

# BLOCCO TEOREMI ENHANCED

Questo blocco propone in forma digitale la lista completa di teoremi che possono essere richiesti all'esame orale di Teoria Dei Segnali, approfonditi e curati in ogni passaggio. I teoremi richiesti più spesso sono marcati da un asterisco.

## LISTA TEOREMI

### CAPITOLO 1:

1. La somma di due funzioni a quadrato sommabile è ancora a quadrato sommabile
2. Disuguaglianza di Schwarz per funzioni
3. Disuguaglianza di Schwarz per segnali (prodotto scalare)

### CAPITOLO 2:

4. Teorema di Gram
5. Teorema della proiezione
6. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

### CAPITOLO 3:

7. Serie di Fourier: forma esponenziale
8. Serie di Fourier: forma trigonometrica

### CAPITOLO 4:

9. Deduzione elementare della trasformata di Fourier
10. Trasformata di Fourier in  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$
11. Trasformata di Fourier in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ : teorema di Parseval
12. Trasformata di Fourier in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
13. Proprietà di derivazione della trasformata di Fourier

### CAPITOLO 5:

14. Derivata di una distribuzione
15. Formula di Poisson
16. Trasformata di Fourier di una distribuzione
17. Trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto limitato
18. Trasformata di Fourier della convoluzione tra distribuzioni

### CAPITOLO 6:

19. Stabilità di un sistema lineare (BIBO)

## CAPITOLO 7:

20. Teorema di Wiener-Khinchine

## CAPITOLO 8:

21. Trasformata di Hilbert

22. Segnali a banda e durata rigorosamente limitata

23. Proprietà dei segnali a banda rigorosamente limitata: segnali passabasso

## CAPITOLO 9:

24. Teorema del campionamento (Nyquist-Shannon)

25. Teorema del campionamento ideale

26. Teorema del campionamento naturale

27. Teorema del campionamento istantaneo

28. Errori di ricoprimento spettrale (aliasing)

## CAPITOLO 16:

29. Disuguaglianza di Chebyshev

30. Teorema della media

31. Densità di probabilità di una variabile aleatoria  $Z = X + Y$

## CAPITOLO 17:

32. Valore medio e varianza di una variabile gaussiana

## CAPITOLO 19:

33. Segnali stazionari

## CAPITOLO 21:

34. La funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio è semi definita positiva

35. Densità spettrale di potenza di un segnale aleatorio

36. Segnali ciclostazionari

## CAPITOLO 23:

37. Rumore bianco

## TEOREMA 1

La somma di due funzioni a quadrato sommabile è ancora a quadrato sommabile.

Siano  $f_1(x), f_2(x)$  due funzioni, generalmente complesse, appartenenti a  $\mathcal{L}^2(E)$  (a quadrato sommabile su  $E$ ). In ogni punto di  $\mathcal{L}^2(E)$  risulta che:

$$|f_1(x) - f_2(x)|^2 \geq 0$$

Per definizione, il modulo quadro di un numero complesso è pari a:

$$|z|^2 = z \cdot z^* = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

Applicando la precedente definizione alle funzioni date, risulta:

$$\begin{aligned} |f_1(x) - f_2(x)|^2 &= (f_1(x) - f_2(x)) \cdot (f_1(x) - f_2(x))^* = \\ &= f_1(x)f_1^*(x) - f_1(x)f_2^*(x) - f_2(x)f_1^*(x) + f_2(x)f_2^*(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Sfruttando nuovamente la definizione di modulo quadro:

$$|f_1(x) - f_2(x)|^2 = |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 - (f_1(x)f_2^*(x) + f_2(x)f_1^*(x)) \geq 0$$

Da cui ovviamente risulta che:

$$f_1(x)f_2^*(x) + f_2(x)f_1^*(x) \leq |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2$$

In virtù di quest'ultima affermazione, sommando a ciascun membro la quantità  $|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2$ , risulta:

$$|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 + f_1(x)f_2^*(x) + f_2(x)f_1^*(x) \leq 2 \cdot (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2)$$

La quantità a secondo membro è sicuramente sommabile, di conseguenza anche la quantità a primo membro lo deve essere. Integrando membro a membro, si ottiene:

$$\int_E |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx \leq 2 \cdot \int_E (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx < \infty$$

Dunque, la somma o, più in generale, la combinazione lineare di funzioni a quadrato sommabile è ancora una funzione a quadrato sommabile.

