

TEMA 3. DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Derivadas parciales

Para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función de varias variables respecto a una de sus variables independientes se utiliza el proceso de derivación parcial.

DEFINICIÓN 1.1 (DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES). Si $z = f(x, y)$ las primeras derivadas parciales de f con respecto a las variables x e y son las funciones definidas como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h},$$

siempre y cuando el límite exista.

OBSERVACIÓN 1.1. La definición indica que para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ se considera y constante derivando con respecto a x y para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ se considera x constante derivando con respecto a y . Pueden aplicarse por tanto las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 1.1. 1. Calcular las derivadas parciales de $f(x, y) = yx^2 + 3x^3y^4$.

2. Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$ hallar f_x , f_y y evaluarlas en $(1, \ln(2))$.

1.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Si $y = y_0$ entonces $z = f(x, y_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. Por tanto

$f_x(x_0, y_0)$ = pendiente de la curva intersección en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Análogamente, $f(x_0, y)$ es la curva intersección de

$$\begin{cases} z = f(x, y) & (\text{superficie}) \\ x = x_0 & (\text{plano}) \end{cases}$$

y entonces

$$f_y(x_0, y_0) = \text{pendiente de la curva intersección en } (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

Diremos que los valores $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ denotan las pendientes de la superficie en las direcciones de x e y , respectivamente.

EJEMPLO 1.2. Hallar las pendientes en las direcciones de x e y de la superficie dada por $f(x, y) = 1 - x^2y + xy^3$ en el punto $(1, 2, 7)$.

Las derivadas parciales también se pueden interpretar como tasas, velocidades o ritmos de cambio.

EJEMPLO 1.3. La temperatura en un punto (x, y) de una placa de acero es $T(x, y) = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$, donde x e y se miden en metros. En el punto $(2, 3)$ hallar el ritmo de cambio de la temperatura respecto a la distancia recorrida en las direcciones de los ejes X e Y .

EJERCICIO 1.1. Calcular las derivadas parciales de $f(x, y, z, w) = \frac{xy+yz+xz}{w}$.

1.2. Derivadas parciales de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias es posible hallar las segundas, terceras... derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan.

Por ejemplo la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (\text{Derivar dos veces respecto a } x)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (\text{Derivar respecto a } x, \text{ luego respecto a } y)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (\text{Derivar respecto a } y, \text{ luego respecto a } x)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (\text{Derivar dos veces respecto a } y)$$

EJEMPLO 1.4. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = 3x^2y + xy^3 - 2x$. Determinar el valor de $f_{x,y}(1, 2)$.

TEOREMA 1.1 (IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS). Si $f(x, y)$ es tal que f_{xy} y f_{yx} existen y son continuas en un disco abierto D entonces

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

EJEMPLO 1.5. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = xe^y + \sin(xy)$. Comprobar que las derivadas parciales mixtas coinciden.

2. Diferenciación de funciones de dos variables

Para una función de una variable $f(x)$ se define la derivada como

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Esto quiere decir que para h pequeño

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \iff f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

y por tanto la recta tangente es una buena aproximación de la función f cerca del punto a .

Llamando $\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ se cumple que

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \varepsilon(h) \quad \text{donde} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\varepsilon(h)|}{|h|} = 0.$$

DEFINICIÓN 2.1. Supongamos ahora que $f(x, y)$ es una función de 2 variables. De forma análoga a lo que hemos visto para una dimensión diremos que f es diferenciable en el punto (a, b) si

$$f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2 + \varepsilon(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|\varepsilon(h_1, h_2)|}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

(Recuerda que $\|(h_1, h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ es la longitud del vector (h_1, h_2)).

DEFINICIÓN 2.2. Si $f(x, y)$ es diferenciable en el punto (a, b) vamos a llamar *diferencial de f en (a, b)* , y se denota como $Df(a, b)$, a la función de dos variables

$$Df(a, b)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h_2.$$

OBSERVACIÓN 2.1. En una variable los conceptos de *derivabilidad* (=existencia de la derivada) y de *diferenciabilidad* (=tener recta tangente) coinciden. Sin embargo en dos variables la existencia de las dos derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ no garantizan que la función sea diferenciable (es decir, no garantiza que tenga plano tangente).

