

IC Grupos

Iniciação Científica em Teoria de Grupos

Marco Vieira Buseti

Professor: Francismar Ferreira Lima

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Curitiba, Novembro de 2024

Capítulo 1

Generalidades sobre Grupos

1.1 Operações Binárias

Definição 1.1.1

Sejam G e E conjuntos não-vazios e \oplus uma função tal que:

$$\begin{aligned} \oplus : \quad & G \times G \rightarrow E \\ & (a, b) \mapsto \oplus(a, b) \end{aligned}$$

Definimos a função acima como a **operação binária de dois elementos de G em E** e a escrevemos comumente como: $a \oplus b$.

Exemplo 1.1.1

A adição usual $+$ é uma operação binária de dois elementos de \mathbb{I} em \mathbb{R} . Onde \mathbb{I} denota o conjunto dos números irracionais.

Exemplo 1.1.2

Sejam $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, a função que define a distância cartesiana entre dois pontos a e b :

$$\begin{aligned} \text{dist}(a, b) : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & (a, b) \mapsto \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

representa uma operação binária de dois elementos de \mathbb{R} em \mathbb{R}^+ .

Definição 1.1.2

A partir das notações acima, definimos **lei de composição interna de $G \times G \rightarrow G$ se $E = G$.**

*Observação: caso não haja ambiguidade, denotaremos simplesmente **lei de composição interna em G** para representar a lei de composição interna de $G \times G \rightarrow G$.*

Exemplo 1.1.3

A operação usual $+$ em \mathbb{N} é uma lei de composição interna em \mathbb{N} , ao contrário da operação usual $-$ de \mathbb{N} em \mathbb{Z} .

1.2 Grupos**Definição 1.2.1**

Seja G um conjunto não-vazio. **Dizemos que (G, \cdot) é um grupo** se, e somente se, \cdot é uma lei de composição interna em G tal que:

1. $\exists e \in G, \forall x \in G : x \cdot e = e \cdot x = x;$
2. $\forall x \in G, \exists \hat{x} \in G : x \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot x = e;$
3. $\forall x, y, z \in G : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

Observações:

Levando em consideração as notações acima, temos:

1. Primeiramente, notamos que e e \hat{x} são únicos, uma vez que:

Supondo que existam e e e' pertencentes à G que satisfazem o item 1, temos:

$$x \cdot e = x = x \cdot e' \Rightarrow \hat{x} \cdot x \cdot e = \hat{x} \cdot x \cdot e' \Rightarrow e = e' \quad \square$$

Supondo agora que existam \hat{x} e \hat{x}' que satisfaçam o item 2, temos:

$$\hat{x} \cdot x = e = \hat{x}' \cdot x \Rightarrow \hat{x} \cdot x \cdot \hat{x} = \hat{x}' \cdot x \cdot \hat{x} \Rightarrow \hat{x} \cdot e = \hat{x}' \cdot e \Rightarrow \hat{x} = \hat{x}' \quad \square$$

2. Notamos por convenção x^{-1} no lugar de \hat{x} no **item 2** (dada sua unicidade).
3. Caso $\forall (x, y) \in G \times G : x \cdot y = y \cdot x$, dizemos que G é um grupo *abeliano* (ou *comutativo*).
4. Caso G seja um grupo abeliano, então

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 1.2.1

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{R}^*, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, (\mathbb{C}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}^*, \cdot) são grupos abelianos (onde $+$ e \cdot denotam as operações usuais de adição e produto em \mathbb{C}).

Exemplo 1.2.2

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ define uma estrutura de grupo, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} e $GL_n(\mathbb{K})$ define o conjunto das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas em \mathbb{K} .

Exemplo 1.2.3

Seja A um conjunto não-vazio. Seja

$$\mathcal{P}(f) = \{f : A \rightarrow A \mid f \text{ bijetiva}\}$$

O conjunto das funções f bijetivas de A em A .

$(\mathcal{P}(f), \circ)$ define uma estrutura de grupo, onde \circ representa composição entre funções.

Caso A seja um conjunto finito e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Card}(A) = n$, $\mathcal{P}(f)$ será representado por S_n e será chamado de **grupo simétrico** ou **grupo das permutações**.

