MAT-1919 : Hiver 2022

DEVOIR 1 - Gabarit LaTeX

Toutes les consignes suivantes seront considérées dans la note.

- *Enregistrez votre équipe (de 1 à 3 étudiants) avant la date limite de création d'une équipe,* ***dans tous les cas****.*
- *Remise :* ***un*** *fichier pdf* ***par exercice*** *(un seul), chacun étant identifié par son numéro comme dernier caractère (par exemple :* 1.pdf, no2.pdf, mat1919dev1no5.pdf*). Ces fichiers peuvent être dans un zip ou non. Nous utilisons un programme pour gérer les fichiers. Si plus d'un fichier termine par 3, ou aucun, ça crée problème.*
- *Le travail peut être fait à la main ou à l'aide d'un logiciel informatique. Soignez la* ***lisibilité****. Les photos sont souvent de piètre qualité. Des logiciels de numérisation pour téléphone font mieux.*
- *Soignez l'****orthographe*** *et la* ***qualité de la langue****. La capacité de communiquer clairement son raisonnement est un atout en science.*
- ***Aucun retard toléré*** *(sauf circonstance exceptionnelle !)*

Note : Il n'est pas nécessaire de remettre cette première page avec votre devoir.

Exercice 1
Soit p, q et r des variables booléennes. Considérez l'expression suivante : $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$.
Est-ce que :

a) L'expression est satisfiable ?

b) L'expression est insatisfiable ?

c) L'expression est toujours vraie, peu importe les valeurs de p, q et r ?

d) L'expression est toujours fausse, peu importe les valeurs de p, q et r ?

Justifiez chacune de vos réponses en donnant des affectations de valeurs qui témoignent de vos affirmations, si cela est suffisant. Si ce n'est pas suffisant, donnez la table de vérité de l'expression et justifiez.

Réponse :

a) Démontrons que l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est satisfiable par une table de vérité.

Soit p, q et r des expressions booléennes

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg$	$(r \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$
v	v	v	v	f	v	f
v	v	f	v	f	v	f
v	f	v	f	f	v	v
v	f	f	f	v	f	v
f	v	v	v	f	v	f
f	v	f	v	f	v	f
f	f	v	v	f	v	f
f	f	f	v	v	f	v

Pour toutes les combinaisons de valeurs de vérité possibles attribuables aux expressions p, q et r, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est satisfiable puisqu'il y a au moins une combinaisons de valeurs de vérité qui donne un résultat qui est vrai. Par exemple, lorsque $[p := F]$, $[q := F]$ et $[r := F]$, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est vraie.

C.Q.F.D.

b) Tel que démontrée en a), l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est satisfiable, elle ne peut donc pas être insatisfiable. Pour que l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » soit insatisfiable, il faut qu'aucune des combinaisons de valeurs de vérité soit vraie. Cependant, lorsque $[p := F]$, $[q := F]$ et $[r := F]$, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est vraie.

c) Non, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » n'est pas toujours vraie puisque certaines combinaisons de valeurs de vérité pour p, q et r donnent un résultat qui est faux. Par exemple, lorsque $[p := V]$, $[q := V]$ et $[r := V]$, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est fausse. Un autre exemple où ce que l'expression est fausse est lorsque $[p := V]$, $[q := V]$ et $[r := F]$.

d) Tel que démontrée en a), l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est satisfiable, elle ne peut donc pas être toujours fausse puisqu'au moins une combinaison de valeurs de vérité est vraie. En effet, lorsque $[p := F]$, $[q := F]$ et $[r := F]$, l'expression « $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg(r \vee q)$ » est vraie.

Exercice 2
Soit $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ des expressions booléennes.Démontrez l'expression suivante à l'aide d'une démonstration par cas (c'est-à-dire à l'aide d'une table de vérité) :

$$\big(\,(\heartsuit \wedge \diamondsuit \Rightarrow \spadesuit) \wedge (\heartsuit \wedge \neg\diamondsuit \Rightarrow \spadesuit)\,\big) \;\Leftrightarrow\; \heartsuit \Rightarrow \spadesuit\,.$$

Réponse :

Exercice 3
Refaites la démonstration de l'exercice précédent, mais en utilisant cette fois-ci une démonstration par succession d'équivalences.

