Задание 6.

В пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением $(x, y) = x^T y$ заданы столбцы a_1, a_2, a_3 и подпространство B — множество решений однородной системы $Bx = 0$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти:

a) величину угла между вектором x и подпространством $Lin(a_1, a_2, a_3)$;

b) ортогональную проекцию $b \in B$ вектора y на подпространство B и его ортогональную составляющую (перпендикуляр) $h \in B^{\perp}$ относительно подпространства B.

Решение.

a) Находим базис подпространства $A = Lin(a_1, a_2, a_3)$. Составляем из заданных столбцов матрицу $A = (a_{1,} \quad a_2 \quad a_3)$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $rgA = 2$, а столбцы a_1, a_2 образуют базис A.

Угол между вектором x и подпространством $A = Lin(a_1, a_2)$ можно искать двумя способами: используя геометрический смысл определителя Грама (первый способ), либо решая задачу о перпендикуляре (второй способ).

Первый способ.

Длину $|h|$ ортогональной составляющей вектора x относительно подпространства A находим по формуле: $|h| = \sqrt{\frac{detG(a_1, a_2, x)}{detG(a_1, a_2)}}$. По скалярным произведениям

$(a_1, a_1) = 4 + 1 = 5$

$(a_1, a_2) = 4 - 1 = 3$

$(a_2, a_2) = 4 + 1 + 1 + 1 = 7$

$(a_1, x) = -2 - 1 = -3$

$(a_2, x) = -2 - 5 + 1 - 1 = -7$

$(x, x) = 1 + 25 + 1 + 1 = 28$

составляем и вычисляем определители Грама

$$detG(a_1, a_2, x) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & (a_1, x) \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) & (a_2, x) \\ (a_1, x) & (a_2, x) & (x, x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -7 \\ -3 & -7 & 28 \end{vmatrix} = 546$$

$$detG(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) \\ (a_1, a_2) & (a_2, a_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 26$$

Значит $|h| = \sqrt{\frac{546}{26}} = \sqrt{21}$, тогда $sin\varphi = \frac{|h|}{|x|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ — искомый угол между вектором x и подпространством $A = Lin(a_1, a_2, a_3)$.

Второй способ.

Составляем неоднородную систему уравнений с матрицей Грама $G(a_1, a_2)$

$$G(a_1, a_2)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1, x) \\ (a_2, x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5l_1 + 3l_2 = -3 \\ 3l_1 + 7l_2 = -7 \end{cases}.$$

Решая ее, получаем $l_1 = 0$ и $l_2 = -1$. Находим ортогональную проекцию вектора x на подпространство A

$l = l_2 \cdot a_1 + l_2 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Вычисляем длины векторов

$|l| = \sqrt{4 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{7}$; $|x| = \sqrt{28}$ и косинус угла между ними $cos\varphi = \frac{|l|}{|x|} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}} = \frac{1}{2}$. Следовательно, искомый угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

b) Определяем базис подпространства B решений однородной системы. Для этого находим фундаментальную систему решений. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B|o) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1 =- 0,5x_2 + 0,5x_4, x_3 =- x_4$. По этим формулам для $x_2 = 2, x_4 = 0$ получаем $x_1 =- 1, x_3 = 0$, а для $x_2 = 0, x_4 = 2$ имеем $x_1 = 1, x_3 =- 2$. Таким образом, фундаментальная система состоит из двух решений: $\varphi_1 = (-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^T$, $\varphi_2 = (1 \quad 0 \quad -2 \quad 2)^T$. Эти решения образуют базис подпространства $B = Lin(\varphi_1, \varphi_2)$, т. е. $dimB = 2$.

Вычисляем скалярные произведения

$(\varphi_1, \varphi_1) = 1 + 4 = 5$ $\qquad$ $(\varphi_1, \varphi_2) =- 1$

$(\varphi_2, \varphi_2) = 1 + 4 + 4 = 9$ $\qquad$ $(\varphi_1, y) =- 2 + 4 = 2$

$(\varphi_2, y) = 2 + 2 = 4$

и составляем неоднородную систему $G(\varphi_1, \varphi_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_1, y) \\ (\varphi_2, y) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 5b_1 - b_2 = 2 \\ -b_1 + 9b_2 = 4 \end{cases}.$$

Решаем ее по правилу Крамера:

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 44$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 22$, $b_1 = \frac{22}{44} = 0,5$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 22$, $b_2 = \frac{22}{44} = 0,5$.

Находим ортогональную проекцию b вектора y на подпространство R и ортогональную составляющую $h \in B^{\perp}$ вектора y относительно подпространства R.

$$b = b_1 \cdot \varphi_1 + b_2 \cdot \varphi_2 = 0,5\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$h = y - b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Можно выполнить проверку ортогональности найденных векторов, вычисляя скалярное произведение $(b, h) = 1 - 1 = 0$. Действительно, найденные векторы ортогональны.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$; b) $b = (0 \quad 1 \quad -1 \quad 1)^T$, $h = (2 \quad 1 \quad 0 \quad -1)^T$.