EJEMPLO 2.1. Probar que la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

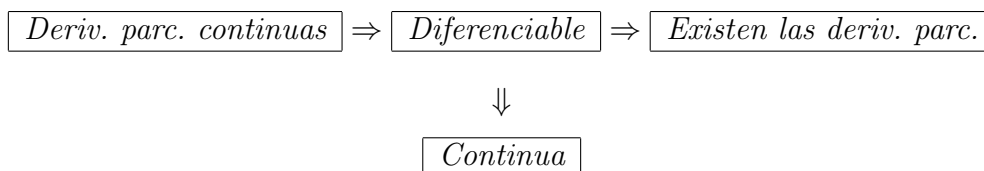
TEOREMA 2.1 (CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD). Si $f(x, y)$ es una función continua de dos variables y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en una región abierta D entonces f es diferenciable en todo punto $(x, y) \in D$.

Como ocurre con una función de una variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto también es continua en ese punto.

TEOREMA 2.2 (DIFERENCIABLE IMPLICA CONTINUA). Si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) entonces también es continua en (a, b) .

EJEMPLO 2.2. Probar que la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ pero no es continua en dicho punto. ¿Es diferenciable en $(0, 0)$?

Resumimos a continuación la relación que existe entre la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y la diferenciabilidad.



2.1. La diferencial como aproximación

Llamando $x = a + h_1$, $y = b + h_2$ si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) entonces

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

para valores de (x, y) cercanos al punto (a, b) . (La fórmula anterior es la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$).

EJEMPLO 2.3. Calcular la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = 2 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1)$.

Llamemos ahora $\Delta x = h_1 = x - a$ al incremento en x , $\Delta y = h_2 = y - b$ al incremento en y , $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ al incremento en z . Si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) entonces

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y = dz,$$

y por tanto la diferencial dz sería una buena aproximación del incremento Δz para valores pequeños de los incrementos en las variables independientes $\Delta x, \Delta y$.

EJEMPLO 2.4 (USO DE LA DIFERENCIAL COMO APROXIMACIÓN). Utilizar la diferencial para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Comparar la aproximación con el cambio exacto en z .

EJEMPLO 2.5 (ANÁLISIS DE ERRORES). El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 mm. Las dimensiones son $x = 50$ cm., $y = 20$ cm., $z = 15$ cm. Estimar el error absoluto y relativo que se comete en el cálculo del volumen.

3. Regla de la cadena para funciones de varias variables

Estudiaremos dos casos: cuando solo hay una variable independiente y cuando hay dos.

3.1. Regla de la cadena: una variable independiente

TEOREMA 3.1. Si $w = f(x, y)$ es diferenciable y $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son derivables entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

EJEMPLO 3.1. Sea $w = x^2y - y^2$, $x = \sin(t)$, $y = e^t$. Calcular $\frac{dw}{dt}|_{t=0}$ de las dos formas siguientes:

1. Sustituyendo y derivando como una función de una variable.
2. Aplicando la regla de la cadena.

EJEMPLO 3.2. Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = 4 \cos(t), y_1 = 2 \sin(t) \quad (\text{Objeto 1}),$$

$$x_2 = 2 \sin(2t), y_2 = 3 \cos(2t) \quad (\text{Objeto 2}).$$

¿A qué velocidad cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?

3.2. Regla de la cadena: dos variables independientes

TEOREMA 3.2. Si $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ son diferenciables entonces

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

EJEMPLO 3.3. Calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ para $w = 2xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = s/t$ de las dos formas siguientes:

1. Sustituyendo y calculando las derivadas parciales.
2. Aplicando la regla de la cadena.

4. Derivadas direccionales y gradientes

Hemos visto que para una superficie $z = f(x, y)$ la pendiente en la dirección de x está dada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ y la pendiente en la dirección de y por $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ahora vamos a determinar como calcular la pendiente de una superficie en un punto a lo largo de cualquier dirección.

