Курсовая по предмету системы массового обслуживания

Статика

Моско́вский авиацио́нный институ́т Национальный исследовательский университет (МАИ НИУ)

26 pag.

Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Кафедра: 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
Факультет: «Информационные технологии и прикладная математика»
Дисциплина: «Системы массового обслуживания»

Курсовой проект

Вариант: 1
Группа: 8О-201М
Студент: Анисимова А.С.
Преподаватель**:** Борисов А.В.

Москва
2020

Постановка задачи

Пусть $X=\{X_t, t=0,1,\dots\}-$¿ цепь Маркова с множеством состояний $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, где $e_i=[0,\dots,0,1,0,\dots,0]^T$,и переходной матрицей

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\frac{\pi n}{10} & 0 & \cos^2\frac{\pi n}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos^2\frac{\pi n}{20} & 0 & \sin^2\frac{\pi n}{20} & 0 \end{pmatrix}.(1)$$

Начальное распределение

$$p_0=\left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi n}{15},\quad \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi n}{15},\quad \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi n}{25},\quad \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi n}{25}\right)^T$$

($n-$¿номер студента в группе).

Цепь доступна косвенному наблюдению:

$$Y_t=C^T X_t+\sigma^T X_t V_t, t=1,2,\dots,T, (2)$$

где $\{V_t\}-$¿ последовательность независимых стандартных гауссовских величин,

$$C=[1,2,3,4]^T, \sigma=[0.01;0.015;0.02;0.025]^T.$$

1) С помощью метода производящих функций найти распределение $p(t)$ в произвольный момент времени t.

2) Выяснить является ли цепь X эргодической. Найти все стационарные (т.е. инвариантные) распределения.

3) Рассматривая систему наблюдения (2) на интервале $[0,100]$, построить:
а) наилучшую нелинейную оценку фильтрации $\hat{X}_t=E\{X_t \vee Y_t\}$, её ошибку $\hat{\Delta}_t=\hat{X}_t-X_t$, условную ковариацию $\hat{k}_t=cov\{\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t \vee Y_t\}$, где Y_t – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{Y_1,\dots,Y_t\}$;
б) наилучшую линейную оценку фильтрации $\acute{X}_t$, её ошибку $\acute{\Delta}_t=\acute{X}_t-X_t$;
в) тривиальную оценку $E\{X_t\}$, её ошибку $\Delta_t=E\{X_t\}-X_t$, условную ковариацию $k_t=cov\{\Delta_t,\Delta_t \vee Y_t\}$ и безусловную ковариацию $\varkappa_t=cov\{\Delta_t,\Delta_t\}$.

4) Путем осреднения по пучку траекторий (1000 реализаций) построить оценки:

а) $\hat{\hat{k}}_t = cov\{\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t\}$;

б) $\acute{k}_t = cov\{\acute{\Delta}_t, \acute{\Delta}_t\}$;

в) $\varkappa_t = cov\{\Delta_t, \Delta_t\}$.

5) Результаты представить в виде таблиц и графиков.

6) Пункты 3-5 выполнить для

$\sigma = [1; 1.5; 2; 2.5]^T$.

7) Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Теоретическая часть

Определение 1. Случайный процесс с дискретным временем, сечение которого является дискретной случайной величиной, называется цепью.

Определение 2. $X=(\{X_n\},\{F_n\})$ - стохастическая последовательность, если для любого натурального n X_n - F_n - измеримая случайная величина.

Определение 3. Стохастическая последовательность $X=(\{X_n\},\{F_n\})$, принимающая значения из конечного или счетного множества называется марковской цепью (МЦ), если $\forall n \geq m > 0$, $\forall B \in B(R)$ - борелевское множество:

$$P\{X_n \in B \vee F_m\} = P\{X_n \in B \vee X_m\}$$

В простейшем случае условное распределение последующего состояния МЦ зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Будем рассматривать МЦ с дискретным временем с пространством состояний $E=\{e_1,\dots,e_k,\dots\}$.

Определение 4. Матрица $P(n)$, где $P_{i,j}^{(n)} = \mathrm{P}(X_n = e_i \mid X_{n-1} = e_j)$, называется матрицей переходных вероятностей на n-м шаге.

Определение 5. Вероятность $\pi_k(n) = P\{X_n = e_k\}$, $e_k \in E$, называется вероятностью состояния e_k в момент времени $n \geq 0$, а вектор $\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n), ...\}^T$ - распределением вероятностей состояний МЦ X в момент $n \geq 0$.

Известно, что при каждом $n \geq 1$ выполнено рекуррентное соотношение

$$\pi(n) = P^T(n)\pi(n-1).$$

Для МЦ с дискретным временем строится ориентированный граф переходов по следующим правилам:

1. Множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи.
2. Вершины $i, j (i \neq j)$ соединяются ориентированным ребром $i \to j$, если $q_{ij} > 0$ (то есть интенсивность потока из i-го состояния в j-е положительна).

Определение 6. МЦ называется однородной, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть $P_{i,j}^{(n)} = P_{i,j}, \forall n \in N$

Для таких цепей при определённых условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \underset{n \to \infty}{\to} \pi_\infty$.

Определение 7. Распределение $\tilde{\pi}$ называется стационарным распределением, если выполняется следующее равенство:

$$\tilde{\pi} = P^T \tilde{\pi} \left(\sum_j \tilde{\pi}_j = 1, \tilde{\pi}_j > 0 \right).$$

Определение 8. Марковская цепь называется эргодической, если $\exists \pi_j = \lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{(n)}$, причем $\sum_j \pi_j = 1, \pi_j > 0$.

Для выяснения условий эргодичности однородной МЦ необходимо ввести классификацию ее возможных состояний.

Пусть $p_{i,j}^k = P\{X_k = e_j \vee X_0 = e_i\}$ - вероятность перехода за k шагов из состояния e_i в состояние e_j, пусть также $f_{ii}^{(k)} = P\{X_k = i, X_l \neq i \forall 1 \le l \le k-1 \vee X_0 = i\}$ обозначает вероятность первого возвращения за k шагов в состояние e_i.

