函数不可导的情况

1、左导≠右导，即尖点处

2、导数为∞

eg：讨论函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=1$

$\because f_-'(0)\neq f_+'(0)$，$f(0)$ 不存在

eg 讨论函数 $y=x^2|x-1|$ 在 $x=1$ 处可导性

解 $f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2\cdot(-(x-1))}{x-1}=-1$

$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2(x-1)}{x-1}=1$

$\therefore f_-'(1)\neq f_+'(1)$，$f'(1)$ 不存在

eg 讨论 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处的可导性

解：$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$=\infty$

eg：设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充要条件是 C

A $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

B $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

C $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

D $\lim\limits_{h\to +\infty}\{h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]\}$ 存在

求导公式

常数：$C'=0$

幂函数：$(x^a)'=ax^{a-1}$

$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$　$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

指数：$(a^x)'=a^x\ln a$

$(e^x)'=e^x$

对数：$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

三角函数：$(\sin x)'=\cos x$　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

反三角函数：$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　$(\text{arccot}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

导数 四则运算，复合运算

1. 四则运算

设 u, v 为函数

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(k \cdot u)' = k \cdot u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

eg 求 $y = 2\sin x + \cos x \cdot e^x - \sqrt{x}$ 的导数

解：$y' = 2 \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot e^x + \cos x \cdot e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 2\cos x - \sin x e^x + \cos x e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. 复合函数运算 $y = f[g(x)]$

原则：从外向里，层层求导，每层相乘

eg：求 $y = \sin x^2$ 的导数，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ $\quad (x^a)' = a x^{a-1}$

解：$\because y' = \cos x^2 \cdot 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \cos 0 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

初等函数求导

eg：设 $y = \cos x \cdot x^2$，求 y'，和 $y'|_{x=0}$ $\quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$

解：$y = (\cos x)' \cdot x^2 + \cos x \cdot (x^2)'$

$= -\sin x \cdot x^2 + \cos x \cdot 2x$

$= -x^2 \sin x + 2x\cos x$

故 $y'|_{x=0} = 0$

eg 设 $y = x^e + e^x$，求 y'

解：$y' = e \cdot x^{e-1} + e^x$

eg：设函数 $y = x \cdot f(\arctan\sqrt{x})$，其中 $f(u)$ 可导，求 $\frac{dy}{dx}$

解：$y' = (x)' \cdot f(\arctan\sqrt{x}) + x \cdot [f(\arctan\sqrt{x})]'$

$= 1 \cdot f(\arctan\sqrt{x}) + x \cdot f'(\arctan\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= f(\arctan\sqrt{x}) + \frac{x \cdot f'(\arctan\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+x)}$

复合函数求导

类型一：具体函数求导［不含 $f(x)$］

eg：设 $y = \sin x^3$，求 y'

解：$y' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos x^3$

eg：$y = e^{x^2+2x-1}$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

解：$y' = e^{x^2+2x-1} \cdot (2x+2)$

$= 2(x+1)e^{x^2+2x-1}$ $\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x} = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$

eg：设 $y = \ln(1+e^{x^2}) + \sin 2x$，求 $\frac{dy}{dx}$

解：$y' = \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot (0 + e^{x^2} \cdot 2x) + \cos 2x \cdot 2$

$= \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} + 2\cos 2x$

类型二：抽象复合函数 $f[g(x)]$ 注：f 也要求导，$f(x) \xrightarrow{\text{导}} f'(x)$

eg：设 $y = f(\sin x)$，且 $f(u)$ 可导，求 $y' =$

解：$y' = f'(\sin x) \cdot \cos x$

复合函数易错题讲解

公式：$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

对数：$\ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$

$\ln a\cdot b = \ln a + \ln b$

$\ln a^b = b\cdot \ln a$

eg：设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$，求 $y'=$

解：∵ $y=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1-x}{1+x}$

$= \frac{1}{2}\cdot[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$

∴ $y' = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$

eg：设 $y=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

解：$y=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x+2})^2}$

$= \frac{2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{-1}$

$= 2\sqrt{x^2+3x+2} - 2x - 3$

∴ $y' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+2}}\cdot(2x+3) - 2$ $\qquad x^2 = 2x^{2-1}$

