
学号：2018302010059

密级：_____

武汉大学本科毕业论文

曲率流的数值格式

院（系）名称：数学与统计学院

专业名称：信息与计算科学

学生姓名：韩之楠

指导教师：蒋维 副教授

二〇二二年五月

郑重声明

本人呈交的学位论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料真实可靠。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。本学位论文的知识产权归属于培养单位。

本人签名：韩之楠

日期：2022.5.19

摘要

平均曲率流，是一类基础的几何流。在求解一维曲率流问题（即二维平面上满足曲率流方程的曲线演化问题）时，因为很难找到解析解，我们需要利用数值方法对微分方程进行求解，然而不同的离散格式得到的数值解不一定是精确解的渐近，因此针对半离散方法的数值解，我们需要验证该结果的收敛性。本篇论文将针对其中一篇参考文献进行重点分析，掌握一维曲率流问题数值算法的收敛性分析方法，并对数值算法进行代码实现。

关键词：曲率；平均曲率流；半离散格式；数值计算

ABSTRACT

The mean curvature flow is a class of basic geometric flow. When solving 1D mean curvature flow problem (as curve satisfying curvature flow equation evolving in 2D surface), since it is hard to find analytical solution, we need to use numerical method to solve differential equation. However different solution obtained from different discrete scheme is not necessary the approximation of the analytical solution, therefore towards the numerical solution from semi-discrete scheme, we need to verify the convergence of the result. This paper will focus on one particular reference and make some in-depth analysis, get hands on the convergence analysis method of numerical algorithm for the 1D curvature flow problem, and have code realization of the numerical algorithm.

Key words: curvature; mean curvature flow; semi-discrete scheme; numerical computation

目录

1.绪论.....	1
1.1 概述	1
1.2 研究现状	1
1.3 发展趋势	3
1.4 可行性分析	3
2.准备知识.....	4
2.1 曲线的曲率	4
2.2 d维曲率流方程.....	5
2.3 弱形式	6
2.4 半离散格式	7
2.5 有限元空间	7
2.6 Gronwall 不等式	7
2.7 Sobolev空间.....	8
2.8 L^2 空间 L^∞ 空间 H^1 空间 H^p 空间	8
3.Dziuk 的半离散格式.....	11
3.1 命题 1	11
3.2 命题 3	12
3.3 命题 4	13
3.4 命题 5	14
3.5 命题 8	14
4.离散格式的收敛性证明.....	19
4.1 定理 2.3	21
4.2 引理 3.1	21
4.3 引理 3.3	22
4.4 引理 3.4	23
4.5 引理 3.6	23
4.6 定理 2.3	23
5.曲率流的其他相关问题及重要应用	25
5.1 保面积的平均曲率流.....	25

5.2 闭曲线上各向异性表面扩散的能量稳定有限差分方法.....	26
5.3 固态脱湿问题及基本性质.....	32
5.4 水平集流	34
结论.....	36
参考文献.....	37
致谢.....	38
附录.....	40

1 绪论

1.1 概述

一个几何演化方程通过规定曲面的法向速度的几何量定义了超曲面的运动。除了在数学方面引起了极大的兴趣，几何演化问题出现在各种各样的科学和技术应用中。问题的一个传统来源是材料科学，其中对材料强度和性能的理解需要在微观结构形态上进行数学建模。演变的表面可能是晶界（晶界将相同的晶相或在过冷凝状态下存在树枝状结构的固液界面中不同的方向分离开）。另一方面，新的应用主要集中在图像处理方面。例如，为了识别二维图像中浅色背景下的黑色形状，一种所谓的蛇形轮廓被演化出来并围绕该形状。在上个世纪，人们对表面和流形的流动产生了极大兴趣。表面平均曲率流的问题已经有很长时间的研究历史。在这里我们介绍最简单的由曲率驱动的运动，即曲线在曲率下的演化。

本文中所研究的二维的平均曲率流指的是一族演化曲线在任意时刻，曲线每个点变化的速度大小等于该曲线的平均曲率。本文首先对 R^2 空间中的二维闭合曲线的平均曲率流问题进行介绍，通过曲率流方程的弱形式得到半离散格式，并理论证明该格式的收敛性，然后再从数值层面对该格式进行验证，通过进一步构造全离散格式进行数值计算，最终可以得到其收敛速度为线性收敛。接下来从理论层面对全离散格式的收敛性进行证明。最后对曲率流的其他相关问题及重要应用进行介绍和分析，并得到一些重要性质。

1.2 研究现状

平均曲率流的研究一般都对初始曲面要求一定的凸性条件，但一般的黎曼流形中超曲面的凸性定义比较复杂，尽管对一些特定的外围空间中的平均曲率流也有研究（如Minkowski空间，双曲空间以及旋转对称空间等），但还是以对欧式空间中的超曲面或者子流形的平均曲率流的研究为主。

平均曲率流就维数和余维数而言可以分为曲线流，超曲面的平均曲率流和高余维子流形的平均曲率流。其中曲线流作为最简单的情形，研究最为深入，理论最为完善（Gage-Hamilton 理论）。高余维子流形的平均曲率流犹豫本身平

均曲率的定义就较为复杂，法方向的个数众多，导致只有对较低维度或者特定的子流形才有较为完善的结论。超曲面子流形是平均曲率流中研究最多，成果最丰富的。根据对初始曲面的拓扑的不同要求，可以分为闭超曲面的平均曲率流、完备非紧超曲面的平均曲率流和带有各种边界条件的紧致带边超曲面的平均曲率流。针对完备非紧超曲面的平均曲率流，1989年 Ecker 和 Huisken 证明了对于定义在 R^n 上的局部 Lipschitz 的整体图 $x_0: R^n \rightarrow R^{n+1}$, 流 $\begin{cases} x_t = Hv \\ x(\cdot, 0) = x_0 \end{cases}$ 在 $[0, \infty)$ 有光滑解。

根据流的不同形态，我们可以将闭超曲面的平均曲率流分为三类：收缩流、膨胀流和具有某种不变性的平均曲率流。关于收缩流，1984年 Huisken 证明在初始曲面严格凸的条件下，流 $\begin{cases} x_t = Hv \\ x(\cdot, 0) = x_0 \end{cases}$ 的解在短时间 $[0, T)$ 上存在，并在时间趋于 T 时收缩为一个点。1994年 Andrews 将速度项取为主曲率的度为 1 的齐次函数，并证明了相同的结论。针对膨胀流，Huisken, Urbas, Gerhard 分别进行了研究，并得到相同的结论：如果对该流做正规化，可以证明它的解也是长时间存在并最终收敛到一个特定球面。针对具有某种不变性的平均曲率流，又可以分为保面积、保体积、既保面积又保体积（混合流）三种情形。1987年 Huisken 证明了保体积流的解长时间存在且最终收敛到一个等体积的球面。之后 Pihan 和 Mccy 证明了保面积流长时间存在且最终收敛到一个等曲面面积的球面。2004年 Mccy 又证明了混合流的解长时间存在且最终收敛到一个与初始曲面有相同混合体积的球面。

平均曲率流理论的应用同样举足轻重。Huisken 和 Ilmanen 用他们提出的平均曲率流弱解的理论证明了 Riemannian-Penrose 不等式的特定情形。2001年 Bray 用一般化的逆平均曲率流理论证明了更一般的情形。Bray 和 Neves 在大于 RP^3 上 Yamabe 不变量的三维流形上，用逆平均曲率流证明了 Poincare 猜想。另外，平均曲率流理论在改进或证明一些等周问题问题时非常有效。国外开始研究平均曲率流的时间较早，因此成果也相对较多。直到 21 世纪，我国对平均曲率流的研究才有所突破，如欧式空间超曲面曲率流的 Harnack 不等式研究，平均曲率流下 Laplace 算子的特征值研究等等。

1.3 发展趋势

经过多年的研究与分析，关于平均曲率流的研究成果逐渐丰硕，主要关注点为平均曲率流的长时间存在性、收敛性及奇点分析，现今针对该论题的研究方向主要为平均曲率流的特征值问题，不同空间下对不同类型的平均曲率流的分析，平均曲率流的自收缩问题。

1.4 可行性分析

针对现有文章进行分析并验证半离散格式数值解的收敛性，从理论分析的角度是可行的，然而想在不对时间离散的情况下得到解的数值误差难度较大（不能保证可以得到时间上连续的数值解），因此需要对时间进行离散得到完全离散格式，从而验证数值解的收敛性。根据论文中的数值计算结果，随着节点的增加，数值解与解析解的差值越来越小，最终可以达到 10^{-3} 数量级，因此可以肯定该方法的正确性和可行性。

2 准备知识

2.1 曲线的曲率

考虑 R^2 的参数曲线

$$r(s) = (x(s), y(s)) \quad (2.1)$$

其中 s 为弧长参数。设

$$\alpha(s) = r'(s) \quad (2.2)$$

若 $n(s)$ 垂直于 $\alpha(s)$ 且 $n(s)$ 长度为 1, 则称 $n(s)$ 为单位法向量。曲率作为描述曲线弯曲程度的量, 其定义为

$$\kappa = |da/ds| = |r''(s)| \quad (2.3)$$

下面我们介绍离散曲线的曲率计算方式

在曲线上按某一方向寻找三个点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)

对于参数曲线 t , 有

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 \\ y = b_1 + b_2 t + b_3 t^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

根据上述三个点, 可以解出 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) 。

令

$$t_a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad t_b = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (2.5)$$

参数方程应该满足:

$$\begin{aligned} (x, y)|_{t=-t_a} &= (x_1, y_1) \\ (x, y)|_{t=0} &= (x_2, y_2) \\ (x, y)|_{t=t_b} &= (x_3, y_3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

则有

$$\begin{cases} x_1 = a_1 - a_2 t_a + a_3 t_a^2 \\ x_2 = a_1 \\ x_3 = a_1 + a_2 t_b + a_3 t_b^2 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 - b_2 t_a + b_3 t_a^2 \\ y_2 = b_1 \\ y_3 = b_1 + b_2 t_b + b_3 t_b^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

将 (2.7) (2.8) 改写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t_a & t_a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_b & t_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t_a & t_a^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_b & t_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

解出 (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , 便可以解出曲线的解析式。

计算导数变量:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = a_2 \\ x'' &= \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=0} = 2a_3 \\ y' &= \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = b_2 \\ y'' &= \frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=0} = 2b_3 \end{aligned}$$

则曲率

$$\kappa = \frac{x''y' - x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2(a_3b_2 - a_2b_3)}{(a_2^2 + b_2^2)^{3/2}} \quad (2.11)$$

2.2 d维曲率流方程

考虑一个在 R^{d+1} 中没有边界的 d 维紧表面 M_0 , M_0 被一个微分同胚映射所表示:

$$x_0: \Omega \rightarrow R^{d+1} \quad (2.12)$$

其中 Ω 包含于 R^d , $x_0(\Omega)$ 包含于 M_0 。

定义映射

$$x(., t): \Omega \rightarrow R^{d+1} (t \geq 0) \quad (2.13)$$

存在 $T > 0$, 在 $\Omega \times (0, T)$ 中,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -H(x)n(x) \quad (2.14)$$

$H(x)n(x)$ 是 $M(t) = x(\Omega, t)$ 在点 $x(., t)$ 处的平均曲率向量。

对 $d = 1$, 在 $I \times (0, T)$ 上满足:

$$x_t - \frac{1}{|x_s|} \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_s = 0 \quad (2.15)$$

针对上述方程，有以下重要性质：

$$|x_s|_t = -|x_t|^2 |x_s| \leq 0 \quad (2.16)$$

证明：首先， $\left| \frac{x_s}{|x_s|} \right| \equiv 1$ ，对 s 求两次导，得到

$$\begin{aligned} \frac{x_s}{|x_s|} \cdot \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_s &= 0 \\ \left| \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_s \right|^2 &= -\frac{x_s}{|x_s|} \cdot \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_{ss} \end{aligned}$$

结合曲率流方程，

$$|x_s|_t = \frac{x_s}{|x_s|} \cdot x_{st} = \frac{x_s}{|x_s|} \cdot \frac{1}{|x_s|} \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_{ss} = -\frac{1}{|x_s|} \left| \left(\frac{x_s}{|x_s|} \right)_s \right|^2 = -|x_t|^2 |x_s|$$

另外，引用两个针对曲率流方程的经典结果：

1. Gage-Hamilton Theorem: 曲率流具有保凸性并使所有闭凸曲线收缩到一个单点。如果将流扩张使得它包围的面积始终等于 π ，那么任意标准化的流都将收缩成一个单位圆
2. Grayson Theorem: 一个从任意嵌入闭合曲线开始演化的曲率流在 $t = \frac{A_0}{2\pi}$ 之前变凸， A_0 是初始曲线围成的面积。

