三角代换

利用三角函数平方和公式去掉含x^2的根式

条件：含x^2的根式：$\sqrt{a+x^2}$

①含$\sqrt{a^2+x^2}$，令$x=a\tan t$

②含$\sqrt{a^2-x^2}$，令$x=a\sin t$

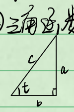
③含$\sqrt{x^2-a^2}$，令$x=a\sec t$

如 ② $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$

基本步骤：①找根式x^2 ②换元计算 ③回代

注意事项：①单独t ⇒ 用反三角函数表示

②三角函数 ⇒ 画直角形，根据三角关系回代



$\sin t=\frac{a}{c}=\frac{对}{斜}$ $\tan t=\frac{a}{b}=\frac{对}{邻}$

$\cos t=\frac{b}{c}=\frac{邻}{斜}$ $\cot t=\frac{b}{a}=\frac{邻}{对}$

eg 求$\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解：令$x=\sin t$ $dx=\cos t\,dt$

原式 $=\int\frac{1}{(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos t\,dt$

$=\int\frac{1}{(\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\cos t\,dt$

$=\int\frac{1}{\cos^3 t}\cdot\cos t\,dt$

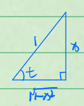
$=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt$

$=\int\sec^2 t\,dt$

$=\tan t+C$

$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$

①$\sin t=x$ ②$\sin t=\frac{x}{1}$



$\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

类型三：积分式x、e^x、$\cos x$、$\sin x$乘积形式

（循环）⇒ 出现两次循环 ⇔ 用两次分部

$\int\square dx \xrightarrow{两次分部} \Delta-\int\square dx$

$\xrightarrow{移项} 2\int\square dx=\Delta \Rightarrow \int\square dx=\frac{1}{2}\Delta+C$

eg：$\int e^x\cdot\cos x\,dx$

解：原式 $=\int e^x d\sin x$

$=e^x\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^x dx$

$=e^x\cdot\sin x+\int e^x d\cos x$

$=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x-\int\cos x\cdot e^x dx$

故 $\int e^x\cdot\cos x\,dx=e^x(\sin x+\cos x)-\int\cos x\cdot e^x dx$

$2\int e^x\cos x\,dx=e^x(\sin x+\cos x)$

$\int e^x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x\cdot(\sin x+\cos x)+C$

类型四：积分式子中含$f(x)$、$f'(x)$ ⇒ 分部

eg：已知$f(x)$的一个原函数为$\sin x\cdot\ln x$ 求$\int x\cdot f(x)dx$

解：$\int x\cdot f(x)dx=\int x\,df(x)$

$=x\cdot f(x)-\int f(x)dx$

又$(\sin x\cdot\ln x)'=f(x) \Rightarrow f(x)=\cos x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x$

$\int f(x)dx=\sin x\ln x+C$

故原式：$\int x\cdot f(x)dx=x\cdot\cos x\cdot\ln x+\sin x-\sin x\ln x+C$

分部积分

来源：$(uv)'=u'v+uv'$ ⇒ $uv'=(uv)'-u'v$

⇒ $\int uv'dx=\int(uv)'dx-\int u'v\,dx$

⇒ $\int u\,dv=uv-\int v\,du$ 分部积分公式

$\int u\cdot v'dx=\int u\,dv=uv-\int v\cdot u'dx$（记）

使用条件 ⇒ $\begin{cases}①乘积关系\\②不具有导数关系\end{cases}$ ⇒ 分部积分

核心：找u、v' ⇒ 口诀：反对幂指三，前为u，后为v'

注：找到v'后，v'积分为v，改写原式$=\int u\,dv=u\cdot v-\int v\cdot u'dx$

类型一：积分式子中，只有一个函数（反三角、对数）⇒ 直接套$\int u\,dv$

eg：$\int\ln x\,dx$

解：原式 $=x\cdot\ln x-\int x\cdot(\ln x)'dx$

$=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\cdot\ln x-\int 1\,dx$

$=x\cdot\ln x-x+C$

eg：$\int\arcsin x\,dx$ $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$

解：原式 $=x\cdot\arcsin x-\int x\cdot(\arcsin x)'dx$

$=x\cdot\arcsin x-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\cdot\arcsin x-\int-\frac{1}{2}(1-x^2)'\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=x\cdot\arcsin x+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+x^2}+C$

