Задание 14.

Преобразование $A: V_2 \to V_2$ пространства V_2 — геометрических векторов в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Представить эту матрицу в виде произведения $A = SQ$ неотрицательной симметрической матрицы S и ортогональной матрицы Q. Выяснить геометрический смысл преобразования A, рассматривая его как композицию $A = SQ$ неотрицательного самосопряженного преобразования S (с матрицей S) и ортогонального преобразования Q (с матрицей Q).

Решение.

Нужно найти полярное разложение $A = SQ$ матрицы преобразования A. Действуем согласно алгоритму.

1. Вычисляем симметрическую матрицу:

$C = AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 6 \\ 6 & 40 \end{pmatrix}$.

2. Находим собственные значения и собственный вектор матрицы C:

$$\begin{vmatrix} 45-\lambda & 6 \\ 6 & 40-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 85\lambda + 1800 - 36 = \lambda^2 - 85\lambda + 1764 = 0;$$

$\lambda_1 = 36, \lambda_2 = 49.$

Для собственного значения $\lambda_1 = 36$ составляем расширенную матрицу системы $(C - \lambda_1 E)x = o$:

$(C - \lambda_1 E|o) = \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Находим ненулевое решение, например, $\varphi_1 = (2 \quad -3)^T$.

Для собственного значения $\lambda_2 = 49$ аналогично получаем $\varphi_2 = (3 \quad 2)^T$.

Собственные векторы φ_1, φ_2 матрицы C нормируем:

$d_1 = \frac{1}{|\varphi_1|}\varphi_1 = (\frac{2}{\sqrt{13}} \quad -\frac{3}{\sqrt{13}})^T, d_2 = \frac{1}{|\varphi_2|}\varphi_2 = (\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \frac{2}{\sqrt{13}})^T.$

Составим преобразующую матрицу

$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$, приводящую матрицу C к диагональному виду

$\Lambda = D^{-1}CD = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 45 & 6 \\ 6 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 72 & -108 \\ 147 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 468 & 0 \\ 0 & 637 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}.$$

3. Вычисляем неотрицательную симметрическую матрицу:

$$S = D\sqrt{\Lambda}D^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ -18 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{87}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{82}{13} \end{pmatrix}.$$

Находим ортогональную матрицу:

$$Q = S^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{82}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{87}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 210 & 504 \\ 504 & -210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Записываем полярное разложение $A = SQ$ матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{87}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{82}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

Этому разложению соответствует представление $A = SQ$ преобразования A в виде композиции самосопряженного преобразования S и ортогонального преобразования Q, которые имеют в стандартном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ найденные матрицы S и Q соответственно.

Выясняем геометрический смысл преобразования A. Самосопряженное преобразование S представляет собой растяжения вдоль взаимно перпендикулярных направлений, которые определяются собственными векторами. Учитывая связь $\sqrt{\Lambda} = D^{-1}SD$, заключаем, что собственные значения матрицы S равны $k_1 = \sqrt{\Lambda_1} = 6$ и $k_2 = \sqrt{\Lambda_2} = 7$, а собственным вектором матрицы S служат столбцы d_1, d_2 или коллинеарные им столбцы $\varphi_1 = (2 \quad -3)^T$ и $\varphi_2 = (3 \quad 2)^T$. Значит, преобразование S есть композиция растяжения с коэффициентом $k_1 = 6$ вдоль направления $\overline{\varphi_1} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ и растяжения с коэффициентом $k_2 = 7$ вдоль направления $\overline{\varphi_2} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.

Определим геометрический смысл преобразования Q. Находим собственные векторы и собственные значения матрицы Q. Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{13} - u & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} - u \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 169u^2 - 169 = 0,$$

$u_1 = 1, u_2 = -1$.

Для собственного значения $u_1 = 1$ находим собственный вектор матрицы Q. Например, $\psi_1 = (3 \quad 2)^T$, а для $u_2 = -1$ аналогично получаем $\psi_2 = (2 \quad -3)^T$. Этим столбцам соответствуют собственные векторы $\overline{\psi_1} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ и $\overline{\psi_2} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$. Следовательно, ортогональное преобразование Q представляет собой зеркальное отражение в подпространстве $Lin(3\bar{i} + 2\bar{j})$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{87}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{82}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$;

преобразование A является композицией зеркального отражения в подпространстве $Lin(3\bar{i} + 2\bar{j})$ и растяжений вдоль направления $\overline{\varphi_1} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ с коэффициентом $k_1 = 6$ и вдоль $\overline{\varphi_2} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ с коэффициентом $k_2 = 7$.