2.3 弱形式

引入测试函数 φ ，对上述微分方程在 I 上积分，得到曲率流方程的弱形式：

$$\int_I x_t |x_s| \varphi + \int_I \frac{x_s}{|x_s|} \varphi_s = 0 \quad (2.17)$$

其中 φ 以 2π 为周期，并在空间上对 I 离散得到网格宽度为 h 的网格。

令 $X_h = \text{span}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ，构造

$$x_h(s, t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \varphi_j(s) \quad (2.18)$$

使得

$$\begin{aligned} \int_I x_{ht} |x_{hs}| \varphi_j + \int_I \frac{x_{hs}}{|x_{hs}|} \varphi_{js} &= 0 \quad (j = 1, \dots, n) \\ x_h(\cdot, 0) &= x_{h0} \end{aligned} \quad (2.19)$$

x_{h0} 是 x_0 在 X_h 上的渐近。此时，只需求出 $x_j(t)$ ，并验证 $x_h(s, t)$ 是否收敛。

2.4 半离散格式

针对上述构造方法，引入网格 $s_j = jh (j = 0, 1, \dots, n), h = 2\pi/n$ ，上述积分可以改写成如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h_j + h_{j+1})\dot{x}_j &= \frac{x_{j+1} - x_j}{h_{j+1}} - \frac{x_j - x_{j-1}}{h_j} \\ h_j &= |x_j - x_{j-1}| \\ x_j(0) &=: x_{0j} \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.20)$$

我们假设解具有周期性，即

$$x_j = x_{j+n}, h_j = h_{j+n} \quad (j = -1, 0, 1, \dots, n) \quad (2.21)$$

2.5 有限元空间

构造有限元空间的第一步：区域的剖分

设 Ω 是 R^n 中的有界区域，将 Ω 划分成有限个子集，称每个子集为一个单元。

令 h 为描述这些单元的某种尺度，记由这些子集构成的集合为 T_h 。

若下列性质成立：

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in T_h} T$
2. T_h 中的 T 是闭的且其内点集 \underline{T} 非空，其边界 ∂T 是Lipschitz连续的。
3. 构造有限元空间的第二步：在每个单元 T 上选取函数的形式和参数。

则称 T_h 是区域 Ω 的一个有限元剖分。

构造有限元空间的第二步：在每个单元 T 上选取函数的形式和参数。

定义有限维空间 V_h ： $V_h \subset L^2(\Omega)$ ，并且 V_h 满足：

$v|_T \in P_T, \forall T \in T_h, \forall v \in V_h$ ----分片要求

对任意两个相异的单元 $T_1, T_2 \in T_h$ ，如果 $T_1 \cap T_2$ 非空，则当下式：

$$d_{i,T_1}(v|_{T_1}) = d_{j,T_2}(v|_{T_2}) \quad (2.22)$$

对任意 $v \in C^k(\bar{\Omega})$ 都成立时，上式对任意 $v \in V_h$ 也成立。

注： $v|_T$ 是 $v|_{\underline{T}}$ 到 T 上的连续延拓。

2.6 Gronwall 不等式

设函数 $x(t)$ 满足

$$x(t) \leq \int_0^t \alpha(\tau)x(\tau)d\tau + \beta(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.23)$$

$\alpha(t), \beta(t)$ 是已知实函数, 则

$$x(t) \leq \int_0^t \alpha(\tau)\beta(\tau)\exp\left(\int_\tau^t \alpha(s)ds\right)d\tau + \beta(t) \quad (2.24)$$

2.7 Sobolev空间

记 n 维空间 R^n 中的点 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 。设 Ω 是 R^n 中的一个有界连通区域, 记其边界为 $\partial\Omega$ 。当 m 表示非负整数或 ∞ 时, 用 $C^m(\Omega)$ 表示 Ω 上所有 m 次连续可微的函数构成的集合, 用 $C^m(\bar{\Omega})$ 表示 $\bar{\Omega}$ 上所有 m 次连续可微的函数构成的集合。用 $C_0^m(\Omega)$ 表示 $C^m(\Omega)$ 中所有这样的函数构成集合, 这些函数的紧支集包含在 Ω 内。

称分量均为非负整数的向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为多重指标, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ 。偏导数算子记为

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.25)$$

广义导数: 对于 Ω 上局部lebesgue可积函数 u , 如果存在另一个 Ω 上的局部lebesgue可积函数 v 满足

$$\int_\Omega v\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\partial^\alpha \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.26)$$

则称 v 是 u 的一个广义导数, 记为 $\partial^\alpha u$ 。

对于非负整数 m 和实数 $\varrho \in [1, \infty]$, 定义

$$W^{m,\varrho}(\Omega) = \{u \in L^\varrho(\Omega) | \partial^\alpha u \in L^\varrho(\Omega), |\alpha| \leq m\} \quad (2.27)$$

在 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 上定义Sobolev范数 $\|\cdot\|_{m,\varrho,\Omega}$: 对 $u \in W^{m,\varrho}(\Omega)$,

$$\|u\|_{m,\varrho,\Omega} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^\varrho dx)^{1/\varrho}, \quad 1 \leq \varrho < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \operatorname{esssup}_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)| \quad (2.28)$$

则称 $W^{m,\varrho}(\Omega)$ 为Sobolev空间

2.8 L^2 空间 L^∞ 空间 H^1 空间 H^p 空间

L^2 空间

L^2 空间是平方可积函数类, 它更接近于 n 维欧氏空间, 具有 n 维欧氏空间许多类似的几何性质。

若 E 是 R^n 内的可测集，而 $f(x)$ 在 E 上可测且 $|f(x)|^2$ 在 E 上勒贝格可积，则称 $f(x)$ 在 E 上是平方可积的。所有这样的函数之集称为 E 上的 L^2 空间，记为 $L^2(E)$ 或 L^2 ，即：

$$L^2(E) = \{f(x) | \int_E |f(x)|^2 dx < \infty\} \quad (2.29)$$

设 e_j^m 为在 $(jh, m\tau)$ 处解析解和数值解的误差，则
对于任意给定的 m ：

$$e_{L^2(I)} = (\sum_{j=1}^n \|e_j^m\|^2 * h)^{1/2} \quad (2.30)$$

对于任意给定的 j ：

$$e_{L^2(0, T-\tau)} = (\sum_{m=0}^{M-1} \|e_j^m\|^2 * \tau)^{1/2} \quad (2.31)$$

L^∞ 空间

L^∞ 空间是一种所有有界数列构成的空间

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \lim_{p \rightarrow \infty} (\int_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \quad (2.32)$$

设 e_j^m 为在 $(jh, m\tau)$ 处解析解和数值解的误差，则
对于任意给定的 m ：

$$e_{L^\infty(I)} = \max_{1 \leq j \leq n} e_j^m \quad (2.33)$$

对于任意给定的 j ：

$$e_{L^\infty(0, T-\tau)} = \max_{0 \leq m \leq M-1} e_j^m \quad (2.34)$$

H^1 空间

$H^1[0,1] = \{h(x) | h(x) \text{ 是 } [0,1] \text{ 上的实值绝对连续函数且 } h'(x) \in L^2[0,1], h(0) = 0\}$

其内积定义为 $\langle u(x), v(x) \rangle_{H^1} = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \quad \forall u, v \in H^1[0,1]$ 。

H^p 空间

定义 T 上的函数 f_r ：

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) \quad (0 \leq r < 1) \quad (2.35)$$

如果 f 是在域 U 上的连续函数，令 σ 表示为 T 上的 $lebesgue$ 测度，并对其单位化使得

$$\sigma(T) = 1$$

那么

$$\|f_r\|_p = \left\{ \int_T |f_r|^p d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty)$$

$$\|f_r\|_\infty = \sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|$$

$$\|f_r\|_0 = \exp \int_T \log^+ |f_r| d\sigma \quad (2.36)$$

如果 $f \in H(U)$ 且 $0 \leq p \leq \infty$, 令

$$\|f\|_p = \sup \{ \|f_r\|_p : 0 \leq r < 1 \} \quad (2.37)$$

如果 $0 \leq p \leq \infty$, H^p 定义为所有 $f \in H(U)$ 构成的类, 其中 $\|f\|_p < \infty$ 。

3 Dziuk 的半离散格式

3.1 命题 1

如果 $h_j > 0$, 则由上述差分格式可推导出 $\dot{h}_j \leq 0$

证明: 根据差分格式, 得到

$$\dot{h}_j = -\frac{1}{4}(h_{j-1} + h_j)|\dot{x}_{j-1}|^2 - \frac{1}{4}(h_j + h_{j+1})|\dot{x}_j|^2 \leq 0 \quad (3.1)$$

由

$$h_j = |x_j - x_{j-1}| \quad (3.2)$$

我们可以得出, 随着时间的推移, 相邻两条曲线的距离会逐渐缩短。

主要结果: 令 $x = x(s, t), (s, t) \in \frac{R}{2\pi} \times [0, T]$ 为一维曲率流方程的解, 初始值为 $x_0(s)$, 且 $|x_s| \geq c_0 > 0$, 则存在 $h_0 > 0$ (h_0 依赖于 x 和 T), 使得对所有 $0 < h \leq h_0$, 差分格式存在唯一解

$$x_h(s, t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) \varphi_j(s)$$

$$x_{h0}(s_j) = x_0(s_j) \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

且

$$\max_{t \in [0, T]} \|x - x_h\|_{L^2(I)} + \left(\int_0^T \|x_s - x_{hs}\|_{L^2(I)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch \quad (3.4)$$

$$\max_{t \in [0, T]} \|x_t - x_{ht}\|_{L^2(I)} + \left(\int_0^T \|x_{ts} - x_{hts}\|_{L^2(I)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch \quad (3.5)$$

其中 c 依赖于 x 和 T 。

根据上述不等式, 我们需要对 $x - x_h, x_t - x_{ht}, x_s - x_{hs}, x_{ts} - x_{hts}$ 进行估计。

先验估计是近代研究偏微分方程的一种基本方法和技巧。对偏微分方程定解问题, 在解存在的假设下, 通过方程系数、自由项及定解条件估计解在某个巴拿赫空间(一般是Sobolev空间或连续可微函数空间)中的范数的上界的不等式。

$$\text{考虑方程: } x_t^\sigma - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_s^\sigma|^2}} \left(\frac{x_s^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_s^\sigma|^2}} \right)_s = 0, \quad x^\sigma(., 0) = x_0 \quad (3.6)$$

$$\int_I x_{ht}^\sigma \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_{hs}^\sigma|^2} \phi_h + \int_I \frac{x_{hs}^\sigma \phi_{hs}}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_{hs}^\sigma|^2}}$$

$$= -\frac{1}{6}h^2 \int_I \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2} |x_{hs}^\sigma|^2 x_{hts}^\sigma \phi_{hs}, \quad x_h^\sigma(\cdot, 0) = x_{h0} \quad (3.7)$$

$$\text{引入 } \sigma, \text{ 定义 } Q^\sigma = \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2} |x_s^\sigma|^2, \quad Q_h^\sigma = \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2} |x_{hs}^\sigma|^2 \quad (3.8)$$

3.2 命题 3:

令 x^σ, x_h^σ 分别为上述方程的解, $Q^\sigma \geq \frac{c_0}{\sqrt{1+c_0^2}}, \quad Q_h^\sigma \geq \frac{c_0}{2\sqrt{1+c_0^2}}, \quad c_0 > 0$, 则:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_I |I_h x^\sigma - x_h^\sigma|^2 Q_h^\sigma + \int_I \frac{|I_h x_s^\sigma - x_{hs}^\sigma|^2}{Q_h^\sigma} \\ & \leq c(1 + \|Q_{ht}^\sigma\|_{L^\infty(I)}) \int_I |I_h x^\sigma - x_h^\sigma|^2 Q_h^\sigma \\ & + c \int_I \frac{|Q^\sigma - Q_h^\sigma|^2}{Q_h^\sigma} + c(1 + \int_I Q_h^\sigma + h^2 \int_I |x_{hts}^\sigma|^2 Q_h^{\sigma^3}) h^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

