ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. Разбор решения типового варианта задачи №5 Курсовой работы

Граф G называется *деревом*, если он связен и не имеет циклов.

Пример 4.1. Граф $G,$ изображенный на рис.4.1, является деревом

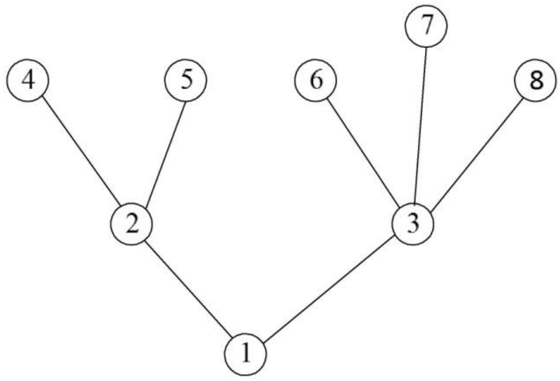

Рис.4.1

Свойства деревьев. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Граф G есть дерево.

(2) Граф G является связным и не имеет простых циклов.

(3) Граф G является связным и число его ребер ровно на 1 меньше числа вершин.

(4) Любые две различные вершины графа G можно соединить единственной (и притом простой) цепью.

(5) Граф G не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получим ровно один (с точностью до направления обхода и выбора начальной вершины обхода) и притом простой цикл (проходящий через добавляемое ребро).

Остовное дерево связного графа. Остовным деревом связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G – связный граф. Тогда, в силу свойства (3), остовное дерево графа G (если оно существует) должно содержать $n(G)-1$ ребер. Таким образом, любое остовное дерево связного графа G есть результат удаления из G ровно $m(G)-(n(G)-1)=$ $=m(G)-n(G)+1$ ребер. Это число называется *цикломатическим числом* связного графа G и обозначается через $\nu(G).$ Покажем существование остовного дерева для произвольного связного графа G , описав алгоритм его выделения.

Алгоритм 4.1

Шаг 1. Выбираем в G произвольную вершину $u_1,$ которая образует подграф G_1 графа $G,$ являющийся деревом. Положим $i=1.$

Шаг 2. Если $i=n=n(G),$ то задача решена и G_i – искомое остовное дерево графа $G.$ В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Пусть уже построено дерево $G_i,$ являющееся подграфом графа G и содержащее вершины $u_1,...,u_i,$ где $1\le i\le n-1.$ Строим граф $G_{i+1},$ добавляя к графу G_i новую вершину $u_{i+1}\in V,$ смежную в G с некоторой вершиной u_j графа G_i и новое ребро $\{u_j,u_{i+1}\}$ (в силу связности G и того, что $i < n$, указанная вершина u_{i+1} обязательно найдется). Увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 2.

Минимальное остовное дерево нагруженного орграфа. Пусть теперь каждому ребру $x \in X$ связного графа $G = (V, X)$ с непустым множеством ребер X поставлено в соответствие действительное число $l(x)$ – длина ребра x, т.е. граф G является нагруженным. Приведем алгоритм, позволяющий найти остовное дерево графа G с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер (по сравнению со всеми другими остовными деревьями графа G), которое будем называть *минимальным остовным деревом* (МОД) графа G.

Алгоритм 4.2 (выделения МОД нагруженного связного графа G)

Шаг 1. Выбираем в G ребро минимальной длины (если их несколько, то любое). Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_2 графа G, являющийся деревом. Положим $i = 2$.

Шаг 2. Если $i = n = n(G)$, то задача решена и G_i – искомое МОД графа G. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не принадлежащей G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентную ему вершину, не принадлежащую G_i. Увеличиваем i на 1 и переходим к шагу 2.

Замечание 4.1. Пусть граф G (см. рис.4.2)

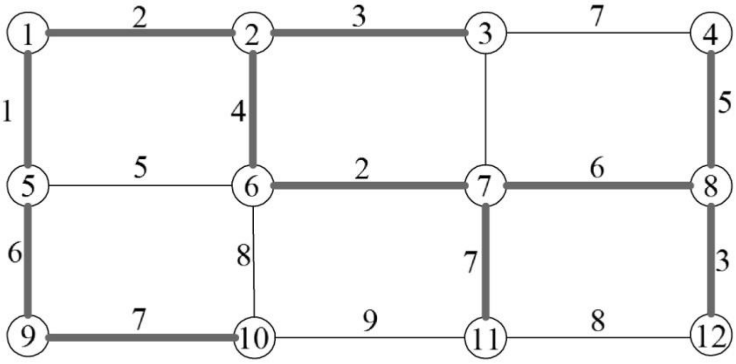

Рис. 4.2

соответствует множеству важных пунктов некоторого города (вокзалы, торговые центры, деловые центры, большие предприятия и т.д.). Нужно соединить эти пункты сетью дорог (например, сетью метрополитена) такой, чтобы было возможно сообщение между любыми двумя пунктами, т.е. выделить связный подграф графа G, содержащий все его вершины. Пусть, далее, величины, указанные на ребрах соответствуют стоимостям строительных работ (т.е. граф G является нагруженным). Тогда, если выделить МОД графа G, то мы получим проект с минимальной общей стоимостью строительных работ.

Разбор типового варианта. Выделить МОД графа G, изображенного на рис.4.2.

Решение. Согласно алгоритму 4.2 выбираем ребро $\{v_1, v_5\}$ минимальной длины 1. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_1, либо v_5 с какой-нибудь новой (т.е. отличной от v_1, v_5) вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_1, v_2\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_9\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_1, v_2\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Далее выбираем ребро минимальной длины, соединяющее либо v_1, либо v_2, либо v_5 с какой-нибудь новой вершиной графа G (т.е. выбираем среди ребер $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_5, v_9\}$). Минимальную длину имеет ребро $\{v_2, v_3\}$. Выделяем его жирной линией (см. рис. 4.2). Следующим ребром минимальной длины среди всех возможных является $\{v_2, v_6\}$, затем $\{v_6, v_7\}$ и т.д. Действуя таким образом, выделяем МОД графа G (см. на рис. 4.2 подграф графа G, ребра которого выделены жирными линиями).