Université Moulay Ismaïl
Ecole Normale Supérieure
Département des Sciences

Filière : Licence d'éducation : Mathématiques

Module : Topologie

===

Espaces compacts et espaces connexes

===

Résponsable : Pr. M. AIT KHELLOU

Notes de cours

Table des matières

0.1 Espaces topologiques compacts 1
0.1.1 Définitions et propriétés 1
0.1.2 Parties compactes 2
0.1.3 Union, intersection, produit 3
0.1.4 Compacité et continuité 5
0.1.5 Espaces localement compacts 6
0.2 Espaces connexes 7
0.2.1 Définitions et exemples 7
0.2.2 Les parties connexes de $\mathbb{R}$ 9
0.2.3 Produits finis d'espaces connexes 10
0.2.4 Composantes connexes 10
0.2.5 Connexité par arcs 11

0.1 Espaces topologiques compacts

0.1.1 Définitions et propriétés

Soient E un ensemble, A une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A si $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Si $A = E$, cela signifie que $E = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si E est un espace topologique, un recouvrement de A par une famille d'ouverts est appelé recouvrement ouvert de A.

Définition 0.1.1. *Soit E un espace topologique. On dit que E est compact si E est séparé et si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini (**Borel-Lebesgue**).*

Exemples 0.1.2.
1. Tout espace séparé et fini est compact.
2. Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \mathbb{R}^n$ n'est pas compact. En effet : soit $A_k = B(O, k)$. $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^n$ qu'on ne peut pas en extraire un sous-recouvrement fini.

Théorème 0.1.3. *Soit E un espace topologique séparé. Alors E est compact si et seulement si de toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille d'intersection vide.*

Preuve. $\Rightarrow$ / Supposons que E est compact et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E d'intersection vide. On pose pour tout $i \in I, \ A_i = F_i^c$, alors A_i est ouvert et $\bigcup_{i\in I} A_i = (\bigcap_{i\in I} F_i)^c = E$. Donc il existe une partie finie J de I telle que $E = \bigcup_{j\in J} A_j$. Alors $(\bigcup_{j\in J} A_j)^c = \varnothing$ c.à.d $\bigcap_{j\in J} F_j = \varnothing$.
$\Leftarrow$ / Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Posons pour tout $i \in I, \ F_i = U_i^c$. Alors les F_i sont fermés et $\bigcap_{i\in I} F_i = (\bigcup_{i\in I} U_i)^c = \varnothing$. Donc il existe une partie finie J de I telle que $\bigcap_{j\in J} F_j = \varnothing$ c.à.d $\bigcup_{j\in J} U_j = E$.

Proposition 0.1.4. Soient E un espace topologique compact et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E. Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Preuve. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est vide, il existe une partie finie non vide J de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$ car E est compact. Notons $m = \max\{j : j \in J\}$, puisque la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $F_m = \bigcap_{n\in J} F_n = \emptyset$, ce qui est absurde, car chaque F_n est non vide.

0.1.2 Parties compactes

Définition 0.1.5. *Soient E un espace topologique et A une partie de E.*
1. On dit que A est compacte si A munie de la topologie induite par celle de E est un espace topologique compact.
2. On dit que A est relativement compacte si $\overline{A}$ est compact.

Théorème 0.1.6. *Soient E un espace topologique et A un sous espace séparé de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) A est compact ;
(ii) De tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini ;
(iii) Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de E tels que $A \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \varnothing$, alors il existe une sous-famille finie $(F_{i_k})_{1\le k\le n}$ telle que $A \cap (\cap_{k=1}^{n} F_{i_k}) = \varnothing$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que A est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de E. On a $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, donc $A = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap A)$. Comme les $U_i \cap A$ sont des ouverts de A et que A est compact, il existe une partie finie J de I telle que $\bigcup_{j\in J}(U_j \cap A) = A$ c.à.d $(\bigcup_{j\in J} U_j) \cap A = A$. Ce qui implique que $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E telle que $A \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \varnothing$.

