Задание 2.

Доказать, что каждая из систем векторов $(a) = (a_1, a_2, a_3)$ и $(b) = (b_1, b_2, b_3)$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix},$$

образует базис в пространстве R^3. Найти матрицу перехода от базиса (a) к базису (b) и координаты вектора $x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$ в каждом из базисов (a) и (b).

Решение.

Составим из заданных систем столбцов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -10 \\ -1 & -5 & 14 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц отличны от нуля. Поэтому их столбцы линейно независимы. Следовательно, каждая из данных систем векторов образует базис.

В стандартном базисе элементы любого столбца являются его координатами. Например, для столбца x имеем разложение

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 - e_2 + e_3 = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (e)x_{(e)}.$$

Значит, каждый столбец из R^3 совпадает со своим координатным столбцом в стандартном базисе. Поэтому матрицы A и B являются матрицами перехода от стандартного базиса (e) к базисам (a) и (b) соответственно.

Находим обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}, а также искомую матрицу $S = A^{-1}B$ перехода от базиса (a) к базису (b):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -15 & 13 \\ 7 & -6 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} -10 & -71 & 206 \\ -4 & -28 & 81 \\ -1 & -6 & 17 \end{pmatrix}.$$

Координатные столбцы одного и того же вектора x (разных базисах) связаны формулами

$\underset{(e)}{x} = A \underset{(a)}{x}$, $\underset{(e)}{x} = B \underset{(b)}{x}$. Отсюда $\underset{(a)}{x} = A^{-1} \underset{(e)}{x}$ и $\underset{(b)}{x} = B^{-1} \underset{(e)}{x}$, т. е.

$$\underset{(a)}{x} = \begin{pmatrix} 18 & -15 & 13 \\ 7 & -6 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 25 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underset{(b)}{x} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -10 & -71 & 206 \\ -4 & -28 & 81 \\ -1 & -6 & 17 \end{pmatrix}$, $x = 64a_1 + 25a_2 + 4a_3 = 17b_1 - 12b_2 + 3b_3$