Exemplo 1.2.4

Seja a operação " \odot " definida da seguinte maneira em $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, onde $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a \cdot b} \end{aligned}$$

onde " \cdot " indica a operação usual de produto nos inteiros.

Temos que $(\mathbb{Z}^*/p\mathbb{Z}, \odot)$, onde p é um número primo, é um grupo abeliano.

Demonstração:

Para fins de simplificação de notação, nesta demonstração iremos utilizar $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_n$

Começemos demonstrando que de fato temos:

$$\forall (\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \Rightarrow \bar{a} \odot \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$$

Ora

Exemplo 1.2.5

Seja $G =]-1, 1[$, (G, \star) tal que

$$\forall x, y \in G : x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

define um grupo abeliano.

Demonstração:

Provemos primeiramente que $\forall x, y \in G, x \star y \in G$.

Fixando $y \in G$ temos a seguinte função de $x \in G$:

$$f(x) = \frac{x + y}{1 + xy}$$

A função é derivável em G . Tomando sua derivada temos:

$$f'(x) = \frac{1 - y^2}{(1 + xy)^2}$$

Temos evidentemente $\forall (x, y) \in G \times G, f'(x) > 0$.

(De forma simétrica podemos mostrar o mesmo escrevendo f como uma função de y).

Logo, deduzimos que a função f é estritamente crescente.

Portanto:

$$f(-1) < x \star y < f(1) \iff \frac{y-1}{1-y} < x \star y < \frac{1+y}{1+y} \iff -1 < x \star y < 1$$

Logo, provamos que $x \star y \in G$.

Provemos os outros axiomas:

Existência do neutro:

Tomando $y = 0$ temos:

$$x \star 0 = \frac{x + 0}{1 + 0 \cdot x} = x$$

Portanto, deduzimos que o elemento neutro do grupo G é dado por $e = 0$.

Existência do inverso:

Tomando $y = -x$ temos:

$$x \star -x = \frac{x - x}{1 - (-x)x} = 0$$

Portanto, deduzimos que o elemento inverso do grupo G existe e é dado por $x^{-1} = -x$.

Associatividade:

Sejam $x, y, z \in G$, mostremos que $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

Temos:

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= \frac{(x \star y) + z}{1 + (x \star y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + z \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} = \\
&= \frac{x(1 + yz) + (y + z)}{(1 + yz) + x(y + z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = x \star (y \star z)
\end{aligned}$$

Mostrando, assim, a associatividade.

Ainda, temos que o grupo é evidentemente abeliano. \square

1.3 Subgrupos

Definição 1.3.1

Seja (G, \cdot) um grupo. Um subconjunto $H \subseteq G$ é chamado de **subgrupo de G** (denotamos $H \leq G$) se, e somente se, (H, \cdot) é um grupo.

Observação: temos ainda que se $H \subset G$, temos então H é chamado de *subgrupo próprio de G* e denotamos como $H < G$.

Proposição 1.3.1

Seja $H \subseteq G$ tal que $H \neq \emptyset$ e (G, \cdot) é um grupo. $H \leq G$ é equivalente à satisfazer as seguintes condições:

1. $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall (h_1, h_2) \in H \times H$;
2. $h^{-1} \in H, \forall h \in H$.

Demonstração:

É necessário mostrarmos as duas implicações da equivalência:

$$H \leq G \Rightarrow (1.) \text{ e } (2.) \quad (1.1)$$

$$(1.) \text{ e } (2.) \Rightarrow H \leq G \quad (1.2)$$

A implicação (1.1) é trivial. Ora, se $H \leq G$, então pela definição de subgrupo temos que $h_1 \cdot h_2 \in H$ e $h^{-1} \in H$, isto é $\exists h^{-1} \in H : h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e$.

Para a implicação (1.2):

Sabemos que $H \subseteq G$, logo, se $h_1 \cdot h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in G$. Ora, sabemos que (G, \cdot) é um grupo. Logo, a associatividade é satisfeita. Para demonstrar que $e \in H$, basta tomarmos $h_2 = h^{-1}$ a partir de (2.). Logo, temos $h \cdot h^{-1} = e \in H$. Com isso mostramos todos os axiomas necessários e deduzimos que $H \leq G$. \square

Exemplo 1.3.1

(\mathbb{U}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}_+^*, \cdot) são subgrupos de (\mathbb{C}^*, \cdot) , onde \cdot denota a multiplicação usual em \mathbb{C} .