Alors $A \subset (\cap_{i\in I} F_i)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c$. Donc $(F_i^c)_{i\in I}$ est un recouvrement de A par des ouverts de E. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Soit $(F_{i_k})_{1\leq k\leq n}$ un tel sous recouvrement. On a $A \subset \bigcup_{k=1}^n F_{i_k}^c = (\bigcap_{k=1}^n F_{i_k})^c$. Donc $A \cap (\bigcap_{k=1}^n F_{i_k}) = \varnothing$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de A telle que $\cap_{i\in I} B_i = \varnothing$. Puisque les fermés de A sont les traces sur A des fermés de E, pour tout $i \in I$, il existe un fermé F_i de E tel que $B_i = A \cap F_i$. Alors $\bigcap_{i\in I}(A \cap F_i) = A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \varnothing$. D'après (iii), il existe une sous famille finie $(F_{i_k})_{1\leq k\leq n}$ telle que $A \cap (\bigcap_{k=1}^n F_{i_k}) = \varnothing$. C.à.d $\bigcap_{k=1}^n (A \cap F_{i_k}) = \bigcap_{k=1}^n B_{i_k} = \varnothing$. Donc A est compact.

Proposition 0.1.7. Toute partie fermée d'un espace compact E est compacte.

Preuve. Soit F un fermé d'un espace compact E. Puisque E est séparé, F est séparé. De plus si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de F d'intersection vide et comme F est fermé alors $(F_i)_{i\in I}$ est aussi une famille de fermés de E d'intersection vide. Or E est compact, on peut extraire de la famille $(F_i)_{i\in I}$ une sous-famille finie d'intersection vide. Donc F est compact.

Proposition 0.1.8. Soient E un espace topologique séparé et F un sous espace de E. Si F est compact, alors F est fermé dans E.

Preuve. Montrons que F^c est un ouvert. Soit $x \in F^c$. On a pour tout $y \in F,\ y \neq x$. Donc il existe un voisinage V_y de y et un voisinage W_y de x tels que $V_y \cap W_y = \varnothing$. Il existe un ouvert U_y tel que $y \in U_y \subset V_y$. Il est clair que la famille $(U_y)_{y\in F}$ est un recouvrement ouvert de F qui est compact, donc il existe $y_1, ..., y_n \in F$ tels que $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Soit $W = \bigcap_{i=1}^n W_{y_i}$, on a pour tout $i \in \{1, ..., n\},\ W \subset W_{y_i}$ et $U_{y_i} \subset V_{y_i}$, donc $W \cap U_{y_i} \subset W \cap V_{y_i} = \varnothing$. Cela étant vrai pour tout i, alors $W \cap (\bigcup_{i=1}^n U_{y_i}) = \varnothing$. Comme $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$, on a $W \cap F = \varnothing$. Donc $W \subset F^c$. Ainsi F^c est un voisinage de x et par suite F^c est un ouvert.

Corollaire 0.1.9. Soient E un espace topologique compact et F une partie de E. Alors F est fermée dans E si et seulement si F est compacte dans E.

Exemples 0.1.10.
1. Dans un espace topologique séparé E, toutes les parties finies, en particulier tous les singletons, sont des compacts de E.
2. Soit E un espace topologique séparé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E qui converge vers une limite l, alors la partie $K = \{l\} \cup \{x_n : n \geq 0\}$ est un compact de E (Voir TD).

0.1.3 Union, intersection, produit

Théorème 0.1.11. *Soit E un espace topologique séparé. On a les propriétés suivantes :*
(i) Toute réunion finie de compacts de E est compact.
(ii) Toute intersection de compacts est compacte.

Preuve. (i) Soient $K_1, ..., K_n$ des sous espaces compactes de E et $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Montrons que K est compact. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Alors $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de chaque K_j, donc il existe une partie finie I_j de I telle que $K_j \subset \bigcup_{i\in I_j} U_i$. Alors la famille $(U_i)_{i\in \cup_{j=1}^n I_j}$ est une sous famille finie de $(U_i)_{i\in I}$ qui recouvre K. Par suite K est compact.
(ii) Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces compacts de E et $K = \bigcap_{i\in I} K_i$. Puisque E est séparé, chaque K_i est fermé. Donc K est fermé. D'autre part $K \subset K_i,\ \forall i \in I$, alors K est compact.

Proposition 0.1.12. Soient E un espace topologique, F un espace topologique compact et $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E \times F$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E tel que $U_x \times F$ soit recouvert par un nombre fini de Ω_i.