## TEOREMA 2

### Disuguaglianza di Schwarz per funzioni

Tesi:

Se  $f$  e  $g$  sono funzioni a quadrato sommabile su uno stesso insieme  $E$ , anche la funzione prodotto  $f \cdot g$  lo sarà e varrà la cosiddetta disuguaglianza di Schwarz:

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left( \int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_E |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tale disuguaglianza è banalmente verificata se una delle due funzioni è nulla quasi ovunque.

Dimostrazione:

Siano  $f(x), g(x)$  due funzioni NON nulle quasi ovunque. Poniamo:

$$a = \frac{|f(x)|}{\left( \int_E |f(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}} \quad b = \frac{|g(x)|}{\left( \int_E |g(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Supponendo che  $a$  e  $b$  siano due reali non negativi, dalla proprietà  $(a - b)^2 \geq 0$  segue che:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

Sostituendo  $a$  e  $b$ :

$$\frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\left( \int_E |f(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_E |g(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|f(x)|^2}{2 \int_E |f(v)|^2 dv} + \frac{|g(x)|^2}{2 \int_E |g(v)|^2 dv}$$

Integrando membro a membro:

$$\int_E \frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\left( \int_E |f(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_E |g(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}} dx \leq \int_E \frac{|f(x)|^2}{2 \int_E |f(v)|^2 dv} dx + \int_E \frac{|g(x)|^2}{2 \int_E |g(v)|^2 dv} dx$$

Le quantità a denominatore non dipendono dalla variabile di integrazione  $x$ , dunque:

$$\frac{\int_E |f(x)| \cdot |g(x)| dx}{\left( \int_E |f(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_E |g(v)|^2 dv \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\int_E |f(x)|^2 dx}{2 \int_E |f(v)|^2 dv} + \frac{\int_E |g(x)|^2 dx}{2 \int_E |g(v)|^2 dv}$$

A secondo membro, gli integrali a numeratore e denominatore sono identici a meno della variabile d'integrazione. Dunque, semplificando:

$$\frac{\int_E |f(x)| \cdot |g(x)| dx}{\left(\int_E |f(v)|^2 dv\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E |g(v)|^2 dv\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ovvero:

$$\int_E |f(x) \cdot g(x)| dx = \int_E |f(x)| \cdot |g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

## TEOREMA 3

### Disuguaglianza di Schwarz per segnali (prodotto scalare)

#### Proprietà del prodotto scalare

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
2.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = o$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda^* y \rangle$
4.  $\langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

#### Dimostrazione:

Sia  $X$  uno spazio vettoriale sul campo complesso  $\mathbb{C}$ , dati  $x_1, x_2 \in X$  e  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ , per le proprietà del prodotto scalare vale:

$$\begin{aligned} 0 &\leq^2 \langle k_1 x_1 + k_2 x_2, k_1 x_1 + k_2 x_2 \rangle =^4 \\ &=^4 \langle k_1 x_1, k_1 x_1 + k_2 x_2 \rangle + \langle k_2 x_2, k_1 x_1 + k_2 x_2 \rangle =^3 \\ &=^3 k_1 \langle x_1, k_1 x_1 + k_2 x_2 \rangle + k_2 \langle x_2, k_1 x_1 + k_2 x_2 \rangle =^1 \\ &=^1 k_1 \langle k_1 x_1 + k_2 x_2, x_1 \rangle^* + k_2 \langle k_1 x_1 + k_2 x_2, x_2 \rangle^* =^4 \\ &=^4 k_1 \cdot (\langle k_1 x_1, x_1 \rangle^* + \langle k_2 x_2, x_1 \rangle^*) + k_2 \cdot (\langle k_1 x_1, x_2 \rangle^* + \langle k_2 x_2, x_2 \rangle^*) =^3 \\ &=^3 k_1 k_1^* \cdot \langle x_1, x_1 \rangle^* + k_1 k_2^* \cdot \langle x_2, x_1 \rangle^* + k_1^* k_2 \cdot \langle x_1, x_2 \rangle^* + k_2 k_2^* \cdot \langle x_2, x_2 \rangle^* =^1 \\ &=^1 k_1 k_1^* \cdot \langle x_1, x_1 \rangle + k_1 k_2^* \cdot \langle x_1, x_2 \rangle + k_1^* k_2 \cdot \langle x_1, x_2 \rangle^* + k_2 k_2^* \cdot \langle x_2, x_2 \rangle \end{aligned}$$

