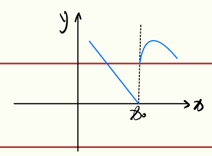
左右极限相关函数（需考虑左右极限的类型）

①分段函数：以分段点为界，左边一个函数，右边一个函数

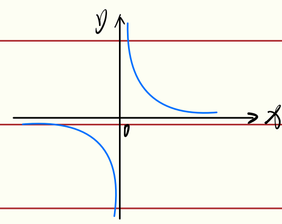


$x\to x_0$

$x\to x_0^-$　$x\to x_0^+$

考虑左右极限

② $y=\frac{1}{x}$

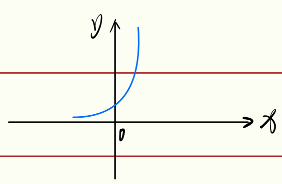


$x\to 0$

$x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to+\infty$

$x\to 0^-,\ \frac{1}{x}\to-\infty$

③指数函数 $y=e^x$

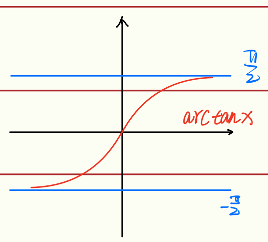


$x\to\infty$

$x\to+\infty,\ e^x\to+\infty$　　$e^{+\infty}\to+\infty$

$x\to-\infty,\ e^x\to 0$　　$e^{-\infty}\to 0$

④ arctanx



$x\to\infty$

$x\to+\infty,\ \arctan x\to\frac{\pi}{2}$

$x\to-\infty,\ \arctan x\to-\frac{\pi}{2}$

年青新

LA JEUNESSE

撰主生先秀獨陳

1、含绝对值的函数 $|x|\begin{cases}x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$

2、遇 e^{∞}，$\frac{c}{0}$，$\arctan\infty$

$x\to0^+$ $\frac{1}{x}\to\frac{1}{0^+}\to+\infty$

$e^{\frac{1}{x}}\to e^{+\infty}\to+\infty$

$x\to0^-$ $\frac{1}{x}\to\frac{1}{0^-}\to-\infty$

$e^{\frac{1}{x}}\to e^{-\infty}\to0$

eg：设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，求 $\lim_{x\to0}f(x)$

解：$\because \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)$

故 $\lim_{x\to0}f(x)$ 不存在

eg：设函数 $f(x)=\begin{cases}1+3x-e^{2x}, & x\le0\\ \frac{\ln(1-2x^2)}{\sin x}, & x>0\end{cases}$ 求 $\lim_{x\to0}f(x)$

解：$\because \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1+3x-e^{2x})=1-e^0=0$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1-2x^2)}{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2}{x}=0$

$\therefore \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$，故 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 极限存在。

eg 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\tan kx}{x} & x>0\\ \sin x+3, & x\le0\end{cases}$ 极限存在，则 $k=3$

解：$\because f(x)$ 极限存在

$\therefore \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$

其中：$\lim_{x\to0^-}(\sin x+3)=3$，$\lim_{x\to0^+}\frac{\tan kx}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{kx}{x}=k$

即 $k=3$

eg：$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}$

解：$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$

而 $\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}=-1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$

极限不存在

eg：函数 $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 证明 $\lim_{x\to0}f(x)$ 不存在

解：$\because \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

$=1$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

$=-1$

$\lim_{x\to0^+}f(x)\neq\lim_{x\to0^-}f(x)$ 极限不存在

夹逼定理（分母小，值越大，分母大，值越小）

定义：若函数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$，在x_0的邻域范围内有

$$f(x)\le g(x)\le h(x)$$

当$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$时，则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$

适用条件：无穷项求和型极限

使用步骤：确定极限函数

确定最小项，确定最大项

取极限：$n\cdot$最小项极限$\le$待求极限$\le n\cdot$最大项极限

由夹逼定理得出

eg：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n-1}+\frac{1}{n^2+n-2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n-n}\right)=0$（注 $n\cdot\frac{1}{n}=1$）

