

Chapitre 1

Notions sur les erreurs

1.1 Introduction

En général, la résolution des problèmes scientifiques passe par une représentation mathématique des phénomènes mis en jeu. Ces phénomènes sont en général compliqués et multiples. Pour les représenter, on est amené à négliger certains paramètres et à simplifier d'autres. Même avec ces simplifications, les équations obtenues sont souvent insolubles par les méthodes analytiques connues. Par exemple, on ne sait pas trouver analytiquement, la solution des équations $x^5 + 3x^4 + 7x + 8 = 0$, $x = e^{-x}$, $\sin x + e^x = 0, \dots etc.$

C'est ici que l'analyse numérique se distingue des autres champs plus classiques des mathématiques. En effet, pour un problème donné, il est possible d'utiliser différents algorithmes de résolution. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres qui influent sur la précision du résultat. De plus, on utilise en cours de calcul des approximations plus ou moins précises. Par exemple, on peut remplacer une dérivée par une différence finie de façon à transformer une équation différentielle en une équation algébrique. Le résultat final et son degré de précision dépendent des choix que l'on fait.

Une partie importante de l'analyse numérique consiste donc à contenir les effets des erreurs ainsi introduites, qui proviennent de trois sources principales :

- les erreurs de modélisation ;
- les erreurs de représentation sur ordinateur ;
- les erreurs de troncature.

Ce chapitre traite principalement des erreurs numériques. La première source d'erreurs dans les calculs faits par un ordinateur provient d'abord des erreurs d'arrondi sur les données, puis des opérations effectuées sur les données. Il devrait donc permettre au lecteur de mieux gérer les erreurs au sein des processus numériques afin d'être en mesure de mieux interpréter les résultats.

1.2 Erreurs absolue et relative

Nombres exacts $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans } \mathbb{N} : 1, 3, 9; \\ \text{dans } \mathbb{Q} : \frac{2}{3}, \frac{1}{7}, \frac{10}{3}; \\ \text{dans } \mathbb{R} : \sqrt{5}, \pi, e. \end{array} \right.$

Soit x un nombre exact et x^* une valeur approchée de x , on écrit

$$x \simeq x^* \text{ ou } x \approx x^*.$$

- Si $x^* > x$, x^* est dite valeur approchée par excès.
- Si $x^* < x$, x^* est dite valeur approchée par défaut.

Exemples : $\frac{2}{3} \simeq 0,6666$, $\pi \simeq 3,14$, $\sqrt{5} \simeq 2,23$, sont des approximations par défaut mais $e \simeq 2,72$ est une approximation par excès.

1.2.1 Erreur absolue

Définition 1.1. On appelle erreur absolue du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $\Delta(x)$, définie par

$$\Delta(x) = |x - x^*|.$$

Commentaire : Plus l'erreur absolue est petite, plus x^* est précis.

Exemple 1.1. Pour la valeur exacte $x = \frac{2}{3}$, la valeur approchée $x_1^* = 0.666667$ est 1000 fois plus précise que la valeur approchée $x_2^* = 0.667$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta_1(x) &= |x - x_1^*| = \left| \frac{2}{3} - 0.666667 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{666667}{10^6} \right| = \frac{1}{3}10^{-6}, \\ \Delta_2(x) &= |x - x_2^*| = \left| \frac{2}{3} - 0.667 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{667}{10^3} \right| = \frac{1}{3}10^{-3}.\end{aligned}$$

1.2.2 Erreur relative

Définition 1.2. On appelle erreur relative du nombre approché x^* de x la quantité réelle positive, notée $r(x)$, définie par

$$r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x)}{|x|}$$

Commentaire : l'erreur relative est souvent exprimée en pourcentage (précision relative) par :

$$r\% = r(x) \times 100$$

Exemple 1.2. Pour les valeurs exactes $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{15}$ on considère les valeurs approchées $x^* = 0.67$ et $y^* = 0.07$, respectivement. Les erreurs absolues correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= |x - x^*| = \left| \frac{2}{3} - 0.67 \right| = \left| \frac{200-201}{3 \cdot 10^2} \right| = \frac{1}{3}10^{-2}, \\ \Delta(y) &= |y - y^*| = \left| \frac{1}{15} - 0.07 \right| = \left| \frac{100-105}{15 \cdot 10^2} \right| = \frac{1}{3}10^{-2}.\end{aligned}$$

Les erreurs relatives correspondantes sont :

$$\begin{aligned}r(x) &= \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x)}{|x|} = 0.5 \times 10^{-2} = 0.5\%, \\ r(y) &= \frac{|y - y^*|}{|y|} = \frac{\Delta(y)}{|y|} = 5 \times 10^{-2} = 5\%.\end{aligned}$$

Ainsi, bien que les erreurs absolues soient égales, x^* est une approximation 10 fois plus précise pour x que y^* l'est pour y .

1.2.3 Majorants des erreurs absolue et relative

Si la valeur exacte est connue on peut déterminer les erreurs absolue et relative. Mais dans la majorité des cas, elle ne l'est pas. Les erreurs absolue et relative deviennent alors inconnues, et pour les estimer on introduit la notion de majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative.

Définition 1.3. On appelle majorant de l'erreur absolue d'une valeur approchée x^* de x tout nombre réel positif noté Δx vérifiant :

$$\Delta(x) = |x - x^*| \leq \Delta x$$

ou de manière équivalente : $x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$, et on écrit :

$$x = x^* \pm \Delta x \quad \text{qui veut dire : } x \in [x^* - \Delta x, x^* + \Delta x]$$

Remarque 1.1. 1. Plus Δx est petit, plus l'approximation x^* est précise. D'où, en pratique, on prend le plus petit Δx possible.

