Autómatas a Pila

Fabio Martínez Carrillo

Autómatas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informatica
Universidad Industrial de Santander - UIS

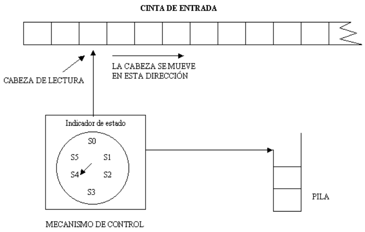
6 de noviembre de 2017

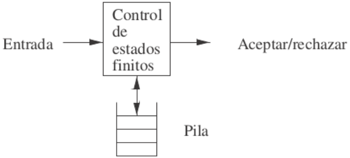
Agenda

Automatas a Pila (AP)

Autómata finito no determinista con transiciones ε y **una pila que pemite almacenar cadenas de *"simbolos de pila"***

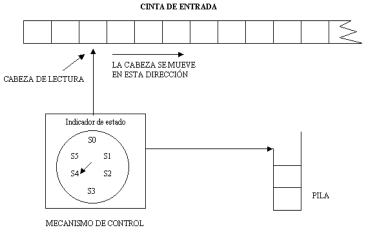
- **Pila** Puede recordar una cantidad infinita de información
- Se puede acceder a la información de la pila utilizando **LIFO** *(Last-in first-out)*. También es posible **FIFO**
- Reconoce todos los lenguajes Independientes del contexto.





- “control de estados finitos”: lee en la entrada un simbolo cada vez.
- Puede leer simbolos ubicados en la parte superior de la pila y hacer la transición con el estado actual.
- Puede hacer una transición espontanea con ε

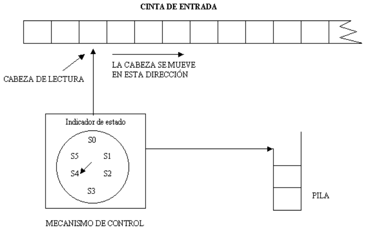
En una transición



- Utiliza el simbolo de entrada. Si es ε no se utiliza ningún simbolo de entrada.
- Pasa a un nuevo estado (puede ser el mismo)
- Remplaza la parte superior de la pila por cualquier cadena. Puede ser:
  - ε: corresponde a una extracción de pila.
  - El mismo simbolo que estaba en la pila (no pasa nada)
  - Por dos o mas simbolos. Puede adicionar más simbolos a la pila.

Definición formal

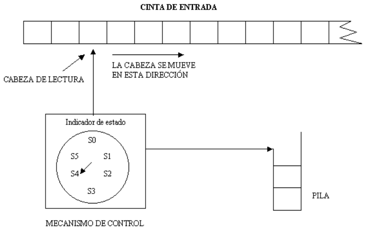
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$



Definición formal

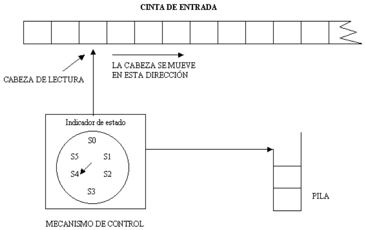
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

- Q conjunto finito de estados.
- Σ Simbolos de entrada
- Γ alfabeto de pila. Elementos que se introducen a la pla
- δ comportamiento del autómata según $\delta(q, a, X)$
  - q estado de Q
  - a simbolo de entrada $\{\Sigma, \varepsilon\}$. ε normalmente no es simbolo de entrada.
  - X simbolo de pila Γ



Definición formal

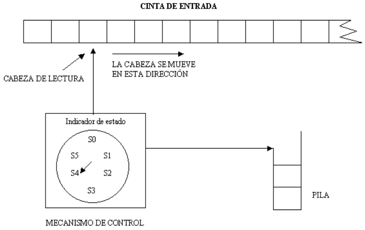
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$



- La salida de $\delta(q, a, X)$ es (p, γ). Nuevo estado y nueva cadena de simbolos para la pila.
  - $\gamma = \varepsilon$ se extrae un elemento de la pila
  - $\gamma = X$ la pila no cambia
  - $\gamma = YZ$, entonces Z reemplaza la X y Y se introduce a la pila.

Definición formal

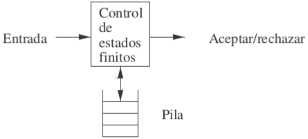
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$



- q_0 estado inicial
- Z_0 simbolo inicial. El autómata a pila consta de una instancia de este símbolo
- F conjunto de estados de aceptación o estados finales.