I_h 是网格上的片段线性插值算子。

证明: 根据先验估计中的方程, 我们得到对所有 $\varphi_h \in X_h$,

$$\begin{aligned} & \int_I (I_h x_s - x_{ht}) \phi_h Q_h + \int_I \frac{I_h x_s - x_{hs}}{Q_h} \phi_{hs} \\ & = \int_I (I_h x_t Q_h - x_t Q) \phi_h + \int_I \frac{I_h x_s}{Q_h} - \frac{x_s}{Q} \phi_{hs} + \frac{1}{6} h^2 \int_I Q_h x_{hts} \phi_{hs} \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $I_h x_s$ 代表 $(I_h x)_s$ 。将 $\phi_h = I_h x - x_h$ 带入, 得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_I |I_h x - x_h|^2 Q_h + \int_I \frac{|I_h x_s - x_{hs}|^2}{Q_h} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{Q_{ht}}{Q_h} \right\|_{L^\infty(I)} \int_I |I_h x - x_h|^2 Q_h \\ & + \int_I |x_t - I_h x_t| |I_h x - x_h| Q_h + \|x_t\|_{L^\infty(I)} \int_I |Q - Q_h| |I_h x - x_h| \\ & + c h^2 \int_I |x_{hts}| |I_h x_s - x_{hs}| Q_h + \int_I \frac{|x_s - I_h x_s| |I_h x_s - x_{hs}|}{Q_h} \\ & + \int_I \frac{|Q - Q_h|}{Q Q_h} |x_s| |I_h x_s - x_{hs}| \leq \frac{1}{2} (1 + \|Q_{ht}\|_{L^\infty(I)}) \int_I |I_h x - x_h|^2 Q_h \\ & + \frac{c}{\varepsilon} \int_I \frac{|Q - Q_h|^2}{Q_h} + \varepsilon \int_I \frac{|I_h x - x_h|^2}{Q_h} + \frac{c}{\varepsilon} h^2 \|x_{ss}\|_{L^2(I)}^2 + c h^2 \|x_{ts}\|_{L^\infty(I)}^2 \int_I Q_h \\ & + \frac{c}{\varepsilon} h^4 \int_I |x_{hts}|^2 Q_h^3 \end{aligned} \quad (3.11)$$

对(3.6)、(3.7)的 t 求导, 得到

$$\int_I x_{tt}^\sigma Q^\sigma \phi + \int_I \frac{x_{ts}^\sigma}{Q^\sigma} \phi_s = - \int_I x_t^\sigma Q_t^\sigma \phi + \int_I \frac{x_s^\sigma Q_t^\sigma}{Q^\sigma Q^\sigma} \phi_s \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \int_I x_{htt}^\sigma Q_h^\sigma \phi_h + \int_I \frac{x_{hts}^\sigma \phi_{hs}}{Q_h^\sigma} &= - \int_I x_{ht}^\sigma Q_{ht}^\sigma \phi_h + \int_I \frac{x_{hs}^\sigma Q_{ht}^\sigma}{Q_h^\sigma Q_h^\sigma} \phi_{hs} \\ &\quad - \frac{1}{6} h^2 \int_I (x_{htts}^\sigma Q_h^\sigma + x_{hts}^\sigma Q_{ht}^\sigma) \phi_{hs} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3 命题 4

基于 prop3 的假设, 存在依赖于 x^σ 和 c_0 的 c , 使得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_I |I_h x_t^\sigma - x_{ht}^\sigma|^2 Q_h^\sigma \\ &+ \int_I \frac{|I_h x_{ts}^\sigma - x_{hts}^\sigma|^2}{Q_h^\sigma} \leq c(1 + \|Q_{ht}^\sigma\|_{L^\infty(I)}) \int_I |I_h x_t^\sigma - x_{ht}^\sigma|^2 Q_h^\sigma \\ &\quad + c \int_I \frac{|I_h x_s^\sigma - x_{hs}^\sigma|^2}{Q_h^\sigma} + c \int_I \frac{|Q^\sigma - Q_h^\sigma|^2 + |Q_t^\sigma - Q_{ht}^\sigma|^2}{Q_h^\sigma} \\ &+ c \left(1 + \int_I Q_h^\sigma + \int_I |x_{hts}^\sigma|^2 Q_h^\sigma \right) h^2 - \frac{1}{6} h^2 \frac{d}{dt} \int_I |I_h x_{ts}^\sigma - x_{hts}^\sigma|^2 Q_h^\sigma \\ &\quad + ch^2 \left(1 + \|\frac{Q_{ht}^\sigma}{Q_h^\sigma}\|_{L^\infty(I)}^2 \right) \int_I |I_h x_{ts}^\sigma - x_{hts}^\sigma|^2 Q_h^\sigma \end{aligned} \quad (3.14)$$

证明:

根据(3.12)、(3.13), 我们可以得到

$$\begin{aligned} &\int_I (I_h x_{tt} - x_{htt}) \phi_h Q_h + \int_I \frac{I_h x_{ts} - x_{hts}}{Q_h} \phi_{hs} = \int_I (I_h x_{tt} Q_h - x_{tt} Q) \phi_h \\ &+ \int_I \left(\frac{I_h x_{ts}}{Q_h} - \frac{x_{ts}}{Q} \right) \phi_{hs} - \int_I (x_t Q_t - x_{ht} Q_{ht}) \phi_h + \int_I \left(\frac{x_s}{Q} \frac{Q_t}{Q} - \frac{x_{hs}}{Q_h} \frac{Q_{ht}}{Q_h} \right) \phi_{hs} \\ &\quad + \frac{1}{6} h^2 \int_I (x_{htts} Q_h + x_{hts} Q_{ht}) \phi_{hs} \end{aligned} \quad (3.15)$$

将 $\phi_h = I_h x_t - x_{ht}$ 带入, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2 Q_h + \int_I \frac{|I_h x_{ts} - x_{hts}|^2}{Q_h}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(1 + \|Q_{ht}\|_{L^\infty(I)}) \int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2 Q_h + \frac{c}{\varepsilon} \int_I \frac{|Q - Q_h|^2}{Q_h} \\
&+ \varepsilon \int_I \frac{|I_h x_{ts} - x_{hts}|^2}{Q_h} + \frac{c}{\varepsilon} \int_I \frac{|Q_t - Q_{ht}|^2}{Q_h} + \int_I \frac{|I_h x_s - x_{hs}|^2}{Q_h} + \frac{c}{\varepsilon} h^2 + \frac{c}{\varepsilon} h^2 \int_I Q_h \\
&- \frac{1}{12} h^2 \frac{d}{dt} \int_I |I_h x_{ts} - x_{hts}|^2 Q_h + ch^2 \left(1 + \left\| \frac{Q_{ht}}{Q_h} \right\|_{L^\infty(I)}^2 \right) \int_I |I_h x_{ts} - x_{hts}|^2 Q_h \\
&\quad + ch^2 \int_I |x_{hts}|^2 Q_h
\end{aligned} \tag{3.16}$$

根据 prop3 和 prop4, 可以看出我们需要对 continuous length 和 discrete length 的差作估计 (即 $Q - Q_h$, $Q_t - Q_{ht}$)

3.4 命题 5

$$\text{定义 } Q_j = \sqrt{\sigma^2 + (1 - \sigma)^2 |x_s^\sigma|^2} |I_j, \quad I_j = [s_{j-1}, s_j], \quad (j = 1, \dots, n) \tag{3.17}$$

则

$$\begin{aligned}
&\dot{Q}_j - \frac{\sigma^2}{h^2} \left(\frac{Q_{j+1} - Q_j}{Q_j^2 Q_{j+1}^2} - \frac{Q_j - Q_{j-1}}{Q_j^2 Q_{j-1}^2} \right) \\
&= -\frac{(1-\sigma)^2}{4} ((Q_j + Q_{j+1}) |\dot{x}_j|^2 + (Q_{j-1} + Q_j) |\dot{x}_{j-1}|^2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

根据上述命题我们可以得到如下引理。

引理 6: 由于差分格式

$$\dot{Q}_j - \frac{\sigma^2}{h^2} \left[\frac{1}{Q_j^2 Q_{j+1}^2} Q_{j+1} - \frac{1}{Q_j^2} \left(\frac{1}{Q_{j-1}^2} + \frac{1}{Q_{j+1}^2} \right) Q_j + \frac{1}{Q_j^2 Q_{j-1}^2} Q_{j-1} \right] \leq 0 \tag{3.19}$$

是抛物型的, 因此根据最大值原理我们可以得到

$$Q_j(t) \leq \max_{k=1, \dots, n} Q_k(0) \tag{3.20}$$

3.5 命题 8

在 prop3 的假设下, 如果 $\|Q_h^\sigma\|_{L^\infty(I)} \leq c$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_I (Q_t^\sigma - Q_{ht}^\sigma)^2 dt \\
&\leq c(1 + \int_0^t \|Q_{ht}^\sigma\|_{L^\infty(I)} dt) \exp \left[c \int_0^t \|Q_{ht}^\sigma\|_{L^\infty(I)} dt \right] \left[\int_0^t \int_I (Q^\sigma - Q_h^\sigma)^2 dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (1 + \|x_{ht}^\sigma\|_{L^\infty(I)}^2) \int_I |I_h x_t^\sigma - x_{ht}^\sigma|^2 Q_h^\sigma dt + ch^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

定理证明:

$\sigma \in [0,1]$, 对每一个对于 s 有周期边界条件的测试函数 $\phi_h \in X_h$, 我们考虑方程

$$x_t^\sigma - \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_s^\sigma|^2}} \left(\frac{x_s^\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_s^\sigma|^2}} \right)_s = 0, \quad x^\sigma(\cdot, 0) = x_0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_I x_{ht}^\sigma \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_{hs}^\sigma|^2} \phi_h + \int_I \frac{x_{hs}^\sigma \phi_{hs}}{\sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_{hs}^\sigma|^2}} \\ &= -\frac{1}{6} h^2 \int_I \sqrt{\sigma^2 + (1-\sigma)^2 |x_{hs}^\sigma|^2} x_{hts}^\sigma \phi_{hs}, \quad x_h^\sigma(\cdot, 0) = I_h x_0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

我们定义 $S = \{\sigma \in [0,1] \mid \text{在 } I \times [0,T] \text{ 上存在 } \sigma \text{ 参数化的离散解, } \max \|I_h x_t^\sigma - x_{ht}^\sigma\|_{L^2(I)} + \left(\int_0^T \|I_h x_{ts}^\sigma - x_{hts}^\sigma\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 h, Q_h^\sigma \geq \frac{c_0}{2\sqrt{1+c_0^2}}\}$ 。

因为我们假设当 $\sigma = 0$ 时, (3.22) 在 $I \times [0,T]$ 上存在唯一的光滑解, 我们可以证明当 $\sigma \in [0,1]$ 时, 上述假设仍成立, 且估计中的所用到的范数仍是有界的 (不依赖于 σ)。

对于合适的 c_1 和 h_0 的先验选择, 我们将证明 $S = [0,1]$ 。

首先, 因为 $1 \in S$, 所以 $S \neq \emptyset$ 。其次, 因为 x_{ht}^σ 和 x^σ 相对于 S 连续依赖于 σ , 所以 S 是闭的。

接下来我们要证明 S 是相对开集。

根据定义, 只需证明 $\sigma = 0 \in S$ 。

根据引理 6, 我们得到 Q_h 有界。

假设 $c_1 \sqrt{h_0} \leq 1$, $h_0 \leq 1$ 。

对于 $h \leq h_0$, $t \in [0,T]$, 根据 S 的定义我们有

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Q_{ht}\|_{L^\infty(I)}^2 &\leq \int_0^t \|x_{hts}\|_{L^\infty(I)}^2 \leq 2 \int_0^t \|x_{hts} - I_h x_{ts}\|_{L^\infty(I)}^2 + c \\ &\leq \frac{c}{h} \int_0^t \|x_{hts} - I_h x_{ts}\|_{L^2(I)}^2 + c \leq c(c_1^2 h_0 + 1) \leq c \end{aligned} \quad (3.24)$$

对命题 3 中的不等式作 t 的积分, 有:

$$\int_I |I_h x - x_h|^2 + \int_0^t \int_I |I_h x_s - x_{hs}|^2 \leq c \int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 + ch^2 \quad (3.25)$$

再由 prop4 和 Gronwall argument 可以导出：

$$\begin{aligned} & \int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2 + \int_0^t \int_I |I_h x_{ts} - x_{hts}|^2 \\ & \leq c \int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 + c \int_0^t \int_I (Q_t - Q_{ht})^2 + ch^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

根据 prop8，我们可以得出：

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_I (Q_t - Q_{ht})^2 \leq c \int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 \\ & + c \int_0^t (1 + \|x_{ht}\|_{L^\infty(I)}^2) \int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2 dt + ch^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

如果我们将上述不等式替换到(3.26)中，由 Gronwall argument 和 S 定义中的第一个不等式可以得出

$$\int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2 + \int_0^t \int_I |I_h x_{ts} - x_{hts}|^2 \leq c \int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 + ch^2 \quad (3.28)$$