Ponendo:

$$a_{11} = \langle x_1, x_1 \rangle, \quad a_{12} = \langle x_1, x_2 \rangle, \quad a_{21} = \langle x_1, x_2 \rangle^*, \quad a_{22} = \langle x_2, x_2 \rangle$$

Possiamo ottenere la forma hermitiana:

$$h(k_1, k_2) = a_{11} k_1 k_1^* + a_{12} k_1 k_2^* + a_{21} k_1^* k_2 + a_{22} k_2 k_2^* \geq 0$$

Che possiamo riscrivere in forma matriciale:

$$h(k) = k^\dagger A k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}^\dagger \cdot \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle^* & \langle x_2, x_2 \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$h(k)$  è ovviamente semidefinita positiva, pertanto risulta che:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0$$

Da cui risulta:

$$\langle x_1, x_1 \rangle \cdot \langle x_2, x_2 \rangle \geq \langle x_1, x_2 \rangle \cdot \langle x_1, x_2 \rangle^*$$

$$\Rightarrow \langle x_1, x_1 \rangle \cdot \langle x_2, x_2 \rangle \geq |\langle x_1, x_2 \rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \langle x_1, x_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle x_2, x_2 \rangle^{\frac{1}{2}}$$

La quale è la disuguaglianza di Schwarz per segnali e vale banalmente come uguaglianza quando si ha  $x_1 = 0$  e/o  $x_2 = 0$ , ovvero se risulta:

$$x_1 = kx_2 \quad k \in \mathbb{C}$$



## TEOREMA 4

### Teorema di Gram (\*)

Chiamasi matrice di Gram la seguente matrice a simmetria hermitiana ( $a_{ij} = a_{ji}^* \forall i \neq j$ ):

$$G = \begin{bmatrix} \langle s_1, s_1 \rangle & \langle s_1, s_2 \rangle & \cdots & \langle s_1, s_n \rangle \\ \langle s_2, s_1 \rangle & \langle s_2, s_2 \rangle & \cdots & \langle s_2, s_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle s_n, s_1 \rangle & \langle s_n, s_2 \rangle & \cdots & \langle s_n, s_n \rangle \end{bmatrix}$$

Il teorema di Gram afferma che  $n$  segnali sono linearmente dipendenti se e solo se il determinante di Gram  $G(s_1, s_2, \dots, s_n)$  ad essi relativo è nullo.

Necessarietà ( $n$  segnali lin. dip.  $\Rightarrow G(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0$ ):

Se  $\{s_i\}_{i=1}^n$  è l'insieme degli  $n$  segnali linearmente dipendenti, devono esistere necessariamente  $n$  costanti  $\{c_i\}$ , non tutte nulle, tali che una combinazione lineare dei segnali produca il vettore nullo:

$$\sum_{i=1}^n c_i s_i = \vec{0}$$

Per dimostrare che questo implica un determinante di Gram nullo, effettuiamo il prodotto scalare tra la precedente sommatoria e un generico segnale  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i s_i, s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \langle s_i, s_j \rangle = \vec{0}$$

La precedente può essere anche espressa in forma di sistema lineare:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \langle s_i, s_1 \rangle = 0 \\ \sum_{i=1}^n c_i \cdot \langle s_i, s_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i \cdot \langle s_i, s_n \rangle = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema lineare omogeneo di  $n$  equazioni nelle  $n$  incognite  $\{c_i\}$ . Tali equazioni, oltre a quella banale, devono ammettere una soluzione non banale. Ricordiamo che, per il teorema di Cramer, un sistema lineare omogeneo  $Ax = 0$  che ammetta soluzioni non banali implica che  $\det(A) = 0$  e che  $A$ , ovvero la matrice dei coefficienti, sia singolare (quadrata non invertibile).

