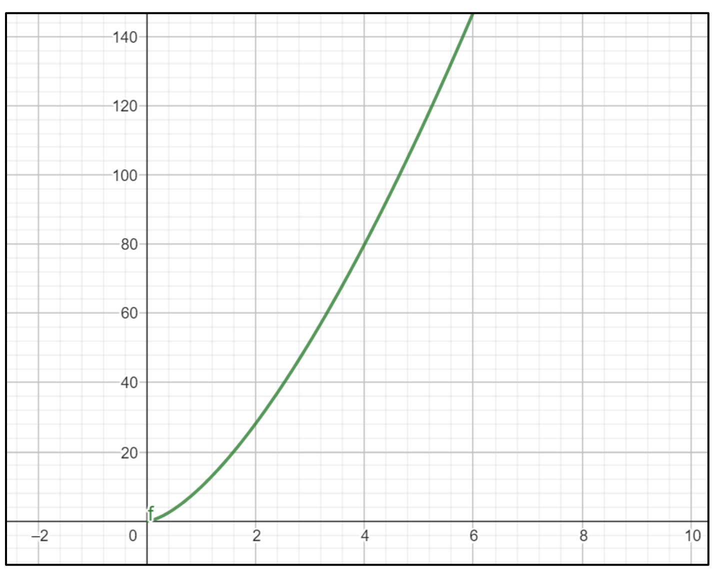
Taller 4: Funciones aleatorias
Métodos estocásticos
Manuel Andrés Niño Silva

Taller 4

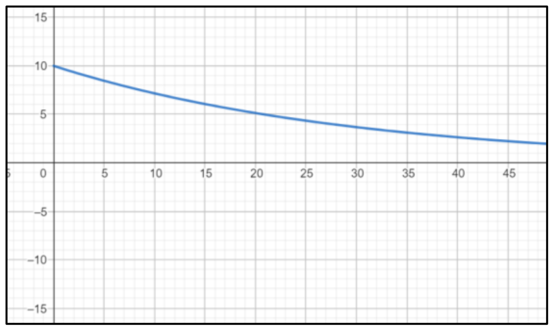
1. **a. Serie aleatoria:**
   Precipitación diaria total.
   Caudal máximo mensual de un río.
   b. Proceso de retícula:
   Precipitación medida en las diferentes estaciones de una cuenca.
   Concentración de contaminantes en diferentes puntos de una red de monitoreo.
   c. Proceso de tiempo continuo:
   Caudal de un río.
   Flujo de agua subterránea en un acuífero.
   d. Proceso de espacio continuo:
   Precipitación.
   Variación espacial de la elevación del terreno en una cuenca hidrográfica.
   e. Proceso de espacio-tiempo continuo:
   Cambios espaciales y temporales en la salinidad del agua en un estuario.
   Variación espacial y temporal de la temperatura superficial del mar.
   f. Proceso de punto compuesto en el tiempo:
   Distribución temporal de eventos extremos de precipitación.
   Frecuencia de ocurrencia de inundaciones en una región.
   g. Proceso de punto compuesto en el espacio:
   Distribución espacial de eventos extremos de precipitación.
   Distribución espacial de la concentración de contaminantes en un cuerpo de agua.

2. En primer lugar, al graficar la semivarianza de la función, obtenemos:



En este proceso, la semivarianza tiende a infinito por lo que es posible concluir que la varianza no es finita al igual que el segundo momento, es por esto que podemos concluir que no es un proceso estacionario, pero es posible decir que es un proceso intrínseco, ya que, la aleatoriedad es inherente a él.

3. En este caso, al graficar el semivariograma, obtenemos:



Es posible ver como esta función tiende a 0 y siempre conserva un valor finito, razón por la cual se puede establecer que la varianza es finita, adicionalmente esta ecuación solo depende de la distancia entre puntos "h" y no de las coordenadas en sí, por lo tanto, la autocovarianza también depende solamente de la distancia entre puntos y:

$$C_Z\big(Z(x_1), Z(x_2)\big) = C_Z(x_2 - x_1) = C_Z(h)$$

Por otro lado, la densidad de probabilidad en un determinado punto esta dada por una distribución gamma, lo cual no nos asegura que esta distribución sea igual en otros puntos del proceso. Es por esto por lo que podemos decir, que es un proceso estacionario en sentido amplio.

4. En este caso al tener la misma función de semivarianza, podemos determinar que cumple los criterios de un proceso estacionario en el sentido amplio, pero al tratarse de un proceso en donde la función de distribución es gaussiana, también es estrictamente estacionaria, ya que, los demás momentos dependen de los 2 primeros.

5. En este caso se dice implícitamente que la media es contante y la distribución de probabilidad en cualquier punto es la gaussiana, entonces se trata de proceso estrictamente estacionario.

