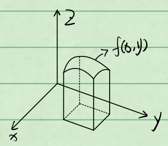
## 二重积分概念与性质

定义：二重积分是用来求解曲顶柱体的工具，

记为 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$

其中：$f(x,y)$ 叫被积函数，$dxdy=d\sigma$ 叫面积元素，D为积分区域（底面积）




性质

$$\iint f(x,y)\pm g(x,y)\,dxdy=\iint f(x,y)\,dxdy\pm g(x,y)\,dxdy$$

$D=D_1+D_2$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$\iint k f(x,y)\,dxdy=k\iint f(x,y)\,dxdy$$

$$\iint 1\,dxdy=\iint dxdy=S_D$$

### 比较定理

设 $f(x,y)\geq g(x,y)$，则 $\iint f(x,y)\,dxdy\geq\iint g(x,y)\,dxdy$

反之去比较 $f(x,y)$ 的大小

估值定理：设 $f(x,y)$ 在 D 上，存最大值 M，存最小值 m

有 $m\leq f(x,y)\leq M$

$\Rightarrow \iint m\,dxdy\leq\iint f(x,y)\,dxdy\leq\iint M\,dxdy$

$\Rightarrow m\iint dxdy\leq\iint f(x,y)\,dxdy\leq M\iint dxdy$

$\Rightarrow m\cdot S_D\leq\iint f(x,y)\,dxdy\leq M S_D$

## 二重积分性质 $\iint 1\,dxdy=S_D$

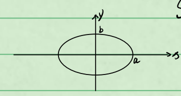
圆表达式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

其中 $(a,b)$ 为圆心，$r$ 为半径

$S_{圆}=\pi r^2$

椭圆表达式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$S_{椭}=\pi ab$




eg $\iint d\sigma=25\pi$，D是以原点为圆心，半径为5的圆形区域

$S_D=\pi r^2=\pi\cdot 5^2=25\pi$

eg 二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}dxdy=S_D=\pi r^2=2\pi$

eg 设积分区域 D：$1\leq x^2+y^2\leq 4$，求 $\iint dxdy=3\pi$

$x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$ 大圆圈小圆

$S_D=S_{大}-S_{小}=4\pi-\pi=3\pi$

eg 设积分区域 D：$\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1$，求 $\iint dxdy=2\pi$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$a=2$，$b=1$　$\pi ab=2\pi$

### 比较定理

eg 设 $I_1=\iint\cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$　$I_2=\iint\cos(x^2+y^2)\,dxdy$

$I_3=\iint\cos(x^2+y^2)^2\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$

则 $I_1 I_2 I_3$ 大小关系是 $I_3\geq I_2\geq I_1$

当 $x^2+y^2\leq 1$，$1\geq\sqrt{x^2+y^2}\geq x^2+y^2\geq(x^2+y^2)^2\geq 0$

### 估值定理

eg 设 $I=\iint xy(x+y)\,dxdy$，其中 $0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 2$，

则 $0\leq I\leq 12$

$S_D=2$

$\because 0\leq xy(x+y)\leq 6$

$\therefore 0\cdot S_D\leq I\leq 6\cdot S_D$

$0\leq I\leq 12$

# 二重积分计算

## 直角坐标系下二重积分计算

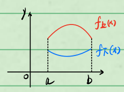
思想：将二重积分化为累次积分或二次积分

$\iint f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$

$\iint f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$

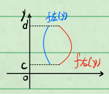
注：求解顺序先求右→左

1、X型区：函数图型由上、下两函数夹击而成




公式 $\iint f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy$

2、Y型区：函数图像由两函数左右合抱而成



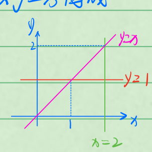

公式 $\iint f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)\,dx$

定限口诀：后积先定限，限内画直线，先交写下限，后交写上限

解法过程：1.画图，联立方程解出交点
2.定，判断积分区域类型
3.套公式

eg 求 $\iint xy\,dxdy$，其中D是由直线 $y=1$，$x=2$，及 $y=x$ 围成

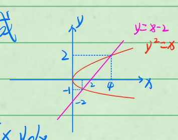
X型 $\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le x\end{cases}$ Y型 $\begin{cases}1\le y\le 2\\ y\le x\le 2\end{cases}$




原式 $=\int_1^2 dx\int_1^x xy\,dy$
$=\int_1^2 (x\cdot\frac{1}{2}y^2)\Big|_1^x dx$
$=\frac{1}{2}\int_1^2 (x^3-x)\,dx$
$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2$
$=\frac{1}{2}[(4-2)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})]$
$=\frac{9}{8}$

原式 $=\int_1^2 dy\int_y^2 xy\,dx$
$=\frac{1}{2}\int_1^2 x^2y\Big|_y^2 dy$
$=\frac{1}{2}\int_1^2 4y-y^3\,dy$
$=\frac{1}{2}(2y^2-\frac{1}{4}y^4)\Big|_1^2$
$=\frac{1}{2}[(8-4)-(2-\frac{1}{4})]$
$=\frac{9}{8}$

eg 求 $\iint xy\,dxdy$，其中D由 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 围成




