## Практикум по курсам «Основы информатики», «Алгоритмы и структуры данных».

## Курсовой проект: 8 факультет, I курс, I семестр 2011/12 уч. года.

### Задание IV: Процедуры и функции в качестве параметров

Составить программу на языке Си с процедурами решения трансцендентных алгебраических уравнений различными численными методами (итераций, Ньютона и половинного деления — дихотомии). Нелинейные уравнения оформить как параметры-функции, разрешив относительно неизвестной величины в случае необходимости. Применить каждую процедуру к решению двух уравнений, заданных двумя строками таблицы, начиная с варианта с заданным номером. Если метод неприменим, дать математическое обоснование и графическую иллюстрацию, например, с использованием `gnuplot`. Классические примеры использования процедур и функций в качестве параметров см. в [8], п. 12.4, и в [10], п. 9.2.

**Краткие сведения из численных методов**

Рассматривается уравнение вида $F(x)=0$. Предполагается, что функция $F(x)$ достаточно гладкая, монотонная на этом отрезке и существует единственный корень уравнения $x^* \in [a,b]$. На отрезке $[a,b]$ ищется приближенное решение $x$ с точностью $\varepsilon$, т.е. такое, что $|x-x^*|<\varepsilon$.

При решении реальных задач, где поведение функции $F(x)$ неизвестно, сначала производят исследование функции (аналитическое, численное, или графическое (`gnuplot, MathLab, MathCAD, Maple`)) и т. н. отделение корней, т. е. разбивают область определения функции на отрезки монотонности, на каждом из которых имеется ровно один корень и выполняются другие условия применимости численных методов (гладкость). Различные численные методы предъявляют разные требования к функции $F(x)$, обладают различной скоростью сходимости и поведением.

В данном задании предлагается изучить и запрограммировать три простейших численных метода решения алгебраических уравнений и провести вычислительные эксперименты по определению корней уравнений на указанных в задании отрезках монотонности и, в качестве дополнительного упражнения, вне их.

**1. Метод дихотомии (половинного деления).**

Очевидно, что если на отрезке $[a,b]$ существует корень уравнения, то значения функции на концах отрезка имеют разные знаки: $F(a)\cdot F(b)<0$. Метод заключается в делении отрезка пополам и его сужении в два раза на каждом шаге итерационного процесса в зависимости от знака функции в середине отрезка.

Итерационный процесс строится следующим образом: за начальное приближение принимаются границы исходного отрезка $a^{(0)}=a$, $b^{(0)}=b$. Далее вычисления проводятся по формулам: $a^{(k+1)}=(a^{(k)}+b^{(k)})/2$, $b^{(k+1)}=b^{(k)}$, если $F(a^{(k)})\cdot F((a^{(k)}+b^{(k)})/2)>0$; или по формулам: $a^{(k+1)}=a^{(k)}$, $b^{(k+1)}=(a^{(k)}+b^{(k)})/2$, если $F(b^{(k)})\cdot F((a^{(k)}+b^{(k)})/2)>0$.

Процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания $\left|a^{(k)}-b^{(k)}\right|<\varepsilon$.

Приближенное значение корня к моменту окончания итерационного процесса получается следующим образом $x^*\approx(a^{(конечное)}+b^{(конечное)})/2$.

**2. Метод итераций.**

Идея метода заключается в замене исходного уравнения $F(x)=0$ уравнением вида $x=f(x)$.

Достаточное условие сходимости метода: $|f'(x)|<1, x\in[a,b]$. Это условие необходимо проверить перед началом решения задачи, так как функция $f(x)$ может быть выбрана неоднозначно, причем в случае неверного выбора указанной функции метод расходится.

Начальное приближение корня: $x^{(0)}=(a+b)/2$ (середина исходного отрезка).

Итерационный процесс: $x^{(k+1)}=f(x^{(k)})$.

Условие окончания: $\left|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right|<\varepsilon$.

Приближенное значение корня: $x^*\approx x^{(конечное)}$.

**3. Метод Ньютона.**

Метод Ньютона является частным случаем метода итераций.

Условие сходимости метода: $|F(x)\cdot F''(x)|<(F'(x))^2$ на отрезке $[a,b]$.

Итерационный процесс: $x^{(k+1)}=x^{(k)}-F(x^{(k)})/F'(x^{(k)})$.

Более совершенное с программистской точки зрения решение задачи может быть получено с помощью изучаемого в курсе «Языки программирования» (II семестр) процедурного типа данных. В этом случае различные уравнения и методы как переменные процедурного типа подставляются в качестве фактических параметров соответствующих подпрограмм. Решение задачи на языке Си, фактически базирующееся на указателях на функции, близко к этому.

