Задание 13.

Преобразованием пространства геометрических векторов V_2 является отражение в $L_1 = Lin(\bar{i} - 2\bar{j})$ параллельно $L_2 = Lin(\bar{i} + \bar{j})$. Выяснить геометрический смысл сопряженного преобразования, найти его инвариантные подпространства и матрицу в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$.

Решение.

Составим матрицу преобразования Z. Проще всего это сделать в базисе $\overline{e_1} = \bar{i} - 2\bar{j}, e_2 = \bar{i} + \bar{j}$ пространства U_2. Действительно, учитывая геометрический смысл заданного преобразования, получаем $Z(\overline{e_1}) = \overline{e_1}, Z(\overline{e_2}) =- \overline{e_2}$. Следовательно, матрица Z преобразования Z относительно базиса $(e) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ диагональная $Z_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Отметим, что $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ собственного вектора, принадлежащие собственным значениям, поэтому Z^* — отражение в некотором подпространстве.

Базис $(e) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ не ортонормированный. Находим матрицу Z преобразования Z в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$. Составляем матрицу перехода S от стандартного базиса к базису $(e) = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$:

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Z = SZ_{(e)}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем матрицу Z^* в стандартном базисе $Z^* = Z^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Чтобы уточнить геометрический смысл сопряженного преобразования, находим собственные векторы, которые определяют одномерные инвариантные подпространства. Собственные значения сопряженного преобразования такие же, как у исходных $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 =- 1$. Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(Z^* - \lambda_1 E)x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисную переменную через свободную: $x_1 =- x_2$. При $x_2 = 1$ получаем решение $\varphi_1 = (1 \quad - 1)^T$, которому соответствует вектор $\overline{s_1} = \overline{i} - \overline{j}$. Аналогично находим собственный вектор $\overline{s_2} = 2\overline{i} + \overline{j}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 =- 1$. Учитывая, что $Z^*(\overline{s_1}) = \overline{s_1}, Z^*(\overline{s_2}) = \overline{s_2}$, замечаем, что сопряжение преобразования является отражением в подпространстве $Lin(\overline{i} - \overline{j})$ параллельно подпространству $Lin(2\overline{i} + \overline{j})$.

Ответ: сопряжение преобразования является отражением в подпространстве $Lin(\overline{i} - \overline{j})$ параллельно подпространству $Lin(2\overline{i} + \overline{j})$; указанное подпространство является инвариантом;

$$Z^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$