Задание 4.

Ответить, можно ли в векторных пространствах $(x, y) = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ (1) и

$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ (2)

(столбцов из двух действительных чисел) и P_2 (многочленов степени не выше второй) задать скалярное произведение формулами

$(p, q) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1)$ (1) или

$(p, q) = \int\limits_0^1 [p(x)q(x) + 2p'(x)q'(x)]dx$ (2).

Если можно, то найти угол между первыми двумя векторами стандартного базиса.

Решение.

Рассмотрим формулу (1) для пространства R^2. Эта формула ставит в соответствие элементам $x = (x_1\ x_2)^T$, $y = (y_1\ y_2)^T$ пространства R^2 действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Поменяем местами множители x и y:

$(y, x) = -y_1x_1 + y_2x_1 + y_1x_2 + 2y_2x_2 = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$

Получили выражение в правой части формулы (1), т. е. $(y, x) = (x, y)$. Значит, аксиома 1 выполняется. Заметим, что выражение в правой части (1) симметрическое относительно x и y. Оно не меняется при одновременной замене буквы x на букву y, а буквы y на букву x. Это и обеспечивает коммутативность.

Вместо аксиом 2 и 3 проверяем линейность по первому множителю. Для произвольных $x, y, z \in R^2$ и любых чисел $\alpha, \beta \in R$ получаем

$(\alpha x + \beta y, z) = -(\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 +$

$+\ (\alpha x_2 +\ \beta y_2)z_2 =\ \alpha(-\ x_1 z_z + x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_2 z_2)\ +$

$+\ \beta(-\ y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + y_2 z_2)\ =\ \alpha(x, z)\ +\ \beta(x, z).$

Линейность доказана, следовательно, аксиомы 2 и 3 выполняются. Вместо приведенного доказательства достаточно заметить, что выражение в правой части (1) линейно по переменным $x_1 x_2$:

$-\ x_1 y_1 + x_1 y_2 +\ x_2 y_1 +\ 2x_2 y_2 = x_1(-\ y_1 + y_2)\ + x_2(y_1 +\ 2y_2).$

Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде

$(x, x)\ =-\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 x_1 +\ 2x_2^2 =-\ x_1^2 + 2x_1 x_2 +\ 2x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Вычисляем угловые миноры матрицы квадратичной формы $\Delta_1 =-\ 1 < 0$, $\Delta_2 =\ 2\ >\ 0$. По критерию Сильвестра, эта квадратичная форма не является положительно определенной. Значит, аксиома 4 не выполняется. Чтобы в этом убедиться, не обязательно использовать критерий Сильвестра. Достаточно привести пример ненулевого вектора x для которого $(x, x)\ \leq\ 0$. Например, для $x\ =\ (1 \quad 0)^T$ имеем $(x, x)\ =-\ 1$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой R_1^2 нельзя задать скалярное произведение в R^2.

Рассмотрим формулу (2) для пространства R^2. Выражение в правой части формулы (2) симметрическое относительно x и y, а также линейно по переменным x_1, x_2. Значит, аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде

$(x, x)\ =\ 2x_1^2 +\ 2x_1 x_2 +\ 2x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

Угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительные $\Delta_1 =\ 2\ >\ 0$, $\Delta_2 =\ 2\ >\ 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\ =\ 3\ >\ 0$. По критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена, т. е. $(x, x)\ >\ 0$ для всех $x\ \neq\ o$. Значит, аксиома 4 для формулы (2) выполняется, поскольку $(x, x)\ \geq\ 0$ для всех

$x \in R^2$ и $(x, x) = 0$ только при $x = o$. Таким образом, формула (2) задает скалярное произведение в R^2.

Находим угол φ между первыми двумя векторами стандартного базиса R^2, т. е. между векторами $e_1 = (1 \quad 0)^T$ и $e_2 = (0 \quad 1)^T$. Вычисляем косинус угла по формуле$2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$ $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

$$cos\varphi = \frac{(e_1, e_2)}{\sqrt{(e_1, e_1)}\sqrt{(e_2, e_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Значит, угол между векторами $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим формулу (1) для пространства P_2. Эта формула ставит в соответствие элементам $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ пространства P_2 действительное число. Проверим, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1–4 скалярного произведения. Сначала проверяем выполнение аксиомы 1. Выражение в правой части (1) симметрическое относительно p и q. Действительно, при одновременной замене буквы p на букву q, а буквы q — на букву p, выражение не меняется

$$q(1)p(1) - q'(1)p'(1) + q''(1)p''(1) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1) + p''(1)q''(1)$$

Значит, формула (1) удовлетворяет аксиоме 1.

Выражение в правой части (1) линейно многочлену p, т. е. формула (1) линейна по первому множителю (аксиомы 2–3 выполняются). Проверяем выполнение аксиомы 4. Запишем скалярный квадрат

$(p, p) = p(1)^2 - p'(1)^2 + p''(1)^2$. Это выражение не может быть отрицательным. Поэтому $(p, p) \geq 0$. Предположим, что, $(p, p) = 0$, тогда

$$(p, p) = p(1)^2 - p'(1)^2 + p''(1)^2 = 0.$$

Следовательно, каждое слагаемое равно нулю. Это возможно только тогда, когда $p(x) = 0$. Следовательно, аксиома 4 выполняется. Таким образом, формула (1) задает скалярное произведение в P^2.

Рассмотрим формулу (2) для пространства P^2. Правая часть формулы симметрическая относительно p и q, а также линейна по p (из-за линейности интеграла). Поэтому аксиомы 1–3 выполняются. Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат

$$(p,p) = \int_0^1 \left\{[p(x)]^2 + 2[p'(x)]^2\right\}dx$$

Определенный интеграл от неотрицательной функции имеет неотрицательное значение. Поэтому $(p,p) \geq 0$. Предположим, что, $(p,p) = 0$, тогда

$$(p,p) = \int_0^1 [p(x)]^2dx + 2\int_0^1 [p'(x)]^2dx = 0.$$

Следовательно, каждое слагаемое равно нулю. Так как многочлен является непрерывной функцией, равенство $\int_0^1 [p(x)]^2dx = 0$ возможно только для нулевого многочлена $p(x) = 0$ Следовательно, аксиома 4 выполняется. Таким образом, формула (2) задает скалярное произведение в P^2.

Находим угол φ между первыми двумя элементами стандартного базиса P_2, т. е. между многочленами $p_1(x) \equiv 1$ и $p_2(x) = x$. Вычисляем скалярные произведения$(p,q) = \int_0^1 [p(x)q(x) + 2p'(x)q'(x)]dx$

$$(p_1, p_2) = \int_0^1 xdx = 0,5; \qquad (p_1, p_1) = \int_0^1 dx = 1;$$

$$(p_2, p_2) = \int_0^1 \left[x^2 + 2\right]dx = \frac{7}{3}.$$

Тогда $cos\varphi = \frac{(p_1,p_2)}{\sqrt{(p_1,p_1)}\sqrt{(p_2,p_2)}} = \frac{0,5}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$, значит, угол равен $arccos\frac{\sqrt{21}}{14}$

Ответ: в пространстве R^2 формула (1) не задает скалярное произведение, а формула (2) — не задает. Углы между первыми двумя векторами стандартного базиса в R^2 и в P^2 равны $\frac{\pi}{6}$ и $arccos\frac{\sqrt{21}}{14}$ соответственно.