$=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$

类型二：积分式子中，两个不同类型函数相乘

eg：$\int x\cdot\cos x\,dx$

解：原式 $=\int x\,d\sin x$

$=x\cdot\sin x-\int\sin x\cdot 1\,dx$

$=x\cdot\sin x+\cos x+C$

eg：$\int x\cdot\tan^2 x\,dx$

解：原式 $=\int x\,d(\tan x-x)$

$=x\cdot(\tan x-x)-\int\tan x-x\cdot 1\,dx$

$=x\cdot\tan x-x^2-\int\tan x\,dx+\int x\,dx$

$=x\cdot\tan x-x^2+\ln|\cos x|+\frac{1}{2}x^2+C$

$=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

原式 $=\int x(\sec^2-1)dx$

$=\int x\cdot\sec^2 x\,dx-\int x\,dx$

$=\int x\,d\tan x-\frac{1}{2}x^2$

$=x\cdot\tan x-\int\tan x\cdot 1\,dx-\frac{1}{2}x^2$

$=x\cdot\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$

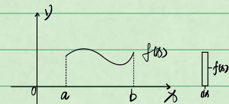
$\int\tan^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)dx$

$=\tan x-x$

定积分

定义：指用来求曲边图形面积的工具 记为 $\int_a^b f(x)\,dx$

理解：



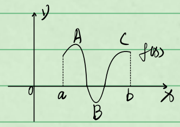
$\Rightarrow S_i = f(x)dx$

$\Rightarrow S = \int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)dx$：指由函数曲线 $y=f(x)$ 及 $x=a$，$x=b$，x 轴所围图形各部分面积的代数和

$f(x)>0$ $\int_a^b f(x)dx>0$

$f(x)<0$ $\int_a^b f(x)dx<0$

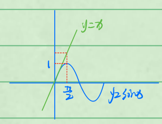


$\int_a^b f(x)dx = A+C-B$

定积分比较大小

$f(x)\geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

eg：比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$



eg：$\int_0^1 e^x dx > \int_0^1 e^{x^2} dx$

$x\in(0,1)$ x 为大，x^2 为小

eg：$\int_1^2 \ln x\,dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

$x\in(1,2)$ $\ln x\in[0,1)$ $\ln x = t$ $0<t<1$ $t=\frac12$ $t^2=\frac14$

定积分性质

$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$（$k$ 与 x 无关）

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$（上、下限调换，添负号）

$\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b-a$

eg 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，下列不正确的是（C）

A $\int_0^x f(x)\,dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

$(\int_0^x f(t)\,dt)' = f(x)$

B $\int_x^b f(x)\,dx$ 是 $-f(x)$ 的原函数

$(\int_x^b f(t)\,dt)' = 0-f(x)$

C $\int_a^b f(x)\,dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

(数)$'=0$ $f(x)=0$

D $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

$\int_a^b f(x)\,dx$ 存在

定积分计算

公式：

1. 牛顿-莱布尼茨公式：$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

如：$\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{3}{2}$

2. 分部积分公式：$\int_a^b uv'\,dx = \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$

如：$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x\,de^x = x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot dx$

$= 1\cdot e - 0 - e^x\Big|_0^1$

$= e-(e-e^0)$

$= 1$

eg 求 $\int_0^1 (x^2+x+2)\,dx$

解：原式 $= (\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x)\Big|_0^1$

$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2-0$

eg $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$

解：原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x-\sin x)\cdot(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x+\cos x\,dx$

$= (-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= (0+1)-(-1+0)$

$= 2$

eg：$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$

解：原式 $= \int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x})'\,dx$

$= -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\,d\frac{1}{x}$

$= -(e^{\frac{1}{x}})\Big|_1^2$

$= -(e^{\frac{1}{2}}-e)$

$= e-\sqrt{e}$

eg：求 $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

$v' = e^{-x}$

$v = -\int e^{-x}\,d(-x)$

$v = -\int e^u\,du = -e^u = -e^{-x}$

解：原式 $= -\int_0^1 x\,de^{-x}$

$= -(x\cdot e^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx)$

$= -(xe^{-x}\Big|_0^1 + e^{-x}\Big|_0^1)$

$= -(e^{-1}+e^{-1}-1)$

$= 1-2e^{-1}$

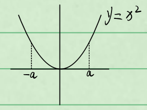
$= 1-\frac{2}{e}$

定积分的四大运算技巧

1、偶倍奇零（条件→区间对称）

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(x)\text{为偶函数 } C、x^{偶}、|x|、\cos x、f(x)+f(-x) \\ 0 & f(x)\text{为奇函数 } x^{奇}、\sin x\ \arctan x、f(x)-f(-x) \end{cases}$$

