

Srovnání komprese dat pomocí SVD a waveletů

Šimon Marek

3. února 2026

1 Úvod

Tento projekt se zabývá ztrátovou kompresí obrazu a porovnává dvě různé metody: kompresi pomocí singulární dekompozice (SVD) a kompresi pomocí waveletové transformace.

Obecně rozlišujeme bezztrátovou a ztrátovou kompresi. Bezztrátová komprese umožňuje přesnou rekonstrukci původních dat, zatímco ztrátová komprese připouští určitou ztrátu informace výměnou za výrazně vyšší míru zmenšení dat. Metody použité v tomto projektu spadají do oblasti ztrátové komprese, protože výsledný obraz je pouze aproximací původního.

V projektu jsou obě metody aplikovány na tři různé černobílé obrazy s odlišným charakterem (přirozený obraz, textura, obraz se šumem). Cílem je experimentálně porovnat účinnost komprese pomocí SVD a waveletové transformace z hlediska kompresního poměru, kvality rekonstrukce obrazu a času výpočtu.

2 Singulární dekompozice (SVD)

Černobílý obraz lze reprezentovat jako matici

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

kde každý prvek matice odpovídá intenzitě jasu jednoho pixelu.

Na tuto matici můžeme aplikovat singulární dekompozici (Singular Value Decomposition, SVD). SVD rozkládá matici A do tvaru

$$A = U \Sigma V^T,$$

kde:

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální matice, jejíž sloupce jsou levé singulární vektory,
- $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonální matice, jejíž sloupce jsou pravé singulární vektory,
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je diagonální matice obsahující singulární hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$, kde $p = \min(m, n)$, seřazené sestupně:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0.$$

Singulární hodnoty souvisí s vlastními čísly matic AA^T a A^TA , a to tak že:

$$\sigma_i^2$$

jsou vlastní čísla těchto matic. Sloupce matice U jsou vlastní vektory matice AA^T a sloupce matice V jsou vlastní vektory matice A^TA .

SVD lze také zapsat ve tvaru součtu:

$$A = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^T,$$

kde u_i a v_i jsou sloupce matic U a V . Každý člen tohoto součtu představuje jednoduchý obrazový vzor.

2.1 SVD jako metoda komprese

Pro účely komprese obrazu využíváme fakt, že singulární hodnoty obvykle rychle klesají. To znamená, že většina informace o obrazu je obsažena v několika prvních členech rozvoje.

Místo přesného rozkladu použijeme approximaci:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T, \quad \text{kde } k \ll p.$$

Z hlediska ukládání dat místo celé matice A ukládáme pouze:

- prvních k sloupců matice U (velikost $m \times k$),
- prvních k singulárních hodnot,
- prvních k sloupců matice V (velikost $n \times k$).

Celkový počet uložených hodnot je tedy

$$k(m + n + 1),$$

zatímco původní obraz obsahuje mn hodnot. Pokud je k dostatečně malé, dojde k výraznému snížení objemu dat za cenu ztráty detailů v obrazu.

Se zmenšujícím se parametrem k roste kompresní poměr, ale zároveň klesá kvalita rekonstruovaného obrazu.

3 Waveletová transformace

Waveletová transformace je další metoda používaná pro komprezi obrazu. V praxi se používá například ve standardu JPEG 2000. Na rozdíl od SVD nepracuje s globální strukturou obrazu, ale rozkládá obraz na složky reprezentující různé úrovně detailu.

Waveletová komprese může být ztrátová i bezztrátová. V tomto projektu používáme ztrátovou variantu, kdy některé koeficienty po transformaci zanedbáváme.

3.1 Princip waveletové transformace

Diskrétní waveletová transformace (DWT) převádí obraz z původní domény pixelů do domény waveletových koeficientů. Výsledkem transformace je sada koeficientů stejného počtu, jako má původní obraz pixelů.

Transformace probíhá pomocí dvojice filtrů:

- low-pass filtr který zachycuje hrubou strukturu obrazu – tzv. approximační složku,
- high-pass filtr který zachycuje detaily obrazu.

V případě dvouozměrného obrazu se filtrování provádí ve směru řádků i sloupců, čímž vzniknou čtyři podobrazy:

- LL – hrubá approximace obrazu,
- LH – horizontální detaily,
- HL – vertikální detaily,
- HH – diagonální detaily.

Tento proces lze opakovat na approximační složku LL , čímž vznikají další úrovně rozkladu. Parametr *počet úrovní rozkladu* tedy určuje, jak hluboko se obraz rozdělí na hrubé struktury a jemné detaily.

