

Taller Hidrogeología Ambiental

Ejercicio 1

Ya que, las sales disueltas en este caso se transportan únicamente por difusión, entonces empleamos la siguiente ecuación para hallar el tiempo que tardará la concentración en ser 1/10 de la concentración inicial:

$$\frac{C}{C_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D't}}\right)$$

Para hallar el tiempo se tendrán las siguientes consideraciones:

- Se asumirá un coeficiente de difusión de $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$.
- Se calculará el tiempo para el que la concentración salina es de 1/10 a la mitad de la unidad de lodolitas, por lo tanto, $x = 500 \text{ m}$.

Con todo esto tenemos que:

$$\begin{aligned} 0.1 &= \operatorname{erfc}\left(\frac{500 \text{ m}}{2\sqrt{10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} * t}}\right) \\ \operatorname{erfc}^{-1}(0.1) &= \frac{500 \text{ m}}{2\sqrt{10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} * t}} \\ 1.1631 &= \frac{500}{2\sqrt{10^{-10} t}} \end{aligned}$$

Al despejar t obtenemos:

$$t = 4.62004 * 10^{14} \text{ s} = 1.47 * 10^7 \text{ años}$$

La concentración llegaría a ser un decimo de la concentración inicial después de 14.7 millones de años.

Ejercicio 2

En primer lugar, calculamos la constante de decaimiento del carbono 14:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\ln(2)}{5700 \text{ años}} = 0.0001216 \text{ años}^{-1} \\ \lambda &= 3.86 * 10^{-12} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

Luego sabemos que se quiere encontrar la distancia para la que $C/C_f = 1/100$. Asumiendo una porosidad efectiva del 10% obtenemos:

$$C = C_f \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda n_e}{Dm}} x\right)$$

$$0.01 = \exp\left(-\sqrt{\frac{3.86 * 10^{-12} s^{-1} * 0.1}{10^{-11} m^2/s}} x\right)$$

Al despejar X obtenemos:

$$x = 23.45 \text{ m}$$

Es necesario moverse 23.45 con el fin de encontrar concentraciones de 1/100 la concentración inicia en la fractura.

Ejercicio 3

Sabemos que:

$$\alpha_L = 1 \text{ m}$$

$$\alpha_T = 0.01 \text{ m}$$

Además de que:

$$Dm_L = v_L \alpha_L$$

$$Dm_T = v_T \alpha_T$$

Entonces:

$$Dm_L > v_L * 1$$

$$v_L < 10^{-10} m/s$$

Y:

$$Dm_T > v_L * 0.01$$

$$v_L < 10^{-8} m/s$$

La velocidad en sentido longitudinal debe ser menor que $10^{-10} m/s$ y la velocidad transversal debe ser menor que $10^{-8} m/s$ para que la difusión molecular sea mayor que las dispersión transversal y longitudinal.

Ejercicio 4

El primer paso es hallar los valores de Dm asociados a cada ion, teniendo en cuenta los valores de Dw de la tabla y la tortuosidad y porosidad asumida, tal y como sigue:

$$Dm_{Ca^{+}} = Dw \left(\frac{n}{\tau} \right) = \frac{7.93 * 10^{-10} m^2}{s} \left(\frac{0.4}{2} \right) = 1.586 * 10^{-10} \frac{m^2}{s}$$

Ion	Dw (10 ⁻¹⁰)	Dm (10 ⁻¹⁰)
Ca+	7.93	1.586
Mg+2	7.05	1.410
Na+	13.3	2.660
K+	19.6	3.920
Cl-	20.3	4.060
SO4-2	10.7	2.140

Teniendo en cuenta la ecuación:

$$J_i = - \sum_{j=1}^N D'_{ij} \frac{\partial c_j}{\partial x}$$

Es necesario saber los coeficientes de difusión cruzados, que tienen en cuenta la influencia de un ion sobre el otro, para esto tomaremos como valor el promedio ponderado por la carga eléctrica de los coeficientes individuales de cada ion. Por ejemplo:

$$D'_{Ca^{+},Mg^{+2}} = \frac{D'_{Ca^{+}} + 2D'_{Mg^{+2}}}{1 + 2} = \frac{1.586 * 10^{-10} + 2 * 1.410 * 10^{-10}}{3} = 1.460 * 10^{-10} \frac{m^2}{s}$$

