Máquinas de Turing

Fabio Martínez Carrillo

Autómatas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informatica
Universidad Industrial de Santander - UIS

21 de noviembre de 2017

Agenda

1. MT para calculo de Funciones de enteros
2. Técnicas de programación para las máquinas de Turing
3. Extensiones de la máquina de Turing básica

MT para calculo de Funciones

Sistema Unario/ Unitario

Es el sistema de numeración más simple que existe para representar los números naturales.

- Para representar a N, se repite N veces un simbolo.
- Este sistema es típicamente utilizado para calcular funciones en la MT

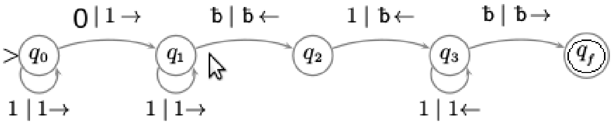
Ejemplo

Desarrollar una MT que calcule la función suma $h(n, m) = n + m$ con $n, m \geq 1$, en el sistema unario. La función recibe entradas 1^n01^m y se debe generar la salida 1^{n+m}

Solución propuesta

Ejemplo

Desarrollar una MT que calcule la función suma $h(n, m) = n + m$ con $n, m \geq 1$, en el sistema unario. La función recibe entradas 1^n01^m y se debe generar la salida 1^{n+m}



Máquinas de Turing son utiles como **reconocedores de lenguajes**, **solucionadores de problemas**, pero también permite **procesar funciones de enteros con valor**

Sustracción Propia

- Cada entero se representa por un único caracter.
- $m \dot{-} n = max(m-n, 0)$ es $m-n$ si $m \geq n$. Cero en otro caso.
- La cinta inicia con un conjunto de valores $0^m 1 0^n$
- La máquina parará cuando el contenido de la cinta es $0^{max(m-n,0)}$

Funciones con enteros

- M encuentra repetidamente el 0 más a la izquierda que queda y lo reemplaza por un espacio en blanco.
- A continuación, se mueve hacia la derecha, en busca de un 1.
- Después de encontrar un 1, continúa moviéndose hacia la derecha hasta que llega a un 0, que sustituye por un 1.
- M vuelve entonces a moverse hacia la izquierda, buscando el 0 más a la izquierda, el cual identifica cuando encuentra un espacio en blanco a su izquierda, y luego se mueve una casilla hacia la derecha

Cual es la especificación de la MT?

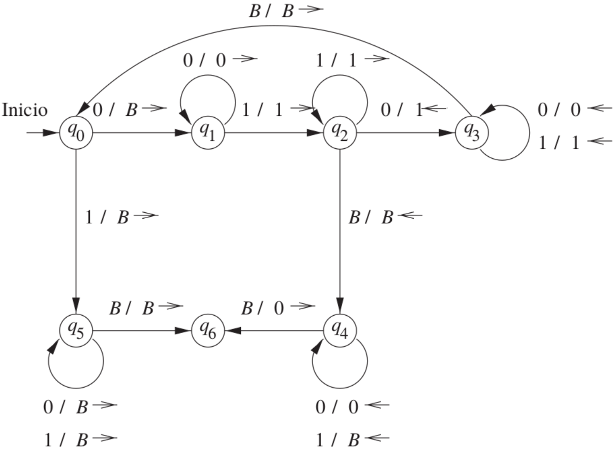
Funciones con enteros

- M encuentra repetidamente el 0 más a la izquierda que queda y lo reemplaza por un espacio en blanco.
- A continuación, se mueve hacia la derecha, en busca de un 1.
- Después de encontrar un 1, continúa moviéndose hacia la derecha hasta que llega a un 0, que sustituye por un 1.
- M vuelve entonces a moverse hacia la izquierda, buscando el 0 más a la izquierda, el cual identifica cuando encuentra un espacio en blanco a su izquierda, y luego se mueve una casilla hacia la derecha

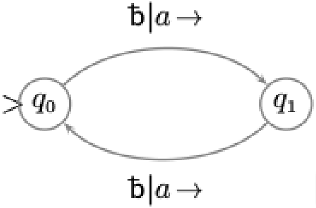
Cual es la especificación de la MT?

