МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

**Факультет
прикладной математики и физики**

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Системы массового обслуживания»

Выполнил: студент группы 08-504
Никольский Г. Л.
Вариант 9
Преподаватель: Борисов А.В.

**Москва
2011**

Постановка задачи

Пусть $X = \{X_t,\ t = 0,1,\dots\}$ – цепь Маркова с множеством состояний $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, где $e_i = [0,\dots,0,1,0,\dots,0]^T$, и переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\dfrac{\pi n}{10} & 0 & \cos^2\dfrac{\pi n}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos^2\dfrac{\pi n}{20} & 0 & \sin^2\dfrac{\pi n}{20} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Начальное распределение

$$p_0 = \left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi n}{15},\quad \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi n}{15},\quad \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi n}{25},\quad \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi n}{25}\right)^T$$

(n –номер студента в группе).

Цепь доступна косвенному наблюдению:

$$Y_t = C^T X_t + \sigma^T X_t V_t, \qquad t = 1,2,\dots,T, \qquad (2)$$

где $\{V_t\}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских величин,

$$\mathrm{C} = [1,2,3,4]^T, \qquad \sigma = [0.1; 0.15; 0.2; 0.25]^T.$$

1) С помощью метода производящих функций найти распределение $p(t)$ в произвольный момент времени t.

2) Выяснить является ли цепь X эргодической. Найти все стационарные (т.е. инвариантные) распределения.

3) Рассматривая систему наблюдения (2) на интервале $[0,100]$, построить:

а) наилучшую нелинейную оценку фильтрации $\hat{X}_t = E\{X_t|\mathcal{Y}_t\}$, её ошибку $\hat{\Delta}_t = \hat{X}_t - X_t$, условную ковариацию $\hat{k}_t = cov\{\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t|\mathcal{Y}_t\}$, где $\mathcal{Y}_t$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{Y_1,\dots,Y_t\}$;

б) наилучшую линейную оценку фильтрации $\bar{X}_t$, её ошибку $\bar{\Delta}_t = \bar{X}_t - X_t$;

в) тривиальную оценку $E\{X_t\}$, её ошибку $\Delta_t = E\{X_t\} - X_t$, условную ковариацию $k_t = cov\{\Delta_t, \Delta_t|\mathcal{Y}_t\}$ и безусловную ковариацию $\varkappa_t = cov\{\Delta_t, \Delta_t\}$.

4) Путем осреднения по пучку траекторий (1000 реализаций) построить оценки:

а) $\hat{\hat{k}}_t = cov\{\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t\}$;

б) $\bar{k}_t = cov\{\bar{\Delta}_t, \bar{\Delta}_t\}$;

в) $\varkappa_t = cov\{\Delta_t, \Delta_t\}$.

5) Результаты представить в виде таблиц и графиков.

6) Пункты 3-5 выполнить для

$$\sigma = [1; 15; 2; 2.5]^T.$$

Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Теоретическая часть

Определение 1. Случайный процесс с дискретным временем, сечение которого является дискретной случайной величиной, называется цепью.

Определение 2. $X = (\{X_n\}, \{\mathcal{F}_n\})$ - стохастическая последовательность, если для любого натурального n X_n - F_n - измеримая случайная величина.

Определение 3. Стохастическая последовательность $X = (\{X_n\}, \{\mathcal{F}_n\})$, принимающая значения из конечного или счетного множества называется марковской цепью (МЦ), если $\forall n \geq m > 0$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - борелевское множество:

$$P\{X_n \in B | \mathcal{F}_m\} = P\{X_n \in B | X_m\}$$

В простейшем случае условное распределение последующего состояния МЦ зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Будем рассматривать МЦ с дискретным временем с пространством состояний $E = \{e_1, \dots, e_k, \dots\}$.

Определение 4. Матрица $P(n)$, где $P_{i,j}^{(n)} = \mathrm{P}\left(X_n = e_i \mid X_{n-1} = e_j\right)$, называется матрицей переходных вероятностей на n-м шаге.

Определение 5. Вероятность $\pi_k(n) = P\{X_n = e_k\}$, $e_k \in E$, называется вероятностью состояния e_k в момент времени $n \geq 0$, а вектор $\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n), \ldots\}^T$ - распределением вероятностей состояний МЦ X в момент $n \geq 0$.

