Equation hyperbolique scalaire et raffinement de maillage

Master 2 MACS

MAHY Vincent

UNIVERSITÉ DE NANTES

Introduction

Dans ce projet, on se propose d'approcher numériquement les équations de la forme :

$\partial_t u(t, x) + \partial_x f(u(t, x)) = 0$

$u(0, x) = u_0(x)$

Pour cela on va implémenter la méthode de Lax-Friedrichs :

$U_i^{n+1}=U_i^n-\Delta t/(2\Delta x)(f(u_{i+1}^n)-f(u_{i-1}^n))$

En plus de cette méthode, nous mettrons en place une méthode pour raffiner le maillage afin de mettre en évidence les éventuelles discontinuités de la solution.

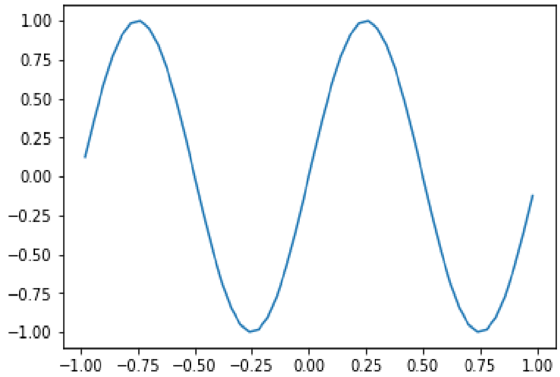
Conditions initiales

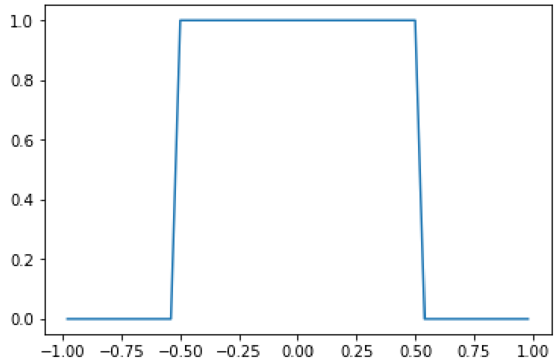
Nous allons étudier, 2 types de conditions initiales.

$U_0(x)=\sin(2*pi*x)$

U0(x)= 1 si $-0.5<x<0.5$

0 sinon

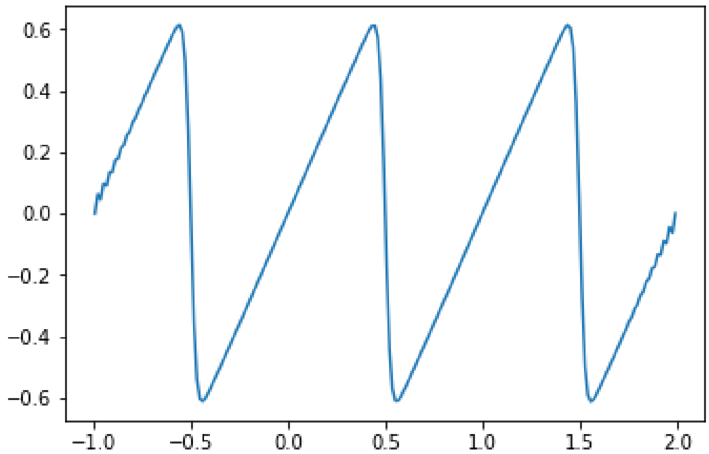




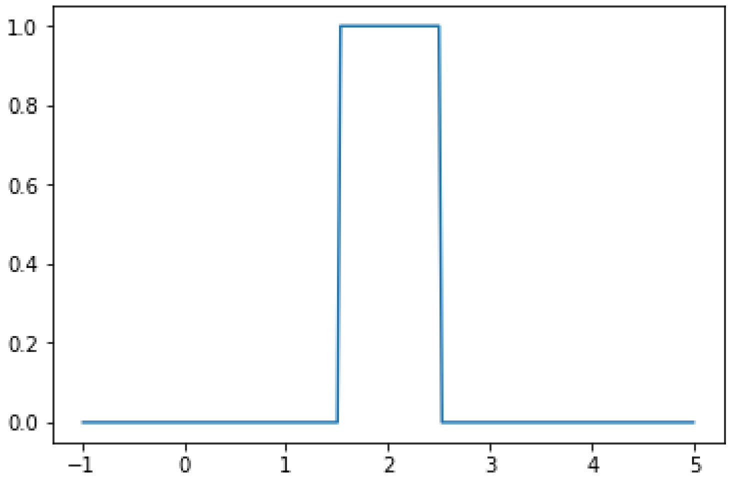
A T=0.5:

A t=0.5 on voit que l’apparition de tangente verticale et donc de choc dans la solution.

