Задание 8.

Преобразование $A: V_3 \rightarrow V_3$ пространства V_3 — геометрических векторов представляет собой ортогональное проектирование на плоскость, содержащую векторы $\overline{i} + \overline{k}$ и $\overline{j}$. Для этого преобразования:

a) выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;
b) доказать линейность;
c) найти ядро, образ дефект, ранг;
d) составить матрицу A преобразования относительно стандартного базиса.

Решение.

а) Так как из каждой точки вектора $\overline{b}$ можно провести перпендикуляр на плоскость A, то отображение является сюръективным.

Возьмем вектор $\overline{b}$ перпендикулярный A, тогда одной точке из $\overline{b}$ будет соответствовать точка из A, но для образа $\overline{b}$ на A будет соответствовать не один прообраз в $\overline{b}$. Тогда отображение не является инъективным, следовательно не является биективным и обратимым.

b) Сумма векторов равна сумме их проекций, а проекция произведения векторов на число равна произведению проекции на число.

c) Возьмем все векторы перпендикулярные плоскости. Их общий вид будет: $\bar{i} - \bar{k}$. Тогда $KerA = Lin(\bar{j} - \bar{k})$, тогда $d = dim(KerA) = 1$ — дефект.

Образом преобразования векторов будет плоскость A, тогда $ImA = Lin(\bar{j}, \bar{i} + \bar{k}), r = dim(ImA) = 2.$

d)

Ответ: a) сюръективно, не инъективно, не биективно, не обратимо; b) линейно; c) $KerA = Lin(\bar{j} - \bar{k}), d = 1, ImA = Lin(\bar{j}, \bar{i} + \bar{k}), r = 2.$