Una vez hecho esto con todas las combinaciones de iones obtenemos la siguiente tabla:

	Ca+	Mg+2	Na+	K+	Cl-	SO-2
Ca+	1.586	1.469	2.123	2.753	2.823	1.955
Mg+2	1.469	1.410	1.827	2.247	2.293	1.775
Na+	2.123	1.827	2.660	3.290	3.360	2.313
K+	2.753	2.247	3.290	3.920	3.990	2.733
Cl-	2.823	2.293	3.360	3.990	4.060	2.780
SO4-2	1.955	1.775	2.313	2.733	2.780	2.140

Finalmente, tenemos los siguientes valores de las derivadas de concentración respecto a la distancia:

$$\frac{\partial C_{Ca^{+}}}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial C_{Mg^{+2}}}{\partial x} = -1 \quad \frac{\partial C_{Na^{+}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial C_{K^{+}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial C_{Cl^{-}}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial C_{SO_4^{-2}}}{\partial x} = 0$$

Entonces tenemos las siguientes ecuaciones:

$$J_{Ca^{+}} = - \left(D'_{Ca^{+},Ca^{+}} \frac{\partial C_{Ca^{+}}}{\partial x} + D'_{Ca^{+},Mg^{+2}} \frac{\partial C_{Mg^{+2}}}{\partial x} + D'_{Ca^{+},Na^{+}} \frac{\partial C_{Na^{+}}}{\partial x} + D'_{Ca^{+},K^{+}} \frac{\partial C_{K^{+}}}{\partial x} + D'_{Ca^{+},Cl^{-}} \frac{\partial C_{Cl^{-}}}{\partial x} + D'_{Ca^{+},SO_4^{-2}} \frac{\partial C_{SO_4^{-2}}}{\partial x} \right)$$

$$J_{Ca^+} = -(1.586(1) + 1.469(-1) + 2.123(0) + 2.753(0) + 2.823(0) + 1.955(0)) * 10^{-10} = -0.117 * 10^{-10} \frac{mmol\ m}{L\ s}$$

$$J_{Mg^{+2}} = -\left(D'_{Mg^{+2},Ca^+} \frac{\partial C_{Ca^+}}{\partial x} + D'_{Mg^{+2},Mg^{+2}} \frac{\partial C_{Mg^{+2}}}{\partial x} + D'_{Mg^{+2},Na^+} \frac{\partial C_{Na^+}}{\partial x} + D'_{Mg^{+2},K^+} \frac{\partial C_{K^+}}{\partial x} + D'_{Mg^{+2},Cl^-} \frac{\partial C_{Cl^-}}{\partial x} + D'_{Mg^{+2},SO_4^{2-}} \frac{\partial C_{SO_4^{2-}}}{\partial x}\right)$$

$$J_{Mg^{+2}} = -(1.469(1) + 1.410(-1) + 0 + \dots) = -0.059 * 10^{-10} \frac{mmol\ m}{L\ s}$$

Al final obtenemos los siguientes flujos:

J [mmol*m/L*s] *10^-10	
Jca	-0.117
Jmg	-0.059
Jna	-0.296
Jk	-0.506
Jcl	-0.530
Jso4	-0.180

El siguiente paso es calcular estos valores a partir de los datos experimentales de la siguiente tabla de coeficientes de difusión:

	Ca+	Mg+2	Na+	K+	SO-2
Ca+	6.040	0.230	0.070	0.020	-0.460
Mg+2	0.760	5.750	0.230	0.080	-1.080
Na+	7.290	8.050	13.980	0.150	-7.540
K+	0.230	0.260	0.070	17.930	-0.370
SO4-2	-1.600	-1.130	-0.150	-0.260	8.330

Teniendo en cuenta las derivadas de la concentración mostradas anteriormente, obtenemos los siguientes valores de flujo:

