ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. Разбор решения типового варианта задачи №6 Курсовой работы

Разбор типового варианта. Пусть каждому ребру неориентированного графа G, изображенного на рис. 8.7, соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить общую систему уравнений для токов.

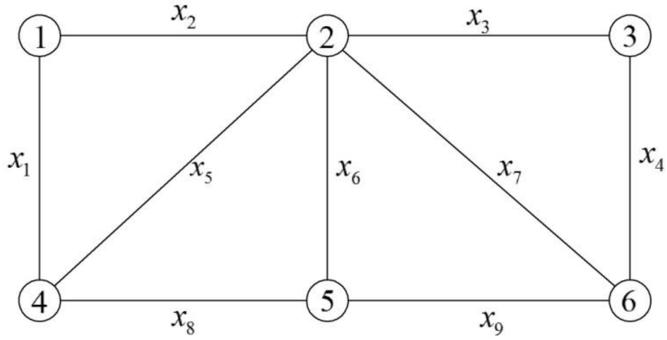

Рис. 8.7

Решение. Выделим произвольным образом остовное дерево графа G (например, используя алгоритм 4.1). Для графа G, изображенного на рис. 8.7, одним из возможных остовных деревьев является дерево, изображенное на рис. 8.8 (пунктирными линиями изображены удаленные из G ребра).

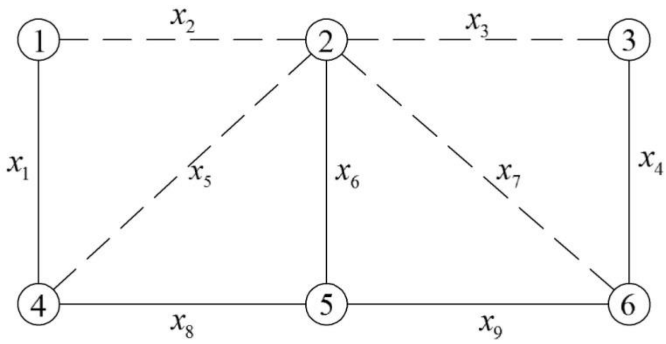

Рис. 8.8

Добавляя любое из ребер, не вошедших в остовное дерево графа G (изображенных на рис. 8.2 пунктирными линиями), мы получим граф с некоторым простым циклом (см. тему 4, свойство (5) деревьев). Всего в остовное дерево не вошли $\nu(G) = m(G) - n(G) + 1$ ребер (для графа, изображенного на рис. 8.7, $\nu(G) = 9 - 6 + 1 = 4$), а поэтому можем получить таким образом $\nu(G) = 4$ простых циклов. Эти циклы различны в том смысле что каждый из них проходит через ребро (то самое, которое мы добавляли для выделения данного цикла), через которое не проходит ни один другой цикл. Они образуют *цикловой базис графа* G.

Для графа, изображенного на рис. 8.7, в цикловой базис войдут циклы:

$\mu_1 = \mu_1(x_2) = x_1 x_2 x_6 x_8$, $\mu_2 = \mu_2(x_3) = x_3 x_4 x_9 x_6$, $\mu_3 = \mu_3(x_5) = x_5 x_6 x_8$,

$\mu_4 = \mu_4(x_7) = x_6 x_7 x_9$.

Введем произвольным образом ориентацию на ребрах графа G (т.е. каждое ребро $\{v,w\}$ превращаем либо в дугу (v,w), либо в (w,v)). В результате каждое ребро x_j превратится в дугу $\widetilde{x}_j$ и, соответственно, множество ребер X в множество дуг $\widetilde{X}$, а сам граф $G=(V,X)$ в орграф $D=(V,\widetilde{X})$. Для графа G, изображенного на рис. 8.7, в результате введения ориентации на его ребрах получаем, например, орграф $D=(V,\widetilde{X})$, изображенный на рис. 8.9.