Nous allons maintenant comparer la méthode avec et sans raffinement.

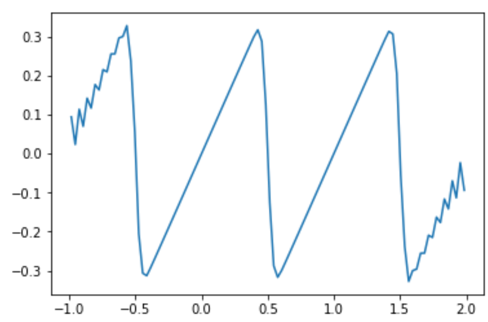


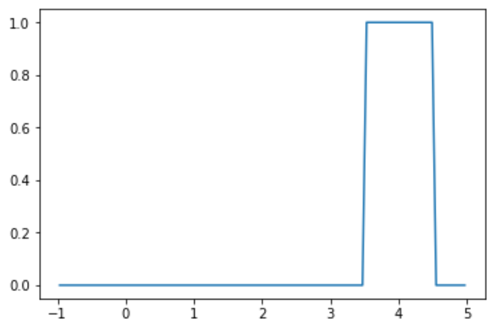
On voit que la solution s’est transportée de a*t, avec a=4 (définit dans le code).



Résultats à T=1:

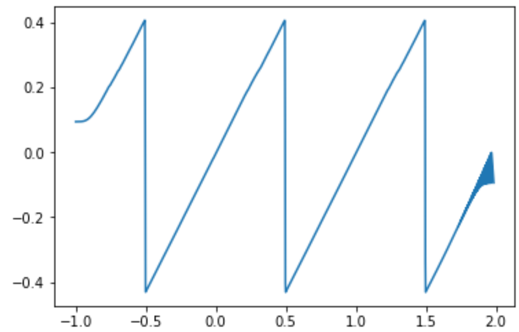
A T=1 , nous obtenons les résultats suivants avec 100 points et sans raffinement de maillage.

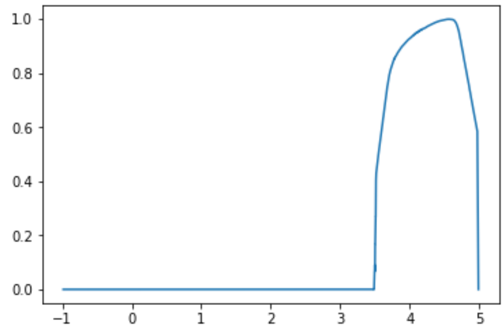




Avec le raffinement nous obtenons les graphiques suivants.

Là où le raffinement mets en évidence les discontinuités pour la fonction sinusoïdale, la solution en escalier est "lissée" car des points sont créés proches de la discontinuités mais l'abscisse de la discontinuité est plus proche de la solution exacte .





Présentation de l'algorithme :

L'algorithme de raffinement consiste à appliquer un schéma de Lax-Friedrichs sur un maillage évolutif.

L'étape de raffinement du maillage consiste à diviser la $i^{ème}$ cellule en 2,

si $|U_i^n - U^n_{i-1}| > C_1$ et si $\Delta X_i > C_2$ à chaque itération en temps, avec C_1 et C_2 2 constantes choisit au début, qui permettent de maitriser la précision . Ensuite on réapplique le schéma sur notre nouveau maillage jusqu'à Tfin en prenant garde de redéfinir Δt à chaque itération afin de garder la condition CFL.

Comparaison avec la solution exacte :

On sait que la solution est constante le long des courbes caractéristiques.

On va donc la comparer avec la solution pour f(u)=a*u.

On sait que la solution est de la forme $U_0(x_0+at)=1$ si $-0.5<x_0+at<0.5$

0 sinon

On obtient le graphique suivant à T=1: