ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ. Разбор решения типовых вариантов задач №2-4 Курсовой работы

Задача о лабиринте. Опишем метод поиска маршрута в связном графе $G = (V, X)$, соединяющим заданные вершины $v, w \in V$, $v \neq w$.

Алгоритм 3.1 (Тэрри) поиска маршрута в связном графе

Если, исходя из вершины v и осуществляя последовательный переход от каждой достигнутой вершины к смежной ей вершине, руководствоваться следующими правилами: (1) идя по произвольному ребру, всякий раз отмечать направление, по которому оно пройдено; (2) исходя из некоторой вершины v', всегда следовать по тому ребру, которое не было пройдено или было пройдено в противоположном направлении; (3) для всякой вершины v', отличной от v, отмечать первое заходящее в v' ребро, если вершина v' встречается в первый раз; (4) исходя из некоторой вершины v', отличной от v, по первому заходящему в v' ребру идти лишь тогда, когда нет других возможностей, то всегда можно найти маршрут в связном графе G, соединяющий v, w.

Замечание 3.1. Задача, которую решает алгоритм Тэрри, нередко называют *задачей о лабиринте*. Здесь v – начальная точка поиска, w – выход из лабиринта.

Замечание 3.2. Алгоритм Тэрри позволяет избежать повторного прохождения ребер в одном направлении. Если конец маршрута не задан, то, проводя поиск согласно алгоритму Тэрри, пока это возможно, мы найдем замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по разу в каждом направлении) по каждому ребру связного графа G.

Задача о поливочной машине. Пусть граф G соответствует схеме дорог некоторого района, которые нужно полить летом водой (соответственно посыпать песком зимой) с двух сторон (дорожки с двухсторонним движением). Вершина v_1 соответствует базе, где машина заправляется водой и бензином и куда она возвращается после полива дорожек. В силу замечания 3.2, алгоритм Тэрри дает оптимальное решение этой задачи (минимальный расход бензина и воды), поскольку каждая дорожка поливается ровно по разу в каждом направлении.

Разбор типового варианта. Решить задачу о поливочной машине, если схема дорог описывается графом $G = (V, X), V = \{v_1, ..., v_7\}$, изображенным на рис. 3.1 (см. замечание 1.1), т.е. требуется указать маршрут, обеспечивающий полный обход всех вершин и ребер графа G, начиная из вершины v_1 и заканчивая в этой же вершине. При этом каждое ребро должно быть пройдено по разу в каждом направлении.

Решение. Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри (см. замечание 3.2). Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм 3.1 дает следующий возможный маршрут (см. рис. 3.1) $v_1v_3v_2v_1v_2v_3v_4v_5v_7v_4v_6v_7v_6v_4v_7v_5v_4v_3v_1$ (см. замечание 1.1).

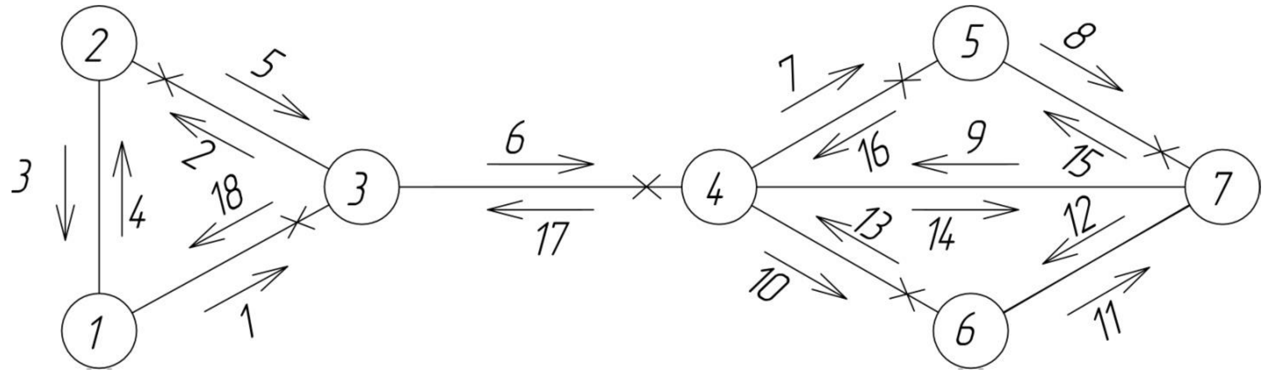

Рис 3.1

Поиск минимальных путей в орграфах. Алгоритм «фронта волны». Путь в орграфе D из вершины v в вершину w, где $w \neq v$, называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей орграфа D из v в w. Аналогично определяется минимальный маршрут в графе G. Пусть $D = (V, X)$ – орграф с $n \geq 2$ вершинами, v, w – заданные вершины из V, $v \neq w$. Опишем алгоритм *фронта волны* поиска минимального пути из v в w в орграфе D.

Алгоритм 3.2 (фронта волны)

Шаг 1. Помечаем вершину v индексом 0, а все вершины, принадлежащие образу вершины v, индексом 1. Обозначим через $FW_0(v), FW_1(v)$ – множества вершин, помеченных индексами 0 и 1, соответственно, т.е. $FW_0(v) = \{v\}, FW_1(v) = D(v)$. Полагаем $k = 1$.

Шаг 2. Если $FW_k(v) = \varnothing$, то вершина w не достижима из v и работа алгоритма на этом заканчивается. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если $w \notin FW_k(v)$, то переходим к шагу 4. В противном случае существует минимальный путь из v в w, имеющий длину k. Последовательность его вершин $vw_1 ... w_{k-1}w$, где

$$w_{k-1} \in FW_{k-1}(v) \cap D^{-1}(w),\ w_{k-2} \in FW_{k-2}(v) \cap D^{-1}(w_{k-1}),\ \dots\ ,\ w_1 \in FW_1(v) \cap D^{-1}(w_2), \qquad (3.1)$$

и есть искомый минимальный путь из v в w длины k. На этом работа алгоритма заканчивается.

Шаг 4. Помечаем индексом $k+1$ все непомеченные вершины, принадлежащие образу множества вершин, помеченных индексом k. Множество вершин, помеченных индексом $k+1$, обозначаем $FW_{k+1}(v)$, т.е. $FW_{k+1}(v) = D(FW_k(v)) \setminus \bigcup_{i=0}^{k} FW_i(v)$. Увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 2.

Замечание 3.3. Множество $FW_k(v)$ будем называть фронтом волны k–го уровня с центром в вершине v.

Замечание 3.4. Вершины $w_1, ..., w_{k-1}$ из (3.1), вообще говоря, могут быть выделены неоднозначно, что говорит о возможности существования нескольких различных минимальных путей из v в w.

Замечание 3.5. Аналогично описывается алгоритм поиска минимальных маршрутов в неориентированном графе G.

Разбор типового варианта. Орграф $D = (V, X)$, где $V = \{v_1, ..., v_{10}\}$, задан матрицей смежности $A(D)$, приведенной в табл.3.1. Найти все минимальные пути из v_1 в v_{10}.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
v_2	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
v_3	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
v_4	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
v_5	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
v_6	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
v_7	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
v_8	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
v_9	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
v_{10}	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Табл.3.1

Решение. Действуя согласно алгоритму 3.2, последовательно определяем:

$FW_0(v_1) = \{v_1\}, \quad FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_4, v_5, v_7\},$

$FW_2(v_1) = D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_4, v_5, v_7\}) \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_7\} =$
$= \{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\}) \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_7\} = \{v_6, v_8, v_9\},$

$FW_3(v_1) = D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = D(\{v_6, v_8, v_9\}) \setminus$
$\setminus \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_2, v_3\},$

$FW_4(v_1) = D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) =$
$= D(\{v_2, v_3\}) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\} \setminus$
$\setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_{10}\}.$

Таким образом, $v_{10} \in FW_4(v_1),$ а следовательно, согласно алгоритму 3.2 существует минимальный путь в орграфе D из v_1 в v_{10} длины 4. Найдем все эти пути. На рис. 3.2 изображен подграф D' орграфа $D,$ на котором последовательно изображены множества $FW_k(v_1), k = 0, 1, 2, 3, 4,$ а также дуги вида $(v, v'),$ где для некоторого $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ $v \in FW_k(v_1), v' \in FW_{k+1}(v_1),$ т.е. исходящие из вершин некоторого k –го фронта волны и заходящие в вершины следующего $(k+1)$ –го фронта волны.