$= \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}} - 2$ $\qquad 3x = 3$ $\qquad 2x = 2$

分段函数求导

回顾：$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\le a \\ g(x), & x>0 \end{cases}$

求导原则

①分段点两侧，直接求导

②中间分段点处，用定义求导

eg：若 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$ 以下错误的是 D

A. $f_-'(0)=1$ B. $f_+'(0)=0$ C. $f'(0)$ 不存在 D. $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\ge 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$

解：A：$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0} = 1$

B：$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

C：∵ $f_-'(0) \ne f_+'(0) \Rightarrow f'(0)$ 不存在

D：当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$
当 $x<0$ 时，$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$
当 $x=0$ 时，$f'(0)$ 不存在
$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$

eg 若使 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x)^2, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，则 $a、b=$

解：$f_-'(0)=f_+'(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

其中 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}b(1-x)^2=b$

$f(0)=1$ ∴ $b=1$

又 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1-x)^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2(1-x)\cdot(-1)}{1}=-2$

∴ $a=-2$

eg 设 $f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\frac{2}{x}, & x>0 \\ 2x^2, & x\le 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 C

A 极限不存在 B 极限存在但不连续 C 连续但不可导 D. 可导

解：A $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}x\cos\frac{2}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

B $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ $f(0)=0$ $f(x)$ 连续

又 $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\cos\frac{2}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\frac{2}{x}=$ 不存在

$f'(0)$ 不存在 不可导

隐函数求导

定义：

1. 形如 $y=f(x)$，称为显函数，如：$y=e^x$，$y=x^2$

2. 隐函数：不是 $y=f(x)$ 形式的函数（非显即隐）

如 $y-x^2-1=0$ $\quad y=e^{xy}$

解法

1. 公式法

a. 对题干函数移项（用方程左边-右边）

得 $F(x,y)=0$

b. 求偏导 F_x：对 x 求导，y 看作是常数

F_y：对 y 求导，x 看作是常数

C. 套公式：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ 注：上 F_x，下 F_y

eg：设函数 $y=y(x)$，由 $y^2-2xy+9=0$ 确定

求 y'

解：令 $F(x,y)=y^2-2xy+9$

$\because F_x=-2y \quad F_y=2y-2x$

故 $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{2y}{2y-2x}=\frac{y}{y-x}$

eg：设 $y^2+\sin(2x-y)=x$，确定隐函数

$y=y(x)$ 求 $\frac{dy}{dx}$

解：令 $F(x,y)=y^2+\sin(2x-y)-x$

$\because F_x=\cos(2x-y)\cdot 2-1$

$=2\cos(2x-y)-1$

$F_y=2y+\cos(2x-y)\cdot(-1)$

$=2y-\cos(2x-y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{-2\cos(2x-y)-1}{2y-\cos(2x-y)}$

eg：求由方程 $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定隐函数

$y=y(x)$ 的导数

解：$\because F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot y(-\frac{1}{x^2})$

$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}$

$=\frac{x+y}{x^2+y^2}$

$F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y-\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}$

$=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1\cdot x}{(x+\frac{y^2}{x})\cdot x}$

$=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}$

$=\frac{y-x}{x^2+y^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y}=-\frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}}$

$=\frac{-x+y}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{y-x}$

$=-\frac{x+y}{y-x}$

参数方程求导

定义：x 与 y 通过中间变量 t 间接建立的函数关系式

写法：$\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases}$ t：参数

求导原则

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{y\text{对}t\text{求导}}{x\text{对}t\text{求导}}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'(t)}=\frac{\text{一阶导对}t\text{求导}}{x\text{对}t\text{求导}}$

eg 曲线 $\begin{cases} x=t^2 \\ y=4t \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的导数为

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$，其中 $y'(t)=4$ $\quad x'(t)=2t$

$\therefore y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{4}{2t}=\frac{4}{2}=2$

eg：求参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$ 所确定导数 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$y'(\theta)=a\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$

$x'(\theta)=a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=\frac{a\cdot 3\sin^2\theta\cdot\cos\theta}{a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$

