

### Лабораторная работа №3. Смежные классы группы по ее подгруппе

**Задание 3.** Определить для заданной подгруппы  $H \subset S_4$ :

- элементы из  $H$ ;
- левые и правые смежные классы группы  $S_4$  по  $H$ .

**I)  $H = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 3) \rangle$ .**

**Порядок выполнения:**

- Перечислить все элементы из  $S_4$ .
- Найти все элементы из  $H = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 3) \rangle$ , составив таблицу Кэли для  $H$ .
- Определить  $|H|$ ,  $|S_4 / H| = |S_4| / |H|$ , является ли  $H$  подгруппой индекса 2? (т.е. содержащей  $|S_4| / 2 = 4! / 2 = 12$  элементов).
- Найти все левые и правые смежные классы из  $S_4 / H$ .
- Проверить выполнение условия  $\forall \pi \in S_4: \pi H = H\pi$ . В каких случаях это условие можно не проверять (т.е. ответ заранее известен) и почему?

**Решение:**

- Разобьем элементы из  $S_4$  на 4 попарно не пересекающихся множества:  
 $S_4(1 \rightarrow 1) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\} = \{e, (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 2) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 2\} = \{(1\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 3) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 3\} = \{(1\ 3), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 4) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 4\} = \{(1\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}.$

- Составим таблицу Кэли для  $H$  (первоначально включаем в нее  $e$ , элементы из  $\{(1\ 2\ 3), (1\ 3)\}$  и обратные к ним.

	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$e$	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$e$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$

$$\begin{aligned}
 (1\ 3)(1\ 2\ 3) &= (1\ 2); & (1\ 3)(1\ 3\ 2) &= (2\ 3); \\
 (1\ 2\ 3)(1\ 3) &= (2\ 3); & (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) &= (1\ 3\ 2); \\
 (1\ 3\ 2)(1\ 3) &= (1\ 2); & (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2) &= (1\ 2\ 3).
 \end{aligned}$$

Добавляем новые элементы в таблицу вместе с обратными к ним, т.е. добавляем:  $(1\ 2), (2\ 3)$ :

	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$e$	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$e$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$

Заполняем таблицу. Первая строка заполняется тривиальным образом.

**Вторая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 3)(2\ 3) = (1\ 3\ 2).$$

**Третья строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3), \quad (1\ 2\ 3)(2\ 3) = (1\ 2).$$

**Четвертая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 3\ 2)(1\ 2) = (2\ 3), \quad (1\ 3\ 2)(2\ 3) = (1\ 3).$$

**Пятая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3).$$

**Шестая строка таблицы Кэли:**

$$(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

Множество смежных классов  $S_4/H$  содержит  $|S_4|/|H| = 24/6 = 4$  смежных класса вида  $\sigma H$ , где  $\sigma$  - любая подстановка из  $S_4/H$ , например,  $\sigma = (1\ 4)$ .

**Ответ:** Множество  $S_4/H$  содержит четыре смежных класса:

$$1) H = \{e, (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2), (2\ 3)\} = (1\ 3)H = (1\ 2\ 3)H = (1\ 3\ 2)H = (1\ 2)H = (2\ 3)H = H(1\ 3) = H(1\ 2\ 3) = H(1\ 3\ 2) = H(1\ 2) = H(2\ 3);$$

$$2) (1\ 4)H = \{(1\ 4), (1\ 4)(1\ 3), (1\ 4)(1\ 2\ 3), (1\ 4)(1\ 3\ 2), (1\ 4)(1\ 2), (1\ 4)(2\ 3)\} = \{(1\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} = (1\ 4)H = (1\ 3\ 4)H = (1\ 2\ 3\ 4)H = (1\ 3\ 2\ 4)H = (1\ 2\ 4)H = (1\ 4)(2\ 3)H;$$

$$H(1\ 4) = \{(1\ 4), (1\ 3)(1\ 4), (1\ 2\ 3)(1\ 4), (1\ 3\ 2)(1\ 4), (1\ 2)(1\ 4), (2\ 3)(1\ 4)\} = \{(1\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 4\ 2), (2\ 4)(1\ 3)\} = H(1\ 4) = H(1\ 4\ 3) = H(1\ 4\ 2\ 3) = H(1\ 4\ 3\ 2) = H(1\ 4\ 2) = H(2\ 4)(1\ 3);$$

$$(1\ 4)H \neq H(1\ 4) \text{ т.к. } (1\ 3\ 4) \in (1\ 4)H, \text{ но } (1\ 3\ 4) \notin H(1\ 4);$$

