

IC Grupos

Iniciação Científica em Teoria de Grupos

Marco Vieira Buseti

Professor: Francismar Ferreira Lima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Curitiba, Novembro de 2024

Capítulo 1

Generalidades sobre Grupos

1.1 Operações Binárias

Definição 1.1.1

Sejam G e E conjuntos não-vazios e \oplus uma função tal que:

$$\oplus : \begin{array}{c} G \times G \rightarrow E \\ (a, b) \mapsto \oplus(a, b) \end{array}$$

Definimos a função acima como a **operação binária de dois elementos de G em E** e a escrevemos comumente como: $a \oplus b$.

Exemplo 1.1.1

A adição usual $+$ é uma operação binária de dois elementos de \mathbb{I} em \mathbb{R} . Onde \mathbb{I} denota o conjunto dos números irracionais.

Exemplo 1.1.2

Sejam $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a função que define a distância cartesiana entre dois pontos a e b :

$$\text{dist}(a, b) : \begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} \end{array}$$

representa uma operação binária de dois elementos de \mathbb{R} em \mathbb{R}^+ .

Definição 1.1.2

A partir das notações acima, definimos **lei de composição interna de $G \times G \rightarrow G$ se $E = G$** .

*Observação: caso não haja ambiguidade, denotaremos simplesmente **lei de composição interna em G** para representar a lei de composição interna de $G \times G \rightarrow G$.*

Exemplo 1.1.3

A operação usual $+$ em \mathbb{N} é uma lei de composição interna em \mathbb{N} , ao contrário da operação usual $-$ de \mathbb{N} em \mathbb{Z} .

1.2 Grupos

Definição 1.2.1

Seja G um conjunto não-vazio. Dizemos que (G, \cdot) é um grupo se, e somente se, \cdot é uma lei de composição interna em G tal que:

1. $\exists e \in G, \forall x \in G : x \cdot e = e \cdot x = x$;
2. $\forall x \in G, \exists \hat{x} \in G : x \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot x = e$;
3. $\forall x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Observações:

Levando em consideração as notações acima, temos:

1. *Primeiramente, notamos que e e \hat{x} são únicos, uma vez que:*

Supondo que existam e e e' pertencentes à G que satisfazem o item 1, temos:

$$x \cdot e = x = x \cdot e' \implies \hat{x} \cdot x \cdot e = \hat{x} \cdot x \cdot e' \implies e = e' \quad \square$$

Supondo agora que existam \hat{x} e \hat{x}' que satisfaçam o item 2, temos:

$$\hat{x} \cdot x = e = \hat{x}' \cdot x \implies \hat{x} \cdot x \cdot \hat{x} = \hat{x}' \cdot x \cdot \hat{x} \implies \hat{x} \cdot e = \hat{x}' \cdot e \implies \hat{x} = \hat{x}' \quad \square$$

2. *Notamos por convenção x^{-1} no lugar de \hat{x} no **item 2** (dada sua unicidade).*
3. *Caso $\forall (x, y) \in G \times G : x \cdot y = y \cdot x$, dizemos que G é um grupo abeliano (ou comutativo).*
4. *Caso G seja um grupo abeliano, então*

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 1.2.1

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, (\mathbb{C}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}^*, \cdot) são grupos abelianos (onde $+$ e \cdot denotam as operações usuais de adição e produto em \mathbb{C}).

Exemplo 1.2.2

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ define uma estrutura de grupo, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} e $GL_n(\mathbb{K})$ define o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas em \mathbb{K} .

Exemplo 1.2.3

Seja A um conjunto não-vazio. Seja

$$\mathcal{P}(f) = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ bijetiva}\}$$

O conjunto das funções f bijetivas de A em A .

$(\mathcal{P}(f), \circ)$ define uma estrutura de grupo, onde \circ representa composição entre funções.

Caso A seja um conjunto finito e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Card}(A) = n$, $\mathcal{P}(f)$ será representado por S_n e será chamado de **grupo simétrico ou grupo das permutações**.

Exemplo 1.2.4

Seja, neste exemplo, para fins de simplificação, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_n$, para $n \in \mathbb{Z}$.
Seja a operação \odot em \mathbb{Z}_n definida da seguinte forma:

$$\odot : \begin{array}{c} \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \\ (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \end{array}$$

onde \cdot é a operação usual de produto nos inteiros.

Temos que (\mathbb{Z}_p^*, \odot) , onde p é um número primo, é um grupo abeliano.

Demonstração:

Por construção, temos que $\bar{a} \odot \bar{b} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Para mostrar a associatividade, sejam $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \bar{a} \odot (\bar{b} \odot \bar{c}) &= \bar{a} \odot (\overline{b \cdot c}) = \\ &= \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = (\bar{a} \odot \bar{b}) \odot \bar{c}. \end{aligned}$$

O elemento neutro é evidentemente o elemento $\bar{1} \in \mathbb{Z}_p^*$, pois:

$$\bar{a} \odot \bar{1} = \overline{a \cdot 1} = \bar{a}, \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_p^*.$$

Também temos que para todo elemento de \mathbb{Z}_p^* , existe elemento inverso, pois, sabemos que:

$$\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_p^* \implies \text{mdc}(a, p) = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Bézout, temos que existem x e y inteiros tais que:

$$ax - py = 1$$

Ora mas isso é a mesma coisa que afirmar que existe uma solução para a equação:

$$a \cdot x \equiv 1 \pmod{p} \iff \bar{a} \odot \bar{x} = \bar{1}.$$

Logo, deduzimos que $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_p^*, \exists \bar{a}^{-1} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Além disso, é evidente que a operação \odot é comutativa.

Portanto, provamos que (\mathbb{Z}_p^*, \odot) é um grupo abeliano.

□

Exemplo 1.2.5

Seja $G =]-1, 1[$, (G, \star) tal que

$$\forall x, y \in G : x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

define um grupo abeliano.

Demonstração:

Provemos primeiramente que $\forall x, y \in G, x \star y \in G$.

Fixando $y \in G$ temos a seguinte função de $x \in G$:

$$f(x) = \frac{x + y}{1 + xy}$$

A função é derivável em G . Tomando sua derivada temos:

$$f'(x) = \frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2}$$

Temos evidentemente $\forall (x, y) \in G \times G, f'(x) > 0$.

(De forma simétrica podemos mostrar o mesmo escrevendo f como uma função de y).

Logo, deduzimos que a função f é estritamente crescente.

Portanto:

$$f(-1) < x \star y < f(1) \iff \frac{y - 1}{1 - y} < x \star y < \frac{1 + y}{1 + y} \iff -1 < x \star y < 1$$

Logo, provamos que $x \star y \in G$.

Provemos os outros axiomas:

Existência do neutro:

Tomando $y = 0$ temos:

$$x \star 0 = \frac{x + 0}{1 + 0 \cdot x} = x$$

Portanto, deduzimos que o elemento neutro do grupo G é dado por $e = 0$.

Existência do inverso:

Tomando $y = -x$ temos:

$$x \star -x = \frac{x - x}{1 - (-x)x} = 0$$

Portanto, deduzimos que o elemento inverso do grupo G existe e é dado por $x^{-1} = -x$.

Associatividade:

Sejam $x, y, z \in G$, mostremos que $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Temos:

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= \frac{(x \star y) + z}{1 + (x \star y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z\frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} = \\
&= \frac{x(1 + yz) + (y + z)}{(1 + yz) + x(y + z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = x \star (y \star z)
\end{aligned}$$

Mostrando, assim, a associatividade.

Ainda, temos que o grupo é evidentemente abeliano. \square

1.3 Subgrupos

Definição 1.3.1

Seja (G, \cdot) um grupo. Um subconjunto $H \subseteq G$ é chamado de subgrupo de G (denotamos $H \leq G$) se, e somente se, (H, \cdot) é um grupo.