3.2 Waveletová komprese

Po provedení waveletové transformace získáme matici koeficientů. Typicky platí, že:

- několik málo koeficientů (zejména v approximačních částech) má velkou hodnotu,
- většina koeficientů reprezentujících jemné detaily má malou absolutní hodnotu.

Toho lze využít pro kompresi tak, že malé koeficienty nastavíme na nulu. V tomto projektu, se zachová pouze určitý podíl největších koeficientů podle absolutní hodnoty a ostatní se vynulují.

Komprese je tedy řízena dvěma parametry:

- počet úrovní waveletového rozkladu,
- podíl zachovaných koeficientů

Po úpravě koeficientů se provede inverzní waveletová transformace, která převede upravené koeficienty zpět do obrazu. .

4 Metrika kvality rekonstrukce

Pro hodnocení kvality rekonstruovaného obrazu byla použita metrika PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio).

PSNR vyjadřuje poměr mezi maximální možnou hodnotou signálu a chybou (šumem), která vznikla kompresí. Hodnota se udává v decibelech (dB), tedy na logaritmické škále.

4.1 Mean Squared Error (MSE)

Nejprve definujeme rozptyl (Mean Squared Error, MSE) mezi původním obrazem I a rekonstruovaným obrazem K . Pro černobílý obraz o rozměrech $m \times n$ platí

$$\text{MSE} = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (I(i, j) - K(i, j))^2.$$

4.2 Definice PSNR

PSNR je definováno pomocí MSE vztahem

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\text{MAX}_I^2}{\text{MSE}} \right),$$

kde MAX_I je maximální možná hodnota pixelu obrazu. Pro 8bitový černobílý obraz platí

$$\text{MAX}_I = 255.$$

Ekvivalentně lze PSNR zapsat ve tvaru

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10}(\text{MAX}_I) - 10 \log_{10}(\text{MSE}).$$

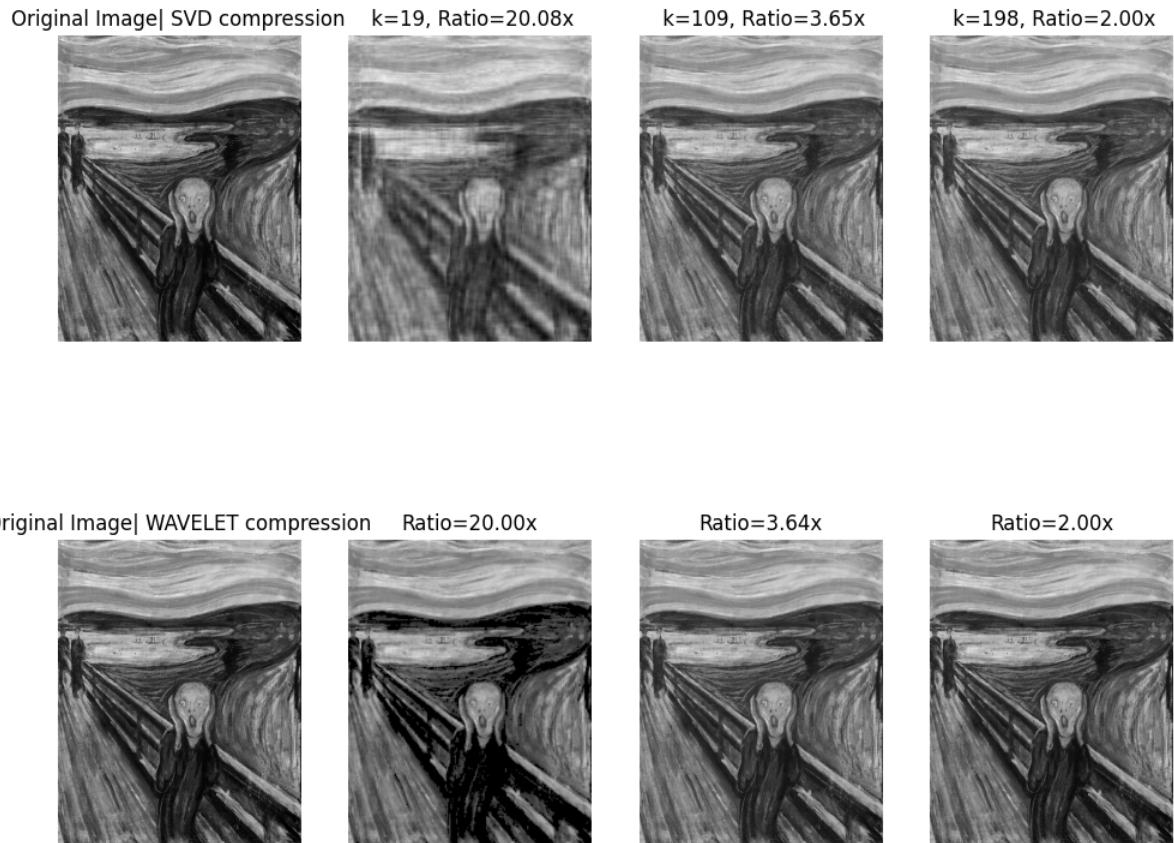
Vyšší hodnota PSNR znamená menší chybu rekonstrukce a tedy vyšší kvalitu obrazu