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables y $v = (v_1, v_2)$ un vector de \mathbb{R}^2 . Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (a, b) y tiene como vector director a v son

$$\begin{cases} x = a + tv_1, \\ y = b + tv_2. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 4.1 (DERIVADA DIRECCIONAL). La derivada direccional de f en el punto (a, b) y en la dirección de $v = (v_1, v_2)$ se define como

$$D_v f(a, b) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t},$$

siempre que este límite exista.

OBSERVACIÓN 4.1. Tenemos que especificar siempre una dirección mediante un vector unitario $v = (v_1, v_2)$, es decir de longitud $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

Si $v = (v_1, v_2)$ es cualquier vector de \mathbb{R}^2 entonces

$$\frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|} \right),$$

es un vector unitario con la misma dirección y sentido que v .

Otra forma de determinar un vector unitario es considerar $v = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, siendo θ el ángulo que forma la “dirección” elegida con la horizontal.

TEOREMA 4.1 (CÁLCULO DE LA DERIVADA DIRECCIONAL). Si $f(x, y)$ es una función diferenciable en el punto $(a, b) \in \text{int}(D(f))$ entonces la derivada direccional en el punto (a, b) según la dirección del vector $v = (v_1, v_2)$ es

$$D_v f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot v_2.$$

EJEMPLO 4.1. Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$ en el punto $(1, \pi/2)$ en la dirección que marca $v = (3, -4)$.

OBSERVACIÓN 4.2. Si f es diferenciable entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = D_{(1,0)}f(a, b),$$

es la derivada direccional en la dirección del semieje x positivo y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = D_{(0,1)}f(a, b),$$

es la derivada direccional en la dirección del semieje y positivo.

4.1. El gradiente de una función de dos variables

DEFINICIÓN 4.2 (GRADIENTE). Si $z = f(x, y)$ entonces el gradiente de f , $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \in \mathbb{R}^2.$$

(Nota: el gradiente es un vector en el plano y no un número).

EJEMPLO 4.2. Calcular el gradiente de $f(x, y) = x^2y + \sin(x+y)$ en el punto $(0, \pi/2)$.

OBSERVACIÓN 4.3. Si f es diferenciable en (a, b) entonces la derivada direccional de f en (a, b) en la dirección del vector $v = (v_1, v_2)$ puede escribirse como

$$D_v f(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) v_2$$

\uparrow
Producto escalar

TEOREMA 4.2 (PROPIEDADES DEL GRADIENTE). Sea f diferenciable en (a, b) .

1. Si $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ entonces $D_v f(a, b) = 0$ para toda dirección v .
2. La dirección de máximo incremento de f está dado por $\nabla f(a, b)$ y el valor máximo de $D_v f(a, b)$ es $\|\nabla f(a, b)\|$.
3. La dirección de mínimo incremento de f es $-\nabla f(a, b)$ y el valor máximo de $D_v f(a, b)$ es $-\|\nabla f(a, b)\|$.

EJEMPLO 4.3. La temperatura en la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ con x e y medidas en cm. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?

TEOREMA 4.3 (EL GRADIENTE ES ORTOGONAL A LAS CURVAS DE NIVEL). Si f es diferenciable en (a, b) y $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$ entonces $\nabla f(a, b)$ es ortogonal a la curva de nivel que pasa por (a, b) .

5. Extremos de funciones de dos variables

DEFINICIÓN 5.1 ($f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). 1. f tiene un *máximo absoluto* en (a, b) si

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in D.$$

2. f tiene un *máximo relativo* en (a, b) si existe $r > 0$ tal que

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in B((a, b), r).$$

3. f tiene un *mínimo absoluto* en (a, b) si

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in D.$$

4. f tiene un *mínimo relativo* en (a, b) si existe $r > 0$ tal que

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in B((a, b), r).$$

Hemos visto en el Tema 1 que si la región D es compacta (cerrada y acotada) y $f(x, y)$ es continua entonces f alcanza siempre un valor máximo y mínimo absolutos en la región D .

TEOREMA 5.1 (CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS). Sea $f(x, y)$ definida en una región abierta D y diferenciable en (a, b) . Si f tiene un extremo relativo en (a, b) entonces

$$\nabla f(a, b) = (0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0. \end{cases}$$

(Nota: Si $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ se dice que (a, b) es un punto crítico).

