Grupos Quocientes

Subgrupos Normais e Estruturas Quocientes

Marco Busetti

UTFPR

23 de setembro de 2025

Roteiro

Tabela de Conteúdo

Conjunto Quociente

Definição

Seja G um grupo e $H \leq G$.
Chamamos de **conjunto quociente** o conjunto G/H cujos elementos são as classes laterais à esquerda de H em G.

Conjunto Quociente

Definição

Seja G um grupo e $H \leq G$.
Chamamos de **conjunto quociente** o conjunto G/H cujos elementos são as classes laterais à esquerda de H em G.

Observação

Decorre da definição que $|G/H| = [G : H]$ (índice de H em G).

Operação entre Classes Laterais

Definição

Seja G um grupo e $H \leq G$. Definimos a seguinte operação:

$$\bullet : G/H \times G/H \to G/H$$

$$(xH, yH) \mapsto xyH$$

Operação entre Classes Laterais

Definição

Seja G um grupo e $H \leq G$. Definimos a seguinte operação:

$$\bullet : G/H \times G/H \to G/H$$

$$(xH, yH) \mapsto xyH$$

Problema

Esta operação nem sempre está bem definida!
Para que $xH \bullet yH = xyH$ esteja bem definida, precisamos que representantes diferentes da mesma classe lateral produzam o mesmo resultado.

Tabela de Conteúdo

Condições para Operação Bem Definida

Proposição

Seja G um grupo e $H \leq G$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A operação $\bullet$ está bem definida
2. $gHg^{-1} \subseteq H$, $\forall g \in G$
3. $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$
4. $gH = Hg$, $\forall g \in G$

Condições para Operação Bem Definida

Proposição

Seja G um grupo e $H \leq G$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A operação $\bullet$ está bem definida
2. $gHg^{-1} \subseteq H$, $\forall g \in G$
3. $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$
4. $gH = Hg$, $\forall g \in G$

Ideia da demonstração: A operação está bem definida se e somente se elementos conjugados por qualquer $g \in G$ permanecem no subgrupo H.

Subgrupos Normais

Definição

Um subgrupo H é um **subgrupo normal** de G caso satisfaça as condições equivalentes da proposição anterior.
Denotamos: $H \trianglelefteq G$

Subgrupos Normais

Definição

Um subgrupo H é um **subgrupo normal** de G caso satisfaça as condições equivalentes da proposição anterior.
Denotamos: $H \trianglelefteq G$

Observações

- Se $H \trianglelefteq G$, então classes laterais à esquerda e à direita são iguais
- $H \triangleleft G$ denota subgrupo normal próprio
- Para verificar normalidade: mostrar que $ghg^{-1} \in H$

Exemplos de Subgrupos Normais

Exemplos

- G e $\{e\}$ são sempre subgrupos normais (triviais)

Exemplos de Subgrupos Normais

Exemplos

- G e $\{e\}$ são sempre subgrupos normais (triviais)
- O centro $Z(G) \trianglelefteq G$ para qualquer grupo G

Exemplos de Subgrupos Normais

Exemplos

- G e $\{e\}$ são sempre subgrupos normais (triviais)
- O centro $Z(G) \trianglelefteq G$ para qualquer grupo G
- $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$

Exemplos de Subgrupos Normais

Exemplos

- G e $\{e\}$ são sempre subgrupos normais (triviais)
- O centro $Z(G) \trianglelefteq G$ para qualquer grupo G
- $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$
- Se $[G : H] = 2$, então $H \trianglelefteq G$

Exemplos de Subgrupos Normais

Exemplos

- G e $\{e\}$ são sempre subgrupos normais (triviais)
- O centro $Z(G) \trianglelefteq G$ para qualquer grupo G
- $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$
- Se $[G : H] = 2$, então $H \trianglelefteq G$
- Em grupos abelianos, todos os subgrupos são normais

Grupos Simples

Definição

Um grupo G não-trivial é chamado de **grupo simples** se seus únicos subgrupos normais são $\{e\}$ e G.

Grupos Simples

Definição

Um grupo G não-trivial é chamado de **grupo simples** se seus únicos subgrupos normais são $\{e\}$ e G.

