Université Moulay Ismaïl
Ecole Normale Supérieure
Département des Sciences

Filière : Licence d'éducation : Mathématiques

Module : Topologie

==

Espaces métriques

==

Résponsable : Pr. M. AIT KHELLOU

Notes de cours

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble quelconque. On appelle distance (ou métrique) sur E toute application d définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les propriétés suivantes :*
(d_1) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Séparation) ;*
(d_2) $\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) = d(y,x)$ *(Symétrie) ;*
(d_3) $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(Inégalité triangulaire).*
L'ensemble E muni de cette distance est appelé espace métrique noté (E,d). Parfois on remplace l'axiome (d_3) par (d_3') : $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$.
Un ensemble vérifiant (d_1), (d_2) et (d_3') est appelé espace ultra-métrique.

Remarque 1.1.2. Tout espace ultra-métrique est un espace métrique.

Exemples 1.1.3.
1. L'application définie par $d(x,y) = |x-y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. L'application définie par $d(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ est une distance sur $\mathbb{R}^*$.
3. L'application définie sur $E \times E$ par $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y\,; \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$ est une distance sur E appelée la distance discrète et (E,d) est un espace métrique discret.
4. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les distances usuelles d_1, d_2 et d_∞ en posant pour $x =$

$(x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \\ d_2(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(distance euclidienne);} \\ d_\infty(x,y) &= \sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \qquad \text{(distance infini).} \end{aligned}$$

Exercice. Vérifier que les applications précédentes d_1, d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.1.4. Soit (E,d) un espace métrique.
1. Pour tout $x, y, z \in E$, on a $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$;
2. Pour tout $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$, on a $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.

Preuve.
1. On a $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$ et $d(z,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$, d'où $d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$ et $d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y)$.
Par conséquent, $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$.
2. Notons par I_n l'inégalité à montrer. Il est clair que I_2 est vraie. Supposons que I_n est vraie, i.e. que l'on a $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.
Par l'inégalité triangulaire, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$, d'où :

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}).$$

Donc I_{n+1} est vraie. Par conséquent, I_n est vraie pour tout $n \geq 2$.

Proposition 1.1.5. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :
1. $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.
2. $\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ **(Inégalité de Minkowski)**.

Preuve. 1. Déjà fait.
2. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \end{aligned}$$

1.1.2 Isométrie et transport de distances

Définition 1.1.6. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$ une bijection. On dit que f est une isométrie si : pour tout $x, y \in E$ on a : $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.*
Dans ce cas, on dit que E et E' sont isométriques.

Remarque 1.1.7. Si f est une isométrie de E dans E' alors f^{-1} est aussi une isométrie de E' dans E

Maintenant, soit (E, d) un espace métrique, E' un ensemble quelconque et $f : E \longrightarrow E'$ une bijection.
Soit

$$\begin{array}{rccl} d' : & E' \times E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x', y') & \longmapsto & d'(x', y') = d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) \end{array}$$

Alors d' est une distance sur E'. On dit qu'on a transporté la structure métrique de (E, d) à E' de sorte que (E', d') devient un espace métrique isométrique à (E, d).

1.1.3 Boules, sphères

Définition 1.1.8. *Soient $(E, d), a \in E$ fixe et $r > 0$.*
1. La partie $S(a, r) = \{x \in E : d(a, x) = r\}$ est appelée sphère de centre a et de rayon r.
2. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r la partie de E notée $B(a, r)$ et définie par : $B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}$.
3. On appelle boule fermée de centre a et de rayon r la partie de E notée $B'(a, r)$ (ou $B_f(a, r)$) et définie par : $B'(a, r) = B_f(a, r) = \{x \in E : d(a, x) \leq r\}$.

Exemples 1.1.9.
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique et on a :
$B(a, r) =]a - r, a + r[, \quad B_f(a, r) = [a - r, a + r], \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.
2. Dans le cas discret (E, d), on a :
- $B\left(a, \frac{1}{2}\right) = \{a\} = B_f\left(a, \frac{1}{2}\right)$;
- $B(a, 2) = E = B_f(a, 2)$;
- $S\left(a, \frac{1}{2}\right) = \varnothing,\ S(a, 2) = \varnothing,\ S(a, 1) = E\backslash\{a\}$.

Remarques 1.1.10.
1. $B(a, r) \subset B_f(a, r)$ et $S(a, r) \subset B_f(a, r)$;
2. $B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$;
3. $B(a, r) \neq \varnothing$ et $B_f(a, r) \neq \varnothing$;
4. Si $r < r'$, alors $B(a, r) \subset B(a, r')$.

1.1.4 Distance entre deux ensembles, diamètre

Définition 1.1.11. *Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d). La distance de A à B est définie par :*

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Si $A = \{a\}$, alors : $d(a, B) = \inf\{d(a, b)/b \in B\} = \inf_{b \in B} d(a, b)$.

Remarque 1.1.12. Si $A \cap B \neq \varnothing$ alors $d(A, B) = 0$ et $d(A, B) = 0 \nRightarrow A = B$. Ceci montre qu'on ne peut pas avoir de distances sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.13. *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. On appelle diamètre de A, le réel positif $\delta(A)$ définie par :*
$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} = \sup_{(x,y) \in A \times A} d(x, y)$.
Si $\delta(A)$ est fini, on dit que A est bornée.

