新青年

LA JEUNESSE

陳獨秀先生主撰

要目

原名青年雜誌

第二卷第一號

上海群益書社印行

新青年

LA JEUNESSE

陳獨秀先生主撰

上海群益書社印行

$x \xrightarrow[\text{法}]{f} y$.

$y=f(x)$

考点 1 ①定义域：指 x 的取值范围

②对应法则：指对 x 的加工

对于具体函数定义域

① $y=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$

② $y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geq 0$

③ $y=\sqrt[2n+1]{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$

④ $y=\log_a x$，$x>0$ $\quad \ln x$，$x>0$

⑤ $y=\tan x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$

⑥ $y=\cot x$，$x\neq k\pi$

⑦ $y=\arctan x$ $\quad y=\operatorname{arccot} x$，$x\in R$，$x\in(-\infty,+\infty)$

⑧ $y=\arcsin x$ $\quad y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$

注意整体思想 $\begin{cases} \text{分母}\neq 0, \ \frac{1}{x^2}, \ x^2\neq 0 \\ \frac{1}{2x+1} \quad 2x+1\neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{\square}$，$\square\geq 0$

$\frac{1}{\square}$ $\quad \square\neq 0$

eg：求 $y=\sqrt{2x+1}$ 的定义域　具体

解：$2x+1\geq 0$

$2x\geq -1$　$x\geq -\frac{1}{2}$

∴ $y=\sqrt{2x+1}$ 的定义域 $x\in[-\frac{1}{2},+\infty)$

eg 求 $y=\frac{1}{2x^2-x-1}$ 定义域

解：$2x^2-x-1\neq 0$

x　1
$2x$　-1

$(2x+1)(x-1)\neq 0$

$\begin{cases}2x+1\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -\frac{1}{2}\\ x\neq 1\end{cases}$

eg：求 $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 定义域

① $2x+1\geq 0$，$x\geq -\frac{1}{2}$

② $2x^2-x-1\neq 0$　$x\neq -\frac{1}{2}$，且 $x\neq 1$

∴ $x\in(-\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$

eg：$y=\frac{1}{\sin x}+\sqrt{1-x^2}$ 定义域

① $\sin x\neq 0$，$x\neq 0$

② $1-x^2\geq 0$　$x^2\leq 1$

∴ $[-1,0)\cup(0,1]$

$x^2\leq b\Rightarrow -\sqrt{b}\leq x\leq\sqrt{b}$

二次函数

1 求根公式

2、十字相乘

3 完全平方和差

① $y=ax^2+bc+c=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

② $x^2+(a+b)x+ab=0$

$=(x+a)(x+b)$

③ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

抽象函数定义域

题型 已知 $f(\square)$ 定义域，求 $f(\triangle)$ 中 x 的范围（定义域）

解法：两函数对应法则一样，则各自括号的范围应相同

若 $a \le \square \le b$，则令 $a \le \triangle \le b$，求解 x

例 $f(x)$ 中 $x \in [-1,3)$，则 $f(x+2)$ 定义域

解：∵ $f(x)$ 中 $-1 \le x < 3$

∴ $f(x+2)$ 中 $-1 \le x+2 < 3 \Rightarrow -3 \le x < 1$

∴ $x \in [-3,1)$

例 $f(2-4x)$，$x \in [-1,3)$，则 $f(x)$ 定义域

解：∵ $f(2-4x)$ 中 $-1 \le x < 3$

∴ $-10 < 2-4x \le 6$

∴ $f(x)$ 中 $-10 < x \le 6$

∴ $x \in (-10,6]$

根据函数对应法则，求函数表达式

① 已知 $f(x)$，求 $f[f(x)]$ / 已知 $f(x)$ $g(x)$，求 $f[g(x)]$（直接代入法）

eg $f(x)=e^x$，$g(x)=\sin x$ 求 $f[g(x)]$

解：$\because f(x)=e^x$ $\therefore f[g(x)]=e^{g(x)}$ $\Rightarrow f[g(x)]=e^{\sin x}$

eg：设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f[f(x)]$

解：$\because f(x)=\frac{1}{1-x}$

$\therefore f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=-\frac{1-x}{x}$

