Chapitre I

Normes matricielles et conditionnement

Master MAIE et SMSEI
- -S1 - -

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

1.1. Normes vectorielles et matricielles

1.1.1. Normes vectorielles

Definition

On rappelle qu'une norme $\|\|$ dans $\mathbb{K}^n$ est une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à v associe $\|v\|$ avec les propriètés suivantes

1. $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Les normes $\|\|_p$

Une famille de normes très utiles est celle des normes $\|\|_p$ où p est un réel plus grand ou égal à 1 :

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1.1}$$

On définira aussi la norme infini $\|\|_\infty$ par

$$\|v\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i| \tag{1.2}$$

Il est clair que $\|\|_1$ et $\|\|_\infty$ sont des normes. Pour montrer que $\|\|_p$ est une norme pour $1 < p < \infty$, on a les lemmes suivants :

Lemma (1)

Si p est un réel tel que $1 < p < \infty$, et si x et y sont deux réels positifs, alors

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{1.3}$$

où q est un réel défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration. On a

$$x.y = \exp\left(\ln x + \ln y\right) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)\right).$$

On utilise la convexité de la fonction exponentielle pour conclure. ■

Lemma (2 -**Inégalité de Hölder**)

Si p est un réel tel que $1 < p < \infty$, *alors pour tous vecteurs* $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n$,

$$|y^* x| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \tag{1.4}$$

Démonstration. Posons $\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|_p} x$ et $\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q} y$, en appliquant (1.3) on obtient

$\left| \tilde{y}^* \tilde{x} \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|x\|_p^p} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|y\|_q^q} |y_i|^q = 1$. On en déduit (1.4). ∎

Proposition (3)

Pour $1 < p < \infty$, $\|\|_p$ *est une norme.*

Démonstration. La seule propriètè non immédiate est l'inégalité triangulaire : Pour celà on écrit

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1}.$$

On utilise alors l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |z_i| \leq \|x\|_p \, \|z\|_q \text{, et } \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, |z_i| \leq \|y\|_p \, \|z\|_q$$

où $z \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur dont les composantes $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$.

Mais $q = \dfrac{p}{p-1}$, donc $\|z\|_q = \|x+y\|_p^{p-1}$.

On en déduit que

$$\|x+y\|_p^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|_p^{p-1}.$$

Exercice. Montrer en trouvant des contre-exemples que si $p < 1$, $\|\|_p$ n'est pas une norme dans $\mathbb{R}^2$.

La norme $\|\|_2$ est la norme euclidienne bien connue : elle est associée au produit scalaire usuel, et on a l'inégalité de cauchy-Schwartz

$$|u^* v| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \qquad (1.5)$$

En dimension finie toute les normes sont équivalentes, mais les constantes d'équivalences dépendent en général de la dimension n.

Proposition (4)

Soit u un vecteur de $\mathbb{K}^n$: on a

pour $1 \leq q < p < +\infty$,

$$\|u\|_p \leq \|u\|_q \leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u\|_p \tag{1.6}$$

pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|u\|_\infty \tag{1.7}$$

Démonstration . Voir T.D.

1.1.2. Les normes matricielles

Definition (1)

L'application $\| \ \|$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ est une norme matricielle si et seulement si

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$ (matrice nulle).
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

et de plus

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \qquad (1.8)$$

Remark

Il existe des normes sur $\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})}$ *qui ne sont pas des normes matrcielles ; la norme* $\|A\| = \max_{1 \leq i,j \leq 2} |a_{i,j}|$ *est une norme sur* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, mais*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|A^2\| = 2 > \|A\|^2 = 1$$

Norme subordonnée à une norme vectorielle

Proposition (5)

A une norme $\|\|$ *sur* $\mathbb{K}^n$, *on peut associer une norme matricielle sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qu'on note encore* $\|\|$ *par : pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{K}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{0 \neq x \in \mathbb{K}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \\ = \max_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \qquad (1.9)$$

On dit que la norme matricielle $\|\|$ *est la norme subordonnée à* $\|\|$.