理解：f(x)为偶函数，图像关于y轴对称



eg $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+1)\,dx = 2$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\int_0^1 1\,dx = 2x\big|_0^1 = 2$

eg 设f(x)在[-l, l]上连续，则 $\int_{-l}^{l} (f(x)-f(-x))\,dx = 0$

eg $\int_{-1}^{1}\frac{2+\sin x}{1+x^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}dx + \int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$

$= 2\cdot 2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx + 0$

$= 4\cdot\arctan x\big|_0^1$

$= 4\cdot(\arctan 1 - \arctan 0)$

$= \pi$

eg：求 $\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{1+\cos x} + |x|\cdot\sin x)\,dx$

解：原式 $= 2\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}\,dx$

$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx$

$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx$

$= 4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2}$

$= 4\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\big|_0^{\pi}$

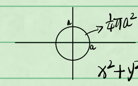
$= 4\sqrt{2}\cdot(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0)$

$= 4\sqrt{2}$

定积分求$\frac{1}{4}$圆面积

公式：$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2$

理解：



eg：$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^2\sqrt{2^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi\cdot 4 = \pi$

eg：求 $\int_{-a}^{a}(b+x)\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

解：原式 $= \int_{-a}^{a} b\cdot\sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= \int_{-a}^{a} b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$= 2b\cdot\frac{1}{4}\pi a^2$

$= \frac{a^2 b\pi}{2}$

eg 设 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} - \int_0^1 f(x)\,dx$，求f(x)

定积分为常数：$\int_0^1 f(x)\,dx = A$

解：令 $\int_0^1 f(x)\,dx = A$，则 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} - A$

对方程两边同取0-1的定积分

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 3x\,dx - \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 A\,dx$

$\downarrow \frac{1}{4}\pi a^2$

$\Rightarrow A = 3\cdot\frac{1}{2}x^2\big|_0^1 - \frac{1}{4}\pi - Ax\big|_0^1$

$A = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} - A$

$2A = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

$A = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}$

故 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}$

定积分点火公式（华里氏公式）

条件：积分为 $(0, \frac{\pi}{2})$

公式：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

注 $\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

eg 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\,dx = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

eg：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

eg：求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta + \cos^3\theta)\,d\theta$

解：原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta + \cos^3\theta)\,d\theta$

$= 2\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\cdot 1)$

$= \frac{3\pi}{8} + \frac{4}{3}$

定积分的换元法

类型
- 1. 无理根式代换
- 2. 三角代换

eg: $\int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}dx$

解：令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$　$dx=2t\,dt$

上限：$x=4$，$t=2$，下限：$x=1$，$t=1$

故原式 $=\int_1^2 \frac{1}{t^2(1+t)}\cdot 2t\,dt$

$=2\int_1^2 \frac{1}{t(1+t)}dt$

$=2\int_1^2 \frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\,dt$

$=2\cdot(\ln|t|-\ln|1+t|)\Big|_1^2$

$=2\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|\Big|_1^2$

$=2\cdot\ln\frac{2}{3}-2\ln\frac{1}{2}$

$=2(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2})$

$=2\cdot\ln\frac{4}{3}$

eg $\int_0^1 x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$

解 令 $x=\sin t$，$dx=\cos t\,dt$

$x=0$，$t=0$，$x=1$，$t=\frac{\pi}{2}$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt$

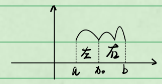
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cdot\cos^2 t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t-\cos^4 t\,dt$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\pi}{16}$

分段函数定积分



$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_0} f(x)\,dx+\int_{x_0}^b f(x)\,dx$

注：遇分段函数定积分，从分段点分开，单独求左、右面积

eg：设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$ 求 $\int_0^e f(x)\,dx$

解：$\int_0^e f(x)\,dx$

$=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^e f(x)\,dx$

$=\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$

$=e^x\Big|_0^1+(x\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=e-1+e-0-x\Big|_1^e$

$=e-1+e-(e-1)$

$=e$

eg：设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$ 求 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(1-x)\,dx$

换元解：令 $(1-x)=t$　$x=1-t$，$dx=-dt$

$x=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{2}$，$x=2$，$t=-1$

故原式 $=-\int_{\frac{1}{2}}^{-1} f(t)\,dt=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$