② 知 $f(\square)=\triangle$，求 $f(x)$

1：换元法：a：令 $\square=t$

b：由 $\square=t$，反解 x

c：回代，化简计算

eg：设 $f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x}{2x-1}$，求 $f(x)$

解：令 $\frac{1}{x}-1=t$，$x=\frac{1}{t+1}$

$\therefore$ 原式 $=f(t)=\frac{1}{1-t}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{1-x}$

$f(t)$ 将 $x=\frac{1}{t+1}$ 代入 $\frac{x}{2x-1}$ 得

$\frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{2}{t+1}-1}=\frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{2}{t+1}-\frac{t+1}{t+1}}$

$=\frac{1}{t+1}\cdot\frac{t+1}{1-t}=\frac{1}{1-t}$

③配凑法

$f(\square)=\triangle \to =\square^2+1$

$f(\square)=\square^2+1$

$f(x)=x^2+1$

将右边凑成口的形式

三角函数：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

eg：设 $f(\cos^2x)=\tan^2x$，求 $f(x)$，及 $f(2x)$

析：$\tan^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}$

$\sin^2x+\cos^2x=1$

解：$\because \tan^2x=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}$ $\therefore f(\cos^2x)=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}$

$\therefore f(x)=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1$

$f(2x)=\frac{1-2x}{2x}=\frac{1}{2x}-1$

新青年

LA JEUNESSE

陳獨秀先生主撰

反函数

(1) 定义：以y为自变量、x为因变量的函数

记作：$y=f^{-1}(x)$

(2) 求解反函数的过程

(1) 由 $y=f(x) \xrightarrow{\text{解出}x}$ (2) $x=f(y) \xrightarrow{\text{互换}x,y} y=f^{-1}(x)$

eg：求 $y=x-2$ 的反函数

$\because x=y+2$

$\therefore y=x+2$

eg：$y=e^{x}+1$ 的反函数

$\ln e^{x}=\ln(y-1)$

$\Rightarrow x\ln e=\ln(y-1)$

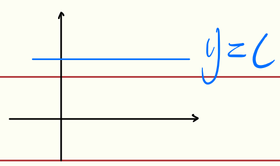
$\Rightarrow x=\ln(y-1)$

$\therefore$ 反函数为 $y=\ln(x-1)$

$\ln e=1$

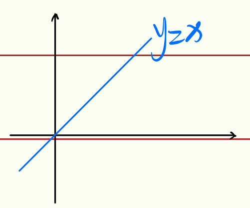
$\ln 1=0$

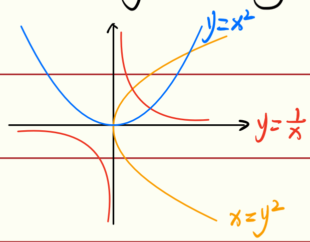
① 常数函数

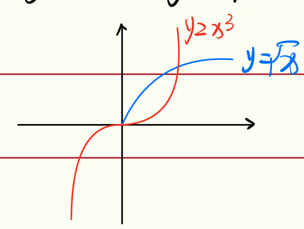


关于y轴对称

② 幂函数：$y=x^a$　$y=x$　$y=x^2$　$y=x^3$　$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$







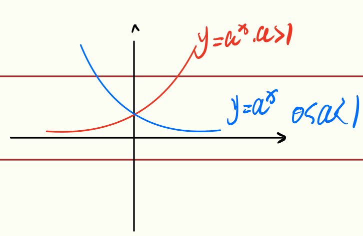
公式：$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

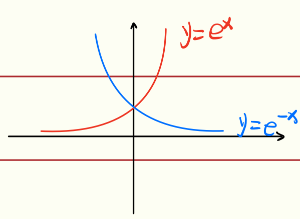
$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