EJEMPLO 5.1. Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

En general los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos, algunos son puntos de silla, como por ejemplo el origen para la función $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Para clasificar los puntos críticos disponemos de un criterio usando las derivadas parciales segundas.

DEFINICIÓN 5.2 (HESSIANO). Se llama Hessiano de f en (a, b) al determinante

$$H(a, b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 5.2 (CRITERIO DEL HESSIANO). Sea (a, b) un punto crítico de la función f (i.e., $\nabla f(a, b) = (0, 0)$) y supongamos que existe un disco centrado en (a, b) donde las derivadas parciales segundas son continuas. Se cumple entonces que:

1. Si $H(a, b) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \implies (a, b)$ es un mínimo relativo.
2. Si $H(a, b) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \implies (a, b)$ es un máximo relativo.
3. Si $H(a, b) < 0 \implies (a, b)$ es un punto de silla.
4. Si $H(a, b) = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión. (en este caso tenemos que estudiar la función directamente).

EJEMPLO 5.2. Identificar los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

EJEMPLO 5.3. Identificar los extremos relativos de la función $f(x, y) = x^2y^2$.

EJEMPLO 5.4. Una caja rectangular descansa en el plano XY con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano $6x + 4y + 3z = 24$. Hallar el volumen máximo que puede tener la caja.

EJEMPLO 5.5. Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia en euros al producir x unidades de un reproductor de DVD e y unidades de un grabador de DVD se aproxima mediante la función

$$P(x, y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000.$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es esta ganancia máxima?

6. Optimización con restricciones: multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización están sometidos a restricciones o ligaduras para los valores que pueden usarse de las variables. Por ejemplo supongamos que queremos calcular el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- $f(x, y) = 4xy$ (Función objetivo).
- $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ (Restricción o ligadura).
- *Problema:* Maximizar la función $f(x, y)$ cuando las variables (x, y) están sometidas a la restricción $g(x, y) = 0$.

TEOREMA 6.1 (TEOREMA DE LAGRANGE). Sean f y g funciones con derivadas parciales continuas. Si $f(x, y)$ sometida a la restricción $g(x, y) = 0$ tiene un extremo relativo en un punto (a, b) y si $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$ entonces existe un número λ tal que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b).$$

(λ recibe el nombre de multiplicador de Lagrange).

TEOREMA 6.2 (MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE). Sean f y g funciones con derivadas parciales continuas y $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ para todo (x, y) donde $g(x, y) = 0$.

Si $f(x, y)$ sometida a la restricción $g(x, y) = 0$ alcanza un extremo relativo en un punto (a, b) entonces (a, b) es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \\ g(x, y) = 0. \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 6.1. Si sabemos que $f(x, y)$ sometida a la restricción $g(x, y) = 0$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos (por ejemplo, si $g(x, y) = 0$ es un conjunto compacto) entonces basta evaluar f en las soluciones del sistema anterior y quedarse con los valores máximo y mínimo

EJEMPLO 6.1. Encontrar dos números x e y en la circunferencia unidad (i.e., $x^2 + y^2 = 1$) de forma que su producto sea máximo.

EJEMPLO 6.2. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 10$.

7. Apéndice

DEFINICIÓN 7.1. Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto y $x_0 \in I$, se define la *derivada* de f en el punto x_0 como el número real

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

siempre que dicho límite exista y sea finito.

TEOREMA 7.1 (DERIVABLE IMPLICA CONTINUA). Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto y $x_0 \in I$.

Si f es derivable en x_0 , entonces f es continua en x_0 .

TEOREMA 7.2 (ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE). Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto y $x_0 \in I$.

Si f es derivable en x_0 , entonces la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x_0 viene dada por la ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

TEOREMA 7.3 (REGLA DE LA CADENA). Supongamos que f es una función derivable en x_0 y g una función derivable en $f(x_0)$.

Entonces $g \circ f$ es una función derivable en x_0 y además

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

TEOREMA 7.4 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO). Supongamos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b) . Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$