$$MT = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B)$$

Estado	Símbolo 0	1	B
q_0	(q_1, B, R)	(q_5, B, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	–
q_2	$(q_3, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	(q_4, B, L)	$(q_6, 0, R)$
q_5	(q_5, B, R)	(q_5, B, R)	(q_6, B, R)
q_6	–	–	–

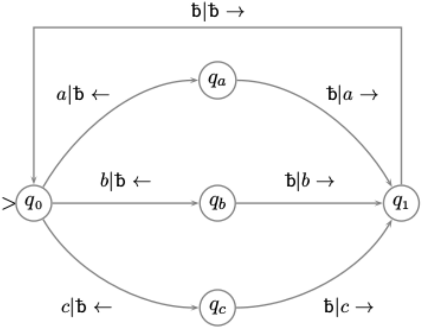

B / B →
0 / 0 →
1 / 1 →
Inicio
0 / B →
1 / 1 →
0 / 1 ←
0 / 0 ←
1 / 1 ←
1 / B →
B / B ←
B / B →
B / 0 →
0 / B →
1 / B →
0 / 0 ←
1 / B ←

MT como generadores de lenguaje



Genera cadenas con un número par de $a's$: $L = \{a^{2i}; i \geq 1\}$

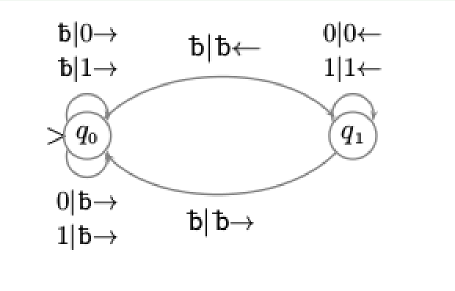
MT para Macros ó subrutinas



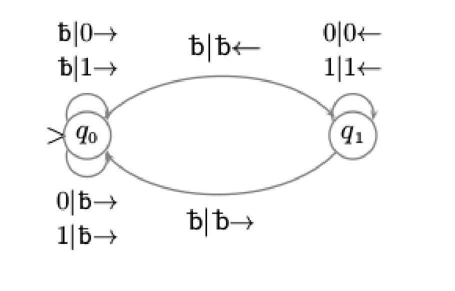
Subrutina de traslación a la izquierda para el lenguaje: $\Sigma : \{a, b, c\}$

$$\begin{array}{ll} \text{Entrada:} & ƀ\,\underline{a_1}\cdots a_{k-1}a_k\,ƀ \\ & \updownarrow\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow\updownarrow \\ \text{Salida:} & a_1a_2\cdots\ a_k\ \underline{ƀ}\,ƀ \end{array}$$

Cual lenguaje genera?



Cual lenguaje genera?



genera todas las cadenas binarias (cadenas de ceros y unos)

Lenguaje de una Maquina de Turing

Sea $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ entonces $L(M)$ es el conjunto de cadenas w de Σ^* tales que $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$ donde $p \in F$

El conjunto de lenguajes que podemos aceptar utilizando una **MT** a menudo se denominan **lenguajes recursivamente enumerables**

Criterio por parada

No exisite ningún movimiento, i.e., esta en un estado q señalando a X y $\delta(q, X)$ no esta definida

Técnicas de programación para las máquinas de Turings

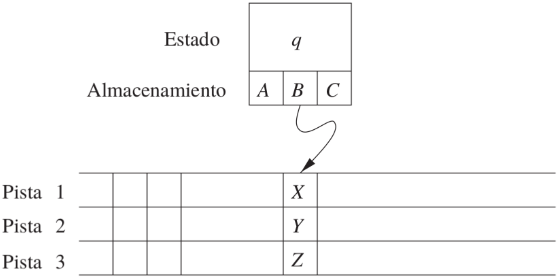
Agenda

1. MT para calculo de Funciones de enteros
2. Técnicas de programación para las máquinas de Turing
3. Extensiones de la máquina de Turing básica

Almacenamiento en el estado

Podemos almacenar una cantidad finita de datos

- La unidad de control consta de un estádo de “control” q, y tres datos: A, B y C.
- El estado se considera una tupla: $[q, A, B, C]$



MT que recuerde en su unidad de control el primer simbolo: $01^* + 10^*$

$M = (Q, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, [q_0, B], [q_1, B])$

- $\{q_0, q_1\}$ estados de control. q_0 indica que no se ha leido el primer simbolo. q_1 indica que no hay otro simbolo igual.