5 Výsledky

5.1 Malba

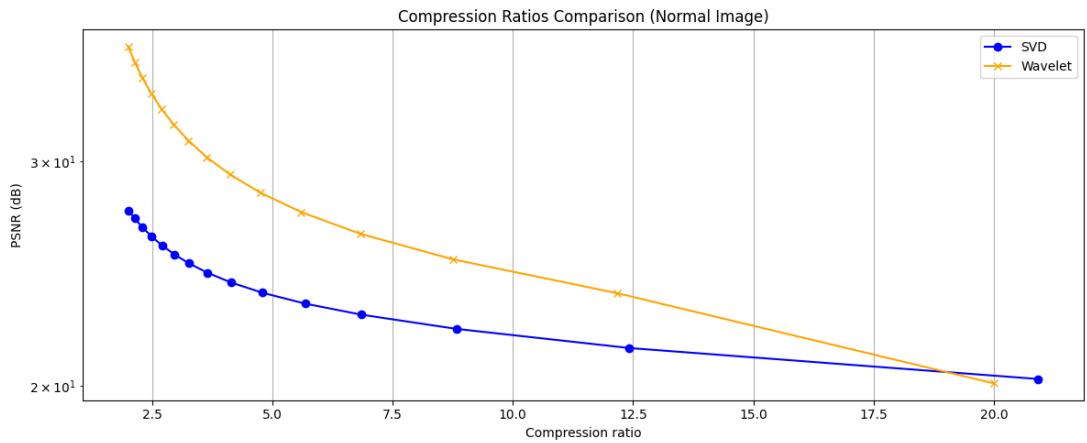
První testovaný obraz je slavná malba.

Nejprve porovnáváme vizuální kvalitu rekonstrukce při různých kompresních poměrech pro metody SVD a waveletové komprese.



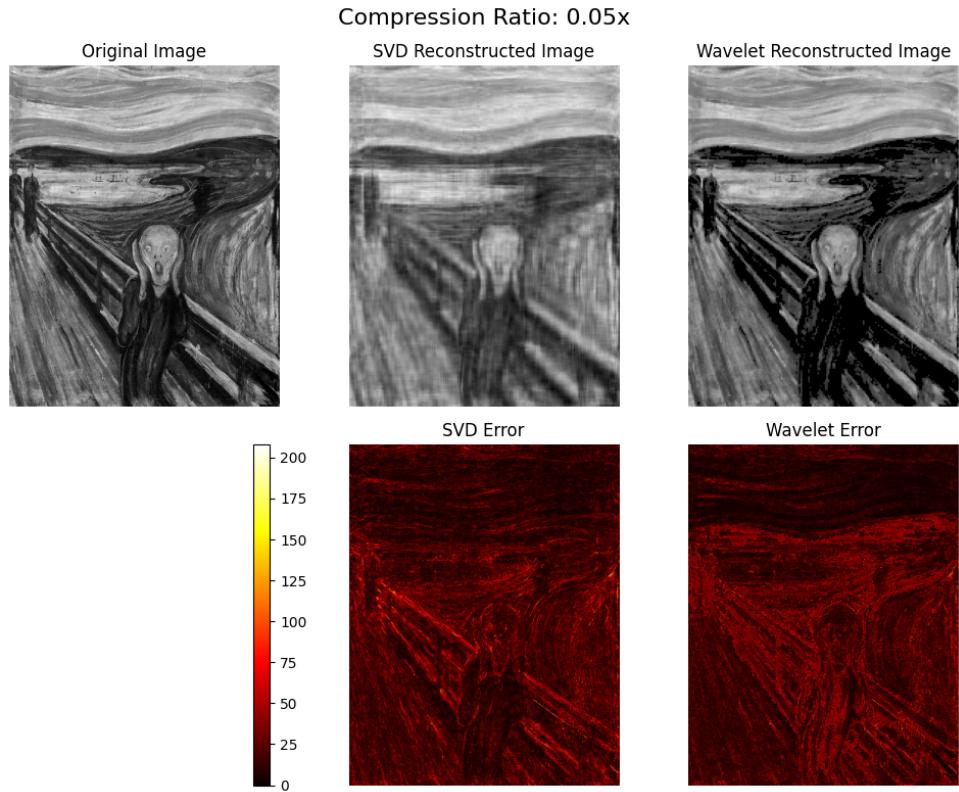
Obrázek 1: Vizuální porovnání rekonstrukce malby pomocí SVD a waveletové komprese

