ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. Рекурсивные функции.

Задание 1. Получить заданную функцию с помощью оператора примитивной рекурсии, используя оператор суперпозиции, а также функции: $S(x)=x+1$, $O(x)=0$, $I_m^n(x_1,...,x_n)=x_m$ (где $1\le m\le n$), $S^{(2)}(x_1,x_2)=x_1+x_2$.

Пример 1. $f(x,y)=y(3x+1)+2$. Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x,y)=y(3x+1)+2$:

$$\begin{cases} f(x,0)=2=S(S(O(x))), \\ f(x,y+1)=(y+1)(3x+1)=f(x,y)+3x+1, \end{cases}$$

Откуда, учитывая то, что

$$f(x,y)+3x+1=S^{(2)}(f(x,y),3x)+1=S^{(2)}(f(x,y),3x)+1=$$
$$=S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(2x,x))+1=S(S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x)))),$$

получаем схему примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} f(x,0)=2=S(S(O(x))), \\ f(x,y+1)=S(S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x)))). \end{cases}$$

Ответ: схема примитивной рекурсии для $f(x,y)=y(3x+1)+2$ задается функциями:

$$\varphi(x)=S(S(O(x))),$$
$$\psi(x,y,z)=S(S^{(2)}(I_3(x,y,z),S^{(2)}(S^{(2)}(I_1(x,y,z),I_1(x,y,z)),I_1(x,y,z))))).$$

Пример 2. $f(x)=3x^2+2$. Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x)=3x^2+2$:

$$\begin{cases} f(0)=2=a, \\ f(x+1)=3(x+1)^2+2=3x^2+6x+3+2=f(x)+6x+3, \end{cases}$$

Откуда, учитывая то, что

$$f(x)+6x+3=S^{(2)}(f(x),6x)+3=(S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(3x,3x))+3=$$
$$=S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(2x,x),S^{(2)}(2x,x)))+3=$$
$$=S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x),S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x)))+3=$$
$$=S(S(S(S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x),S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x)))))),$$

получаем схему примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} f(0)=2=a, \\ f(x+1)=S(S(S(S^{(2)}(f(x,y),S^{(2)}(S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x),S^{(2)}(S^{(2)}(x,x),x))))))). \end{cases}$$

Ответ: схема примитивной рекурсии для $f(x)=3x^2+2$ задается константой $a=2$ и функцией:

$$\psi(x,y) = S(S(S(S^{(2)}(I_2(x,y), S^{(2)}(S^{(2)}(S^{(2)}(I_1(x,y), I_1(x,y)), I_1(x,y)),$$
$$S^{(2)}(S^{(2)}(I_1(x,y), I_1(x,y)), I_1(x,y))))))).$$