ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. Разбор решения типового варианта задачи №7 Курсовой работы

Под транспортной сетью будем понимать орграф $D=(V,X)$, где $V=\{v_1,...,v_n\}$, с выделенными вершинами v_1, v_n, для которого выполняются условия:

(Т1) существует одна и только одна вершина v_1, называемая *источником*, такая, что $D^{-1}(v_1)=\varnothing$ (т.е. ни одна дуга не заходит в вершину v_1);

(Т2) существует одна и только одна вершина v_n, называемая *стоком*, такая, что $D(v_n)=\varnothing$ (т.е. ни одна дуга не исходит из вершины v_n);

(Т3) каждой дуге $x\in X$ поставлено в соответствие целое число $c(x)\geq 0$, называемое *пропускной способностью* этой дуги.

Вершины в транспортной сети, отличные от источника и стока, называются *промежуточными*.

Функция $\varphi(x)$, определенная на множестве X дуг транспортной сети D и принимающая неотрицательные целочисленные значения называется *потоком* в транспортной сети D, если:

(П1) для любой дуги $x\in X$ величина $\varphi(x)$, называемая *потоком по дуге* x, удовлетворяет условию $0\leq\varphi(x)\leq c(x)$;

(П2) для любой промежуточной вершины v сумма потоков по дугам, заходящим в v, равна сумме потоков по дугам, исходящим из v.

Величиной потока φ в транспортной сети D будем называть число $\overline{\varphi}$, равное сумме потоков по дугам, исходящим из источника v_1 (или, что то же самое, равное сумме потоков по дугам, заходящим в сток v_n).

Пример 9.1. На рис. 9.1 приведен пример транспортной сети $D=(V,X)$ (см. (а)), а также пример потока φ в этой сети (см. (б)); в этом примере $\overline{\varphi}=8+10=10+3+5=18$. На рис. 9.1(а) пропускные способности дуг взяты в скобки. На рис. 9.1(б) около каждой дуги $x\in X$ указан поток по этой дуге $\varphi(x)$. Проверьте выполнение условия (П2) для потока φ в транспортной сети D.

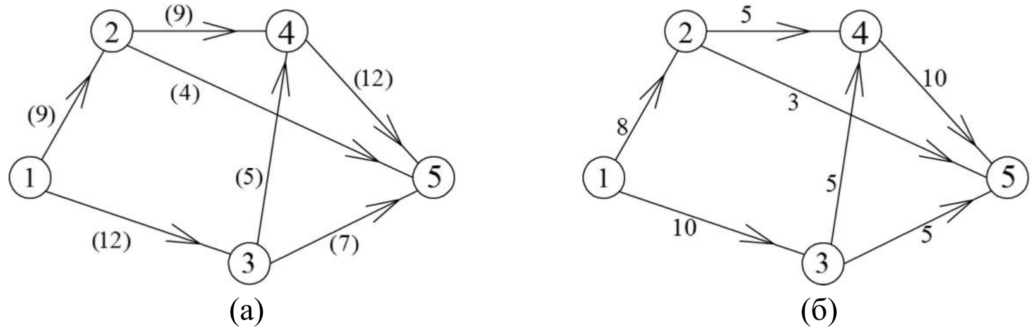


Рис. 9.1

Пусть φ – поток в транспортной сети $D=(V,X)$. Дуга $x\in X$ называется *насыщенной,* если поток по ней равен её пропускной способности, т.е., если $\varphi(x)=c(x)$. Поток φ называется *полным*, если любой путь из источника в сток содержит по крайней мере одну насыщенную дугу. Поток φ с максимально допустимой величиной $\overline{\varphi}$ называется *максимальным*.

Очевидно, что максимальный поток обязательно является полным. Обратное, вообще говоря, не верно (не всякий полный поток является максимальным). Тем не менее, полный поток можно рассматривать как некоторое приближение к максимальному. В связи с этим опишем алгоритм построения полного потока в транспортной сети D.

Алгоритм 9.1 (построения полного потока в транспортной сети D)

Шаг 1. Полагаем $\forall x \in X \quad \varphi(x) = 0$ (т.е. начинаем с нулевого потока). Полагаем $D' = D$ (D' – вспомогательный орграф).

Шаг 2. Удаляем из D' дуги, являющиеся насыщенными при потоке φ в транспортной сети D.

Шаг3. Ищем в D' простую цепь η из v_1 в v_n. Если такой цепи нет, то φ – искомый полный поток. В противном случае переходим к шагу 4.

Шаг 4. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η на одинаковую величину $a > 0$ такую, что по крайней мере одна дуга из η оказывается насыщенной, а потоки по остальным дугам из η не превосходят их пропускных способностей. Переходим к шагу 2.

Разбор типового варианта. (а) Используя алгоритм 9.1, построить полный поток в транспортной сети из примера 9.1.