$=\int_{-1}^0 f(t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$

$=\int_{-1}^0 1+t^2\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}} e^t\,dt$

$=(t+\frac{1}{3}t^3)\Big|_{-1}^0+e^t\Big|_0^{\frac{1}{2}}$

$=0-(-1-\frac{1}{3})+e^{\frac{1}{2}}-e^0$

$=1+\frac{1}{3}+e^{\frac{1}{2}}-1$

$=\frac{1}{3}+e^{\frac{1}{2}}$

定积分等式证明

积分区间再现公式：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$x \longrightarrow$(上限+下限$-x$)

理解：令 $a+b-x=t$，$x=a+b-t$　$dx=-dt$

$x=a$时　$t=b$，$x=b$时，$t=a$

故 $\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

使用条件：等式两侧积分区间一样

eg 证 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

解 ∵ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

故 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 (1-x)^m \cdot [1-(1-x)]^n dx$

$= \int_0^1 (1-x)^m \cdot x^n dx$

故原式成立

eg 证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

解 ∵ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

∵ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(\frac{\pi}{2}-x)]$

$\sin(x+\frac{\pi}{2}\cdot k) \xrightarrow{k为奇数} \sin变\cos$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$　看$x+\frac{\pi}{2}k$的象限

eg $\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

解 ∵ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$　$\sin(\pi-x)=\sin(\frac{\pi}{2}\cdot 2-x)$ $=\sin x$

∵ $\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot f[\sin(\pi-x)]dx$

$= \int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot f(\sin x)dx$

$= \int_0^{\pi}\pi f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx$

$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} x\cdot f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

eg 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

并利用证明结果求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

解：∵ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx$

故原式得证

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin x\cos x dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin x\cos x$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos x dx$

$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d\sin x$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin x)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$

$= \frac{\pi-1}{4}$

eg 证 $F(x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2+2x\cos t+1)dt$ 为偶函数

解：记 $F(x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)dt$

证：$F(-x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)dt$

又 $\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)dt = \int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cdot\cos(\pi-t)+1)dt$

$= \int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cdot(-\cos t))dt$

$= \int_0^{\pi}\ln(x^2+2x\cos t)dt$

$= F(x)$

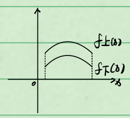
定积分几何应用

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ 由$f(x)$，$x=a$，$x=b$ x轴所围图形面积代数和

x轴上方数值为正，下方数值为负

求平面图形面积

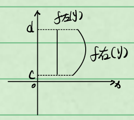
1. x型图：由上、下两个函数围成的面积（分上、下观看）



$$S=\int_a^b f_上(x)dx-\int_a^b f_下(x)dx$$

$$=\int_a^b f_上(x)dx-f_下(x)dx$$

2. y型图：分左、右看 且选用y型 改写$x=f(y)$

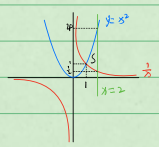


$$S=\int_c^d f_右(y)dy-\int_c^d f_左(y)dy$$

$$=\int_c^d f_右(y)-f_左(y)dy$$

求解思路：1. 画图（联立函数，找曲线交点）
2. 定类型
3. 套公式

eg 求 $y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$，$x=2$ 所围成的面积



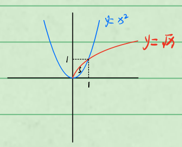
解：$S=\int_1^2(x^2-\frac{1}{x})dx$

$=[\frac{1}{3}x^3-\ln|x|]|_1^2$

$=(\frac{8}{3}-\ln 2)-(\frac{1}{3}-\ln 1)$

$=\frac{7}{3}-\ln 2$

eg 求 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 所围成的面积



解：$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$ $x^2=\sqrt{x}$ 交点：$(0,0)$，$(1,1)$

$S=\int_0^1 \sqrt{x}-x^2dx$

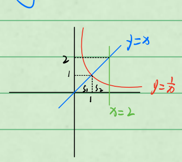
$=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx$

$=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3)|_0^1$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{3}$

eg 求由曲线 $y=\frac{1}{x}$，$y=x$，$x=2$ 及x轴所围面积



解：$S=S_1+S_2$

$S_1=\int_0^1 x\,dx$ $S_2=\int_1^2\frac{1}{x}dx$

$=\frac{1}{2}x^2|_0^1$ $=\ln|x||_1^2$

$=\frac{1}{2}$ $=\ln 2$

$\therefore S=S_1+S_2=\frac{1}{2}+\ln 2$