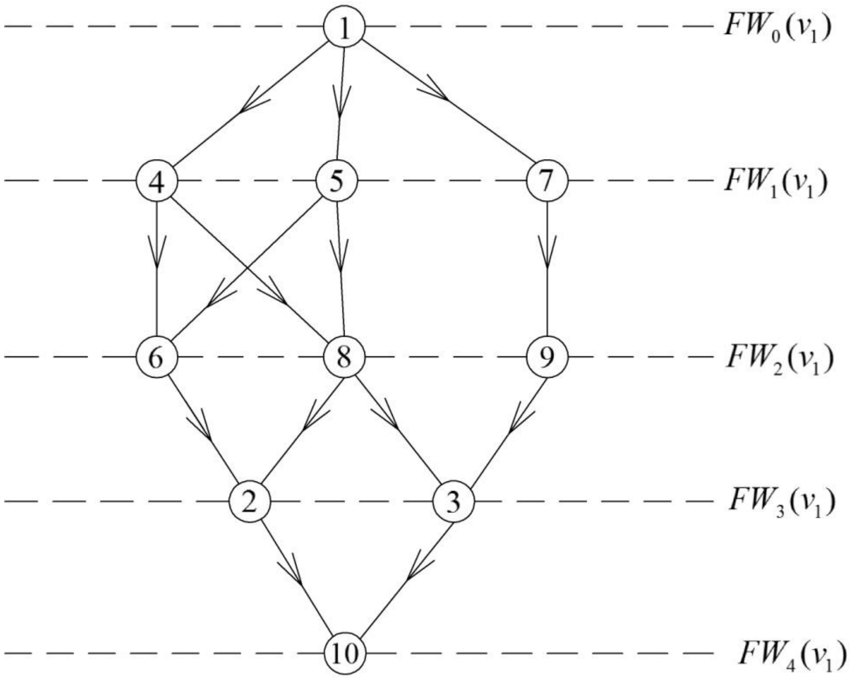

Рис. 3.2

Используя изображение D', нетрудно выделить все минимальные пути из v_1 в v_{10} в орграфе D. При этом, следуя (3.1), находим эти минимальные пути, используя орграф D', но двигаясь в D' в обратной последовательности (т.е. не из v_1 в v_{10}, а наоборот, из v_{10} в v_1). Используя рис. 3.2, получаем, что в любом минимальном пути из v_1 в v_{10} соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине v_{10}, может быть любая из вершин v_2, v_3. Вершиной, предшествующей вершине v_2, может быть любая из вершин v_6, v_8, а вершиной, предшествующей вершине v_3, – любая из вершин v_8, v_9 и т.д. Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из v_1 в v_{10}, которое компактно изображено на рис. 3.3. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути из v_1 в v_{10}. Для каждой из промежуточных вершин v показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих v, и заходящие в v). Из рис. 3.3 видно, что всего существует семь минимальных путей из v_1 в v_{10} одним из которых является $v_1 v_4 v_6 v_2 v_{10}$.