Preuve. Pour tout $y \in F$, il existe $i_y \in I$ tel que $(x, y) \in \Omega_{i_y}$. Puis il existe un ouvert U_y de E contenant x et un ouvert V_y de F contenant y tels que $U_y \times V_y \subset \Omega_{i_y}$. La famille $(V_y)_{y\in F}$ est un recouvrement ouvert de F qui est compact, donc on peut en extraire un sous recouvrement fini $(V_{y_1}, ..., V_{y_n})$. Posons $U_x = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$. Alors U_x est un voisinage ouvert de x dans E et on a $\forall k \in \{1, ..., n\},\ U_x \times V_{y_k} \subset \Omega_{i_{y_k}}$. Alors $U_x \times F = U_x \times (V_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n}) \subset \Omega_{i_{y_1}} \cup ... \cup \Omega_{i_{y_n}}$.

Théorème 0.1.13. ***(Tychonoff)***
Le produit fini d'espaces topologiques compacts est compact.

Preuve. Montrons d'abord le théorème dans le cas de deux espaces. Soient E et F deux espaces topologiques compacts et montrons que $E \times F$ est compact. D'abord, puisque E et F sont séparés alors $E \times F$ est séparé. Soit maintenant $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E \times F$. d'après la proposition précédente, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans E et une partie finie I_x de I tels que $U_x \times F \subset \bigcup_{i\in I_x} \Omega_i$. La famille $(U_x)_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini $(U_{x_1}, ..., U_{x_n})$. On a donc $E \times F = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \times F) \subset \bigcup_{j=1}^n (\cup_{i\in I_{x_j}} \Omega_i) = \bigcup_{i\in \cup_{j=1}^n I_{x_j}} \Omega_i$. Puisque les I_{x_j} sont finis, $\cup_{j=1}^n I_{x_j}$ est fini. Donc $E\times F$ est compact.
Montrons maintenant par récurrence sur n que le produit de n espaces compacts est compact. Supposons que la propriété est vraie pour n et montrons la pour $n + 1$. Soient $E_1, ..., E_{n+1}$ $n + 1$ espaces compacts. Alors $E_1 \times ... \times E_n$ et E_{n+1} sont compacts. Donc $(E_1 \times ... \times E_n) \times E_{n+1}$ est compact. Or l'application :

$$f:\ \begin{array}{ccc} (E_1 \times ... \times E_n) \times E_{n+1} & \longrightarrow & E_1 \times ... \times E_{n+1} \\ ((x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_{n+1}) \end{array}$$

est bijective et continue. Donc $E_1 \times ... \times E_{n+1}$ est compact.

Théorème 0.1.14. *Dans $\mathbb{R}^n$, les parties compactes sont les parties fermées bornées.*

Preuve. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$. Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Alors A est fermée dans $\mathbb{R}^n$. D'autre part la famille des boules ouvertes $(B(O,n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de A, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini $(B(O,n_1),...,B(O,n_k))$. Soit $N=\max(n_1,...,n_k)$, alors $A\subset B(O,N)$. Donc A est bornée.
Inversement, soit A une partie fermée et bornée. Il existe $R>0$ tel que $A\subset B_f(O,R)$. Or $B_f(O,R)=[0,R]\times...\times[0,R]$, donc $B_f(O,R)$ est compacte. D'autre part, A est fermé dans $B_f(O,R)$ alors A est compacte.

0.1.4 Compacité et continuité

Proposition 0.1.15. Soient E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f:E\to F$ une application continue. Alors $f(E)$ est compact.

Preuve. Puisque F est séparé, alors $f(E)$ est séparé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(E)$ dans F. Comme f est continue, alors $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E qui est compact, donc il existe une partie (non vide) finie J de I telle que $E=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$. En prenant l'image par f de E, on obtient
$$f(E)=\bigcup_{j\in J} f\left(f^{-1}(U_j)\right)\subset\bigcup_{j\in J} U_j.$$
Ce qui montre que $f(E)$ est compact.

Corollaire 0.1.16. Soient E un espace topologique, F un espace topologique séparé et $f:E\to F$ une application continue. Si A est une partie compacte de E, alors $f(A)$ une partie compacte de F.

Corollaire 0.1.17. Toute bijection continue d'un espace compact E dans un espace séparé F est un homéomorphisme.

Preuve. Soit $f:E\to F$ une bijection continue. Montrons que f^{-1} est continue. Posons $g=f^{-1}$ et montrons que l'image réciproque par g d'un fermé de E est un fermé de F. Soit A un fermé de E. Comme E est compact, A est compact. Donc $f(A)$ est compact. Puisque F est séparé, $f(A)$ est fermé. Or $f(A)=g^{-1}(A)$, alors g est continue.

