação*. Algumas estratégias e análises que podem ser interessantes ao problema envolvem *controle baseado em passividade*, *teorema do pequeno ganho* (Khalil 2002), estratégias de controle ótimo (Kirk 1970). Ainda não está claro qual seria a abordagem mais adequada.

5.3 Principais Propostas e Continuidade do Trabalho

A principal proposta apresentada até agora é a Definição 3.1, que estabelece um conceito de fase que pode ser aplicado a uma grande classe de osciladores. O maior ganho que essa definição pode trazer diz respeito à descrição da dinâmica de evolução da fase (vide exemplo com sistema de Van der Pol na página 56), que pode ser mais fidedigna à evolução do sistema na direção correspondente ao expoente nulo de Lyapunov.

Porém, mais experimentos numéricos ilustrativos devem ser realizados para verificar tal característica. O principal ganho em se descrever melhor a dinâmica da fase é, talvez, nas análises em escalas de tempo inferiores a um período de oscilação, ponto fraco dos métodos mais utilizados atualmente.

Foi estabelecido também o conceito de *regiões de mesma fase* (Def. 3.3) para a definição proposta. Mostrou-se que a definição concorda com o método do arcotangente no atrator de Poincaré, mas se diferencia deste fora do atrator (Sec. 3.2.2). As regiões de mesma fase são obtidas a partir do próprio campo vetorial $\mathbf{f}(\vec{x})$ do sistema, sendo possível defini-las para uma grande classe de sistemas. Essas regiões podem, talvez, ser utilizadas para estabelecer uma seção de Poincaré adequada para osciladores de topologia complexa.

Para o cálculo da evolução da fase pela Definição 3.2 proposta, faz-se necessário encontrar o campo escalar $c(\vec{x})$ adequado. Para sistemas periódicos foi estabelecida uma forma de encontrá-lo (Sec. 3.2.3). Porém, para atratores caóticos, definir $c(\vec{x})$ ainda é um desafio. Poderiam ser utilizados os resultados de sistemas periódicos (Sec. 3.2.3), usando um perímetro médio $\bar{\ell}$ do atrator caótico. Porém a variação desse perímetro poderia depreciar fortemente a definição. Realizar análises considerando um perímetro não constante, do tipo $\ell(\vec{x})$, poderia ser uma alternativa.

Uma vez definido $c(\vec{x})$, seria possível detectar sincronismo de fase a partir da definição proposta. Realizar detecção de sincronismo para *sinais temporais* também seria uma abordagem possível, via imersão.

Os índices propostos no Capítulo 4, baseados na Definição 3.2, necessitam de mais experimentos para sua avaliação. Alguns experimentos foram mencionados na Seção 5.2.2, considerando técnicas de controle. Outra possível forma de se verificar é utilizar um sistema com fase bem definida (ex. sistema de Poincaré) e realizar experimentos em outras coordenadas, via transformação não linear, fazendo a análise nas coordenadas originais.

A proposta de segregação do problema de *sincronizabilidade* em termos de *medição*, *atuação* e *forma* parece ajudar a colocar melhor o problema e esclarecer questões que referem-se ao acoplamento. Um estudo mais aprofundado sob esses termos pode ser realizados com acoplamentos convencionais (e.g. dissipativo, força externa senoidal) e até a propor novos.

Desenvolver controladores de sincronismo baseados em técnicas de controle não linear e, talvez, no método de redução de fase seriam alternativas interessantes. Essas propostas parecem ser as que estão menos claras até o momento, que precisariam de maior amadurecimento para seu desenvolvimento.

Bibliografia

- A. A. Koronovskii M. K. Kurovskaya, A. E. H. (2005). “Relationship between phase synchronization of chaotic oscillators and time scale synchronization”. Em: *Technical Physics Letters* 31.10, p. 847. ISSN: 10637850. DOI: 10.1134/1.2121835.
- Acebrón, J. A. et al. (2005). “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. Em: *Reviews of Modern Physics* 77.1, pp. 137–185. ISSN: 00346861. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
- Adler, R. (1973). “A study of locking phenomena in oscillators”. Em: *Proceedings of the IEEE* 61.10, pp. 1380–1385. ISSN: 0018-9219. DOI: 10.1109/PROC.1973.9292.
- Aguirre, L. A. e C. Letellier (2011). “Investigating observability properties from data in nonlinear dynamics”. Em: *Physical Review E* 83.6, p. 066209. ISSN: 1539-3755. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.066209.
- Aguirre, L. A. e C. Letellier (2016). “Controllability and synchronizability: are they related?” Em: *Chaos, Solitons and Fractals* 83, pp. 242–251. ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.12.009.
- Andrade, V., R. L. Davidchack e Y.-C. Lai (2000). “Noise scaling of phase synchronization of chaos”. Em: *Physical Review E* 61.3, pp. 3230–3233. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3230.
- Anishchenko, V. et al. (2007). *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 9783540381686.
- Beck, M. e K. Josić (2003). “A geometric theory of chaotic phase synchronization.” Em: *Chaos (Woodbury, N.Y.)* 13.1, pp. 247–58. ISSN: 1054-1500. DOI: 10.1063/1.1505812.
- Belykh, V. N. et al. (2005). “Automatic control of phase synchronization in coupled complex oscillators”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 200.1-2, pp. 81–104. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/j.physd.2004.10.008.