Exemplo 1.3.2

G e $\{e\}$ são subgrupos *triviais* de G .

Exemplo 1.3.3

Seja $n \in \mathbb{Z}$, $(n\mathbb{Z}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$, e, em particular, são os únicos.

Demonstração:

É evidente que $(n\mathbb{Z}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$. Mostremos que são os únicos!

Seja $(H, +)$ um subgrupo qualquer de $(\mathbb{Z}, +)$. Se $H = \{0\}$, então $H = 0\mathbb{Z}$.

Suponhamos agora $H \neq \{0\}$. Seja $n = \min\{a \in H, a > 0\}$.

Logo, como $n \in H$ e $H \leq \mathbb{Z}$, temos que $n\mathbb{Z} \subseteq H$.

De maneira inversa, seja $h \in H$. Logo, pelo Algoritmo de Euclides, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$h = qn + r \quad (0 \leq r < n)$$

Porém, note que, como $h \in H$, temos:

$$r = h - qn \in H$$

Porém, sabemos que $0 \leq r < n$.

Ora, como n é o elemento mínimo de H estritamente maior que 0, deduzimos que apenas podemos ter $r = 0$.

Logo:

$$h = qn \Rightarrow h \in n\mathbb{Z} \Rightarrow H \subseteq n\mathbb{Z}.$$

Portanto deduzimos que $H = n\mathbb{Z}$. □

Exemplo 1.3.4

Seja G um grupo e I um conjunto não-vazio de índices. Se $\{H_i\}_{i \in I}$ é uma família de subgrupos de G , então $\bigcap_{i \in I} H_i$ é um subgrupo de G .

Demonstração:

Como visto na **Proposição 1.3.1**, mostremos que:

1. $\forall x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$;
2. $\forall x \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow \exists x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

Provemos o **item 1**:

Sejam,

$$x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Logo:

$$\forall i \in I, x_1, x_2 \in H_i$$

Sabemos também que:

$$\forall i \in I, H_i \leq G$$

Portanto, deduzimos que:

$$\forall i \in I, x_1 \cdot x_2 \in H_i$$

Mas isso é a mesma coisa que dizer:

$$\forall x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Provemos o **item 2**:

Analogamente ao **item 1**, sabemos que:

$$x_0 \in \bigcap_{i \in I} H_i \iff \forall i \in I, x_0 \in H_i$$

Porém, sabemos que:

$$\forall i \in I, H_i \leq G$$

Logo, deduzimos que:

$$\forall i \in I, x_0 \in H_i, \exists x_0^{-1} \in H_i$$

Mas isso é a mesma coisa que:

$$\forall x \in \bigcap_{i \in I} H_i \Rightarrow \exists x^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

Portanto, provamos que:

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$$



Definição 1.3.2

Seja G um grupo. O subconjunto $Z(G)$ tal que:

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx, \forall g \in G\}$$

define um subgrupo de G chamado *centro* de G .

Demonstração:

Como visto na **Proposição 1.3.1**, para mostrar que $Z(G) \leq G$ é suficiente mostrar que $x \cdot x^{-1} \in Z(G)$, $\forall x \in Z(G)$.

Temos que:

Se:

$$x \in Z(G) \Rightarrow x \cdot g = g \cdot x, \forall g \in G.$$

Logo, teremos:

$$xgx^{-1} = g \Rightarrow x^{-1}xgx^{-1} = x^{-1}g \Rightarrow gx^{-1} = x^{-1}g, \forall g \in G$$

Portanto:

$$x^{-1} \in Z(G)$$

Temos também que:

$$x_1 \in Z(G) \Rightarrow x_1g = gx_1, \forall g \in G \quad (\text{I})$$

$$x_2 \in Z(G) \Rightarrow x_2g = gx_2, \forall g \in G \quad (\text{II})$$

Deduzimos de (I):

$$x_1g = gx_1 \Rightarrow g = x_1^{-1}gx_1$$

Substituindo em (II):

$$x_2 x_1^{-1} g x_1 = x_1^{-1} g x_1 x_2 \Rightarrow x_2 x_1^{-1} x_1 g = x_1^{-1} g x_1 x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 g = x_1^{-1} g x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 x_2) g = g (x_1 x_2)$$

Logo, deduzimos que:

$$(x_1, x_2) \in Z(G) \times Z(G) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in Z(G)$$

Portanto, $Z(G) \leq G$. □

Observação: O subgrupo centro serve o propósito de "medir a comutatividade" de um dado grupo. Por exemplo, observamos que $Z(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $Z(GL_2(\mathbb{R})) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ e $Z(S_n) = \{e\}$, $n \geq 3$.