Théorème 0.1.18. *Soit E un espace topologique compact. Alors,*
(i) Toute suite d'éléments de E admet (au moins) une valeur d'adhérence dans E.
(ii) Toute suite d'éléments de E ayant une seule valeur d'adhérence est convergente dans E.

Preuve. (i) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et A l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $F_n=\overline{\{x_m:m\geq n\}}$.

Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E qui est compact. Donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Or on sait que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par suite A est non vide.
(ii) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et a l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc, ici, on a $A = \{a\}$.
Soit V un voisinage ouvert de a. Il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $G_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}} \cap O^c = F_n \cap O^c$. Alors $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{a\} \cap O^c = \emptyset$. Comme E est compact, on déduit qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $G_{n_0} = \emptyset$. C'est à dire que $F_{n_0} \subset O$. Par suite, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\{x_m : m \geq n\} \subset F_{n_0} \subset O \subset V$. Ce qui implique que $x_n \in V$, pour tout entier $n \geq n_0$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans E.

Théorème 0.1.19. *Soient E un espace compact et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint sur E ses bornes inférieure et supérieure. Autrement dit, il existe $a, b \in E$ tels que $f(a) = \inf_{x\in E} f(x)$ et $f(b) = \sup_{x\in E} f(x)$.*

Preuve. Comme f est continue, $f(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc $f(E)$ est fermée et bornée dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $\alpha, \beta \in f(E)$ tels que $\alpha = \inf_{x\in E} f(x)$ et $\beta = \sup_{x\in E} f(x)$. Comme $\alpha, \beta \in f(E)$, il existe $a, b \in E$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. D'où le résultat.

0.1.5 Espaces localement compacts

Définition 0.1.20. *Soit E un espace topologique. On dit que E est localement compact si E est séparé et tout point de E possède au moins un voisinage compact (ou tout point de E possède un système fondamental de voisinages compacts).*

Exemples 0.1.21. 1. Tout espace compact est localement compact.
2. $\mathbb{R}^n$ est localement compact.

Propriété 0.1.22. Tout produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.

Preuve. Soient $E_1, ..., E_n$ des espaces localement compacts et soit $E = E_1 \times ... \times E_n$ l'espace topologique produit. D'abord, puisque chaque E_i est séparé, E est séparé. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in E$. Chaque x_i possède dans E_i un voisinage compact K_i. Donc $K = K_1 \times ... \times K_n$ est un voisinage compact de x dans E.

0.2 Espaces connexes

0.2.1 Définitions et exemples

Définition 0.2.1. *Un espace topologique E est dit connexe si et seulement si, il n'existe pas deux ouverts non vides disjoints O_1 et O_2 dans E tels que : $E = O_1 \cup O_2$.*

Un espace non connexe est donc un espace topologique qui peut être partitionné en deux ouverts non vides. Par passage au complémentaire on a :

Proposition 0.2.2. Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) E est connexe.
(ii) Si $E = F_1 \cup F_2$, où F_1, F_2 sont deux fermés disjoints, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
(iii) Si $E = U_1 \cup U_2$, où U_1, U_2 sont deux ouverts disjoints, alors $U_1 = \emptyset$ ou $U_2 = \emptyset$.

La preuve est claire et laissée comme exercice.

Proposition 0.2.3. Soit E un espace topologique. Alors E est connexe si et seulement si les seules parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E.

Preuve. Supposons que E est connexe et soit Ω une partie à la fois ouverte et fermée de E. Supposons que Ω est non vide. On a $E = \Omega \cup \Omega^c$. Ω et Ω^c sont deux ouverts d'intersection vide. Comme E est connexe et comme $\Omega \neq \emptyset$ alors $\Omega^c = \emptyset$ c.à.d $\Omega = E$.
Inversement, supposons que E n'est connexe, il existe une partition de E en deux ouverts (non vides) O_1 et O_2. C.à.d $E = O_1 \cup O_2$ avec $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Prenons $\Omega = O_1$ alors Ω est ouvert et comme $\Omega^c = O_2$, alors Ω est aussi fermé. De plus $\Omega \neq E$ et $\Omega \neq \emptyset$. Contradiction.