- Blasius, B. e L. Stone (2000). "Chaos and phase synchronization in ecological systems". Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10.10, pp. 2361–2380. ISSN: 0218-1274. DOI: 10.1142/S0218127400001511.
- Boccaletti, S., J. Kurths et al. (2002). "The synchronization of chaotic systems". Em: *Physics Reports* 366, pp. 1–101. ISSN: 03701573. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00137-0.
- Boccaletti, S. e D. L. Valladares (2000). "Characterization of intermittent lag synchronization". Em: *Physical Review E* 62.5, pp. 7497–7500. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.7497.
- Bogoliubov, N. N. e Y. A. Mitropolsky (1961). *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*. International monograph series. Translated from Russian. Delhi: Hindustan.
- Bonnin, M., F. Corinto e M. Gilli (2010a). "Phase model reduction and phase locking of coupled nonlinear oscillators". Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering* 20.3, pp. 645–656. ISSN: 0218-1274. DOI: 10.1142/S0218127410025934.
- Bonnin, M., F. Corinto e M. Gilli (2010b). "Phase model reduction and synchronization of periodically forced nonlinear oscillators". Em: *Journal of Circuits, Systems and Computers* 19.04, pp. 749–762. ISSN: 0218-1266. DOI: 10.1142/S0218126610006414.
- Bruns, A. (2004). "Fourier-, Hilbert- and wavelet-based signal analysis: are they really different approaches?" Em: *Journal of Neuroscience Methods* 137.2, pp. 321–332. ISSN: 01650270. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2004.03.002.
- Chen, J. Y., K. W. Wong e J. W. Shuai (2001). "Properties of phase locking with weak phase-coherent attractors". Em: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 285.5-6, pp. 312–318. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00367-X.
- Clemson, P. T. e A. Stefanovska (2014). "Discerning non-autonomous dynamics". Em: *Physics Reports* 542.4, pp. 297–368. ISSN: 03701573. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.04.001.
- Dörfler, F. e F. Bullo (2014). "Synchronization in complex networks of phase oscillators: a survey". Em: *Automatica* 50.6, pp. 1539–1564. ISSN: 00051098. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.04.012.
- Femat, R. e G. Solís-Perales (1999). "On the chaos synchronization phenomena". Em: *Physics Letters A* 262.1, pp. 50–60. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/S0375-9601(99)00667-2.

- Ferrari, F. A. S. et al. (2015). "Phase synchronization of coupled bursting neurons and the generalized Kuramoto model". Em: *Neural Networks* 66, pp. 107–118. ISSN: 18792782. DOI: 10.1016/j.neunet.2015.03.003.
- Ferreira, M. T. (2014). "Detecção da Sincronização de Fase em Sistemas Caóticos por Meio da Transformada Wavelet Complexa Dual-tree". Tese de doutorado. INPE, p. 204.
- Ferreira, M. T., M. O. Domingues e E. E. N. Macau (2016). "Detecting phase synchronization in chaotic non-coherent Rössler systems using Discrete Complex Wavelet Approach (DCWA): preliminaries results". Em: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 4, pp. 1–7. DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0047.
- Ferreira, M. T., C. B. Nóbrega Freitas et al. (2015). "The discrete complex wavelet approach to phase assignment and a new test bed for related methods". Em: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 25.1, p. 013117. ISSN: 1054-1500. DOI: 10.1063/1.4906814.
- Follmann, R., E. E. N. Macau e E. Rosa (2009). "Detecting phase synchronization between coupled non-phase-coherent oscillators". Em: *Physics Letters A* 373.25, pp. 2146–2153. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/j.physleta.2009.04.037.
- Follmann, R., E. E. N. Macau e E. Rosa (2011). "Phase detection of chaos". Em: *Physical Review E* 83.1, p. 016209. ISSN: 1539-3755. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.016209.
- Follmann, R., E. Rosa et al. (2013). "Identifying phase synchronous regimes in non-coherent and multiple scroll attractor systems". Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 23.11, p. 1350179. ISSN: 0218-1274. DOI: 10.1142/S0218127413501794.
- Gilli, M. e F. Corinto (2004). "On dynamic behavior of weakly connected cellular neural networks". Em: *2004 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IEEE Cat. No. 04CH37512)*. Vol. 15. 1. IEEE, pp. 489–492. ISBN: 0-7803-8251-X. DOI: 10.1109/ISCAS.2004.1329688.
- Guckenheimer, J. (1975). "Isochrons and phaseless sets". Em: *Journal of Mathematical Biology* 1.3, pp. 259–273. ISSN: 0303-6812. DOI: 10.1007/BF01273747.
- Haken, H. (1983). "At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point". Em: *Physics Letters A* 94.2, pp. 71–72. ISSN: 0375-9601. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(83\)90209-8](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(83)90209-8).
- Harada, T. et al. (2010). "Optimal waveform for the entrainment of a weakly forced oscillator". Em: *Physical Review Letters* 105.8, p. 088301. ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.088301. eprint: 1007.4262.
- Hermann, R. e A. Krener (1977). "Nonlinear controllability and observability". Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 22.5, pp. 728–740. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1977.1101601.