Propriétés 1.1.14.
1. Si A est telle que $\delta(A) = 0$, alors A est un singleton ;
2. Si $A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$;
3. $\delta(B(a, r)) \leq 2r$;
4. $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

Preuve. 1. et 2. sont évidentes.
3. Soit $x, y \in B(a, r)$. On a $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$, donc $\delta(B(a, r)) \leq 2r$. Notons qu'en général on a $\delta(B(a, r)) \neq 2r$, dans le cas discret, on a $\delta\left(B\left(a, \frac{1}{2}\right)\right) = 0 < 2 \times \frac{1}{2}$, et $\delta(B(a, 2)) = 1 < 4$.
4. Soient $a \in A$, $b \in B$ fixés et $x, y \in A \cup B$.
- Si $x, y \in A$, alors $d(x, y) \leq \delta(A)$
- Si $x, y \in B$, alors $d(x, y) \leq \delta(B)$
- Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \delta(A) + d(a, b) + \delta(B)$.

Alors $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

1.1.5 Distance définie par une norme

Définition 1.1.15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*
1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$ (Séparation) ;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (Condition d'homogénéité) ;
3. $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).
$N(x)$ la norme de x est souvent notée $\|x\|_E$ ou $\|x\|$. L'espace E muni de cette norme est appelée espace vectoriel normé (e.v.n). On le note $(E, \|\|)$.
On définit sur $E \times E$ l'application, notée d, par : $d(x, y) = \|x - y\|$. d est une distance associée à la norme $\|x\|$, cette distance est invariante par translation.

$$d(x, y) = d(x + a, y + a), \forall a \in E.$$

Exemples 1.1.16.

1. On peut munir l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par les normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ en posant pour chaque élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Norme euclidienne);}$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i| \quad \text{(Norme sup ou infini).}$$

2. Dans $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a :
$\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt$ est une norme sur E et $d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$ est une distance sur E.

Remarque 1.1.17. A partir de toute norme on peut construire une distance, on peut également obtenir des distances en fonction d'autres distances : Par exemple, si (E, d) est un espace métrique, alors :
- $d' = \ln(1 + d)$ est une distance sur E;
- $d'' = \frac{d}{1+d}$ est une distance sur E.

1.1.6 Topologie associée à une distance

Définition 1.1.18. *Soit (E, d) un espace métrique.*
1. On dit qu'une partie θ de E est ouverte si elle est vide ou si pour tout $a \in \theta$, il existe une boule ouverte de centre a contenue dans θ. C' est-à-dire, θ est un ouvert si, et seulement si, $\theta = \emptyset$ ou $\forall a \in \theta, \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \theta$.
2. On dit qu'une partie F de E est fermée si son complémentaire $\complement_E^F$ est un ouvert dans E. On note $\mathcal{T}_d$ l'ensemble des ouverts de (E, d). C.à.d :

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset E / U \ \textit{ est un ouvert de } E\}.$$

Proposition 1.1.19. Soit (E, d) un espace métrique. La famille $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur E. On l'appelle la topologie métrique de (E, d) ou la topologie associée à la distance d.

Preuve.
(O_1) Par définition de $\mathcal{T}_d$, on voit que $\varnothing \in \mathcal{T}_d$ et que $E \in \mathcal{T}_d$.
(O_2) Montrons que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Soient $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_d$ et $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Or U_{i_0} est un ouvert de E, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0}$. D'où $B(x, r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
(O_3) Montrons que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Soient $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) une famille finie d'éléments de $\mathcal{T}_d$ et $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. On a $x \in U_i, \ i =$

$1, \ldots, n$ et U_i est un ouvert donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i,\ i = 1, \ldots, n$. Soit $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Alors $B(x,r) \subset B(x, r_i),\ i = 1, \ldots, n$, et donc $B(x,r) \subset U_i,\ i = 1, \ldots, n$. Par conséquent $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.
On conclut que $\mathcal{T}_d$ est une topologie sur E.

Remarque 1.1.20. Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ O_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un ouvert mais $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} O_i = \{0\}$ qui n'est pas ouvert.

Proposition 1.1.21. Soit (E,d) un espace métrique.
1. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $B(x,r)$ est un ouvert de E;
2. Pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $B_f(x,r)$ est un fermé de E.

Preuve.
1. Soit $y \in B(x,r)$. Posons $\rho = r - d(y,x) > 0$ et montrons que $B(y,\rho) \subset B(x,r)$. Soit $z \in B(\rho, y)$ donc $d(z,y) < \rho$. On a : $d(x,z) \leq d(z,y) + d(y,x) < \rho + d(y,x) = r$ ce qui implique que $z \in B(x,r)$.
2. On montre que $B_f(x,r)^c$ est un ouvert. Si $y \in B_f(x,r)^c$, alors $d(y,x) > r$. Prenons $\eta = d(y,x) - r > 0$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$z \in B(y,\eta) \Longrightarrow d(z,x) \geq d(y,x) - d(z,y) > d(y,x) - \eta = r \Longrightarrow z \in B_f(x,r)^c$$

donc $B(y,\eta) \subset B(x,r)^c$. Ainsi, $B_f(x,r)^c$ est ouvert et par suite $B_f(x,r)$ est fermé dans E.