解：$\because \frac{1}{n^2+n-1}\cdot n\le \frac{1}{n^2+n-1}+\frac{1}{n^2+n-2}+\cdots\frac{1}{n^2+n-n}\le\frac{1}{n^2+n-1}\cdot n$

$\therefore$左边极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n-1}=0$

右边极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

故由夹逼定理原极限为0

eg：证明极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

解：$\because n^2\cdot\frac{1}{n^2+n\pi}\le n\cdot\left[\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right]\le n^2\cdot\frac{1}{n^2+\pi}$

$\therefore$左极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1$

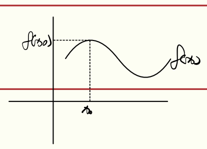
右极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$

故由夹逼定理原极限为1

函数的连续与间断

一、连续

定义：在x_0某邻域 有左极限 = 右极限 = 函数值



eg：设 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0 \\ x-2, & x<0 \end{cases}$ 讨论$f(x)$在$x=0$处是否连续

解：$x=0$时 $f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-2) = -2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+2) = 2$

∴ $f(x)$在$x=0$处不连续

eg：设 $f(x)=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在$x=0$处连续，则$a=e^{-1}$

解：$x=0$ $f(x)=a$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$

$a=e^{-1}$

eg：设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\geq 2 \\ x+a, & x<2 \end{cases}$ 在$x=2$连续，$a=1$

解：$x=2$，$f(2)=3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+a) = 2+a$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1) = 3$

$2+a=3$

$a=1$

eg：$f(x)=\begin{cases} x+a, & x\leq 0 \\ \ln(x+e), & x>0 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$连续 $a=1$

解：$x=0$，$f(0)=a$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+a) = a$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x+e) = \ln e = 1$

二、间断点的类型

定义：函数在定义区间，不再连续

间断点：指函数不连续的点

间断点分类：

分类标准：以间断点的左右极限是否存在作为划分的依据

第一类间断点：指函数左右极限均存在的间断

跳跃间断点：左极限≠右极限

可去间断点：左极限=右极限

第二类间断点：左、右极限不存在的间断点

无穷间断点：指左右极限为∞

振荡间断点：指 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 剧烈波动，无定值

如 $x_0=0$，且 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的振荡

间断点的判断

1. 分式中，分母=0的点 ⇒ 必间断

2. 分段函数的分段点 ⇒ 可能间断

3. 函数的无定义点 ⇒ 必间断

解法：

①找到可疑间断点

②分别找到间断点的左右极限

③根据左右极限情况定间断点类型

题型

1. 判断间断点个数

eg：函数 $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ 的间断点个数为 3

解：令 $(x+1)(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1, x_3=2$

函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ 的间断点个数为 2

解：令 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$，$x\geq 0$，$x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=2$，x_1舍去

2. 判断类型

eg：讨论 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \arctan\frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ 的间断点

解：在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

故左极限≠右极限，是跳跃间断点

eg：设 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ______ 间断点

解：$x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{0-1}{0+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1$

故左极限≠右极限，是跳跃间断点

eg：点 $x=0$ 是 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ 的可去间断点

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

eg：设 $x=0$ 是 $f(x)\begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}, & x>0 \end{cases}$ 的可去间断点 $a=1$

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{a-x}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

由于 $x=0$ 是 $f(x)$ 可去间断点

$\therefore \frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$

$a=1$

无穷小量及其比较

1、
- 无穷小量：若 $\lim f(x)=0$ 称此时的 $f(x)$ 为无穷小量（极限为0）
- 无穷大量：若 $\lim f(x)=\infty$ 称此时的 $f(x)$ 为无穷大量
- 注：0也是无穷小量

2、无穷小量与无穷大量的关系

$\frac{1}{\text{无穷大}}=$ 无穷小，$\frac{1}{\text{不为0的无穷小}}=$ 无穷大

无穷大的倒数　　无穷小的倒数

无穷小 $\begin{cases}\text{趋于0}\\ \text{0本身}\end{cases}$

eg 下列是无穷小量的是（A）

A $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$　$0\cdot\sin\infty$

B $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin x$　$\infty\cdot\sin\infty$　无界函数