Lemma (6)

Pour $1 \leq p \leq \infty$, *on va noter* $\|\|\|_p$ *la norme subordonnée à la norme* $\|\|_p$ *sur* $\mathbb{K}^n$. *On a les identités suivantes*

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad (1.10)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = \|A^*\|_\infty \qquad (1.11)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)} = \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A^*\|_2 \qquad (1.12)$$

où $\rho(M)$: *rayon spectral de* M, *désigne le module maximal des valeurs propres de la matrice* M.

Démonstration . On a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq$$

$$\left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) \|x\|_\infty \,,$$

d'où l'inégalité $\|A\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right|$. Pour montrer l'égalité, on appelle i_0 l'indice réalisant le maximum : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

On choisit alors x de la manière suivante :

$x_j = \dfrac{\overline{a}_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $x_j = 0$ sinon. Il est clair que $\|x\|_\infty = 1$ et on voit que la coordonnée d'indice i_0 de Ax est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

On a donc trouver x tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $\|Ax\|_\infty \geq \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

On a prouvé (1.10).

On a pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| \,,$$

D'où l'inégalité $\|A\|_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Pour montrer l'égalité, on appelle j_0 l'indice réalisant le maximum : $\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. On choisit x de la manière suivante : $x_j = \delta_{j,j_0}$. Il est clair que

$\|x\|_1 = 1$, et on voit que $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}|$.

On a donc trouver x tel que $\|x\|_1 = 1$ et

$\|Ax\|_1 \geq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. On a prouvé (1.11).

On a

$$\|A\|_2^2 = \sup_{0\neq x\in\mathbb{K}^n} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \sup_{0\neq x\in\mathbb{K}^n} \frac{x^*A^*Ax}{\|x\|_2^2}$$

mais A^*A est hermitienne donc diagonalisable dans une base orthonormale et on a

$\sup_{0\neq x\in\mathbb{K}^n} \frac{x^*A^*Ax}{\|x\|_2^2} = \rho(A^*A)$. De plus, si λ est une valeur propre non nulle de A^*A, il existe $v_\lambda \neq 0$ tel

que $A^*Av_\lambda = \lambda v_\lambda$.
Alors $AA^*Av_\lambda = \lambda Av_\lambda$. Donc Av_λ est un vecteur propre (car non nul) de A^*A avec la valeur propre λ.
Si λ valeur propre de A^*A, c'est aussi une valeur propre de AA^*. Donc si $\rho(A^*A) \neq 0$ alors $\rho(A^*A) = \rho(AA^*)$. Ceci reste encore vrai si $\rho(A^*A) = 0$, car on a alors $A = 0$. On a donc prouvé (1.12). $\blacksquare$

Proposition (7)

Si U est une matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\|A\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|UAU^*\|_2 \tag{1.13}$$

Si A est normale,

$$\|A\|_2 = \rho(A) \tag{1.14}$$

Enfin, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\|A\|_2^2 = \|A^*A\|_2 \tag{1.15}$$

Démonstration. On laisse le premier point en exercice.
Si A st nomale, A est semblable à une matrice D diagonale par une transformation unitaire : on a $\|A\|_2 = \|UDU^*\|_2 = \|D\|_2$ et il est facile de vérifier que $\|D\|_2 = \rho(D) = \rho(A)$.
Enfin, on a, pour toute matrice A,

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A) = \|A^*A\|_2 .$$

Remark

l'inégalité (1.14) est vraie en particulier si A est rélle symétrique ou hermitienne.

Proposition

On a les inégalités suivantes :

pour $p : 1 \leq p \leq +\infty$,

$$n^{\frac{-1}{p}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|A\|_\infty \qquad (1.16)$$

pour $p, q : 1 \leq p < q \leq +\infty$,

$$n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|A\|_q \leq \|A\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|A\|_p \qquad (1.17)$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty} \qquad (1.18)$$

Démonstration. On laisse (1.16) et (1.17) en exercice.