Proposition 1.1.22. Tout espace métrique (E,d) est séparé (ou de **Hausdorff**).

Preuve. Soient (E,d) un espace métrique et $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Alors $\rho = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. On pose $U = B(x,\rho)$ et $V = B(y,\rho)$. Supposons que $z \in U \cap V$. On a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \rho + \rho = d(x,y).$$

Ceci est une contradiction. Donc $U \cap V = \emptyset$ et E est séparé.

Remarques 1.1.23.
1. Dans un espace métrique, tout point x possède un s.f.v dénombrable (1^{ere} axiome de dénombrabilité). ($\mathcal{F}(x) = \left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right) / n \in \mathbb{N}^*\right\}$).
2. Dans un espace métrique (E,d), la famille : $\mathcal{B} = \{B(x,r)/\ x \in E, r > 0\}$ est une base d'ouverts de E.

1.1.7 Comparaison des distances

Définition 1.1.24. *Deux distances d_1 et d_2 définies sur un ensemble E sont dites topologiquement équivalentes, si elles possèdent les mêmes ouverts ; c'est-à-dire, si $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.*

Définition 1.1.25. *Deux distances d_1 et d_2 définies sur un ensemble E sont dites équivalentes si et seulement si il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y), \quad \forall x, y \in E.$$

Proposition 1.1.26. Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur l'ensemble E. Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes sur E.

Preuve. Supposons que d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur l'ensemble E. Alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 d_1 \leq d_2 \leq C_2 d_1.$$

Il en découle alors que pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, on a :

$$B_{d_2}(a, rC_1) \subset B_{d_1}(a,r) \text{ et } B_{d_1}(a, \frac{r}{C_2}) \subset B_{d_2}(a,r).$$

Les deux inclusions ci-dessus prouvent que tout ouvert dans $(E, \mathcal{T}_{d_1})$ est aussi un ouvert dans $(E, \mathcal{T}_{d_2})$ et vice-versa. Les deux topologies $\mathcal{T}_{d_1}$ et $\mathcal{T}_{d_2}$ sont donc identiques.

1.1.8 Distances produits

Soient $(E_i, d_i), 1 \leq i \leq n$ des espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. On définit $D_1, D_2, D_\infty : E \times E \to \mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{aligned} D_1(x,y) &= \textstyle\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \\ D_2(x,y) &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ D_\infty(x,y) &= \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i). \end{aligned}$$

Alors D_1, D_2, D_∞ sont des distances sur le produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Elles sont toutes équivalentes. En effet, nous avons

$$D_\infty \leq D_1 \leq \sqrt{n} D_2 \leq n D_\infty.$$

Par suite, toutes ces distances définissent la même topologie sur E notée $\mathcal{T}_P$. C'est la topologie produit et toute distance D sur E définissant $\mathcal{T}_P$ est appelée une distance produit sur l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

1.1.9 Distances induites et sous-espaces métriques

Proposition 1.1.27. Soit $A \subset E$ une partie d'un espace métrique (E,d). Soit d_A la restriction de d sur $A \times A$. Alors (A, d_A) est un espace métrique et $\mathcal{T}_A$ est la topologie métrique de d_A.

Preuve. On utilise le fait (à vérifier) que nous avons $B_{d_A}(x,r) = B_d(x,r) \cap A$. Le couple (A, d_A) est appelé un sous-espace métrique de l'espace métrique (E,d).

1.1.10 Espaces topologiques métrisables

Définition 1.1.28. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est métrisable si et seulement si il existe une distance d sur E telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Ainsi une topologie $\mathcal{T}$ sur E est dite métrisable si et seulement si $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie associée à une distance d sur E.*

Remarque 1.1.29. - Tout espace topologique métrisable est séparé.
- Il existe des espaces topologiques qui ne sont pas métrisables.

1.1.11 Continuité entre espaces métriques

Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.

Proposition 1.1.30. Soit $a \in E$. Alors f est continue au point a si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in E, \quad d(x, a) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(a)) < \epsilon$.
L'énoncé [$\forall x \in E, \quad d(x, a) < \eta \Longrightarrow \delta(f(x), f(a)) < \epsilon$] signifie que $f\left(B_d(a, \eta)\right) \subset B_\delta(f(a), \epsilon)$.

Proposition 1.1.31. Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Alors f est continue au point $a \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E qui converge vers a, la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E qui converge vers a.
Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in E$, si $d(x, a) < \eta$, alors $\delta(f(x), f(a)) < \epsilon$.
Comme la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers a, on peut trouver un entier N_η dans $\mathbb{N}$ tel que $d\left(x_n, a\right) < \eta$ pour tout entier $n \geq N_\eta$.
Par suite, pour tout entier $n \geq N_\eta$, on a $\delta\left(f\left(x_n\right), f(a)\right) < \epsilon$. Ce qui prouve que la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.
($\Leftarrow$) Sinon, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout nombre $\eta > 0$, $\exists x_\eta \in E$, tel que $d\left(x_\eta, a\right) < \eta$ mais $\delta\left(f\left(x_\eta\right), f(a)\right) \geq \epsilon_0$.
En prenant $\eta_n = \frac{1}{1+n}$ et $u_n = x_{\eta_n}$, pour tout entier naturel n, on obtient une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, telle que $d\left(u_n, a\right) < \frac{1}{1+n}$, et $\delta\left(f\left(u_n\right), f(a)\right) \geq \epsilon_0$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$. C.à.d que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers a mais la suite $\left(f\left(u_n\right)\right)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers $f(a)$. Contradiction.