Известно, что при каждом $n \geq 1$ выполнено рекуррентное соотношение

$$\pi(n) = P^T(n)\pi(n-1).$$

Для МЦ с дискретным временем строится ориентированный граф переходов по следующим правилам:

1. Множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи.
2. Вершины $i, j\,(i \neq j)$ соединяются ориентированным ребром $i \to j$, если $q_{ij} > 0$ (то есть интенсивность потока из i-го состояния в j-е положительна).

Определение 6. МЦ называется однородной, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть $P_{i,j}^{(n)} = P_{i,j}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Для таких цепей при определённых условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \xrightarrow{n \to \infty} \pi_\infty$.

Определение 7. Распределение $\tilde{\pi}$ называется стационарным распределением, если выполняется следующее равенство:

$$\tilde{\pi} = P^T \tilde{\pi} \qquad \left(\textstyle\sum_j \tilde{\pi}_j = 1,\ \tilde{\pi}_j > 0\right).$$

Определение 8. Марковская цепь называется эргодической, если $\exists \pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$, причем $\sum_j \pi_j = 1$, $\pi_j > 0$.

Для выяснения условий эргодичности однородной МЦ необходимо ввести классификацию ее возможных состояний.

Пусть $p_{i,j}^k = P\{X_k = e_j | X_0 = e_i\}$ - вероятность перехода за k шагов из состояния e_i в состояние e_j, пусть также $f_{ii}^{(k)} = P\{X_k = i, X_l \neq i \ \forall\, 1 \le l \le k-1 | X_0 = i\}$ обозначает вероятность первого возвращения за k шагов в состояние e_i.

Определение 9. Состояние $e_k \in E$ называется несущественным, если найдется $e_j \in E$, такое, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ для некоторого $m \ge 1$, но $p_{j,k}^{(n)} = 0$ для всех $n \ge 1$. В противном случае состояние e_k называется существенным.

Определение 10. Состояния $e_k, e_j \in E$ называются сообщающимися, если найдутся $m, n \ge 1$, такие, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ и $p_{j,k}^{(n)} > 0$.

Определение 11. Состояние $e_j \in E$ называется возвратным, если $f_{ii} = 1$ и невозвратным, если $f_{ii} < 1$, где $f_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}$.

Определение 12. Пусть d_j — наибольший общий делитель чисел $\left\{n \ge 1 : P_{jj}^{(n)} > 0\right\}$. Состояние e_j называется периодическим с периодом d_j, если $d_j > 1$. В противном случае состояние — апериодическое.

Определение 13. МЦ называется неразложимой, если все ее состояния – существенные и сообщающиеся. Иначе МЦ называется разложимой.

Определение 14. Неразложимая МЦ называется апериодической, если все её состояния — апериодические ($d = 1$).

<u>Теорема 1.</u> Для того чтобы конечная МЦ была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической.

$$\begin{pmatrix} \text{неразложима} \\ \text{апериодична } (d=1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неразложима} \\ d = 1 \\ \text{возвратна} \\ \text{положительна} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\text{эргодична}) \Leftrightarrow \left(\exists n_0 : \min_{i,j} P_{i,j}^{(n_0)} > 0\right)$$

Если для МЦ верно, что для любых $i, j = 0, 1, \dots$ существуют независящие от i пределы

$$p_{i,j}^{(n)} \to p_j > 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где числа $\{p_j\}$ являются единственным решением системы уравнений:

$$p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j} p_k , \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

то цепь называется эргодической, а распределение вероятностей $p = \{p_0, p_1, ...\}^T$ - стационарным распределением МЦ.