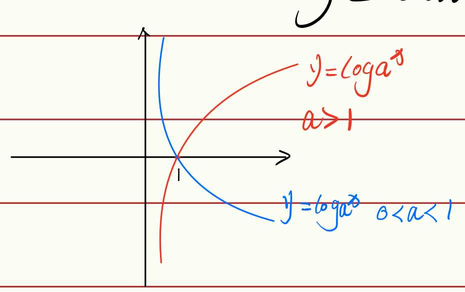
③ 指数函数：$y=a^x$　$a>0$、$y=e^x$　$e\approx 2.718$





④ 对数函数　$y=\log_a x$　$x>0$　$x=a^y$　* $\ln x=\log_e x$

$y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$　$y=\log_e x$



公式：$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$

$y=\log_e x=\ln x \Leftrightarrow x=e^y$

四则运算：$\ln a+\ln b=\ln a\cdot b$

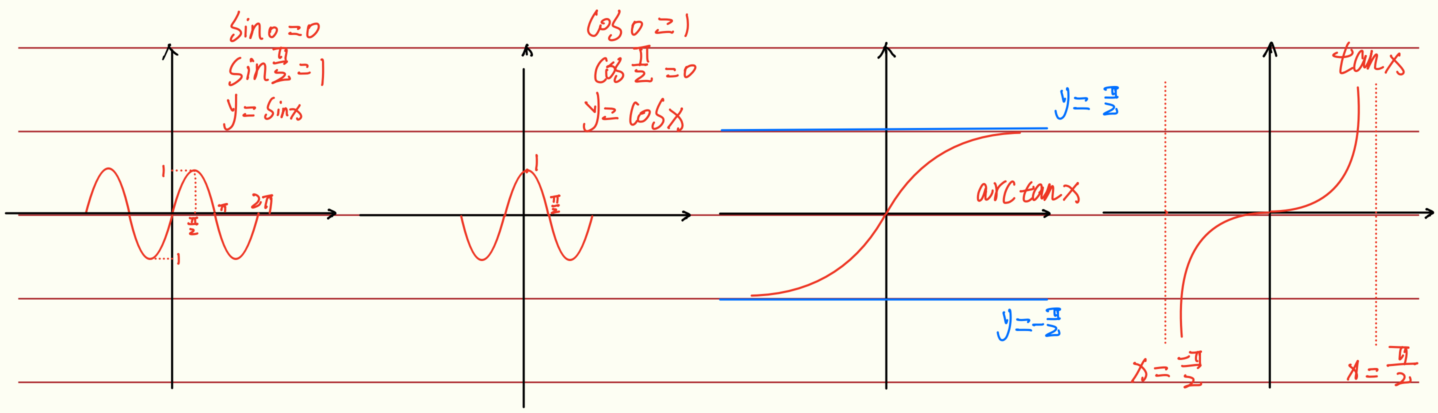
$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$

$\ln a^b=b\ln a$

$u^v=e^{v\ln u}=e^{\ln u^v}$

新青年
LA JEUNESSE
陳獨秀先生主撰

三角函数



$\sin(0)=0$ $\cos(0)=1$ $\tan 0=0$

$\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ $\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan(\frac{\pi}{4})=1$

$\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ $\tan(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

$\sin(\frac{\pi}{2})=1$ $\cos(\frac{\pi}{2})=0$

反三角

$\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$

$\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$

$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$\arctan(0)=0$

平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$

$\tan^2\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$

$\cot^2\alpha+1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha$

2倍角

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

降次

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$　　$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\frac{1}{1+\cos x} \Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$　　$\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　立方和差：$a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

完全平方和差：$(a \pm b)^2=a^2 \pm 2ab+b^2$

复合函数及其分解

称 $y=f[g(x)]$ 为复合函数

分解原则：从外向里、层层递进，分解到含 x 的基本初等函数.(注：每层用 u、v、w)