J [mmol*m/L*s] *10^-10	
Jca	-5.810
Jmg	4.990
Jna	0.760
Jk	0.030
Jso4	0.470

El flujo del ion cloro es posible obtenerlo a partir de la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^N z_i J_i = 0$$

En donde z_i es la carga de ion. Entonces:

$$z_{Ca^+} J_{Ca^+} + z_{Mg^{+2}} J_{Mg^{+2}} + z_{Na^+} J_{Na^+} + z_{K^+} J_{K^+} + z_{SO_4^{2-}} J_{SO_4^{2-}} + z_{Cl^-} J_{Cl^-} = 0$$

$$(-5.810 + 2(4.990) + 0.760 + 0.030 - 2(0.470) - J_{Cl^-}) * 10^{-10} = 0$$

$$J_{Cl^-} = 4.02 * 10^{-10} \frac{mmol * m}{L * s}$$

Es posible observar una gran diferencia en los resultados entre los 2 métodos.

Ejercicio 5

Contamos con la siguiente información:

$$v = 10 \frac{m}{d}$$

$$n_i = 0.2$$

$$n_f = 0.3$$

$$\Delta C = 10 \frac{mg}{L}$$

$$\rho_{calcita} = 2710 \frac{kg}{m^3}$$

$$Masa\ molar\ CaCO_3 = 1 * (40) + 1 * (12) + 3 * (16) = 100 \frac{g}{mol}$$

Calculamos la fracción molar de calcio dentro de la calcita:

$$F.molar\ Ca = \frac{M.molar\ Ca}{M.molar\ CaCO_3} = \frac{40}{100} = 0.4$$

Por lo tanto, si la concentración de calcio aumentó 10 mg/L, entonces la concentración de calcita aumento:

$$\Delta C_{CaCO_3} = \frac{\Delta C_{Ca}}{F.molar\ Ca} = \frac{10\ mg/L}{0.4} = 25 \frac{mg}{L} = 0.025 \frac{g}{L}$$

Dado que la porosidad pasó de 0.2 a 0.3 es posible usar un valor promedio de 0.25 y asumiendo una sección transversal de 1 m² el volumen de agua que pasa durante 1 día es:

$$V_w = A * v * n = 1m^2 * 10 \frac{m}{s} * 0.25 = 2.5 \frac{m^3}{d}$$

Por lo tanto, la cantidad de calcita disuelta es de:

$$Masa\ CaCO_3 = 2500 \frac{L}{dia} * 0.025 \frac{g}{L} = 62.5 \frac{g}{dia}$$

Lo cual se traduce en un volumen de calcita que se desplaza en un día es igual a:

$$V_{CaCO_3} = \frac{62.5 \text{ g/día}}{2.71 \text{ g/cm}^3} = 23.1 \frac{\text{cm}^3}{\text{d}} = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{d}$$