1.1.12 Applications uniformément continues

Définition 1.1.32. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est uniformément continue sur E si, et seulement si, on a :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d(x, y) < \eta \Longrightarrow \delta(fx), f(y)) < \epsilon.$$

Remarque 1.1.33. Toute application uniformément continue est continue. Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple : Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, on considère $A = [0, +\infty[$ et $f(x) = x^2 \quad \forall x \in A$. f est simplement continue en tout point de A mais n'est pas uniformément continue : Pour $\varepsilon = 1$, soient $x = \frac{1}{\eta}$ et $y = \eta + \frac{1}{\eta}$ avec $\eta > 0$. On a $|x - y| = \eta$ mais $|x^2 - y^2| = 2 + \eta^2 > 1$.

Définition 1.1.34. *Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Soit $k \geq 0$ une constante. On dit que f est Lipschitzienne de rapport k (sur E) si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \quad \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Si $0 < k < 1$, f est appelé une contraction.

Exemples 1.1.35.
1. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ (de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) est Lipschitzienne de rapport 1. En effet Par le théorème des accroissements finis, on l'inégalité suivante :

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et A une partie non vide de E. Alors les applications $x \mapsto d(a, x)$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont Lipschitziennes de rapport 1 sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Remarques 1.1.36.
1. Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue.
2. Toute isométrie $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est uniformément continue.

On peut utiliser les suites pour caractériser la continuité uniforme.

Proposition 1.1.37. Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Alors f est uniformément continue sur E si et seulement si pour tout couple de suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ de points de E vérifiant $\lim_{n \to +\infty} d(a_n, b_n) = 0$, la suite $(\delta(f(a_n), f(b_n)))_{n \geq 0}$ converge vers 0 .

Preuve. $(\Rightarrow)$ Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de E telles que $\lim_{n \to +\infty} d(a_n, b_n) = 0$. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, tel que, pour tous $x, y \in E$, on a : $d(x, y) < \eta$ implique $\delta(f(x), f(y)) < \epsilon$. D'autre part, il existe un entier N_η tel que : $n \geq N_\eta \Rightarrow d(a_n, b_n) < \eta$. Alors $\delta(f(a_n), f(b_n)) < \epsilon$, $\forall n \geq N_\eta$. Par suite $\lim_{n \to +\infty} \delta(f(a_n), f(b_n)) = 0$.
$(\Leftarrow)$ Sinon, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour tout nombre $\eta > 0$, il existe un couple $(x_\eta, y_\eta) \in E \times E$, tel que $d(x_\eta, y_\eta) < \eta$ mais $\delta((f(x_\eta), f(y_\eta))) \geq \epsilon_0$.
En prenant $\eta = \eta_n := \frac{1}{1+n}$, et $(a_n, b_n) = (x_{\eta_n}, y_{\eta_n})$, pour tout entier naturel n, on obtient deux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ de points de E, telles que $d(a_n, b_n) < \frac{1}{1+n}$, et $\delta(f(a_n), f(b_n)) \geq \epsilon_0$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Contradiction.

Exemple 1.1.38. L'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^*$. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = \frac{1}{n+2}$.
On a $|a_n - b_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} |a_n - b_n| = 0$.
Mais $|f(a_n) - f(b_n)| = n + 2 - (n + 1) = 1$ qui ne tend pas vers 0.

1.1.13 Convergence uniforme

Définition 1.1.39. *Soient E, F deux espaces topologiques et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de E vers F. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to F$ si, pour tout point $x \in E$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$ dans F. Dans ce cas, on écrit alors $f_n \xrightarrow{s} f$.*
On dit aussi que $(f_n)_n$ converge point par point vers f.
La limite (simple) d'une suite de fonctions continues qui est convergente point par point n'est pas forcément continue.
On rappelle que dans le cas des espaces métriques, la convergence point par point de la suite $(f_n)_n$ vers f s'écrit

$$\forall x \in E,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N_{\epsilon,x},\ \forall n \geq N_{\epsilon,x},\ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Définition 1.1.40. *Soient E un espace topologique (F, d) un espace métrique. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de E vers F et $f : E \to F$ une fonction. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur E, si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon,\ \forall x \in E,\ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Ce qui est équivalent à

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \sup_{x\in E} d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

On écrit alors $f_n \xrightarrow{u} f$.

Théorème 1.1.41. *Soient E un espace topologique et (F, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications continues sur E à valeurs dans F. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur E, alors f est continue sur E.*

Preuve. Soient $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme $f_n \xrightarrow{u} f$, il existe un n_0 tel que pour tout $x \in E$, on a $d(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$.
Par continuité de f_{n_0}, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f_{n_0}(V) \subset B_d(f_{n_0}(a), \varepsilon/3)$.
Donc, pour tout $x \in V$, on a $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon/3$.
En particulier, pour tout $x \in V$, on a :

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon.$$

Ceci montre qu'on a trouvé pour $\varepsilon > 0$ un voisinage V de a tel que $f(V) \subset B_d(f(a), \epsilon)$. Par suite, f est continue en a. Ce qui prouve que f est continue sur E.

