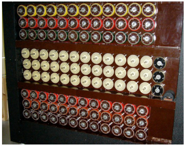
Máquinas de Turing

Fabio Martínez Carrillo

Autómatas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informatica
Universidad Industrial de Santander - UIS

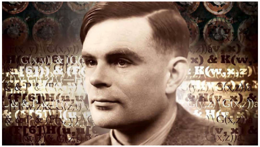
14 de noviembre de 2017

Las mÃ¡quinas Enigma y Bombe



- **1920** Enigma, máquina para encriptar
- **1932** Marian Rejewski decifra el código deEnigma parcialmente
- **1938** Marian Rejewski **diseña** Bombe, máquina que decifra
- **1939** Alan Turing, Gordon Welchman, Harold Keen **contruyeron** Bombe

Alan Turing y Marian Rejewski



230 A. M. TURING [Nov. 12,

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

The "computable" numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means. Although the subject of this paper is ostensibly the computable *numbers*, it is almost equally easy to define and investigate computable functions of an integral variable or a real or computable variable, computable predicates, and so forth. The fundamental problems involved are, however, the same in each case, and I have chosen the computable numbers for explicit treatment as involving the least cumbrous technique. I hope

Alan Turing **Creo la teoría de la computación**

- **Premio Turing** es un premio de las **Ciencias de la Computación** que es otorgado anualmente por la Asociación para la Maquinaria Computacional (ACM)

Máquinas de Turing (MT)

Modelo formal de autómata con máxima capacidad computacional.

- La única de control puede moverse de izq a der y sobré-escribir símbolos.
- **Tiene la misma capacidad de los computadores reales.**
- Permite analizar que lenguajes pueden definirse mediante cualquier dispositivo computacional
- Permite determinar que tares son **imposibles** o **posibles pero intratables**

Nuevos terminos: Decibilidad e Indecibilidad

Para una entrada determinada se puede decidir si un programa tiene o no solución

Agenda

1. Teoría y Principios de las Maquinas de Turing (MT)
2. Descripción o configuración instantanea
3. Ejemplos y Ejercicios

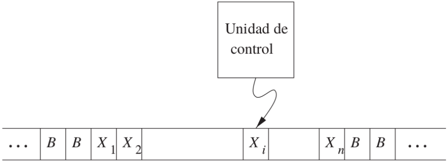
Teoría de las Maquinas de Turing

- El objetivo de las Maquinas de Turing es demostrar que ciertos lenguajes especificos no tienen un algoritmo
- Este análisis se puede iniciar con el lengiaje de las Maquinas de Turing por si mismas
- Reducciones son usadas para demostrar que muchas de las preguntas comunes son indecidibles.

Porque MT?

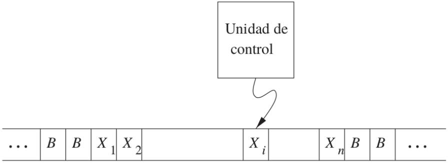
- Porque no hacer análisis sobre programas en C o algún otro lenguaje?
- $\mathcal{R}$: Es mucho mas simple!.
- MT son tan potentes como un PC actual.
- Tienen capacidad infinita, lo cual limita a las simulaciones.

Esquema de la Maquina de Turing



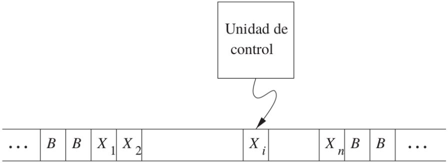
- La Unidad de control puede estar en cualquiera estado
- Existe una cinta con un número finito de simbolos
- Inicialmente se colocan unos simbolos de entrada en los simbolos
- Las restantes casillas de la cinta se exitienden infinitamente a la izq o der, con un simbolo de espacio en blanco.

Esquema de la Maquina de Turing



- Espacio en blanco es un simbolo de la cinta.
- Existe una cabeza de la cinta que siempre esta situada en una casilla de la cinta.
- Inicialmente la cabeza MT esta situada mas a la izq de los simbolos de entrada.

Esquema de la Maquina de Turing



- Un **Movimiento** es una función del estado de la unidad de control y el simbolo de la cinta señalado. En un movimiento:
  1. Cambiar de estado. Puede se opcionalmente el mismo
  2. Escribir un símbolo de cinta en la casilla que señala la cabeza
  3. Mover la cabeza de la cinta a la der o a la izq.

MT como aceptadores del lenguaje

$MT = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, B, \delta)$

- Q conjunto de estados finitos
- $q_0 \in Q$ estado inicial
- F conjunto de estados finales o de aceptación.
- Σ Alfabeto de entrada
- Γ Alfabeto de la *cinta* (memoria), incluye a Σ, $\Sigma \subseteq \Gamma$
- B Simbolo espacio en blanco, indica que no hay simbolos y no pertenece a Σ
- $\delta : Q \times \Gamma$ función de transición

$\delta : Q \times \Gamma$ función de transición

Argumentos $\delta(q, X)$

- Un estado q
- Un simbolo de la cinta X

Valor $\delta(q, X) = (p, Y, D)$

- p siguiente estado de Q
- Y simbolo de Γ, que se escribe en la casilla que señala la cabeza y sustituye cualquier simbolo.
- D es una dirección. Que puede ser a der $\rightarrow$ o Izq $\leftarrow$

Algunas convenciones

- $a, b, c, \ldots$ simbolos de entrada
- $\ldots, X, Y, Z$ simbolos de la cinta
- $\ldots, w, x, y, z$ cadenas de simbolos de entrada
- $\alpha, \beta, \ldots$ simbolos de la cinta

Ejemplo de MT

- Escanea sus entradas a derecha buscando por un 1.
- Si encuentra un 1, lo cambia por cero, va al estado final y se detiene
- Si encuentra un blanco, lo cambia por un 1 y se mueve a la izq.

