Задание 3.

Найти размерность и базис каждого из подпространств A, B, их алгебраической суммы $A + B$ и пересечения $A \cap B$, если подпространство A задано линейной оболочкой своих образующих $A = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$, а подпространство B — системой уравнений $Bx = 0$. Образующие a_1, a_2, a_3, a_4 и матрица B системы уравнений имеют вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала определяем размерность и базис пространства B решений однородной системы. Для этого находим фундаментальную систему решений. Составляем расширенную матрицу системы и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B|o) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0,6 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0,6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1 = x_3 - 0,6x_4$, $x_2 =- x_3 - 0,2x_4$. По этим формулам для $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получаем $x_1 = 1$, $x_2 =- 1$, а для $x_3 = 0$, $x_4 = 10$ имеем $x_1 =- 6$, $x_2 =- 2$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из двух решений: $b_1 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^T$, $b_2 = (-6 \quad -2 \quad 0 \quad 10)^T$. Эти решения образуют базис подпространства $B = Lin(b_1, b_2)$, а его размерность равна 2.

Теперь будем искать базис пересечения подпространств. Попутно находим базис подпространства A, а также базис суммы $A + B$. Согласно алгоритму составим блочную матрицу $(A|B) = (a_1, a_2, a_3, a_4|b_1, b_2)$ и приведем ее к упрощенному виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|cc} -1 & -4 & -2 & 3 & 1 & -6 \\ 5 & 8 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & -12 & -12 & 12 & 4 & -32 \\ 0 & -7 & -7 & 7 & 3 & -12 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -7 & -7 & 7 & 3 & -12 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right).$$

По левому блоку матрицы определяем, что $rgA = 3$, а столбцы a_1, a_2, a_4 — базисные. Следовательно, эти столбцы составляют базис пространства A и $dimA = 3$. По упрощенному виду матрицы $(A|B)$ заключаем, что столбцы a_1, a_2, a_4, b_1 образуют базис подпространства $A + B$ и $dim(A + B) = 4$. Теперь находим фундаментальную систему решений однородной системы $A\alpha = B\beta$. Выражаем базисные переменные через свободные: $\alpha_1 = 2\alpha_3 - 2\beta_2$, $a_2 =- a_3 + 14\beta_2$. $a_4 = 0$, $\beta_1 = 10\beta_2$. По этим формулам для $\alpha_3 = 1$, $\beta_2 = 0$ получаем $\alpha_1 = 2, a_2 =- 1, a_4 = 0, \beta_1 = 0$, а для $\alpha_3 = 0, \beta_2 = 1$ имеем $\alpha_1 =- 2, a_2 = 14, a_4 = 0, \beta_1 = 10$. Фундаментальная система решений имеет вид $\varphi_1 = (2 \quad - 1 \quad 1 \quad 0|0 \quad 0)$, $\varphi_2 = (- 2 \quad 14 \quad 0 \quad 0|10 \quad 1)$. Находим линейные комбинации $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$. В случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем нулевой столбец $x_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$, который не может быть базисным. При $\beta_1 = 10, \beta_2 = 1$ находим $x_2 = 10b_1 + b_2 = (4 \quad -12 \quad 10 \quad 10)^T$ Этот столбец образует базис подпространства $A \cap B = Lin(x_2)$ и, следовательно, $dim(A \cap B) = 1$.

Ответ: $dimA = 3$, базис a_1, a_2, a_4, b_1, $dimB = 2$, базис $b_1 = (1 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^T$, $b_2 = (-6 \quad -2 \quad 0 \quad 10)^T$; $dim(A + B) = 4$, базис a_1, a_2, a_4, b_1; $dim(A \cap B) = 1$, базис $x_2 = (4 \quad -12 \quad 10 \quad 10)^T$.