Определение 15. Производящая функция $\varphi(z)$ неслучайной последовательности $\{f_n\}$, $n \geq 0$— это формальный степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, \; z \in \mathbb{C}$$

Производящие функции дают возможность описывать большинство сложных последовательностей довольно просто, а иногда найти для них явные формулы.

f_n	$\varphi(z)$	f_n	$\varphi(z)$	f_n	$\varphi(z)$
1	$\frac{1}{1-z}$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha z}$	n	$\frac{z}{(1-z)^2}$

Алгоритм метода производящих функций:

1. Найти $\left(I - \frac{1}{z} P^T\right)^{-1} \pi(0)$, где I - единичная матрица, соответствующей размерности, P - матрица переходных вероятностей, I - единичная матрица.
2. Найти обратное z- преобразование полученного вектора, т.е. обратное z- преобразование каждого элемента вектора для получения аналитического выражения для $\pi(n)$.

Для однородных цепей при определенных условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \to \pi^0$ при $n \to \infty$, а предельное распределение π^0 вероятностей состояний МЦ не зависит от начального распределения $\pi(0)$.Оно определяется лишь переходной матрицей P. В этом случае говорят, что ЦМ обладает эргодическим свойством. Вероятности состояний $\pi(n)$ по мере увеличения n практически перестают изменяться, а система, описываемая соответствующей цепью, переходит в стационарный режим функционирования.

Фильтрация марковских цепей.

$$\begin{cases} X_t = a(X_{t-1}, t, V_t, \theta) \\ Y_t = A(X_t, t, W_t, \theta) \end{cases}$$

X_t - вектор состояний системы (ненаблюдаемый) в момент времени t;
Y_t - вектор наблюдений;
V_t - шумы в уравнении состояний;
W_t - шумы в уравнении наблюдений;
θ – вектор параметров.

Задача фильтрации состоит в определении с.к.-оптимальной оценки $\hat{X}_t = \hat{X}(t, Y)$ процесса X_t по наблюдениям $Y = (y_1, \dots, y_t)$.
С.к. – оптимальной оценкой является условное математическое ожидание:

$$J(\hat{X}_t) = M\left[\left\|\hat{X}_t - X_t\right\|^2\right] \to \min_{\hat{X}_t \in \mathcal{X}}$$

Если $\mathcal{X}$ – множество всех функций $\hat{X}(t, Y) : M\left[\left\|\hat{X}\right\|^2\right] < \infty$, то оптимальная оценка $\hat{X}_t = M[X_t|Y]$. Более того, если $J(\hat{X}_t) = M\left[\left\|\hat{X}_t - X_t\right\|^2|Y\right]$, то $\hat{X}_t = M[X_t|Y]$ - оптимальная оценка.

Пусть X - случайная величина, принимающая значения $\{e_1, \dots, e_N\}$ с вероятностями $\{p_1, \dots, p_N\}$ соответственно. Пусть наблюдения производятся по схеме $Y = C^T X + \sigma^T XV$, где $C = (C_1, \dots, C_N)^T$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$ - детерминированные известные векторы, V - стандартная случайная величина, плотность распределения которой положительна. Найдем $M[X \mid Y]$ - нелинейную оценку фильтрации. Обозначим $Z = col(X, Y)$ и найдем $F_Z(x_1, \dots, x_N, y)$:

$$F_Z(x_1, \dots, x_N, y) = P\{X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N, Y \le y\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{X = e_n, X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N, Y \le y\} = \sum_{n=1}^{N} P\{X = e_n, X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N, C_n + \sigma_n V \le y\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{V \le \frac{y - C_n}{\sigma_n} \mid X = e_n, X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N\} P\{X = e_n, X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{V \le \frac{y - C_n}{\sigma_n}\} P\{X = e_n, X_1 \le x_1, \dots, X_N \le x_N\} = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\frac{y - C_n}{\sigma_n}} \varphi_V(v) dv \cdot p_n \cdot I(x_n - 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne n}}^{N} I(x_k),$$

где $\varphi_V(v)$ - плотность вероятности СВ V, $I(x)$ - единичная ступенчатая функция, непрерывная справа.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P(C^T X + \sigma^T XV \le y) = \sum_{n=1}^{N} p_n \int_{-\infty}^{\frac{y - C_n}{\sigma_n}} \varphi_V(v) dv$$

$$f_Z(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \delta(x - e_n) \varphi_V\left(\frac{y - C_n}{\sigma_n}\right),$$

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \varphi_V\left(\frac{y - C_n}{\sigma_n}\right).$$