Observação: temos ainda que se $H \subset G$, temos então H é chamado de subgrupo próprio de G e denotamos como $H < G$.

Proposição 1.3.1

Seja $H \subseteq G$ tal que $H \neq \emptyset$ e (G, \cdot) é um grupo. $H \leq G$ é equivalente à satisfazer as seguintes condições:

1. $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall (h_1, h_2) \in H \times H;$
2. $h^{-1} \in H, \forall h \in H.$

Demonstração:

É necessário mostrarmos as duas implicações da equivalência:

$$H \leq G \implies (1.) \text{ e } (2.) \tag{1.1}$$

$$(1.) \text{ e } (2.) \implies H \leq G \tag{1.2}$$

A implicação (1.1) é trivial. Ora, se $H \leq G$, então pela definição de subgrupo temos que $h_1 \cdot h_2 \in H$ e $h^{-1} \in H$, isto é $\exists h^{-1} \in H : h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = h$.

Para a implicação (1.2):

Sabemos que $H \subseteq G$, logo, se $h_1 \cdot h_2 \in H \implies h_1 \cdot h_2 \in G$. Ora, sabemos que (G, \cdot) é um grupo. Logo, a associatividade é satisfeita. Para demonstrar que $e \in H$, basta tomarmos $h_2 = h^{-1}$ a partir de (2.). Logo, temos $h \cdot h^{-1} = e \in H$. Com isso mostramos todos os axiomas necessários e deduzimos que $H \leq G$. \square

Exemplo 1.3.1

(\mathbb{U}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}_+^*, \cdot) são subgrupos de (\mathbb{C}^*, \cdot) , onde \cdot denota a multiplicação usual em \mathbb{C} .

Exemplo 1.3.2

G e $\{e\}$ são subgrupos *triviais* de G .

Exemplo 1.3.3

Seja $n \in \mathbb{N}^*$,

$$SL_n(\mathbb{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{K}), \det(A) = 1\}$$

Temos que $(SL_n(\mathbb{K}), \cdot) \leq (GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$, onde \cdot denota o produto usual de matrizes.

Chamamos $SL_n(\mathbb{K})$ de **grupo linear especial**.

Demonstração:

Mostremos que temos de fato $SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$.

Primeiramente, note que é evidente que $SL_n(\mathbb{K})$ é não vazio, pois $\text{Id}_n \in SL_n(\mathbb{K})$.

Mostremos que $\forall A, B \in SL_n(\mathbb{K}), AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$.

Sabemos que se $A, B \in SL_n(\mathbb{K})$ então $\det(A) = \det(B) = 1$.

Ora, sabemos que:

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Logo, mostramos que $SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$. □

Exemplo 1.3.4

Seja $n \in \mathbb{Z}$, $(n\mathbb{Z}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$, e, em particular, são os únicos.

Demonstração:

É evidente que $(n\mathbb{Z}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$. Mostremos que são os únicos!

Seja $(H, +)$ um subgrupo qualquer de $(\mathbb{Z}, +)$. Se $H = \{0\}$, então $H = 0\mathbb{Z}$.

Suponhamos agora $H \neq \{0\}$. Seja $n = \min\{a \in H, a > 0\}$.

Logo, como $n \in H$ e $H \leq \mathbb{Z}$, temos que $n\mathbb{Z} \subseteq H$.

De maneira inversa, seja $h \in H$. Logo, pelo Algoritmo de Euclides, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$h = qn + r \quad (0 \leq r < n)$$

Porém, note que, como $h \in H$, temos:

$$r = h - qn \in H$$

Porém, sabemos que $0 \leq r < n$.

Ora, como n é o elemento mínimo de H estritamente maior que 0, deduzimos que apenas podemos ter $r = 0$.

Logo:

$$h = qn \implies h \in n\mathbb{Z} \implies H \subseteq n\mathbb{Z}.$$

Portanto deduzimos que $H = n\mathbb{Z}$. □

Exemplo 1.3.5

Seja G um grupo e I um conjunto não-vazio de índices. Se $\{H_i\}_{i \in I}$ é uma família de subgrupos de G , então $\bigcap_{i \in I} H_i$ é um subgrupo de G .

Demonstração:

Como visto na **Proposição 1.3.1**, mostremos que:

1. $\forall x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i \implies x_1 \cdot x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$;
2. $\forall x \in \bigcap_{i \in I} H_i \implies \exists x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

Provemos o **item 1**:

Sejam,

$$x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Logo:

$$\forall i \in I, x_1, x_2 \in H_i$$

Sabemos também que:

$$\forall i \in I, H_i \leq G$$

Portanto, deduzimos que:

$$\forall i \in I, x_1 \cdot x_2 \in H_i$$

Mas isso é a mesma coisa que dizer:

$$\forall x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i \implies x_1 \cdot x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Provemos o **item 2**:

Analogamente ao **item 1**, sabemos que:

$$x_0 \in \bigcap_{i \in I} H_i \iff \forall i \in I, x_0 \in H_i$$

Porém, sabemos que:

$$\forall i \in I, H_i \leq G$$

Logo, deduzimos que:

$$\forall i \in I, x_0 \in H_i, \exists x_0^{-1} \in H_i$$

Mas isso é a mesma coisa que:

$$\forall x \in \bigcap_{i \in I} H_i \implies \exists x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Portanto, provamos que:

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$$

□

Definição 1.3.2

Seja G um grupo. O subconjunto $Z(G)$ tal que:

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx, \forall g \in G\}$$

define um subgrupo de G chamado *centro* de G .

Demonstração:

Como visto na **Proposição 1.3.1**, para mostrar que $Z(G) \leq G$ é necessário mostrar que $x \cdot x^{-1} \in Z(G)$, $\forall x \in Z(G)$.

Nota: $Z(G)$ é claramente não vazio uma vez que o elemento neutro comuta com todos elementos de G e, portanto, está em $Z(G)$.

Temos que:

Se:

$$x \in Z(G) \implies x \cdot g = g \cdot x, \forall g \in G.$$

Logo, teremos:

$$xgx^{-1} = g \implies x^{-1}xgx^{-1} = x^{-1}g \implies gx^{-1} = x^{-1}g, \forall g \in G$$

Portanto:

$$x^{-1} \in Z(G)$$

Temos também que:

$$x_1 \in Z(G) \implies x_1g = gx_1, \forall g \in G \quad (\text{I})$$

$$x_2 \in Z(G) \implies x_2g = gx_2, \forall g \in G \quad (\text{II})$$

Deduzimos de (I):

$$x_1g = gx_1 \implies g = x_1^{-1}gx_1$$

Substituindo em (II):

$$x_2x_1^{-1}gx_1 = x_1^{-1}gx_1x_2 \implies x_2x_1^{-1}x_1g = x_1^{-1}gx_1x_2 \implies$$

$$\implies x_2g = x_1^{-1}gx_1x_2 \implies (x_1x_2)g = g(x_1x_2)$$

Logo, deduzimos que:

$$(x_1, x_2) \in Z(G) \times Z(G) \implies x_1 \cdot x_2 \in Z(G)$$

Portanto, $Z(G) \leq G$. □

Observação: O subgrupo centro serve o propósito de "medir a comutatividade" de um dado grupo. Por exemplo, observamos que $Z(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $Z(GL_2(\mathbb{R})) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ e $Z(S_n) = \{e\}$, $n \geq 3$.

Definição 1.3.3

Seja (G, \cdot) um grupo e X um conjunto não-vazio tal que $X \subseteq G$. Chamamos de **subgrupo gerado por um subconjunto a interseção de todos os subgrupos de G que contém X** . Denotamos-o como $\langle X \rangle$.

Matematicamente temos:

$$\langle X \rangle = \bigcap \{H : H \leq G \text{ e } X \subseteq H\}$$

Proposição 1.3.2

A partir das notações da **Definição 1.3.3**, temos que $\langle X \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém X .