**Sufficienza ( $G(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0 \Rightarrow n$  segnali lin. dip.):**

Dato il precedente sistema lineare omogeneo, se  $G(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0$  allora tale sistema ammette anche soluzioni non banali. Detta  $\{\lambda_i\}$  una di queste soluzioni, si consideri il seguente segnale:

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$$

Calcoliamone la norma al quadrato:

$$\begin{aligned} \|s\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \left\langle s_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j s_j, s_i \right\rangle^* = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j^* \cdot \langle s_i, s_j \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \cdot \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \langle s_i, s_j \rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

La norma al quadrato è pari a zero (dunque anche la norma è nulla) perché, per ipotesi,  $\{\lambda_i\}$  è una soluzione del sistema. A questo punto, avendo norma nulla, il segnale  $s$  altro non è che il segnale nullo. Pertanto, i segnali  $\{s_i\}_{i=1}^n$  sono linearmente dipendenti.

## TEOREMA 5

### Teorema della proiezione (\*)

#### Tesi:

Siano  $S_n$  un sottospazio vettoriale di dimensione  $n$  ed  $s$  un segnale non necessariamente appartenente a  $S_n$ . Sia inoltre  $\tilde{s}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^n \langle s, u_i \rangle u_i \in S_n$  la migliore approssimazione di  $s$  in  $S_n$ , ovvero quell'elemento di  $S_n$  la cui distanza euclidea  $d(s, \tilde{s}_n) = \|s - \tilde{s}_n\| = \|e\|$  dal segnale  $s$  è minima, allora il vettore  $e = s - \tilde{s}_n$  è ortogonale a ogni vettore appartenente ad  $S_n$  e quindi al sottospazio  $S_n$ .

#### Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema della proiezione si deve verificare che il vettore  $e$  sia ortogonale a ciascun vettore di una qualsiasi base ortonormale  $\{u_i\}_{i=1}^n$  di  $S_n$ , cioè che:

$$\langle s - \tilde{s}_n, u_i \rangle = \langle s, u_i \rangle - \langle \tilde{s}_n, u_i \rangle = 0$$

Espandendo i termini:

$$\begin{aligned} \langle s - \tilde{s}_n, u_i \rangle &= \langle s, u_i \rangle - \langle \tilde{s}_n, u_i \rangle = \\ &= \langle s, u_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \langle s, u_j \rangle u_j, u_i \right\rangle = \\ &= \alpha_i - \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_i \right\rangle = \\ &= \alpha_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle \end{aligned}$$

Essendo  $\{u_i\}, \{u_j\}$  vettori della base ortonormale, sappiamo che:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

Dunque, risulta:

$$\alpha_i - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle = \alpha_i - \alpha_i = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $\tilde{s}_n$  è la proiezione ortogonale di  $s$  nel sottospazio  $S_n$ .

## TEOREMA 6

### Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (\*)

Con l'obiettivo di costruire una base ortonormale per il sottospazio generato da un insieme di segnali  $\{s_i\}_{i=1}^n$ , è utile servirsi dell'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, il quale si basa sul teorema della proiezione e consiste nel generare ricorsivamente dei sottospazi di dimensione via via crescente annidati l'uno dentro l'altro. L'algoritmo consta delle seguenti fasi:

1. Dato il segnale  $s_1$ , il primo elemento della base sarà:

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{s_1}{\|s_1\|}$$

Questo elemento genererà un sottospazio  $S_1 = \{u_1\}$  di dimensione 1.