Définition 0.2.4. *Soient E un espace topologique et A une partie (non vide) de E. On dit que A est connexe si et seulement si l'espace topologique A est connexe par rapport à la topologie induite sur A.*
Ainsi, l'ensemble A est connexe si et seulement si il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 dans E tels que

$$A \cap O_1 \neq \emptyset, A \cap O_2 \neq \emptyset, A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ et } A \subset O_1 \cup O_2.$$

Exemple 0.2.5.
- L'ensemble vide est connexe par définition.
- Pour tout $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est connexe dans dans E.
- Toute partie finie non vide de E ayant plus de deux éléments n'est pas connexe dans E.

Proposition 0.2.6. L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Preuve. Soient E, F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue. Supposons que E est connexe et montrons que $f(E)$ est connexe de F. Sinon, il existe deux ouverts V_1 et V_2 dans F tels que

$$f(E) \cap V_1 \neq \emptyset, \; f(E) \cap V_2 \neq \emptyset, \; f(E) \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ et } f(E) \subset V_1 \cup V_2$$

Ce qui implique que

$$f^{-1}(V_1) \neq \emptyset,\ f^{-1}(V_2) \neq \emptyset,\ f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset \text{ et } E = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2).$$

Comme f est continue, alors $f^{-1}(V_1)$ et $f^{-1}(V_2)$ sont ouverts dans E, donc $\{f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)\}$ est une partition de E en deux ouverts (non vides). Ce qui contredit le fait que E est connexe. Par conséquent, $f(E)$ est une partie connexe dans F.

Remarque 0.2.7. Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, la paire $\{0, 1\}$ n'est pas connexe, car la topologie induite sur elle coïncide avec la topologie discrète. $\{0, 1\}$ est la réunion de ses deux fermés disjoints $\{0\}$ et $\{1\}$. Les seules parties connexes de $\{0, 1\}$ sont $\{0\}$ et $\{1\}$. Donc, si E est un espace topologique connexe et f une application continue de E dans $\{0, 1\}$, alors f est nécessairement constante.

Proposition 0.2.8. Soit E un espace topologique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) E est connexe.
(ii) Toute application continue de E vers $\{0, 1\})$ est constante. ($\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète).

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Soit $f : E \to \{0, 1\})$ une application continue. Comme E est connexe, alors $f(E)$ est connexe dans l'espace discret $\{0, 1\}$ donc $f(E)$ est un singleton. Ce qui implique que f est constante sur E.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: Par l'absurde, supposons que E n'est pas connexe, il existe une partie A de E, telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ qui est à la fois ouverte et fermé dans E. Prenons $f = 1_A$, où 1_A est la fonction indicatrice de A qui vaut 1 un sur A et 0 sur A^c. f est continue sur E. En effet, les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{0\}, \{1\}$ et $\{0, 1\}$, on vérifie facilement que les images réciproques de ces ensembles sont des ouverts dans E. f est non constante sur E. Ceci contredit l'hypothèse (ii). Donc E est connexe.

Proposition 0.2.9. Soient E un espace topologique et $A \subset E$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier, $\overline{A}$ est connexe.

Preuve. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors sa restriction $f|_A : A \to \{0, 1\}$ est continue et donc constant par la connexité de A. Soit $b \in \{0, 1\}$ tel que $f(x) = b$ pour $x \in A$. Comme f est continue, alors $f^{-1}(\{b\})$ est un fermé dans B. il existe donc un fermé Ω dans E tel que $f^{-1}(\{b\}) = B \cap \Omega$. On a $A = f|_A^{-1}(\{b\}) \subset f^{-1}(\{b\}) \subset \Omega$. Donc $B \subset \overline{A} \subset \overline{\Omega} = \Omega$. Par conséquent $f^{-1}(\{b\}) = B \cap \Omega = B$ ce qui implique que f est constante sur B. D'où la partie B est connexe dans E.

Proposition 0.2.10. Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On suppose que :

(i) chaque A_i est connexe,
(ii) il existe un $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \ \forall i \in I$.
Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Preuve. Soit $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \{0,1\}$ une application continue. Alors, pour chaque $i \in I$, l'application $f_{|A_i}$ est constante. Notons c_i la valeur de cette constante. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in A_i \cap A_{i_0}$, on a $c_i = f(x) = c_{i_0}$, d'où f est constante.