- Hoppensteadt, F. C. e E. M. Izhikevich (1997). *Weakly Connected Neural Networks*. Vol. 126. Applied Mathematical Sciences. New York, NY: Springer New York. ISBN: 978-1-4612-7302-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-1828-9.
- Hramov, A. E. e A. A. Koronovskii (2005). "Time scale synchronization of chaotic oscillators". Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 206.3-4, pp. 252–264. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/j.physd.2005.05.008.
- Hramov, A. E., A. A. Koronovskii et al. (2015). "Analytical expression for zero Lyapunov exponent of chaotic noised oscillators". Em: *Chaos, Solitons & Fractals* 78, pp. 118–123. ISSN: 09600779. DOI: 10.1016/j.chaos.2015.07.016.
- Huygens, C. (1673). *Horologium oscillatorium: sive, De motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. F. Muguet.
- Ivanchenko, M. V. et al. (2004). "Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators". Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 189.1-2, pp. 8–30. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035.
- Josić, K. e D. Mar (2001). "Phase synchronization of chaotic systems with small phase diffusion". Em: *Physical Review E* 64.5, pp. 1–10. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056234.
- Kerfourn, A., L. Laval e C. Letellier (2012). "Relation between synchronization of a ring of coupled Rössler systems and observability". Em: *MATEC Web of Conferences* 1, p. 07001. ISSN: 2261-236X. DOI: 10.1051/matecconf/20120107001.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Upper Saddle River (New Jersey): Prentice Hall. ISBN: 0-13-067389-7.
- Kirk, D. E. (1970). *Optimal control theory; an introduction*. Prentice-Hall. ISBN: 0486434842.
- Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. New York: Springer-Verlag.
- Kurths, J. et al. (2006). "Synchronization analysis of coupled noncoherent oscillators". Em: *Nonlinear Dynamics* 44.1-4, pp. 135–149. ISSN: 0924-090X. DOI: 10.1007/s11071-006-1957-x.
- Landau, L. (1944). "On the problem of turbulence". Em: *Comptes Rend. Acad. Sci. USSR* 44, pp. 311–316. DOI: 10.1017/S002211206000116X.
- Le Van Quyen, M. et al. (2001). "Comparison of Hilbert transform and wavelet methods for the analysis of neuronal synchrony." Em: *Journal of Neuroscience Methods* 111.2, pp. 83–98. ISSN: 0165-0270. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0270\(01\)00372-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0270(01)00372-7).
- Letellier, C. e L. A. Aguirre (2010). "Interplay between synchronization, observability, and dynamics." Em: *Physical Review E* 82.1 Pt 2, p. 016204. ISSN: 1539-3755. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.016204.