又 $(\frac{dy}{dx})'=(-\tan\theta)'=-\sec^2\theta$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{dy}{dx})'}{x'(\theta)}=\frac{-\sec^2\theta}{a\cdot 3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\sec^2\theta$

$=\frac{1}{3a}\cdot\sec^4\theta\cdot\csc\theta$

参数方程与隐函数的结合

eg 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 确定 求 $\frac{dy}{dx}$

解：$\because x'(t)=\frac{1}{1+t^2}$

令 $F(y,t)=2y-ty^2+e^t-5$

$F_y=2-2ty \quad F_t=-y^2+e^t$

$\therefore y'(t)=\frac{dy}{dt}=-\frac{F_t}{F_y}=\frac{y^2-e^t}{2-2ty}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2-2ty}$

幂指函数求导（42）

1、形如 u^v 的函数（u,v 均是函数：$x^{\sin x}$，$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x^2}$）

2、

变限积分求导(遇变限积分 ⇒ 求导 ⇒ ①极限 ⇒ 洛必达；②等式(结合微分方程))

1、定义：形如 $\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dx$

2、求导方法：$\left[\int_{下限}^{上限} f(t)\,dt\right]' = f(上限)\cdot 上限' - f(下限)\cdot 下限'$

eg 求 $\left(\int_0^x 2t^2\,dt\right)'$

解 $2x^2\cdot(x)' - 0 = 2x^2$

eg 设 $\varphi(x)=\int_0^x x\cdot\cos t^2\,dt$，则 $\varphi'(x)$

解：$\varphi(x) = x\cdot\int_0^x \cos t^2\,dt$

$\varphi'(x) = x'\cdot\int_0^x \cos t^2\,dt + x\cdot\left(\int_0^x \cos t^2\,dt\right)'$

$= \int_0^x \cos t^2\,dt + x[\cos x^2\cdot 1\cdot \cos 0\cdot 0]$

$= \int_0^x \cos t^2\,dt + x\cos x^2$

eg：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt}{(e^x-1)\tan x}$

解：原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dx}{x^2}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot 1 - 0}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

高阶导数

二阶及其以上的导数（$y^{(n)}$：叫y的n阶导）

常见n阶导公式

$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\cdot\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cdot\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$[\frac{1}{ax+b}]^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!\cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

幂函数：x^a 求导不会超过a次 $(x^a)^{(a+1)}=0$

$(x^a)^{(a)}=a!$

题型一、求具体导数

eg 设 $y=x^2+1e^x$ 求 $y^{(3)}|_{x=0}$

解：$y'=2x+0+e^x$

$y''=2+e^x$

$\therefore y^{(3)}=0+e^x=e^x$

eg：设 $y=x(x^2+2x+1)^2+e^{2x}$ 求 $y^{(7)}_{(0)}$

解：$y^{(7)}=(e^{2x})^{(7)}$

令 $y=e^{2x}$，$y^{(7)}=2^7e^{2x}$

题型二、求$y^{(n)}$ 解法：求n次导数，找规律

eg：求函数 $y=xe^x$ 的n阶导数的一般表达式

解：$y'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)e^x$

$y''=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$

$y'''=e^x+(2+x)^x=(3+x)e^x$

$\therefore y^{(n)}=(n+x)e^x$

eg：设 $y=x^4+x^3+x^2+x+1$，求 $y^{(4)}$，$y^{(5)}$

解：$y^{(4)}=(x^4)^{(4)}=4!$

$y^{(5)}=0$

eg 设 $y=\cos^2x$ 求 $y^{(n)}$

解：$y=\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2x$

$\therefore y^{(n)}=(\frac{1}{2}\cos2x)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot(\cos2x)^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot2^n\cdot\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$=2^{n-1}\cdot\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$

eg：设 $y=\frac{1}{x^2-2x-8}$，求 $y^{(n)}$ $\frac{1}{□\cdot□}=\frac{1}{小\cdot大}=(\frac{1}{小}-\frac{1}{大})\cdot\frac{1}{大-小}$