解：由 $\begin{cases}y^2=x\\ y=x-2\end{cases}$ ⇒交点为(1,-1)(4,2) 如图

$y=y^2-2$
$y^2-y-2=0$
$(y-2)(y+1)=0$
$y_1=2,\ y_2=-1$

Y $\begin{cases}-1\le y\le 2\\ y^2\le x\le y+2\end{cases}$

原式 $=\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$
$=\frac{1}{2}\int_{-1}^2 x^2y\Big|_{y^2}^{y+2} dy$
$=\frac{1}{2}\int_{-1}^2 (y+2)^2\cdot y-y^5\,dy$
$=\frac{1}{2}\int_{-1}^2 (y^3+4y^2+4y-y^5)\,dy$
$=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}y^4+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6)\Big|_{-1}^2$
$=\frac{45}{8}$

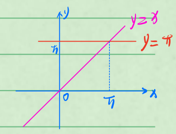
# 超越积分

$\frac{\sin x}{x}$，$\frac{\cos x}{x}$，$\frac{\arctan x}{x}$，$\sin x^2$，$\cos x^2$，$e^{x^2}$，$e^{-x^2}$ ⇒ x型

$\frac{\sin y}{y}$，$\frac{\cos y}{y}$，$\frac{\arctan y}{y}$，$\sin y^2$，$\cos y^2$，$e^{y^2}$，$e^{-y^2}$ ⇒ y型

eg 求 $\iint \frac{\sin y}{y}\,dxdy$，其中D由 $y=x$，$x=0$ 及 $y=\pi$ 围成

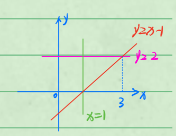
Y ⇒ $\begin{cases}0\le y\le\pi\\ 0\le x\le y\end{cases}$




原式 $=\int_0^\pi dy\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx$
$=\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\cdot x\Big|_0^y dx$
$=\int_0^\pi \sin y\,dy$
$=(-\cos y)\Big|_0^\pi$
$=1+1=2$

eg 求 $\iint \cos y^2\,dxdy$ D: $x=1$，$y=2$，$y=x-1$ 所围成

解：∵ $\begin{cases}0\le y\le 2\\ 1\le x\le y+1\end{cases}$




故原式 $=\int_0^2 dy\int_1^{y+1}\cos y^2\,dx$
$=\int_0^2 \cos y^2\cdot x\Big|_1^{y+1} dy$
$=\int_0^2 [\cos y^2\cdot(y+1)-\cos y^2]\,dy$
$=\int_0^2 y\cdot\cos y^2\,dy$
$=\frac{1}{2}\int_0^2 \cos y^2\,dy^2$
$=\frac{1}{2}\cdot\sin y^2\Big|_0^2$
$=\frac{1}{2}\cdot\sin 4$
$=\frac{\sin 4}{2}$

## 交换积分次序

定义：x型与y型积分顺序互换

$$\int dx\int f(x,y)\,dy \rightleftharpoons \int dy\int f(x,y)\,dx$$

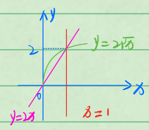
交换次序思路：1. 根据积分上下限，画出积分区域
2. 交换次序

交换次序的题型 1. 题目要求
2. 遇积分上下限定好的二重积分计算

eg 二次积分 $\int_0^1 dx\int_{2x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$，交换积分次序为 B

A $\int_0^1 dx\int_{2y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dy$　　B $\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx$

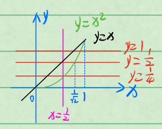
C $\int_{2x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\int_0^1 dx$　　D $\int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} dy\int_0^2 f(x,y)\,dx$




解：$\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 2x\le y\le 2\sqrt{x} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0\le y\le 2 \\ \frac{y^2}{4}\le x\le \frac{y}{2} \end{cases}$

eg 求 $I=\int_{\frac14}^{\frac12} dy\int_{\frac12}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac12}^{1} dy\int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx$




析 $\begin{cases} \frac14\le y\le \frac12 \\ \frac12\le x\le \sqrt{y} \end{cases}$

解，x $\begin{cases} \frac12\le x\le 1 \\ x^2\le y\le x \end{cases}$

原式 $=\int_{\frac12}^{1} dx\int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}}dy$

$=\int_{\frac12}^{1} x\cdot e^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}dx$

$=\int_{\frac12}^{1} x\cdot(e-e^x)\,dx$

$=\int_{\frac12}^{1} xe-xe^x\,dx$

$=e\int_{\frac12}^{1} x\,dx-\int_{\frac12}^{1} xe^x dx$

$=e\cdot\frac12 x^2\Big|_{\frac12}^{1}-\int_{\frac12}^{1} x\,de^x$

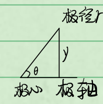
$=e\cdot\frac12(1-\frac14)-[(xe^x)\Big|_{\frac12}^{1}-\int_{\frac12}^{1} e^x dx]$