Demonstração:

Suponha que $J \leq G$ seja o menor subgrupo de G tal que $X \subseteq J$.

Ora, como $J \leq G$ e $X \subseteq J$, então: $\langle X \rangle \subseteq J$.

Entretanto, também sabemos que J é o menor subgrupo de G tal que $X \subseteq J$.

Portanto, deduzimos que $J \subseteq H$, $\forall H : H \leq G$ e $X \subseteq H$.

Porém, para todo H subgrupo de G temos que $X \subseteq H$, logo, deduzimos que $J \subseteq \langle X \rangle$.

Portanto, $J = \langle X \rangle$. □

Proposição 1.3.3

A partir das notações da **Definição 1.3.3**, temos que:

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \dots x_n : x_i \in X \cup X^{-1}, n \geq 1\}$$

Demonstração:

Sejam:

$$\dot{X} \stackrel{def}{=} \bigcap \{H : H \leq G \text{ e } X \subseteq H\}$$

$$\bar{X} \stackrel{def}{=} \{x_1 x_2 \dots x_n : x_i \in X \cup X^{-1}, n \geq 1\}$$

Queremos mostrar que: $\dot{X} = \bar{X}$.

Realizemos, primeiramente, algumas convenções de notação:

$$\bar{x}_p \stackrel{def}{=} x_1 x_2 \dots x_p, p \in \mathbb{Z}_+^*$$

$$\bar{x}_p^{-1} \stackrel{def}{=} x_1^{-1}x_2^{-1}\dots x_p^{-1}, p \in \mathbb{Z}_+^*$$

É evidente que $\bar{x}_p, \bar{x}_p^{-1} \in \bar{X}$. Assim como $\bar{x}_p\bar{x}_p^{-1} \in \bar{X}$, o que nos mostra que $\bar{X} \leq G$.

Mostremos que $\dot{X} \subseteq \bar{X}$:

Sabemos que:

$$\bar{X} = \{\bar{x}_p : x_i \in X \cup X^{-1}, p \in \mathbb{Z}_+^* \text{ e } 1 \leq i \leq p\}$$

Evidentemente temos que:

$$\forall x \in X \implies x \in \bar{X}$$

Uma vez que $\bar{X} \leq G$, temos diretamente que $\dot{X} \subseteq \bar{X}$.

Isso se dá pelo fato de que \dot{X} é o menor subgrupo de G contendo X , e, como \bar{X} é um subgrupo de G contendo X , realizamos tal dedução.

Mostremos agora que $\bar{X} \subseteq \dot{X}$:

Seja $H \leq G$ tal que:

$$H \leq G \text{ e } X \subseteq H.$$

Ora, temos evidentemente que:

$$\forall \bar{x}_p \in \bar{X} \implies \bar{x}_p \in H.$$

Logo:

$$\bar{x}_p \in H \implies \bar{x}_p \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Onde I é um conjunto não-vazio de índices.

Evidentemente temos então que $\bar{x}_p \in \dot{X}$.

Logo, $\bar{X} \subseteq \dot{X}$.

Portanto, mostramos que: $\bar{X} = \dot{X}$.

□

Exemplo 1.3.6

Seja o grupo (\mathbb{R}^*, \cdot) e o subconjunto $E \subset \mathbb{R}^*$ tal que $E = \{2\}$. O subgrupo gerado por E é, portanto, $H = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

De forma genérica, para um grupo G e um elemento $a \in G$, temos: $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

De forma geral, dado um grupo G , para determinarmos um subgrupo H gerado por um subconjunto X devemos provar os seguintes pontos:

1. H é um subgrupo de G
2. $X \subset H$
3. Se H' é um outro subgrupo tal que $X \subset H'$, então $H \subset H'$

Definição 1.3.4

Seja G um grupo. G é chamado de **grupo cíclico** quando ele pode ser gerado por um único elemento $x \in G$.

Exemplo 1.3.7

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle, \mathbb{U} = \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle.$$

Proposição 1.3.4

Se G é um grupo cíclico, então G é um grupo abeliano.

Demonstração:

Seja $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$. Podemos representar G como:

$$G = \{ \dots, (a^{-1})^r, \dots, (a^{-1})^2, a^{-1}, e, a, a^2, \dots, a^r, \dots \}$$

Onde $r \in \mathbb{Z}$.

Sejam $(x, y) \in G \times G$, queremos mostrar que $x \cdot y = y \cdot x$.

Sabemos que:

$$x = a^{r_1}, r_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y = a^{r_2}, r_2 \in \mathbb{Z}$$

Logo:

$$x \cdot y = a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \stackrel{(*)}{=} a^{r_2+r_1} = a^{r_2} \cdot a^{r_1} = y \cdot x$$

(*) : deduz-se que $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ pois estamos trabalhando dentro do grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$.

Portanto, G é um grupo abeliano. □

Definição 1.3.5

Definimos $\langle \{xyx^{-1}y^{-1} | (x, y) \in G \times G\} \rangle$ como o subgrupo dos comutadores do grupo G . Denotaremos-o por G' .

Definição 1.3.6

Seja (G, \cdot) um grupo. Definimos **ordem do grupo** (G, \cdot) a **quantidade de elementos no conjunto** G e a denotamos por $|G|$.

Se $\alpha \in G$, a **ordem de α** é a **ordem do subgrupo gerado por α** , denotada por $\mathcal{O}(\alpha)$, isto é, $\mathcal{O}(\alpha) = |\langle \alpha \rangle|$.

Exemplo 1.3.8

$$|\mathbb{Z}| = \infty, |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n, |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1, |S_n| = n!$$

Proposição 1.3.5

Seja G um grupo finito e α um elemento de G .
Logo, $\mathcal{O}(\alpha) < \infty$.

Demonstração:

Provemos a **Proposição 1.3.5** via absurdo.

Suponha que $\mathcal{O}(\alpha)$ seja não finito, logo podemos gerar n valores distintos a partir de potências de α , onde $n \in \mathbb{Z}$.

Ora, a partir da geração de infinitos valores distintos de potências de α , sabemos que, para dado valor inteiro k , teremos $\alpha^k \notin G$. Ora, mas $\langle \alpha \rangle$ é um subgrupo de G . Absurdo.

Portanto, temos que $\mathcal{O}(\alpha) < \infty$. □

Proposição 1.3.6

Seja G um grupo e α um elemento de G . Então, as seguintes proposições são equivalentes:

- (i) A ordem $\mathcal{O}(\alpha)$ é finita. Isto é, $\mathcal{O}(\alpha) < \infty$;
- (ii) $\exists t \in \mathbb{Z}_+^* : \alpha^t = e$, onde $t = \min \{k \in G : k > 0\}$.

Demonstração:

Queremos provar que: $(i) \iff (ii)$.

Começamos provando a implicação $(i) \implies (ii)$:

Temos, por definição, que $\langle \alpha \rangle = \{\alpha^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Como $\mathcal{O}(\alpha) < \infty$, temos que $\exists p, q \in \mathbb{Z} : p > q$ e $\alpha^p = \alpha^q$.

Deduzimos diretamente que: $\alpha^{p-q} = e$. Como $p-q \in \mathbb{Z}_+^*$, mostramos $(i) \implies (ii)$.

Note que a escolha do valor $p-q$ ocorre sem perda de generalidade, uma vez que o conjunto \mathbb{Z}_+^* é enumerável e sempre podemos garantir a minimalidade de $p-q$.

Provemos $(ii) \implies (i)$:

Ora, a partir de (ii) sabemos que $\langle \alpha \rangle$ é finito e, pela minimalidade de t , sua ordem é igual à t .

Portanto, a partir da **Proposição 1.3.5** temos diretamente que $\mathcal{O}(\alpha) < \infty$.