Exemple 1.1.42. Soit $E := [0,1]$ et $X = \mathbb{R}$. E est muni de la topologie induite et $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle. Pour chaque entier $n \geq 1$, posons $f_n(t) := t^n$, pour tout $t \in [0,1]$. Alors, on a La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f définie par $f(1) = 1$ et $f(t) = 0$, pour tout $t \in [0,1[$. Cette fonction est discontinue. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

1.2 Espaces métriques complets

Dans ce chapitre (E,d) est un espace métrique.

1.2.1 Suites de Cauchy

Définition 1.2.1. *Une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de E est dite bornée s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tels que $d(a,x_n) \leq r,\ \forall n \geq 0$. C.à.d l'ensemble $X_0 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné.*
Noter que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de E, on a $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée $\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble $X_m = \{x_n : n \geq m\}$ est borné.

Définition 1.2.2. *Soit (E,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est dite de **Cauchy**, si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geq N_\varepsilon,\ d(x_n,x_m) \leq \varepsilon.$$

*Il est facile de voir que les suites de **Cauchy** restent suites de **Cauchy** si on remplace la distance d par une distance équivalente.*

Proposition 1.2.3. Soit (E,d) un espace métrique. Alors :
1. Toute suite de **Cauchy** dans E est bornée.
2. Toute suite convergente dans E est de **Cauchy**.
3. Tout suite de **Cauchy** qui possède une sous-suite convergente est convergente.

Preuve. 1. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un entier $N_1 \geq 1$ tel que :

$$n,m \geq N_1 \Rightarrow d(x_n,x_m) \leq 1$$

Posons $a = x_{N_1}$. On obtient alors : $X_{N_1} \subset B_f(a,1)$.
Ainsi l'ensemble X_{N_1} est borné. Ce qui implique que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
2. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2},\ \forall n \geq N$. Alors quand $n,m \geq N$, on a

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Par conséquent, $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de **Cauchy** dans E.
3. Supposons que $x_{n_k} \to x$ et soit $\epsilon > 0$. On choisit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{n_k},x) <$

$\epsilon/2$ pour $n_k \geq N_1$, et on choisit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ quand $m, n \geq N_2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ et soit $n \geq N$. On choisit $n_k \geq N$. Comme $n_k \geq N_1$ et $n, n_k \geq N_2$, alors

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Remarque 1.2.4. - Les réciproques de (1) et (2) sont évidement fausses. En effet :
(1) Si $E =]0, 1[$, la suite $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une suite de **Cauchy** dans E dont la limite est égale à 0 qui n'est pas dans E.
(2) Si $E = \mathbb{R}$, la suite $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite bornée dans E mais n'est pas de **Cauchy**.

1.2.2 Complétude

La condition de Cauchy pour une suite ne suffit pas pour assurer sa convergence. D'où le besoin d'introduire le concept de complétude.

Définition 1.2.5. *Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.*
*Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet ou espace de **Banach** si l'espace métrique (E, d) est complet pour la distance d associée à $\|.\|$. (On rappelle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in E$).*

Exemple 1.2.6.
1. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels muni de sa distance usuelle n'est pas complet : La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = E\left(2^n\sqrt{2}\right)/2^n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
En effet, on a $\left(2^n\sqrt{2} - 1\right)/2^n < x_n \leq \sqrt{2}$, d'où $x_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Tout espace métrique discret (E, d) est complet. En effet, si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans E, alors, on a $d(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow x_n = x_m$ donc $(x_n)_{n\geq 0} = x_1, x_2, ..., x_N, x, x, ...$ Par suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Remarque 1.2.7. La notion de complétude dépend de la distance. Il est donc important de préciser la distance que l'on prend quand on parle d'espace complet.

1.2.3 Relation entre complétude et fermeture

Définition 1.2.8. *Soient (E, d) un espace métrique et A un sous-ensemble non vide de E. On dit que A est complet si l'espace métrique (A, d_A) est complet où d_A est la restriction de la distance d à $A \times A$.*

Proposition 1.2.9. Soit (E, d) un espace métrique. Soit A un sous-ensemble non vide de E.
(i) Si A est complet alors A est un fermé de E.
(ii) Si E est complet et A est fermé dans (E, d), alors A est complet.

Preuve. (i) Soit $a \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers a (dans (E, d)). Par suite, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet (A, d_A) donc converge dans A vers un point $x \in A$. Par unicité de la limite dans (E, d), on déduit que $a = x \in A$. D'où $\overline{A} \subset A$, c.à.d A est fermé dans (E, d).
(ii) Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans (A, d_A). Alors elle est de Cauchy dans l'espace métrique complet (E, d) donc $x_n \to x \in E$. Il s'ensuit que $x \in \overline{A} = A$ et $(x_n)_n$ converge dans (A, d_A) vers $x \in A$. Ceci implique que A est complet.

Corollaire 1.2.10. Soient (E, d) un espace métrique complet et A un sous-ensemble non vide de E Alors, A est complet $\Longleftrightarrow$ A fermé dans E.