Definição 1.3.3

Seja (G, \cdot) um grupo e X um conjunto não-vazio tal que $X \subseteq G$. Chamamos de **subgrupo gerado por um subconjunto** a interseção de todos os subgrupos de G que contém X . Denotamos-o como $\langle X \rangle$.

Matematicamente temos:

$$\langle X \rangle = \bigcap \{H : H \leq G \text{ e } X \subseteq H\}$$

Proposição 1.3.2

A partir das notações acima temos que:

$$\langle X \rangle = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_i \in X \text{ ou } a_i^{-1} \in X, n \geq 1\}$$

Demonstração:

Proposição 1.3.3

A partir das notações acima temos que $\langle X \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém X .

Demonstração:**Exemplo 1.3.5**

Seja o grupo (\mathbb{R}^*, \cdot) e o subconjunto $E \subset \mathbb{R}^*$ tal que $E = \{2\}$. O subgrupo gerado por E é, portanto, $H = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

De forma genérica, para um grupo G e um elemento $a \in G$, temos: $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 1.3.6

Seja o grupo $(\mathbb{Z}, +)$ e o subconjunto $E \subset \mathbb{Z}$ tal que $E = \{3\}$. O subgrupo gerado por E é, portanto, $(3\mathbb{Z}, +)$.

De forma geral, dado um grupo G , para determinarmos um subgrupo H gerado por um subconjunto X devemos provar os seguintes pontos:

1. H é um subgrupo de G
2. $X \subset H$
3. Se H' é um outro subgrupo tal que $X \subset H'$, então $H \subset H'$

Definição 1.3.4

Seja G um grupo. G é chamado de **grupo cíclico** quando ele pode ser gerado por um único elemento $x \in G$.

Exemplo 1.3.7

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle, \mathbb{U} = \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle.$$

Proposição 1.3.4

Se G é um grupo cíclico, então G é um grupo abeliano.

Demonstração:

Seja $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$. Podemos representar G como:

$$G = \{ \dots, (a^{-1})^r, \dots, (a^{-1})^2, a^{-1}, e, a, a^2, \dots, a^r, \dots \}$$

Onde $r \in \mathbb{Z}$.

Sejam $(x, y) \in G \times G$, queremos mostrar que $x \cdot y = y \cdot x$.

Sabemos que:

$$x = a^{r_1}, r_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y = a^{r_2}, r_2 \in \mathbb{Z}$$

Logo:

$$x \cdot y = a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \stackrel{(\mathbb{Z}, +)}{=} a^{r_2+r_1} = a^{r_2} \cdot a^{r_1} = y \cdot x$$

Portanto, G é um grupo abeliano. □

Definição 1.3.5

Definimos $\langle \{xyx^{-1}y^{-1} \mid (x, y) \in G \times G\} \rangle$ como o subgrupo dos comutadores do grupo G . Denotaremos-o por G' .

Definição 1.3.6

Seja (G, \cdot) um grupo. Definimos **ordem do grupo** (G, \cdot) a **quantidade de elementos no conjunto** G e a denotamos por $|G|$.

Se $\alpha \in G$, a **ordem de α** é a **ordem do subgrupo gerado por α** , denotada por $\mathcal{O}(\alpha)$, isto é, $\mathcal{O}(\alpha) = |\langle \alpha \rangle|$.

Exemplo 1.3.8

$$|\mathbb{Z}| = \infty, |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n, |S_n| = n!$$

1.4 Teorema de Lagrange

Definição 1.4.1

Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Definimos **classe lateral à esquerda de H em G que contém x** o subconjunto xH de G tal que $\forall x \in G$:

$$xH = \{xh | h \in H\}$$

Analogamente definimos **classe lateral à direita de H em G que contém x** o subconjunto Hx de G tal que $\forall x \in G$:

$$Hx = \{hx | h \in H\}$$

Observações:

- As classes laterais de G não são necessariamente subgrupos de G ;
- Quando não houver confusão possível, podemos denominar as classes laterais à esquerda/direita de H em G que contém x como simplesmente: classe lateral à esquerda/direita de G .