Réponse :

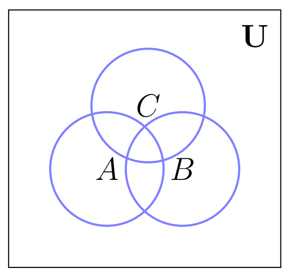
Exercice 4
Soit A, B et C des ensembles. À l'aide de diagrammes de Venn, démontrez la propriété suivante :

$$\big((A \cap B)^c \cup C\big) \cap \big((A \cap B^c)^c \cup C\big) = A^c \cup C\,.$$

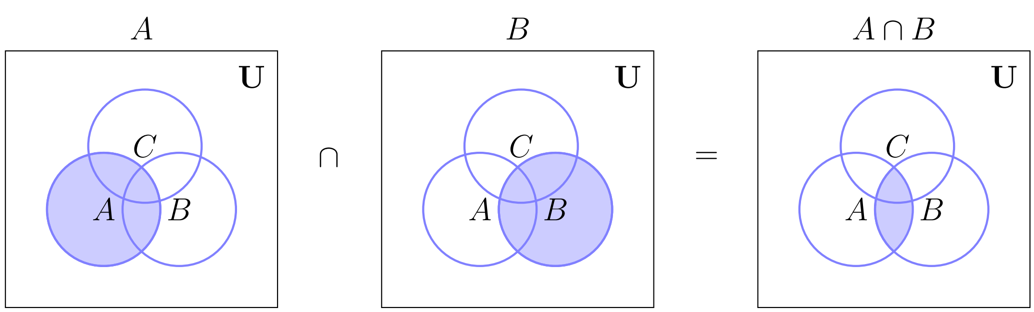
Réponse :

Démontrons l'expression $\big((A \cap B)^c \cup C\big) \cap \big((A \cap B^c)^c \cup C\big) = A^c \cup C$ à l'aide de diagrammes de Venn.

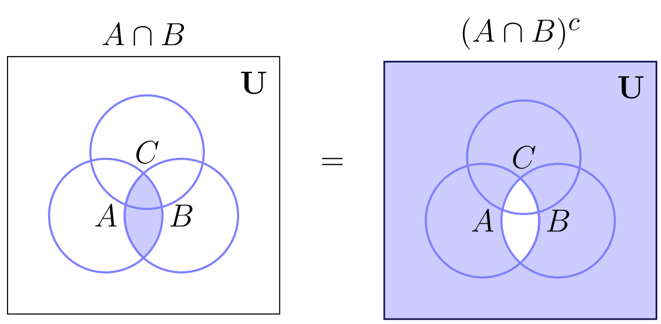
Soit A, B et C trois ensembles. Considérons la représentation suivante :



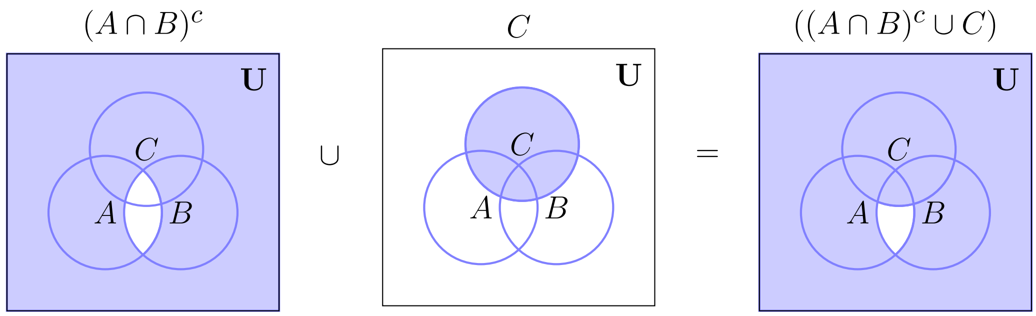
Bâtissons d'abord l'ensemble « $A \cap B$ » :



