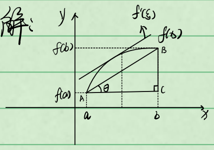
拉格朗日中值定理

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导

结论：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{函数差}{变量差}$

理解：



$f'(\xi)$：斜率

$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$　$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

在 a,b 间找到点 ξ，$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

将变求增量比变成一阶导

关键：找到函数差

常考：$\tan x=\tan x-\tan 0$

$\ln x=\ln x-\ln 1$

$af(a)-bf(b)=F(a)-F(b)$

$\arctan x=\arctan x-\arctan 0$

$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a$

题型：求解不等式证明

1. 双边不等式 左 ≤ □ ≤ 右

解法：函数差，看中间函数

2. 单边含绝对值不等式
3. 出现函数差，$f(b)-f(a)$

求解步骤

1. 找到函数差 $f(b)-f(a)$
2. 构造出增量比 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
3. 利用拉氏，将增量比变成 $f'(\xi)$ 来讨论

eg 对于任意 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明 $x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$ 成立

证明：令 $F(x)=\tan x$　$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，显然 $F(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 可导连续

欲证 $x<\tan x<\frac{x}{\cos^2 x}$ 成立

即证 $1<\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}<\frac{1}{\cos^2 x}$ 成立

而由拉氏定理可知：$\frac{\tan x-\tan 0}{x-0}=\sec^2\xi$，$\xi\in(0,x)$

即只需证 $1<\sec^2\xi<\frac{1}{\cos^2 x}$

即证：$1<\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2 x}$

$\because 0<\xi<x$　$\cos^2 x<\cos^2\xi<1$

$\therefore 1<\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2 x}$

即原式成立

eg 对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，证明 $|\arcsin x_1-\arcsin x_2|\geq|x_1-x_2|$

证明：① 当 $x_1=x_2$，显然：$|\arcsin x_1-\arcsin x_2|=|x_1-x_2|$

② 不妨设 $x_1>x_2$　$\frac{\arcsin x_1-\arcsin x_2}{x_1-x_2}\geq\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2}$

欲证原式立，即证 $\frac{\arcsin x_1-\arcsin x_2}{x_1-x_2}\geq 1$ 成立

由拉氏定理：　$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{\arcsin x_1-\arcsin x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$　ξ 介于 x_1,x_2 之间

$\because x_2<\xi<x_1$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\geq 1$

综上 $|\arcsin x_1-\arcsin x_2|\geq|x_1-x_2|$ 成立

eg 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 可导

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得：$\xi f'(\xi)+f(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$

证明：令 $F(x)=x\cdot f(x)$ 显然在区间 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 可导

$F'(x)=f(x)+x\cdot f'(x)$　由拉氏定理

右边：$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi\cdot f'(\xi)$　ξ 介于 a,b 间

综上 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$ 成立

eg 当 $0<a<b$ 时，证明：$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$

证明：令 $F(x)=x^n$ 显然幂函数连续可导

$F'(x)=n\cdot x^{n-1}$

欲证原式立，即证

$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}<n\cdot b^{n-1}$

由拉氏定理：$\frac{b^n-a^n}{b-a}=F'(\xi)=n\cdot\xi^{n-1}$

故只需 $na^{n-1}<n\cdot\xi^{n-1}<nb^{n-1}$ 成立

$\because a<\xi<b$，

$\therefore a^{n-1}<\xi^{n-1}<b^{n-1}$ 成立

综上原式成立

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(\xi)$$

eg：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\ln(1+x^3)}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$

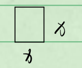
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot e^{\xi}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}\cdot 1$

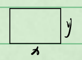
$=\frac{1}{6}$

多元函数微分学

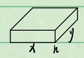
由多个变量确定的函数



$S=x^2$ 一元函数



$S=x\cdot y$ 二元函数



$V=x\cdot y\cdot h$ 三元函数

某函数 z 由两个变量同时确定时，称 $z=f(x,y)$ 为二元函数

二元函数定义域：x,y 的取值范围

二元函数定义域写法：$\{(x,y)\}$ x,y 需满足的条件

eg $z=\sqrt{y-x^2+1}$ 的定义域 $\{(x,y)\mid y-x^2+1\geq 0\}$

$y-x^2+1\geq 0$

eg $z=\ln(x^2+y^2-4)+\sqrt{9-x^2-y^2}$ 的定义域 $\{(x,y)\mid 4<x^2+y^2\leq 9\}$

① $x^2+y^2-4>0$ $x^2+y^2>4$ ② $9-x^2-y^2\geq 0$ $x^2+y^2\leq 9$

eg $z=\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域 $\{(x,y)\mid -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$ 且 $0<x^2+y^2<1$