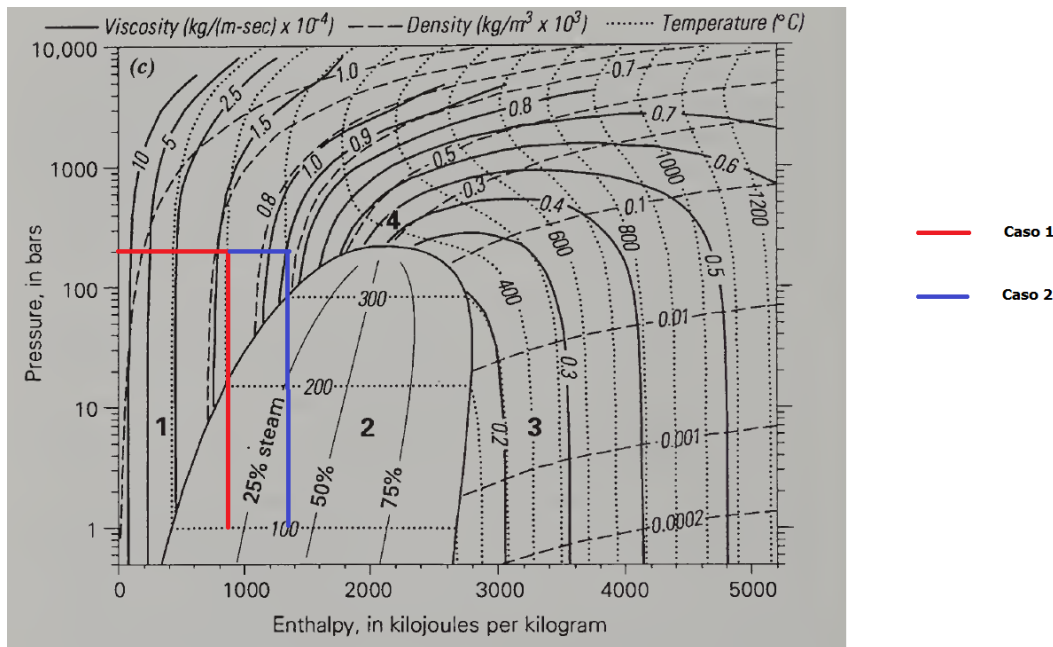
Por lo tanto, la velocidad a la que se mueve la frontera de calcita es:

$$v_{CaCO_3} = \frac{V_{CaCO_3}}{A} = \frac{2.31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{d}}{1 \text{ m}^2} = 2.31 \cdot 10^{-5} \text{ m/d}$$

La frontera de calcita se mueve aproximadamente 0.00231 cm por día.

Ejercicio 8

En cada condición tenemos los siguientes valores de entalpía dada por el gráfico:

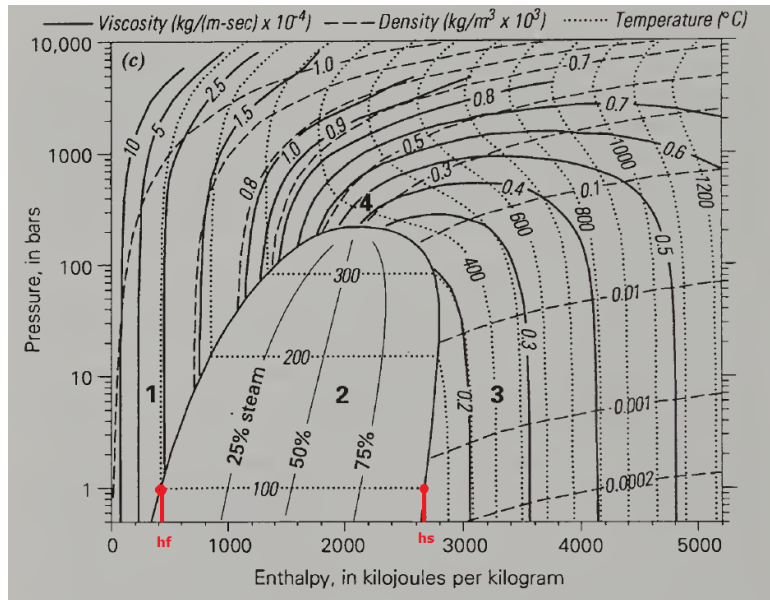


Como es posible observar, en cada caso ubicamos los valores de presión y temperatura iniciales y dado que se trata de procesos isoentálpicos, bajamos en línea recta (entalpía constante) hasta hallar el intercepto con las condiciones de presión y temperatura finales.

Para el primer caso, la proporción de vapor en la mezcla de fluidos es menor al 25%, aproximadamente de 0.2. En el segundo caso, la proporción de vapor en la mezcla se encuentra entre 25% y 50%, aproximadamente es 0.4.

Ejercicio 9

Caso A: 100°C



$$\text{Calor latente} = h_s - h_f \approx 2650 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 420 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 2230 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Densidad:

El valor de ρ_w se encuentra entre 900 kg/m³ y 1000 kg/m³ con un valor aproximado de 950 kg/m³.