Pour prouver (1.18) on utilise (1.15) :
$\|A\|_2^2 = \|A^*A\|_2 = \rho(A^*A) \leq \|A^*A\|_\infty \leq \|A^*\|_\infty \|A\|_\infty = \|A\|_1 \|A\|_\infty$. ■

Norme de Frobenius

On définit la norme de Frobnius d'une matrice M d'ordre n

$$\|M\|_F^2 = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq n} |m_{i,j}|^2 . \qquad (1.19)$$

On vérifie que

$$\|M\|_F^2 = trace(M^*M) = trace(MM^*) = \|M^*\|_F^2 \tag{1.20}$$

On en déduit que

$$\|M\|_2 \leq \|M\|_F \leq \sqrt{n}\,\|M\|_2 \tag{1.21}$$

Enfin, la norme de Frobenius a la propriètè (1.8) : en effet, en appliquant linégalité de Cauchy-schwartz dans $\mathbb{K}^n$, on a

$$\|A\,B\|_F^2 = \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n}\left|\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right|^2 \leq$$

$$\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{k=1}^{n}|A_{i,k}|^2\sum_{l=1}^{n}|B_{l,j}|^2\right)=\|A\|_F^2\,\|B\|_F^2\,.$$

La norme de Frobenius est donc une norme matricielle non subordonnée à une norme vectorielle, car $\|I_n\|_F=\sqrt{n}\neq 1$.

1.2 Nombre de conditionnement

On s'interesse ici à la sensibilité d'un système linéaire $Ax=b$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $x,b\in\mathbb{K}^n$, à des perturbations du second membre b où de la matrice A.

Example (1)

Résolution du système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix},$$

alors $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Si $$b_1 = \begin{bmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{bmatrix}$$, alors

$$x_1 = \begin{bmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{bmatrix}$$

En faisant maintenant varier A

$$A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}, \text{ alors } x_2 = \begin{bmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{bmatrix}$$

La matrice A a pourtant bon aspect, son déterminant vaut 1 et son inverse est tout aussi sympathique

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$cond_2(A) = 2984.0927$$

Definition (2)

On considère une norme $\|\|$ sur $\mathbb{K}^n$ et on note encore $\|\|$ la norme matricielle subordonnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit le nombre de conditionnement de A par rapport à la norme $\|\|$ par $cond_{\|\|}(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$.

Propriètés. Pour toute matrice inversible

1. $cond_{\|\|}(A) \geq 1$.

$cond_{\|\|}(A) = cond_{\|\|}(A^{-1})$.

$cond_{\|\|\|}(\alpha A) = cond_{\|\|\|}(A)$ pour tout $\alpha \neq 0$.

2. Si A est normale ($A^*A = AA^*$), en particulier hermitienne, on a la caractérisation plus simple :

$cond_2(A) = \frac{|\lambda|_{\max}(A)}{|\lambda|_{\min}(A)}$

3. Si A est unitaire ($A^*A = AA^* = I$) alors $cond_2(A) = 1$.

Remark (3)

Cette propriété montre que les systèmes linéaires à matrice unitaite ou orthogonale (dans le cas réel) sont bien conditionnés.

1.2.1 Sensibilité de la solution d'un système linéaire On veut étudier la sensibilité de la solution d'un système linéaire $Ax = b$ (A inversible) à une variation du second membre δb : on a $A(x + \delta x) = b + \delta b$, ce qui implique que $\delta x = A^{-1}\delta b$, donc $\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\delta b\|$. D'autre part $\|b\| \leq \|A\| \, \|x\|$, par suite

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \, \|A\| \, \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$. On a le résultat.

Proposition (9)

Si $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$ on a

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \qquad (1.22)$$

et on peut trouver x et b tel que cette inégalité soit égalité.

Démonstration. La dernière assertion est prouvée en prenant x réalisant le maximum :

$\max\limits_{y \in \mathbb{K}^n} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$ et $\|\delta b\|$ réalisant le maximum : $\max\limits_{y \in \mathbb{K}^n} \dfrac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \dfrac{\|A^{-1}\delta b\|}{\|\delta b\|} = \|A^{-1}\|$.

L'inégalité (1.22) est optimale.

On s'interesse maintenant à la sensibilité aux perturbations de la matrice A : soit donc une parturbation δA de la matrice A et $(x + \delta x)$ la solution de $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$.

On a $\delta x = -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$, d'où

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A)\ \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

Proposition (10)

Si $Ax = b$ *et* $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ *on a*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{1.23}$$

et on peut trouver A, x *et* δx *tel que cette inégalité soit égalité.*

Démonstration. La dernière assertion est prouvée en prenant $\delta A = I$ et y réalisant le maximum : $\max_{z \in \mathbb{K}^n} \frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}$. On prend $b = (A + \delta A)y$ et x tel que $Ax = b$. On a $\delta x = y - x$. Pour ce choix de matrice et vecteurs, l'inégalité (1.23) devient égalité.