Тогда

$$M[X \mid Y] = P\{X = e_k \mid Y\} = \frac{\frac{p_k}{\sigma_k} \varphi_V\left(\frac{y - C_k}{\sigma_k}\right)}{\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \varphi_V\left(\frac{y - C_n}{\sigma_n}\right)}$$

Алгоритм метода оптимальной нелинейной фильтрации:

1) Начальные условия: $\hat{X}_0 = \pi(0)$.
2) Одношаговый прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$.
3) Найти оптимальную оценку состояния МЦ по формуле:

$$\hat{x}_t^i = P\{X_t = e_i \,|\, Y_t\} = \frac{\dfrac{\tilde{x}_t^i}{\sigma_i}\varphi_V\left(\dfrac{Y_t - C_i}{\sigma_i}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\tilde{x}_t^n}{\sigma_n}\varphi_V\left(\dfrac{Y_t - C_n}{\sigma_n}\right)}$$

где $\tilde{x}_t^i$ - компоненты вектора $\tilde{X}_t$.

Условная ковариация: $\hat{k}_t = \mathrm{cov}(\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t \,|\, \Upsilon_t) = diag(\hat{X}_t) - \hat{X}_t \hat{X}_t^T$.

Для линейной системы наблюдения известно решение с.к.-оптимальной линейной фильтрации. Оно задается с помощью фильтра Калмана.

Алгоритм метода оптимальной линейной фильтрации:

1) Начальные условия: $\hat{X}_0 = m_0^X = \pi(0)$, $\hat{K}_0 = \mathrm{cov}(X_0, X_0) = diag(\pi(0)) - \pi(0)\pi(0)^T$.

2) Наилучший прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$,

ковариация ошибки прогноза: $\tilde{K}_t = P^T \hat{K}_{t-1} P$.

3) Найти оценку фильтра Калмана и ковариацию ошибки оценки: $\hat{X}_t = \tilde{X}_t + \tilde{K}_t C (C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1} (Y_t - C^T \tilde{X}_t)$, $\hat{K}_t = \tilde{K}_t - \tilde{K}_t C (C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1} C^T \tilde{K}_t$, где $R_t^V = \sigma^T diag(\pi(t))\sigma$ - интенсивность дискретного белого шума.

Для заданной постановки задачи тривиальная оценка: $M[X_t] = \pi(t)$.

Решение

Задание 1

С помощью метода производящих функций найти распределение $p(t)$ в произвольный момент времени t.

Переходная матрица :
$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{1}{10}\pi\right)^2 & 0 & \cos\left(\frac{1}{10}\pi\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos\left(\frac{9}{20}\pi\right)^2 & 0 & \sin\left(\frac{9}{20}\pi\right)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Начальное распределение:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)^2 \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)^2 \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{9}{25}\pi\right)^2 \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{9}{25}\pi\right)^2 \end{bmatrix}$$

Пользуясь методом производящих функций, найдем аналитическое выражение для $\pi(n)$.

$$\pi(m) = \begin{bmatrix} 0.0011\,(-1)^m + 0.2142\,(-1)^m\,e^{-1.3224\,m} + 0.2237\,e^{-1.3224\,m} + 0.0131 \\ 0.0011\,(-1)^{1+m} + 0.8038\,(-1)^{1+m}\,e^{-1.3224\,m} + 0.8395\,e^{-1.3224\,m} + 0.0131 \\ 0.0418\,(-1)^m + 0.2142\,(-1)^{1+m}\,e^{-1.3224\,m} - 0.2237\,e^{-1.3224\,m} + 0.4868 \\ 0.0417\,(-1)^{1+m} + 0.8038\,(-1)^m\,e^{-13224\,m} - 0.8395\,e^{-1.3224\,m} + 0.4868 \end{bmatrix}$$

Задание 2

Выяснить, является ли цепь X эргодической. Найти все стационарные распределения (т.е. инвариантные) распределения.

Согласно теореме 1, для выяснения эргодичности цепи, необходимо проверить ее на неразложимость и апериодичность.

Все состояния МЦ являются существенными и сообщающимися. МЦ является неразложимой.