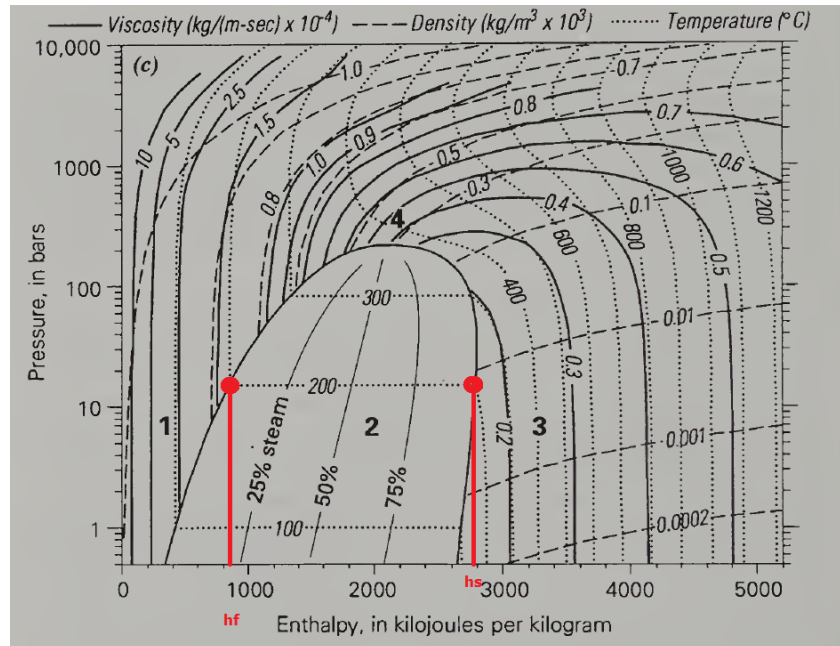
El valor de ρ_s se encuentra entre 0.2 kg/m³ y 1 kg/m³ con un valor aproximado de 0.5 kg/m³.

Viscosidad:

El valor de μ_w se encuentra entre $2.5 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s y $5 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s con un valor aproximado de $3 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s.

El valor de μ_s se encuentra entre $0.1 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s y $0.2 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s con un valor aproximado de $1.2 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s.

Caso B: 200°C



$$\text{Calor latente} = h_s - h_f \approx 2780 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 950 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1830 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Densidad:

El valor de ρ_w se encuentra entre 800 kg/m³ y 900 kg/m³ con un valor aproximado de 870 kg/m³.

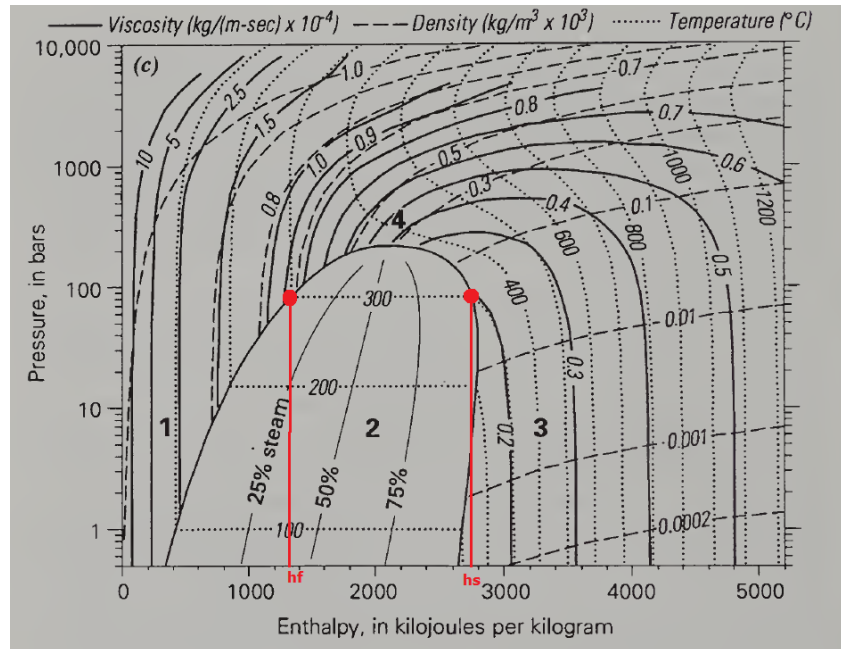
El valor de ρ_s se encuentra entre 1 kg/m³ y 10 kg/m³ con un valor aproximado de 8 kg/m³.

