Autómatas Finitos NO Deterministas

AFN

Fabio Martínez Carrillo

Autómatas
Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informatica
Universidad Industrial de Santander - UIS

12 de septiembre de 2017

Definición

Tiene la capacidad de estar en varios estados a la vez.

- Permite hacer ciertas *conjeturas*.
- Son compactos y fáciles de diseñar.

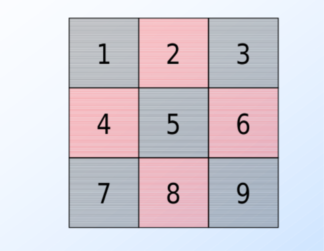
Características

- Tiene un conjunto finito de estados.
- Tiene una función de transición δ.
- δ toma un estado y símbolos de entrada **pero** devuelve **cero**, **uno**, o **múltiples estados**.

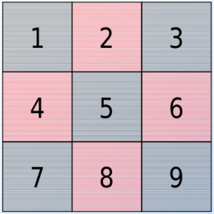
Moverse en un tablero de ajedrez

- Estados = cuadrados.
- Entradas
  - **r:** se mueve a los cuadrados rojos adyacentes.
  - **b:** se mueve a los cuadrados negros adyacentes.
- Estado final: estar en el lado opuesto.

Moverse en un tablero de ajedrez

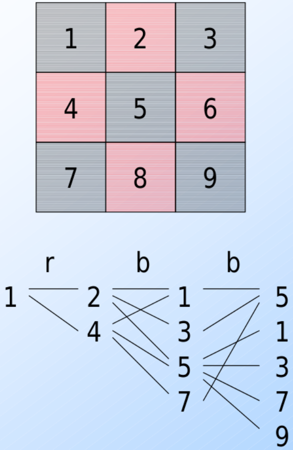


Moverse en un tablero de ajedrez



		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

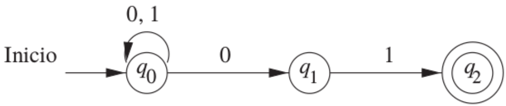
Moverse en un tablero de ajedrez



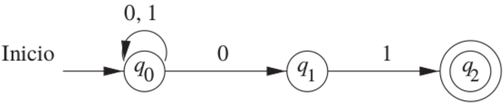
		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

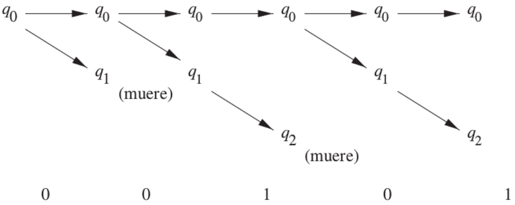
← Accept, since final state reached

Ejemplo



Ejemplo


0, 1
Inicio
q_0
0
q_1
1
q_2


q_0 q_0 q_0 q_0 q_0 q_0
q_1 q_1 q_1
(muere)
q_2 q_2
(muere)
0 0 1 0 1

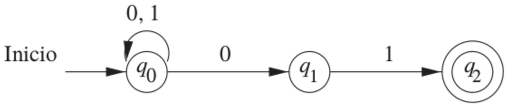
Definición del AFN

$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Un conjunto finito de *estados*, Q.
- Un conjunto finito de *símbolos de entrada*, Σ.
- Una función de transición que toma como argumentos:
  - un estado,
  - un símbolo,
  - devuelve un subconjunto de Q, $\delta : Q \times \Sigma \subseteq Q$.
- Un estado inicial, uno de los estados Q.
- Un conjunto de estados finales o de aceptación F, $F \subset Q$.

- Cada entrada en el AFN es un conjunto.
- Cuando no hay una transición de un estado ante un símbolo, la entrada es $\emptyset$.

Tabla de transiciones



	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Función de transición extendida

Devuelve un conjunto de estados a partir de una entrada q y una palabra w.

- **Caso Base:** $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$
- **Paso Inductivo:** w es una cadena formada por xa y $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Sea

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

Entonces

$$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$

Ejemplo 00101

$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$

- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

El lenguaje de un AFN

El lenguaje de un autómata **no** determinista $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se define como:

$$L(A) = \left\{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

Conjunto de cadenas w que contienen al menos un estado de aceptación.

Equivalencia de AFD y AFN

Equivalencia entre autómatas

En el peor de los casos el AFD tiene 2^n estados con respecto al AFN de n estados.

Si $D = (Q_D, \Sigma_D, \delta_D, q_D, F_D)$ y $N = (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_N, F_N)$

Equivalencia de AFD y AFN

Equivalencia entre autómatas

En el peor de los casos el AFD tiene 2^n estados con respecto al AFN de n estados.

Si $D = (Q_D, \Sigma_D, \delta_D, q_D, F_D)$ y $N = (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_N, F_N)$

$$L(D) = L(N)$$

Equivalencia de AFD y AFN

Equivalencia entre autómatas

En el peor de los casos el AFD tiene 2^n estados con respecto al AFN de n estados.

Si $D = (Q_D, \Sigma_D, \delta_D, q_D, F_D)$ y $N = (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_N, F_N)$

- Q_D conjunto de subconjuntos Q_N
- F_D conjunto de subconjuntos $S \subseteq Q_N$ tal que $S \cap F_n \neq \emptyset$
- Para cada $S \subseteq Q_N$ y $a \subseteq \Sigma_N$:

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}		
{5}		

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

	r	b
→ {1}	{2,4}	{5}
{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
{5}		
{2,4,6,8}		
{1,3,5,7}		

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}		
	{1,3,5,7}		
*	{1,3,7,9}		

17

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}		
*	{1,3,7,9}		
*	{1,3,5,7,9}		

18

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
*	{1,3,7,9}		
*	{1,3,5,7,9}		

19

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
*	{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
*	{1,3,5,7,9}		

Equivalencia de AFD y AFN

Example: Subset Construction

		r	b
→	1	2,4	5
	2	4,6	1,3,5
	3	2,6	5
	4	2,8	1,5,7
	5	2,4,6,8	1,3,7,9
	6	2,8	3,5,9
	7	4,8	5
	8	4,6	5,7,9
*	9	6,8	5

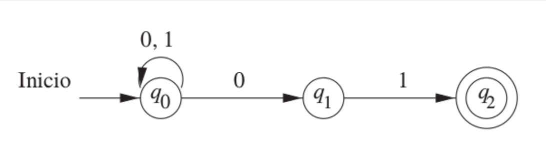
		r	b
→	{1}	{2,4}	{5}
	{2,4}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7}
	{5}	{2,4,6,8}	{1,3,7,9}
	{2,4,6,8}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
	{1,3,5,7}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}
*	{1,3,7,9}	{2,4,6,8}	{5}
*	{1,3,5,7,9}	{2,4,6,8}	{1,3,5,7,9}

Construcción de subconjuntos

Equivalencia entre autómatas

En el peor de los casos el AFD tiene 2^n estados con respecto al AFN de n estados.

Cuál es la AFD correspondiente?



Ejercicio propuesto

- Convierta el siguiente AFN en un AFD y describa el lenguaje que acepta.

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$.
q	$\{r, s\}$	$\{t\}$
r	$\{p, r\}$	$\{t\}$
$*s$	$\emptyset$	$\emptyset$
$*t$	$\emptyset$	$\emptyset$

Muchas gracias por su atención