那么(3.27)可以转化为

$$\int_0^t \int_I (Q_t - Q_{ht})^2 \leq c \int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 + ch^2 \quad (3.29)$$

再由

$$\int_I (Q - Q_h)^2 \leq c \int_0^t \int_I (Q_t - Q_{ht})^2 + ch^2 \quad (3.30)$$

和 Gronwall 不等式得出

$$\int_0^t \int_I (Q_t - Q_{ht})^2 \leq ch^2 \quad (3.31)$$

$$\int_0^t \int_I (Q - Q_h)^2 \leq ch^2 \quad (3.32)$$

结合上述不等式和(3.28)，可以导出：

$$(\int_I |I_h x_t - x_{ht}|^2)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T \int_I |I_h x_{ts} - x_{hts}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq ch \quad (3.33)$$

我们选取 $c_1 > c$ ，有

$$\max \|I_h x_t - x_{ht}\|_{L^2(I)} + (\int_0^T \|I_h x_{ts} - x_{hts}\|_{L^2(I)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 h \quad (3.34)$$

则S定义中的第一个和第二个不等式严格成立，由(3.31)和(3.32)得到第三个不等式严格成立， Q_h 在每个子区间上都为常数且根据假设

$$Q \geq \frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2}} > 0$$

则 $S = [0, 1]$ 。

这证明了 σ 可以取到 0，即论文中所要证明的情形。

接下来我们利用数值结果对收敛性进行验证。基于上述半离散格式，再对时间进行离散，便可以得到一个全离散的隐格式：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(h_j^{m-1} + h_{j+1}^{m-1}) \frac{1}{\tau} x_j^m + \left(-\frac{1}{h_{j+1}^{m-1}} x_{j+1}^m + \left(\frac{1}{h_{j+1}^{m-1}} + \frac{1}{h_j^{m-1}} \right) x_j^m - \frac{1}{h_j^{m-1}} x_{j-1}^m \right) \\ & = \frac{1}{2}(h_j^{m-1} + h_{j+1}^{m-1}) \frac{1}{\tau} x_j^{m-1} \\ & h_j^{m-1} = |x_j^{m-1} - x_{j-1}^{m-1}| \end{aligned} \quad (3.35)$$

($j = 1, \dots, n; m = 1, \dots, M = T/\tau$)

其中 x_j^m 代表 $x_j(m\tau)$ ， τ 是时间步长。

程序实现中的难点：

根据上述迭代格式可以推出，将第 m 层的所有方程联立后，得到 $Ax = b$ ，其中 $A \in M_n(R)$ ， $A \in R^{n \times (n+2)}$ ， $x \in R^{n+2}$ ， $b \in R^n$ 。利用 x 的周期性，对方程进行变形，使得 $A' \in R^{n \times n}$ ， $x' \in R^n$ ，且

$$A'x' = Ax$$

此时需要求解的方程为：

$$A'x' = b$$

经过 m 步迭代后，得到 x 在所有网格点上的数值解。

数值算例：

例 1： $x(s, t) = \sqrt{1-2t}(\cos(s), \sin(s))$ ， $s \in I = [0, 2\pi]$ ， $T = 0.5$

该函数代表一组在二维曲面上连续收缩的圆。按上述格式对该函数进行计算，得到如下误差分析：

表 3.1 解析解与数值解的误差计算

Nodes	$L^\infty((0, T-\tau), L^2(I))$	$L^\infty((0, T-\tau), L^\infty(I))$
16	0.566127	0.392692
32	0.283883	0.196344
64	0.142044	0.098168
128	0.071035	0.049082

256	0.035519	0.024540
512	0.017759	0.012266

可以得到收敛速度为 $o(h)$ 。

对于有解析解的图像演化，我们直接在 MATLAB 中展示该曲线的演化过程。

对于没有解析解的图像演化，将高精度数值解作为解析解，并在 MATLAB 中展示曲线的演化过程。

例 2：初始值： $x_h(s, 0) = (2\cos(s), 3\sin(s))$

根据不同的时间设定，可以得到不同时间长度的曲线演化过程。然而，由于该演化曲线不存在解析表达式，因此我们不能准确地知道经过多长时间可以收缩到一个单点。因此，我们分别以 1 秒，3 秒为例来研究它的演化情况。

$t = 1$:

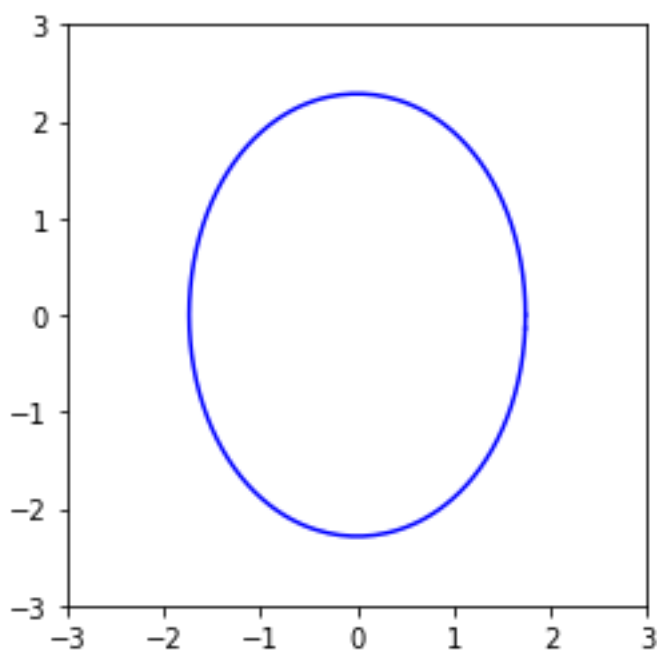


图 3.1 $t=1$ 时椭圆的演化图像

$t = 3$:

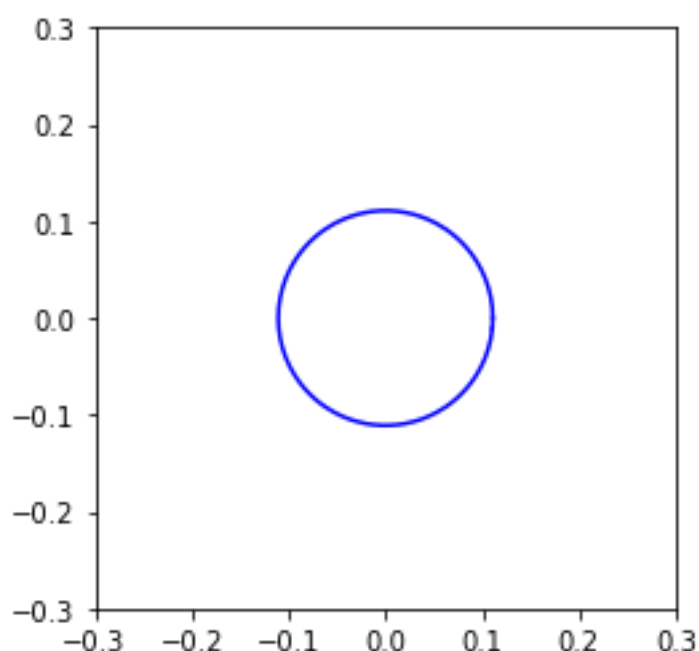


图 3.2 $t=3$ 时椭圆的演化图像

根据图像及数值结果可以清晰地看到，椭圆在有限时间内逐渐收缩，并最终演化到一个单点。

例 3: 初始值: $r = 2 + 2^{\sin 5\theta}$

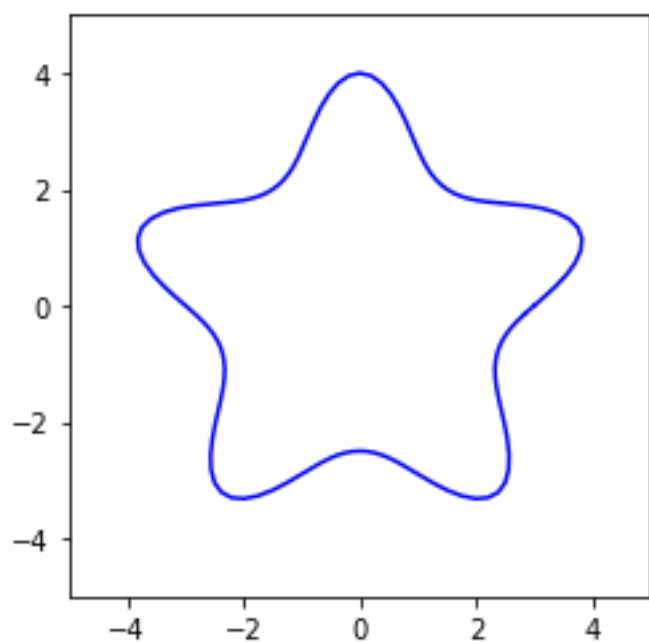


图 3.3 初始值的函数图像

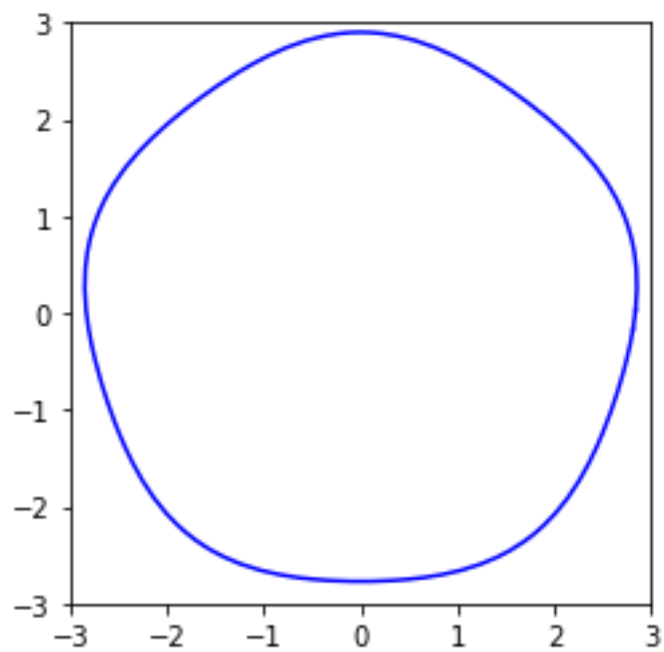


图 3.4 $t=1$ 时的函数图像

在 $t = 1$ 时，就可以看到由数值解演化的图像已经具有凸性。

4 离散格式的收敛性证明

根据对弱形式的描述，我们可以寻找 $X_h^m = \sum_{j=0}^N x_j^m \phi_j(\xi)$ ，使其满足弱形式：

$$\int_{S^1} |\partial_\xi X_h^{m-1}| \delta_\tau X_h^m \cdot v_h d\xi + \int_{S^1} \frac{\partial_\xi X_h^m \cdot \partial_\xi v_h}{|\partial_\xi X_h^{m-1}|} d\xi = 0 \quad \forall v_h \in V_h \times V_h \quad (4.1)$$

其中， $\delta_\tau X_h^m := (X_h^m - X_h^{m-1})/\tau$

针对此问题，我们需要定义有限元空间：

$$V_h \times V_h = \{f(\xi) = \sum_{j=0}^N f_j \phi_j(\xi) : f_j \in \mathbb{R}^2, f_0 = f_N\} \quad (4.2)$$

其中 $\phi_j(\xi)$ 在每个区间 $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ 上是线性的，且 $\phi_j(\xi_k) = \delta_{jk}$ 。

首先提供两个假设：

1. $X: (\xi, t) \in S^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是一个光滑映射，且存在一个正常数 κ

使得

$$\inf_{(\xi, t) \in S^1 \times [0, T]} |\partial_\xi X(\xi, t)| \geq \kappa > 0 \quad (4.3)$$

我们强调 κ 的存在性可以保证原方程非退化。令 $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = 2\pi$,

$$h_j = \xi_j - \xi_{j-1}, \quad h = \max_j h_j$$

我们为了简化标记，采用“周期指标”的惯例，其意义为对任意指标 $j \in \mathbb{Z}$ 等价于 $(j \bmod N + 1)$ 。

2. 存在正常数 C_p' 和 C_p'' ，使得

$$\text{a.} \quad \min_j h_j \geq C_p' h$$

$$\text{b.} \quad |h_j - h_{j-1}| \leq C_p'' h^2 \quad \forall 1 \leq j \leq N$$

注：下述引理均满足这两个假设。

对于时间区间 $[0, T]$ ，我们仅考虑均匀分片，即设置均匀分布的时间层 $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, \dots, T_m$ ，统一时间步长为 $\tau = T/T_m$ 。

