Задание 15.

Найти ортогональную замену переменных $x = Sy$, приводящую квадратичную форму $-4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ к главным осям. В ответе указать канонический вид и матрицу S.

Решение.

Составим матрицу квадратной формы

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы. Решим характеристическое уравнение $(A - \lambda E)x = o$.

$$(A - \lambda E)x = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & -4-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda + 9) = 0,$$

следовательно, это уравнение имеет два решения $\lambda_1 = 0$ (кратность $n_1 = 2$), $\lambda_2 =- 9$.

Для каждого значения найдем собственный вектор. Составим расширенную матрицу $(A - \lambda_1 E)x = o$:

$$(A - \lambda_1 E)x = \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выразим базисную переменную через свободные: $x_1 = \frac{2x_2 - x_3}{2}$ для $x_2 = 1, x_3 = 0$ имеем $s_1 = (1 \quad 1 \quad 0)^T$. Для $x_2 = 0, x_3 = 2$ получаем собственный вектор $s_2 = (-1 \quad 0 \quad 2)^T$.

Найдем собственный вектор для $\lambda_2 =- 9$. Составим расширенную матрицу $(A - \lambda_2 E)x = o$:

$$(A - \lambda_2 E)x = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную: $x_1 = 2x_3, x_2 =- x_3$. При $x_3 = 1$ $s_3 = (2 \quad -2 \quad 1)^T$. Составим матрицу перехода

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; diag(0, 0, 9) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку $\Lambda = S^T AS$:

$$A_{(S)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомый канонический вид квадратичной формы $\overline{q}(Sy) = 3y_3^2$.

Ответ: канонический вид квадратичной формы $3y_3^2$;

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$