Проверим все состояния на апериодичность. Найдем для первого состояния явный вид множества $\{n \geq 1 |\ f_k(n) > 0\}$. Получим $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

$d_1 = 2$, первое состояние периодично с периодом 2. Тогда МЦ не является апериодической.

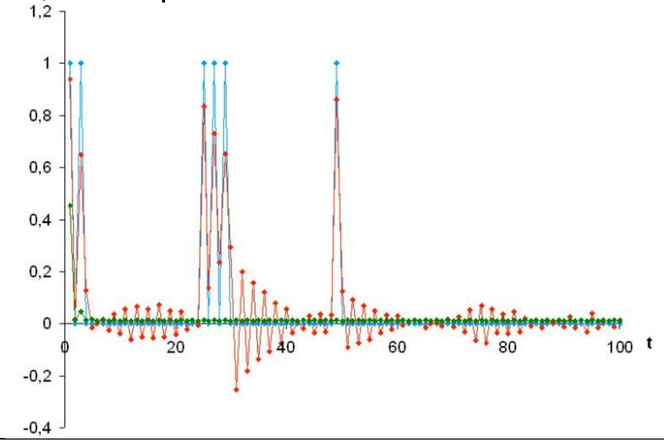
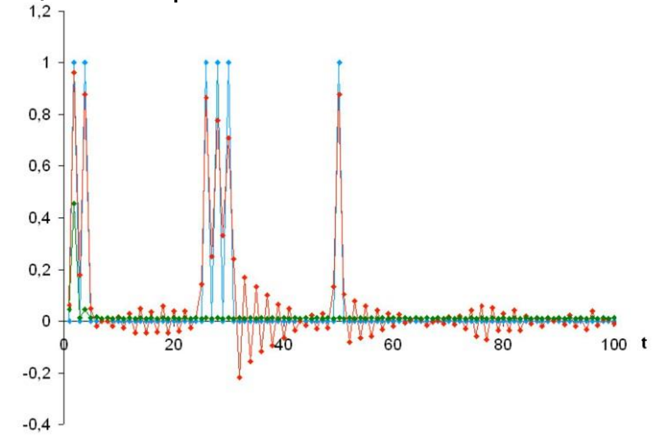
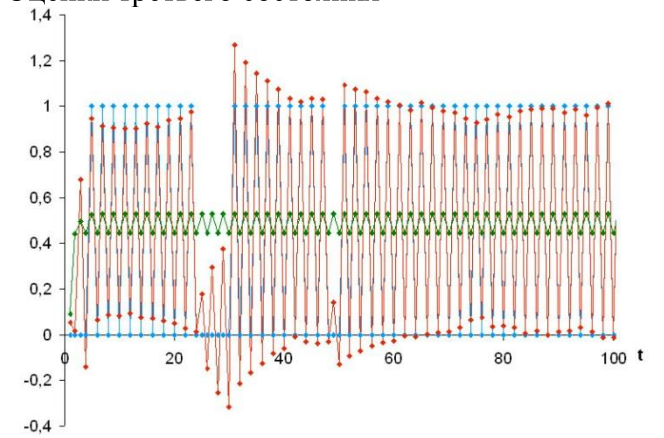
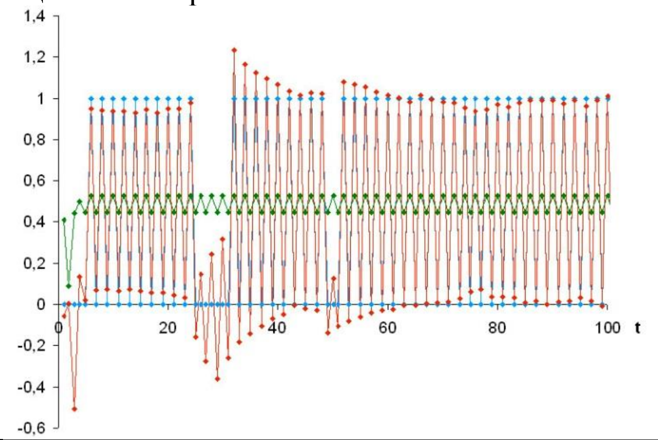
Поэтому по теореме 1 МЦ не является эргодической.