Portanto, com isso, mostramos que $(ii) \implies (i)$ e, conseqüentemente, mostramos $(i) \iff (ii)$. □

1.4 Teorema de Lagrange**Definição 1.4.1**

Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Definimos **classe lateral à esquerda de H em G que contém x** o subconjunto xH de G tal que $\forall x \in G$:

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

Analogamente definimos **classe lateral à direita de H em G que contém**

x o subconjunto Hx de G tal que $\forall x \in G$:

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

Observações:

- As classes laterais de G não são necessariamente subgrupos de G ;
- Quando não houver confusão possível, podemos denominar as classes laterais à esquerda/direita de H em G que contém x como simplesmente: classe lateral à esquerda/direita de H .

Definição 1.4.2

A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda ou à direita é definida como o **índice de H em G** , e será denotada por $[G : H]$.

Observação: note que o número de classes laterais à direita de H é igual ao número de classes laterais à esquerda de H (por mais que as classes laterais sejam diferentes).

Isto se dá pelo fato de que a função:

$$\begin{aligned} \phi : \{ \text{classes lat. à esquerda} \} &\rightarrow \{ \text{classes lat. à direita} \} \\ xH &\mapsto Hx^{-1} \end{aligned}$$

é claramente uma bijeção.

Teorema 1.4.1

Teorema de Lagrange (Grupos)

Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G .
Logo, $|H|$ divide $|G|$.

Demonstração:

Seja $x \in G \setminus H$, consideremos o conjunto das classes laterais à esquerda de H :

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

Mostremos que $H \cap xH = \emptyset$:

Supondo $\alpha \in H \cap xH$:

$$\alpha \in H \cap xH \iff \alpha = xh \in H.$$

Como $\alpha = xh \in H$, logo $\exists h^{-1} \in H$ tal que $hh^{-1} \in H$

Portanto:

$$\alpha h^{-1} = xhh^{-1} \in H \iff x \in H \implies \text{Absurdo, pois } x \in G \setminus H.$$

Logo, $H \cap xH = \emptyset$.

Agora mostremos que $\text{Card}(xH) = |H|$:

Seja ζ a função definida abaixo:

$$\begin{aligned} \zeta : H &\rightarrow xH \\ h &\mapsto xh \end{aligned}$$

A função ζ é claramente sobrejetiva por definição.
 ζ também é injetiva pois se $(xh_1, xh_2) \in (xH)^2$:

$$xh_1 = xh_2 \implies x^{-1}xh_1 = x^{-1}xh_2 \implies h_1 = h_2.$$

Portanto, deduzimos que $\text{Card}(xH) = |H|$.

Consideremos agora o conjunto yH das classes laterais à esquerda de H em G que contém y tal que $y \notin H \cup xH$.

Já mostramos anteriormente que $y \notin H$.

Mostremos que $yH \cap xH = \emptyset$

Supondo $\beta \in yH \cap xH$:

Então β pode ser escrito de duas formas:

$$\beta = yh_1$$

$$\beta = xh_2$$

Logo, temos:

$$yh_1 = xh_2 \implies y = xh_2h_1^{-1} \in xH \implies \text{Absurdo, pois } y \notin H \cup xH.$$

Analogamente ao passo anterior podemos provar que $\text{Card}(yH) = \text{Card}(xH) = |H|$.

Portanto, realizando os passos acima sucessivamente, criamos partições de G .

Como G é finito, o processo terá finalizado após n etapas.

Portanto, temos: $|G| = n|H|$. □

Observações:

1. Segue como consequência direta do **Teorema de Lagrange** que caso G seja um grupo finito e $\alpha \in G$, então $\mathcal{O}(\alpha)$ divide $|G|$.
2. Temos diretamente pela **Definição 1.4.2** que: $|G| = |H|[G : H]$.

Corolário 1.4.1

Seja G um grupo não finito e $H \leq G$.

Então vale o **Teorema de Lagrange**.

Demonstração:

Demonstraremos novamente o **Teorema de Lagrange** de forma que o corolário acima possa ser justificado de forma clara.

Seja G um grupo e $H \leq G$.

Ora, sabemos que:

$$\text{Ou } xH = yH \text{ ou } xH \cap yH = \emptyset, \forall (x, y) \in G \times G.$$

Sabemos também que, sendo I um conjunto não vazio de índices tal que $\text{Card}(I) = [G : H]$:

$$\dot{\bigcup}_{i \in I} x_i H = G.$$

Como $|G|$ é não finito, então se $|H|$ ou $[G : H]$ são não finitos, vale que $|G| = |H||[G : H]|$.

Suponhamos, agora, que $|H| < \infty$ e $[G : H] < \infty$.

Como $[G : H] < \infty$, então $|I| < \infty$.

Logo, podemos escrever I como:

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo:

$$G = \bigcup_{i_1 \leq i \leq n} x_i H.$$

Portanto, podemos escrever:

$$|G| = \sum_{k=1}^n |x_{i_k} H|.$$

Ora, deduzimos na demonstração do **Teorema de Lagrange** que $|xH| = |H|$, $\forall x \in G$.

Portanto temos que:

$$|G| = n|H|.$$

Ora, mas $|G|$ é não finito e $|H| < \infty$. Absurdo !

Portanto, deduzimos que $|H|$ ou $[G : H]$ são não finitos.

Assim, provamos que o **Teorema de Lagrange** vale também para $|G|$ não finito. Isto é:

$$|G| = |H|[G : H].$$

□

Proposição 1.4.1

Seja G um grupo finito de ordem $p \in \mathbb{N}^*$.

Se p for primo, então G é um grupo cíclico.

Demonstração:

Pelo Teorema de Lagrange sabemos que se H é subgrupo de um grupo finito G , então $|H|$ divide $|G|$.

Como $|G| = p$ primo, então os únicos subgrupos possíveis de G são seus subgrupos triviais.

Seja $x \in G$ tal que $x \neq e$, onde e é o elemento neutro de G .

Logo, o único subgrupo gerado por x é o próprio G , $\langle x \rangle = G$

□

*Observação: como visto na **Proposição 1.3.2**, G também é abeliano!*

Teorema 1.4.2

Teorema de Euler (Grupos)

Seja (G, \cdot) um grupo finito tal que $|G| = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$\forall g \in G, g^n = 1.$$

Demonstração:

Seja g um elemento do grupo finito G . Sabemos que $\langle g \rangle \leq G$. Sabemos também, pelo **Teorema de Lagrange** que $\mathcal{O}(g)$ divide a ordem de G .

Ora, podemos então escrever:

$$|G| = k\mathcal{O}(g), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Porém, pela **Proposição 1.3.6**, deduzimos:

$$g^n = g^{|G|} = g^{k\mathcal{O}(g)} = (g^{\mathcal{O}(g)})^k = e^k = e$$

Ora, demonstramos, com o argumento acima, sem perda de generalidade, tal fato para qualquer elemento de G . □

Teorema 1.4.3**Pequeno Teorema de Fermat**

Seja p um número primo e $a \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, então:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Demonstração:

O **Pequeno Teorema de Fermat** é evidentemente o caso específico do **Teorema de Euler** em que $(G, \cdot) = ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \odot)$. □

Proposição 1.4.2

Seja G um grupo e sejam $K < H < G$.
Logo $[G : K] = [G : H][H : K]$.

Demonstração:

Basta aplicar sucessivamente o **Teorema de Lagrange**:

$$\begin{array}{lll} H < G & \Rightarrow & |G| = |H| \cdot [G : H] \quad \text{(I)} \\ K < H & \Rightarrow & |H| = |K| \cdot [H : K] \quad \text{(II)} \\ K < G & \Rightarrow & |G| = |K| \cdot [G : K] \quad \text{(III)} \end{array}$$

Combinando as expressões (I) e (II), obtemos:

$$|G| = |K| \cdot [H : K] \cdot [G : H] = |K| \cdot [G : K]$$

Portanto:

$$[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$$

□

1.5 Grupos Quocientes

Definição 1.5.1

Seja G um grupo e $H \leq G$.