Ejemplo PDA

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$

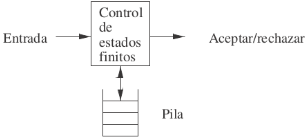


Gramatica

- $P \rightarrow 0P0$
- $P \rightarrow 1P1$

Ejemplo PDA

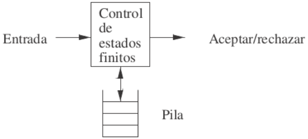
$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$



1. Inciamos en un estado q_0. No hemos visto el centro de w,
   - Los simbolos leidos en q_0 se almacenan en la pila
2. En cualquier instante suponemos estar en el final de w.
   - simbolo más a derecha de w estará en la cima
   - Pasamos a q_1
   - Como es no deteminista, también permanecemos en q_0
3. En q_1 comparamos el símbolo de entrada con el sḿbolo de la cima de la pila
   - Si son iguales extraemos el símbolo pila y continua
   - Si no son iguales, la suposición es erronea y la rama del Autómata muere.
4. Si la pila se vacia, se encontro a w seguido de w^R. Aceptamos la entrada leida hasta el momento.

Ejemplo PDA

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$



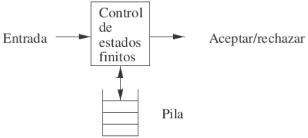
PDA

$$P = (\{q_0, q_1 q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

- Z_0 (bandera) Símbolo de pila que indica el fondo.

Ejemplo PDA

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$

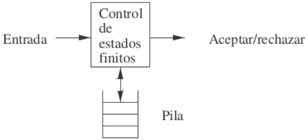


Definición de δ

1. Estamos en q_0 y vemos a Z_0
   $\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ y $\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$.
2. Permanecer en q_0, leer entradas e introducirlas a la pila
   - $\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$
   - $\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}$
   - $\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$
   - $\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$

Ejemplo PDA

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$

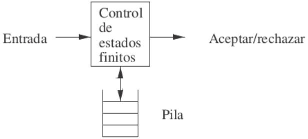


Definición de δ

3. Pasar del estado q_0 a q_1 de forma espontanea sin utilizar la pila
   - $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$
   - $\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}$
   - $\delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$
4. Emparejar símbolos en q_1 y extraerlos
   - $\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$
   - $\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

Ejemplo PDA

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$



Definición de δ

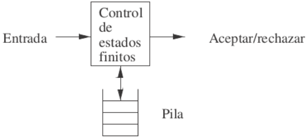
5. Pasamos al estado q_2 y aceptamos:

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$$

Se ha encontrado una entrada de la forma ww^R !

Diagrama de transiciones de un Autómata a Pila

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$



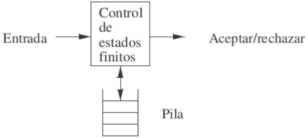
(a) Los nodos son los estados del autómata a Pila

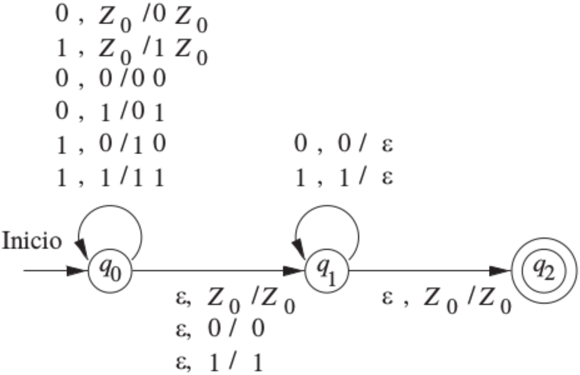
(b) Flecha indica el inicio y doble circulo el estado final.

(c) Los arcos corresponden a las transiciones

- Un arco etiquetado como $a, \mathbf{X}/\alpha$ del estado q al p es: $\delta(q, a, X)$ y contiene el par p, α
- Indica las entradas y los elementos de la cima en la Pila

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$





Descripciones instantaneas (ID) del PDA

$$(q, w, \gamma)$$

- q es el estado
- w es lo que queda de la entrada
- γ es el contenido de la pila

Por convención: a la izquierda de γ especificamos la parte superior de la pila

Representación de movimiento de un PDA $\vdash$

Notación que describe los cambios de estado, la entrada y la pila.