3)  $(2\ 4)\ H = \{(2\ 4), (2\ 4)(1\ 3), (2\ 4)(1\ 2\ 3), (2\ 4)(1\ 3\ 2), (2\ 4)(1\ 2), (2\ 4)(2\ 3)\} =$   
 $= \{(2\ 4), (2\ 4)(1\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2), (2\ 3\ 4)\} = (2\ 4)\ H = (2\ 4)(1\ 3)\ H =$   
 $= (1\ 4\ 2\ 3)\ H = (1\ 3\ 4\ 2)\ H = (1\ 4\ 2)\ H = (2\ 3\ 4)\ H;$

$H(2\ 4) = \{(2\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2)(2\ 4), (1\ 2)(2\ 4), (2\ 3)(2\ 4)\} =$   
 $= \{(2\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 2\ 4), (2\ 4\ 3)\} = H(2\ 4) = H(1\ 3)(2\ 4) =$   
 $= H(1\ 2\ 4\ 3) = H(1\ 3\ 2\ 4) = H(1\ 2\ 4) = H(2\ 4\ 3);$

$(2\ 4)\ H \neq H(2\ 4)$  т.к.  $(1\ 4\ 2\ 3) \in (2\ 4)\ H$ , но  $(1\ 4\ 2\ 3) \notin H(2\ 4);$

4)  $(3\ 4)\ H = \{(3\ 4), (3\ 4)(1\ 3), (3\ 4)(1\ 2\ 3), (3\ 4)(1\ 3\ 2), (3\ 4)(1\ 2), (3\ 4)(2\ 3)\} =$   
 $= \{(3\ 4), (1\ 4\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3\ 2), (3\ 4)(1\ 2), (2\ 4\ 3)\} = (3\ 4)\ H = (1\ 4\ 3)\ H =$   
 $= (1\ 2\ 4\ 3)\ H = (1\ 4\ 3\ 2)\ H = (3\ 4)(1\ 2)\ H = (2\ 4\ 3)\ H;$

$H(3\ 4) = \{(3\ 4), (1\ 3)(3\ 4), (1\ 2\ 3)(3\ 4), (1\ 3\ 2)(3\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3)(3\ 4)\} =$   
 $= \{(3\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3\ 4)\} = H(3\ 4) = H(1\ 3\ 4) =$   
 $= H(1\ 2\ 3\ 4) = H(1\ 3\ 4\ 2) = H(1\ 2)(3\ 4) = H(2\ 3\ 4);$

$(3\ 4)\ H \neq H(3\ 4)$  т.к.  $(2\ 4\ 3) \in (3\ 4)\ H$ , но  $(2\ 4\ 3) \notin H(3\ 4).$

## II) $H = \langle (2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3) \rangle$ .

### **Порядок выполнения:**

1. Перечислить все элементы из  $S_4$ .
2. Найти все элементы из  $H = \langle (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle$ , составив таблицу Кэли для  $H$ .
3. Определить  $|H|$ ,  $|S_4/H| = |S_4|/|H|$ , является ли  $H$  подгруппой индекса 2? (т.е. содержащей  $|S_4|/2 = 4!/2 = 12$  элементов).
4. Найти все левые и правые смежные классы из  $S_4/H$ .
5. Проверить выполнение условия  $\forall \pi \in S_4: \pi H = H\pi$ . В каких случаях это условие можно не проверять (т.е. ответ заранее известен) и почему?

### **Решение:**

1. Разобьем элементы из  $S_4$  на 4 попарно не пересекающихся множества:  
 $S_4(1 \rightarrow 1) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\} = \{e, (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 2) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 2\} = \{(1\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 3) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 3\} = \{(1\ 3), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2)\};$   
 $S_4(1 \rightarrow 4) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 4\} = \{(1\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\};$

2. Составим таблицу Кэли для  $H$  (первоначально включаем в нее  $e$ , элементы из  $\{(1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}$  и обратные к ним.