Viscosidad:

El valor de μ_w se encuentra entre $1 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s y $1.5 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s con un valor aproximado de $1.4 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s.

El valor de μ_s se encuentra entre $0.1 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s y $0.2 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s con un valor aproximado de $1.4 \cdot 10^{-4}$ kg/m-s.

Caso C: 300°C



$$\text{Calor latente} = h_s - h_f \approx 2750 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 1300 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 1450 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Densidad:

El valor de ρ_w se encuentra entre 700 kg/m^3 y 800 kg/m^3 con un valor aproximado de 720 kg/m^3 .

El valor de ρ_s se encuentra entre 10 kg/m^3 y 100 kg/m^3 con un valor aproximado de 50 kg/m^3 .

Viscosidad:

El valor de μ_w se encuentra entre $0.8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m-s}$ y $0.9 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m-s}$ con un valor aproximado de $0.86 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m-s}$.

El valor de μ_s es aproximadamente $0.2 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m-s}$.

Ejercicio 10

El primer paso es calcular el valor de K_m asociado a cada profundidad. Para ello asumiremos un valor de $K_f = 0.6 \text{ W/m-K}$ que es un valor aproximado para los rangos de temperatura trabajados. Entonces:

$$K m_1 = K r_1^{1-n} K_f^n = 1.37^{1-0.11} * 0.5^{0.11} = 1.251 \frac{\text{W}}{\text{m-K}}$$

Asimismo, para todos los valores de K_r , por lo cual obtenemos:

Profundidad	Tem (°C)	Tem (K)	Kr (W/m-K)	n	Kf (W/m-K)	Kmi (W/m-K)
100	16.7	289.850	1.37	0.11	0.6	1.251
110	17.3	290.450	1.46	0.15	0.6	1.278
120	18.0	291.150	1.48	0.19	0.6	1.247
130	18.5	291.650	1.49	0.14	0.6	1.312
140	19.2	292.350	1.34	0.09	0.6	1.247
150	20.0	293.150	1.40	0.16	0.6	1.223

Ahora tendremos que hallar un valor de Km representativo para todo el tramo, para esto será necesario calcular la media geométrica de todos los valores de conductividad obtenidos con la siguiente formula:

$$K_m = \frac{b_t}{\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{K_{m_i}}}$$

En donde bt es la longitud total del tramo y bi es la longitud en la cual aplica el valor de conductividad térmica Kmi. Para esto tendremos que asociar un valor de Kmi a cada tramo de 10 metros considerado, para esto se promediarán los valores de los extremos de cada tramo (que son los que ya tenemos). Estos valores promedio son:

Prof	Km (promedio)
100-110	1.264
110-120	1.262
120-130	1.279
130-140	1.279
140-150	1.235

Por lo tanto, el valor Km total es:

$$K_m = \frac{50}{\frac{10}{1.264} + \frac{10}{1.262} + \frac{10}{1.279} + \frac{10}{1.279} + \frac{10}{1.235}} = 1.264 \frac{W}{m-K}$$

Ahora, calculamos la razón de cambio de la temperatura respecto a la profundidad:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{293.15 K - 289.85 K}{150 m - 100 m} = 0.066 \frac{K}{m}$$