例：$y=\sin(2x)$

解：① $y=\sin u$　② $u=2x$

eg：$y=\sin^2 x$　　$y=\sin x^2$

解：① $y=u^2$　② $u=\sin x$　　解：① $y=\sin u$　② $u=x^2$

eg：$y=\sin(\ln\sqrt{x^2-1})$

解：$y=\sin u$　$u=\ln v$　$v=\sqrt{w}$　$w=x^2-1$

函数的四大性质

一、函数的奇偶性

① 条件 ⇒ $f(x)$ 的定义域关于原点 $(0,0)$ 对称

② 结论：

a. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称 ⇒ 称 $f(x)$ 为偶函数

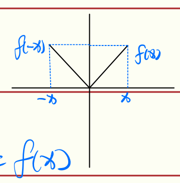
注：此时 $f(-x)=f(x)$

b. $f(x)$ 的图像关于原点对称 ⇒ 称 $f(x)$ 为奇函数

注：此时 $f(-x)=-f(x)$

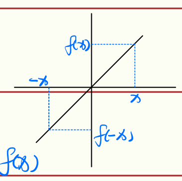
C. 理解

1、$f(x)$ 偶



$f(-x)=f(x)$

2、$f(x)$ 奇



$f(-x)=-f(x)$

二、有界性

若 $f(x)$ 函数值是固定在某个范围内，称 $f(x)$ 有界
$m \le f(x) \le M$，称 M 为上界，m 为下界。
如 $\arctan x$　$\cos x$、$\sin x$ 考虑有界性

考点：0、有界 ≥ 0

三、单调性

若 $f(x)$ $x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$ ⇒ $f(x)\uparrow$

$x_1<x_2$　$f(x_1)>f(x_2)$ ⇒ $f(x)\downarrow$

四、周期性

每过一段时间重复函数。$f(x)=f(x+T)$

常见奇函数与偶函数

① 奇函数：$x^{奇数}$　$\sin x$、$\arcsin x$、$\tan x$、$\arctan x$

② 偶函数：$x^{偶数}$　$\cos x$、$|x|$、常数 C

奇偶函数四则运算性质

奇 ± 奇 = 奇　偶 ± 偶 = 偶　奇 ± 偶 = 非奇非偶

奇 ×(÷) 奇 = 偶　奇 ×(÷) 偶 = 奇　偶 ×(÷) 偶 = 偶

复合函数的奇偶性

奇(奇) = 奇、奇(偶) = 偶　偶(奇) = 偶

全奇则奇，遇偶则偶

eg. $y=x^4\cdot\sin x$ 的奇偶性：奇函数

eg：下列函数为奇函数的是：B

A、$\sin(\cos x)$　B、$\tan(\sin x)$ 全奇　C. $\tan(\cos x)$　D. $\cos(\cot x)$

题型一、含常见具体函数、首先用函数性质判断奇偶性。

eg：设 $f(x)=x^4\cdot\sin x^3$ ⇒ 偶·奇 ⇒ 奇

题型二、含 $f(x)$ 的表达式，用定义判断

① 令 $f(x)$ ⇒ ② $f(-x)$ ③ $\begin{cases} f(-x)=f(x) \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$

eg：设 $g(x)=f(x)+f(-x)$，判断 $g(x)$ 奇偶性.

解：∵ $g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$

∴ $g(-x)=g(x)$

∴ $g(x)$ 为偶

$f(x)+f(-x)$ ⇒ 偶　　$f(x)-f(-x)$ ⇒ 奇

eg　设 $f(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot\sin x^2$ 的奇偶性.

解：令 $f(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot\sin x^2$

∵ $f(-x)=\left(\frac{e^{-x}+e^x}{2}\right)\cdot\sin x^2$

∴ $f(x)=f(-x)$ 为偶

eg：设 $f(x)$ 在 $x\in R$ 上为任意函数，则下列函数为偶函数的是 D

A $f(x)-f(-x)$ 奇

B. $[f(x)]^2$ 令 $g(x)=[f(x)]^2$，$g(-x)=[f(-x)]^2$ 无法定奇偶性

C. $|f(x)|$ 令 $g(x)=|f(x)|$，$g(-x)=|f(-x)|$ 无法定奇偶性

D $f(|x|)$ 令 $g(x)=f(|x|)$，$g(-x)=f(|x|)=f(|x|)$ 为偶

极限

描述函数在一定条件下的趋势

① 函数极限：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，A为确定的数

② 数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=B$，B为确定的数　注：$n\to+\infty$，$x_n\to A$，则 $x_{2n+1}\to A$，$x_{2n}\to A$（任一子列也收敛）