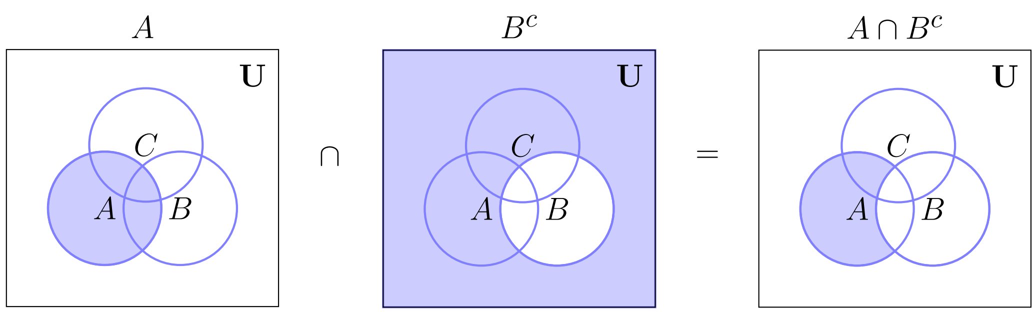
Bâtissons ensuite l'ensemble «$(A \cap B)^c$ »



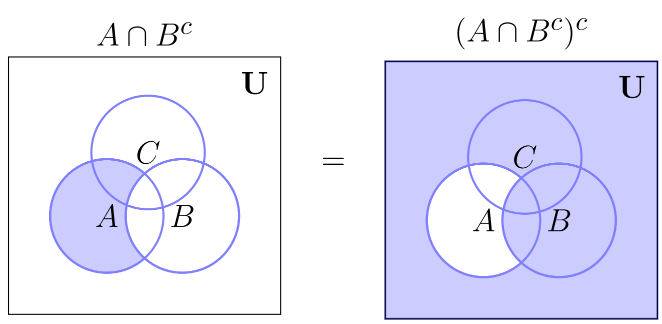
Bâtissons ensuite l'ensemble « $(A \cap B)^c \cup C$ »



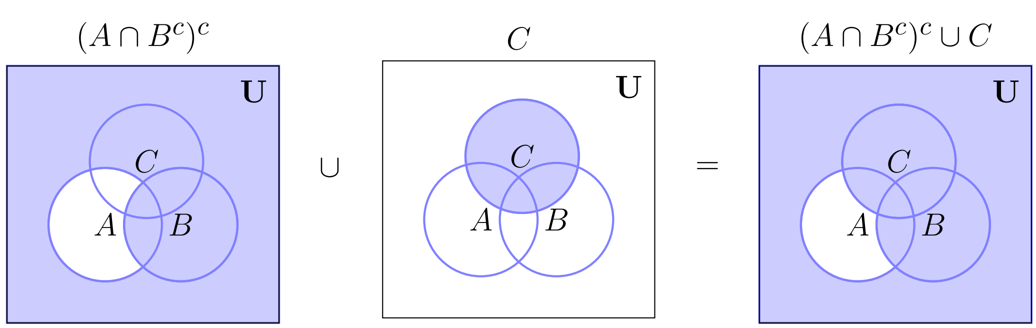
Bâtissons ensuite l'ensemble « $A \cap B^c$ »



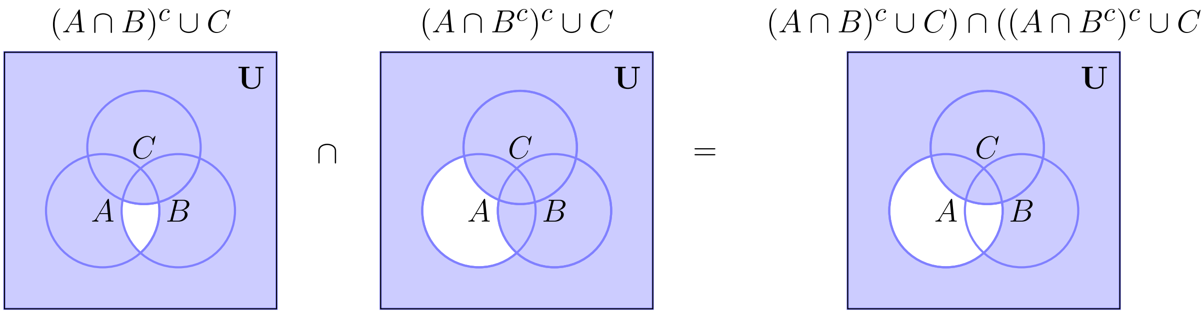
Bâtissons ensuite l'ensemble « $(A \cap B^c)^c$ »



