Задание 11.

Найти степень A^{20} матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ двумя способами:

a) приводя матрицу к жордановой нормальной форме;
b) используя характеристический многочлен матрицы как аннулирующий.

Решение.

а) Находим многочлен $p(\lambda) = \lambda^{20}$ от матрицы A первым способом.

1. Приводим матрицу A к жордановой форме. Для этого составляем характеристический многочлен

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Характеристическое уравнение $(\lambda + 1)^2 = 0$ имеет один двойной корень $\lambda_1 =- 1$. Для собственного значения $\lambda_1 =- 1$ (алгебраической кратности $n_1 = 2$) находим собственные векторы. Составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $(A - \lambda_1 E)x = o$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$(A - \lambda_1 E|o) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim (1 \quad - 0,5 \mid 0).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1 = 0,5x_2$. При $x_2 = 2$ получаем собственный вектор $s_1 = (1 \quad 2)^T$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 =- 1$ равна единице ($n - rg(A - \lambda_1 E) = 1$), то есть используем частный случай нахождения жорданова базиса. Собственному значению $\lambda_1 =- 1$ соответствует жорданова клетка второго порядка $J_2(-1)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_A совпадает с этой клеткой $J_A = J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Находим столбцы матрицы S перехода к жорданову базису. Первый столбец этой матрицы — собственный вектор $s_1 = (1 \quad 2)^T$. Второй столбец — присоединенный вектор $s_1^{(1)}$. Находим присоединенный вектор. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(A - \lambda_1 E)s_1^{(1)} = s_1$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(A - \lambda_1 E|s_1) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1 = 0,5x_2 - 0,5$. При $x_2 = 3$ получаем $s_1^{(1)} = (1 \quad 3)^T$ — присоединенный вектор первого порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу $S = (s_1 \quad s_1^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Составляем матрицу $p(J_A)$. Для многочлена $p(\lambda) = \lambda^{20}$ составляем многочлен $p(J_2(-1))$ от жордановой клетки $J_2(-1)$. Учитывая, что $p(-1) = (-1)^{20} = 1, p'(-1) = 20 \cdot (-1)^{19} =- 20$, получаем

$$p(J_A) = p(J_2(-1)) = \begin{pmatrix} p(-1) & p'(-1) \\ 0 & p(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Находим искомый многочлен от матрицы A по формуле $p(A) = Sp(J_A)S^{-1}$

$$p(A) = Sp(J_A)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -19 \\ 2 & -37 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 41 & -20 \\ 80 & -39 \end{pmatrix}.$

Следовательно, $A^{20} = \begin{pmatrix} 41 & -20 \\ 80 & -39 \end{pmatrix}.$

b) Находим многочлен $p(\lambda) = \lambda^{20}$ от матрицы A вторым способом.

1. Составляем характеристический многочлен матрицы A: $\Delta_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$
2. Характеристическое уравнение $(\lambda + 1)^2 = 0$ имеет один корень $\lambda_1 = -1$ (алгебраической кратности $n_1 = 2$)
3. Для корня $\lambda_1 = -1$ кратности $n_1 = 2$ составляем два уравнения

$1 = -r_1 + r_0, -20 = r_1,$

где r_0, r_1 — неопределенные коэффициенты многочлена $r(\lambda) = r_1\lambda + r_0$.

Эту систему можно получить иначе. Запишем тождество $\lambda^{20} \equiv r_1\lambda + r_0$. Подставляя в него $\lambda = -1$, получаем $1 = -r_1 + r_0$. Дифференцируем тождество по λ, приходим к равенству $20\lambda^{19} \equiv r_1$. Подставляем $\lambda = -1$ (этот корень кратности 2): $-20 = r_1$. В результате получаем ту же систему двух уравнений с двумя неизвестными.

4. Решаем полученную систему уравнений: $r_1 = -20, r_0 = -19$.
5. Находим искомый многочлен от матрицы:

$$p(A) = -20A - 19E = \begin{pmatrix} 60 & -20 \\ 80 & -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 0 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -20 \\ 80 & -39 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{20} = \begin{pmatrix} 41 & -20 \\ 80 & -39 \end{pmatrix}.$