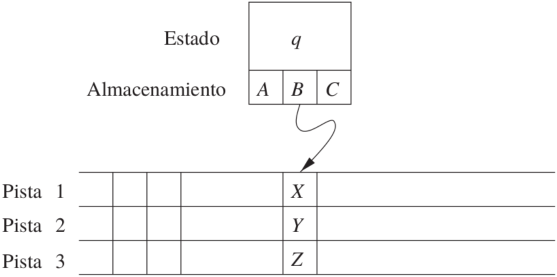
Funciones de transición

- $\delta([q_0, B], a) = ([q_1, a], a, R)$
- $\delta([q_1, a], \bar{a}) = ([q_1, a], \bar{a}, R)$
- $\delta([q_1, a], B) = ([q_1, B], B, R)$

Pistas Multiples

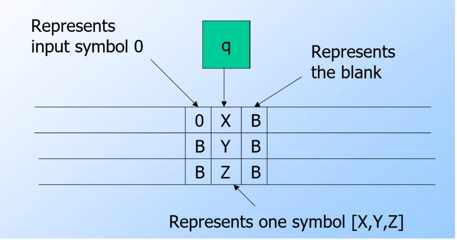
la cinta de una máquina de Turing está compuesta por varias pistas. Cada pista puede almacenar un símbolo, y el alfabeto de cinta de la MT consta de tuplas.

- El símbolo es $[X, Y, Z]$



Multiples pistas

- Los simbolos de la cinta se representan como vectores con k componentes.
- simula que la cinta tenga k pistas
- Simbolos de la cinta son blancos, excepto para una pista



Marcadores

- La pista extra es usada para **marcar** ciertas posiciones.
- En esta cinta, casi todos los simbolos permanecen blancos excepto para ciertas posiciones de interes.

Multiples pistas: Ejemplo

Copia la entrada w infinitamente.

Estados

- q Marca la posición y recuerda el simbolo de entrada visto.
- p Corre hacia la derecha, recuerda el simbolo visto y busca un simbolo en blanco
    - Cuando encuentra el simbolo, remplaza el blanco por el simbolo en cache.
    - Se mueve entonces a la izquierda
    - nos movemos al estado r
- r Hacemos recorrido a la izquierda buscando el marcador.
- Removemos el simbolo e iniciamos nuevamente

Estados tienen la forma $[x, Y]$ con x como los estados y Y los valores de $\{0, 1, 2\}$