Dále sledujeme závislost kvality rekonstrukce vyjádřené pomocí PSNR na kompresním poměru. Z grafu je patrné, že při stejném kompresním poměru dosahuje waveletová komprese vyšší kvality rekonstrukce než SVD.



Obrázek 2: Závislost PSNR na kompresním poměru pro obraz malby

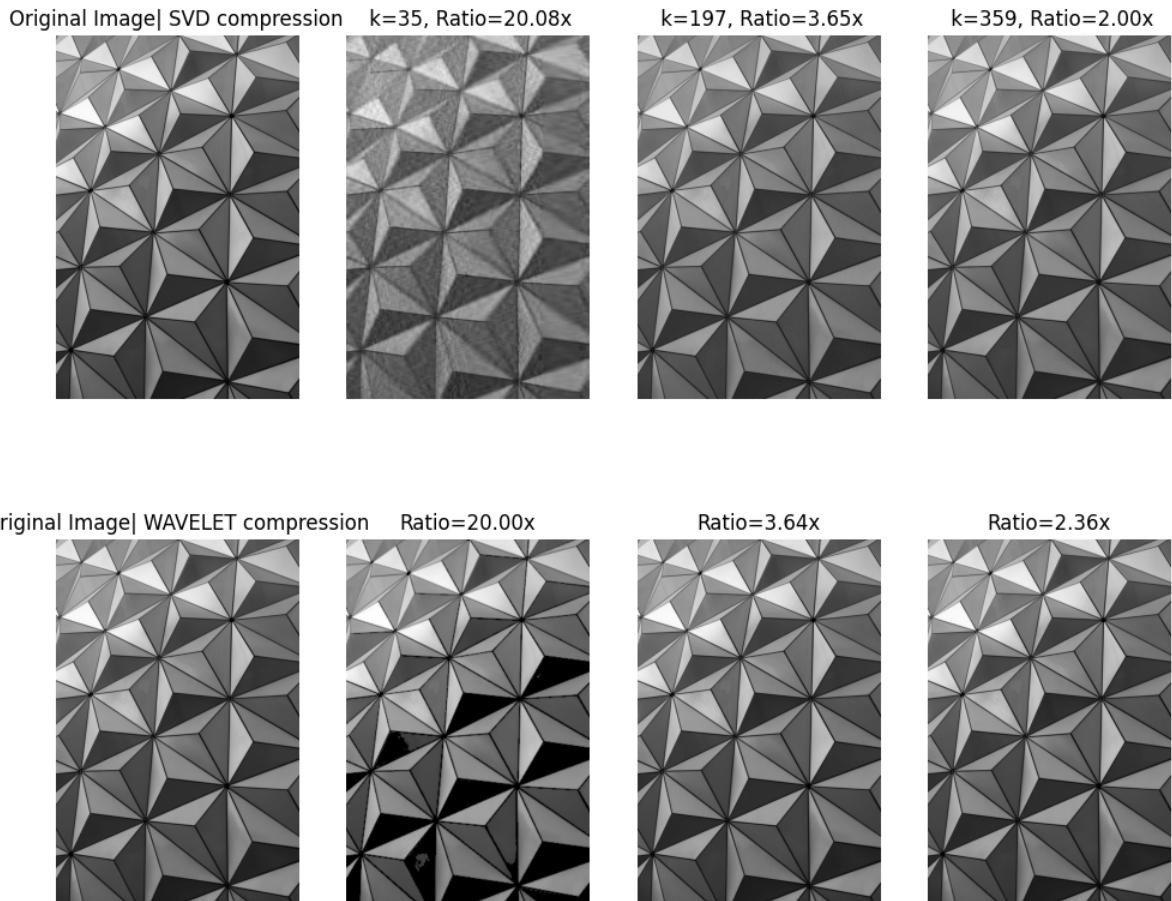
Pro lepší pochopení rozdílů je zobrazena také chybová mapa, která znázorňuje absolutní rozdíl mezi originálním a rekonstruovaným obrazem. Světlejší oblasti odpovídají větší chybě rekonstrukce. U metody SVD je chyba rozložena poměrně globálně, zatímco waveletová komprese lépe zachovává lokální struktury.