C $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\sin x$　$\sin x\to x$　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

D $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$　$x\to\infty$ $\frac{1}{x}\to 0$　$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}=1$

eg 设 $f(x)$ 是个无穷小量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大量（错）

强调 $f(x)\neq 0$

eg 无穷小量是一个很小的数（错）

题型

① 判断两无穷小的关系

② 指出无穷小的阶数

③ 已知无穷小的阶，反求参数

解法：① 求 $\lim\frac{b}{a}$，根据结论得结果

② 优先用等价

eg：当 $x\to 0$ 时，$2x^3+x^2$ 与 x 的阶数

解法1：$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+x)=0$

$\therefore 2x^3+x^2$ 比 x 高阶

解法2：$\because 2x^3+x^2\sim x^2$ 为2阶，x 为1阶

$\therefore 2x^3+x^2$ 比 x 高阶

eg：$x\to 0$ 时，$\ln(1+2x^3)$ 和 $x\cdot\sin x^n$ 是同阶无穷小，则 $n=2$

解：$x\to 0$，$\ln(1+2x^3)\sim 2x^3$

$x\to 0$，$x\cdot\sin x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$

故 $n+1=3$，$n=2$

eg：$x\to 0$，$x-\sin x$ 比 $\sqrt{1+x^n}-1$ 高阶，但 $\sqrt{1+x^n}-1$ 比 e^x-1 高阶，则 $n=2$

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

解：$\sqrt{1+x^n}-1=(1+x^n)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^n$

$e^x-1\sim x^1$

eg：$x\to 0$，$(1+ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价，则 $a=-2$

解：$\because x\to 0$　$(1+ax^2)^{\frac{1}{4}}-1\sim\frac{a}{4}x^2$

$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，$\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}$

无穷小量加法运算：取次方最低

△ 无穷小量比较：指比较无穷小靠近0的速度快慢

无穷小量的阶：指 x 的次方，阶（次方）越高，越趋于0

△ 设 a、b 是两个无穷小

1、若 $\lim\frac{b}{a}=C\neq 0$，称 a 与 b 同阶　如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^4}{3x^4}=\frac{2}{3}\neq 0$

2、若 $\lim\frac{b}{a}=1$，称 a 与 b 等价

3、若 $\lim\frac{b}{a}=\infty$，称 b 比 a 低阶　如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3}{4x^6}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty$

4、若 $\lim\frac{b}{a}=0$　称 b 比 a 高阶　如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}4x=0$

5、若 $\lim\frac{b}{a^k}=C$　称 b 是 a 的 k 阶无穷小

eg：当 $x\to 0$，与 x^2 等价的是 C

A. $1-e^{x^3}$　　B. $1-\cos 2x$

A：$x\to 0$，$1-e^{x^2}=-(e^{x^2}-1)\sim -x^2$

B：$1-\cos 2x\sim\frac{1}{2}(2x)^2=2x^2$

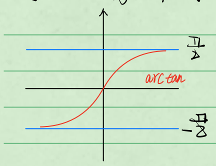
C. $\ln(1+x^2)$　　D. $\sqrt{1+x^2}-1$

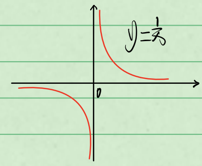
C：$\ln(1+x^2)\sim x^2$

D：$\sqrt{1+x^2}-1=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2$

曲线渐近线

定义：函数$f(x)$在变化过程无限接近一条直线





$y=\frac{\pi}{2}$与$y=-\frac{\pi}{2}$为$\arctan x$水平渐近线　　　　垂直渐近线

分类

水平：当$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$（常数）称$y=A$为$f(x)$的水平渐近线

垂直：当$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 称$x=x_0$为$f(x)$垂直渐近线（x_0：分母=0点，无定义点）

斜：当$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}a+\frac{b}{x}$，$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$

考点

指出$f(x)$渐近线条数

eg：求$y=\frac{2x+1}{(x-1)^2}$渐近线条数：2

解：水平：$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{(x-1)^2}=0$，则$y=0$，是水平、