Определение 9. Состояние $e_k \in E$ называется несущественным, если найдется $e_j \in E$, такое, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ для некоторого $m \ge 1$, но $p_{j,k}^{(n)} = 0$ для всех $n \ge 1$. В противном случае состояние e_k называется существенным.

Определение 10. Состояния $e_k, e_j \in E$ называются сообщающимися, если найдутся $m, n \geq 1$, такие, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ и $p_{j,k}^{(n)} > 0$.

Определение 11. Состояние $e_j \in E$ называется возвратным, если $f_{ii}=1$ и невозвратным, если $f_{ii}<1$, где $f_{ii}=\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}$.

Определение 12. Пусть d_j — наибольший общий делитель чисел $\{n \geq 1 : P_{jj}^{(n)} > 0\}$. Состояние e_j называется периодическим с периодом d_j, если $d_j > 1$. В противном случае состояние — апериодическое.

Определение 13. МЦ называется неразложимой, если все ее состояния – существенные и сообщающиеся. Иначе МЦ называется разложимой.

Определение 14. Неразложимая МЦ называется апериодической, если все её состояния — апериодические ($d=1$).

<u>Теорема 1.</u> Для того чтобы конечная МЦ была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической.

$$\begin{pmatrix} \text{неразложима} \\ \text{апериодична}(d=1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неразложима} \\ d=1 \\ \text{возвратна} \\ \text{положительна} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\text{эргодична}) \Leftrightarrow ¿$$

Если для МЦ верно, что для любых $i, j = 0, 1, \ldots$ существуют независящие от i пределы

$$p_{i,j}^{(n)} \to p_j > 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где числа $\{p_j\}$ являются единственным решением системы уравнений:

$$p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j} p_k, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$
,

то цепь называется эргодической, а распределение вероятностей $p = \{p_0, p_1, ...\}^T$ - стационарным распределением МЦ.

Определение 15. Производящая функция $\varphi(z)$ неслучайной последовательности $\{f_n\}$, $n \geq 0$— это формальный степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, z \in C$$

Производящие функции дают возможность описывать большинство сложных последовательностей довольно просто, а иногда найти для них явные формулы.

Алгоритм метода производящих функций:

1. Найти $\left(I - \frac{1}{z} P^T\right)^{-1} \pi(0)$, где I - единичная матрица, соответствующей размерности, P - матрица переходных вероятностей, I - единичная матрица.

2. Найти обратное z - преобразование полученного вектора, т.е. обратное z - преобразование каждого элемента вектора для получения аналитического выражения для $\pi(n)$.

Для однородных цепей при определенных условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \to \pi^0$ при $n \to \infty$, а предельное распределение π^0 вероятностей состояний МЦ не зависит от начального распределения $\pi(0)$.Оно определяется лишь переходной матрицей P. В этом случае говорят, что ЦМ обладает эргодическим свойством. Вероятности состояний $\pi(n)$ по мере увеличения n практически перестают изменяться, а система, описываемая соответствующей цепью, переходит в стационарный режим функционирования.

Фильтрация марковских цепей.

$$\begin{cases} X_t = a\left(X_{t-1}, t, V_t, \theta\right) \\ Y_t = A\left(X_t, t, W_t, \theta\right) \end{cases}$$

X_t - вектор состояний системы (ненаблюдаемый) в момент времени t;

Y_t - вектор наблюдений;

V_t - шумы в уравнении состояний;

W_t - шумы в уравнении наблюдений;

θ – вектор параметров.

Задача фильтрации состоит в определении с.к.-оптимальной оценки $\widehat{X}_t = \widehat{X}(t, Y)$ процесса X_t по наблюдениям $Y = \left(y_1, \ldots, y_t\right)$.

С.к. – оптимальной оценкой является условное математическое ожидание:

$$J\left(\widehat{X}_t\right) = M\left[\left\|\widehat{X}_t - X_t\right\|^2\right] \to \min_{\widehat{X}_t \in X} \square$$

Если X – множество всех функций $\widehat{X}(t, Y) : M\left[\left\|\widehat{X}\right\|^2\right] < \infty$, то оптимальная оценка $\widehat{X}_t = M\left[X_t \vee Y\right]$. Более того, если $J\left(\widehat{X}_t\right) = M\left[\left\|\widehat{X}_t - X_t\right\|^2 \vee Y\right]$, то $\widehat{X}_t = M\left[X_t \vee Y\right]$ - оптимальная оценка.

Пусть X - случайная величина, принимающая значения $\{e_1, ..., e_N\}$ с вероятностями $\{p_1, ..., p_N\}$ соответственно. Пусть наблюдения производятся по схеме $Y = C^T X + \sigma^T XV$, где $C = (C_1, ..., C_N)^T$, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N)^T$ - детерминированные известные векторы, V - стандартная случайная величина, плотность распределения которой положительна. Найдем $M[X \mid Y]$ - нелинейную оценку фильтрации. Обозначим $Z = col(X,Y)$ и найдем $F_Z(x_1,...,x_N,y)$:

$$F_Z(x_1,...,x_N,y) = P\{X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N, Y \le y\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{X = e_n, X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N, Y \le y\} = \sum_{n=1}^{N} P\{X = e_n, X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N, C_n + \sigma_n V \le y\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{V \le \frac{y - C_n}{\sigma_n} \mid X = e_n, X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N\} P\{X = e_n, X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} P\{V \le \frac{y - C_n}{\sigma_n}\} P\{X = e_n, X_1 \le x_1,...,X_N \le x_N\} = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\frac{y-C_n}{\sigma_n}} \varphi_V(v)dv \cdot p_n \cdot I(x_n - 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne n}}^{N} I(x_k),$$

где $\varphi_V(v)$ - плотность вероятности СВ V, $I(x)$ - единичная ступенчатая функция, непрерывная справа.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P(C^T X + \sigma^T X V \le y) = \sum_{n=1}^{N} p_n \int_{-\infty}^{\frac{y-C_n}{\sigma_n}} \varphi_V(v)dv$$

$$f_Z(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \delta(x - e_n) \varphi_V(\frac{y - C_n}{\sigma_n}),$$

$$f_Y(y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \varphi_V(\frac{y - C_n}{\sigma_n}).$$