对于任意函数 f ，我们提供三个记号：

$$1. f^m(\xi) = f(\xi, t_m)$$

$$2. (f^m)_j = f(\xi_j, t_m)$$

$$3. (f^m)_{j+\frac{1}{2}} = f\left(\frac{\xi_j + \xi_{j+1}}{2}, t_m\right)$$

全离散线性隐格式为：

$$\frac{q_j^{m-1} + q_{j+1}^{m-1}}{2} \delta_\tau x_j^m = \frac{x_{j+1}^m + x_j^m}{q_{j+1}^{m-1}} - \frac{x_j^m + x_{j-1}^m}{q_j^{m-1}} \quad \forall 1 \leq j \leq N, \forall 1 \leq m \leq T_m$$

$$x_j^0 = X^0(\xi_j) \quad \forall 1 \leq j \leq N \quad (4.4)$$

其中

$$q_j^{m-1} = |x_j^{m-1} - x_{j-1}^{m-1}| \quad (4.5)$$

令

$$X_h^m = \sum_{j=0}^N x_j^m \varphi_j \quad (4.6)$$

则 X_h^m 为下述弱形式的解:

$$\begin{cases} \forall v_h \in V_h \times V_h, \\ \int_{S^1} |\partial_\xi X_h^{m-1}| \delta_\tau X_h^m \cdot v_h d\xi + \int_{S^1} \frac{\partial_\xi X_h^m \cdot \partial_\xi v_h}{|\partial_\xi X_h^{m-1}|} d\xi + \int_{S^1} \frac{h^2 |\partial_\xi X_h^{m-1}|}{6} \partial_\xi \delta_\tau X_h^m \cdot \partial_\xi v_h d\xi = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

其中 $h: S^1 \rightarrow R_+$ 是片段常函数, 对于 $\xi \in (\xi_{j-1}, \xi_j)$, $h(\xi) = h_j$ 。

我们用 $\|\cdot\|_V$ 表示 Banach 空间 V 上的范数, $\|\cdot\|$ 代表 $L^2(S^1)$ 范数。

4.1 定理 2.3

存在 $h^* > 0$, 使得对所有 $0 < h < h^*$ 和 $0 < \tau < C_0 h^2$, 离散格式存在唯一解

$$X_h^m = \sum_{j=0}^N x_j^m \varphi_j \quad (4.8)$$

并存在下述误差估计:

$$\max_{1 \leq m \leq T_m} \|X^m - X_h^m\|_{H^1(S^1)} \leq C_1(\tau + h) \quad (4.9)$$

其中 h^*, C_0, C_1 依赖于 C'_P, C''_P, X 。

记号:

$$1. T(Y) = \frac{\partial_\xi Y}{|\partial_\xi Y|} \quad (4.10)$$

$$2. e^m = X^m - X_h^m = (X^m - \tilde{X}_h^m) - (X_h^m - \tilde{X}_h^m) := \rho^m - \eta_h^m \quad (4.11)$$

4.2 引理 3.1

假设 $\min_j q_j^{m-1} > 0$, 令 $\theta^{m-1} = [\theta_{j,k}^{m-1}]_{1 \leq j,k \leq N}$ 为 $N \times N$ 的矩阵, 其中对于所有 $1 \leq j \leq N$, 有

$$\begin{aligned} \theta_{j,j-1}^{m-1} &= -\frac{2\tau}{q_{j-1}^{m-1} + q_j^{m-1}} \\ \theta_{j,j}^{m-1} &= q_j^{m-1} + \frac{2\tau}{q_{j-1}^{m-1} + q_j^{m-1}} + \frac{2\tau}{q_j^{m-1} + q_{j+1}^{m-1}} \end{aligned}$$

$$\theta_{j,j+1}^{m-1} = -\frac{2\tau}{q_j^{m-1} + q_{j+1}^{m-1}} \quad (4.12)$$

其余元素等于 0。

令 $\omega^{m-1} = [\omega_{j,k}^{m-1}]_{1 \leq j,k \leq N}$ 为 θ^{m-1} 的逆矩阵, 若 ω^{m-1} 存在且是非负矩阵, 则对所有 $1 \leq j \leq N$, 有

$$1 - \left(\frac{q_j^m}{q_j^{m-1}} \right)^2 = \tau \sum_k \omega_{j,k}^{m-1} \left(\frac{q_{k-1}^{m-1} + q_k^{m-1}}{2} |\delta_\tau x_{k-1}^m|^2 + \frac{q_k^{m-1} + q_{k+1}^{m-1}}{2} |\delta_\tau x_k^m|^2 + \frac{\tau |\Delta \delta_\tau x_k^m|^2}{q_k^{m-1}} \right) \quad (4.13)$$

其中

$$\Delta \delta_\tau x_k^m := \delta_\tau x_k^m - \delta_\tau x_{k-1}^m \quad (4.14)$$

4.3 引理 3.3

假设

$$\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^m| > 0$$

则对 $0 < \tau < C_0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{S^1} |\partial_\xi X_h^{m-1}| |\delta_\tau e^m|^2 d\xi + \frac{\tau}{8} \int_{S^1} \frac{|\partial_\xi \delta_\tau e^m|^2}{|\partial_\xi X_h^{m-1}|} d\xi + \frac{1}{2\tau} (E^m - E^{m-1}) \\ & \leq C_1 \left(1 + \frac{1}{\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^m|} + \frac{1}{\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^{m-1}|} \right) \int_{S^1} (|\partial_\xi X^{m-1}| - |\partial_\xi X_h^{m-1}|)^2 d\xi \\ & \quad + C_2 \left(1 + \frac{1}{\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^m|} \right) (E^m + E^{m-1}) \\ & \quad + C_3 \left(1 + \frac{1}{\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^{m-1}|} \right) (\tau^2 + h^2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中

$$E^m = \int_{S^1} |T(X^m) - T(X_h^m)|^2 |\partial_\xi X_h^m| d\xi \quad (4.16)$$

$C_0 - C_3$ 依赖于 C'_p, C''_p, X 。

4.4 引理 3.4

假设

$$\inf_{\xi} |\partial_{\xi} X_h^{m-1}| \geq \frac{\kappa}{2} > 0$$

对于 $\forall 0 < \tau < C_0 h^2, 1 \leq j \leq N$,

$$\begin{aligned} \Psi_{j-\frac{1}{2}}^m &\leq \Psi_{j-\frac{1}{2}}^{m-1} \exp\left(-2 \int_{t_{m-1}}^{t_m} |(\partial_t X)_{j-\frac{1}{2}}|^2 dt\right) \\ &+ C_1 \tau h \sum_k w_{j,k}^{m-1} \left(\Psi_{k+\frac{1}{2}}^{m-1} + 2\Psi_{k-\frac{1}{2}}^{m-1} + \Psi_{k-\frac{3}{2}}^{m-1} \right) \\ &+ C_2 \tau h \sum_k w_{j,k}^{m-1} |(\delta_{\tau} e^m)_k| [|\delta_{\tau} x_k^m| + |(\delta_{\tau} X^m)_k|] \\ &+ C_2 \tau h \sum_k w_{j,k}^{m-1} |(\delta_{\tau} e^m)_{k-1}| [|\delta_{\tau} x_{k-1}^m| + |(\delta_{\tau} X^m)_{k-1}|] \\ &+ C_2 \tau^2 h \sum_k w_{j,k}^{m-1} \frac{|(\partial_{\xi} \delta_{\tau} e^m)_{k-\frac{1}{2}}|}{|(\partial_{\xi} X_h^{m-1})_{k-\frac{1}{2}}|} [|(\partial_{\xi} \delta_{\tau} X^m)_{k-\frac{1}{2}}| + |(\partial_{\xi} \delta_{\tau} X_h^m)_{k-\frac{1}{2}}|] \\ &+ C_3 \tau(\tau + h) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\text{其中 } \Psi_{j-\frac{1}{2}}^m := \left| \left| (\partial_{\xi} X^m)_{j-\frac{1}{2}} \right|^2 - \left| (\partial_{\xi} X_h^m)_{j-\frac{1}{2}} \right|^2 \right| \quad (4.18)$$

4.5 引理 3.6

假设

$$\inf_{\xi} |\partial_{\xi} X_h^m| \geq \frac{\kappa}{4} > 0$$

则

$$\tau h \sum_{n=1}^m \sum_k \omega_{j,k}^{n-1} (|\delta_{\tau} x_{k-1}^n|^2 + |\delta_{\tau} x_k^n|^2 + \tau \frac{|(\partial_{\xi} \delta_{\tau} X_h^n)_{k-\frac{1}{2}}|^2}{|(\partial_{\xi} X_h^{n-1})_{k-\frac{1}{2}}|}) \leq C_0 \quad (4.19)$$

其中 C_0 依赖于 C_P', C_P'', X 。

4.6 定理 2.3 的证明

基于上述引理，我们可以证明定理 2.3。

首先，利用数学归纳法证明对 $\forall 1 \leq m \leq T_m$,

$$\begin{aligned}\int_{S^1} |T(X^m) - T(X_h^m)|^2 d\xi &\leq C'_*(\tau^2 + h^2) \\ \int_{S^1} (|\partial_\xi X^m| - |\partial_\xi X_h^m|)^2 d\xi &\leq C''_*(\tau^2 + h^2)\end{aligned}\quad (4.20)$$

接下来过程共分为三步：

第一步，证明当 h 足够小且 $\tau \leq h^2$ 时，

$$\begin{aligned}\inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^{m-1}| &\geq \frac{\kappa}{2} \\ \inf_{\xi} |\partial_\xi X_h^m| &\geq \frac{\kappa}{4}\end{aligned}\quad (4.21)$$

这一步可以使前面引理 3.4, 3.6 所需的条件全部满足。

第二步，证明

$$\begin{aligned}\int_{S^1} (|\partial_\xi X^m| - |\partial_\xi X_h^m|)^2 d\xi &\leq c\tau \sum_{n=1}^m \left(\int_{S^1} |\delta_\tau e^n|^2 d\xi + \tau \int_{S^1} \frac{|\partial_\xi \delta_\tau e^n|^2}{|\partial_\xi X_h^{n-1}|} d\xi \right) \\ &\quad + c(\tau^2 + h^2)\end{aligned}\quad (4.22)$$

第三步，导出

$$\begin{aligned}\int_{S^1} |T(X^m) - T(X_h^m)|^2 d\xi &\leq c(\tau^2 + h^2) \\ \int_{S^1} (|\partial_\xi X^m| - |\partial_\xi X_h^m|)^2 d\xi &\leq c(\tau^2 + h^2)\end{aligned}\quad (4.23)$$

由

$$|\partial_\xi X^m - \partial_\xi X_h^m|^2 = |\partial_\xi X^m| |\partial_\xi X_h^m| |T(X^m) - T(X_h^m)|^2 + (|\partial_\xi X^m| - |\partial_\xi X_h^m|)^2 \quad (4.24)$$

$$\|e^m\| - \|e^{m-1}\| \leq \tau(\|e^m\| + \|\delta_\tau e^m\|) \quad (4.25)$$

定理 2.3 得证。

5. 曲率流的其他相关问题及重要应用

5.1 保面积的平均曲率流

在曲率流的基础上，我们对一种特殊的流进行分析，即保面积的曲率流。

考虑在 R^{n+1} 中的超曲面族 $X(t): \Gamma(t) \rightarrow R^{n+1}$ ， H 代表平均曲率， N 为曲面 $\Gamma(t)$ 的单位外法向量。定义

$$\langle H \rangle := \frac{\int_{\Gamma(t)} H dA}{\int_{\Gamma(t)} 1 dA} \quad (5.1)$$

那么保面积的曲率流方程可以表示为：

$$\frac{\partial}{\partial t} X = (\langle H \rangle - H) \cdot N \quad (5.2)$$

上述流有两种基本性质：

$$\frac{d}{dt} |\Gamma(t)| = \int_{\Gamma(t)} (\langle H \rangle - H) \cdot H dA = \frac{(\int_{\Gamma(t)} H dA)^2}{\int_{\Gamma(t)} 1 dA} - \int_{\Gamma(t)} H^2 dA \leq 0 \quad (5.3)$$

$$\Omega(t) \text{ 表示 } \Gamma(t) \text{ 围成的区域, } \frac{d}{dt} |\Omega(t)| = \int_{\Gamma(t)} (\langle H \rangle - H) dA = 0 \quad (5.4)$$

同样的，针对 $d = 1$ 的情形，上述演化方程可以改写为：

$$\frac{\partial}{\partial t} X = \left(\frac{2\pi}{L} - H\right) \cdot N \quad (5.5)$$

