Задание 10.

Линейные преобразования A и B в некотором базисе имеют соответственно матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти жордановы нормальные формы J_A и J_B матриц этих преобразований, а также матрицы перехода S_A и S_B к жорданову базису. Выполнить проверку, используя равенства $S_A J_A = AS_A$ и $S_B J_B = BS_B$.

Решение.

Преобразование A.

Первый этап.

Находим жорданову форму J_A матрицы A преобразования A.

1. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.
2. Составляем характеристический многочлен преобразования A:

$$\Delta_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ -1 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 =$$

$$= (3 - \lambda)^3.$$

3. Находим корни характеристического уравнения $(3 - \lambda)^3 = 0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 3$ алгебраической кратности $n_1 = 3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.
4. Для корня $\lambda_1 = 3$ алгебраической кратности $n_1 = 3$ находим ранги матриц $B = A - \lambda_1 E$, B^2, B^3. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицы B_1, B^2, B^3 к ступенчатому виду

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = O; B^3 = O.$$

Матрицы B^2, B^3 — нулевые. Находим ранги: $r_1 = rgB = 1$, $r_2 = rgB^2 = 0$, $r_3 = rgB^3 = 0$. Значит, $m_1 = 2$, так как $r_2 = r_3$.

5. Определяем количество $k_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 3 - 2 + 0 = 1$ — жордановых клеток 1-го порядка, количество $k_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 1 - 0 + 0 = 1$ — жордановых клеток 2-го порядка. Следовательно, жорданова форма имеет жордановы клетки $J_2(3)$ и $J_1(3)$.
6. Составляем искомую матрицу J_A блочно-диагонального вида, располагая найденные жордановы клетки на главной диагонали

$$J_A = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Жорданова форма матрицы получена.

Второй этап.

Находим матрицу перехода к жорданову базису.

1. Для собственного значения $\lambda_1 = 3$ алгебраической кратности $n_1 = 3$ по жордановой форме J_A определяем наибольший порядок $m_1 = 2$ жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 3$. Составляем матрицу $B = A - \lambda_1 E$.

2. Матрица B была приведена к ступенчатому виду. Модифицированный ступенчатый вид $(B)_{\text{ст}} = (1 \quad -2 \quad -3)^T$ получается удалением нулевых строк.

3. Так как B^2— нулевая матрица, то $S^{(1)} = (B)^T_{\text{ст}} = (1 \quad -2 \quad -3)^T$.

Вычисляем матрицу $BS^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ -14 \end{pmatrix}$,

составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $\left(\frac{(B)_{\text{ст}}}{(BS^{(1)})^T}\right)x = o$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ \hline -14 & 14 & -14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную: $x_1 =- 5x_3, x_2 =- 4x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем ненулевое решение $\varphi_1 = (-5 \quad -4 \quad 1)^T$, которое образует фундаментальную систему. Значит, фундаментальная матрица состоит из одного столбца $\phi_1 = (-5 \quad -4 \quad 1)^T$.

Составляем матрицу $S^{(0)} = (BS^{(1)}|\phi_1) = \left(\begin{array}{c|c} -14 & -5 \\ 14 & -4 \\ -14 & 1 \end{array}\right)$.

Из столбцов матриц $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ составляем искомую матрицу $S^{(A)}$:

$$S^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} -14 & -5 \\ 14 & -4 \\ -14 & 1 \end{array}\right), S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{(A)} = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -5 \\ 14 & -2 & -4 \\ -14 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

записывая сначала первые столбцы матриц $S^{(0)}$, $S^{(1)}$, а затем второй столбец матрицы $S^{(0)}$. Матрица перехода к жорданову базису найдена. Выполняем проверку. Вычисляем:

$$S_A J_A = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -5 \\ 14 & -2 & -4 \\ -14 & -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -42 & -11 & -15 \\ 42 & 8 & -12 \\ -42 & -23 & 3 \end{pmatrix},$$

$$AS_A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 & 1 & -5 \\ 14 & -2 & -4 \\ -14 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 & -11 & -15 \\ 42 & 8 & -12 \\ -42 & -23 & 3 \end{pmatrix},$$

Равенство $S_A J_A = AS_A$ выполняется.

Преобразование B.

Первый этап.

Находим жорданову форму J_B матрицы B преобразования B.

1. Первый шаг алгоритма не нужен, так как матрица преобразования задана.
2. Составляем характеристический многочлен преобразования B:

$$\Delta_B(\lambda) = det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ -5 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

3. Находим корни характеристического уравнения $-\lambda^3 = 0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 0$ алгебраической кратности $n_1 = 1$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.
4. Для корня $\lambda_1 = 0$ кратности $n_1 = 1$ находим ранг матрицы $C = B - \lambda_1 E$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу C к ступенчатому виду

$$C = B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r_1 = rg(B - \lambda_1 E) = 2$. Тогда геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$ равна единице ($n - r_1 = 1$). Это наименьшее значение геометрической кратности. Поэтому можем воспользоваться упрощенной процедурой приведения к каноническому виду. Собственному значению $\lambda_1 = 0$ соответствует жорданова клетка третьего порядка $J_3(0)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_B совпадает с этой клеткой

$$J_B = J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим столбцы матрицы S перехода к жорданову базису. Составляем расширенную матрицу однородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1 = o$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B - \lambda_1 E|o) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = - x_3, x_2 = x_3$. При $x_3 = 1$ получаем ненулевое решение $s_1 = (-1 \quad 1 \quad 1)^T$ — собственный вектор матрицы B. Составляем расширенную матрицу однородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1^{(2)} = s_1$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B - \lambda_1 E|s_1^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = - x_3 + 1, x_2 = x_3 - 2$. При $x_3 = 0$ получаем $s_1^{(1)} = (1 \quad -2 \quad 0)^T$ — присоединенный вектор первого порядка. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B - \lambda_1 E)s_1^{(2)} = s_1^{(1)}$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B - \lambda_1 E)s_1^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -5 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = - x_3 - 3, x_2 = x_3 + 5$. При $x_3 = 0$ получаем $s_1^{(2)} = (-3 \quad 5 \quad 0)^T$ — присоединенный вектор второго порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу

$$S_B = (s_1 \quad s_1^{(1)} \quad s_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку жорданова форма данной матрицы B определяется однозначно (она состоит из одной жордановой клетки), то можно проверить равенство $S_B J_B = BS_B$, равносильное преобразованию $J_B = S^{-1}BS$ подобия. Вычисляем

$$S_B J_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BS_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство $S_B J_B = BS_B$ выполняется.

Ответ: а) для преобразования A: $J_A = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$, $S = \begin{pmatrix} -14 & 1 & -5 \\ 14 & -2 & -4 \\ -14 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) для преобразования B: $J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.