Obrázek 3: Chybové mapy rekonstrukce pro obraz trávy

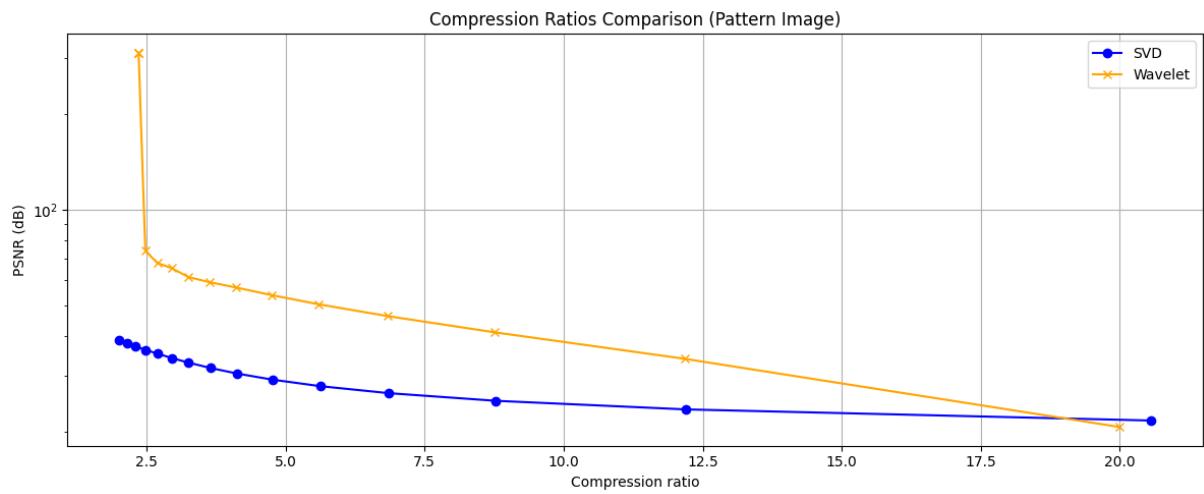
5.2 Pravidelný vzor

Druhý obraz obsahuje výrazný pravidelný vzor. Takové obrazy mají silnou strukturální pravidelnost, která může být pro některé kompresní metody výhodná.