① $-1\leq 2x\leq 1$，$-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$ ② $\ln(1-x^2-y^2)\neq 0$ $1-x^2-y^2\neq 1$，$x^2+y^2\neq 0$

③ $1-x^2-y^2>0$ $x^2+y^2<1$

二元函数对应法则 $f(\square\cdot\triangle)=x-x$，求 $f(x,y)$

解法 $\begin{cases}\text{换元}\\ \text{配凑}\end{cases}$

eg 设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$

解：$\because x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$\therefore f(x+y,x-y)=(x+y)(x-y)$

故 $f(x,y)=x\cdot y$

二元函数极限

若点 $P(x,y)$ 以任意方式趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 趋于一个常数 A

称 A 为 $f(x,y)$ 的极限

记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

eg $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{xy}{x}$

$=2$

二元函数偏导数

当 y 固定而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为二元函数时 x 的偏导数

反之称 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 为二元函数时 y 的偏导数

一阶偏导写法

设二元函数 $z=f(x,y)$

记 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$ $f_x(x,y)$ 由对 x 偏导

记 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$ $f_y(x,y)$ 对 y 偏导

一阶偏导计算

$\frac{\partial z}{\partial x}$：指对 x 求偏导，y 固定为一个常数（暂时看为常数）

$\frac{\partial z}{\partial y}$：指对 y 求偏导，x 固定为一个常数（暂时看为常数）

eg 设函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 则 $\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$

解：$\frac{\partial z}{\partial y}=3x\cdot 1+2y=3x+2y$

eg：若 $z=e^{xy}\cdot\sin 2y$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+2\cos 2y e^{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\cdot x+\sin 2y+e^{xy}\cdot\cos 2y\cdot 2=xe^{xy}+2\cos 2y e^{xy}$

eg 若 $z=f(x^2+2y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+2y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2+2y)\cdot 2x=2xf'(x^2+2y)$

全微分

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

eg 设 $z=x^2+xy$，求其在 $(1,0)$ 处的全微分

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y\big|_{(1,0)}=2$

$\frac{\partial z}{\partial y}=x\big|_{(1,0)}=1$

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2dx+dy$

eg 设函数 $z=e^{xy^2}$ 求 dz

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}\cdot y^2$ $\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy^2}\cdot 2xy$

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy^2}\cdot y^2+e^{xy^2}\cdot 2xy$

eg 设 $z=f(x^2-y^2)$ 其中 f 可微，求 dz

解 $\because\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xf'(x^2-y^2)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(x^2-y^2)\cdot(-2y)=-2yf'(x^2-y^2)$

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xf'(x^2-y^2)-2yf'(x^2-y^2)$

可微与偏导间关系

可微⇔可导⇒连续⇒极限⇒函数值

$z=f(x,y)$，偏导存在且连续⇒$f(x,y)$可微

$z=f(x,y)$ 可微⇒连续⇒极限

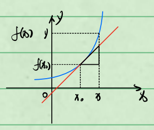
$z=f(x,y)$ 可微⇒偏导存在

偏导存在与连续无关

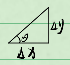
eg 若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)某一邻域内偏导$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$都存在，则$z=f(x_0,y_0)$可微（错）

可微本质

可微：指用$f(x)$在(x_0,y_0)处切线上的增量Δy来替代了曲线$f(x)$本身的增量Δy



增量：$\Delta y=f(x)-f(x_0)$



$\begin{cases}\tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ f'(x)=\tan\theta\end{cases} \Rightarrow f'(x_0)=\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x$

若：$\Delta y_{切}=\Delta y$ 则称可微

条件：$\Delta y-\Delta y_{切}=\Delta y-f'(x)\cdot\Delta x \Rightarrow 0$ 且$o(\Delta x)$

1. 写增量：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
2. 写线性增量：$A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$
3. 作极限：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0$ 可微

二元函数内：$z=f(x,y)$

1. 全增量：$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$
2. 线性增量：$\Delta z_{线}=A\Delta x+B\Delta y$
3. 作极限：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-\Delta z_{线}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

A：$\frac{\partial z}{\partial x}$ B：$\frac{\partial z}{\partial y}$

eg（若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导$f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$都存在，则有

A 存在常数k使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=k$ （极限存在）

B $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ （连续）

C $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$

析：$f_x(x_0,y_0)=\frac{df(x,y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ $f_y(x_0,y_0)=\frac{df(x_0,y)}{dy}\Big|_{y=y_0}$

D 当$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\to 0$时，

$\underbrace{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}_{全增量}-\underbrace{[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}_{线性增量}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

二阶偏导

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$：指z对x求两次偏导

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$：指z对y求两次偏导

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$：指z先对y后对x的二阶混合偏导

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：指z先对x后对y的二阶混合偏导

$z=f(x,y)$的两个混合偏导$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在闭区间D内连续

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

eg 设$z=x^3y^2$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2\cdot y^2$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y$

