Punto 6

a. Sabemos que:

$$\varphi_X(s) = E\left[e^{isX}\right]$$

Entonces:

$$\varphi_{z_1+z_2}(s) = E\left[e^{is(Z_1+Z_2)}\right] = E\left[e^{isZ_1+isZ_2}\ \right] = E\left[e^{isZ_1} * e_2^{isZ}\right]$$

Asumiendo que Z_1 y Z_2 son independientes podemos usar la siguiente propiedad de la esperanza:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Usando esta propiedad tenemos:

$$\varphi_{Z_1+Z_2}(s) = E\left[e^{isZ_1}\right] * E\left[e^{isZ_2}\right] = \varphi_{Z_1} * \varphi_{Z_2}$$

b. Sabiendo que Y = a + bZ entonces:

$$\varphi_Y(s) = E\left[e^{isY}\right] = E\left[e^{is(a+bY)}\right] = E\left[e^{isa} * e^{isbZ}\right]$$

Ahora hacemos uso de la siguiente propiedad de la esperanza:

$$E[cX] = cE[X]$$

En donde c es una constante, asimismo e^isa puede ser extraída de la esperanza:

$$\varphi_Y(s) = e^{isa}E\left[e^{isbZ}\right] = e^{isa}\varphi_Z(bs)$$

c. Tenemos que:

$$Y = \sum_{k=1}^{M} Z_k = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_M$$

Entonces:

$$\varphi_Y(s) = E\left[e^{isY}\right] = E\left[e^{is(Z_1+Z_2+\cdots Z_M)}\right]$$

Asumiendo que se trata de variables independientes:

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{Z_1}(s) * \varphi_{Z_2}(s) * \dots \varphi_{Z_M}(s)$$

Ahora, suponiendo que son idénticamente distribuidas las variables Z_M entonces:

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{Z_1}(s) * \varphi_{Z_2}(s) * \dots \varphi_{Z_M}(s) = \left[\varphi_Z(S)\right]^M$$

d. La función generadora de cumulants está definida como:

$$K_Z(s) = \ln\left(\varphi_z(s)\right) = \ln(E[e^{sZ}]) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{s^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^k K_z(s)}{ds^k} \frac{s^n}{n!}$$

En donde:

$$k_n = \frac{d^k K_z(s)}{ds^k}$$

Pero si asumimos que:

$$kn = \frac{1}{i^n} \frac{d^k K_z(s)}{ds^k}$$

Entonces se de debe multiplicar por i^n para que se siga cumpliendo la igualdad:

$$K_Z(s) = \ln\left(\varphi_z(s)\right) = \ln(E[e^{sZ}]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \frac{d^k K_z(s)}{ds^k} \left(\frac{s^n i^n}{n!}\right)$$

$$K_Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \frac{d^k K_z(s)}{ds^k} \left(\frac{(is)^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{(is)^n}{n!}$$