垂直：$\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{(x-1)^2}=\infty$，则$x=1$，是垂直

eg：求$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$的斜渐近线

解：设$y=ax+b$为$f(x)$的斜渐近线

其中：$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{(x+1)\cdot x}=1$

$$
\begin{aligned}
b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x+1}-x\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3-x(x+1)}{x+1}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x-3}{x+1}\\
&=-3
\end{aligned}
$$

$\therefore y=x-3$

eg：求$y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线 $y=x+1$

解：$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

$$
\begin{aligned}
b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x)&=\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\\
&=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1
\end{aligned}
$$

$\therefore y=x+1$

导数

函数$f(x)$在某点x_0的导数

①定义式：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ $\left(\dfrac{\text{函数差}}{\text{变量差}}\right)$

引入：$x-x_0=\Delta x$

②增量式：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

注：①Δx可换成其余字母，h，t

②Δx为整体□

③$\Delta x\to 0$，谁趋于0，谁就是Δx

③引申公式：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{c\Delta x}=\dfrac{a-b}{c}\cdot f'(x_0)$

eg：已知$f(x)$在$x=x_0$可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

解：$h\to 0$ ∴ $h=\Delta x$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

eg：设$f(x)$在$x=a$处可导，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(a)$

解：① $\dfrac{1-(-1)}{1}\cdot f'(a)=2f'(a)$

② $\dfrac{(a+\Delta x)-(a-\Delta x)}{\Delta x}\cdot f'(a)=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}f'(a)=2f'(a)$

eg：设$f'(0)=a$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-f'(0)$

eg：设$f'(x_0)=-1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}$

解：① $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{-2-(-1)}{1}\cdot f'(x_0)}=1$

② $\dfrac{x}{x_0-2x-x_0+x\cdot f'(x_0)}$

$=\dfrac{x}{-x\cdot(-1)}$

$=1$

题型②：利用导数定义求函数$f(x)$在某点的导数

特点：一般给出的$f(x)$为复杂的多项式、乘积形式

eg 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)$，则$f'(0)=2010!$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-2010)$

$=(-1)\cdot(-2)\cdots(-2010)$

$=2010!$

eg：设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$，则$f'(0)=2020!$

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)$

$=1\times 2\cdots\times 2020=2020!$

题型③：已知$f(x)$某点导数，求相关极限

解法：根据导数定义，凑出相关极限

eg：设$f(x)$在R上连续，且$f(0)=0$，$f'(0)=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)}{x}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^x-1)-f(0)}{(e^x-1)-0}\cdot\dfrac{f(e^x-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{f(e^x-1)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{x}{x}$

$=2$

eg：已知$f(x)$在$x=0$处连续，且$f(0)=0$，$f'(0)=2$

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=1$

题型④：已知函数极限，求相关导数

eg：设$f(x)$在$x=a$处连续，且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=2$，

求$f'(a)$及$f(a)$

解：∵ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=2$ ∴ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

又$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}$

$=2$

左、右导数

左：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

函数在某点x_0可导条件：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

可导必要条件：可导函数必连续

证明：$f'(x_0)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$

$x\to x_0$，$f(x)-f(x_0)=0$　$f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

注：

可导 $\begin{cases}\text{连续}\Rightarrow\text{左极限}=\text{右极限}=\text{函数值}\\ \text{左导}=\text{右导}\end{cases}$

题型：① 已知函数可导，求参数

② 考可导⇒连续⇒极限

eg 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0\\ \sin ax+b, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，求 a,b

解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$x=0$，$f(0)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\sin ax+b)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$　$\Rightarrow b=1$

又∵ $f'_-(0)=f'_+(0)$

∴ $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin ax+1-1}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1\Rightarrow a=1$

eg 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x}, & x>0\\ ax+b, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，求 a,b

解：∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$x=0$，$f(0)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$　$\Rightarrow b=0$

又∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 处，$f'_-(0)=f'_+(0)$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}=1\Rightarrow a=1$

eg 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

A. 不连续　B. 连续但不可导

C 可导且 $f'(0)=1$　D 可导且 $f'(0)=0$

解：∵ $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=0$

又∵ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$