Chamamos de **conjunto quociente** o conjunto G/H (ou $\frac{G}{H}$) **cujos elementos são as classes laterais à esquerda (ou à direita) de H em G .**

Observação: decorre da definição acima que $|G/H| = [G : H]$.

Definição 1.5.2

Seja G um grupo e $H \leq G$.

Definimos a seguinte operação entre as classes laterais à esquerda de H em G :

$$\bullet : \begin{array}{l} G/H \times G/H \rightarrow G/H \\ (xH, yH) \mapsto xyH \end{array}$$

Observações:

- Note que, por convenção, estamos tratando das classes laterais à esquerda de H em G . Entretanto, a definição é válida para classes laterais à direita também.
- A operação definida é uma **lei de composição interna** por construção.
- Não mostramos ainda que a operação está de fato bem definida, isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1H, y_1H) \in G/H \times G/H \\ (x_2H, y_2H) \in G/H \times G/H \end{array} \right.$$

$$\text{Se } (x_1H, y_1H) = (x_2H, y_2H) \implies x_1y_1H = x_2y_2H.$$

Tal fato será destacado na **Proposição 1.5.1**.

Proposição 1.5.1

Seja G um grupo e $H \leq G$.

As afirmações a seguir são equivalentes:

- (i) A operação definida na **Definição 1.5.2** está bem definida;
- (ii) $gHg^{-1} \subseteq H, \forall g \in G$;
- (iii) $gHg^{-1} = H, \forall g \in G$;
- (iv) $gH = Hg, \forall g \in G$.

Demonstração:

Mostremos as equivalências:

$$(i) \iff (ii) \quad (\text{I})$$

$$(ii) \iff (iii) \quad (\text{II})$$

$$(iii) \iff (iv) \quad (III)$$

Começamos mostrando a equivalência (I):

Ora, perceba que para $(x, y) \in G \times G$ e $(h, h') \in H \times H$, temos que:

x e xh são representantes distintos para a mesma classe lateral xH .

y e yh' são representantes distintos para a mesma classe lateral yH .

Portanto, podemos deduzir que a operação " \bullet " definida na **Definição 1.5.2** só estará bem definida se, e somente se:

$$xyH = xhyh'H, \forall (x, y) \in G \times G \text{ e } \forall (h, h') \in H \times H.$$

Logo:

$$xyH = xhyh'H \iff y^{-1}x^{-1}xyH = y^{-1}x^{-1}xhyh'H \iff H = y^{-1}hyh'H.$$

Ora, mas isso é equivalente à dizer que a operação só estará bem definida se, e somente se:

$$ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, \forall h \in H.$$

Com isso mostramos a equivalência (I).

Mostremos a equivalência (II):

Para a implicação $(ii) \implies (iii)$ mostremos que:

$$gHg^{-1} \subseteq H \implies H \subseteq gHg^{-1}, \forall g \in G.$$

Ora, temos diretamente da hipótese:

$$gHg^{-1} \subseteq H \implies g^{-1}Hg \subseteq H \implies g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

$$\implies H \subseteq gHg^{-1}$$

Logo, podemos concluir que:

$$gHg^{-1} \subseteq H \implies H = gHg^{-1}.$$

A implicação $(iii) \implies (ii)$ é evidente.

Com isso mostramos a equivalência (II).

Mostremos a equivalência (III):

$$gHg^{-1} = H \iff gHg^{-1}g = Hg \iff gH = Hg.$$

Assim mostramos a equivalência (III).

Tendo mostrado as equivalências (I), (II) e (III), mostramos que todas as afirmações são duas a duas equivalentes. □

Definição 1.5.3

Um subgrupo H é um **subgrupo normal** de G caso ele satisfaça as afirmações equivalentes da **Proposição 1.5.1**.

Neste caso, denotamos:

$$H \trianglelefteq G$$

Observações:

- Note que caso $H \trianglelefteq G$ então as classes laterais à esquerda e à direita de H são iguais;
- Denotamos $H \triangleleft G$ se H é um **subgrupo normal próprio** de G .
- De forma geral quando queremos mostrar que um subgrupo H é subgrupo normal de um grupo G , mostramos que $ghg^{-1} \in H$.

Exemplo 1.5.1

G e $\{e\}$ (subgrupos triviais de G) são claramente subgrupos normais de G .

Exemplo 1.5.2

Seja G um grupo e $Z(G)$ o centro de G . Logo, $Z(G) \trianglelefteq G$.

Demonstração:

Já mostramos anteriormente que $Z(G) \leq G$.

Para mostrar que $Z(G) \trianglelefteq G$ basta mostrar que:

$$\forall (g, z) \in G \times Z(G) \implies gzg^{-1} \in Z(G)$$

Ora, mas pela própria definição de centro (todos elementos de G que comutam entre si), sabemos que:

$$\text{Se } z \in Z(G) \implies zg = gz, \forall g \in G.$$

Logo:

$$gzg^{-1} = zgg^{-1} = z \in Z(G).$$

□

Observações:

- De forma geral, é evidente que se $H \leq Z(G)$, então $H \trianglelefteq G$;
- Isso equivale ainda a dizer que se G é um grupo abeliano, então todos seus subgrupos são normais.

Exemplo 1.5.3

Seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Temos que $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$

Demonstração:

Sabemos que $SL_n(\mathbb{K}) \leq GL_n(\mathbb{K})$, mostremos portanto que:

$$GSG^{-1} \in SL_n(\mathbb{K}), \forall (G, S) \in GL_n(\mathbb{K}) \times SL_n(\mathbb{K})$$

Ora, sabemos que $\det(G) \neq 0$ e que $\det(G^{-1}) = \det(G)^{-1}$, $\forall G \in GL_n(\mathbb{K})$.
Portanto:

$$\begin{aligned} \det(GSG^{-1}) &= \det(G)\det(S)\det(G^{-1}) = \det(G)\det(S)\det(G)^{-1} = \\ &= \det(G)\det(G)^{-1}\det(S) = \det(S) = 1 \implies GSG^{-1} \in SL_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Isto é,

$$SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$$

□

Definição 1.5.4

Seja G um grupo não-trivial.

Chamamos G de grupo simples caso seus únicos subgrupos normais sejam $\{e\}$ e G .

Isto é, caso seus únicos subgrupos normais sejam os subgrupos triviais.

Proposição 1.5.2

Seja G um grupo e $H \leq G$.

Se $[G : H] = 2$, então $H \trianglelefteq G$.

Demonstração:

Mostremos que $gH = Hg, \forall g \in G$.

Demonstremos por disjunção de casos:

Caso $g \in H$. Logo:

$$gH = H = Hg$$

Caso $g \notin H$. Logo:

Como $[G : H] = 2$, temos de imediato:

$$G/H = \{H, gH\}$$

Logo:

$$G = H \dot{\cup} gH = H \dot{\cup} Hg$$

Portanto, deduzimos de imediato que:

$$gH = Hg$$

Logo: $H \trianglelefteq G$.

□

Definição 1.5.5

Sejam G um grupo e $A, B \leq G$. Definimos o conjunto AB da seguinte forma:

$$AB = \{ab, a \in A, b \in B\}.$$

Observação:

Note que o conjunto AB não necessariamente é um grupo mesmo que A e B o sejam.

Note, por exemplo, o caso do grupo S_3 :

$$A, B \leq S_3, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Note que A e B são de fato subgrupos de S_3 , pois:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = e,$$

$$e, \sigma, \sigma^{-1} = \sigma \in A \implies A \leq S_3.$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = e,$$

$$e, \tau, \tau^{-1} = \tau \in B \implies B \leq S_3.$$

Temos que o conjunto AB é dado por:

$$AB = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ora, mas temos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \notin AB$$

Proposição 1.5.3

Seja G um grupo e $H, K \leq G$. Logo:

$$HK \text{ é um subgrupo de } G \iff HK = KH.$$

Demonstração:

Mostremos a implicação (\implies):

Seja HK um subgrupo de G .