Тогда

$$M[X \mid Y] = P\{X = e_k \mid Y\} = \frac{\frac{p_k}{\sigma_k} \varphi_V(\frac{y - C_k}{\sigma_k})}{\sum_{n=1}^{N} \frac{p_n}{\sigma_n} \varphi_V(\frac{y - C_n}{\sigma_n})}$$

Алгоритм метода оптимальной нелинейной фильтрации:

1) Начальные условия: $\hat{X}_0 = \pi(0)$.
2) Одношаговый прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$.
3) Найти оптимальную оценку состояния МЦ по формуле:

$$\hat{x}_t^i = P\{X_t = e_i \mid Y_t\} = \frac{\frac{\tilde{x}_t^i}{\sigma_i} \varphi_V(\frac{Y_t - C_i}{\sigma_i})}{\sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{x}_t^n}{\sigma_n} \varphi_V(\frac{Y_t - C_n}{\sigma_n})}$$

где $\tilde{x}_t^i$ - компоненты вектора $\tilde{X}_t$.

Условная ковариация: $\hat{k}_t = \mathrm{cov}(\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t \mid \Upsilon_t) = diag(\hat{X}_t) - \hat{X}_t \hat{X}_t^T$.

Для линейной системы наблюдения известно решение с.к.-оптимальной линейной фильтрации. Оно задается с помощью фильтра Калмана.

Алгоритм метода оптимальной линейной фильтрации:

1) Начальные условия: $\hat{X}_0 = m_0^X = \pi(0)$, $\hat{K}_0 = \mathrm{cov}(X_0, X_0) = diag(\pi(0)) - \pi(0)\pi(0)^T$.
2) Наилучший прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$,

ковариация ошибки прогноза: $\tilde{K}_t = P^T \hat{K}_{t-1} P$.

3) Найти оценку фильтра Калмана и ковариацию ошибки оценки: $\hat{X}_t = \tilde{X}_t + \tilde{K}_t C (C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1} (Y_t - C^T \tilde{X}_t)$, $\hat{K}_t = \tilde{K}_t - \tilde{K}_t C (C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1} C^T \tilde{K}_t$, где $R_t^V = \sigma^T diag(\pi(t)) \sigma$ - интенсивность дискретного белого шума.

Для заданной постановки задачи тривиальная оценка: $M[X_t] = \pi(t)$.

Решение

Задание 1

С помощью метода производящих функций найти распределение $p(t)$ в произвольный момент времени t.

Переходная матрица : $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & 0 & \sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & 0 \end{pmatrix}$

Начальное распределение: $p_0=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{25}\right) \\ \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{25}\right) \end{pmatrix}$

Посчитаем матрицу по формуле $I-zP^T$:

$$I-zP^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-z\begin{bmatrix} 0 & \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & \cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & \sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ -z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ 0 & 0 & -z & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем обратную матрицу:

Получим определитель:

$$\left|I-zP^T\right|=\begin{vmatrix}1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ -z & 1 & 0 & 0\\ 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ 0 & 0 & -z & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}*1*\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -z*\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ 0 & -z & 1\end{vmatrix}=¿$$

$$¿(-1)^{2+1}*(-z)*\begin{vmatrix}-z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ -z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ 0 & -z & 1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}*1*\begin{vmatrix}1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ -z & 1\end{vmatrix}+¿$$

$$+z*\left((-1)^{2+2}*1*\begin{vmatrix}-z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ 0 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}*(-z)*\begin{vmatrix}-z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\\ -z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\end{vmatrix}\right)=¿$$

$$¿1-z^2*\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+z\left(-z*\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+z\left(z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)-z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\right)\right)=1-z^2*\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)*\left(1+4*c\right.$$

Найдем матрицу, состоящую из миноров матрицы $I-zP^T$:

$$\begin{pmatrix}1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & -z\left(1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & -z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{40}\right) & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & -z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & -z+z^3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ -z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{80}\right)\end{pmatrix}$$

Найдем матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z-z^3\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z-z^3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\\ z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)-z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) & 1-z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\end{pmatrix}$$

Теперь получим обратную матрицу матрицы $I - zP^T$

$$(I - zP^T)^{-1} = \frac{4}{(1-z^2)(4-z^2)} *$$

$$\begin{pmatrix} 1 - z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ z - z^3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 - z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 - z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) - z^3\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ z^3\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z^2\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & z - z^3\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1 - z^2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix}$$

По методу неопределенных коэффициентов разложим элементы матрицы на элементарные дроби:

$$A^{-1} = \frac{4}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} + ¿$$

$$\frac{+4}{1+z}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos(40) - \sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} + ¿$$

$$\frac{+2}{1-\frac{z}{2}} * ¿ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\left(4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\left(4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} + ¿$$

$$\frac{+2}{1+\frac{z}{2}} *$$

$$¿ \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{6}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix}$$

Таким образом, получим распределение $p(t)$ в произвольный момент времени:

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{2}{3}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{6}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{bmatrix} + (-1)$$

$$+\left(\frac{1}{2}\right)^t * ¿$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{3}\left(4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ 1-\frac{4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{3}\left(4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \frac{-4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & 1-\frac{4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{bmatrix} + \left(\frac{-1}{2}\right)^t$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{3}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \left(\frac{\pi}{20}\right)-1 & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) \\ \mathrm{os}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{1}{3}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)-4\cos\left(\frac{\pi}{40}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)\right) \\ \mathrm{s}^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{-2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) & \frac{4}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-1 & \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \\ p_4(0) \end{bmatrix}$$

Задание 2

Выяснить, является ли цепь X эргодической. Найти все стационарные распределения (т.е. инвариантные) распределения.

Согласно теореме 1, для выяснения эргодичности цепи, необходимо проверить ее на неразложимость и апериодичность.

Все состояния МЦ являются существенными и сообщающимися. МЦ является неразложимой.

Проверим все состояния на апериодичность. Найдем для первого состояния явный вид множества $\{n \geq 1 | f_k(n) > 0\}$. Получим $\{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

$d_1 = 2$, первое состояние периодично с периодом 2. Тогда МЦ не является апериодической.

Поэтому по теореме 1 МЦ не является эргодической.