1.3 Rayon spectral d'une matrice

Dans cette section on considère des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Definition (3)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que la polynôme caratéristique de A a n racines complexes. On appelle spectre de A et on note $sp(A)$ l'ensemble formé de ses n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). On appelle rayon spectral de A et on note

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| . \tag{1.24}$$

Proposition

Soit $|||$ *une norme matriciell sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *(ayant la la propriètè multiplicative (1.8)), alors*

$$\rho(A) \leq \|A\|\,. \qquad (1.25).$$

De plus pour toute matrice A *et pour tout réel positif* ε*, il existe une norme matricielle* $|||$ *subordonnée à une norme vectorielletelle que* $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Démonstration. Soit $|||$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut alors définir une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$ qu'on note $|||\ |||$ par $|||\, v\, ||| = \|M_v\|$ où

$M_v = (v, v, \cdots, v)$, il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme vectorielle sur $\mathbb{C}^n$. Soit λ une valeur propre de A telle que $\lambda = \rho(A)$ et v_λ vecteur propre correspondant : on a $\rho(A)|||v_\lambda||| = |||Av_\lambda||| = \|(Av_\lambda, Av_\lambda, \cdots, Av_\lambda)\| = \|AM_{v_\lambda}\| \leq \|A\| \; |||v_\lambda|||$. On a donc $\rho(A) \leq \|A\|$.

Pour le second point . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors il existe une base $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et une famille de complexes$(\lambda_{i,j})_{i,j=1,\cdots,n, j\leq i}$ telles que $Af_i = \sum_{j\leq i} \lambda_{i,j} f_j$. Soit $\eta \in]0,1[$, pour $i = 1, 2, \cdots, n$, on définit $e_i = \eta^{i-1} f_i$. La famille $(e_i)_{i=1,\cdots,n}$ forme une base sur $\mathbb{C}^n$. On définit alors une norme sur $\mathbb{C}^n$

par $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \bar{\alpha}_i\right)^{1/2}$, où les α_i sont les composantes de x dans la base $(e_i)_{i=1,\cdots,n}$.

Notons que cette norme depend de A et de η.

Comme $Ae_i = \sum_{1 \leq j \leq i} \eta^{i-j} \lambda_{i,j} \alpha_i e_j$, On a donc :

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq j \leq i} \eta^{i-j} \lambda_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} \eta^{i-j} \lambda_{i,j} \alpha_i \right) e_j.$$

On en déduit que

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\eta^{i-j}\lambda_{i,j}\alpha_i\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\eta^{i-j}\,\bar{\lambda}_{i,j}\bar{\alpha}_i\right),$$

Soit encore

$$\|Ax\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j,j}\,\bar{\lambda}_{j,j}\,\alpha_j\,\bar{\alpha}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k,l\geq j}^{(k,l)\neq(j,j)}\eta^{k+l-2j}\lambda_{k,j}\,\bar{\lambda}_{l,j}\,\alpha_k\,\bar{\alpha}_l\ .$$

Comme $\eta\in]0,1[$, on en conclut que :

$$\|Ax\|^2 \leq \rho^2(A)\,\|x\|^2 + n^3\rho^2(A)\eta\,\|x\|^2.$$

D'où le résultat, en prenant η tel que $n^3\rho^2(A)\eta < \varepsilon^2$. $\blacksquare$

Proposition (12)

Pour toute norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'implication

$$\|A\| < 1 \Longrightarrow (I + A) \text{ inversible.}$$

Si la norme $\|\|$ est de plus subordonnée à une norme vectorielle, alors

$$\left\|(I + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Démonstration. Si $(I + A)$ n'est pas inversible, il existe $u \neq 0$ tel que $Au = -u$, et $\|A\| \geq \rho(A) \geq 1$. Donc si $\|A\| < 1$ alors $(I + A)$ est inversible. Si la norme $\|\|$ est une norme subordonnée, on a $\|I\| = 1$ et $(I + A)^{-1} = I - A(I + A)^{-1}$, et donc
$\left\|(I + A)^{-1}\right\| \leq 1 + \|A\| \left\|(I + A)^{-1}\right\|$ ce qui donne le résultat désiré.