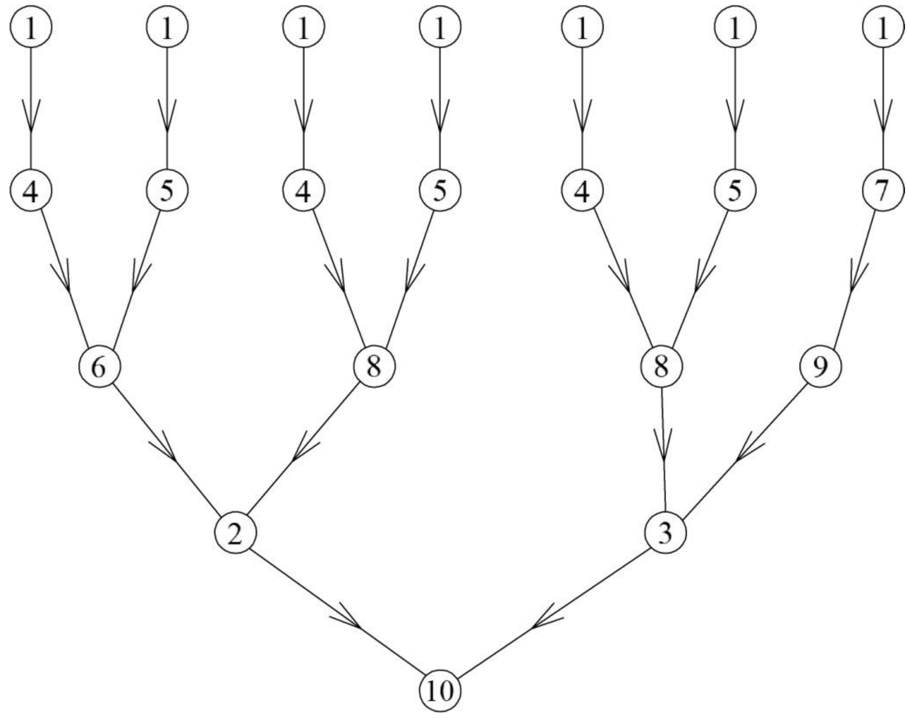

Рис. 3.3

Поиск минимальных путей (маршрутов) в нагруженных орграфах (графах). Назовем орграф $D=(V,X)$ *нагруженным*, если на множестве дуг X определена некоторая функция $l: X \to \mathrm{R}.$ Тем самым в нагруженном орграфе D каждой дуге $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $l(x)$ – *длина дуги* $x.$ Для любого пути π нагруженного орграфа D обозначим через $l(\pi)$ сумму длин входящих в π дуг; при этом каждая дуга учитывается столько раз, сколько она входит в этот путь. Будем называть $l(\pi)$ *длиной пути* $\pi.$ Путь в нагруженном орграфе D из вершины v в вершину $w,$ где $v, w \in V,$ называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей орграфа D из v в $w.$

Пусть $D=(V,X)$ – нагруженный орграф, $V=\{v_1,...,v_n\},\ n \ge 2.$ Опишем метод *Форда – Беллмана* поиска минимальных путей из начальной вершины v_1 в вершины $v_i, i=2,...,n$ (если таковые пути существуют). Если в орграфе существует хотя бы один контур отрицательной длины, то в нем может не существовать путь минимальной длины из некоторой вершины в некоторую другую вершину.

Пример 3.1. Рассмотрим нагруженный орграф $D,$ изображенный на рис. 3.4 (около каждой дуги указана ее длина). В этом орграфе не существует минимального пути из v_1 в v_4, поскольку в нем существует контур $\sigma = v_2 v_3 v_2$ длины –1. Действительно,

$$l(v_1v_2v_4)=3, l(v_1\sigma v_4)=2, l(v_1\sigma\sigma v_4)=1, \ldots, l(v_1\underbrace{\sigma\sigma...\sigma}_{k}v_4)=3-k,\ k=0,1,\ldots\ .$$