- Letellier, C. e R. Gilmore (2000). "Covering dynamical systems: twofold covers". Em: *Physical Review E* 63.1, p. 016206. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016206.
- Letellier, C. e R. Gilmore (2009). "Poincaré sections for a new three-dimensional toroidal attractor". Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.1, p. 015101. ISSN: 1751-8113. DOI: 10.1088/1751-8113/42/1/015101.
- Liu, Z. e J. Zhou (2009). "Detecting generalized synchronization by the generalized angle". Em: *Europhysics Letters (EPL)* 87, 50002 p1–p6. ISSN: 0295-5075. DOI: 10.1209/0295-5075/87/50002.
- Lopatin, A. K. (1995). "Oscillations and dynamical systems: normalization procedures and averaging". Em: *Integration The VLSI Journal*.
- Lorenz, E. N. (1963). "Deterministic nonperiodic flow". Em: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2, pp. 130–141. ISSN: 0022-4928. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
- Lorenz, E. N. (1984). "Irregularity: a fundamental property of the atmosphere". Em: *Tellus A* 36A.2, pp. 98–110. ISSN: 02806495. DOI: 10.1111/j.1600-0870.1984.tb00230.x.
- Lulich, D. (1937). *Fluctuations in the numbers of varying hare (Lepus americanus)*. University of Toronto studies: Biological series. The University of Toronto press.
- Madan, R. N. (1993). "Chua's circuit: a Paradigm for chaos". Em: *World Scientific Series on Nonlinear Science*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series B 1. Ed. por R. N. Madan. DOI: 10.1142/9789812798855.
- Malkin, I. (1949). *Methods of Poincare and Liapunov in theory of non-linear oscillations*. in Russian: "Metodi Puankare i Liapunova v teorii nelineinix kolebanii". Gostexizdat, Moscow.
- Malkin, I. (1959). *Some problems in the theory of nonlinear oscillations*. Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations v. 1. United States Atomic Energy Commission, Technical Information Service.
- Marwan, N. et al. (2007). "Recurrence plots for the analysis of complex systems". Em: *Physics Reports* 438.5-6, pp. 237–329. ISSN: 03701573. DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001.
- Miranda, R. e E. Stone (1993). "The proto-Lorenz system". Em: *Physics Letters A* 178.1-2, pp. 105–113. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/0375-9601(93)90735-I.
- Mirrolla, R. E. e S. H. Strogatz (1990). "Synchronization of pulse-coupled biological oscillators". Em: *SIAM J. Appl. Math.* 50.6, pp. 1645–1662. ISSN: 0036-1399. DOI: 10.1137/0150098.

- Nayfeh, A. H. e D. T. Mook (1995). *Nonlinear Oscillations*. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH, p. 720. ISBN: 9783527617586. DOI: 10.1002/9783527617586.
- Nayfeh, A. H. (2000). *Perturbation Methods*. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH. ISBN: 9783527617609. DOI: 10.1002/9783527617609.
- Nijmeijer, H. (2001). “A dynamical control view on synchronization”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 154.3-4, pp. 219–228. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00251-2.
- Nijmeijer, H. e A. V. D. Schaft (1990). *Nonlinear dynamical control systems*. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 3-540-97234-X.
- Oh, J., E. Reischmann e J. A. Rial (2014). “Polar synchronization and the synchronized climatic history of Greenland and Antarctica”. Em: *Quaternary Science Reviews* 83, pp. 129–142. ISSN: 02773791. DOI: 10.1016/j.quascirev.2013.10.025.
- Osipov, G. V., B. Hu et al. (2003). “Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators”. Em: *Physical Review Letters* 91.2, p. 024101. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.024101.
- Osipov, G. V., J. Kurths e C. Zhou (2007). *Synchronization in Oscillatory Networks*. Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-71268-8. DOI: 10.1007/978-3-540-71269-5.
- Park, E. H., M. a. Zaks e J. Kurths (1999). “Phase synchronization in the forced Lorenz system.” Em: *Physical Review E* 60.6 Pt A, pp. 6627–38. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.6627.
- Pereira, T., M. S. Baptista e J. Kurths (2007a). “General framework for phase synchronization through localized sets”. Em: *Physical Review E* 75.2, p. 026216. ISSN: 15393755. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.026216.
- Pereira, T., M. S. Baptista e J. Kurths (2007b). “Phase and average period of chaotic oscillators”. Em: *Physics Letters A* 362.2-3, pp. 159–165. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.09.099.
- Pikovsky, A., M. Rosenblum e J. Kurths (2003). *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series. Cambridge University Press. ISBN: 9780521533522.
- Pikovsky, A. S., M. G. Rosenblum e J. Kurths (2000). “Phase synchronization in regular and chaotic systems”. Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10.10, pp. 2291–2305. ISSN: 0218-1274. DOI: 10.1142/S0218127400001481.
- Pikovsky, A. S., M. G. Rosenblum, G. V. Osipov et al. (1997). “Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 104.3-4, pp. 219–238. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/S0167-2789(96)00301-6.