Definição 1.4.2

A cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda ou à direita é definida como o **índice de H em G** , e será denotada por $[G : H]$.

Observação: note que o número de classes laterais à direita de G é igual ao número de classes laterais à esquerda de G (por mais que as classes laterais sejam diferentes).

Isto se dá pelo fato de que a função:

$$\begin{aligned} \phi : \{ \text{classes lat. à esquerda} \} &\rightarrow \{ \text{classes lat. à direita} \} \\ xH &\mapsto Hx^{-1} \end{aligned}$$

é claramente uma bijeção.

Teorema 1.4.1**Teorema de Lagrange (Grupos)**

Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G .

Logo, $|H|$ divide $|G|$.

Demonstração:

Seja $x \in G \setminus H$, consideremos o conjunto das classes laterais à esquerda de G :

$$xH = \{xh | h \in H\}$$

Mostremos que $H \cap xH = \emptyset$:

Supondo $\alpha \in H \cap xH$:

$$\alpha \in H \cap xH \iff \alpha = xh \in H.$$

Como $\alpha = xh \in H$, logo $\exists h^{-1} \in H$ tal que $hh^{-1} \in H$

Portanto:

$$\alpha h^{-1} = xhh^{-1} \in H \iff x \in H \Rightarrow \text{Absurdo, pois } x \in G \setminus H.$$

Logo, $H \cap xH = \emptyset$.

Agora mostremos que $\text{Card}(xH) = |H|$:

Seja ζ a função definida abaixo:

$$\zeta : \begin{array}{l} H \rightarrow xH \\ h \mapsto xh \end{array}$$

A função ζ é claramente sobrejetiva por definição.

ζ também é injetiva pois se $(xh_1, xh_2) \in (xH)^2$:

$$xh_1 = xh_2 \Rightarrow x^{-1}xh_1 = x^{-1}xh_2 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

Portanto, deduzimos que $\text{Card}(xH) = |H|$.

Consideremos agora o conjunto yH das classes laterais à esquerda de H em G que contém y tal que $y \notin H \cup xH$.

Já mostramos anteriormente que $y \notin H$.

Mostremos que $yH \cap xH = \emptyset$

Supondo $\beta \in yH \cap xH$:

Então β pode ser escrito de duas formas:

$$\beta = yh_1$$

$$\beta = xh_2$$

Logo, temos:

$$yh_1 = xh_2 \Rightarrow y = xh_2h_1^{-1} \in xH \Rightarrow \text{Absurdo, pois } y \notin H \cup xH.$$

Analogamente ao passo anterior podemos provar que $\text{Card}(yH) = \text{Card}(xH) = |H|$.

Portanto, realizando os passos acima sucessivamente, criamos partições de G .

Como G é finito, o processo terá finalizado após n etapas.

Portanto, temos: $|G| = n|H|$. □

Observação: segue como consequência direta do Teorema de Lagrange que caso G seja um grupo finito e $\alpha \in G$, então $\mathcal{O}(\alpha)$ divide $|G|$.

Proposição 1.4.1

Seja G um grupo finito de ordem $p \in \mathbb{N}^*$.

Se p for primo, então G é um grupo cíclico.

Demonstração:

Pelo Teorema de Lagrange sabemos que se H é subgrupo de um grupo finito G , então $|H|$ divide $|G|$.

Como $|G| = p$ primo, então os únicos subgrupos possíveis de G são seus subgrupos triviais.

Seja $x \in G$ tal que $x \neq e$, onde e é o elemento neutro de G .

Logo, o único subgrupo gerado por x é o próprio G , $\langle x \rangle = G$ \square

*Observação: como visto na **Proposição 1.3.2**, G também é abeliano!*

Teorema 1.4.2

Pequeno Teorema de Fermat

1.5 Grupos Quocientes

Definição 1.5.1

Seja G um grupo. O subgrupo H de G é chamado de **subgrupo normal** de G se:

$$\forall (g, h) \in G \times H, \quad ghg^{-1} \in H.$$

Denotamos:

$$H \triangleleft G.$$