Для нахождения стационарного распределения составим систему:

$p_2\sin^2(п/10)+p_4\sin^2(п/20)=p_1$
$p_1=p_2$
$p_2\cos^2(п/10)+p_4\cos^2(п/20)=p_3$
$p_3=p_4$
$p_1+p_2+p_3+p_4=1$

Стационарное распределение:
$p_1=0.0131$
$p_2=0.0131$
$p_3=0.4868$
$p_4=0.4868$

Задание 3
Оценки состояний МЦ получены с помощью алгоритмов, изложенных в теоретической части. Они представлены на графиках.
Каждому состоянию соответствует отдельный график.
Синим изображена нелинейная оценка, красным – линейная, зеленым – тривиальная.
Истинное состояние в данном случае совпадает с нелинейной оценкой.

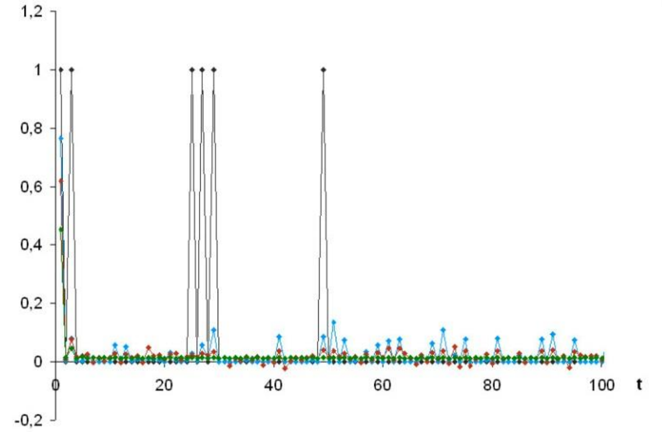
Оценки первого состояния 	Оценки второго состояния 
Оценки третьего состояния 	Оценки четвертого состояния 

Наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Это связано с тем, что компоненты вектора C гораздо больше компонент вектора σ. На графиках отсутствует индикаторная функция состояния из-за того, что график нелинейной оценки почти совпадает с графиком индикаторной функции состояния.

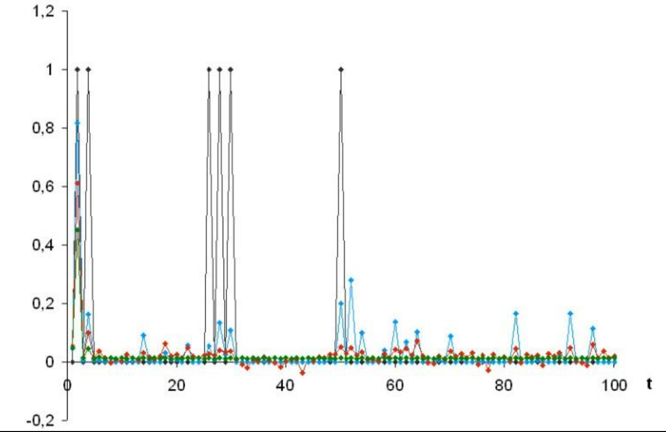
Для вектора $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5\end{pmatrix}^T$:

Истинное состояние изображено черным, синим изображена нелинейная оценка, красным – линейная, зеленым – тривиальная.