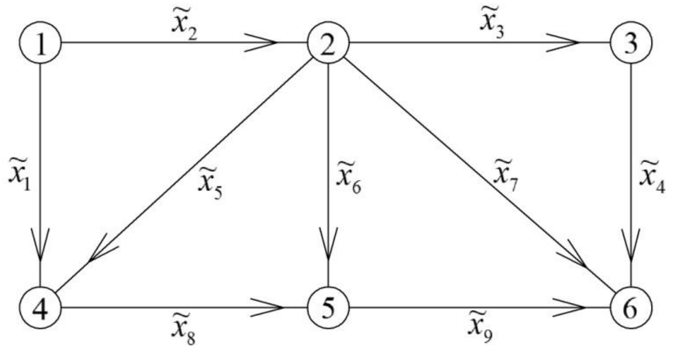

Рис. 8.9

Для графа G, изображенного на рис. 8.7, с выделенным ранее цикловым базисом $\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}$ и выбранной ориентацией ребер, соответствующей орграфу D, изображенному на рис. 8.9, цикломатическая матрица имеет вид

$C(G)$ =

		*	*		*		*		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
μ_1	-1	1	0	0	0	1	0	-1	0
μ_2	0	0	1	1	0	-1	0	0	-1
μ_3	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0
μ_4	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1

.

При построении циклового базиса графа G мы поочередно добавляли к остовному дереву графа G ребра x_2, x_3, x_5, x_7. Выделим соответствующие этим ребрам столбцы в матрице $C(G)$ (они помечены символом $*$). Из выделенных столбцов составим матрицу. Ее определитель равен $-1 \neq 0$, а следовательно, ранг матрицы $C(G)$ равен числу строк, т.е. $\nu(G)$.

Пусть теперь граф G, изображенный на рис. 8.7, соответствует электрической цепи, изображенной на рис. 8.10 (см. замечание 8.1).

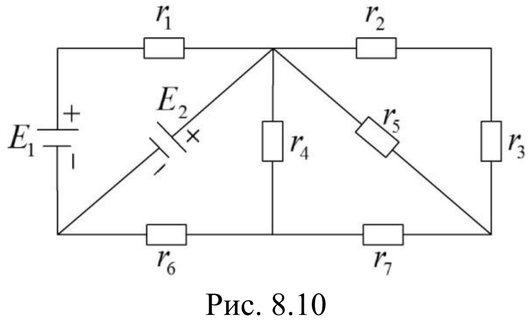

Рис. 8.10

Выберем произвольным образом направления токов в элементах цепи (условные направления; после решения соответствующей системы уравнений знаки при величинах токов покажут истинные направления токов). Пусть эти направления соответствуют выбранной ранее ориентации ребер графа G (см. рис. 8.9). Выпишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений в соответствии с (8.1):

$$\mu_1: \quad -u_1+u_2+u_6-u_8=0,$$

$$\mu_2: \quad u_3+u_4-u_6-u_9=0,$$

$$\mu_2: \quad -u_5+u_6-u_8=0,$$

$$\mu_2: \quad -u_6+u_7-u_9=0,$$

или, с учетом закона Ома, а также того, что $u_1=E_1,\ u_5=E_2,$ имеем:

$$\begin{cases} -E_1+i_2r_1+i_6r_4-i_8r_6=0, \\ i_3r_2+i_4r_3-i_6r_4-i_9r_7=0, \\ -E_5+i_6r_4-i_8r_6=0, \\ -i_6r_4+i_7r_5-i_9r_7=0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Система уравнений Кирхгофа для токов имеет вид (8.2), где

$B(D)=$

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{x}_7$	$\tilde{x}_8$	$\tilde{x}_9$
v_1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	1	-1	0	-1	-1	-1	0	0
v_3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	1	0	0	-1	0
v_5	0	0	0	0	0	1	0	1	-1
v_6	0	0	0	1	0	0	1	0	1

.

При этом для достижения линейной независимости системы уравнений Кирхгофа для токов необходимо исключить из системы (8.2) любое уравнение, например, второе. В результате система линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

$$\begin{cases} -i_1-i_2=0, \\ i_3-i_4=0, \\ i_1+i_5-i_8=0, \\ i_6+i_8-i_9=0, \\ i_4+i_7+i_9=0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Таким образом, общей системой уравнений для токов является объединение систем (8.3), (8.4). Заметим, что полученная объединенная система уравнений состоит из девяти уравнений относительно девяти неизвестных: $i_1,i_2,...,i_9,$ после нахождения которых нетрудно определить $u_1,u_2,...,u_9.$