2. Comme $x \simeq x^*$, en pratique on prend $r_x \simeq \frac{\Delta x}{|x^*|}$ qui est un majorant de l'erreur relative de x^* et on écrit $x = x^* \pm |x^*| r_x$.

3. A défaut de l'erreur absolue (l'erreur relative) effective, Δx (r_x) est appelé par abus de langage, erreur absolue (erreur relative) de x^* .

1.3 Représentation décimale des nombres approchés

On sait que tout nombre réel positif x peut être représenté sous la forme d'une représentation décimale de développement limité ou illimité :

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \dots$$

avec $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ pour $i \neq m$ et $a_m \neq 0$ où m est le rang supérieur de x (la plus grande puissance de 10).

Exemple 1.3. $5406,3080 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4}$
 $\pi = 3.14159265358\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \dots + 5 \cdot 10^{-10} + 8 \cdot 10^{-11} + \dots$
 $\frac{68}{3} = 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4} + \dots$

Remarque 1.2. Dans la pratique, les nombres utilisés x ont des représentations décimales limitées (car, en général, ce sont des nombres approchés).

- i. Tous les chiffres conservés a_i s'appellent chiffres significatifs du nombre approché x .
- ii. Certains des a_i peuvent être nuls.

1.3.1 Chiffre significatif (c.s)

Définition 1.4. On appelle chiffre significatif d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale différent de zéro; et un zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs, ou s'il constitue un chiffre conservé.

Exemple 1.4. Une approximation à 6 décimales de 0.00301045 est :

$$\underbrace{0.003}_{(1)} \underbrace{0}_{(2)} \underbrace{10}_{(3)}$$

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) : \text{Ne sont pas significatifs car ils ne servent qu'à indiquer les rangs des autres chiffres.} \\ (2) : \text{Etant placé entre les chiffres significatifs 1 et 3, zéro est lui même un chiffre significatif.} \\ (3) : \text{Ce zéro traduit le fait que le nombre approché a conservé la décimale } 10^{-6} \text{ est un chiffre significatif.} \end{array} \right.$$

Exemple 1.5. Les valeurs approchées $x^* = 0.0301009$, 400357 ont 6 chiffres significatifs (6 c.s.).

Remarque 1.3. 1. On ne peut pas connaître le nombre de chiffres significatifs de $x = 45800$ donné sous cette forme. Pour savoir, il faut soit sa représentation décimale, ou encore -d'une façon équivalente- connaître l'écriture sous la forme $(p, q) \times 10^s$. En effet;
 $x = x_1 = 4,58 \times 10^4$ (x_1 a 3 c.s.) ou encore $x = x_2 = 4,5800 \times 10^4$ (x_2 a 5 c.s.).

2. Sur un ordinateur, les nombres sont représentés en virgule flottante comme suit :
soit x un réel non nul, en virgule flottante x s'écrit sous la forme :

$$x = \pm 0.a_1 \dots a_N . b^E,$$

avec $b \in \mathbb{N}$ est la base, $a = 0.a_1 \dots a_N$ que l'on appelle la mantisse, $0 \leq a_i < b, a_1 \neq 0, E \in \mathbb{Z}$, l'exposant compris entre deux entiers m et M ($-m \leq E \leq M$) et $N \in \mathbb{N}$ le nombre de chiffres significatifs.

1.3.2 Chiffre significatif exact (c.s.e)

Soit x un nombre exact, x^* une valeur approchée de x dont sa représentation décimale (prise de gauche à droite) est :

$$x^* = \underbrace{a_m}_{1^{er} c.s.} 10^m + \underbrace{a_{m-1}}_{2^{eme} c.s.} 10^{m-1} + \dots + \underbrace{a_{m-n+1}}_{n^{eme} c.s.} 10^{m-n+1} + a_{m-n} \underbrace{10^{m-n}}_{rang du (n+1)^{eme} c.s.} \dots + a_k 10^k, \quad a_m \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.5. (importante) On dit que les n premiers chiffres significatifs d'un nombre x^* sont exacts si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas la moitié du rang du n^{eme} chiffre significatif. c'est à dire

$$\Delta x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}.$$

Proposition 1.1. Si un nombre approché possède n c.s. exacts alors :

$$r_x \leq 5 \cdot 10^{-n}.$$

Exercice 1.1. Donner une borne supérieure de l'erreur absolue et estimer l'erreur relative, si tous les chiffres significatifs des nombres approchés suivants sont exacts.

$$x_1 = 0,0019, \quad x_2 = 99,200, \quad x_3 = -34508, \quad x_4 = 0,000805.$$

Propriétés

- Si un chiffre significatif est exact, tous les chiffres à sa gauche sont exacts.
- Si un chiffre n'est pas exact, tous ceux à sa droite ne les sont pas.

Exemple 1.6. Soit $x = 35.97$ et $x^* = 36.00$, ici $m = 1$ car $x^* = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2}$.

$$\Delta x = |x - x^*| = 0,03 = 0,3 \cdot 10^{-1} < 0,5 \cdot 10^{-1}.$$

Alors $\begin{cases} m - n + 1 = -1 \\ m = 1 \end{cases} \implies n = 3$. Donc, x^* est une approximation de x avec trois chiffres significatifs exacts.

Remarque 1.4. La notion de chiffre significatif exact est purement mathématique, elle ne veut pas dire que les n premiers c.s. de x^* coïncident avec les n premiers c.s. de x ; l'exemple ci-dessus l'illustre bien.