	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)
$e$	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)
(1 4 3)	(1 4 3)	(1 3 4)	$e$	(1 4 2)	(1 4)(2 3)
(1 3 4)	(1 3 4)	$e$	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)
(2 3 4)	(2 3 4)	(1 2 3)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	$e$
(2 4 3)	(2 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 4)	$e$	(2 3 4)

$$(1\ 4\ 3)(2\ 3\ 4) = (1\ 4\ 2); \quad (1\ 4\ 3)(2\ 4\ 3) = (1\ 4)(2\ 3);$$

$$(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4); \quad (1\ 3\ 4)(2\ 4\ 3) = (1\ 3\ 2);$$

$$(2\ 3\ 4)(1\ 4\ 3) = (1\ 2\ 3); \quad (2\ 3\ 4)(1\ 3\ 4) = (1\ 4)(2\ 3);$$

$$(2\ 4\ 3)(1\ 4\ 3) = (1\ 3)(2\ 4); \quad (2\ 4\ 3)(1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 4).$$

Добавляем новые элементы в таблицу вместе с обратными к ним, т.е. добавляем: (1 4 2), (1 2 4), (1 4)(2 3), (1 3)(2 4), (1 3 2), (1 2 3):

	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 4 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)
$e$	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 4 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)
(1 4 3)	(1 4 3)	(1 3 4)	$e$	(1 4 2)	(1 4)(2 3)	(1 2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	(2 4 3)	(1 3 2)	(2 3 4)	(1 2 4)
(1 3 4)	(1 3 4)	$e$	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)	(2 3 4)	(1 2 4)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 4 2)	(1 2 3)
(2 3 4)	(2 3 4)	(1 2 3)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	$e$	(1 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 2)	(1 2 4)	(1 4 3)	(1 3 2)
(2 4 3)	(2 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 4)	$e$	(2 3 4)	(1 4)(2 3)	(1 3 2)	(1 4 3)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(1 2 3)	(1 4 2)
(1 2 4)	(1 2 4)	(2 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 4 2)	$e$	(1 4)(2 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(1 3 2)	(1 4 3)
(1 4 2)	(1 4 2)	(1 2)(3 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 4 3)	$e$	(1 2 4)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 3 4)	(2 4 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 4)(2 3)	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 3)	(1 3 2)	$e$	(1 4 2)	(2 4 3)	(1 3 4)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1 4 2)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(1 3)(2 4)	(2 4 3)	(1 4)(2 3)	$e$	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 2 4)	(2 3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(2 3 4)	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 4 2)	(1 3 2)	(2 4 3)	(1 3 4)	(1 2 4)	$e$	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 4)	(2 4 3)	(1 3 2)	(1 3 4)	(1 4 3)	(1 2 3)	(1 4 2)	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	$e$	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(1 3 2)	(1 4 2)	(1 2 4)	(1 2 3)	(2 3 4)	(1 3 4)	(2 4 3)	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	$e$

Заполняем таблицу. Первая строка заполняется тривиальным образом.

**Вторая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 4\ 3)(1\ 2\ 4) = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 4\ 3)(1\ 4\ 2) = (1\ 3)(2\ 4), \quad (1\ 4\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(3\ 4),$$

$$(1\ 4\ 3)(1\ 3\ 2) = (2\ 4\ 3), \quad (1\ 4\ 3)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 3\ 2), \quad (1\ 4\ 3)(1\ 3)(2\ 4) = (2\ 3\ 4).$$

Добавляем также в таблицу новый элемент (1 2)(3 4) (он обратен самому себе). При этом  $(1\ 4\ 3)(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 2\ 4)$ .