6. Sabemos que la escala integral se define de la siguiente manera:

$$I_Z(h) = \int_0^{\infty} \rho(h)\, dh$$

Donde:

$$\rho(h) = \frac{C_z(h)}{\sigma_z^2}$$

Entonces para la función de corrección exponencial tenemos:

$$I_Z(h) = \int_0^{\infty} \frac{\sigma_z^2 e^{-\frac{h}{a}}}{\sigma_z^2}\, dh$$

$$I_Z(h) = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-\frac{h}{a}}\, dh$$

$$I_Z(h) = \lim_{b\to\infty} \left[-ae^{-\frac{h}{a}}\right]_0^b = -a \lim_{b\to\infty} \left[e^{-\frac{b}{a}} - e^{\frac{0}{a}}\right]$$

$$I_Z(h) = -a(0-1) = a$$

Ahora, para la función de corrección esférica tenemos:

$$C_Z(h) = \begin{cases} \sigma_z^2 \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3\right] & si\ h < a \\ 0 & si\ h \geq a \end{cases}$$

Dado que la función es igual a 0 cuando h supera el valor de a, entonces la escala integral es:

$$I_Z(h) = \int_0^{a} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{h}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^3 dh$$

$$I_Z(h) = \left[h - \frac{3h^2}{4a} + \frac{a}{8}\left(\frac{h}{a}\right)^4\right]_0^a$$

$\wedge$

$$I_Z(h) = \left(a - \frac{3a^2}{4a} + \frac{a}{8}\left(\frac{a}{a}\right)^4\right) - 0$$

$$I_Z(h) = a - \frac{3a}{4} + \frac{a}{8} = \frac{3a}{8}$$

7. Sabemos que $t_2 = t_1 + \tau$ y que:

$$Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}) = Cov(Z_{t_1}, Z_{t_1+\tau}) = E[(z_{t_1} - \mu_z)(z_{t_2} - \mu_z)]$$

Entonces, cuando $\tau = 0$, tenemos:

$$Cov(Z_{t_1}, Z_{t_1+0}) = E[(z_{t_1} - \mu_z)(z_{t_1} - \mu_z)] = E\left[(z_{t_1} - \mu_z)^2\right] = \sigma_{z_t}^2$$

Por otro lado, sabemos que la transformada de Fourier de una función está dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Y la transformada inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Por lo tanto, si la función de densidad espectral es:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\tau) \cos(\omega\tau)\, d\tau$$

Y forma un par de Fourier con la función de autocovarianza, esta ultima se definiría como:

$$C_Z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cos(\omega\tau)\, d\omega$$

Tomando la parte real de $e^{i\omega t}$ al expresarlo como senos y cosenos.
Es por esto por lo que $C_z(0)$ es:

$$C_z(0) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cos(\omega(0))\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega$$

8. Sabemos que:

$$S_z(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$$

$$|X_T(\omega)|^2 = X_T(\omega_1)X_T^*(\omega_1)$$

También por la definición de la transformada de Fourier sabemos:

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Por lo tanto:

$$S_z(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\int_{-T}^{T} x(t_1)e^{i\omega t_1}\,dt_1 \int_{-T}^{T} x(t_2)e^{-i\omega t_2}\,dt_2\right]}{2T}$$

$$S_z(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} E[x(t_1)x(t_2)]\, e^{i\omega t_1}\, e^{-i\omega t_2} dt_1 dt_2}{2T}$$

$$C(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$S_z(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1, t_2)\, e^{i\omega t_1 - t_2}\, dt_1 dt_2}{2T}$$

Haciendo a t_2-t_1 = τ y t_1 = -T entonces:

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T} C(t_1, t_{1+\tau})\, dt}{2T} \right) e^{i\omega\tau} d\tau$$

La expresión entre paréntesis es igual al tiempo promedio de la función de autocorrelación, la cual para un proceso estacionario en sentido amplio es $C_z(\tau)$, por lo tanto:

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau$$

Que puede reescribirse usando solo la parte real (los cosenos) de la exponencial:

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

Por lo tanto, al aplicar la transformada de Fourier inversa obtenemos:

$$C_z(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cos(\omega\tau) d\tau$$

9. El valor de la varianza de $Z_T(t)$ está definido por la siguiente expresión:

$$Var[Z_T(t)] = \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T cov(t_2 - t_1)dt_1dt_2$$

En donde:

$$cov(t_2 - t_1) = \sigma^2 e^{-\frac{t_2-t_1}{\theta}}$$

Con $\sigma^2 = 20$ y $\theta = 50$, al calcular la integral doble obtenemos:

$$Var[Z_T(t)] = \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T \sigma^2 e^{-\frac{t_2-t_1}{\theta}}\, dt_1dt_2 = \frac{\sigma^2}{T^2}\int_0^T \int_0^T e^{-\frac{t_2}{\theta}}\, e^{\frac{t_1}{\theta}} dt_1dt_2$$

$$Var[Z_T(t)] = \frac{\sigma^2}{T^2}\int_0^T e^{-\frac{t_2}{\theta}}\, \left[\theta e^{\frac{t_1}{\theta}}\right]_0^T dt_2 = \frac{\sigma^2}{T^2}\left(\theta e^{\frac{T}{\theta}} - \theta\right)\int_0^T e^{-\frac{t_2}{\theta}}\, dt_2$$

$$Var[Z_T(t)] = \frac{\sigma^2}{T^2}\left(\theta e^{\frac{T}{\theta}} - \theta\right)\left[-\theta e^{\frac{-t_2}{\theta}}\right]_0^T = \frac{\sigma^2}{T^2}\left(\theta e^{\frac{T}{\theta}} - \theta\right)\left(\theta - \theta e^{-\frac{T}{\theta}}\right)$$

$$Var[Z_T(t)] = \frac{\sigma^2}{T^2}\theta^2(e^{\frac{T}{\theta}} - 1)(1 - e^{-\frac{T}{\theta}})$$

Al evaluar algunos valores de $Var[Z_T(t)]$ obtenemos:

T (Dias)	Var
1	20.0007
10	20.0668
20	20.2681
30	20.6072
40	21.0897
50	21.7232
60	22.5182
70	23.4877
80	24.6479
90	26.0182
100	27.6220

Al graficar obtenemos el siguiente comportamiento:

Taller 4: Funciones aleatorias
Métodos estocásticos
Manuel Andrés Niño Silva