Entonces:

$$q_h = -1.264 \frac{W}{m-K} * 0.066 \frac{K}{m} = -0.083 \frac{W}{m^2}$$

Ejercicio 11

En primer lugar, tenemos los siguientes datos conocidos:

$$q_w = \frac{10^{-8} m}{s}$$

$$L = 100 \text{ m}$$

$$Pu = 100 \text{ bar}$$

$$Km = 2 \frac{W}{m - K}$$

Para la primera condición, al consultar las tablas de vapor, obtenemos los siguientes parámetros:

$$T_L = 10^\circ C$$

$$T_U = 0^\circ C$$

$$\rho_{w_{10^\circ C}} = 1004.81 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{w_{0^\circ C}} = 1004.41 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{w_{10^\circ C}} = 4.165 \frac{kJ}{kg - K}$$

$$C_{w_{0^\circ C}} = 4.177 \frac{kJ}{kg - K}$$

Para calcular β usamos los valores medios entre las 2 temperaturas:

$$\beta = \frac{C_w \rho_w q_w L}{K_m} = \frac{4171 \frac{J}{kg - K} * 1004.61 \frac{kg}{m^3} * 10^{-8} \frac{m}{s} * 100 \text{ m}}{2 \frac{W}{m - K}} = 2.0095$$

Para la segunda condición tenemos:

$$T_L = 510^\circ C$$

$$T_U = 500^\circ C$$

$$\rho_{w_{510^\circ C}} = 29.983 \frac{kg}{m^3}$$

$$\rho_{w_{500^\circ C}} = 30.503 \frac{kg}{m^3}$$

$$C_{w_{510^\circ C}} = 2.564 \frac{kJ}{kg - K}$$

$$C_{w_{500^\circ C}} = 2.584 \frac{kJ}{kg - K}$$

Por lo tanto:

$$\beta = \frac{2574 \frac{J}{kg-K} * 30.243 \frac{kg}{m^3} * 10^{-8} \frac{m}{s} * 100 m}{2 \frac{W}{m-K}} = 0.0389$$

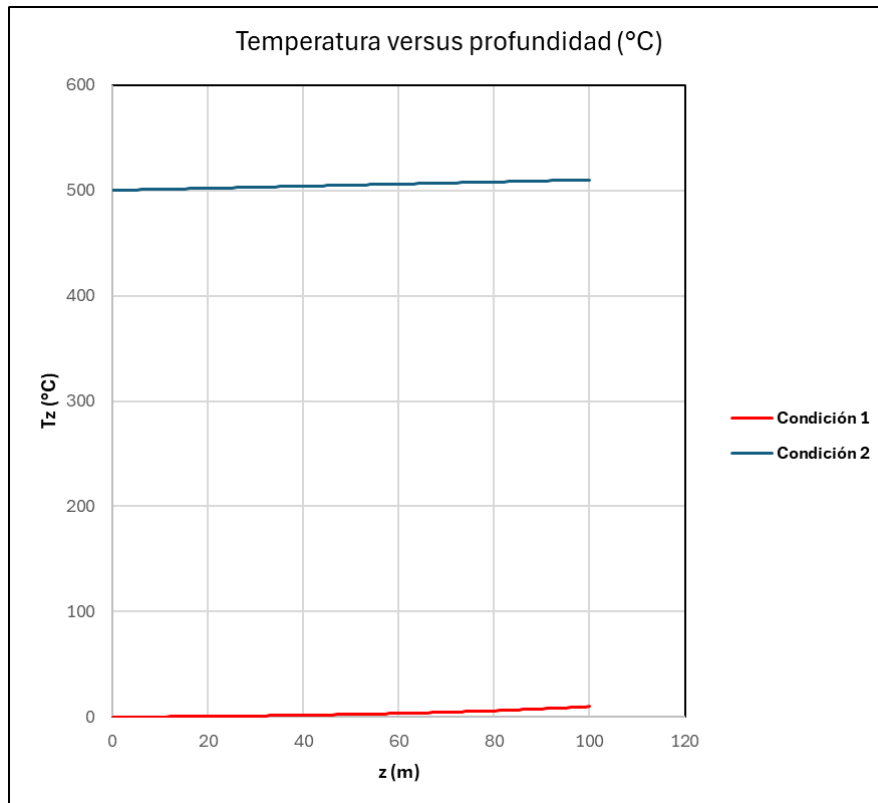
Es así como podemos hallar las ecuaciones de temperatura respecto a la profundidad para cada condición:

$$T_z = \frac{\exp\left(\frac{\beta z}{L}\right) - 1}{\exp(\beta) - 1} (T_L - T_U) + T_U$$

$$T_z = \frac{\exp\left(\frac{2.0095 * z}{100}\right) - 1}{\exp(2.0095) - 1} (10) + 10$$

$$T_z = \frac{\exp\left(\frac{0.0389 * z}{100}\right) - 1}{\exp(0.0389) - 1} (10) + 510$$