解：$y=\frac{1}{(x+2)(x-4)}$

$=\frac{1}{6}(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2})$

$\therefore y^{(n)}=\frac{1}{6}\cdot[(\frac{1}{x-4})^{(n)}-(\frac{1}{x+2})^{(n)}]$

$=\frac{1}{6}[\frac{1^n(-1)^n\cdot n!}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1^n(-1)^n\cdot n!}{(x+2)^{n+1}}]$

$=\frac{1}{6}\cdot(-1)^n\cdot n![\frac{1}{(x-4)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}]$

微分

定义：dy 叫做函数 y 的微分

公式：$dy = y'dx \quad d\square = \square' dx$

理解：$y' = \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{左右同乘}dx} y'dx = dy$

eg：设 $y = \cos 2x \cdot \ln(1+x^2)$ 求 dy

解：$\because y' = (\cos 2x)' \cdot \ln(1+x)^2 + \cos 2x \cdot [\ln(1+x^2)]'$

$= -2\sin 2x \cdot \ln(1+x)^2 + \cos 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$

$= -2\sin 2x \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x\cos 2x}{1+x^2}$

$\therefore dy = y'dx = [-2\sin 2x \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x\cos 2x}{1+x^2}]dx$

eg：设 $y - \sin y + 3x^2 = 0$，求 dy

解：令 $F(x,y) = y - \sin y + 3x^2$

$F_x = 6x, \quad F_y = 1 - \cos y$

$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = \frac{-6x}{1-\cos y}$

$\therefore dy = y'dx = \frac{-6x}{1-\cos y}$

练：1. 求 $df(\sin x) =$

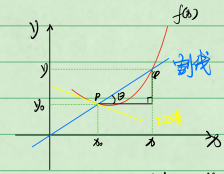
2. 求 $d\ln\cos e^x =$

3. 求 $d\sin x =$

4. 求 $d\sqrt{x} =$

导数的几何应用

切线的引入



$k = \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$k_{切} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$f'(x_0)$ 描述 $f(x)$ 在 $[x_0, f(x_0)]$ 切线的斜率 k，$k = f'(x_0)$

$(x_0, f(x_0)) \Rightarrow$ 切点，$k = f'(x_0)$

切线方程：$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0)$

$y - y_0 = k(x - x_0)$

斜率相乘为 -1

法线方程：$f(x) - f(x_0) = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$

题型一：切点 $[x_0, f(x_0)]$ 已知

eg：求曲线 $y = x + 1 - xe^x$ 在 $(0,1)$ 的切线方程。

解：$\because y' = 1 - (e^x + xe^x)$

$\therefore y'|_{(0,1)} = 1 - (e^0 + 0) = 0$

故 切线斜率为 $k = 0 \quad (x_0, y_0) = (0,1)$

$\therefore$ 切线为 $y - y_0 = k(x - x_0) \quad y - 1 = 0$

切线：$y = 1$

eg 求曲线 $\begin{cases} x = e^t \cdot \sin 2t \\ y = e^t \cdot \cos t \end{cases}$ 在点 $t = 0$ 的切线

解：当 $t = 0$ 时，$x = 0 \quad y = 1$

$\therefore$ 切点为 $(x_0, y_0) = (0,1)$

$\because y'(t) = e^t \cdot \cos t + e^t(-\sin t)|_{t=0} = 1$

$x'(t) = e^t \cdot \sin 2t + e^t \cos 2t \cdot 2|_{t=0} = 2$

$\therefore k = y' = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{2}$

切线为 $\Rightarrow y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

题型二：若切点未知

解法：设切点为 $[a, f(a)] \Rightarrow$ 切线：$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