**Варианты заданий** (составлены к.ф.-м.н., доц. Сопруненко И.П.):

| № | Уравнение | Отрезок, содержащий корень | Базовый метод | Приближенное значение корня |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $e^x + \ln x - 10x = 0$ | [3, 4] | Ньютона | 3.5265 |
| 2 | $\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + x - 1 = 0$ | [1, 2] | дихотомии | 1.0804 |
| 3 | $1 - x + \sin x - \ln(1 + x) = 0$ | [1, 1.5] | итераций | 1.1474 |
| 4 | $3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0$ | [1, 3] | Ньютона | 2.0692 |
| 5 | $\sqrt{1 - x} - \mathrm{tg} x = 0$ | [0, 1] | дихотомии | 0.5768 |
| 6 | $x + \cos(x^{0,52} + 2) = 0$ | [0.5, 1] | итераций | 0.9892 |
| 7 | $3 \ln^2 x + 6 \ln x - 5 = 0$ | [1, 3] | Ньютона | 1.8832 |
| 8 | $0,6 \cdot 3^x - 2,3x - 3 = 0$ | [2, 3] | дихотомии | 2.4200 |
| 9 | $x^2 - \ln(1 + x) - 3 = 0$ | [2, 3] | итераций | 2.0267 |
| 10 | $2x \cdot \sin x - \cos x = 0$ | [0.4, 1] | Ньютона | 0.6533 |
| 11 | $e^x + \sqrt{1 + e^{2x}} - 2 = 0$ | [-1, 0] | дихотомии | -0.2877 |
| 12 | $\ln x - x + 1,8 = 0$ | [2, 3] | итераций | 2.8459 |
| 13 | $x \cdot \mathrm{tg}\, x - \frac{1}{3} = 0$ | [0.2, 1] | Ньютона | 0.5472 |
| 14 | $\mathrm{tg} \frac{x}{2} - \mathrm{ctg} \frac{x}{2} + x = 0$ | [1, 2] | дихотомии | 1.0769 |
| 15 | $0,4 + \mathrm{arctg} \sqrt{x} - x = 0$ | [1, 2] | итераций | 1.2388 |
| 16 | $3 \sin \sqrt{x} + 0.35x - 3.8 = 0$ | [2, 3] | итераций | 2.2985 |
| 17 | $0,25x^3 + x - 1,2502 = 0$ | [0, 2] | Ньютона | 1.0001 |
| 18 | $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2,5 = 0$ | [0.4, 1] | дихотомии | 0.7376 |
| 19 | $x - \frac{1}{3 + \sin 3.6x} = 0$ | [0, 0.85] | итераций | 0.2624 |
| 20 | $0,1x^2 - x \ln x = 0$ | [1, 2] | Ньютона | 1.1183 |
| 21 | $\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \frac{1}{3} = 0$ | [0, 0.8] | дихотомии | 0.3333 |
| 22 | $\arccos x - \sqrt{1 - 0,3x^3} = 0$ | [0, 1] | итераций | 0.5629 |
| 23 | $3x - 4 \ln x - 5 = 0$ | [2, 4] | Ньютона | 3.23 |
| 24 | $\cos \frac{2}{x} - 2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$ | [1, 2] | дихотомии | 1.8756 |
| 25 | $\sqrt{1 - 0,4x^2} - \arcsin x = 0$ | [0, 1] | итераций | 0.7672 |
| 26 | $e^x - e^{-x} - 2 = 0$ | [0, 1] | Ньютона | 0.8814 |
| 27 | $\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + 2 \ln x = 0$ | [1, 3] | дихотомии | 1.3749 |
| 28 | $x - 2 + \sin \frac{1}{x} = 0$ | [1.2, 2] | итераций | 1.3077 |

**Замечание:** для вычислений и проверки сходимости методов в разных уравнениях каждого задания должно применяться как аналитическое, так и численное (конечноразностное) дифференцирование функций. Кроме того, может быть полезным предусмотреть в программе проверку полученного корня его подстановкой в уравнение F(x) = 0. Образующаяся при этом невязка может служить ещё одним критерием качества приближённого решения.

Полезно также посетить интерактивный решатель задач по численным методам, разработанный аспирантом каф. 806 Кичинским К.А. под руководством проф. Ревизникова Д.Л.: http://www.nummeth.mainfo.ru/