其中 L 为曲线的长度。

四维几何演化规律

定义 $X(\cdot, t): I \rightarrow R^2$ ，在 $I \times [0, T]$ 上满足

$$\begin{cases} \partial_t X = -[\partial_\tau^2 (\kappa \cdot v)]v \\ \kappa = \partial_\tau \tau \end{cases} \quad (5.6)$$

其中 $\kappa = \kappa(\xi, t)$ 代表曲率向量， $v = v(\xi, t)$ 代表单位内法向量， $\tau = \tau(\xi, t)$ 代表曲线 $\Gamma[X(\cdot, t)]$ 在点 $X(\xi, t)$ 的单位切向量。标记 ∂_τ 代表沿曲线 Γ 的切向微分，对于一个定义在 $I \times [0, T]$ 上的函数 v ，其定义为

$$\partial_\tau v(\xi, t) := \frac{\partial_\xi v(\xi, t)}{\partial_\xi X(\xi, t)} \quad (5.7)$$

根据四维几何演化规律，保面积的曲率流方程可以改写为：

$$\begin{cases} \partial_t X \cdot N = \langle H \rangle - H \\ H \cdot N + \partial_{ss} X = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

令 $S_p = H_{per}^1(S^1)$ ， $V_p = S_p \times S_p$ ，定义 L^2 内积为：

$$(u, v)_{\Gamma(t)} := \int_{\Gamma(t)} u(s)v(s)ds \quad (5.9)$$

考虑对空间进行离散, S_p^h 表示有限元空间, $V_p^h = S_p^h \times S_p^h$, 则给定 $\Gamma^h(0) = X^h(\cdot, 0)$, 求一个闭合曲线 $\Gamma^h(t) = X^h(\cdot, t) \in V_p^h$ 和 $H^h \in S_p^h$, 使得

$$\begin{cases} (\partial_t X^h, \varphi^h N^h)_{\Gamma^h(t)}^h + (H^h - \langle H^h \rangle, \varphi^h)_{\Gamma^h(t)}^h = 0 \quad \forall \varphi^h \in S_p^h \\ (H^h, N^h \cdot v^h)_{\Gamma^h(t)}^h - (\partial_s X^h, \partial_s v^h)_{\Gamma^h(t)}^h = 0 \quad \forall v^h \in V_p^h \end{cases} \quad (5.10)$$

其中

$$(u, v)_{\Gamma^h(t)}^h := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |X^h(\xi_j, t) - X^h(\xi_{j-1}, t)| ((u \cdot v)(\xi_j^-) + (u \cdot v)(\xi_{j-1}^+)) \quad (5.11)$$

定义面积和体积:

$$A^h(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (x_j(t) - x_{j-1}(t))(y_j(t) + y_{j-1}(t)) \quad (5.12)$$

$$|\Gamma^h(t)| = \sum_{j=1}^N |X^h(\xi_j, t) - X^h(\xi_{j-1}, t)| \quad (5.13)$$

同样我们可以得到保面积曲率流的两种基本性质。

5.2 闭曲线上各向异性表面扩散的能量稳定有限差分方法

1. 介绍

表面或界面上的扩散过程是原子和分子在固体表面上运动的一个重要且普遍存在的现象。这一问题是一个重要的运输机制, 在表面相形成、固体物理、材料科学和计算几何等领域中都有广泛的应用。例如, 在纳米尺度上, 生长的晶体膜是几种应用的重要成分, 晶体的平衡形状是材料科学中的一个经典问题。

各向异性表面扩散曲线的运动由四阶(高度非线性)几何演化方程控制。因此, 我们首先将四阶演化方程分解为两个二阶方程, 其中曲线的位置向量和加权曲率被视为未知量。我们不使用弧长参数, 而是引入一个拉格朗日坐标参数, 这样一条闭合曲线就可以在一个固定的区间内被参数化, 方程便可以用新的参数来表示。然后我们提出了一种线性半隐式有限差分方法来离散这两个方程, 并证明了该格式满足离散能量耗散, 因此在适当的各向异性表面能条件下是能量稳定的。

根据Nernst-Einstein关系, Mullins首次提出了一个各向同性表面扩散的数学公式来研究晶界的演化。在该公式中, 由于原子沿界面的扩散, 热沟槽逐渐发展。换句话说, 相界面的演化是由界面内的质量扩散控制的。后来, 它被扩展

到有理热力学中的各向异性表面扩散。除了热沟槽，其他应用还包括微电子器件中的晶间空隙、外延生长和图像变形。在微分几何中，对于在 R^2 上演化的闭合曲线，各向同性表面扩散运动作为一种特殊情况，受四阶几何演化规律的约束：

$$X_t = \kappa_{ss} n \quad (5.14)$$

该公式代表曲面由曲率沿法向移动。

由于各向异性过程在实际中较为常见，各向异性表面扩散作为各向同性情况的延伸，近年来得到了进一步的研究。结果表明，各向异性扩散经常发生在不同的表面原子结构和表面的阶梯结构上。为了建立模型，在[9]中对(5.14)引入一个加权曲率 μ 来代替 κ 。该模型被用于研究固态脱湿问题中薄膜的演化。

在求解各向同性表面扩散问题时，我们引入一种新的思想，利用标量曲率、曲率矢量、标量法向速度和矢量法向速度四个未知量建立能量稳定格式。

将上述方法改造并仍然保持能量稳定性，我们将(5.14)分解为两个方程：

$$\begin{aligned} n \cdot X_t &= \kappa_{ss} \\ \kappa n &= -X_{ss} \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中位置向量 X 和曲率 κ 定义为两个未知数。我们注意到第二个方程是微分几何中一个众所周知的恒等式，即位置向量的曲面拉普拉斯算子是(平均)曲率法向量的负数。

为了解决表面扩散问题，由于演化规律(5.14)是在微分几何的背景下创建的，因此上述满足能量稳定性的数值方法大多是基于拉格朗日描述下的表面有限元方法。对于基于网格的欧拉方法，我们可以采用水平集方法，但前提是时间步长要足够小，这样才能满足能量稳定性。在各向同性表面能下，我们可以采用不变能量二次化方法设计的相场方法。

我们基于 Li 和 Bao 提出的能量稳定参数有限元方法，提出了一种(弱)各向异性表面扩散的有限差分方法，该方法不仅满足无条件能量稳定的性质，还会在拉格朗日坐标系中生成一个带有未知数的简单线性系统，以便于进行求解。

2. 数学模型

我们考虑一个在二维平面上充分光滑的封闭曲线 $\Gamma(t)$ 。这条曲线表示为

$$\Gamma(t) = \{X(s, t) = (X(s, t), Y(s, t))\}$$

其中 t 为时间， s 为弧长参数。

$\Gamma(t)$ 在各向异性表面扩散作用下的运动控制方程为

$$\mathbf{X}_t = \mu_{ss} \mathbf{n}$$

$$\mu = (\gamma(\theta) + \gamma''(\theta))\kappa \quad (5.16)$$

其中 γ 是无量纲的正表面能， κ 是曲率， \mathbf{n} 是单位外法向量。

我们用 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X}_s = (X_s, Y_s)$ 表示单位切向量，用 θ 表示 $\boldsymbol{\tau}$ 与负横轴之间的切角。

更具体地说，角度定义为 $\tan(\theta - \pi) = \frac{Y_s}{X_s}$ ，其中减 π 是为了便于和[9]中使用的符号进行比较。此外，通过引入向量 $\pi/2$ 的顺时针旋转，我们用 $\mathbf{u}^\perp = (v, -u)$ 表示向量 $\mathbf{u} = (u, v)$ 的垂直向量。因此，曲线上单位切向量 \mathbf{X}_s 的垂直向量与单位向外法向量 \mathbf{n} 完全相等，即 $\mathbf{X}_s^\perp = \mathbf{n}$ 。

当 $\gamma = 1$ 时，(5.16)简化为各向同性情形(5.14)。

在平面曲线上，有 $\kappa = \theta_s$ ， $\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{X}_{ss} = -\kappa \mathbf{n}$ ， $n_s = \kappa \boldsymbol{\tau}$ ，我们可以得到

$$\mu \mathbf{n} = -(\gamma(\theta) \mathbf{X}_s - \gamma'(\theta) \mathbf{X}_s^\perp)_s$$

利用上述等式，四阶几何演化方程(5.16)可由两个类似于(5.15)的耦合二阶方程重铸为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{X}_t = \mu_{ss} \quad (5.17)$$

$$\mu \mathbf{n} = -(\gamma(\theta) \mathbf{X}_s - \gamma'(\theta) \mathbf{X}_s^\perp)_s \quad (5.18)$$

接下来我们用上述公式代替(5.16)进行有限元计算。

我们引入拉格朗日参数 α ，使一条闭合曲线

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{X}(\alpha, t) = (X(\alpha, t), Y(\alpha, t))\}$$

可以在固定的区间 $[0, 2\pi]$ 上被参数化。虽然不使用弧长参数 s 去定义曲线，但是参数 α 和弧长参数 s 仍然可以通过弧长元素 $ds = |\mathbf{X}_\alpha| d\alpha = \sqrt{X_\alpha^2 + Y_\alpha^2} d\alpha$ 和导数 $\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_\alpha / |\mathbf{X}_\alpha|$ 联系起来。

各向异性表面扩散动力学具有两个固有性质：总面积守恒和能量耗散。

第一个属性可以通过在封闭曲线 Γ 上进行分部积分得到，

$$\frac{dA}{dt} = \int_\Gamma \mathbf{X}_t \cdot \mathbf{n} ds = \int_\Gamma \mu_{ss} ds = 0 \quad (5.19)$$

对于总表面能量

$$E(t) = \int_\Gamma \gamma(\theta) ds \quad (5.20)$$

其变化率为

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\Gamma} \mu_s^2 ds \leq 0 \quad (5.21)$$

这表明能量 E 在连续意义上总是耗散的。

基于这一性质，我们提出一种能量稳定有限差分方法，该方法保留了离散意义上的能量耗散。

3. 闭曲线上各向异性表面扩散的能量稳定有限差分方法

如前所述，我们引入一个拉格朗日坐标 $\alpha \in [0, 2\pi]$ ，沿着闭合曲线 $\Gamma(t) = \{\mathbf{X}(\alpha, t) = (X(\alpha, t), Y(\alpha, t))\}$ ，使得所有几何量和解变量都可以定义在这个坐标上。现在单位切线可以被改写为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{X}_{\alpha} / |\mathbf{X}_{\alpha}| = (X_{\alpha}, Y_{\alpha}) / |\mathbf{X}_{\alpha}|$$

单位法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{X}_{\alpha}^{\perp} / |\mathbf{X}_{\alpha}| = (Y_{\alpha}, -X_{\alpha}) / |\mathbf{X}_{\alpha}|$$

对 s 的偏导数为 $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ 。

根据这些符号，我们可以重写方程式(5.17)、(5.18)：

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{X}_{\alpha}^{\perp}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \cdot \mathbf{X}_t &= \frac{1}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) \\ \mu \frac{\mathbf{X}_{\alpha}^{\perp}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} &= - \frac{1}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\gamma(\theta) \frac{\mathbf{X}_{\alpha}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} - \gamma'(\theta) \frac{\mathbf{X}_{\alpha}^{\perp}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \right) \end{aligned}$$

上述方程可进一步简化为

$$\mathbf{X}_{\alpha}^{\perp} \cdot \mathbf{X}_t = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \right) \quad (5.22)$$

$$\mu \mathbf{X}_{\alpha}^{\perp} = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\gamma(\theta) \frac{\mathbf{X}_{\alpha}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} - \gamma'(\theta) \frac{\mathbf{X}_{\alpha}^{\perp}}{|\mathbf{X}_{\alpha}|} \right) \quad (5.23)$$

接下来，我们将方程(5.22)、(5.23)离散化。

首先布置一个均匀网格，在 α 坐标下，沿初始闭合曲线 $\Gamma(0)$ ，网格点 $\alpha_i = i\Delta\alpha, i = 0, 1, 2, \dots, N$ ， $\Delta\alpha = 2\pi/N$ 。根据周期性，我们有 $\alpha_0 = \alpha_N$ 。由于使用了中心差分，我们定义“半整数”点

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2})\Delta\alpha$$

在方程(5.22)、(5.23)中的 α 坐标公式，在 α 导数的有限差分近似中使用的 $\Delta\alpha$ 可以完全去掉，且不需要改变近似，这是使用 α 的另一个优点。

