Année Universitaire: 2025/2026

Département des sciences — Master: MAIE

Meknès — Module: Analyse fonctionnelle et applications (S_1)

Série de TD n°1

Exercice 1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.
1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$ topologiquement équivalente à la distance usuelle.
2. Montrer que d n'est pas équivalente à la distance usuelle.
3. Montrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 2. Soient (X, d) un espace métrique et δ une autre distance sur l'ensemble X.
1. Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes $\Leftrightarrow$ Elles définissent les mêmes suites convergentes.
2. On définit maintenant δ par

$$\delta = \frac{d}{1+d}.$$

(a) Montrer que δ et d sont topologiquement équivalentes. Sont-elles équivalentes?
(b) Montrer que (X, d) est complet si et seulement si (X, δ) l'est.

Exercice 3. Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $\alpha \in]0,1]$. On dit que $f : X \to Y$ est une fonction α Hölderienne, et on note $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(X, Y)$, s'il existe $M > 0$ tel que

$$d'(f(x), f(y)) \le M d(x,y)^\alpha, \quad \forall x, y \in X.$$

La plus petite constante M vérifiant cette propriété est notée $|f|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$.
1. Montrer que toute fonction α-Hölderienne est uniformément continue.
2. Si (X, d) est borné, montrer que toute fonction Lipschitzienne est α-Hölderienne pour tout $\alpha \in]0,1[$.
3. Donner un exemple de fonction α-Hölderienne qui ne soit pas Lispchitzienne.
4. On suppose que $(Y, d') = (E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que $\mathcal{C}^{0,\alpha}(X, E)$ est un espace vectoriel et que $|\cdot|c^{0,\alpha}$ est une semi-norme sur $\mathcal{C}^{0,\alpha}(X, E)$. Que manque-t-il pour obtenir une norme?

Exercice 4. On considère l'espace $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.
1. Montrer que, pour $f \in E$, les quantités suivantes sont bien définies et sont des normes sur E

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)| dx$$

2. Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.
3. Pour tout $n \ge 1$ et $x \in [-1,1]$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1/n \\ nx, & \text{si } -1/n < x < 1/n \\ 1, & \text{si } x > 1/n \end{cases}$$

Montrer que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$. Converge-t'elle dans cet espace?
4. Pour tout n et tout $x \in [-1,1]$, on pose $g_n(x) = x^n$. Discuter la convergence éventuelle de la suite $(g_n)_n$ dans les espaces $(E, \|\cdot\|1)$ et $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 5. Soit X un ensemble non vide. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons $\mathcal{B}(X, E)$ l'epace des fonctions $f : X \to E$ qui sont bornées. Pour

tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$.
1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.
2. Montrer que si E est complet, alors $\mathcal{B}(X, E)$ est complet.
3. Notons $l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ l'espace des suites bornées à valeurs dans K muni de la norme

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|\,, \quad \forall \mathbf{x} \in l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}).$$

En déduire que l'espace $l^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ est de Banach.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues réelles sur [0,1] muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
Montrer que l'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit F l'ensemble des suites réelles. On définit sur F la distance suivante:
$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$.
Montrer que F est complet.