**Третья строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(1\ 3\ 4)(1\ 2\ 4) &= (1\ 2)(3\ 4), & (1\ 3\ 4)(1\ 4\ 2) &= (2\ 3\ 4), & (1\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) &= (1\ 2\ 4), \\(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 2) &= (1\ 4)(2\ 3), & (1\ 3\ 4)(1\ 4)(2\ 3) &= (2\ 4\ 3), & (1\ 3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) &= (1\ 4\ 2), \\(1\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 2\ 3).\end{aligned}$$

**Четвертая строка таблицы Кэли**

$$\begin{aligned}(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 4) &= (1\ 3\ 4), & (2\ 3\ 4)(1\ 4\ 2) &= (1\ 2)(3\ 4), & (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) &= (1\ 3)(2\ 4), \\(2\ 3\ 4)(1\ 3\ 2) &= (1\ 4\ 2), & (2\ 3\ 4)(1\ 4)(2\ 3) &= (1\ 2\ 4), & (2\ 3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) &= (1\ 4\ 3), \\(2\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 3\ 2).\end{aligned}$$

**Пятая строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(2\ 4\ 3)(1\ 2\ 4) &= (1\ 4)(2\ 3), & (2\ 4\ 3)(1\ 4\ 2) &= (1\ 3\ 2), & (2\ 4\ 3)(1\ 2\ 3) &= (1\ 4\ 3), \\(2\ 4\ 3)(1\ 3\ 2) &= (1\ 2)(3\ 4), & (2\ 4\ 3)(1\ 4)(2\ 3) &= (1\ 3\ 4), & (2\ 4\ 3)(1\ 3)(2\ 4) &= (1\ 2\ 3), \\(2\ 4\ 3)(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 4\ 2).\end{aligned}$$

**Шестая строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 4)(1\ 4\ 3) &= (2\ 4\ 3), & (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4) &= (1\ 3)(2\ 4), & (1\ 2\ 4)(2\ 3\ 4) &= (1\ 2\ 3), \\(1\ 2\ 4)(2\ 4\ 3) &= (1\ 2)(3\ 4), & (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4) &= (1\ 4\ 2), & (1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3) &= (1\ 4)(2\ 3), \\(1\ 2\ 4)(1\ 3\ 2) &= (1\ 3\ 4), & (1\ 2\ 4)(1\ 4)(2\ 3) &= (2\ 3\ 4), & (1\ 2\ 4)(1\ 3)(2\ 4) &= (1\ 3\ 2), \\(1\ 2\ 4)(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 4\ 3).\end{aligned}$$

**Седьмая строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(1\ 4\ 2)(1\ 4\ 3) &= (1\ 2)(3\ 4), & (1\ 4\ 2)(1\ 3\ 4) &= (1\ 3\ 2), & (1\ 4\ 2)(2\ 3\ 4) &= (1\ 4)(2\ 3), \\(1\ 4\ 2)(2\ 4\ 3) &= (1\ 4\ 3), & (1\ 4\ 2)(1\ 4\ 2) &= (1\ 2\ 4), & (1\ 4\ 2)(1\ 2\ 3) &= (2\ 3\ 4), \\(1\ 4\ 2)(1\ 3\ 2) &= (1\ 3)(2\ 4), & (1\ 4\ 2)(1\ 4)(2\ 3) &= (1\ 2\ 3), & (1\ 4\ 2)(1\ 3)(2\ 4) &= (1\ 3\ 4), \\(1\ 4\ 2)(1\ 2)(3\ 4) &= (2\ 4\ 3).\end{aligned}$$

**Восьмая строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3)(1\ 4\ 3) &= (1\ 4)(2\ 3), & (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 4) &= (2\ 3\ 4), & (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4) &= (1\ 2)(3\ 4), \\(1\ 2\ 3)(2\ 4\ 3) &= (1\ 2\ 4), & (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4) &= (1\ 3)(2\ 4), & (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 2) &= (1\ 4\ 3), \\(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) &= (1\ 3\ 2), & (1\ 2\ 3)(1\ 4)(2\ 3) &= (1\ 4\ 2), & (1\ 2\ 3)(1\ 3)(2\ 4) &= (2\ 4\ 3), \\(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 3\ 4).\end{aligned}$$

**Девятая строка таблицы Кэли:**

$$\begin{aligned}(1\ 3\ 2)(1\ 4\ 3) &= (1\ 4\ 2), & (1\ 3\ 2)(1\ 3\ 4) &= (1\ 2)(3\ 4), & (1\ 3\ 2)(2\ 3\ 4) &= (1\ 3\ 4), \\(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 3) &= (1\ 3)(2\ 4), & (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 4) &= (2\ 4\ 3), & (1\ 3\ 2)(1\ 4\ 2) &= (1\ 4)(2\ 3),\end{aligned}$$

$$(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 3\ 2)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 4\ 3), \quad (1\ 3\ 2)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2\ 4), \\ (1\ 3\ 2)(1\ 2)(3\ 4) = (2\ 3\ 4).$$