Al graficar obtenemos:



Ejercicio 12

En este caso los parámetros conocidos son:

$$Ra_{crit} = 40$$

$$T_L = 300^\circ C$$

$$T_U = 200^\circ C$$

$$K_m = 2 \frac{W}{m - k}$$

$$L = 1 \text{ km}$$

También debemos tener en cuenta que el tramo considerado está a entre 2 y 3 km de profundidad por lo cual está bajo una presión que, considerando un peso unitario del suelo de 2000 kg/m^3 , es de aproximadamente 500 bar (un valor para el que encontramos parámetros en las tablas).

Para el caso (a) en que consideramos $T_u = 200^\circ C$ tenemos:

$$\rho_w = 897 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$C_w = 4277 \frac{\text{J}}{\text{kg} - \text{K}}$$

$$\alpha_w = 0.001111 \text{ K}^{-1}$$

$$\mu_w = 0.000145 \frac{\text{kg}}{\text{s} - \text{m}}$$

Por lo tanto:

$$k = \frac{Ra\mu_w K_m}{\alpha_w \rho_w^2 C_w L (T_L - T_U)} = \frac{40(0.000145 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1})(2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1})}{0.001111 \text{ K}^{-1} \left(897 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2 (4277 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1})(1000 \text{ m})(100 \text{ K})}$$

$$k = 3.03 * 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Para el caso en que consideramos $(T_u + T_l)/2 = 250^\circ C$ obtenemos:

$$\rho_w = 842.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$C_w = 4457 \frac{\text{J}}{\text{kg} - \text{K}}$$

$$\alpha_w = 0.001415 \text{ K}^{-1}$$

$$\mu_w = 0.0001172 \frac{kg}{s \cdot m}$$

$$k = \frac{40(0.0001172 \text{ kg s}^{-1}\text{m}^{-1})(2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1})}{0.001415 \text{ K}^{-1} \left(842.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^2 (4457 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1})(1000 \text{ m})(100 \text{ K})}$$

$$k = 2.09 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Ejercicio 14

En primer lugar, tenemos los siguientes valores conocidos:

$$L = 500 \text{ km}$$

$$B = 4 \text{ km}$$

$$\Delta z = 300 \text{ m}$$

$$k = 1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$$

$$K_m = 2 \frac{W}{m \cdot K}$$

$$g = \frac{9.81 \text{ m}}{\text{s}^2}$$

$$\frac{dT}{dZ} = 25^\circ \frac{C}{\text{km}}$$

Asumiendo un peso específico de 1800 kg/m³ en el suelo y una temperatura inicial de 25°C Celsius, es posible obtener el valor del parámetro adimensional a diferentes profundidades:

z (km)	T (°C)	P (bar)	ρw (kg/m ³)	Cw (J/kg-K)	μw (kg/s-m)	Valor adim
0.500	37.5	88.29	998.4	4155	0.000900	270.85
1.000	50.0	176.58	995.0	4150	0.000550	439.70
1.500	62.5	264.87	990.0	4135	0.000467	510.80
2.000	75.0	353.16	989.0	4125	0.000378	627.60
2.500	87.5	441.45	988.0	4115	0.000342	691.32
3.000	100.0	529.74	982.0	4110	0.000295	790.79
3.500	112.5	618.03	977.0	4110	0.000273	845.84
4.000	125.0	706.32	970.0	4105	0.000248	916.70
4.500	137.5	794.61	967.0	4100	0.000223	1011.93
5.000	150.0	882.90	960.0	4095	0.000204	1089.96

Los valores de densidad, viscosidad y calor específico fueron obtenidos a partir de interpolación lineal de los valores que brindan las tablas de vapor.