Для нахождения стационарного распределения составим систему:

$$\begin{cases} p_2 \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + p_4 \cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) = p_1 \\ p_1 = p_2 \\ p_2 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + p_4 \sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right) = p_3 \\ p_3 = p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_4 \cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) = p_2 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ p_2 + p_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p_1 = p_2 = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)}, \quad p_3 = p_4 = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)}$$

Таким образом, искомое стационарное распределение

$$p=\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)},\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)},\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)},\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)}\right]^T.$$

Подставив значения получим:

$p=[0.0131, 0.0131, 0.4868, 0.4868]^T$

Задание 3

Оценки состояний МЦ получены с помощью алгоритмов, изложенных в теоретической части. Они представлены на графиках. Каждому состоянию соответствует отдельный график.

Была рассмотрена система наблюдений на интервале [0,100], с параметрами σ¿$[0.01; 0.015; 0.02; 0.025]^T, n=1$ и получены нелинейная, линейная и тривиальная оценки фильтрации. На каждом графике черным цветом представлено истинное состояние МЦ, а розовым представлена оценка фильтрации.

1) Нелинейная оценка фильтрации

   По графикам на рис.1 видно,что в данном случае оценка совпадает с истинным состоянием.

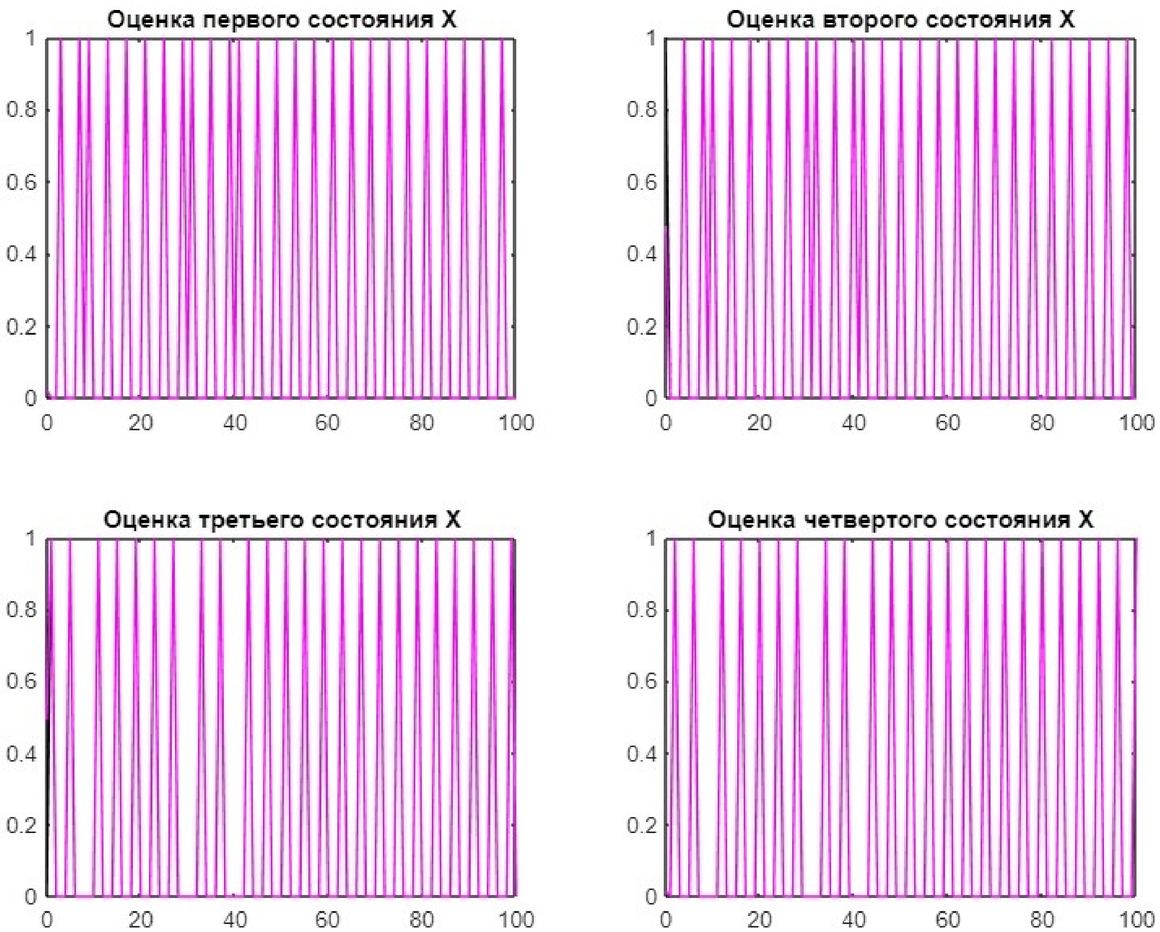


Рис. 1. Нелинейная оценка фильтрации при $\sigma = [0.01; 0.015; 0.02; 0.025]^T$

2) Линейная оценка фильтрации

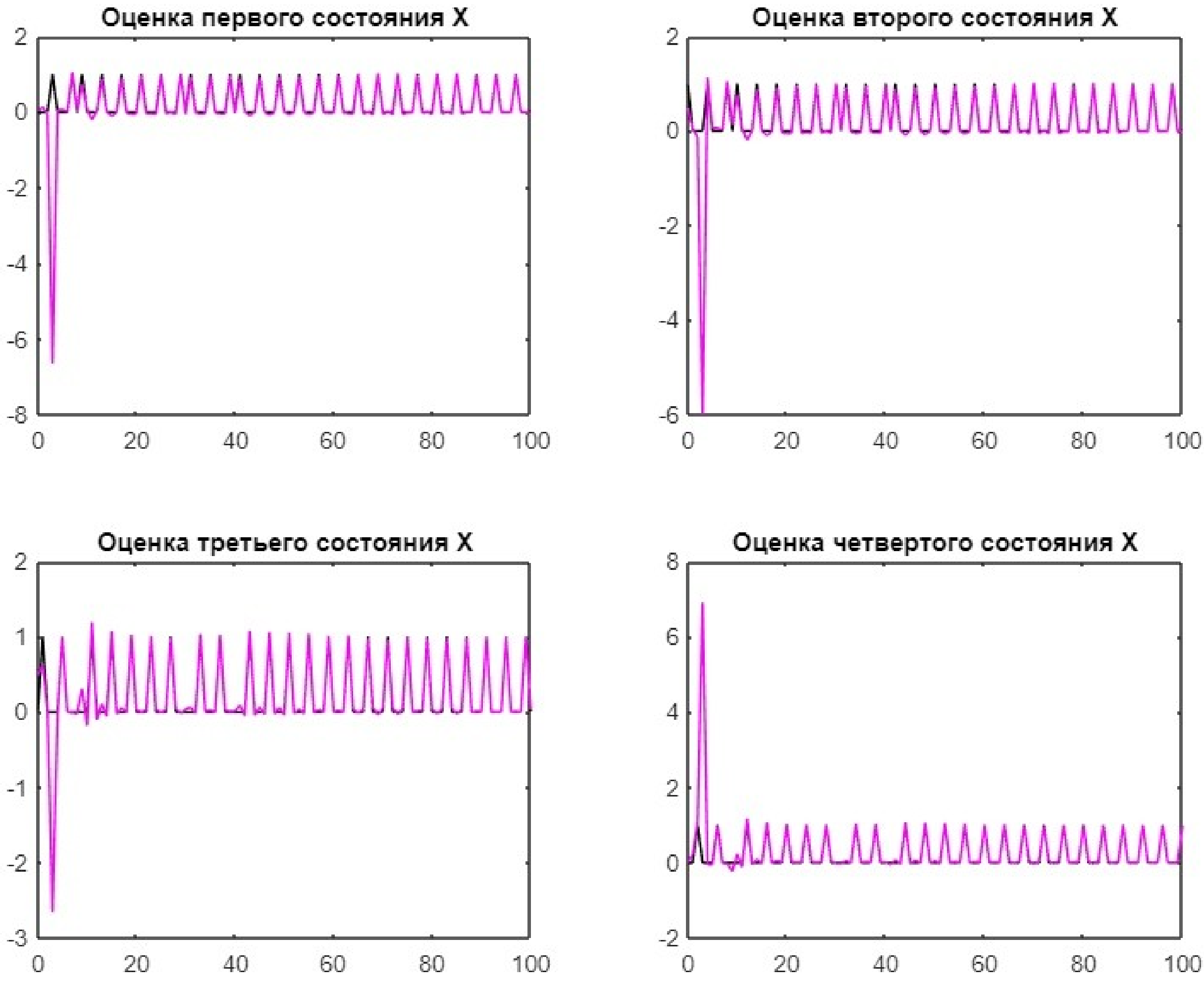


Рис. 2. Линейная оценка фильтрации при $\sigma = [0.01; 0.015; 0.02; 0.025]^T$

3) Тривиальная оценка фильтрации

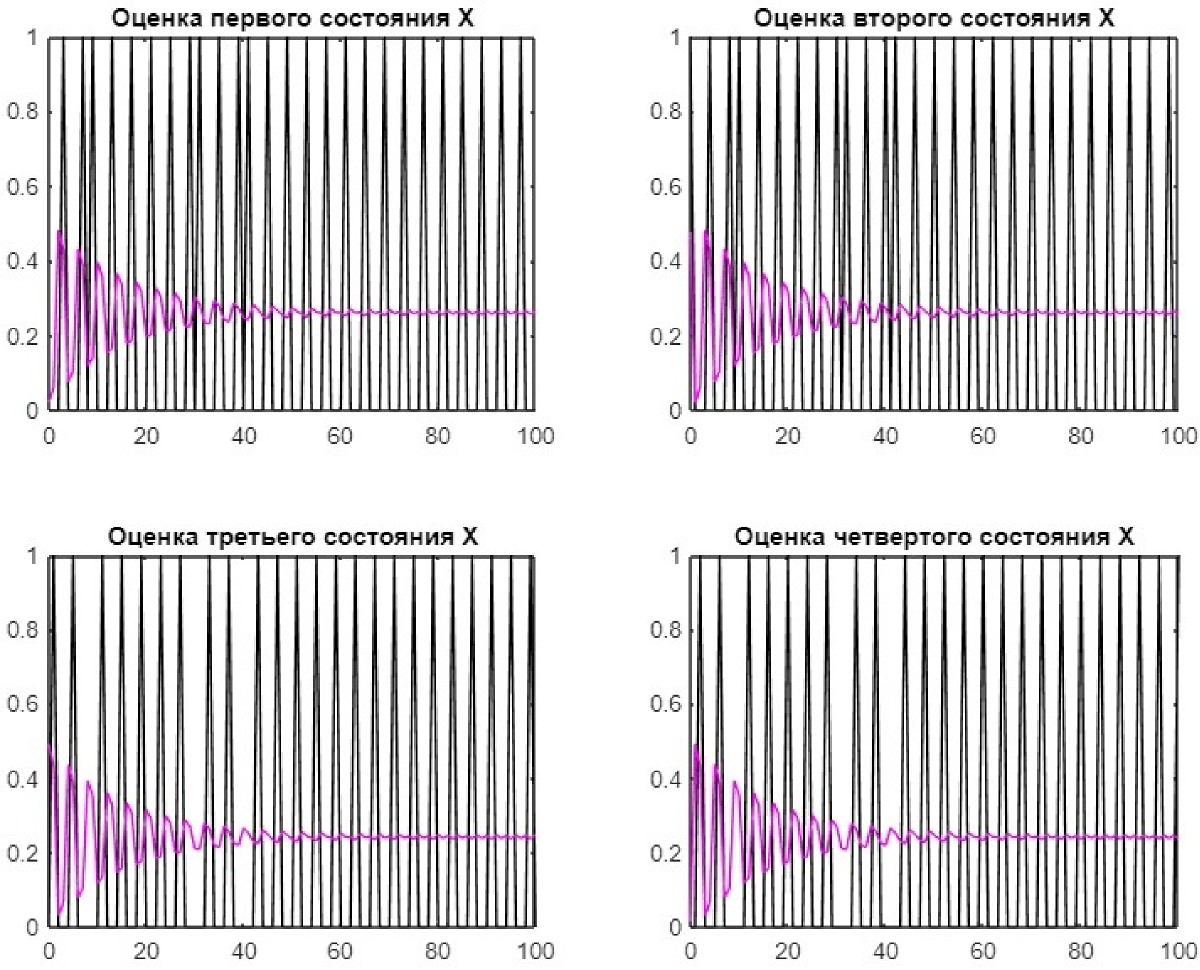


Рис. 3. Тривиальная оценка фильтрации при $\sigma=[0.01\,;0.015\,;0.02\,;0.025]^T$

Вывод:

Наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Это связано с тем, что компоненты вектора C гораздо больше компонент вектора σ .

