Homomorfismos de Grupos

Definições, Propriedades e Teoremas de Isomorfismo

Marco Busetti

UTFPR

10 de novembro de 2025

Roteiro

Tabela de Conteúdo

Definição de Homomorfismo

Definição

Sejam $(G, \cdot)$ e $(\mathcal{G}, *)$ dois grupos. Uma função $\varphi : G \to \mathcal{G}$ é chamada de **homomorfismo de grupos** se:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b),\ \forall a, b \in G$$

Definição de Homomorfismo

Definição

Sejam $(G, \cdot)$ e $(\mathcal{G}, *)$ dois grupos. Uma função $\varphi : G \to \mathcal{G}$ é chamada de **homomorfismo de grupos** se:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b), \ \forall a, b \in G$$

Propriedades Imediatas

Se φ é um homomorfismo, então:

1. $\varphi(e_G) = e_{\mathcal{G}}$
2. $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}, \ \forall x \in G$

Exemplos de Homomorfismos

Exemplos Comuns

- **Homomorfismo Trivial:** $\theta : G \to \mathcal{G}$ dado por $\theta(g) = e_{\mathcal{G}}$, $\forall g \in G$.

Exemplos de Homomorfismos

Exemplos Comuns

- **Homomorfismo Trivial:** $\theta : G \to \mathcal{G}$ dado por $\theta(g) = e_{\mathcal{G}}$, $\forall g \in G$.
- **Determinante:** A função $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ é um homomorfismo, pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Exemplos de Homomorfismos

Exemplos Comuns

- **Homomorfismo Trivial:** $\theta : G \to \mathcal{G}$ dado por $\theta(g) = e_{\mathcal{G}}$, $\forall g \in G$.
- **Determinante:** A função $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ é um homomorfismo, pois $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Projeção Canônica:** Se $N \trianglelefteq G$, a função $\pi : G \to G/N$ dada por $\pi(x) = xN$ é um homomorfismo sobrejetivo.

Tabela de Conteúdo

Núcleo de um Homomorfismo

Definição (Núcleo)

Definimos o **núcleo** (ou kernel) de um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ como o subconjunto:

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid \varphi(x) = e_{\mathcal{G}}\}$$

Núcleo de um Homomorfismo

Definição (Núcleo)

Definimos o **núcleo** (ou kernel) de um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ como o subconjunto:

$$\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in G \mid \varphi(x) = e_{\mathcal{G}}\}$$

Proposição Fundamental

O núcleo de um homomorfismo φ é sempre um **subgrupo normal** de G.

$$\ker \varphi \trianglelefteq G$$

Núcleo de um Homomorfismo

Definição (Núcleo)

Definimos o **núcleo** (ou kernel) de um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ como o subconjunto:

$$\ker \varphi \overset{\text{def}}{=} \{x \in G \mid \varphi(x) = e_{\mathcal{G}}\}$$

Proposição Fundamental

O núcleo de um homomorfismo φ é sempre um **subgrupo normal** de G.

$$\ker \varphi \trianglelefteq G$$

Exemplo

Para o homomorfismo $\det : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$:

$$\ker(\det) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K})$$

Imagem de um Homomorfismo

Definição (Imagem)

Definimos a **imagem** de um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ como:

$$\operatorname{Im} \varphi \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathcal{G} \mid \exists x \in G,\, y = \varphi(x)\}$$

Imagem de um Homomorfismo

Definição (Imagem)

Definimos a **imagem** de um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ como:

$$\operatorname{Im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathcal{G} \mid \exists x \in G,\ y = \varphi(x)\}$$

Proposição

A imagem de um homomorfismo φ é sempre um **subgrupo** de $\mathcal{G}$.

$$\operatorname{Im}\varphi \leq \mathcal{G}$$

(Note: A imagem não é, em geral, um subgrupo normal de $\mathcal{G}$.)

Tabela de Conteúdo

Monomorfismos (Homomorfismos Injetivos)

Definição

Um homomorfismo φ que é **injetivo** é chamado de **monomorfismo**.

Monomorfismos (Homomorfismos Injetivos)

Definição

Um homomorfismo φ que é **injetivo** é chamado de **monomorfismo**.

Teste de Injetividade

Um homomorfismo φ é injetivo se, e somente se, seu núcleo contém apenas o elemento neutro:

$$\varphi \text{ é injetiva} \iff \ker\varphi = \{e_G\}$$

Isomorfismos (Grupos "Iguais")

Definição

Um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ é um **isomorfismo** se φ for **bijetivo** (injetivo e sobrejetivo).