Решение. Начинаем с нулевого потока φ_0. Каждой новой цепи из v_1 в $v_n = v_5$ будем ставить в соответствие ее очередной номер, т.е. будем обозначать эти цепи через η_1, η_2 и т.д. Соответственно, после нахождения цепи η_1 поток φ_0 изменится на поток φ_1 (см. шаг 4 алгоритма 9.1). После нахождения цепи η_2 поток φ_1 изменится на φ_2 и т.д. Числа, на которые увеличиваем потоки по дугам из η_i обозначаем через a_i. Насыщенные дуги при изображении транспортной сети D с очередным потоком φ_i помечаем символом $\times$. На рис. 9.2 приведены изображения орграфа D с потоком φ_0, а также вспомогательного орграфа D', который на этом этапе совпадает с D.

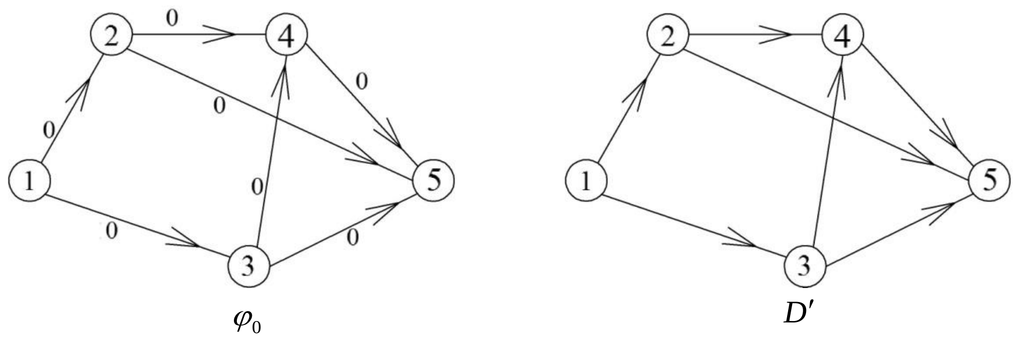
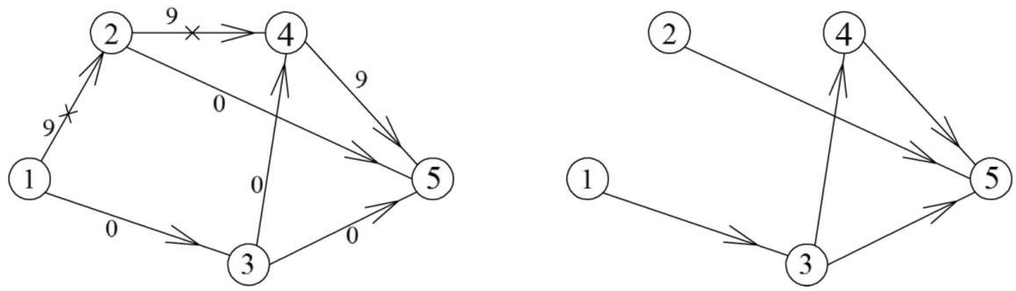


Рис. 9.2

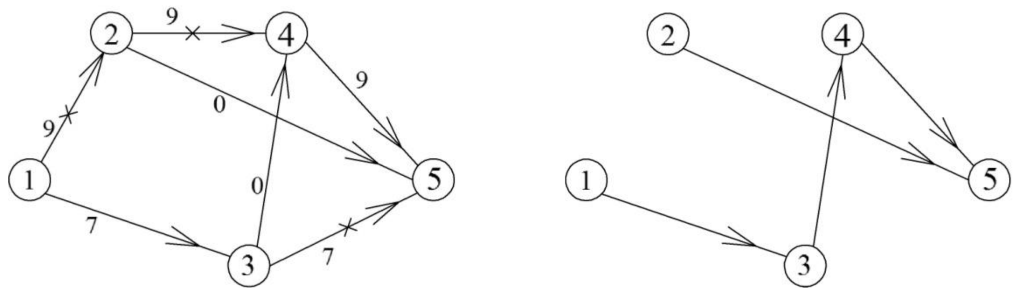
Выделяем в D' простую цепь $\eta_1 = v_1 v_2 v_4 v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_1 на одинаковую величину $a_1 = 9$ до насыщения дуг (v_1, v_2), (v_2, v_4), при этом поток по дуге (v_4, v_5) не превышает ее пропускной способности. В результате поток φ_0 меняется на поток φ_1, а из орграфа D' удаляются дуги (v_1, v_2), (v_2, v_4). На рис. 9.3 приведены изображения орграфа D с потоком φ_1, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_1 D'