$=\frac38 e-[e-\frac12 e^{\frac12}-e+e^{\frac12})$

$=\frac38 e-\frac12 e^{\frac12}$

$=\frac38 e-\frac12\sqrt{e}$

## 极坐标系下的二重积分




$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cos\theta$

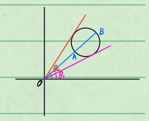
在极坐标下 $x=r\cos\theta$　$y=r\sin\theta$　$x^2+y^2=r^2$

## 极坐标系下二重积分计算

条件 ⇒ 当遇到与圆相关的积分区域
考虑利用极坐标求解 且见函数为 $x^2+y^2$
转换：令 $x=r\cos\theta$　$y=r\sin\theta$　$dxdy=r\,dr\,d\theta$

公式 $\iint f(x,y)\,dxdy=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$

上下限确定方法




1、夹角θ的取值范围
从原点出逆时针方向作积分区域的两条切线
取第一条触碰积分区域的切线与x正半轴的夹角为$\theta_1$
取第二条即将离开积分区域的切线与x正半轴的夹角为$\theta_2$

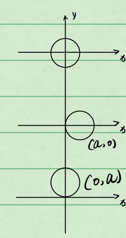
2、半径r的取值范围（半径不能为负数
就像石头不能失去那路撒冷）

$OA=r_1$　$OB=r_2$　$r\ge 0$

记：r的计算方法
将 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$x^2+y^2=r^2$
代入题干函数表达式中，求解

## 常见积分图像

圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　(a,b)圆心，r ⇒ 半径



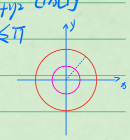

$x^2+y^2=r^2$　$0\le\theta\le 2\pi$
$0\le r\le r$

$(x-a)^2+y^2=a^2$　$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$
$0\le r\le 2a\cos\theta$

$x^2+(y-a)^2=a^2$　$0\le\theta\le\pi$
$0\le r\le 2a\sin\theta$

eg 设D：由 $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$，$x^2+y^2=\pi^2$ 围成 求 $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

解：令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$x^2+y^2=r^2$，$0\le\theta\le 2\pi$，$\frac{\pi}{3}\le r\le\pi$




故 原式 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{\sin r}{r}\cdot r\,dr$

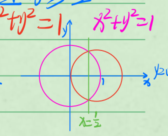
$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin r\,dr$

$=\int_0^{2\pi}(-\cos r)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\frac32 d\theta=\frac32\theta\Big|_0^{2\pi}=3\pi$

eg 求 $\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，D：$x^2+y^2\ge 1$，$x^2+y^2\le 2x$
$y\ge 0$ 所围成区域，在第一象限部分且 $x\ge\frac12$

解：令 $x=r\cos\theta$　$y=r\sin\theta$　$x^2+y^2=r^2$，$dxdy=r\,dr\,d\theta$

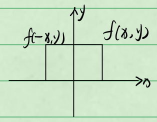



$\begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{3} \\ 1\le r\le 2\cos\theta \end{cases}$　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac1r\cdot r\,dr$　$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos\theta-1\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}1\,dr$　$=(2\sin\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}r\Big|_1^{2\cos\theta}d\theta$　$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

二重对称性




条件一: $f(-x,y)=f(x,y)$, $\iint_D f(x,y)\,dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$

条件二: $f(-x,y)=-f(x,y)$, $\iint_D f(x,y)\,dxdy=0$

二重积分偶倍奇零

1. 积分区域D关于y轴对称,看x的奇偶性

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy, & \text{关于}x\text{函数为偶函数}\\ 0, & \text{关于}x\text{函数为奇函数}\end{cases}$$

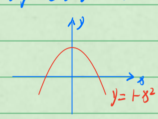
2. 积分区域D关于x轴对称,看y的奇偶性

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy, & \text{关于}y\text{函数为偶函数}\\ 0, & \text{关于}y\text{函数为奇函数}\end{cases}$$

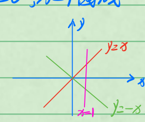
注: 若D对称,首先对称性

eg 设D由$y=1-x^2$及x轴围成,则$\iint_D(\sin x+x^3y)\,dxdy=0$

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. 0




eg 求$I=\iint_D xy(x+y)\,dxdy$,其中D由$y=x$, $x+y=0$, $x=1$围成




解: 原式$=\iint_D x^2y+xy^2\,dxdy$

$=2\iint_{D_1} xy^2\,dxdy$

$=2\int_0^1 dx\int_0^x xy^2\,dy$

$=2\int_0^1 (x\cdot\frac{1}{3}y^3)\Big|_0^x dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^1 x^4\,dx$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1$

$=\frac{2}{15}$