Logo, temos que:

$$HK = (HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH$$

Mostremos, agora, a implicação (\Leftarrow):

Seja $HK = KH$, mostremos que $HK \leq G$.

Para mostrar que $HK \leq G$ é suficiente mostrar que:

$$(HK)(HK) = HK$$

$$(HK)^{-1} = HK$$

Note que essa é uma forma diferente, porém equivalente, de enunciar a **Proposição 1.3.1**.

Ora, temos diretamente que:

$$(HK)(HK) = H(KH)K = H(HK)K = (HH)(KK) = HK$$

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1} = KH = HK$$

Com isso mostramos a proposição. □

Proposição 1.5.4

Seja G um grupo e $H, K \leq G$. Se $H \trianglelefteq G$ ou $K \trianglelefteq G$, então $HK \leq G$.

Demonstração:

Sejam $H, K \leq G$. Tomemos H como subgrupo normal de G e mostremos, sem perda de generalidade, que $HK \leq G$.

Para mostrarmos que $HK \leq G$ é suficiente mostrar que a operação de HK é uma lei de composição interna em HK e que para todo elemento de HK , existe elemento inverso.

Note, primeiramente, que HK é não vazio, uma vez que $H, K \leq G$.

Sejam $a, b \in HK$, mostremos que $ab \in HK$.

Ora, se $a, b \in HK$, então:

$$a = hk, \quad h \in H, \quad k \in K$$

$$b = h'k', \quad h' \in H, \quad k' \in K$$

Portanto, temos que:

$$ab = hkh'k' = hkh'k^{-1}kk' = (h \underbrace{kh'k^{-1}}_{\in H})(kk') \in HK$$

Mostremos, agora, que para $a \in HK$, $\exists a^{-1} \in HK$.

Ora, como $a \in HK$, então analogamente ao passo anterior temos que:

$$a = hk, \quad h \in H, \quad k \in K$$

Portanto:

$$a^{-1} = k^{-1}h^{-1} = k^{-1}h^{-1}kk^{-1} = (\underbrace{k^{-1}h^{-1}k}_{\in H})(k^{-1}) \in HK$$

Portanto, mostramos que $HK \leq G$. □

Proposição 1.5.5

Seja G um grupo e $H, K \trianglelefteq G$. Então $HK \trianglelefteq G$.

Demonstração:

Sabemos a partir do **Proposição 1.5.4** que se $H \trianglelefteq G$ ou $K \trianglelefteq G$, temos que $HK \leq G$.

Mostremos que se $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G$, temos $HK \trianglelefteq G$.

Para isso, é suficiente mostrarmos que $gHKg^{-1} \in HK$.

Ora, como $H, K \trianglelefteq G$, temos:

$$gHKg^{-1} = gHg^{-1}gKg^{-1} = \underbrace{(gHg^{-1})}_{\in H} \underbrace{(gKg^{-1})}_{\in K} \in HK$$

□

Proposição 1.5.6

Seja G um grupo finito e $H, K \leq G$. Então:

$$\text{Card}(HK) = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

Demonstração:

□

Proposição 1.5.7

Seja G um grupo e $H, K \leq G$ tal que $HK \leq G$. Então:

$$[HK : K] = [H : H \cap K]$$

Demonstração:

□

Definição 1.5.6

Seja G um grupo e $H \trianglelefteq G$.

Então $(G/H, \bullet)$ é um grupo chamado de grupo quociente.

Demonstração:

Mostremos que $(G/H, \bullet)$ é de fato um grupo.

Ora, pela **Definição 1.5.2** sabemos que a operação " \bullet " é uma lei de composição interna por construção. Sabemos também, pela **Proposição 1.5.1** que caso $H \trianglelefteq G$, então " \bullet " está bem definida.

Nos resta mostrar que $(G/H, \bullet)$ satisfaz os axiomas de grupo.

De fato, G/H é associativo em relação à operação " \bullet " pois:

Sejam $xH, yH, zH \in G/H$, temos:

$$(xH \bullet yH) \bullet zH = (xy)H \bullet zH = (xy)zH \stackrel{(*)}{=} x(yz)H = xH \bullet (yH \bullet zH).$$

Também temos evidentemente que o elemento neutro é dado por $H \in G/H$.
Ora, seja $xH \in G/H$, temos evidentemente:

$$xH \bullet H = xH = H \bullet xH.$$

Por fim, temos que para dado $xH \in G/H$, seu elemento inverso é dado por $x^{-1}H \in G/H$.

De fato:

$$xH \bullet x^{-1}H = xx^{-1}H = H = x^{-1}xH = x^{-1}H \bullet xH.$$

Portanto, $(G/H, \bullet)$ é de fato um grupo. □

Observação: muitas vezes iremos denotar $\bar{x} \stackrel{def}{=} xH$ para elementos de G/H por uma questão de simplificação de escrita.

Exemplo 1.5.4

O grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo quociente formado pelo quociente entre \mathbb{Z} e $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$.

Proposição 1.5.8

Seja G um grupo e $Z(G)$ seu centro.
Se o grupo $G/Z(G)$ for cíclico, então $G = Z(G)$.

Demonstração:

Seja $G/Z(G)$ um grupo cíclico.

Mostremos que $G = Z(G)$, isto é, que G é um grupo abeliano.

Como $G/Z(G)$ é cíclico, então existe $x \in G/Z(G)$ tal que $\langle x \rangle = G$.

Portanto, sabemos que, para determinado inteiro $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$gz' = x^k, \quad (g, z') \in G \times Z(G)$$

Podemos reescrever a expressão acima como:

$$g = x^k z, \quad (g, z) \in G \times Z(G)$$

Tomemos $g_1, g_2 \in G$ tal que:

$$g_1 \stackrel{def}{=} x^{k_1} z_1, \quad (k_1, z_1) \in \mathbb{Z} \times Z(G)$$

$$g_2 \stackrel{def}{=} x^{k_2} z_2, \quad (k_2, z_2) \in \mathbb{Z} \times Z(G)$$

Portanto temos:

$$g_1 g_2 = x^{k_1} z_1 x^{k_2} z_2 = x^{k_1+k_2} z_1 z_2 = x^{k_2} x^{k_1} z_1 z_2 = x^{k_2} z_2 x^{k_1} z_1 = g_2 g_1.$$

Isso se dá pelo fato de qualquer elemento de $z \in Z(G)$ comutar com elementos de G e, portanto, elementos de $G/Z(G)$.

Com isso, mostramos que G é um grupo abeliano e, portanto, $G = Z(G)$. □

1.6 Homomorfismos de Grupos

Definição 1.6.1

Sejam (G, \cdot) e $(\mathcal{G}, *)$ dois grupos. Uma função $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ é chamada de **homomorfismo de grupos** se:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b), \quad \forall a, b \in G$$

Observações:

Note que, se $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ for um homomorfismo de grupos, então:

1. $\varphi(e_G) = e_{\mathcal{G}}$;
2. $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

De fato, note que, para o item 1., temos que:

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G \cdot e_G) = \varphi(e_G) * \varphi(e_G) \implies \varphi(e_G) = e_{\mathcal{G}}$$

E para o item 2., temos:

$$e_{\mathcal{G}} = \varphi(e_G) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1}) \implies \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

* Note também que muitas vezes as operações de G e de \mathcal{G} serão confundidas para fins de simplificação, isto é: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Definição 1.6.2

Sejam G e \mathcal{G} dois grupos. Definimos $\text{Hom}(G, \mathcal{G})$ como o **conjunto de todos os homomorfismos de G em \mathcal{G}** .