Sea $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, entonce se define $\vdash$ cuando:

- Tenemos $\delta(q, a, \mathbf{X})$ que contiene (p, α)
- Para las cadenas $w \in \Sigma^*$, $\beta \in \Gamma^*$

$$(q, aw, \mathbf{X}\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$$

Refleja la idea de ir del estado q al estado p, consumiendo un simbolo a de la entrada y reemplazando $\mathbf{X}$ por α en la Pila

$\vdash^*$ Uno o mas movimientos de Pila

Caso base

$$I \vdash^* I$$

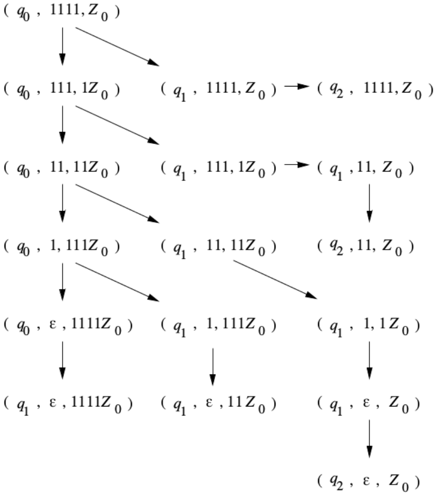
Cualquier descripción instantanea (ID) I

Paso por inducción

$I \vdash^* J$ Si existe una ID K tal que $I \vdash K$ y $K \vdash^* J$

Existe una secuencia de transiciones $\{K_1, K_2, \ldots K_n\}$ con
$I = K_1, J = K_n$ y para $i = 1, \ldots n-1$ tenemos: $K_i \vdash K_{i+1}$

Ejemplo 1111



$\delta(q_0, 1111, Z_0) \vdash \delta(q_0, 111, 1Z_0) \vdash \delta(q_0, 11, 11Z_0) \vdash \delta(q_1, 11, 11Z_0) \vdash$
$\delta(q_1, 1, 1Z_0) \vdash \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash \delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$

Ejercicio

Diseñe un PDA que acepte $\{0^n 1^n | n \geq 1\}$

Ejercicio

Diseñe un PDA que acepte $\{0^n 1^n | n \geq 1\}$

Estados

- q estado inicial. Solo hemos visto $0's$
- P Hemos visto almenos un 1 y procedemos con la entrada de $1's$
- f estado final. Estado de aceptación

Ejercicio

Diseñe un PDA que acepte $\{0^n1^n | n \geq 1\}$

Simbolos de Pila

- Z_0 Simbolo inicial. Indica el fondo de la Pila
- X Cuenta el número de $0's$ en la entrada.

Ejercicio

Diseñe un PDA que acepte $\{0^n 1^n | n \geq 1\}$

Funciones de transición

- $\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$
- $\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$ Una X por cada cero leido.
- $\delta(q, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$ Cuando un 1 aparece vamos al estado p y sacamos una x
- $\delta(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$ sacamos una x por cada 1
- $\delta(p, \varepsilon, Z_0) = \{(f, Z_0)\}$ Estado de aceptación

Ejercicio

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 000111

Ejercicio

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 000111

$\delta(q, 000111, Z_0) \vdash \delta(q, 00111, XZ_0) \vdash \delta(q, 0111, XXZ_0) \vdash \delta(q, 111, XXXZ_0) \vdash \delta(p, 11, XXZ_0) \vdash \delta(p, 1, XZ_0) \vdash \delta(p, \varepsilon, Z_0) \vdash \delta(f, \varepsilon, Z_0)$

$$\delta(q, 000111, Z_0) \vdash^* (f, Z_0)$$

Ejercicio

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 000111

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 0001111

Ejercicio

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 000111

Cuales son los movimientos de ID ($\vdash$) para 0001111

$$\delta(q, 0001111, Z_0) \vdash^* (f, 1, Z_0)$$

Agenda

1. Autómatas de Pila
2. Lenguajes del Autómata de Pila

Leguaje de un PDA

Aceptación por estado final

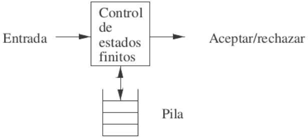
- El lenguaje de un PDA se define por su **estado final**
- Si P es un PDA, entonces $L(P)$ es el conjunto de cadenas w tal que $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (f, \varepsilon, \alpha)$ para cualquier α