Задание 4

Путем осреднения ковариаций по пучку из 1000 реализаций, были получены средние значения ковариаций ошибок для трех типов оценок.

а) $k\hat{t}=cov\{\Delta\hat{t},\Delta t\}$

Таблица 1. Оценка $k\hat{t}$

0,9563¿10^{-3}	-0,4676¿10^{-3}	-0,4810¿10^{-3}	-0,0154¿10^{-3}
-0,4676¿10^{-3}	0,2286¿10^{-3}	0,2352¿10^{-3}	0,0075¿10^{-3}
-0,4810¿10^{-3}	0,2352¿10^{-3}	0,2420¿10^{-3}	0,0077¿10^{-3}

-0,0154¿ 10^{-3}	0,0075¿ 10^{-3}	0,0077¿ 10^{-3}	0,0002¿ 10^{-3}

b) $k\bar{t}=cov\{\Delta\bar{t},\Delta\bar{t}\}$

Таблица 2. Оценка $k\bar{t}$

0,0562	0,0402	0,0109	-0,0427
0,0402	0,0353	0,0090	-0,0343
0,0109	0,0090	0,0064	-0,0118
-0,0427	-0,0343	-0,0118	0,0367

c) $\varkappa t=cov\{\Delta t,\Delta t\}$

Таблица 3. Оценка $\varkappa t$

0,1897	-0,0645	-0,0654	-0,0598
-0,0645	0,1899	-0,0602	-0,0652
-0,0654	-0,0602	0,1816	-0,0560
-0,0598	-0,0652	-0,0560	0,1810

Задание 6

Так же была рассмотрена систему наблюдений на интервале [0, 100], с параметрами $\sigma=[1;1.5;2;2.5]^T, n=1$ и получены нелинейная, линейная и тривиальная оценки фильтрации и их ошибки. На каждом графике черным цветом представлено истинное состояние МЦ, а розовым представлена оценка фильтрации.

1) Нелинейная оценка фильтрации.

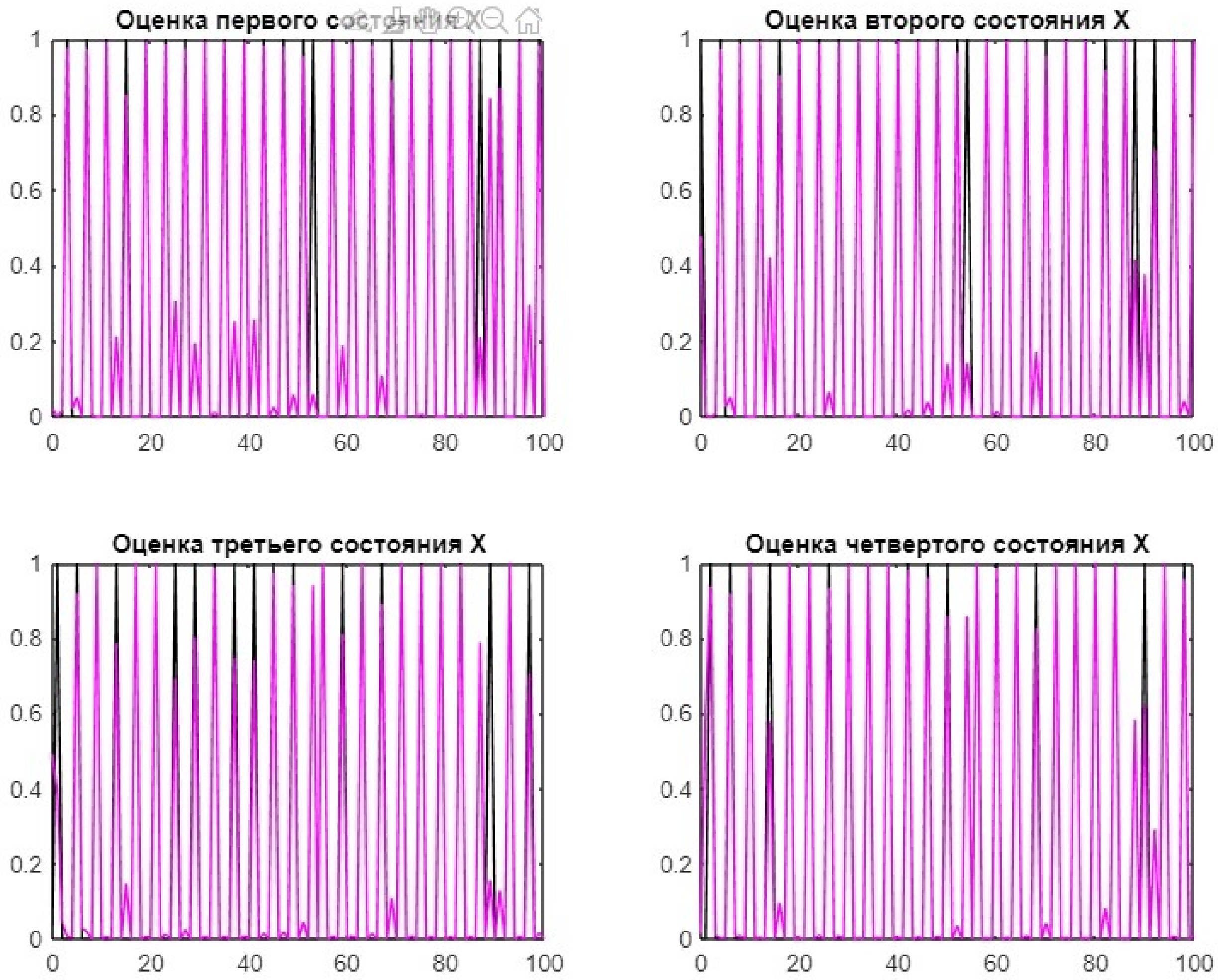


Рис. 1. Нелинейная оценка фильтрации при $\sigma=¿$

2) Линейная оценка фильтрации.