Exemplo 1.6.1

$\text{Id} : (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot)$, $\text{Id}(g) = g$ é um homomorfismo chamado *identidade*.

Exemplo 1.6.2

$e : G \rightarrow \mathcal{G}$, $e(g) = e_{\mathcal{G}}$, $\forall g \in G$, é um homomorfismo chamado *homomorfismo trivial*.

Exemplo 1.6.3

A função:

$$\det : \begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^* \\ A \mapsto \det(A) \end{cases}$$

é um homomorfismo de grupos, pois sabemos que $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ temos:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Exemplo 1.6.4

Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$, logo a função:

$$\pi: \begin{cases} G \rightarrow G/N \\ x \mapsto xN \end{cases}$$

é um homomorfismo chamado de *projeção canônica*.

Demonstração:

Sejam $x, y \in G$, ora:

$$\pi(xy) = xyN = xN \bullet yN = \pi(x) \bullet \pi(y).$$

□

Exemplo 1.6.5

Seja $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ munido da operação \heartsuit definida por:

$$\begin{aligned} (a, b) \heartsuit (a', b') &= (aa', b + b'), \\ (a, b), (a', b') &\in G \end{aligned}$$

A função:

$$\spadesuit: \begin{cases} (G, \heartsuit) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) \\ (r, \theta) \mapsto re^{i\theta} \end{cases}$$

é um homomorfismo de grupos, onde e é o número de Euler, $i^2 = -1$ e:

$$e^{i\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \theta + i \sin \theta, \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

Mostremos primeiramente que (G, \heartsuit) é de fato um grupo.

Por construção temos diretamente que \heartsuit é uma lei de composição interna em G .

Também sabemos que, pelo fato de \mathbb{R}_+^* ser um grupo com o produto usual e \mathbb{R} ser um grupo com a adição usual, temos diretamente que a dupla formada pela operação \heartsuit é um grupo.

Portanto, mostramos que (G, \heartsuit) é de fato um grupo.

Mostremos que \spadesuit é um homomorfismo de grupos.

Note, primeiramente, que \spadesuit é claramente uma função de G em \mathbb{C}^* .

Sejam $(r, \theta), (r', \theta') \in G$, temos que:

$$\spadesuit((r, \theta) \heartsuit (r', \theta')) = \spadesuit(rr', \theta + \theta') = rr' e^{i(\theta + \theta')} = \spadesuit(r, \theta) \cdot \spadesuit(r', \theta')$$

Logo, \spadesuit é de fato um homomorfismo de grupos.

□

Definição 1.6.3

Definimos o **núcleo de um homomorfismo** φ o subconjunto $\ker \varphi \subseteq G$, tal que:

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G, \varphi(x) = e_G\}.$$

Proposição 1.6.1

O núcleo de um homomorfismo φ é um subgrupo normal de G .

Demonstração:

Note, primeiramente, que $\ker \varphi$ é não-vazio, uma vez que sempre teremos $\varphi(e_G) = e_G$.

Mostremos, portanto, que $\ker \varphi \leq G$.

Para isso, mostremos que $x, y \in \ker \varphi \implies xy^{-1} \in \ker \varphi$.

Sejam $x, y \in \ker \varphi$, temos:

$$\varphi(x \cdot y^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(y^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(y)^{-1} = e_G * e_G = e_G;$$

Deduzimos que $\ker \varphi \leq G$, mostremos, por fim, que $\ker \varphi \trianglelefteq G$:

Sejam $g, x \in G \times \ker \varphi$, mostremos que $gxg^{-1} \in \ker \varphi$.

$$\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(x) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * e_G * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) * \varphi(g)^{-1} = e_G.$$

Portanto, deduzimos que:

$$\ker \varphi \trianglelefteq G$$

□

Exemplo 1.6.6

Seja $n \in \mathbb{N}^*$. O núcleo do homomorfismo

$$\det : GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*, \quad A \mapsto \det(A)$$

é dado por

$$\ker(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}), \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K}).$$

Definição 1.6.4

Definimos a **imagem de um homomorfismo** φ o subconjunto $\text{Im } \varphi \subseteq \mathcal{G}$ tal que:

$$\text{Im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathcal{G} \mid \exists x \in G, y = \varphi(x)\}$$

Proposição 1.6.2

A imagem de um homomorfismo φ é um subgrupo de \mathcal{G} .

Demonstração:

Note, primeiramente, que $\text{Im } \varphi$ é não vazio uma vez que $e_G \in \text{Im } \varphi$.

Mostremos agora que $\forall x, y \in \text{Im } \varphi, xy^{-1} \in \text{Im } \varphi$:

Temos que:

$$x, y \in \text{Im } \varphi \implies \exists a, b \in G, x = \varphi(a) \text{ e } y = \varphi(b)$$

Ora, mas então temos:

$$\exists b^{-1} \in G \implies y^{-1} = \varphi(b^{-1}) = \varphi(b)^{-1}$$

Também temos que:

$$ab^{-1} \in G, \text{ logo, } \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = xy^{-1}$$

Portanto, via a definição de imagem de um homomorfismo de grupos deduzimos que:

$$xy^{-1} \in \text{Im } \varphi$$

Logo, mostramos que $\text{Im } \varphi \leq G$.

□

Proposição 1.6.3

Sejam G e \mathcal{G} grupos tais que a função $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ define um homomorfismo de grupos. Logo:

$$\ker \varphi = \{e_G\} \iff \varphi \text{ injetiva.}$$

Demonstração:

Mostremos a implicação (\Rightarrow):

Para mostrar que φ é injetiva, é necessário mostrar a seguinte implicação:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \implies x = y, \forall x, y \in G$$

Suponhamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$, logo:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \implies \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e_G \implies \varphi(x)\varphi(y^{-1}) = e_G \implies \varphi(xy^{-1}) = e_G$$

Deduzimos, portanto, que $xy^{-1} \in \ker \varphi$.

Ora, por hipótese, temos que $\ker \varphi = \{e_G\}$, logo deduzimos que:

$$x = y$$

Portanto, concluímos que φ é injetiva.

Mostremos a implicação (\Leftarrow):

Agora, supondo que φ é injetiva, mostremos que $\ker \varphi = \{e_G\}$.

Para mostrar que $\ker \varphi = \{e_G\}$ é necessário mostrar:

$$\text{Se } \varphi(x) = e_G \implies x = e_G, \forall x \in G$$

Sabemos que $\varphi(e_G) = e_G$.

Suponha que $\varphi(x) = e_G$, para $x \in G$.

Porém, sabemos que φ é injetiva, logo:

$$\varphi(x) = \varphi(e_G) \implies x = e_G$$

Logo, concluímos que:

$$\ker \varphi = \{e_G\}$$

□

Proposição 1.6.4

Sejam $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ e $\xi : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ homomorfismos de grupos. Logo, $(\xi \circ \varphi) : G \rightarrow \mathfrak{G}$ é um homomorfismo de grupos.

Demonstração:

Sejam $a, b \in G$.

Queremos mostrar que:

$$(\xi \circ \varphi)(ab) = (\xi \circ \varphi)(a)(\xi \circ \varphi)(b)$$

Sabemos que φ e ξ são homomorfismos de grupos, portanto:

$$(\xi \circ \varphi)(ab) = \xi(\varphi(ab)) = \xi(\varphi(a)\varphi(b)) = \xi(\varphi(a))\xi(\varphi(b)) = (\xi \circ \varphi)(a)(\xi \circ \varphi)(b)$$

Portanto, mostramos que $(\xi \circ \varphi)$ é de fato um homomorfismo de grupos.

□

Definição 1.6.5

Sejam G e \mathcal{G} grupos. Um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ é **chamado de isomorfismo de grupos se φ é bijetivo**.

Caso φ seja um isomorfismo, dizemos que G e \mathcal{G} são **isomorfos** e denotamos-os como:

$$G \cong \mathcal{G}$$

Observação: note que para que dois grupos sejam isomorfos basta mostrar que existe um isomorfismo entre eles.