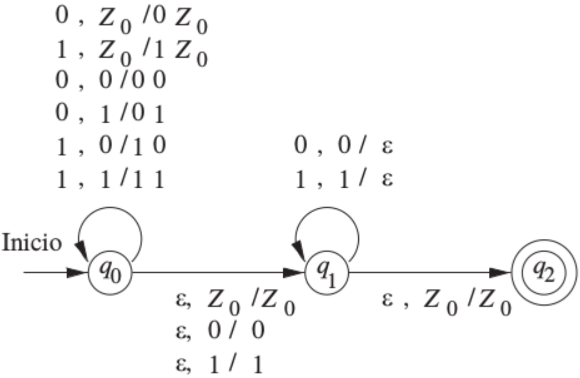
Aceptación por Pila vacia

- El lenguaje de un PDA se define por su **pila vacia**
- Si P es un PDA, entonces $N(P)$ es el conjunto de cadenas w tal que $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$ para cualquier estado q

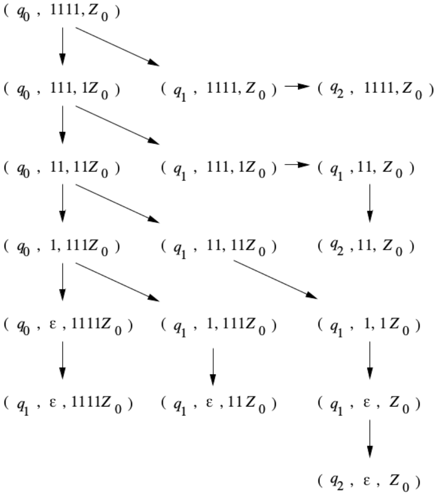
Que tipo de Autómata es este?

$$L_{ww^r} = \left\{ ww^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \right\}$$



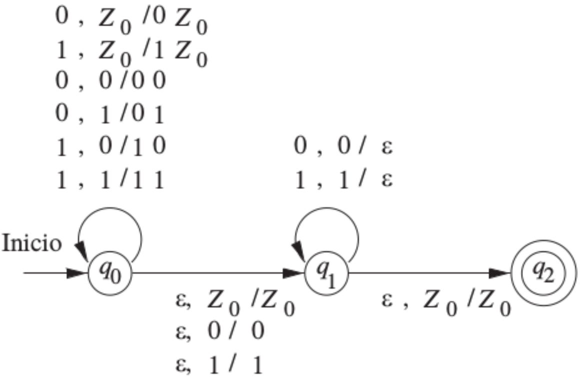


Aceptación por estado final



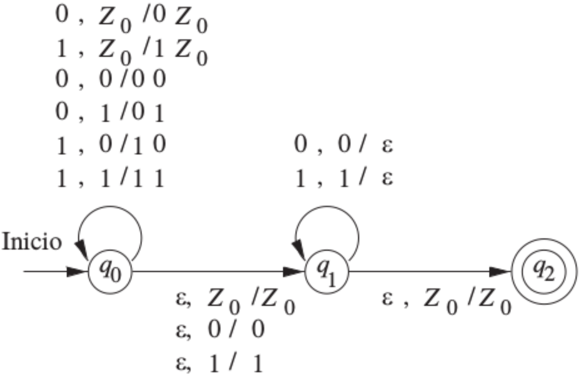
$\delta(q_0, 1111, Z_0) \vdash \delta(q_0, 111, 1Z_0) \vdash \delta(q_0, 11, 11Z_0) \vdash \delta(q_1, 11, 11Z_0) \vdash$
$\delta(q_1, 1, 1Z_0) \vdash \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash \delta(q_2, \varepsilon, Z_0)$

Aceptación de Pila vacia



Nunca vacia la pila, por lo tanto $N(P) = \emptyset$. Como se podria modificar para que acepte por pila vacia?