Exemple 1.2.11. 1. $]a, b[,]a, \infty[$ et $]-\infty, b[$ ne sont pas complets dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. $[a, b], [a, \infty[$ et $]-\infty, b]$ sont complets dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
3. L'espace $(\mathcal{B}(D, \mathbb{R}), d_\infty)$ des fonction réelles bornées sur le domaine D, avec la métrique d_∞, est complet.

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

1.2.4 Théorème de G. Cantor

Le résultat suivant (dit Théorème de G. Cantor) est important (en pratique) et caractérise la complétude d'un espace métrique.

Théorème 1.2.12. ***(Caractérisation d'un espace complet)***
Un espace métrique (E, d) est complet si et seulement si pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de E vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, on a : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton. (Autrement dit, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ et elle est réduite à un seul élément).

Preuve. Supposons que (E, d) est complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in F_n$. Ainsi, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E.
- Montrons que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow \operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon.$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq N$, on a $x_n, x_m \in F_N$, car la suite des F_n est décroissante. Donc $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Par conséquent, la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (E, d) qui est complet donc converge vers un point $x \in E$.

- Montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.
Puisque les F_n sont fermés, alors $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Si $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors $d(x,y) \leq \operatorname{diam}(F_n)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Or $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ donc $x = y$.
Réciproquement. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (E,d). Pour tout entier naturel n, posons $F_n = \overline{X_n}$ où $X_n = \{x_k,\ k \geq n\}$. Alors chaque F_n est fermé dans (E,d) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n+1} \subset F_n$. Donc la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n, m \geq N,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tous entiers $n, m \geq N$, on a $\operatorname{diam}(F_n) = \operatorname{diam}(X_n) \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. par conséquent, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Mais pour $n \geq 0,\ d(x, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_n) \to 0$. Donc $x_n \to x$ d'où l'espace métrique (E,d) est complet.

1.2.5 Complétude des produits d'espaces métriques

Soient $(E_1,d_1), (E_2,d_2) \ldots, (E_m,d_m)$ des espaces métriques ($m \geq 2$). Notons $E = \prod_{i=1}^m E_i$ et munissons E d'une distance produit. Par exemple, prenons la distance D_∞ définie pour tous $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ dans E, par $D_\infty(x,y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq m\}$.

Proposition 1.2.13. L'espace produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ est complet si et seulement si l'espace (E_k, d_k) est complet pour tout $k \in \{1, 2, \ldots m\}$.

Preuve. $\Longleftarrow$ / Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), une suite de Cauchy dans l'espace produit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ muni de la distance D_∞.
Soient $k \in \{1, 2, \ldots m\}$ et $p,\ q \in \mathbb{N}$. On a $d_k(x_k^p, x_k^q) \leq D_\infty(x^p, x^q)$. Par conséquent, la suite $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace E_k qui est complet, alors cette suite converge vers $l_k \in E_k$. Ce qui implique que la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (E, D_∞) vers $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$. Alors l'espace produit (E, D_∞) est complet.
$\Longrightarrow$ / Supposons que l'espace produit (E, D_∞) est complet. Soit $k \in \{1, 2, \ldots m\}$ fixé. Choisissons $y_j \in E_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots m\}$ avec $j \neq k$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace E_k et considérons la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $x^n = \Big(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, \overset{\text{position k}}{u_n}, y_{k+1}, \ldots, y_m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $d_k(u_p, u_q) = D_\infty(x^p, x^q)$, alors la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, D_∞) qui est complet donc cette suite converge dans E. Cela implique que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E_k. Ainsi, chaque espace (E_k, d_k) est complet.

Exemple 1.2.14. $\mathbb{R}^n,\ \mathbb{C}^n$ munis de leurs normes produits sont complets.

1.2.6 Théorème du point fixe

Définition 1.2.15. *Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$ une application.*
Un point fixe de f est une solution dans E de l'équation $f(x) = x$.

Définition 1.2.16. *Une application $f : (E, d) \to (E, d)$ est dite une contraction, s'il existe un $k \in]0, 1[$ tel que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

Si f est une contraction de rapport k, alors pour tout entier $n \geq 1$, la composée $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est une contraction de rapport k^n.

Théorème 1.2.17. ***(Théorème du point fixe de S. Banach (1922))***
Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : (E, d) \to (E, d)$ une contraction de rapport $k \in [0, 1[$. Alors :
(i) Il existe un point unique $a \in E$ tel que $f(a) = a$.
(ii) Pour tout $x_0 \in E$, la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de x_0 et de $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier $n \geq 0$, est convergente vers a. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$.

Preuve. (i) Pour l'unicité, supposons que a et b sont des points fixes de f avec $a \neq b$, alors

$$0 < d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) < d(a, b).$$

Ce qui est absurde, donc $a = b$.
L'existence de a va résulter de (ii). En effet, si la suite (x_n) converge vers a, alors la sous-suite $(x_{n+1})_{n\geq 0}$ converge vers a. Or pour tout entier n, on a $x_{n+1} = f(x_n)$. f étant continue, par conséquent, la suite $(x_{n+1})_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$. Par unicité de la limite on déduit que $a = f(a)$.
Soient $x_0 \in E$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors pour tout entier $n \geq 0$, on a $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$. Par conséquent, pour tout entier $m > n$, on a

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \ldots + k^m d(x_1, x_0) \\
&= k^n d(x_1, x_0) \left(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n}\right) \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = Ck^n \to 0. \quad \text{car} \quad 0 < k < 1.
\end{aligned}$$

Alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_{n\geq 0} \to a \in E$. Or, f est est uniformément continue (car Lipschitzienne) donc $f(x_n) \to f(a)$. Mais $x_{n+1} = f(x_n)$, en passant à la limite, on obtient $a = f(a)$ et donc a est un point fixe de f.