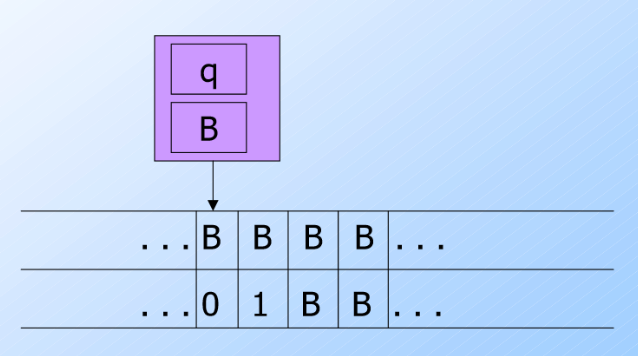
Simbolos de la cinta $[U, V]$

- U tiene el marcador X o el simbolo B
- V tiene los simbolos de entrada o B

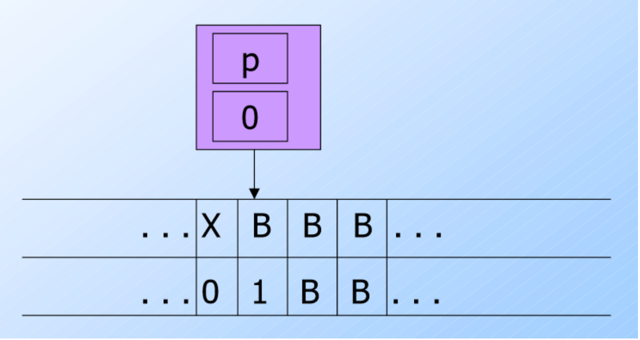
Funciones de transición

- $\delta([q, B], [B, a]) = ([p, a], [X, a], R)$
- $\delta([p, a], [B, b]) = ([p, a], [B, b], R)$
- $\delta([p, a], [B, a]) = ([p, a], [B, a], R)$
- $\delta([p, a], [B, B]) = ([r, B], [B, a], L)$
- $\delta([r, B], [B, a]) = ([r, B], [B, a], L)$
- $\delta([r, B], [B, b]) = ([r, B], [B, b], L)$
- $\delta([r, B], [X, a]) = ([q, B], [B, a], R)$