③ 左右极限
左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

④ 极限存在：左右极限存在且相等

⑤ 注：$f(x)$ 在某点 x_0 处的极限值与 $f(x)$ 在该点有无定义/$f(x)$ 无关

函数极限计算

四则运算（前提条件：极限存在）

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$B\neq 0$

极限计算小知识

① 习惯：a. 先定型 → 将 $x\to x_0$ 中 x_0 代入 $f(x)$ 中

b. 定法：根据类型定方法

② 注：在定型的时候，可将非零的常数都先计算（非零因子先代入）
乘、除关系中

③ $\dfrac{c}{\infty}=0$，$\dfrac{c}{0}=\infty$

极限小结

① $\frac{\infty}{\infty}$ $\begin{cases}\text{抓大头}\\ \text{洛必达}\end{cases}$ ② $\frac{0}{0}$ $\begin{cases}\text{等价}\\ \text{洛必达}\end{cases}$ ③ $0\cdot\infty$ 正放 → $\begin{cases}\frac{0}{0} & x\cdot\ln x\to 0\\ \frac{\infty}{\infty}\end{cases}$

④ $\infty-\infty$ $\begin{cases}\text{分式}\Rightarrow\text{通分}\\ \text{根式}\Rightarrow\text{平方差，有理化)}\end{cases}$ ⑤ u^v $\begin{cases}1^\infty & u^v=e^{\lim(u-1)v}\\ \text{非}1^\infty & \text{利用 } u^v=e^{v\ln u}\end{cases}$

注 ① 非零因子先求
② 等价替换条件(□→0，乘除)
③ 0·有界=0

$\frac{\infty}{\infty}$ 型极限

① 分子→∞，分母→∞的极限
② 解法：抓大头。
③ 题型 ($x\to+\infty$，$1\ll x\ll x^2\ll x^3$ ⇒ 次方越高，值越大)

a. 幂函数：储备：$x\to+\infty$ 抓次幂大项

eg：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3+n+4}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3}$
$=2$

eg $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+n}$
$=\frac{1}{2}$

解法二：分子分母同除式子中的最高次放

eg $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+1}{4x^3-2x^2+x-4}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}$
$=\frac{1}{2}$

b. 指数. 解法：抓底数最大项

a^x

eg：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x-7^x}=1$

c. 逆过：抓大头，求参数

$\frac{\infty}{\infty}$ 型极限存在，反求参数 a，b

1. 看分母最高次，再看分子最高次
2. 分母最高次 = 分子最高次，值为非零常数。

分母最高次 > 分子最高次，值为 0

极限存在 $\frac{\infty}{\infty}$ ⇒ 分母最高次 ≥ 分子最高次

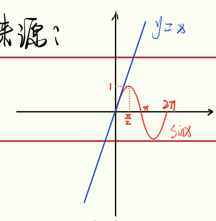
eg 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a+1)x^3-bx^2+x-1}{2x^2+3}=4$.
则 $a=-1$ $b=-8$

解：$a+1=0$，$a=-1$
故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-bx^2+x-1}{2x^2+3}=-\frac{b}{2}=4$
$b=-8$

$\frac{0}{0}$型极限

定义：分子→0，分母→0

等价来源：



解法：利用等价无穷小量 求解

常用等价公式

① 使用条件：在乘除关系使用，加减运算慎用，趋于0使用
② 怎么用：所用为可替换的口

当 $x\to0$ 时

$$\begin{cases}\sin x\sim x\\ \arcsin x\sim x\end{cases}\quad\begin{cases}\tan x\sim x\\ \arctan x\sim x\end{cases}\quad\begin{cases}e^{x}-1\sim x\\ \ln(1+x)\sim x\end{cases}$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}\Leftrightarrow(1+ax)^{b}-1\sim abx$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\qquad\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3\qquad\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$a^{x}-1\sim x\ln a\qquad\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$$

题型一、

eg：已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin mx}{2x}=\frac{3}{2}$，求 $m=1$

解：$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin mx}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3mx}{2x}$