Corollaire 0.2.11. Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E, telle que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Corollaire 0.2.12. Soient E un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E, telle que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, pour tous $i, j \in I$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Preuve. On fixe un indice $i_0 \in I$. Pour tout $i \in I$, posons $B_i = A_{i0} \cup A_i$. D'après le corollaire précédent, les B_i sont connexes. En plus, l'intersection des B_i est non vide car contient A_{i0}. Donc $\bigcup_{i \in I} B_i$ est connexe. Or $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} B_i$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

0.2.2 Les parties connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 0.2.13. *Une partie (non vide) A de $\mathbb{R}$ est connexe, si et seulement si, A est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons que A soit une partie (non vide) connexe de $\mathbb{R}$. Par l'absurde, si A n'est pas un intervalle, alors il existe $x < z < y$ tels que $x, y \in A$, mais $z \notin A$. Alors $U = A \cap]-\infty, z[, \ V = A \cap]z, +\infty[$ sont des ouverts non vides et disjoints de A tels que $A = U \cup V$, donc A n'est pas connexe.
Réciproquement, supposons que A est un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. par l'absurde, si f n'est pas constante, alors il existe $x, y \in A$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un z compris entre x et y (donc appartenant à A) tel que $f(z) = 1/2$, contradiction.

0.2.3 Produits finis d'espaces connexes

Théorème 0.2.14. *Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des espaces topologiques et $E = \prod_{i=1}^n E_n$ l'espace topologique produit. Alors E est connexe si et seulement si E_k est connexe pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Preuve. Il suffit de donner une preuve dans le cas de deux espaces. Soient E et F deux espaces topologiques.
Supposons que $E \times F$ est connexe. Les deux projections canoniques notées, respectivement, p_1 et p_2 sont continues, donc $p_1(E \times F) = E$ et $p_2(E \times F) = F$

sont connexes.
Réciproquement, supposons que E et F sont connexes et montrons que $E \times F$ est connexe. On fixe $x_0 \in E$. Notons $A_0 = \{x_0\} \times F$. On a A_0 est homéomorphe à F, donc A_0 est connexe. Pour tout $y \in F$, posons $B_y = E \times \{y\}$. On a B_y est homéomorphe à E, donc B_y est connexe. Pour tout $y \in F$, posons $\Omega_y = A_0 \cup B_y$. Comme $(x_0, y) \in A_0 \cap B_y$, alors Ω_y est connexe pour tout $y \in F$. Or $A_0 \subset \Omega_y$, pour tout $y \in F$, donc $\bigcup_{y \in F} \Omega_y = E \times F$ est connexe dans $E \times F$.

0.2.4 Composantes connexes

Intuitivement, les composantes connexes d'un espace topologique sont les différents "morceaux disjoints" qui le forment.

Définition 0.2.15. *Soient E un espace topologique et $a \in E$. La composante connexe de a qu'on note $C(a)$ est la réunion de tous les parties connexes de E contenant a. C.à.d : $C(a) = \bigcup\{A connexe/\ a \in A\}$. C'est aussi le plus grand connexe de E contenant a.*
Une partie A de E est une composante connexe s'il existe $a \in E$ tel que $A = C(a)$.

Remarque 0.2.16. - La définition précédente a bien un sens, car d'abord, le singleton $\{a\}$ est un connexe de E qui contient a, ce qui prouve que la famille des connexes de E contenant a est non vide. Ensuite, la réunion de cette famille est un connexe de E.
- Si l'espace E est connexe, alors E est la seule composante connexe de E. On a

$$E \text{ est connexe } \iff (C(x) = E, \forall x \in E).$$

Proposition 0.2.17. Soit E un espace topologique. Alors,
(i) Les composantes connexes de E forment une partition de E. (Ainsi, pour tous $a, b \in E$, on a : $C(a) = C(b)$ ou bien $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ et $\bigcup_{x \in E} C(x) = E$).
(ii) $C(x)$ est fermé dans E pour tout $x \in E$.
(iii) Si les composantes connexes de E sont en nombre fini, alors chaque composante connexe est ouverte dans E.

Preuve. (i) On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante : $x\mathcal{R}y \iff$ il existe une partie connexe B de E telle que $\{x, y\} \subset B$.
Il est facile de voir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Pour chaque $x \in E$, notons $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$ et soit Ω un système de représentants pour la relation $\mathcal{R}$. Il est facile de voir que $\bar{x} = C(x)$, pour tout $x \in E$. Or, $\{\bar{x} : x \in \Omega\}$ est une partition de E donc les composantes connexes de E forment une partition de E.
(ii) Soit $x \in E$. On sait que $C(x)$ est un ensemble connexe, donc son adhérence $\overline{C(x)}$ est aussi connexe. Comme $x \in \overline{C(x)}$, alors $\overline{C(x)} \subset C(x)$. Ce qui montre que $C(x)$ est fermé.