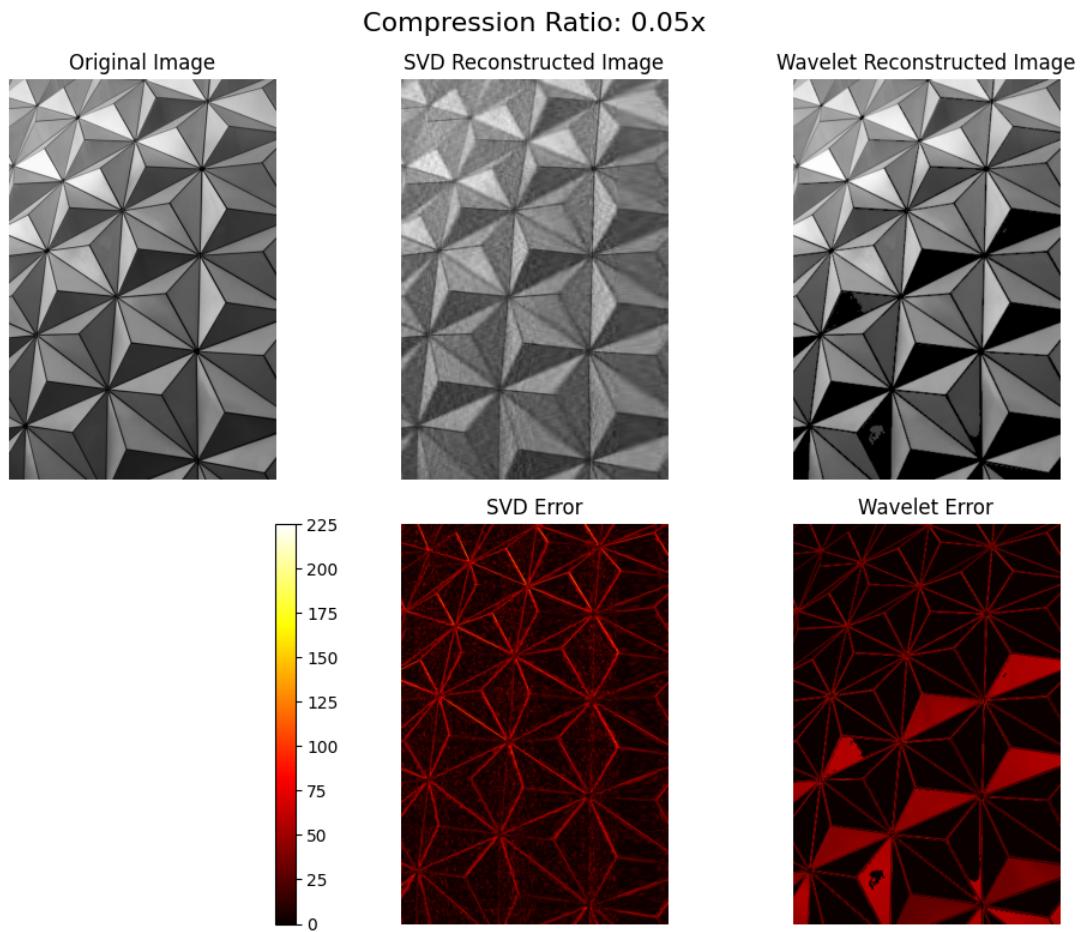
Obrázek 4: Vizuální porovnání rekonstrukce pravidelného vzoru

Z grafu PSNR je patrné, že waveletová komprese zde dosahuje velmi dobrých výsledků, protože dokáže efektivně reprezentovat opakující se lokální struktury. SVD má tendenci rozmažávat jemné detaity vzoru.



Obrázek 5: Závislost PSNR na kompresním poměru pro obraz se vzorem

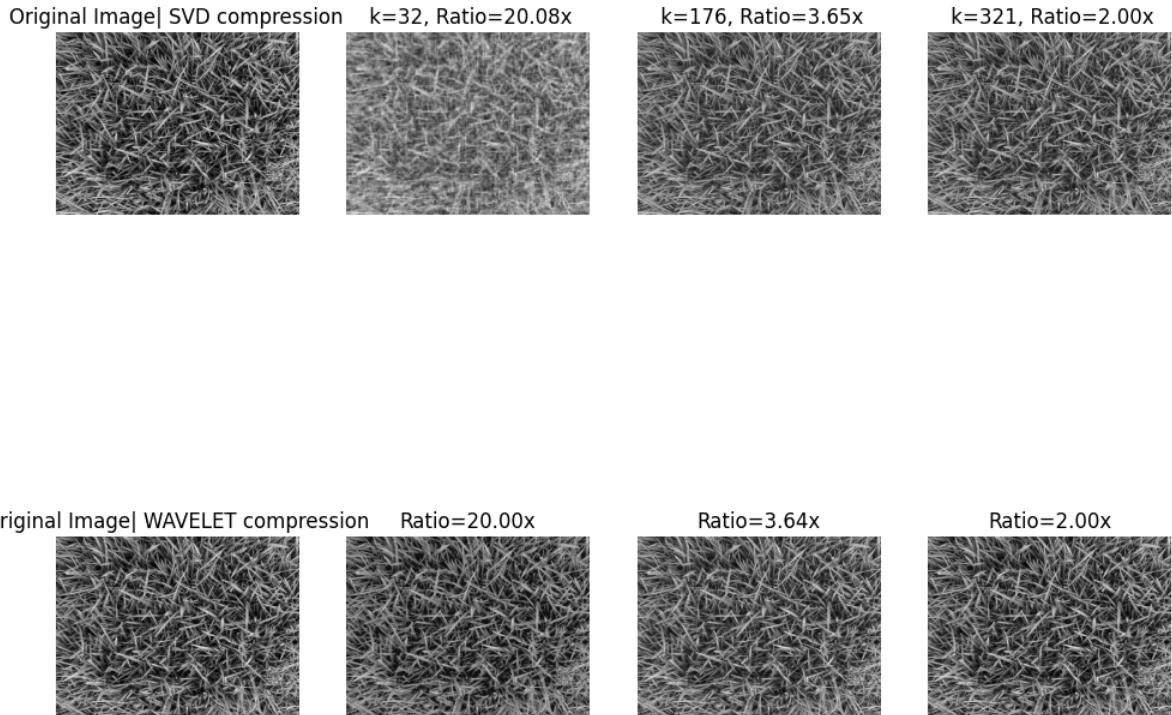
Chybová mapa ukazuje, že u SVD dochází ke ztrátě jemné textury, zatímco waveletová metoda zachovává strukturu lépe, ale může obsahovat drobné lokální chyby.