Isomorfismos (Grupos "Iguais")

Definição

Um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ é um **isomorfismo** se φ for **bijetivo** (injetivo e sobrejetivo).

Grupos Isomorfos

Se existe um isomorfismo entre G e $\mathcal{G}$, dizemos que os grupos são **isomorfos** e denotamos $G \cong \mathcal{G}$.

Isomorfismos (Grupos "Iguais")

Definição

Um homomorfismo $\varphi : G \to \mathcal{G}$ é um **isomorfismo** se φ for **bijetivo** (injetivo e sobrejetivo).

Grupos Isomorfos

Se existe um isomorfismo entre G e $\mathcal{G}$, dizemos que os grupos são **isomorfos** e denotamos $G \cong \mathcal{G}$.

Exemplo Clássico

$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$

- O isomorfismo pode ser $\varphi(x) = \log(x)$ ou $\psi(x) = e^x$.
- $\varphi(x \cdot y) = \log(xy) = \log(x) + \log(y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

Tabela de Conteúdo

Primeiro Teorema dos Isomorfismos

Teorema

Seja $\varphi : G \to \mathcal{G}$ um homomorfismo de grupos. Então, temos um isomorfismo:

$$\frac{G}{\ker \varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi$$

Primeiro Teorema dos Isomorfismos

Teorema

Seja $\varphi : G \to \mathcal{G}$ um homomorfismo de grupos. Então, temos um isomorfismo:

$$\frac{G}{\ker \varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi$$

Interpretação

- Este é talvez o teorema mais importante da teoria de grupos.
- Ele conecta os dois conceitos centrais que vimos:
  1. **Grupos Quocientes** (via $\ker \varphi$, que é normal)
  2. **Subgrupos** (via $\operatorname{Im} \varphi$)

Segundo Teorema dos Isomorfismos

Seja G um grupo, $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$. Então:

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}$$

Segundo e Terceiro Teoremas

Segundo Teorema dos Isomorfismos

Seja G um grupo, $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$. Então:

$$\frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H}$$

Terceiro Teorema dos Isomorfismos

Seja G um grupo e $H, K \trianglelefteq G$ tal que $K \subseteq H$. Então $H/K \trianglelefteq G/K$ e:

$$\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$$

(Este teorema é sobre "cancelar"o subgrupo K).

Tabela de Conteúdo

Automorfismos

Definição

Um **automorfismo** de G é um isomorfismo $\varphi : G \to G$.

Automorfismos

Definição

Um **automorfismo** de G é um isomorfismo $\varphi : G \to G$.

Grupo de Automorfismos

O conjunto de todos os automorfismos de G, denotado por $\mathrm{Aut}(G)$, forma um grupo sob a operação de composição de funções ($\circ$).

Automorfismos

Definição

Um **automorfismo** de G é um isomorfismo $\varphi : G \to G$.

Grupo de Automorfismos

O conjunto de todos os automorfismos de G, denotado por $\mathrm{Aut}(G)$, forma um grupo sob a operação de composição de funções ($\circ$).

Exemplo: Automorfismo Interno

Para qualquer $g \in G$, a função "conjugação por g":

$$\mathcal{I}_g(x) = gxg^{-1}$$

é um automorfismo de G.

Grupo de Automorfismos Internos

O conjunto de todos os automorfismos internos, $\mathrm{Inn}(G)$, é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Automorfismos Internos e Subgrupos

Grupo de Automorfismos Internos

O conjunto de todos os automorfismos internos, $\mathrm{Inn}(G)$, é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Proposição

O grupo de automorfismos internos é um subgrupo normal do grupo de automorfismos:

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$$

Automorfismos Internos e Subgrupos

Grupo de Automorfismos Internos

O conjunto de todos os automorfismos internos, $\mathrm{Inn}(G)$, é um subgrupo de $\mathrm{Aut}(G)$.

Proposição

O grupo de automorfismos internos é um subgrupo normal do grupo de automorfismos:

$$\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$$

Subgrupos Característicos

Um subgrupo $H \leq G$ é **característico** ($H \trianglelefteq\!\!\!\!\!\lhd\ G$) se ele é invariante por *todos* os automorfismos (não apenas os internos).

- Exemplo: O centro $Z(G)$ é sempre característico.
- $H \trianglelefteq\!\!\!\!\!\lhd\ G \implies H \trianglelefteq G$.

Obrigado!

Dúvidas?

Referências

- GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- Material de IC: *IC Grupos: Iniciação Científica em Teoria de Grupos*
- `https://github.com/MARCOVB5/grupos`