(iii) Si le nombre de composantes connexes est fini, alors Ω le système de représentants pour la relation $\mathcal{R}$ est fini. Notons $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les éléments distincts de Ω ($n = \mathrm{Card}(\Omega)$). On sait que $E = \bigcup_{i=1}^{n} C(a_i)$. Alors

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ on a : } E \backslash C(a_i) = \cup_{j \neq i} C(a_j).$$

Ainsi, $E \backslash C(a_i)$ est une réunion finie de fermés, c'est donc un fermé de E. Ceci prouve que chaque composante $C(a_i)$ est un ouvert.

0.2.5 Connexité par arcs

Définition 0.2.18. *Soit E un espace topologique. On dit que E est connexe par arcs si pour couple $(a, b) \in E^2$, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to E$, telle que, $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Dans ce cas, on dit aussi que γ est un arc joignant y à x.*

Exemple 0.2.19. Soient $(E, \|.\|)$ un e.v.n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et A une partie convexe de E. Alors A est connexe par arcs. En effet, si $a, b \in A$, on pose $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ pour tout $t \in [0, 1]$. Puisque A est convexe, alors $\gamma(t) \in A$ tout $t \in [0, 1]$. De plus, γ est continue de $[0, 1]$ vers A. Ainsi, γ est un arc allant de a vers b. Par conséquent, A est connexe par arcs.
En particulier, dans $\mathbb{R}$, tous les intervalles (non vides) son connexes par arcs.

Théorème 0.2.20. *Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Preuve. Soit E un espace connexe par arcs. On fixe un $a \in E$. Pour chaque $x \in E$, soit $\gamma_x \in C([0, 1], E)$ un arc tel que $\gamma_x(0) = a$ et $\gamma_x(1) = x$. Alors $A_x = \gamma_x([0, 1])$ est un connexe de E. De plus, pour tous $x, y \in E$, on a $a \in A_x \cap A_y$. Donc $\bigcup_{x \in E} A_x$ est connexe. Par ailleurs, on a $x \in A_x$ pour tout $x \in E$. Par suite, $E = \bigcup_{x \in E} A_x$ est connexe.

N.B. la réciproque est fausse. Mais dans les espaces normés on a le théorème suivant.

Théorème 0.2.21. *Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et U un ouvert (non vide) de E. Alors U est connexe $\Longleftrightarrow$ U est connexe par arcs.*

Preuve. On montre l'implication ($\Longrightarrow$).
Supposons que U est un ouvert (non vide) connexe dans E. On définit sur U la relation binaire suivante : $x \sim y$, s'il existe un arc allant de x à y. Il est facile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
Soit $a \in U$ fixé. Posons $\Omega(a) := \{x \in U : a \sim x\}$. On a $a \in \Omega(a) \subset U$. Montrons que $\Omega(a) = U$. Pour cela, on montre que $\Omega(a)$ est à la fois ouvert et fermé dans U.
Montrons que $\Omega(a)$ est ouvert dans U. Soit $x \in \Omega(a)$. Il existe un $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset U$. Soit $y \in B_f(x, r)$. On a $x \sim y$ et $a \sim x$, donc $a \sim y$. Alors

$B_f(x,r) \subset \Omega(a)$. D'où $\Omega(a)$ est ouvert dans U.
Montrons que $\Omega(a)$ est fermé dans U. Soit $z \in \overline{\Omega(a)}$ dans l'espace U. Comme $z \in U$, il existe $\rho > 0$, tel que $B(z,\rho) \subset U$. Par suite, $B_f(z,\rho)$ est un voisinage de z dans U. Donc $B_f(z,\rho) \cap \Omega(a) \neq \emptyset$. Soit $y \in B_f(z,\rho) \cap \Omega(a)$. Alors, $a \sim y$ et $y \sim z$. Par conséquent $a \sim z$ et donc $z \in \Omega(a)$. Ainsi, $\Omega(a)$ est fermé dans U. Comme U est connexe et $\Omega(a)$ est non vide, alors $U = \Omega(a)$. Ce qui prouve que deux points quelconques de U sont joignables par un arc. Alors U est connexe par arcs.

$\mathcal{FIN}$.