**Десятая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 3) = (2\ 3\ 4), \quad (1\ 4)(2\ 3)(1\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 4)(2\ 3)(2\ 3\ 4) = (1\ 4\ 3), \\ (1\ 4)(2\ 3)(2\ 4\ 3) = (1\ 4\ 2), \quad (1\ 4)(2\ 3)(1\ 2\ 4) = (1\ 3\ 2), \quad (1\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 2) = (2\ 4\ 3), \\ (1\ 4)(2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 3\ 4), \quad (1\ 4)(2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1\ 2\ 4), \quad (1\ 4)(2\ 3)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2)(3\ 4), \\ (1\ 4)(2\ 3)(1\ 2)(3\ 4) = \\ = (1\ 3)(2\ 4).$$

**Одиннадцатая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4\ 3) = (1\ 2\ 4), \quad (1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 4) = (2\ 4\ 3), \quad (1\ 3)(2\ 4)(2\ 3\ 4) = (1\ 3\ 2), \\ (1\ 3)(2\ 4)(2\ 4\ 3) = (1\ 3\ 4), \quad (1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 3), \quad (1\ 3)(2\ 4)(1\ 4\ 2) = (1\ 2\ 3), \\ (1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 4\ 3), \quad (1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 2) = (2\ 3\ 4), \quad (1\ 3)(2\ 4)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 2)(3\ 4), \\ (1\ 3)(2\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = \\ = (1\ 4)(2\ 3).$$

**Двенадцатая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 3) = (1\ 3\ 2), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 4) = (1\ 4\ 2), \quad (1\ 2)(3\ 4)(2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 4), \\ (1\ 2)(3\ 4)(2\ 4\ 3) = (1\ 2\ 3), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 4) = (2\ 3\ 4), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 2) = (1\ 3\ 4), \\ (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 2) = (2\ 4\ 3), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 2) = (1\ 4)(2\ 3), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 3)(2\ 4), \\ (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) = (2\ 3\ 4).$$

Поскольку  $|H| = 12 = |S_4| / 2$ , то  $H$  является нормальной подгруппой и  $\forall \pi \in S_4: \pi H = H\pi$ . При этом  $S_4 / H$  содержит два смежных класса  $H, \sigma H$ , где  $\sigma$  - любая подстановка из  $S_4 / H$ , например,  $\sigma = (1\ 2)$ .

**Ответ:** Множество  $S_4 / H$  содержит два смежных класса:

$$1) H = \{e, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), \\ (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} = (1\ 3\ 4)H = (1\ 4\ 3)H = (2\ 3\ 4)H = (2\ 4\ 3)H = \\ = (1\ 2\ 4)H = (1\ 4\ 2)H = (1\ 2\ 3)H = (1\ 3\ 2)H = (1\ 2)(3\ 4)H = (1\ 3)(2\ 4)H = (1\ 4)(2\ 3)H;$$

$$2) (1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 2)(1\ 3\ 4), (1\ 2)(1\ 4\ 3), (1\ 2)(2\ 3\ 4), (1\ 2)(2\ 4\ 3), (1\ 2)(1\ 2\ 4), \\ (1\ 2)(1\ 4\ 2), (1\ 2)(1\ 2\ 3), (1\ 2)(1\ 3\ 2), (1\ 2)(1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)(1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(1\ 4)(2\ 3)\} = \\ = \{(1\ 2), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (2\ 4), (1\ 4), (2\ 3), (1\ 3), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), \\ (1\ 4\ 2\ 3)\} = (1\ 3\ 4\ 2)H = (1\ 4\ 3\ 2)H = (1\ 2\ 3\ 4)H = (1\ 2\ 4\ 3)H = (2\ 4)H = (1\ 4)H = \\ = (2\ 3)H = (1\ 3)H = (3\ 4)H = (1\ 3\ 2\ 4)H = (1\ 4\ 2\ 3)H.$$