Obrázek 6: Chybové mapy rekonstrukce pro obraz se vzorem

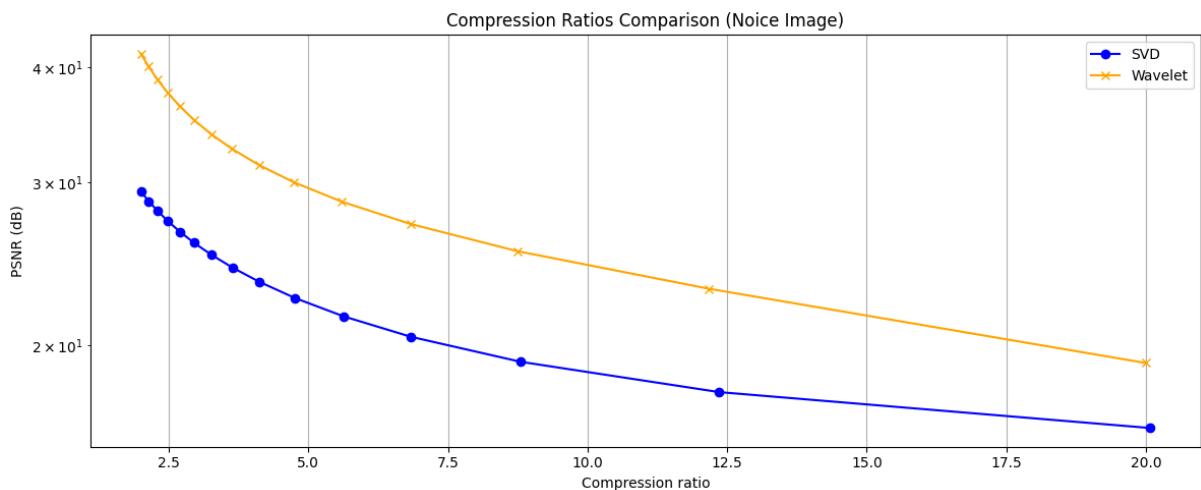
5.3 Šum

Třetí obraz představuje náhodný šum, který neobsahuje žádnou výraznou strukturu.