Interpretação

Grupos simples são os "blocos de construção" da teoria de grupos - não podem ser "decompostos" em grupos menores via quocientes não-triviais.

Tabela de Conteúdo

Produto de Subgrupos

Definição

Sejam $A, B \leq G$. Definimos:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Produto de Subgrupos

Definição

Sejam $A, B \leq G$. Definimos:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Proposição

HK é subgrupo de G se e somente se $HK = KH$.

Produto de Subgrupos

Definição

Sejam $A, B \leq G$. Definimos:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

Proposição

HK é subgrupo de G se e somente se $HK = KH$.

Consequência

Se $H \trianglelefteq G$ ou $K \trianglelefteq G$, então $HK \leq G$.

Cardinalidade do Produto

Proposição (Grupos Finitos)

Seja G um grupo finito e $H, K \leq G$. Então:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

Cardinalidade do Produto

Proposição (Grupos Finitos)

Seja G um grupo finito e $H, K \leq G$. Então:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

Corolário

Se $HK \leq G$, então:

$$[HK : K] = [H : H \cap K]$$

Tabela de Conteúdo

Definição de Grupo Quociente

Teorema

Seja G um grupo e $H \trianglelefteq G$.
Então $(G/H, \bullet)$ é um grupo, chamado de **grupo quociente**.

Definição de Grupo Quociente

Teorema

Seja G um grupo e $H \trianglelefteq G$.
Então $(G/H, \bullet)$ é um grupo, chamado de **grupo quociente**.

Verificação dos axiomas:

- **Associatividade:** $(xH \bullet yH) \bullet zH = xH \bullet (yH \bullet zH)$
- **Elemento neutro:** H
- **Elemento inverso:** $(xH)^{-1} = x^{-1}H$

Exemplo Principal

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

O grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo quociente formado por:

- $G = \mathbb{Z}$ (grupo aditivo dos inteiros)
- $H = n\mathbb{Z}$ (múltiplos de n)
- Classes: $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} + n\mathbb{Z}$

Exemplo Principal

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

O grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo quociente formado por:

- $G = \mathbb{Z}$ (grupo aditivo dos inteiros)
- $H = n\mathbb{Z}$ (múltiplos de n)
- Classes: $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} + n\mathbb{Z}$

Operação: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$
onde $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$

Propriedade do Centro

Proposição

Seja G um grupo e $Z(G)$ seu centro.
Se $G/Z(G)$ é cíclico, então $G = Z(G)$ (isto é, G é abeliano).

Propriedade do Centro

Proposição

Seja G um grupo e $Z(G)$ seu centro.
Se $G/Z(G)$ é cíclico, então $G = Z(G)$ (isto é, G é abeliano).

Ideia da demonstração:

- Se $G/Z(G) = \langle xZ(G) \rangle$, então todo elemento de G é da forma $x^k z$
- Elementos desta forma comutam entre si
- Logo G é abeliano, portanto $G = Z(G)$

Tabela de Conteúdo

Importância dos Grupos Quocientes

- **Estrutura fundamental:** Permite "simplificar" grupos removendo subgrupos normais

Importância dos Grupos Quocientes

- **Estrutura fundamental:** Permite "simplificar" grupos removendo subgrupos normais
- **Classificação:** Essencial para classificar grupos via séries de composição

Importância dos Grupos Quocientes

- **Estrutura fundamental:** Permite "simplificar" grupos removendo subgrupos normais
- **Classificação:** Essencial para classificar grupos via séries de composição
- **Homomorfismos:** Conecta-se diretamente com o teorema fundamental dos homomorfismos

Importância dos Grupos Quocientes

- **Estrutura fundamental:** Permite "simplificar" grupos removendo subgrupos normais
- **Classificação:** Essencial para classificar grupos via séries de composição
- **Homomorfismos:** Conecta-se diretamente com o teorema fundamental dos homomorfismos
- **Aplicações:** Base para teoria de Galois, geometria algébrica, topologia algébrica

Obrigado!

Dúvidas?

Referências

- GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- https://github.com/MARCOVB5/grupos