$=\frac{3}{2}m$

$\therefore m=1$

eg：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}\cdot x^2}$

$=2$

eg：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\sin 2x+1}-1}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x}$

$=1$

$\sqrt{\sin 2x+1}-1=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}}-1$

$\sim\frac{1}{2}\sin 2x$

题型二、极限存在

适用情况：分子→0，分母→0，
分母→0，分子→0

eg：$\lim\limits_{x\to0}\frac{a-2e^{x}}{x^2-x}$ 存在，则 $a=2$

解：$\because x\to0$，$x^2-x\to0$ $(e^0=1)$

$\therefore a-2e^{0}-x\to0$

即：$a-2e^{0}-0=0$

$a-2=0$

$a=2$

易错 $0\cdot$有界$=0$

遇 $\sin\infty$, $\cos\infty$, $\arctan\infty$ 就先考虑 $0\cdot$有界$=0$

eg: $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$ 　　 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$

$x\to0$, $\frac{1}{x}\to\infty$ 　　 $x\to+\infty$, $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$

eg: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\sin x}{x}+x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x+\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}$

$=1$

洛必达法则($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$型)

$\lim\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=}\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=A$

注: ①分子分母各自同时求导

②洛必达法则,一般会配合等价使用,万事不行 洛必达

eg: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^4-1}=\frac{5}{4}$

解: 原式 $=\frac{5x^4-0}{4x^3-0}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{5x}{4}$

$=\frac{5}{4}$

新青年

LA JEUNESSE

陳獨秀先生主撰

$0\cdot\infty$ 型极限

解法：下放、然后洛必达

$0\cdot\infty \Rightarrow$ { 对0取倒数，下放作分母 $0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$（$\ln$、幂）; 对$\infty$取倒数，下放作分母 $0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$（幂、指）}

注：① 下放原则 ⇒ 一般下放简单易求导的函数

② 遇到有三角函数（$\tan x$，$\cot x$）先化简

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

eg：$\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x$ （$x^a\cdot\ln\square=0$）

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot(-\frac{x^2}{1})=\lim\limits_{x\to0^+}-x=0$

eg：$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\cdot\ln x$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x$

$=0$

eg：$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\tan\frac{\pi}{2}x$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{2}{\pi}$

$\infty-\infty$ 型极限

题型 { 分式 ⇒ 通分; 根式 ⇒ 有理化 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ }

eg：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}(\frac{x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3})$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$

$=\frac{1}{6}$

eg：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+1}-x)(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$

$=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$

$=\frac{4x+1}{x+2x+1+\sqrt{x}}$

$=\frac{4x}{2x}$

$=2$

eg：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\sin 2x+1}-1}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{\sin 2x+1}-1)\cdot(\sqrt{\sin 2x+1}+1)}{(\sqrt{\sin 2x+1}+1)\cdot x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+1-1}{(\sqrt{\sin 2x+1}+1)\cdot x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}$

$=2$

u^v型极限

$$u^v\begin{cases}1^\infty\\ 不是1^\infty,\ (0^0,\infty^0)\end{cases}$$

一、1^∞

1. 第二重要极限：$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$

2. 解法：$u^v \overset{1^\infty}{=} e^{\lim(u-1)\cdot v}$、次方较多 $e^{\ln\square}=\square \Leftrightarrow u^v=e^{v\ln u}$（幂指函数对数化）

eg：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac12x^2}{x^2}}$

$=e^{-\frac12}$

eg：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2+2x}\right)^x$

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2+2x}-1\right)\cdot x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2+2x}-\frac{2+2x}{2+2x}\right)\cdot x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2+2x}}$

$=e^{\frac12}$

eg：设 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac1x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin kx)}{x}$

则 $k=e^2$

解：$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac1x}=e^{\lim\limits_{x\to0}2x\cdot\frac1x}=e^2$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin kx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{kx}{x}=k$

$k=e^2$

二、不是1^∞，$(0^0,\infty^0)$

解法：$u^v \overset{不是1^\infty}{=} u^v=e^{v\ln u}$ 转化成复合型极限

eg：求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac1x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac1x}{-\frac1{x^2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}-x}$

$=e^0=1$