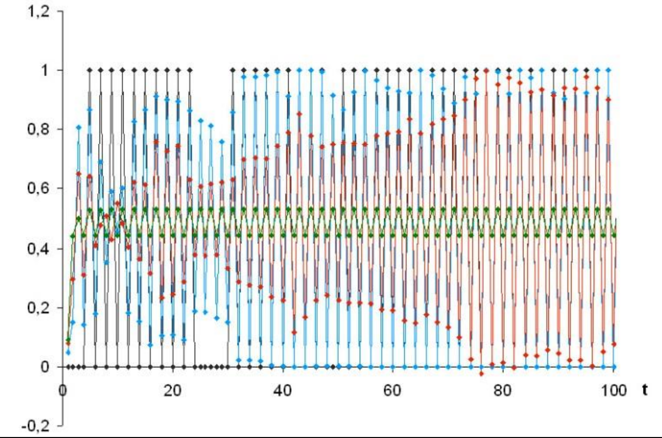
Оценки первого состояния



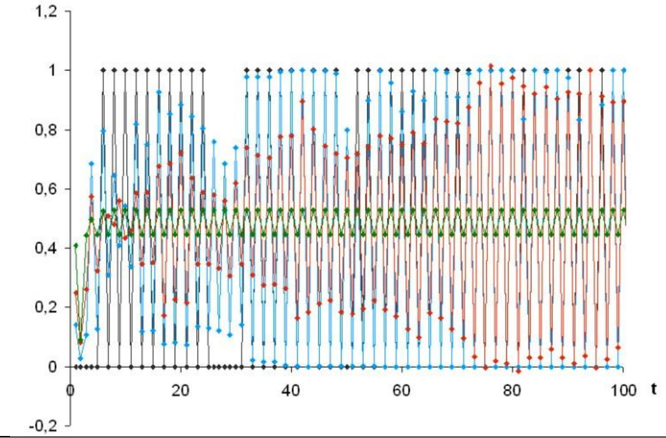
Оценки второго состояния



Оценки третьего состояния



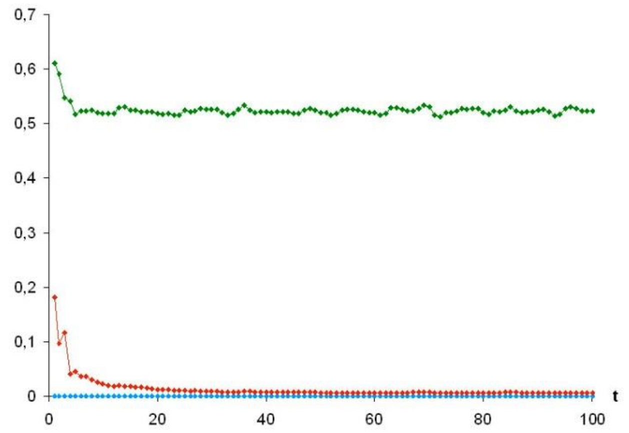
Оценки четвертого состояния



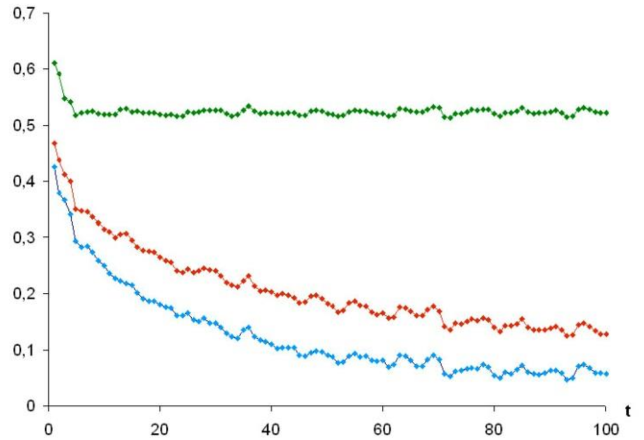
Задание 4
Путем осреднения ковариаций по пучку из 100 реализаций, были получены средние значения ковариаций ошибок для трех типов оценок.

Синим изображены ошибки нелинейной оценки, красным – линейной, зеленым – тривиальной.

$\sigma = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}^T$



$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1,5 & 2 & 2,5 \end{pmatrix}^T$



Выводы

В результате выполнения работы были изучены цепи Маркова. Найдено распределение Марковской цепи в произвольный момент времени при помощи z-преобразования.
При нахождении $\pi(n)$ была выявлена закономерность: компоненты $\pi(n)$ при различных n будут чередоваться (при чётных и нечётных). Это будет происходить вследствие периодичности МЦ.
В цепи присутствуют два циклических подкласса $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, поэтому первые и последние компоненты одинаковы.
По построенным графикам можно наблюдать, что наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Линейная оказывается менее точной. Но к плюсам линейной оценки стоит отнести простоту ее построения, в отличие от сложно считаемой нелинейной оценки.
При малых σ наилучшей оценкой является нелинейная, наихудшей – тривиальная. При увеличении σ результат становится менее точным из-за того, что шум преобладает над полезным сигналом.