又$\because \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y$

eg 设函数$z=y^x$，则$z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=y^x\cdot\ln y$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x\cdot y^{x-1}\cdot\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}$

$=x\cdot y^{x-1}\cdot\ln y+y^{x-1}$

$=y^{x-1}(x\ln y+1)$

$\frac{\partial z}{\partial x}$时，y为常数

$y^x\to z^x\to a^x$

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$\therefore (y^x)'=y^x\cdot\ln y$

二元隐函数求偏导

不是 $z=f(x,y)$ 的二元函数,叫隐函数

用公式法求二元隐函数的一阶偏导

1. 令 $F(x,y,z)$
2. 求 F_x, F_y, F_z
3. 套公式: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}$

eg: 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+e^z=xy$ 所确定,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

解: 令 $F(x,y,z)=z+e^z-xy$

$\Rightarrow F_x=-y$, $F_y=-x$, $F_z=1+e^z$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}=\frac{y}{1+e^z}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}=\frac{x}{1+e^z}$

eg 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 dz

解: 令 $F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}$

$\therefore F_x=yz+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x\Big|_{(1,0,-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F_y=xz+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y\Big|_{(1,0,-1)}=-1$

$F_z=xy+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2z\Big|_{(1,0,-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

故: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=dx-\sqrt{2}dy$

隐函数的二阶偏导

1. 先用公式法求一阶导
2. 用导数公式直接求二阶导

注: 在求二阶导时,切记 z 是关于 x,y 的函数需要求导的

eg 设 $2x^2+y^2+z^2-4z=0$, 其中 $z=z(x,y)$ 求 $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,1)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(1,1,1)}$

解: 令 $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-4z$

$F_x=4x\Big|_{(1,1,1)}=4$, $F_y=2y\Big|_{(1,1,1)}=2$

$F_z=2z-4\Big|_{(1,1,1)}=-2$

故 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{-4x}{2z-4}=\frac{-2x}{z-2}\Big|_{(1,1,1)}=2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{-2(z-2)+2x\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(z-2)^2}\Big|_{(1,1,1)}=6$

多元复合函数求导

求导原则：从外向里，层层求导并相乘

链式法则：将每层函数关系写列（树状图）

分线相加，连线相乘

如 $z=f(x,xy^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$

令 $x=u$，$xy^2=v$，$z=f(u,v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=f'_u(u\cdot v)\cdot 1+f'_v(u\cdot v)\cdot y^2$$

题型一，具体多元复合函数求导 ⇒ 直接代入法

eg：设 $z=xy+3\ln x$，其中 $x=2u+v$，$y=u-2v$

求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$

解：由题可知：$z=(2u+v)\cdot(u-2v)+3\ln(2u+v)$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial u}=2(u-2v)+(2u+v)+3\cdot\frac{1}{2u+v}\cdot 2$$

$$=4u-3v+\frac{6}{2u+v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=(u-2v)+(2u+v)\cdot(-2)+3\cdot\frac{1}{2u+v}\cdot 1$$

$$=-3u-4v+\frac{3}{2u+v}$$

题型二抽象的复合函数求导

面对含 $f(□,△)$ 的复合求导

法 1.从外向里逐层求导

2.函数 f 要写为 f'

3.□用1替，△用2替

4.计算结果内容可省略不写括号

eg 设 $z=f(x,xy)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1(x,xy)\cdot 1+f'_2(x,xy)\cdot y$

$$=f'_1+yf'_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_2(x,xy)\cdot x$$

$$=x\cdot f'_2$$

eg 设 $z=xyf(x^2+y,x-y^2)$，其中 f 可微，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf+xy\cdot[f'_1\cdot 2x+f'_2\cdot 1]$

$$=yf+2x^2yf'_1+xyf'_2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf+xy[f'_1+f'_2(-2y)]$$

$$=xf+xyf'_1-2xy^2f'_2$$

eg 设 $z=f(xy,y)$，其中 f 具有二阶连续偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=f'_1(xy,y)\cdot y$

$$=y\cdot f'_1(xy,y)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y\cdot[f''_{11}\cdot x+f''_{12}\cdot 1]$$

$$=f'_1+xyf''_{11}+yf''_{12}$$

eg 设函数 $u=f(x,y,z)=x^3y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

解：① $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z^2+x^3y^2\cdot 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$

令 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$F_x=3x^2-3yz$$

$$F_z=3z^2-3xy$$

② $\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}=\frac{-(3x^2-3yz)}{3z^2-3xy}=\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$

故由①② ⇒ $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2z^2+2x^3y^2z\cdot\frac{yz-x^2}{z^2-xy}$