Exemplo 1.6.7

$(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$, onde $+$ e \cdot denotam as operações usuais de soma e produto, respectivamente, no conjunto \mathbb{R} .

Demonstração:

Seja $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(x)$.

Mostremos que φ é um homomorfismo de grupos bijetivo.

Primeiramente, note que (\mathbb{R}_+^*, \cdot) e $(\mathbb{R}, +)$ são de fato grupos.

Sabemos também que a função:

$$\varphi(x) = \log(x), \quad x \in]0, \infty[= \mathbb{R}_+^*$$

é uma bijeção com imagem igual à \mathbb{R} .

Mostremos que φ é um homomorfismo de grupos.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$\varphi(xy) = \log(xy) = \log(x) + \log(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Logo, deduzimos que φ é um isomorfismo de grupos e, portanto, temos:

$$(\mathbb{R}_+^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$$

□

Proposição 1.6.5

Sejam G e \mathcal{G} grupos tal que $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ é um isomorfismo de grupos. Logo, $\varphi^{-1} : \mathcal{G} \rightarrow G$ é um isomorfismo de grupos.

Demonstração:

Seja $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ um isomorfismo de grupos.

Logo:

$$\forall y \in \mathcal{G}, \exists! x \in G : \varphi(x) = y$$

Portanto, temos que:

$$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(y) \iff x = \varphi^{-1}(y)$$

Dada a bijetividade de φ temos diretamente que φ^{-1} é também uma função bijetiva.

Mostremos que φ^{-1} é de fato um homomorfismo de grupos.

Sejam $x, y \in \mathcal{G}$, mostremos que:

$$\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(xy)$$

Dada a bijetividade de φ , sabemos que existem $a, b \in G$ tais que $\varphi(a) = x$ e $\varphi(b) = y$.

Logo:

$$\varphi^{-1}(xy) = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(ab)) = ab = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)$$

Portanto, $\varphi^{-1} : \mathcal{G} \rightarrow G$ é isomorfismo de grupos.

□

Teorema 1.6.1

Primeiro Teorema dos Isomorfismos

Sejam G e \mathcal{G} grupos tais que $\varphi : G \rightarrow \mathcal{G}$ é um homomorfismo de grupos. Então, a função ψ tal que:

$$\psi : \begin{array}{l} G/\ker \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi \\ g \ker \varphi \mapsto \varphi(g) \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos.

Isto é:

$$\frac{G}{\ker \varphi} \cong \text{Im } \varphi$$

Demonstração:

Mostremos que ψ é uma função bem definida e que se trata de uma função injetiva:

Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in G/\ker \varphi$, temos:

$$\bar{x} = \bar{y} \iff xy^{-1} \in \ker \varphi \iff \varphi(xy^{-1}) = e_G \iff$$

$$\iff \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e_G \iff \varphi(x) = \varphi(y) \iff \psi(\bar{x}) = \psi(\bar{y})$$

Logo, a função ψ está de fato bem definida e é injetiva.

Mostremos que ψ é uma função sobrejetora.

Seja $y \in \text{Im } \varphi$, então:

$$\exists x \in G; \varphi(x) = y$$

Temos, portanto:

$$\psi(\bar{x}) = \varphi(x) = y$$

Logo, ψ é sobrejetora.

Mostremos que ψ é um homomorfismo de grupos.

Primeiramente, note que $G/\ker \varphi$ e $\text{Im } \varphi$ são de fato grupos (já demonstrado).

Sejam $\bar{x}, \bar{y} \in G/\ker \varphi$, logo:

$$\psi(\bar{x}\bar{y}) = \psi(\overline{xy}) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \psi(\bar{x})\psi(\bar{y})$$

Com isso, mostramos que ψ se trata de um isomorfismo de grupos e deduzimos que:

$$\frac{G}{\ker \varphi} \cong \text{Im } \varphi$$

□

Teorema 1.6.2**Segundo Teorema dos Isomorfismos**

Seja G um grupo, $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$. Temos:

$$H \trianglelefteq HK$$

e,

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}$$

Demonstração:

Note que HK é de fato um grupo, pois $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$.

Tal fato foi mostrado na **Proposição 1.5.4**.

Mostremos, primeiramente, que $H \trianglelefteq HK$:

Seja $x \in HK$, logo, é suficiente mostrar que $xHx^{-1} \subseteq H$.

Como $H \trianglelefteq G$, temos que:

$$gH = Hg, \quad \forall g \in G$$

Portanto:

$$xHx^{-1} = Hxx^{-1} = H$$

Logo, deduzimos que $H \trianglelefteq HK$.

Seja φ o homomorfismo de grupos definido a seguir:

$$\varphi : \begin{array}{l} K \rightarrow \frac{HK}{H} \\ k \mapsto xH \end{array}$$

Note que $\frac{HK}{H}$ é de fato um grupo, uma vez que $H \trianglelefteq HK$.

Note também que φ se trata mesmo de um homomorfismo (projeção canônica).

Mostremos que φ é um homomorfismo sobrejetivo.

Tome $x \in \frac{HK}{H}$, logo:

$$x = \underbrace{hk}_{\in HK} H = Hhk = Hk = kH = \varphi(k)$$

Logo, mostramos que φ é sobrejetiva, isto é:

$$\text{Im}(\varphi) = \frac{HK}{H}$$

Mostremos agora que $\ker \varphi = H \cap K$.

Sabemos que, por definição:

$$\ker \varphi = \{k \in K : \varphi(k) = H\}$$

Deduzimos portanto que $k \in \ker \varphi \iff k \in H \cap K$.

Logo, deduzimos que $\ker \varphi = H \cap K$.

Aplicando o **Primeiro Teorema do Isomorfismo** deduzimos diretamente que:

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}$$

□

Teorema 1.6.3

Terceiro Teorema dos Isomorfismos

Seja G um grupo e $H, K \trianglelefteq G$ tal que $K \subseteq H$.

Logo,

$$\frac{H}{K} \trianglelefteq \frac{G}{K}$$

e,

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$$

Demonstração:

Mostremos, primeiramente, que $H/K \trianglelefteq G/K$:

Seja $gK \in G/K$ e $hK \in H/K$, mostremos que $(gK)(hK)(gK)^{-1} \subseteq H/K$:

$$\begin{aligned} (gK)(hK)(gK)^{-1} &= gKhKKg^{-1} = gKhKg^{-1} = ghKKg^{-1} = \\ &= ghKg^{-1} = \underbrace{ghg^{-1}}_{\in H} K \in H/K \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\frac{H}{K} \trianglelefteq \frac{G}{K}$$

Seja a função φ definida a seguir:

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \frac{G}{K} &\rightarrow \frac{G}{H} \\ gK &\mapsto gH \end{aligned}$$

Note que, como $K \subseteq H$, todo elemento de G/K é evidentemente elemento de G/H e a função é bem definida e sobrejetora.

Logo, deduzimos que:

$$\text{Im } \varphi = \frac{G}{H}$$

Mostremos que $\ker \varphi = H/K$:

Por definição, sabemos que:

$$\ker \varphi = \{gK \in G/K : \varphi(gK) = H\}$$

Logo:

$$gK \in \ker \varphi \iff \varphi(gK) = H \iff gH = H \iff g \in H \iff gK \subseteq H/K$$

Concluímos que $\ker \varphi = H/K$.

Portanto, aplicando o **Primeiro Teorema dos Isomorfismos** deduzimos diretamente que:

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$$

□

Definição 1.6.6

Seja G um grupo.

Um **automorfismo** de G é um isomorfismo φ tal que:

$$\varphi : G \rightarrow G$$

Denotamos o **conjunto de todos os automorfismos de G** por $\text{Aut}(G)$.

Proposição 1.6.6

1.7 Produto Direto de Grupos