- Pikovsky, A., M. Zaks et al. (1997). "Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits." Em: *Chaos (Woodbury, N.Y.)* 7.4, pp. 680–687. ISSN: 1089-7682. DOI: 10.1063/1.166265.
- Quian Quiroga, R. et al. (2002). "Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals". Em: *Physical Review E* 65.4, p. 041903. ISSN: 1063-651X. DOI: 10.1103/PhysRevE.65.041903.
- Romano, M. C. et al. (2005). "Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data". Em: *Europhysics Letters (EPL)* 71.3, pp. 466–472. ISSN: 0295-5075. DOI: 10.1209/epl/i2005-10095-1.
- Rosenblum, M. G., a. S. Pikovsky e J. Kurths (1996). "Phase synchronization of chaotic oscillators". Em: *Physical Review Letters* 76.11, pp. 1804–1807. ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.1804.
- Rosenblum, M., A. Pikovsky, J. Kurths et al. (2003). "Phase synchronization: from theory to data analysis". Em: *Handbook of Biological Physics* 4.August 2001, pp. 279–321.
- Rosenblum, M., A. Pikovsky e J. Kurths (1997). "From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators". Em: *Physical Review Letters* 78.22, pp. 4193–4196. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4193.
- Rössler, O. (1976). "An equation for continuous chaos". Em: *Physics Letters A* 57.5, pp. 397–398. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/0375-9601(76)90101-8.
- Schwabedal, J. T. C. e A. Pikovsky (2010). "Effective phase description of noise-perturbed and noise-induced oscillations". Em: *European Physical Journal: Special Topics* 187.1, pp. 63–76. ISSN: 19516355. DOI: 10.1140/epjst/e2010-01271-6. eprint: 1006.3173.
- Schwabedal, J. T. C., A. Pikovsky et al. (2012). "Optimal phase description of chaotic oscillators". Em: *Physical Review E* 85.2, pp. 1–10. ISSN: 15393755. DOI: 10.1103/PhysRevE.85.026216.
- Spivak, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3rd ed. Vol. 1. Publish or Perish, Incorporated. ISBN: 978-0914098706.
- Stone, E. F. (1992). "Frequency entrainment of a phase coherent attractor". Em: *Physics Letters A* 163.5-6, pp. 367–374. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90841-9.
- Strogatz, S. H. (2000). "From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators". Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143.1-4, pp. 1–20. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00094-4.
- Stuart, J. T. (1960). "On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow". Em:

- Journal of Fluid Mechanics* 9 (03), pp. 353–370. ISSN: 1469-7645. DOI: 10.1017/S002211206000116X.
- Suprunenko, Y. F., P. T. Clemson e A. Stefanovska (2014). “Chronotaxic systems with separable amplitude and phase dynamics”. Em: *Physical Review E* 89.1, p. 012922. ISSN: 15393755. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.012922.
- Torres, L. A. B., J. P. Hespanha e J. Moehlis (2015). “Synchronization of identical oscillators coupled through a symmetric network with dynamics: a constructive approach with applications to parallel operation of inverters”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.12, pp. 3226–3241. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.2015.2418400.
- Tôrres, L. A. e L. A. Aguirre (2004). “Transmitting information by controlling nonlinear oscillators”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 196.3-4, pp. 387–406. ISSN: 01672789. DOI: 10.1016/j.physd.2004.06.006.
- Van der Pol, B. (1927). “VII. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode)”. Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 3.13, pp. 65–80. DOI: 10.1080/14786440108564176.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice Hall. ISBN: 0-13-623463-1.
- Winfree, A. T. (1967). “Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators”. Em: *Journal of Theoretical Biology* 16.1, pp. 15–42. ISSN: 0022-5193. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-5193\(67\)90051-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-5193(67)90051-3).
- Yalçinkaya, T. e Y.-C. Lai (1997). “Phase characterization of chaos”. Em: *Physical Review Letters* 79.20, pp. 3885–3888. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.3885.
- Zaks, M. A. et al. (1999). “Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization”. Em: *Physical Review Letters* 82.21, pp. 4228–4231. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.4228.
- Zheng, Y. et al. (2014). “Epileptic seizure prediction using phase synchronization based on bivariate empirical mode decomposition.” Em: *Clinical Neurophysiology* 125.6, pp. 1104–11. ISSN: 1872-8952. DOI: 10.1016/j.clinph.2013.09.047.
- Zlotnik, A. et al. (2013). “Optimal waveform for fast entrainment of weakly forced nonlinear oscillators”. Em: *Physical Review Letters* 111.2, p. 024102. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.024102.
- Zou, Y., R. V. Donner e J. Kurths (2012). “Geometric and dynamic perspectives on phase-coherent and noncoherent chaos”. Em: *Chaos* 22.1. ISSN: 10541500. DOI: 10.1063/1.3677367.