Рис. 9.3

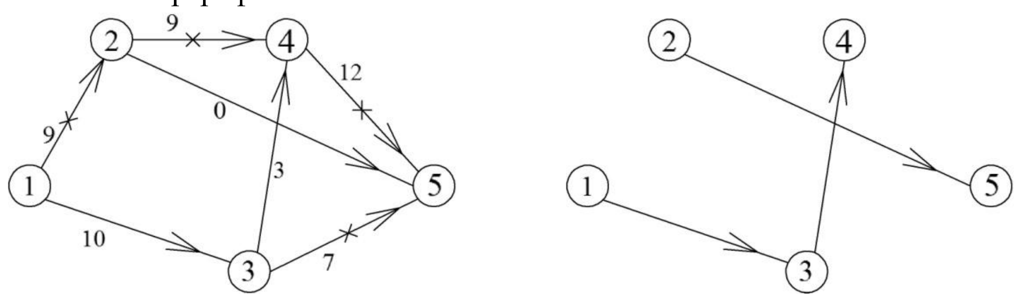
Выделяем в D' простую цепь $\eta_2 = v_1v_3v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_2 на одинаковую величину $a_2 = 7$ до насыщения дуги (v_3, v_5), при этом поток по дуге (v_1, v_3) не превышает ее пропускной способности. В результате поток φ_1 меняется на поток φ_2, а из орграфа D' удаляется дуга (v_3, v_5). На рис. 9.4 приведены изображения орграфа D с потоком φ_2, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_2 D'

Рис. 9.4

Выделяем в D' простую цепь $\eta_3 = v_1v_3v_4v_5$ из v_1 в v_5. Увеличиваем поток $\varphi(x)$ по каждой дуге x из η_3 на одинаковую величину $a_3 = 3$ до насыщения дуги (v_4, v_5), при этом потоки по дугам $(v_1, v_3), (v_3, v_4)$ не превышают их пропускных способностей. В результате поток φ_2 меняется на поток φ_3, а из орграфа D' удаляется дуга (v_4, v_5). На рис. 9.5 приведены изображения орграфа D с потоком φ_3, а также соответствующего этому потоку вспомогательного орграфа D'.



φ_3 D'

Рис. 9.5

Мы видим, что для орграфа D', соответствующего потоку φ_3, не существует пути из источника в сток, а следовательно, φ_3 – полный поток.

Как мы увидим далее, полученный полный поток φ_3 не является максимальным. Для того, чтобы иметь возможность увеличивать полный поток до максимального нам понадобится новое понятие.

Орграф приращений. Введем для транспортной сети $D=(V,X)$ и потока φ в этой сети *орграф приращений* $I(D,\varphi)=(V,\widetilde{X})$. Для любой дуги $x=(v,w)\in X$ обозначим $x'=(w,v)$. Для каждой дуги $x\in X$ выполняется: (а) $x\in\widetilde{X}\Leftrightarrow\varphi(x)<c(x)$; (б) $x'\in\widetilde{X}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\varphi(x)>0$.

Замечание 9.2. В дальнейшем мы будем искать в орграфе приращений простые цепи из v_1 в v_n. Поэтому в нем можно не учитывать дуги, заходящие в v_1, а также исходящие из v_n. Будем орграф приращений без указанных дуг называть *модифицированным.*

Разбор типового варианта (продолжение). (б) Построить орграф приращений $I(D,\varphi_3)$.

Решение. На рис. 9.6 приведено изображение орграфа $I(D,\varphi_3)$, а на рис. 9.7 – изображение модифицированного орграфа $I(D,\varphi_3)$.

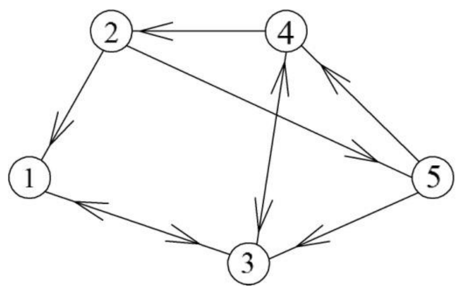


Рис. 9.6

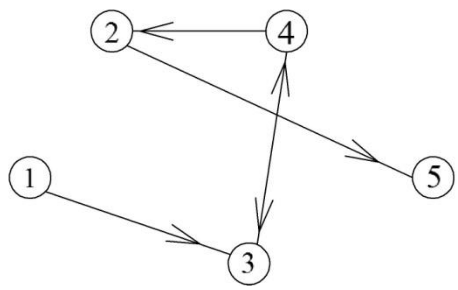


Рис. 9.7

Для дальнейшего понадобится

Теорема 9.1 (Форда – Фалкерсона). Поток φ в транспортной сети D является максимальным тогда и только тогда, когда в орграфе приращений $I(D,\varphi)$ вершина v_n (сток транспортной сети D) не достижима из v_1 (источника транспортной сети D).

Используя теорему Форда – Фалкерсона, нетрудно описать алгоритм построения максимального потока в транспортной сети D.