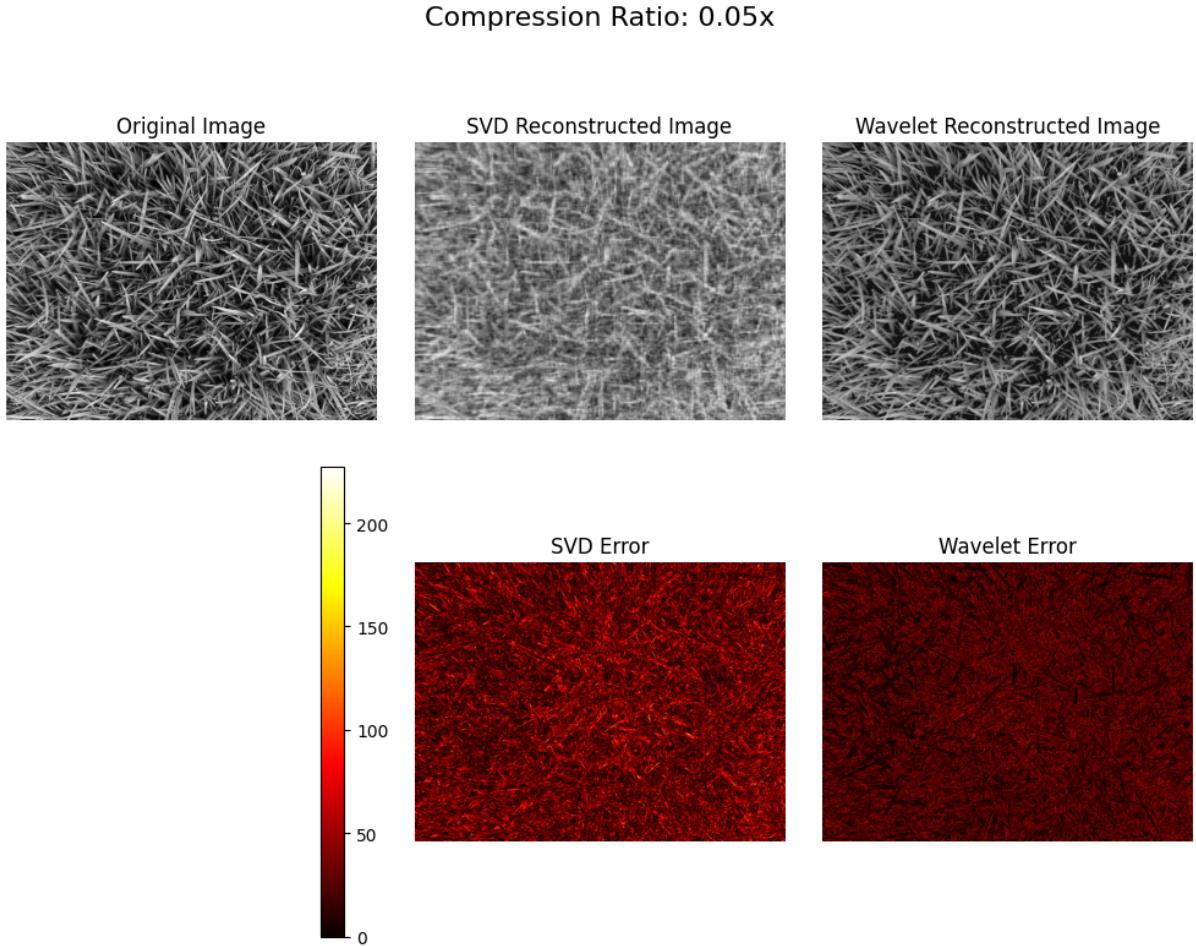
Obrázek 7: Vizuální porovnání rekonstrukce obrazu se šumem

V tomto případě obě metody dosahují nižší kvality rekonstrukce při vyšších kompresních poměrech, protože šum nelze efektivně popsat malým počtem parametrů. PSNR rychle klesá s rostoucí kompresí.



Obrázek 8: Závislost PSNR na kompresním poměru pro obraz se šumem

Chybová mapa ukazuje, že chyba je rozprostřena téměř rovnoměrně po celém obrazu, což odpovídá náhodnému charakteru dat.



Obrázek 9: Chybové mapy rekonstrukce pro obraz se šumem

5.4 Časová náročnost

Byla také měřena výpočetní náročnost obou metod. Průměrný čas komprese pomocí SVD byl přibližně 2.02 s, zatímco dekomprese trvala 0.015 s. U waveletové komprese byl průměrný čas komprese přibližně 0.21 s a dekomprese 0.0115 s.

Waveletová transformace je výpočetně méně náročná, má lineární složitost vzhledem k počtu pixelů obrazu. Naproti tomu SVD vyžaduje rozklad celé matice obrazu, což je výpočetně výrazně náročnější operace.

6 Závěr

Z experimentů vyplynulo, že waveletová komprese dosahuje při stejném kompresním poměru zpravidla vyšší kvality rekonstrukce než SVD. Tento rozdíl byl nejvýraznější u přirozených obrazů a obrazů s texturou, kde wavelety lépe zachovávají lokální struktury a hrany.

Z hlediska kompresního poměru se ukázalo, že waveletová transformace umožňuje dosáhnout velmi vysoké komprese díky tomu, že velká část koeficientů může být potlačena bez výrazného

vizuálního zhoršení obrazu. SVD má omezení dané počtem singulárních hodnot, přičemž při velmi malém počtu hodnot dochází k rychlé ztrátě detailů a rozmazání obrazu.

Časová náročnost komprese byla výrazně vyšší u SVD, zatímco waveletová transformace byla rychlejší. Rekonstrukce obrazu byla u obou metod relativně rychlá.

Celkově lze říci, že waveletová komprese je univerzálnější a efektivnější metoda pro kompresi obrazů, zatímco SVD může sloužit jako jednodušší matematický model pro pochopení principů nízkorozměrné approximace dat.

Reference

- [1] D. M. I. C. Z., *SVD Image Compression*.
- [2] I. Quilez, *Wavelet Transform Explained*.
- [3] National Instruments, *Peak Signal-to-Noise Ratio as an Image Quality Metric*.