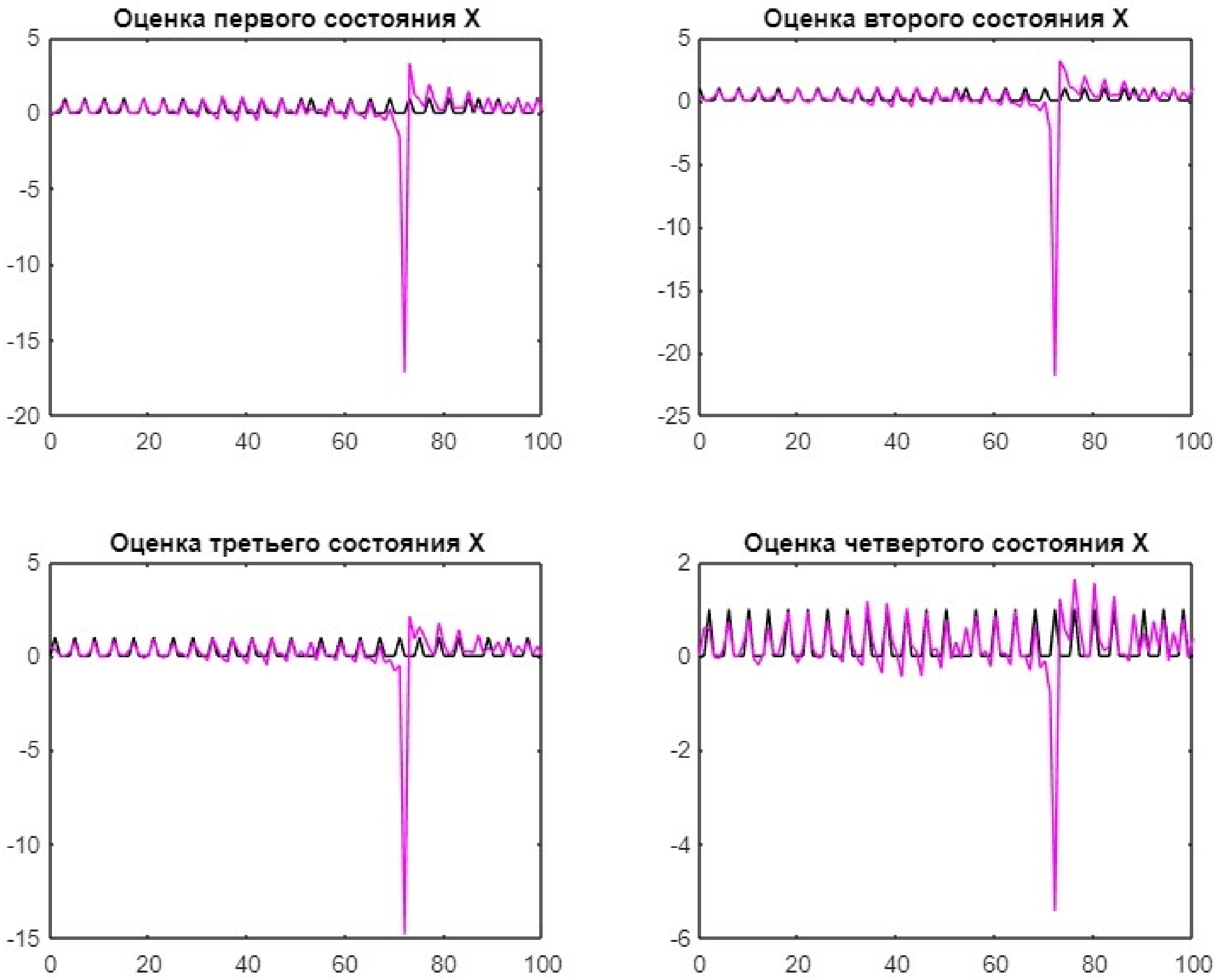


Рис. 2. Линейная оценка фильтрации при $\sigma =¿$

3) Тривиальная оценка фильтрации.