Ejemplo de MT

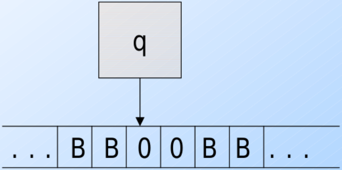
- Estados: q (inicio) , f (final)
- Simbolos de entrada $= \{0, 1\}$
- Simbolos de la cinta $= \{0, 1, B\}$
- $\delta(q, 0) = (q, 0, \rightarrow)$
- $\delta(q, 1) = (f, 0, \rightarrow)$
- $\delta(q, B) = (q, 1, \leftarrow)$

Ejemplo MT: Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

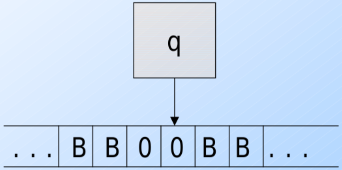


Ejemplo MT: Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

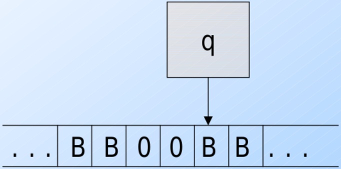


Ejemplo MT: Simulación

$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$

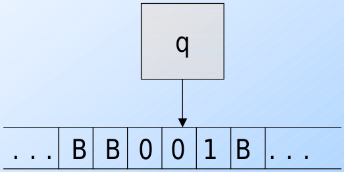


Ejemplo MT: Simulación

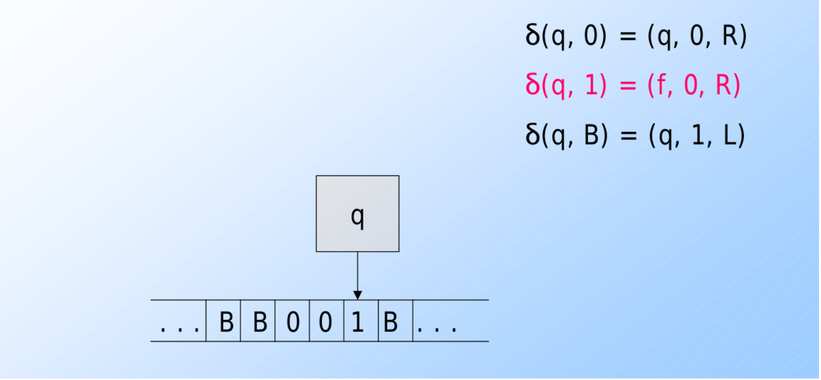
$\delta(q, 0) = (q, 0, R)$

$\delta(q, 1) = (f, 0, R)$

$\delta(q, B) = (q, 1, L)$



Ejemplo MT: Simulación



Ejemplo MT: Simulación

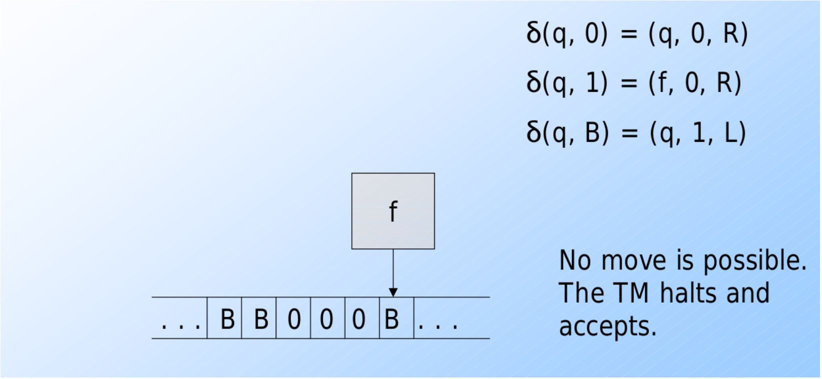
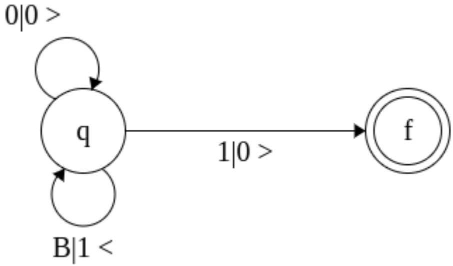


Diagrama de estados



En las transiciones se describe el simbolo leido, el simbolo escrito y el movimiento que realiza la MT

Agenda

Descripción o configuración instantanea

Descripción formal de las configuraciones o descripciones instantáneas de una MT

- Solo se muestran las casillas comprendidas entre el símbolo más a la izquierda y el símbolo más a la derecha que no seas espacios en blanco
- $\vdash$ indica los movimientos de la MT

$X_1 X_2 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n$

- q estado de la MT
- La cabeza de la cinta esta senãlando el simbolo i-esimo
- $X_1 X_2 \ldots X_n$ parte de la cinta comprendida entre simbolos distintos del espacio en blanco.