Remarques 1.2.18. 1. Le théorème du point fixe de Banach est un outil très utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les problèmes de Cauchy associés à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou même à des équations aux dérivées partielles (EDP).
2. Si (E, d) est complet et f vérifie $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in E$, alors f peut ne pas avoir de point fixe. Exemple : $E = \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
3. l'Hypothèse (E, d) complet est fondamentale. Exemple :
$E =]0, 1[$ et $f(x) = \frac{x}{2}$.

1.3 Complétude de certains espaces fonctionnels

1.3.1 L'espace $\mathcal{B}(X, Y)$ des fonctions bornées

Soient X un ensemble non vide et (Y, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée dans l'espace (Y, d). Notons $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications de X vers Y qui sont bornées.
Pour tous $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$, posons $\delta(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$.
(i) On a : $0 \leq \delta(f, g) < \infty$, pour tous $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$.
(ii) On vérifie facilement que δ est une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$.
(iii) Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}(X, Y)$ converge vers $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ pour la distance δ si et seulement si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X. Ainsi : $\delta(f_n, f) \to 0 \Longleftrightarrow f_n \overset{U}{\to} f$ sur X.

Théorème 1.3.1. *Si l'espace métrique (Y, d) est complet, alors l'espace métrique $(\mathcal{B}(X, Y), \delta)$ est complet.*

Preuve. Exercice.

Dans le cas particulier, où $(Y, d) = (E, \|.\|_E)$ avec E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{B}(X, Y)$ devient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et la distance δ devient la distance associée à la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_E : x \in X\}.$$

Corollaire 1.3.2. Si X est un ensemble non vide et $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach, alors l'espace normé $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Dans le cas où $(Y, d) = (E, \|\|_E)$ avec E un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $X = \mathbb{N}$, on notera $\ell^\infty(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.
On rappelle que $\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{(x_n)_n \subset \mathbb{K} : (x_n)$ bornée $\}$. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.3. L'espace $\ell^\infty(\mathbb{K})$ des suites bornées (muni de la norme définie pour toute suite $x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ par $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$) est un espace de Banach.

1.3.2 L'espace $\mathcal{C}_b(X, Y)$ des fonctions continues bornées

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications $f : X \to Y$ qui sont continues et bornées.

Proposition 1.3.4. Si (Y, d) est complet, alors $\mathcal{C}_b(X, Y)$ est complet.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_b(X, Y)$ qui converge vers $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ pour la distance δ, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X donc f est continue, c.à.d : $f \in \mathcal{C}_b(X, Y)$. Par conséquent $\mathcal{C}_b(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Or, si (Y, d) est complet, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet, d'où $\mathcal{C}_b(X, Y)$ est complet.

Dans le cas où $(Y, d) = (E, \|.\|_E)$ avec E un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}_b(X, E)$ devient un sous espace vectoriel de $\mathcal{B}(X, E)$ fermé.

Proposition 1.3.5. Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{C}_b(X, E)$ est un espace de Banach.

Preuve. Il suffit de vérifier que $\mathcal{C}_b(X, E)$ est un espace vectoriel. Soit $f, g \in \mathcal{C}_b(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g$ est continue. Par ailleurs, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $\|f(x)\|_E \leq r_1, \|g(x)\|_E \leq r_2$, pour tout $x \in X$. Il s'ensuit que $\|(\lambda f + g)\|_E \leq |\lambda| r_1 + r_2$, pour tout $x \in X$. Par suite, $\lambda f + g \in \mathcal{C}_b(X, E)$.

1.4 Espaces métriques compacts

Définitions 1.4.1. *Soit (E, d) un espace métrique.*
1. On dit qu'une suite (x_n) de E tend vers $a \in E$ si $d(x_n, a)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
2. $x \in E$ est dite valeur d'adhérence d'une suite (x_n) d'éléments de E si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \in N,\ \exists n \geq m,\ d)x_n, x) < \varepsilon.$$

Proposition 1.4.2. $(x_n)_n$ étant une suite donnée, on pose $F_m = \overline{\{x_n, n \geq m\}}$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ est $\cap_{m=0}^{\infty} F_m$. (Cet ensemble peut être vide)

Preuve. Si $\alpha \in \cap_{m=0}^{\infty} F_m$, alors $\forall m \geq 0$, on a $\alpha \in F_m$ et par suite, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément $x_n \in F_m$, avec $n \geq m$ tel que $d(x_n, \alpha) < \varepsilon$. Ceci signifie que α est une valeur d'adhérence. Pour la réciproque, si α est une valeur d'adhérence, alors $\alpha \in F_m, \forall m \geq 0$.

Proposition 1.4.3. $x \in E$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_n$ si et seulement si il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers x.