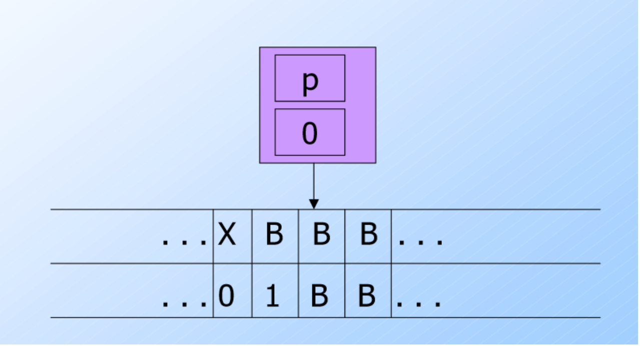
Simulación



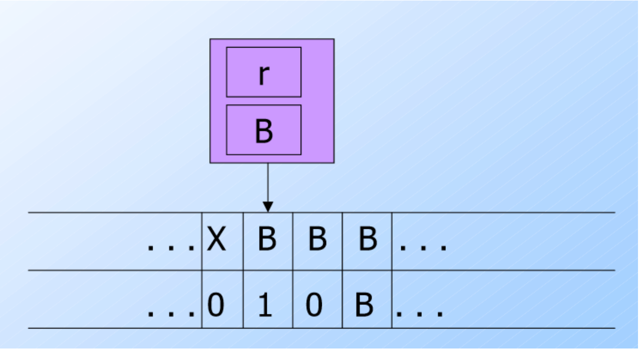
Simulación



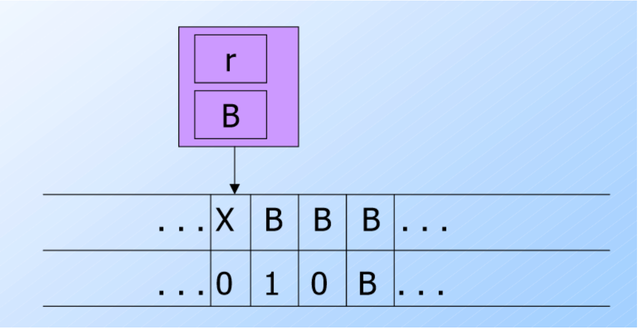
Simulación



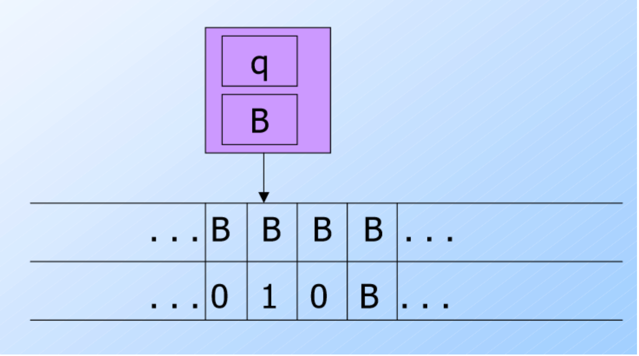
Simulación



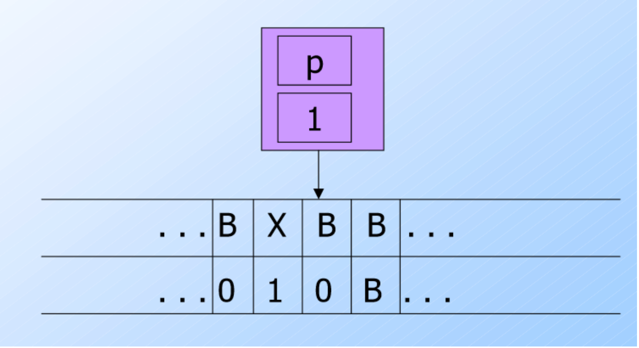
Simulación



Simulación



Simulación

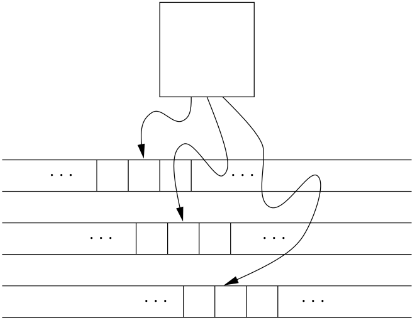


Agenda

1. MT para calculo de Funciones de enteros
2. Técnicas de programación para las máquinas de Turing
3. Extensiones de la máquina de Turing básica

Extensiones de la máquina de Turing básica

Máquina de Turing de varias cintas



- Una unidad de control (estado)
- Un número finito de cintas
- Las cintas tienen los espacios en blancos y contienen simbolos de entrada

Máquina de Turing de varias cintas

1. La entrada, una secuencia finita de símbolos de entrada, se coloca en la primera cinta.
2. Todas las casillas de las demás cintas contienen espacios en blanco.
3. La unidad de control se encuentra en el estado inicial.
4. La cabeza de la primera cinta apunta al extremo izquierdo de la entrada.
5. Las cabezas de las restantes cintas apuntan a una casilla arbitraria

Movimiento MT de varias cintas

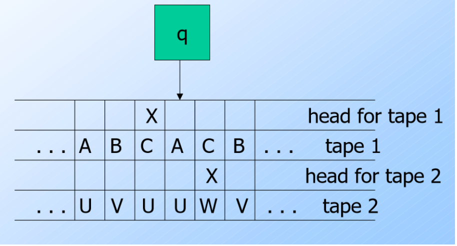
Depende del estado y del símbolo señalado por cada una de las cintas.

En un movimiento ...

- La unidad de control entra en un nuevo estado, que podría ser el mismo
- En cada cinta, se escribe un nuevo símbolo de cinta en la casilla señalada por la cabeza.
- Cada una de las cabezas de las cintas realizan un movimiento, que puede ser hacia la izquierda, hacia la derecha o estacionario.

Simulando MT de varias cintas como una MT de una

- Usar $2k$ bandas
- Cada cinta es representada por una banda
- La cabecera es representada por una banda adicional.



Tiempo de Ejecución: Complejidad temporal

Para una entrada w es el número de pasos que una Máquina M realiza antes de pararse.

- La complejidad temporal es $T(n)$, que es el máximo para todas las entradas w de longitud n

- Permite mantener el tiempo de ejecución polinómico
- La diferencia entre un tiempo polinómico y otro mas rápido permite separar los problemas que se pueden resolver con una computadora.

El tiempo invertido por la MT de una cinta para simular n movimientos de la MT de k cintas M es $O(n^2)$.

Maquinas de Turing no Deterministas (MTN)

Tiene una función de transición δ tal que para el estado q y el simbolo de la cinta X, $\delta(q, X)$ es el conjunto de tuplas:

$$\{(q_1, Y_1, D_1), (q_2, Y_2, D_2), \ldots, (q_k, Y_k, D_k)\}$$

Se puede en cada paso cual de las tuplas será el siguiente movimiento.

Lenguaje de Aceptación

M acepta una entrada *w* si existe cualquier secuencia de movimientos que lleva desde la configuración inicial con w como entrada hasta una configuración con un estado de aceptación.

Muchas gracias por su atención

Universidad Industrial de Santander