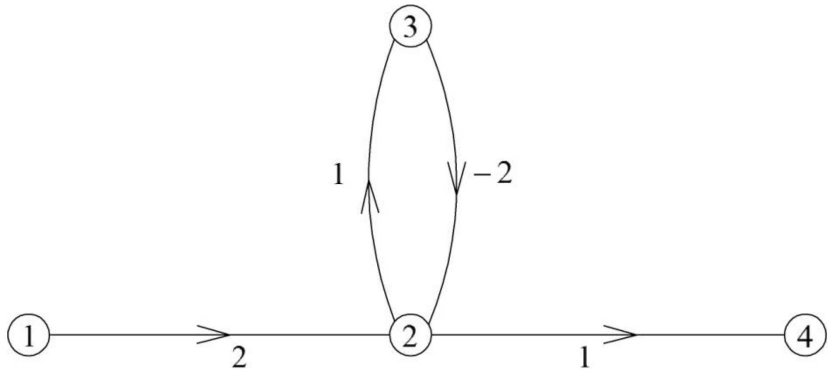

Рис.3.4

Будем для простоты считать, что все дуги в орграфе D неотрицательны. В этом случае в D отсутствуют контуры отрицательной длины. Введем величины $\lambda_i^{(k)}$, где $i = 1,2,..., n$, $k = 1,2,...$. Для каждых фиксированных i и k величина $\lambda_i^{(k)}$ равна длине минимального пути среди всех путей орграфа D из v_1 в v_i, содержащих не более k дуг; если же таких путей нет, то $\lambda_i^{(k)} = \infty$ (здесь и далее под ∞ понимается $+\infty$). Кроме того, если произвольную вершину $v \in V$ считать путем из v в v нулевой длины, то величины $\lambda_i^{(k)}$ можно ввести также и для $k = 0$, и при этом

$$\lambda_1^{(0)} = 0,\ \lambda_i^{(0)} = \infty,\ i = 2,\dots,n. \qquad (3.2)$$

Поскольку по предположению в D отсутствуют контуры отрицательной длины, то

$$\lambda_1^{(k)} = 0,\ k = 0,1,\dots . \qquad (3.3)$$

Введем также в рассмотрение квадратную матрицу $C(D) = [c_{ij}]$ порядка n с элементами $c_{ij} = l(v_i, v_j)$, если $(v_i, v_j) \in X$, и $c_{ij} = \infty$ – в противном случае, которую будем называть *матрицей длин дуг* нагруженного орграфа D.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3.1. При $j = 2,..., n$, $k = 0,1,...$ выполняется равенство

$$\lambda_j^{(k+1)} = \min_{1 \le i \le n} \{\lambda_i^{(k)} + c_{ij}\}. \qquad (3.4)$$

Утверждение 3.2. Если $i \in \{2,..., n\}$, $\lambda_i^{(n-1)} = \infty$, то вершина v_i не достижима из v_1. В противном случае v_i достижима из v_1 и $\lambda_i^{(n-1)}$ – длина минимального пути из v_1 в v_i.

Таким образом, по величинам $\lambda_2^{(n-1)},\dots,\lambda_n^{(n-1)}$ можно судить о достижимости вершин $v_2,..., v_n$ из v_1, а также определять длины минимальных путей из v_1 во все достижимые вершины. Кроме того, по таблице $\lambda_i^{(j)}$, $i = 1,2,..., n$, $j = 0,1,..., n-1$, можно определять минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины. При этом, как и в алгоритме «фронта волны», двигаемся в обратной последовательности, т.е. из некоторой заданной вершины v_i с $\lambda_i^{(n-1)} < \infty$, где $i \in \{2,..., n\}$, в исходную вершину v_1, после чего восстанавливаем истинную последовательность вершин. Сначала определяем минимальный номер k_0, при котором $\lambda_i^{(k_0)} = \lambda_i^{(n-1)}$. Величина k_0 соответствует числу дуг в минимальном пути из v_1 в v_i. Предшествующей вершиной для v_i (в минимальном пути из v_1 в v_i) является вершина v_{i_1}, для которой выполняется равенство

$\lambda_i^{(k_0)} = \min\limits_{1\le i'\le n}\{\lambda_{i'}^{(k_0-1)} + c_{i'i}\} = \lambda_{i_1}^{(k_0-1)} + c_{i_1 i}$. Вершиной, предшествующей вершине v_{i_1} (в минимальном пути из v_1 в v_i), является вершина v_{i_2}, для которой выполняется равенство $\lambda_{i_1}^{(k_0-1)} = \min\limits_{1\le i'\le n}\{\lambda_{i'}^{(k_0-2)} + c_{i'i_1}\} = \lambda_{i_2}^{(k_0-2)} + c_{i_2 i_1}$ и т.д. (это рассуждение основано на равенстве (3.4)).