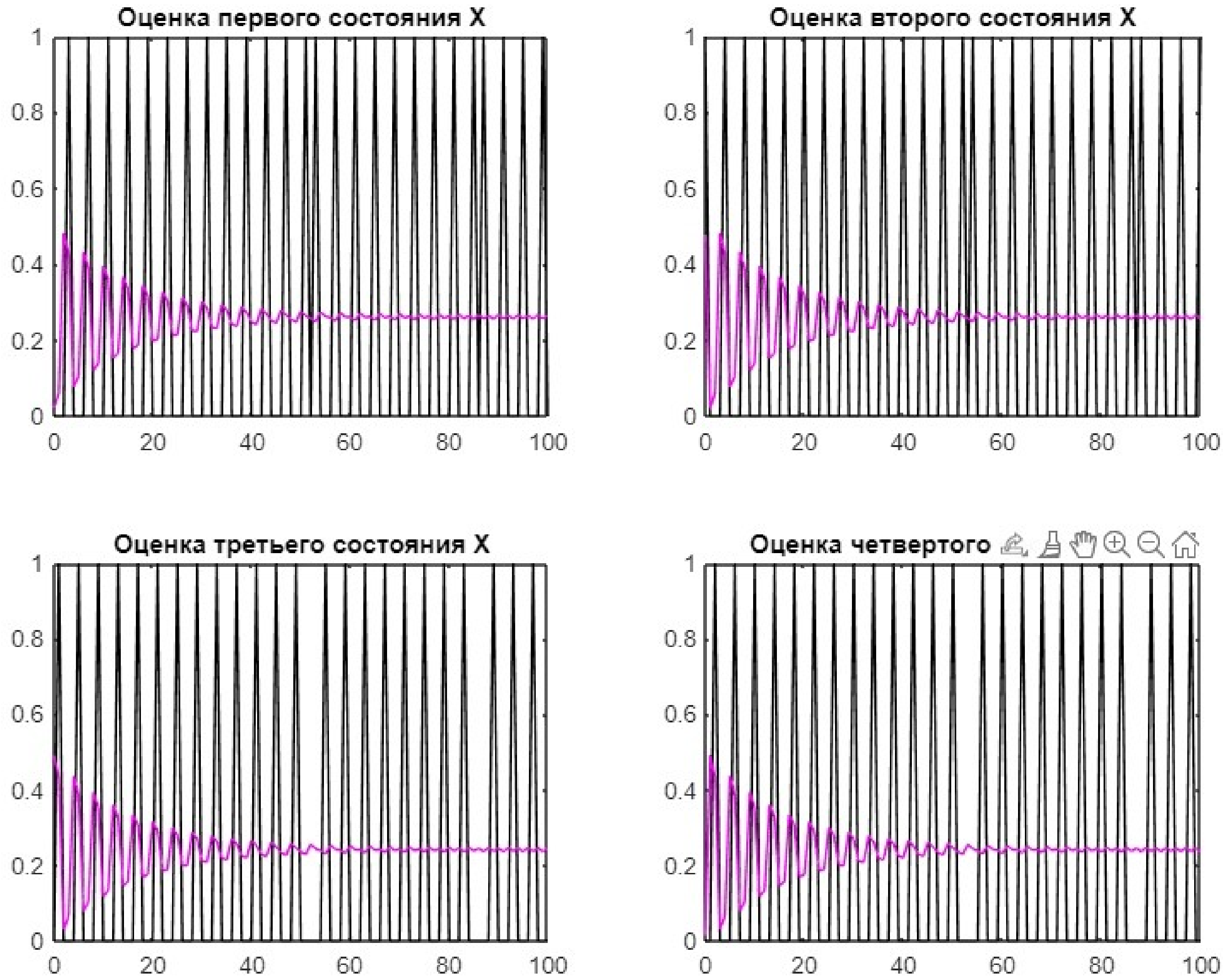


Рис. 3. Тривиальная оценка фильтрации при $\sigma=[1\,;1.5;2\,;2.5]^T$

Путем осреднения ковариаций по пучку из 1000 реализаций, были получены средние значения ковариаций ошибок для трех типов оценок.

а) $\hat{\hat{k}}_t = cov\{\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t\}$

Таблица 1. Оценка $\hat{\hat{k}}_t$

0,0428	- 0,0000	- 0,0428	0,0000
- 0,0000	0,0335	- 0,0002	- 0,0332

-0,0428	-0,0002	0,0434	-0,0003
0,0000	-0,0332	-0,0003	0,0335

b) $\acute{k}_t = cov\{\acute{\Delta}_t, \acute{\Delta}_t\}$

Таблица 2. Оценка $\acute{k}_t$

0,0843	-0,0052	-0,0774	0,0016
-0,0052	0,0777	0,0012	-0,0707
-0,0774	0,0012	0,0857	-0,0067
0,0016	-0,0707	-0,0067	0,0773

c) $\varkappa_t = cov\{\Delta_t, \Delta_t\}$

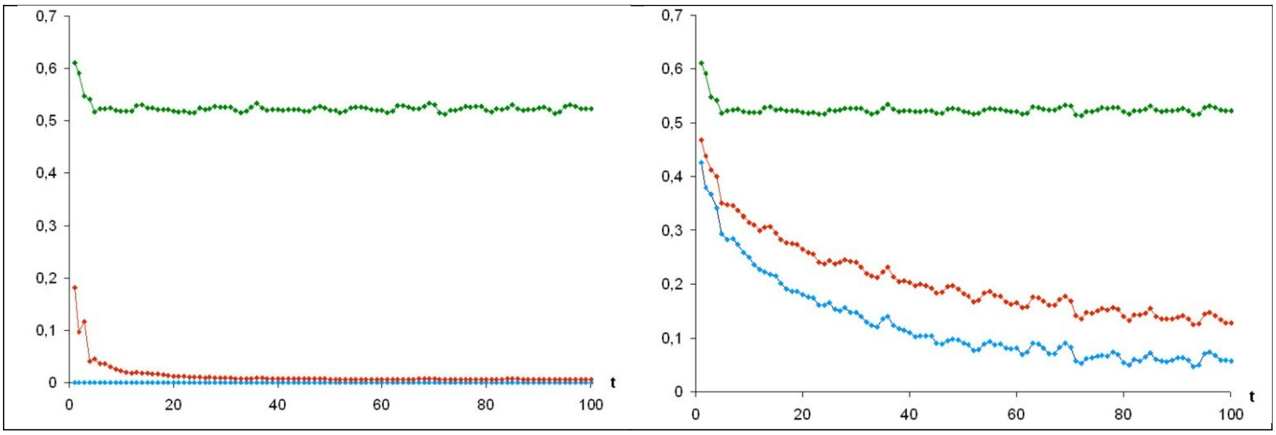
Таблица 3. Оценка $\varkappa_t$

0,1960	-0,0720	-0,0592	-0,0648
-0,0720	0,1962	-0,0649	-0,0593
-0,0592	-0,0649	0,1826	-0,0584
-0,0648	-0,0593	-0,0584	0,1825

Путем осреднения ковариаций по пучку из 100 реализаций, были получены средние значения ковариаций ошибок для трех типов оценок.

Синим изображены ошибки нелинейной оценки, красным – линейной, зеленым – тривиальной.

$\sigma = [0.01; 0.015; 0.02; 0.025]^T$	$\sigma = [1; 1.5; 2; 2.5]^T$



Вывод

В результате выполнения работы были изучены цепи Маркова. Найдено распределение Марковской цепи в произвольный момент времени при помощи z-преобразования. Было выявлено, что данная цепь является периодической.

Наиболее точные результаты дает нелинейная оценка. Линейная оказывается менее точной, но она проста при построении, в отличие от нелинейной оценки.

При малых σ наилучшей оценкой является нелинейная, наихудшей – тривиальная. При увеличении σ результат становится менее точным в силу преобладания шума над полезным сигналом.