Задание 7.

Дано отображение $A: P_1 \to P_2$ пространства P_1 многочленов не выше первой степени с действительными коэффициентами в пространстве P_2 многочленов не выше второй степени. Для отображения

$$A(p(x)) = 6\int_0^x p(t)dt - x^2 p'(x)$$

a) выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным, обратимым;
b) доказать линейность;
c) найти ядро, образ, дефект, ранг;
d) составить матрицу отображения относительно стандартных базисов.

Решение.

Выполняем п. а) задания. Находим образ произвольного элемента $p(x) = ax + b$ пространства P_1:

$$A(ax + b) = 6\int_0^x (at + b)dt - x^2(ax + b)' = 2ax^2 + 6bx.$$

Если образы двучленов $p(x) = ax + b$ и $\tilde{p}(x) = \tilde{a}x + \tilde{b}$ совпадают, то имеем

$$A(ax + b) = A(\tilde{a}x + \tilde{b}) \Rightarrow 2ax^2 + 6bx \equiv 2\tilde{a}x^2 + 6\tilde{b}x.$$

Из последнего тождества получаем $a = \tilde{a}$ и $b = \tilde{b}$. Следовательно, из совпадения образов следует равенство прообразов. Значит, отображение инъективное.

Выясним, является ли отображение сюръективным. Можно ли любой многочлен из P^2 представить как образ $p(x) = ax + b$? Очевидно, нет. Например, постоянный многочлен $p_0(x) \equiv 1$ не имеет прообраза. Действительно, тождественное равенство многочленов $1 \equiv 2ax + 6bx$ невозможно. Следовательно, отображение не является сюръективным. Тогда оно не является биективным и обратимым.

Выполняем п. b) задания. Отображение A является линейным по свойствам операций интегрирования и дифференцирования.

Выполняем п. c) задания. Стандартные базисы в пространствах P_1 и P_2 — это многочлены $1, x$ и $1, x, x^2$ соответственно. Находим образ базисного многочлена из P_1, разлагаем его по базису в P_2 и записываем координаты в столбец. Для первого элемента базиса (т. е. для $p(x) \equiv 1$) имеем

$$A(1) = 6\int_0^x 1dt - 1^2 \cdot 0 = 6x.$$

Разлагаем по базису $6x = 0 \cdot 1 + 6 \cdot x + 0 \cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(0 \quad 6 \quad 0)^T$. Для второго элемента базиса (т. е. для $p(x) = x$) аналогично находим образ

$$A(x) = 6\int_0^x tdt - x^2 = 6 \cdot \frac{x^2}{2} - x^2 = 2x^2,$$

разлагаем по базису $2x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2$ и записываем координаты в столбец $(0 \quad 0 \quad 2)^T$. Из найденных координатных столбцов составляем матрицу отображения

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выполняем п. d) задания. Находим все многочлены, отображающиеся в нулевой многочлен $o(x) \equiv 0$. Приравниваем образ произвольного многочлена $p(x) = ax + b$ нулевому: $2ax^2 + 6bx \equiv 0$. Отсюда следует, что $a = b = 0$. Значит, в нулевой многочлен отображается только нулевой многочлен. Поэтому ядро состоит из одного нулевого многочлена $KerA = \{o(x)\}$ и дефект $d = dim(KerA) = 0$. Теперь находим образ lmA. Из равенства

$$A(ax + b) = 2ax^2 + 6bx = a(2x^2) + b(6x)$$

следует, что образ любого многочлена является линейной комбинацией двух многочленов $2x^2$ и $6x$. Значит, образ отображения есть линейная оболочка этих двух многочленов, т. е. $ImA = Lin(6x, 2x^2)$. Так как указанные многочлены линейно независимые, то ранг $r = dim(ImA) = 2$. Действительно, ранг отображения равен рангу его матрицы, т. е. $dim(ImA) = 2 = rgA$, а сумма размерностей ядра и образа равна размерности пространства прообразов: $dim(KerA) + dim(ImA) = 0 + 2 = 2 = dimP_1$.

Ответ: Отображение A: a) является инъективным, не является сюръективным, биективным, обратимым;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $KerA = \{o(x\}, d = 0$; $ImA = Lin(6x, 2x^2), r = 2$.