Алгоритм 9.2 (Форда – Фалкерсона)

Шаг 1. Пусть $\varphi-$ любой поток в транспортной сети D (например, нулевой или полный).

Шаг 2. Строим орграф приращений $I(D,\varphi)$.

Шаг 3. Если в $I(D,\varphi)$ вершина v_n не достижима из вершины v_1, то φ – искомый максимальный поток. В противном случае ищем в $I(D,\varphi)$ простую цепь η из v_1 в v_n. Увеличиваем потоки по дугам цепи η на максимально допустимую величину (см. замечание 9.3) $a>0$ и переходим к шагу 2.

Замечание 9.3. Если дуга x в цепи η имеет то же направление, что и в D, то можно увеличить поток по ней, не превышая ее пропускной способности, т.е. на величину, не превышающую $c(x)-\varphi(x)$. При этом по определению $I(D,\varphi)$ в этом случае $c(x)-\varphi(x)>0$. Если же дуга x' в η направлена противоположно соответствующей дуге x из D (см. определение $I(D,\varphi)$), то можно увеличить поток по ней (и, соответственно, уменьшить поток по дуге x) до обнуления потока по дуге $x,$ т.е. на величину, не превышающую $\varphi(x).$ При этом по определению $I(D,\varphi)$ в этом случае $\varphi(x) > 0.$ Таким образом, величина $a > 0,$ используемая на шаге 3 алгоритма 9.2, является минимальным значением среди величин $\{c(x) - \varphi(x) \mid x \in X, x \in \eta\} \cup \{\varphi(x) \mid x \in X, x' \in \eta\}.$

Разбор типового варианта (продолжение). (в) Используя алгоритм Форда – Фалкерсона, построить максимальный поток для сети D из примера 9.1.

Решение. Начинаем с ранее построенного полного потока φ_3. Выделяем в $I(D,\varphi_3)$ простую цепь $\eta_4 = v_1v_3v_4v_2v_5$ из v_1 в $v_5.$ Увеличиваем потоки по дугам из η_4 на одинаковую величину, равную 2, до насыщения дуг (v_1,v_3), $(v_3,v_4).$ При этом поток по дуге (v_2,v_5) не превышает ее пропускной способности, а величина потока по дуге (v_2,v_4) уменьшается на 2 (см. замечание 9.3). В результате поток φ_3 меняется на поток $\varphi_4.$ На рис. 9.8 приведено изображение орграфа D с потоком $\varphi_4.$ Далее строим орграф приращений $I(D,\varphi_4)$ (см. изображение модифицированного орграфа приращений $I(D,\varphi_4)$ на рис. 9.9). Поскольку в $I(D,\varphi_4)$ вершина v_5 не достижима из $v_1,$ то согласно алгоритму Форда – Фалкерсона φ_4 – искомый максимальный поток, при этом $\overline{\varphi}_4 = 21.$

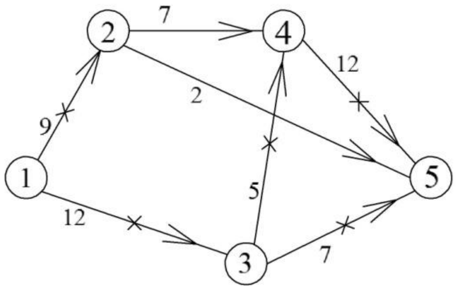


Рис. 9.8

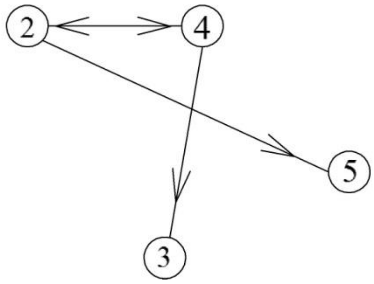


Рис. 9.9

Замечание 9.4. Условие единственности источника (стока) не является ограничительным. Например, в случае двух источников v_1, v_2, удовлетворяющих условиям: $D^{-1}(v_1) = \varnothing,$ $D^{-1}(v_2) = \varnothing,$ можно добавить к транспортной сети D новую вершину v_0 и две дуги (v_0,v_1), $(v_0,v_2).$ При этом пропускной способностью дуги (v_0,v_1) (соответственно дуги (v_0,v_2)) следует считать сумму пропускных способностей дуг, исходящих из v_1 (исходящих из v_2). В этом случае вершина v_0 становится единственным (*фиктивным*) источником. Аналогично поступаем в случае большего числа источников или в случае нескольких стоков. Таким образом, приведенные алгоритмы можно использовать и для нахождения максимального потока в транспортных сетях с несколькими источниками и стоками. В этом случае величиной потока в транспортной сети является сумма величин потоков по дугам, исходящим из совокупности ее источников.