Разбор типового варианта. Нагруженный орграф D задан матрицей длин дуг $C(D)$ (см. табл. 3.2). Найти минимальные пути из v_1 во все достижимые вершины. Сначала определим таблицу величин $\lambda_i^{(j)}, i = 1,2,...,n,\ j = 0,1,...,n-1$ (см. табл. 3.3), где $n = 7$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$
v_1	∞	∞	9	∞	∞	2	12		**0**	0	0	0	0	0	0
v_2	1	∞	∞	∞	1	2	4		∞	∞	10	5	5	5	5
v_3	2	1	∞	∞	1	∞	2		∞	9	9	9	**6**	6	6
v_4	∞	1	1	∞	∞	1	∞		∞	∞	∞	**5**	5	5	5
v_5	1	2	∞	2	∞	∞	∞		∞	∞	**3**	3	3	3	3
v_6	∞	∞	∞	∞	1	∞	8		∞	**2**	2	2	2	2	2
v_7	∞	2	1	∞	1	2	∞		∞	12	10	10	9	**8**	8

Табл. 3.2 Табл. 3.3

Обозначим $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)},...,\lambda_7^{(k)})^{\mathrm{T}}$, где $k = 0,1,...,6.$ Это столбцы в табл. 3.3. Элементы $\lambda_i^{(0)}$, где $i = 1,2,...,7,$ столбца $\lambda^{(0)}$ определяются согласно (3.2). Из (3.3) следует, что первая строка таблицы 3.3 состоит из нулевых элементов. Далее, используя утверждение 3.1, последовательно определяем (согласно формуле (3.4)) элементы столбца $\lambda^{(1)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(0)}$ (а также элементы матрицы $C(D)$), затем находим элементы столбца $\lambda^{(2)}$, используя элементы столбца $\lambda^{(1)}$ и т.д. Например, $\lambda_2^{(3)} = \min\limits_{1\le i\le 7}\{\lambda_i^{(2)} + c_{i2}\} = 5,$ поскольку при сложении соответствующих столбцов имеем (см. табл. 3.4):

v_2		$\lambda^{(2)}$		
∞	+	0	=	∞
∞	+	10	=	∞
1	+	9	=	10
1	+	∞	=	∞
2	+	3	=	**5**
∞	+	2	=	∞
2	+	10	=	12

Табл. 3.4

и число 5 является минимальным элементом в последнем столбце этой таблицы (выделено жирным шрифтом).

Длина минимального пути из v_1 в v_7 равна 8 (см. утверждение 3.2). В таблице 3.3 жирным шрифтом указаны величины, по которым последовательно находятся вершины в минимальном пути из v_1 в v_7. Минимальное число k_0, при котором $\lambda_7^{(k_0)} = 8,$ равно 5, поэтому выделена величина $\lambda_7^{(5)} = 8$. Вершиной, предшествующей v_7 (в минимальном пути из v_1 в v_7) является вершина v_3, поскольку $\lambda_7^{(5)} = 8 = \min\limits_{1 \le i \le 7}\{\lambda_i^{(4)} + c_{i7}\} = \lambda_3^{(4)} + c_{37} = 6 + 2$ (вершина v_3 находится в первом столбце табл. 3.2, в котором перечисляются вершины орграфа D, напротив выделенного числа $6 = \lambda_3^{(4)}$). Вершиной, предшествующей v_3, является v_4 (вершина v_4 находится в первом столбце табл. 3.2 напротив выделенного числа $5 = \lambda_4^{(3)}$) и т.д. Таким образом, минимальным путем из v_1 в v_7 является $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3 v_7$ (см. последовательность выделенных элементов в табл. 3.3). Соответственно, $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3$, $v_1 v_6 v_5 v_4$, $v_1 v_6 v_5$, $v_1 v_6$ – минимальные пути из v_1 в соответствующие вершины. Минимальный путь из v_1 в v_2 находится аналогично. Его длина равна 5. Минимальное число k_0, при котором $\lambda_2^{(k_0)} = 5$, равно 3. Вершиной, предшествующей v_2, является вершина v_5, поскольку $\lambda_2^{(3)} = 5 = \min\limits_{1 \le i \le 7}\{\lambda_i^{(2)} + c_{i2}\} = \lambda_5^{(2)} + c_{52} = 2 + 3$. Далее, как было показано ранее, вершиной, предшествующей v_5, является вершина v_6, а вершиной, предшествующей вершине v_6, является вершина v_1. Таким образом, минимальным путем из v_1 в v_2 является $v_1 v_6 v_5 v_2$.