Aceptación de Pila vacia



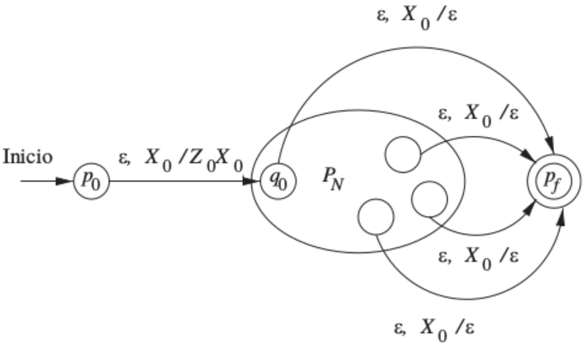
- Originalmente tiene la transición $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{q_2, Z_0\}$
- Lo cambiamos por $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{q_2, \varepsilon\}$

P extrae el último simbolo de la Pila cuando lo acepta y por lo tanto $L(P) = N(P)$

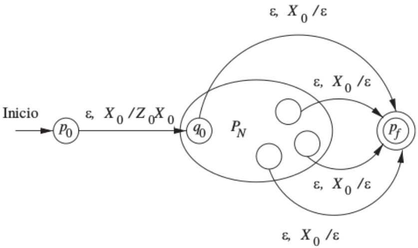
De Pila vacia a Estado final

Teorema

Si $L = N(P_N)$ para un autómata de pila $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, entonces existe un autómata a Pila P_F tal que $L = L(P_F)$



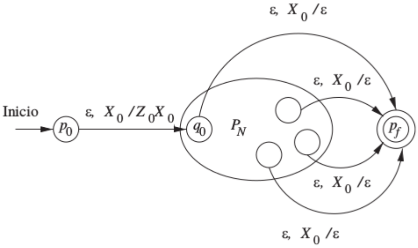
De Pila vacia a Estado final



- Se utiliza un nuevo simbolo X_0 que es:
  - Simbolo inicial de P_F
  - marcador de fondo de pila de P_N

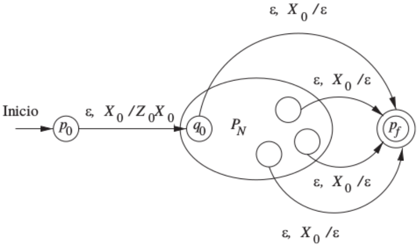
Si P_F ve X_0 en la cima, sabe que P_N vaciará su pila

De Pila vacia a Estado final



- Se define un nuevo estado inicial p_0 para introducir Z_0, simbolo de P_N
- q_0 es el estado inicial de P_N
- P_F simula a P_N hasta está vacia
- se define un nuevo estado p_f de aceptación

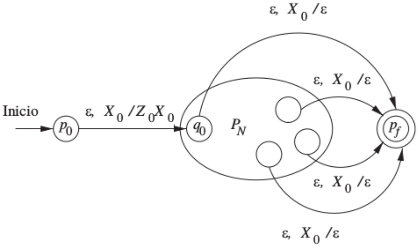
De Pila vacia a Estado final



Especificación de P_F

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, \{p_f\})$$

De Pila vacia a Estado final



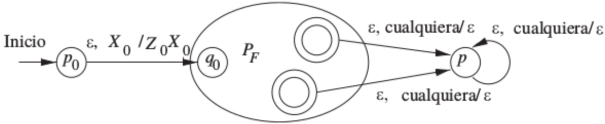
δ se define:

- $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$. Transición espontanea P_F a P_N
- Para todo los estados $q \in Q$, entradas $a \in \Sigma, \vee a = \varepsilon$ y símbolos $Y \in \Gamma$: $\delta_F(q, a, Y)$ contiene $\delta_N(q, a, Y)$
- $\delta_F(q, \varepsilon, X_0)$ contiene (p_f, ε)

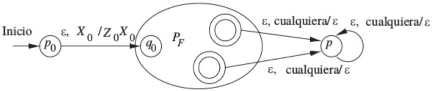
Del estado final a la Pila vacia

Teorema

Si $L = L(P_F)$ para un autómata de pila $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0, F)$, entonces existe un autómata a Pila P_N tal que $L = N(P_N)$

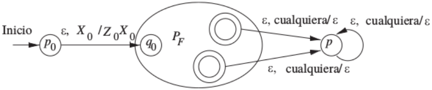


Del estado final a la Pila vacia



$$P_N = \left(Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0\right)$$

Del estado final a la Pila vacia



δ se define como:

- $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
- $\delta_N(q, a, Y)$ contiene $\delta_F(q, a, Y)$
- Para $q \in F$ y simbolos $Yin\Gamma \vee Y = X_0$: $\delta_N(q, \varepsilon, Y)$ contiene (p, ε)
- P_N extrae todos los símbolos de su pila hasta que ésta queda vacía sin leer símbolos de entrada

Muchas gracias por su atención