考虑到这一点，对于离散函数 f ，我们定义差分算子

$$\begin{aligned}\Delta f_{i+\frac{1}{2}} &= f_{i+1} - f_i \\ \Delta f_i &= (f_{i+1} - f_{i-1})/2\end{aligned}\tag{5.24}$$

其中下标 i 表示函数定义在 α_i ，例如，垂直向量离散为

$$\begin{aligned}(\Delta \mathbf{X}_i)^\perp &= (\Delta Y_i, -\Delta X_i) = \left(\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2}, -\frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2} \right) \\ (\Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}})^\perp &= \left(\Delta Y_{i+\frac{1}{2}}, -\Delta X_{i+\frac{1}{2}} \right) = (Y_{i+1} - Y_i, -(X_{i+1} - X_i))\end{aligned}$$

其他变量也以类似方式定义。

我们还定义离散表面能量

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}} := \gamma(\theta_{i+\frac{1}{2}})$$

$$\text{其中 } \theta_{i+\frac{1}{2}} - \pi = \frac{\Delta Y_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta X_{i+\frac{1}{2}}}$$

基于上述符号，我们对(5.22)、(5.23)提出半隐式有限差分离散化方法。

设 Δt 为时间步长， n 为上标，指时间步长指标。从 (\mathbf{X}^n, μ^n) 到 $(\mathbf{X}^{n+1}, \mu^{n+1})$,

$$(\Delta \mathbf{X}_i^n)^\perp \cdot \frac{\mathbf{X}_i^{n+1} - \mathbf{X}_i^n}{\Delta t} = \frac{\Delta \mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{|\Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}}^n|} - \frac{\Delta \mu_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{|\Delta \mathbf{X}_{i-\frac{1}{2}}^n|}\tag{5.25}$$

$$\mu_i^{n+1} (\Delta \mathbf{X}_i^n)^\perp = -\frac{\gamma_{i+\frac{1}{2}}^n \Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n (\Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1})^\perp}{|\Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}}^n|} + \frac{\gamma_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta \mathbf{X}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n (\Delta \mathbf{X}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^\perp}{|\Delta \mathbf{X}_{i-\frac{1}{2}}^n|}\tag{5.26}$$

可以看出，空间离散化是中心差分，而时间离散化是向前欧拉。

尽管(5.22)、(5.23)是非线性的，上述格式却是完全线性的，未知量 $(\mathbf{X}^{n+1}, \mathbf{Y}^{n+1}, \mu^{n+1})$ 便可以轻松地求解出来。

我们将在第 n 步时间上的离散能量 E^n 定义为

$$E^n = \sum_{i=1}^N \gamma_{i+\frac{1}{2}}^n |\Delta \mathbf{X}_{i+\frac{1}{2}}^n|\tag{5.27}$$

引理 1(分部求和)

根据指标 i 的周期性，我们可以得到

$$\sum_{i=1}^N a_{i+\frac{1}{2}}(f_{i+1} - f_i)(g_{i+1} - g_i) = - \sum_{i=1}^N [a_{i+\frac{1}{2}}(f_{i+1} - f_i) - a_{i-\frac{1}{2}}(f_i - f_{i-1})]g_i$$

该等式等价于

$$\sum_{i=1}^N a_{i+\frac{1}{2}} \Delta f_{i+\frac{1}{2}} \Delta g_{i+\frac{1}{2}} = - \sum_{i=1}^N (a_{i+\frac{1}{2}} \Delta f_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}} \Delta f_{i-\frac{1}{2}}) g_i$$

我们在曲线 Γ 上定义周期边界条件下的 Sobolev 空间

$$\mathbb{X} := H^1([0, 2\pi]) \times H^1([0, 2\pi])$$

$$\mathbb{K} := H^1([0, 2\pi])$$

其中 $H^1([0, 2\pi]) = \{u: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} | u \in L^2([0, 2\pi]), u_\alpha \in L^2([0, 2\pi])\}$

$$L^2([0, 2\pi]) = \{u: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} | \int_0^{2\pi} |u(\alpha, t)|^2 |X_\alpha| d\alpha < \infty\}$$

在离散曲线 Γ_h 上定义必要的有限空间 $\mathbb{X}^h := \mathbb{K}^h \times \mathbb{K}^h \subset \mathbb{X}$, $\mathbb{K}^h \subset \mathbb{K}$ 是由片段连续的线性标量函数构成的空间, 这些函数被 $f_i, i = 1, 2, \dots, N$ 的值连接起来。

定理 1(适定性) 对于每个时间步骤 n , 假设以下两个条件成立:

1. $\{\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n\}_{i=1}^N$ 中至少有两个向量不互相平行

2. $\min_{i=1, \dots, N} |\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n| > 0$

那么(5.25)、(5.26)在弱意义上是适定的, 即对于问题

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i^n \cdot \frac{X_i^{n+1} - X_i^n}{\Delta t} \phi_i |\Delta X_i^n| = - \sum_{i=1}^N \frac{\Delta \mu_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{|\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n|} \frac{\Delta \phi_{i+\frac{1}{2}}}{|\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n|} |\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n| \quad (5.28)$$

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^{n+1} \mathbf{n}_i^n \cdot \omega_i |\Delta X_i^n| = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta X_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \gamma_{i-\frac{1}{2}}^n (\Delta X_{i-\frac{1}{2}}^{n+1})^\perp}{|\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n|} \frac{\Delta \omega_{i+\frac{1}{2}}}{|\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n|} |\Delta X_{i+\frac{1}{2}}^n| \quad (5.29)$$

存在唯一解 $(X^{n+1}, \mu^{n+1}) \in \mathbb{X}^h \times \mathbb{K}^h$, 其中 $\omega \in \mathbb{X}^h$ 和 $\phi \in \mathbb{K}^h$ 是测试函数。

定理 2(离散能量耗散) 根据指标 i 的周期性和通用的耗能条件

$$2\gamma(\theta) - \gamma(\theta) \cos(\theta - \phi) - \gamma'(\theta) \sin(\theta - \phi) \geq \gamma(\phi) \quad \forall \theta, \phi \in [-\pi, \pi] \quad (5.30)$$

(5.25)、(5.26) 格式无条件能量稳定, 即格式在每个时间步骤 n 都满足 $E^{n+1} \leq E^n$ 。

5.3 固态脱湿问题及基本性质

在毛细效应的驱动下，沉积在基底上的固体薄膜在沉积状态下往往是亚稳态或不稳定的，当加热到临界温度时（甚至在材料熔点以下）会出现复杂的形态演化。这种被称为固态脱湿的现象已经在各种薄膜/衬底系统中被广泛观察到。近年来，固体除湿技术在薄膜技术中得到了广泛的应用。例如，在制作薄膜结构（例如，微电子及光电设备）的过程中，它可能是有害的，因为它会破坏设备的结构和可靠性；另一方面，它可能是积极有利的，可以用于创建纳米粒子的模板，例如，用于传感器和半导体纳米线的生长。这些重要的应用激发了人们对理解固态脱湿现象潜在机理的兴趣。

一般来说，固态脱湿问题可以看作是一类由二维/三维表面扩散和接触点/线迁移(或移动接触线)控制的开放曲线/曲面演化问题。二维中的接触点是三相(即固体膜、蒸汽和衬底)相遇的点。随着时间的推移，接触点沿着衬底移动，这给这个问题带来了额外的动力学特征。

最近，人们提出了不同的数学模型和模拟方法来模拟固态脱湿，如尖锐界面模型(见 Wong et al., 2000; Wang et al., 2015; Jiang et al., 2020)，相位场模型(见 Jiang et al., 2012; Dziwnik 等人, 2017; Naffouti 等人, 2017; Huang et al., 2019)，结晶配方法(见 Carter et al., 1995; Zucker et al., 2013)、离散表面化学势法(见 Dornel et al., 2006)和动力学蒙特卡罗法(见 Pierre-Louis et al., 2009)。我们主要研究如何设计一种高效、准确的数值方法来求解固体除湿的尖锐界面模型。

二维的固态脱湿问题被描述为一个开放的演化曲线 $\Gamma(t) = \mathbf{X}(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T$ ，由弧长 s 参数化， $s \in (0, L(t))$ ，其中 $L := L(t) = |\Gamma(t)|$ 指在时间 t 时曲线的总长度，它与固体基层在左右移动接触点相交，即 $x_c^l(t) := x(0, t)$, $x_c^r(t) := x(L, t)$ 。利用总界面能的热力学变化，可以推导出二维各向同性表面能薄膜的无量纲尖锐界面模型

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{X} = \partial_{ss} \kappa \mathbf{n}, & 0 < s < L(t), \quad t > 0 \\ \kappa = -(\partial_{ss} \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}, & \mathbf{n} = (-\partial_s y, \partial_s x)^T \end{cases} \quad (5.31)$$

其中 $\mathbf{n} := \mathbf{n}(s, t)$ 为曲线的单位外法向量， $\kappa := \kappa(s, t)$ 为曲线的曲率。

初始曲线为 $\mathbf{X}(s, 0) := \mathbf{X}_0(s) = (x_0(s), y_0(s))^T$, $0 \leq s \leq L_0 := L(0)$, 且满足初值 $x_0(0) < x_0(L_0)$ 。

边界条件为

- (1) 接触点条件: $y(0, t) = 0, y(L, t) = 0, t \geq 0$
- (2) 松弛接触角条件: $\frac{dx_c^l(t)}{dt} = \eta(\cos\theta_d^l - \sigma), \frac{dx_c^r(t)}{dt} = -\eta(\cos\theta_d^r - \sigma), t \geq 0$
- (3) 零质量通量条件: $\partial_s \kappa(0, t) = 0, \partial_s \kappa(L, t) = 0, t \geq 0$

其中材料常数 σ 定义为

$$\sigma := \frac{\gamma_{VS} - \gamma_{FS}}{\gamma_{FV}} \quad (5.32)$$

$\gamma_{FV}, \gamma_{VS}, \gamma_{FS}$ 分别代表薄膜/蒸汽, 蒸汽/基层, 薄膜/基层的表面能量密度, 这些量决定了平衡接触角 $\theta_i \in (0, \pi)$ (即各向同性的杨氏角), 满足 $\sigma = \cos\theta_i \in (-1, 1)$ 。 $\theta_d^l := \theta_d^l(t)$ 和 $\theta_d^r := \theta_d^r(t)$ 分别是左右移动接触点的接触角, $\eta > 0$ 为控制动态接触角 θ_d^l 和 θ_d^r 与平衡接触角 θ_i 的弛缓速率的接触线迁移率。

另外, 我们还引进

$$x_c^l(t) = x(s = 0, t), x_c^r(t) = x(s = L(t), t) \quad (5.33)$$

并假设它们满足 $x_c^l(t) \leq x_c^r(t)$ 。

基于上述定义, 我们可以得到以下结论:

- 1. 条件一保证两个接触点必须沿平面基层移动。
- 2. 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, 条件二转化为 young 等式。
- 3. 条件三确保在演化过程中, 薄膜的总质量不变, 即在移动接触点不存在质量迁移。

我们定义薄膜的总质量 $A(t)$ (即由曲线 $\Gamma(t)$ 和基层围成的区域大小) 和系统的界面自由能 $W(t)$:

$$A(t) = \int_0^{L(t)} y(s, t) \partial_s x(s, t) ds \quad (5.34)$$

$$W(t) = |\Gamma(t)| + W_{sub} = L(t) - \sigma[x_c^r(t) - x_c^l(t)], t \geq 0 \quad (5.35)$$

可以证明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} W(t) &= - \int_0^{L(t)} (\partial_s \kappa)^2 ds - \frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{dx_c^l}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_c^r}{dt} \right)^2 \right] \leq 0, t \geq 0 \end{aligned}$$

立即可以得到

$$A(t) \equiv A(0)$$

$$W(t) \leq W(t') \leq W(0), \quad t \geq t' \geq 0$$

5.4 水平集流

水平集定义：设函数 $f: A \rightarrow \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^n$ ，对于常数 c ，集合 $\{x \in A | f(x) = c\}$ 称为 f 的 c 水平集。

水平集方法在过去的三十年里，在纯数学和应用数学中都取得了巨大的成功，我们用它来描述各种物理情况的演化。例如，给定的初始界面 M_0 包围 \mathbf{R}^{n+1} 中的一个区域，我们可以使用水平集方法分析其在速度场下的后续运动。其思想是将演化前沿表示为演化函数 $v(x, t)$ 的水平集，其中 $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ ， t 是时间。初始界面 M_0 表示为

$$M_0 = \{x | v(x, 0) = 0\}$$

在平均曲率流中，速度向量场是平均曲率向量，演化前沿是满足非线性退化抛物方程的函数的水平集。在粘性意义下，解是弱定义的；一般来说，它们甚至都是不可微的(更不用说二次可微了)。然而，对于单调推进的前沿，粘性解实际上是二次可微的且在经典意义上满足等式。而且当二阶导数连续时，情况变得非常刚性。