利用题干切线满足条件，算出 a

eg 若直线 $y = 5x + m$ 是曲线 $y = x^2 + 3x + 2$ 的一条切线，则 $m =$

解：设切点为 $(a, a^2 + 3a + 2)$

又 $y' = 2x + 3 \quad \therefore k = y'|_{x=a} = 2a + 3$

$\therefore$ 切线：$y - (a^2 + 3a + 2) = (2a+3)(x - a) = 2ax - 2a^2 + 3x - 3a$

$\Rightarrow y - (a^2 + 3a + 2) = (2a+3)x - 2a^2 - 3a$

$y = (2a+3)x - a^2 + 2$

又切线为 $y = 5x + m \quad \therefore \begin{cases} 2a + 3 = 5 \\ -a^2 + 2 = m \end{cases} \quad a = 1 \quad m = 1$

eg 求 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 过 $(0,-4)$ 的切线方程（题型二）

解：设切点为 $(a, a^{\frac{3}{2}})$，$k = y'|_{x=a} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}|_{x=a} = \frac{3}{2}\sqrt{a}$

$\therefore$ 切线为：$y - a^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{a}}{2}(x - a)$

代入 $(0,-4)$ 得：$-4 - a^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{a}}{2}(0 - a) \quad -4 - a^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\sqrt{a} \cdot a$

$4 + a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad 4 = \frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}$

$4 = (\frac{3}{2} - 1) \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad 4 = \frac{1}{2} \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad 8 = a^{\frac{3}{2}}$

$\therefore a = 4$，切线为 $3x - y - 4 = 0$

$y = 3x - 4$

$f'(x)$与$f(x)$单调性关系

设$f(x)$在$[a,b]$可导

①$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow$ (a,b)叫增区间

②$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\searrow$ (a,b)叫减区间

③$f'(x_0)=0$ 称x_0为驻点

求$f(x)$单调区间的方法

①确定$f(x)$定义域

②求$f'(x)$，且令$f'(x)=0$，找到全部驻点
及$f'(x)$不存在的点(无定义点)

③利用这些点，将定义域分割

④列表讨论各子区间$f'(x)$的符号
$f'(x)>0 \Rightarrow$ 单增
$f'(x)<0 \Rightarrow$ 单减

eg 求$f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$的单调区间

解：$f(x)$的定义域：$x\in R$

又$f(x)=2x+3\cdot x^{\frac{2}{3}}$

$\therefore f'(x)=2+3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$

$=2+2x^{-\frac{1}{3}}$

$=2+2\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

$=2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

$=\frac{2\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x}}$

令$f'(x)=0$，得：$x=-1$；$x=0$，$f'(x)$不存在

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	/	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

综上，单调增区间：$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，减区间：$(-1,0)$

函数极值

1、极值：指$f(x)$的局部范围最值

极大值：指局部范围最大值
极小值：指局部范围最小值

2、极值点的出处

$f'(x)=0$点 $\Rightarrow$ 驻点

$f'(x)$不存在的点(无定义) $\Rightarrow$ 不可导点

3、极值判断

①利用单调性判断
- 先增后减 $\Rightarrow$ 极大值
- 先减后增 $\Rightarrow$ 极小值

②利用$f''(x)$判断 $\Rightarrow$
- $f''(x)<0 \Rightarrow$ 极大值
- $f''(x)>0 \Rightarrow$ 极小值

4、求极值步骤

①确定$f(x)$的定义域

②令$f'(x)=0$，找到驻点及$f(x)$无定义点

③利用这些点，分割定义域成子区间

④列表讨论子区间内的单调性，即$f'(x)$正负性

eg：设$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$，求$f(x)$的单调区间和极值

解：$f(x)$的定义域为R，

$\because f'(x)=6x^2-18x+12$

$=6(x^2-3x+2)$

令$f'(x)=0$，即 $x^2-3x+2=0$ $(x-1)(x-2)=0$

故驻点：$x_1=1$ $x_2=2$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

故增区间为$(-\infty,1)$，$(2,+\infty)$

减区间为$(1,2)$，极大为$f(1)=2$，极小为$f(2)=1$

eg $y=x^2-8x+5$的极小值 D

A 5 B 7， C 4， D −11

解：$y'=2x-8=0 \Rightarrow$ 驻点$x=4$

又$y''=2>0$ $\therefore x=4$取极小值$f(4)$

eg：设函数$f(x)=x^3+ax^2+bx$在$x=1$处极小值为-2

解：$f(x)=x^3+ax^2+bx$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

由题知 $\begin{cases} f(1)=-2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b=-2 \\ 3+2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \end{cases}$