Théorème 1.4.4. ***(Théorème de Bolzano Weierstrass)***
Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si de toute suite de points de E, on peut extraire une sous suite convergente.

Preuve. Supposons que (E, d) est compact et soit (x_n) une suite dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E qui est compact. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Or cette intersection est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n).
Pour l'autre sens de la démonstration, nous allons d'abord établir deux assertions.
Assertion 1. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence et soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E, alors $\exists \mathrm{r} > 0$ tel que $\forall x \in E$, la boule $B(x, r)$ est contenue dans l'un des ouverts de la famille $(O_i)_{i\in I}$.
Par l'absurde, soit $n \in N^*$, il existe $x_n \in E$ tel que la boule $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ ne soit contenue dans aucun des O_i. D'après l'hypothèse, il existe une sousuite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers $x \in E$, et comme les O_i recouvre E alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Soit $\varepsilon > 0$, tel que $B\left(x, \varepsilon\right) \subset O_i$. Fixons $n_k \geq 1$ tel que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset B\left(x, \varepsilon\right) \subset O_i.$$

Ce qui contredit la supposition.
Assertion 2. Soit (E, d) un espace métrique telle que toute suite possède une valeur d'adhérence, alors $\forall r > 0$ l'espace E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r.
Supposons qu'il existe $r_0 > 0$ tel que E n'est pas recouvert par un nombre fini de boules de rayon r_0. Choisissons alors x_1 dans E. La boule $B\left(x_1, r_0\right)$ ne recouvre pas E. On peut donc trouver x_2 dans E n'appartenant pas à $B\left(x_1, r_0\right)$.
Supposons construit une famille $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ de points de E telle que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \varepsilon\right)$$

ne recouvre pas E. On peut alors trouver x_{n+1} dans E n' appartenant pas à cette réunion et tel que la famille $\left(B\left(x_i, \varepsilon\right)\right)_{i=1,\ldots,n+1}$ ne recouvre toujours pas E. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ on a $d\left(x_i, x_j\right) > r_0$. Cette suite ne peut, par conséquent, avoir une sous-suite convergente. Absurde.
Soit maintenant $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. D'après l'assertion 1, il existe $r_0 > 0$ tel que $\forall x \in E$, la boule $B\left(x, r_0\right)$ est contenu dans l'un de (O_i),

et d'après l'assertion 2, pour ce même r_0, E peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r_0 qu'on note $B(x_1, r_0), B(x_2, r_0), \ldots, B(x_p, r_0)$. Ces boules sont contenues dans l'union de p ouverts de la famille (O_i). Ces p ouverts recouvrent donc aussi E.

Théorème 1.4.5. ***(Théorème de Heine)*** *Soient $(E, d), (F, d')$ deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si E est compact, alors f est uniformément continue.*

Preuve. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n, z_n \in E$ vérifiant $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$. Comme E est compact, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Soit $\ell = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$. Puisque pour tout $k \geq 1$, on a $d(x_{n_k}, z_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ et $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k} = 0$, on en déduit que $(z_{n_k})_{k\geq 1}$ converge aussi vers ℓ. Comme f est continue, alors on a $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(z_{n_k}) = f(\ell)$, d'où $\lim_{k\to+\infty} d(f(x_{n_k}), f(z_{n_k})) = 0$, ce qui est impossible car pour tout $k \geq 1$, on a $d'(f(x_{n_k}), f(z_{n_k})) \geq \varepsilon$. Donc f est bien uniformément continue.

Théorème 1.4.6. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue et soit K un compact de K. Alors $f(K)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et f atteint ses bornes sur K.*

Preuve. Comme f est continue et que K est compact, alors $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$ donc $f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Mais tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (et une borne inférieur). Notons α sa borne sup. On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in K / \quad \alpha - \varepsilon < f(x) \leq \alpha$$

. En remplaçant ε par $\frac{1}{n}$ et ce pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telle que : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.
Mais la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étant incluse dans un compact, possède une suite extraite convergente $\left(x_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et si nous notons x sa limite, x est un élément de K. Par continuité de f, on a $\lim_{n\to\infty} f\left(x_{\psi(n)}\right) = \alpha = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)}\right) = f(x)$ et donc f atteint bien son maximum en un point de K.
On pourrait procéder de même avec la borne inférieure.

Théorème 1.4.7. ***(Théorème de Dini)***
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur E, à valeurs réelles et continues. On suppose que E est un espace topologique compact et que la suite $(f_n)_n$ est monotone. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction continue f alors $(f_n)_n$ converge vers f pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve. On suppose la suite $(f_n)_n$ croissante, sinon on peut s'y ramener en considérant la suite $(-f_n)_n$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, on pose $F_n = \{x, |\ f(x) - f_n(x)\ | \geq \varepsilon\}$. On souhaite montrer que les F_n sont vides à partir d'un certain rang N, cela prouvera que si $n \geq N, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, ceci $\forall x \in E$.

D'après les hypothèses, $(F_n)_n$ est une suite décroissante de fermés. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, on a :

$$\cap_{n\in N} F_n = \emptyset.$$

E étant compact, d'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire une sous famille finie d'intersection vide. Cela signifie que les F_n sont vides à partir d'un certain rang. Ce qu'il fallait montrer.

$\mathcal{FIN}.$