假设 $\Sigma \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 是一个内嵌超曲面， \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量。平均曲率由 $H = \text{div}_\Sigma(\mathbf{n})$ 给出。 $\text{div}_\Sigma(\mathbf{n})$ 定义为

$$\text{div}_\Sigma(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \mathbf{n}, e_i \rangle \quad (5.36)$$

其中 e_i 是 Σ 的切线空间的一组标准正交基。如果 $\Sigma = u^{-1}(s)$ 是一个在 \mathbf{R}^{n+1} 上的函数 u 的水平集，且 s 是一个正则值，则

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

$$H = \text{div}_{\mathbf{R}^{n+1}} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

如果

$$x_t = -H\mathbf{n}$$

其中 H 和 \mathbf{n} 分别是 M_t 在 x 点处的平均曲率和单位法线，则称一个单参数的光滑超曲面族 $M_t \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 根据平均曲率流进行流动。我们所知道的关于平均曲率流的最

早的参考文献是在 20 世纪 10 年代的 George Birkhoff 的作品中，他使用了这种流的离散版本，并独立地在 20 世纪 20 年代的材料科学文献中提到了这种流。

两个重要性质：

1. H 是面积梯度，因此平均曲率流是体积的负梯度流（ M_t 的体积最快地减小）。
2. 回避属性：如果 M_0 和 N_0 不相交，则 M_t 和 N_t 仍然不相交。

回避原理只是最大原理的几何形式。回避原理的一个应用为：如果一个封闭的超曲面（外层）包围了另一个（内层），那么外层永远赶不上内层。因为如果外层追赶上内层，就会有第一个接触点。而在此之前，内部的会比外部的收缩得更快，这与外部追赶内层的事实相矛盾。

注意到，当 $n = 1$ 且超曲面为曲线时，流为曲线缩短流（CSF）。

演化流的解析公式是水平集方程，该方程可以由下述定义推导：

给定一个封闭（嵌入）超曲面 $\Sigma \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ，选择一个函数 $v_0: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 使得 Σ 是水平集 $\{v_0 = 0\}$ 。

对于 $s_1 \neq s_2$ ，如果我们同时让 $\{v_0 = s_1\}$ 和 $\{v_0 = s_2\}$ 进行流动，那么回避原理表明它们保持不相交。

在水平集流中，我们寻找 $v: \mathbf{R}^{n+1} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ，使得每个水平集 $t \rightarrow \{v(\cdot, t) = s\}$ 通过平均曲率流流动并且 $v(\cdot, 0) = v_0$ 。

如果 $\nabla v \neq 0$ 且 v 的水平集沿平均曲率流进行流动，则

$$v_t = |\nabla v| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{|\nabla v|} \right) \quad (5.37)$$

当 $\nabla v = 0$ 时，上述方程为退化抛物的情形且没有定义。它可能没有经典解。

在 1988 年的一篇被广泛引用的论文（被引用超过 12000 次）中，Stanley Osher 和 Jamie Sethian 对这个方程进行了数值研究。分析基础由 Craig Evans 和 Joel Spruck 在 1990 年代初期的四篇系列论文中提供，并在同一时间由 Yun Gang Chen、Yoshikazu Giga 和 Shunichi Goto 提供。这两组都构建（连续）粘度解决方案并展示出唯一性。1980 年初，Pierre-Louis Lions 和 Michael G. Crandall 提出了粘性解的概念。这两组在水平集流上的工作是该理论的重要应用之一。

结论

我们提出了针对平均曲率流问题的半离散格式。

首先，构造曲率流方程的弱形式（积分形式），对时间作离散化处理，利用有限差分方法构造迭代格式，并证明了数值解的收敛性，从而验证了半离散格式的可行性。

接着对空间进行离散得到一个全离散的半隐格式并计算数值解和解析解之间的误差，最终验证数值解满足线性收敛。

在此基础上，对其他一些算法及迭代格式进行研究，得到了全离散格式的收敛性证明，并对一种特殊的曲率流：保面积的平均曲率流，进行了介绍并得到一些性质。

从能量角度考虑，我们对闭曲线上各向异性表面扩散的能量稳定有限差分方法进行研究，得到了该迭代格式具有适定性及离散情况下的能量耗散等基本性质。

最后，我们针对固态脱湿问题进行了简单的介绍，并得到了与保面积曲率流类似的基本性质。

参考文献

- [1] Deckelnick Klaus, Dziuk Gerhard, Elliott Charles M.. Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow[J]. Acta Numerica, 2005, 14.
- [2] GERHARD DZIUK. CONVERGENCE OF A SEMI-DISCRETE SCHEME FOR THE CURVE SHORTENING FLOW[J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 1994, 4(4).
- [3] Lai Ming-Chih, Park Sangbeom, Seol Yunchang. An energy stable finite difference method for anisotropic surface diffusion on closed curves[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 127.
- [4] Changqing Ye, Junzhi Cui. Convergence of DZIUK's fully discrete linearly implicit scheme for curve shortening flow[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021.
- [5] Wei Jiang, Buyang Li. A perimeter-decreasing and area-conserving algorithm for surface diffusion flow of curves[J]. Journal of Computational Physics, 2021.
- [6] Quan Zhao, Wei Jiang, Weizhu Bao. An energy-stable parametric finite element method for simulating solid-state dewetting[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2020.
- [7] TOBIAS HOLCK COLDING, WILLIAM P. MINICOZZI II. Level set flow, 2016
- [8] 彭家贵, 陈卿, 微分几何[M], 高等教育出版社, 2002:14-57
- [9] Y. Li, W. Bao, An energy-stable parametric finite element method for anisotropic surface diffusion, J. Comput. Phys. 446 (2021) 110658.

致谢

时光荏苒，流光过隙，转眼间就到了毕业年。常常笑谈一周过的好快，一眨眼就又到了周末。不知不觉间不止一周过去了，甚至四年都快过完了。我们还没准备好，还有许多数学技巧没掌握，还没有成长成想象中的样子，就要毕业了。此时此刻想说，很幸运可以成为数学与统计学院中的一员，让我在互帮互助，彼此温暖，气氛融洽的班级里不断成长，不断进步，不断充实自我，逐渐从一无所知的懵懂青年成长为略有所知的硕士生。谨以此机会，向所有帮助过我的老师、同学、朋友及家人致以最诚挚的感谢和祝福。衷心感谢我的毕业论文导师—蒋维老师，感谢您在我对论文题目懵懵懂懂的时候，给予的指导和帮助；感谢您在我理论推导结果不理想的时候，给予的包容和安慰；感谢您在我论文和程序有所进展时，给予的表扬和鼓励；感谢您大力支持我开阔眼界，学习新技术新知识，让我真正投入到毕业论文的写作当中。感谢周小方老师、涂玉平老师、张继伟老师、吕锡亮老师每次在学习时对我的作业和试题提出的宝贵意见和建议。当我心理压力增加，身体健康每况愈下，是老师们在学习上为我提供帮助，让我能够坚持下来，并完成自己的学业和目标。想着老师们在课上课下的辛勤付出，我下定决心一定不能辜负老师对我们的期望。借此机会，祝愿老师们身体健康，平安喜乐，顺遂无忧！感谢我的室友们，四年来和你们从陌生到熟悉，从初见到相知。时光匆匆，马上就要各奔东西了，天下没有不散之筵席。虽不知毕业后我们何时再能聚，但永远对下一次相聚满怀期待。在每一个夜晚我们畅聊人生，畅聊理想，我们互相分享着自己的理解与感悟。是你们让我的大学生活变得丰富充实。在我最需要帮助的时候，你们总会毫不犹豫地伸出援助之手。是你们让整个寝室变得更加团结，更加温暖。祝大家赤子之心，永远温暖；前途光明，扶摇可接！感谢武汉大学对我四年以来的精心培养，把我从一个懵懵懂懂的高中生慢慢培养成为一个富有责任感，敢于为自己的未来做决定的成年人。在武大，我收获了老师的教诲，与同学们建立了深厚的友谊，同时还得到了很多成长的机会。无论是暑期参加剑桥的线上课程，还是去哥伦比亚大学的学期交换，这些都是学校带给我的，最终让我有机会走向

一个新的平台，继续为社会，为国家做出贡献。希望以后有机会还能回到武大，为我敬爱的母校贡献出自己的微薄之力。

感谢敬爱的父母，万爱千恩百苦，疼我孰知父母？读书二十余载，一直在背后默默地支持我，不论是精神上的，还是物质上的。虽然我不是一个擅于表达的人，煽情的话总是“羞于启齿”，但陪伴才是最长情的告白，你们陪我慢慢长大，我陪你们慢慢变老。

最后感谢自己，即便人生艰难，也坚持到现在。以后的日子里，无论是继续深造，还是参加工作，都愿我永远坚强，永远懂得飞翔；愿我每次流泪都是喜极而泣，付出甘之如饴，愿我在筋疲力尽时仍有坚持下去的勇气，愿我拼尽全力，无畏前行，千磨万击任尔东西南北风，长风破浪直挂云帆济沧海；愿我活成自己想成为的模样，去接近美好，进而成为美好本身。

附录

时间步长 $\tau > 0$, 令 $t_m = m\tau$, $m = 0, \dots, M$, $M \leq \lceil \frac{T}{\tau} \rceil$, 令 $X_h^m \in S_h$ 表示为 $X(\cdot, t_m)$ 的渐近。

针对平均曲率流的 surface 算法

令 Γ_h^0 为 Γ^0 的多面体渐近 (Γ^0 为初始时刻的曲面), 对 $m = 0, 1, \dots, M-1$, 定义

$$S_h^m = \{\phi_h \in C^0(\Gamma_h^m) | \text{对每个 } T \subset \Gamma_h^m, \phi_h|_T \text{ 是仿射的}\}$$

求 $X_h^{m+1} \in S_h^m$, 对所有 $\phi_h \in S_h^m$, 满足:

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Gamma_h^m} (X_h^{m+1} - id) \phi_h dA + \int_{\Gamma_h^m} \nabla_{\Gamma_h^m} X_h^{m+1} \cdot \nabla_{\Gamma_h^m} \phi_h dA = 0$$

生成新的表面 $\Gamma_h^{m+1} = X_h^{m+1}(\Gamma_h^m)$ 。如果 Γ_h^{m+1} 是多面体表面, 则重复上述操作。

针对平均曲率流的 graph 算法

令 Ω 为 R^n 中的有界区域, 其中 $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $u_0 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 。给定边值和初值条件:

$$u = g \quad \text{在 } \partial\Omega \times (0, T) \text{ 上}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}$$

令 \mathcal{T}_h 是域 Ω 上允许的非退化三角剖分, 网格大小被 h , 单纯形 S 和对应的离散区域 $\Omega_h = \bigcup_{S \in \mathcal{T}_h} S$ 约束, X_{h0} 表示包含没有边界值的函数构成的子空间。

令 $u_h^0 = I_h u_0$, 对于 $m = 0, \dots, M-1$, 计算 $u_h^{m+1} \in X_h$, 使得 $u_h^{m+1} - I_h g \in X_{h0}$, 并且对所有 $\phi_h \in X_{h0}$,

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} \frac{u_h^{m+1} \phi_h}{Q_h^m} + \int_{\Omega_h} \frac{\nabla u_h^{m+1} \cdot \nabla \phi_h}{Q_h^m} = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} \frac{u_h^m \phi_h}{Q_h^m}$$

其中 $Q_h^m = \sqrt{1 + |\nabla u_h^m|^2}$ 。

针对平均曲率流的水平集算法

沿用上述记号, 并令 $Q_\epsilon(v) = \sqrt{\epsilon^2 + |\nabla v|^2}$ 。

令 $u_{\epsilon h}^0 = I_h u_0$, 对于 $m = 0, \dots, M-1$, 计算 $u_{\epsilon h}^{m+1} \in X_h$, 使得 $u_{\epsilon h}^{m+1} - 1 \in X_{h0}$, 并且对所有 $\phi_h \in X_{h0}$,

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} \frac{u_{\epsilon h}^{m+1} \phi_h}{Q_\epsilon(u_{\epsilon h}^m)} + \int_{\Omega_h} \frac{\nabla u_{\epsilon h}^{m+1} \cdot \nabla \phi_h}{Q_\epsilon(u_{\epsilon h}^m)} = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega_h} \frac{u_{\epsilon h}^m \phi_h}{Q_\epsilon(u_{\epsilon h}^m)}$$