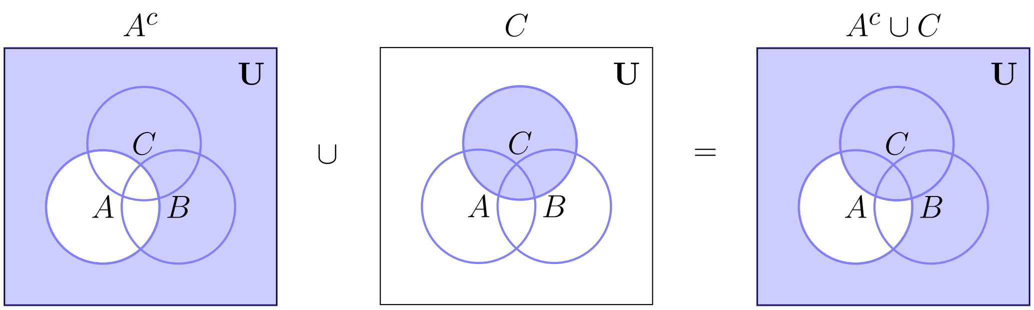
Bâtissons ensuite l'ensemble « $(A \cap B^c)^c \cup C$ »



Bâtissons ensuite l'ensemble « $(A \cap B)^c \cup C) \cap ((A \cap B^c)^c \cup C$ »



Bâtissons ensuite l'ensemble « $A^c \cup C$ »



Les diagrammes de Venn obtenus montrent bien que les éléments appartenant à « $\big((A \cap B)^c \cup C\big) \cap \big((A \cap B^c)^c \cup C\big)$ » sont les mêmes que les éléments appartenant à l'ensemble « $A^c \cup C$ ».

C.Q.F.D.

Exercice 5
Refaites la démonstration de l'exercice précédent, mais en utilisant cette fois-ci une démonstration par succession d'équivalences.

Réponse :

Exercice 6
Pour chacun des prédicats suivants, dites d'abord si l'énoncé est vrai ou s'il est faux. Ensuite, démontrez-le.

a) $(\exists x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \notin \mathbb{N})$,

b) $(\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \mid (x-1)^2 \geq 4)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3 \vee 2(|x|-2)^2 < 5)$.

Notez bien : Dans l'exercice ci-haut, $|x|$ correspond à la valeur absolue de la variable x.

Réponse :

Exercice 7
On considère les trois ensembles suivants (peu importe la forme) :
- L'ensemble VERTS des thés verts
- L'ensemble BIOS les thés biologiques.
- L'ensemble THÉS contenant tous les thés. Notre ensemble universel.

On suppose que *hedy* et *alan* sont des thés particuliers. Pour chaque phrase suivante, écrivez une expression qui la représente, en utilisant les opérateurs ensemblistes seulement, si c'est possible.
a) *hedy* est un thé vert.

b) Les thés verts sont des thés.

c) Les thés verts ne sont pas tous biologiques.

d) Il y a au moins 42 thés biologiques qui ne sont pas des thés verts.

Répondez aussi aux questions suivantes :

e) Quelle interprétation possède l'expression
$$(\exists x \in \text{VERTS} \mid (\forall y \in \text{BIOS} \mid y = alan \vee y \neq x)) .$$

f) Réécrivez les expressions suivantes en remplacent les points d'interrogation par le bon symbole parmi $\in, \subseteq, \supseteq$. Si rien n'est possible, modifiez légèrement l'élément de gauche (le premier) afin de rendre un symbole possible.

i. $alan$??? $\mathcal{P}(\text{THÉS})$
ii. BIOS ??? $\mathcal{P}(\text{THÉS})$
iii. $hedy$??? $\text{THÉS} \cup \text{BIO}$
iv. $\mathcal{P}(\text{VERTS})$??? $\mathcal{P}(\text{THÉS})$

Réponse :

a) $hedy \in \text{VERTS}$

b) $\text{VERTS} \subseteq \text{THÉS}$

c) $\text{BIOS} \subset \text{VERTS}$

d) $|\ \text{BIOS} \setminus \text{VERTS}\ | \ \geq\ 42$

e) Pour tout thé biologique y, soit y est *alan* (un thé particulier) ou soit il existe un thé vert auquel y est différent.

f) i) $\{alan\} \in \mathcal{P}(\text{THÉS})$

ii) $\text{BIOS} \in \mathcal{P}(\text{THÉS})$

iii) $hedy \in \text{THÉS} \cup \text{BIO}$

iv) $\mathcal{P}(\text{VERTS}) \subseteq \mathcal{P}(\text{THÉS})$