Descripción o configuración instantanea

$\delta(q, X_i) = (p, Y, \leftarrow)$

$$X_1X_2 \cdots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \cdots X_n \vdash X_1X_2 \cdots X_{i-2}pX_{i-1}YX_{i+1} \cdots X_n$$

- Si $i = 1$. Entonces MT se mueve al espacio en blanco:

$$qX_1X_2 \cdots X_n \vdash pBYX_2 \cdots X_n$$

- Si $i = n$ y $Y = B$ entonces:

$$X_1X_2 \cdots X_{n-1}qX_n \vdash X_1X_2 \cdots X_{n-2}pX_{n-1}$$

Descripción o configuración instantanea

$\delta(q, X_i) = (p, Y, \rightarrow)$

$$X_1X_2\cdots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\cdots X_n \vdash X_1X_2\cdots X_{i-1}YpX_{i+1}\cdots X_n$$

- Si $i = n$. Entonces MT se mueve al espacio en blanco:

$$X_1X_2\cdots qX_n \vdash X_1X_2\cdots X_{n-1}YpB$$

- Si $i = 1$ y $Y = B$ entonces:

$$qX_1X_2\cdots X_{n-1}X_n \vdash pX_2\cdots X_{n-2}pX_n$$

Agenda

Ejemplo

implemente una máquina de Turing que acepte un como lenguaje, palabras que tengan un **par** de ceros. Los simbolos de entrada son $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Funciones de transición
- Diagrama de estados
- Descripción instantanea

Ejemplo

Diseñar una MT que acepte el lenguaje $\{0^n1^n | n \geq 1\}$.

- Se proporciona una secuencia finita de 0's y 1's en la cinta.
- Cambiará un Cero por X y se mueve a derecha pasando por encima de las Y y Ceros hasta encontrar un Uno
- Cambia un Uno por Y y se mueve a la izq hasta encontrar una X
- Solo acepta entradas de la forma 0^*1^*

Cual es la descripción formal de la MT y las transiciones

Ejemplo

Diseñar una MT que acepte el lenguaje $\{0^n 1^n | n \geq 1\}$.

- Se proporciona una secuencia finita de 0's y 1's en la cinta.
- Cambiará un Cero por X y se mueve a derecha pasando por encima de las Y y Ceros hasta encontrar un Uno
- Cambia un Uno por Y y se mueve a la izq hasta encontrar una X
- Solo acepta entradas de la forma $0^* 1^*$

Cual es la descripción formal de la MT y las transiciones

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$$

Ejemplo

Estado	Símbolo 0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)	–
q_2	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	–
q_3	–	–	–	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	–	–	–	–	–

La cinta recorrida corresponde a una secuencia de simbolos de la forma: $X^*0^*Y^*1^*$

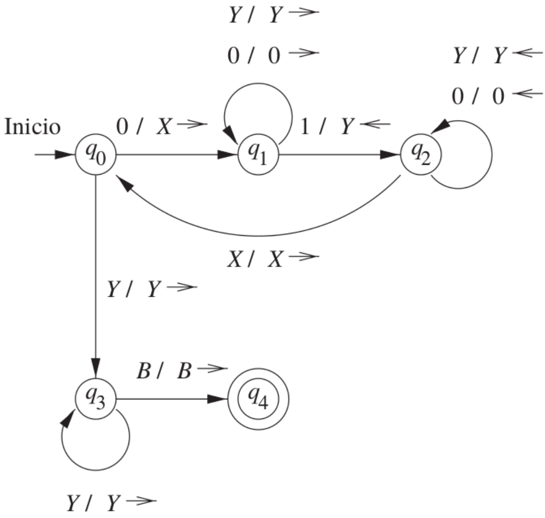
Ejemplo para 0011

$q_0 0011 \vdash Xq_1 011 \vdash X0q_1 11 \vdash Xq_2 0Y1 \vdash q_2 X0Y1 \vdash$
$Xq_0 0Y1 \vdash XXq_1 Y1 \vdash XXYq_1 1 \vdash XXq_2 YY \vdash Xq_2 XYY \vdash$
$XXq_0 YY \vdash XXYq_3 Y \vdash XXYYq_3 B \vdash XXYYBq_4 B$

Ejemplo para 0010

$$q_0 0010 \vdash Xq_1 010 \vdash X0q_1 10 \vdash Xq_2 0Y0 \vdash q_2 X0Y0 \vdash$$
$$Xq_0 0Y0 \vdash XXq_1 Y0 \vdash XXYq_1 0 \vdash XXY0q_1 B$$

Diagramas de Transición



Muchas gracias por su atención

Universidad Industrial de Santander