2. Dato il segnale  $s_2$ , si costruisce il seguente segnale:

$$e_2 = s_2 - \langle s_2, u_1 \rangle u_1 = s_2 - \frac{\langle s_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1$$

A questo punto:

2.1. Se  $e_2 = 0$  (segnale nullo)  $\Rightarrow s_2 \in S_1$  e si salta al passaggio successivo.

2.2. Se  $e_2 \neq 0$ , per il teorema della proiezione,  $e_2$  è ortogonale al sottospazio  $S_1$ . Pertanto, si può assumere come secondo elemento della base ortonormale il segnale:

$$u_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$$
$$S_2 = \{u_1, u_2\}$$

3. Il passo 2 viene ripetuto fin quando i segnali dell'insieme dato non vengono esauriti. Al passo  $i$ -esimo, supposto che tutti i segnali considerati siano linearmente indipendenti tra loro, l' $i$ -esimo segnale della base sarà dato da:

$$u_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

Dove:

$$e_i = s_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle s_i, u_j \rangle u_j$$

$$S_i = \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$$

L'algoritmo appena descritto permette di costruire più basi ortonormali per un dato insieme di segnali, dipendentemente dall'ordinamento scelto dei segnali all'interno dell'insieme stesso.

## TEOREMA 7

### Serie di Fourier: forma esponenziale

Dato il segnale  $rect\left(\frac{t}{T_0}\right)$  così definito:

$$rect\left(\frac{t}{T_0}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1; & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0; & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

Si definisce il segnale troncato:

$$s_{T_0}(t) = s(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

Un segnale periodico è un segnale a potenza finita che consiste nella ripetizione periodica di periodo  $T_0$  di una funzione elementare  $s_{T_0}(t)$  a quadrato sommabile e definita in un intervallo  $T_0$  pari al suo periodo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t - nT_0)$$

Si consideri l'insieme dei segnali ortonormali  $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in S$ , rappresentabili tramite le seguenti funzioni:

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Calcolando il prodotto scalare  $\langle u_n(t), u_m(t) \rangle$  si dimostra che tale insieme costituisce una base ortonormale. Detto ciò, è possibile scrivere un generico elemento  $s_{T_0} \in S_{T_0}$  come combinazione lineare dei segnali della base appena introdotta. Il risultato è una serie bilatera di questo tipo:

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n u_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

Ricordiamo che i coefficienti  $\alpha_n$  di un segnale rappresentato in una base ortonormale equivalgono al prodotto scalare tra il segnale stesso e l'ennesimo vettore della base ortonormale:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \langle s_{T_0}, u_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t) \cdot u_n^*(t) dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_0}\right) dt = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt
 \end{aligned}$$

Dunque, sostituendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t - mT_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}} \cdot \Pi\left(\frac{t-mT_0}{T_0}\right) = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\Pi\left(\frac{t-mT_0}{T_0}\right)}_{q.o. = 1} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}}
 \end{aligned}$$

Riscriviamo  $e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}}$  utilizzando le formule di Eulero:

$$\begin{aligned}
 e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}} &= \cos\left(2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}\right) + j \sin\left(2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}\right) = \\
 &= \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0} - 2\pi n m\right) + j \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0} - 2\pi n m\right) = \\
 &= \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) = \\
 &= e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}
 \end{aligned}$$

Coseno e Seno sono periodici di periodo  $2\pi$

Quindi:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{(t-mT_0)}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

A questo punto definiamo rispettivamente la frequenza e i coefficienti di Fourier:



$$S_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt}{\sqrt{T_0}} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

A questo punto si perviene all'espressione della cosiddetta espansione di un segnale periodico in serie di Fourier (in forma esponenziale o euleriana):

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{T_0}} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

Da ciò si evince che la conoscenza dell'insieme numerabile dei coefficienti  $S_n$  (generalmente complessi) e del periodo  $T_0$ , consente la ricostruzione di un segnale periodico  $s(t)$ . Un segnale periodico può essere rappresentato tramite diagrammi a righe in cui sono riportati i moduli  $|S_n|$  e gli argomenti  $\theta_n$  di  $S_n$ , i quali sono detti rispettivamente spettri di ampiezza e di fase del segnale  $s(t)$ .

## TEOREMA 8

### Serie di Fourier: forma trigonometrica

La serie di Fourier in forma esponenziale:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

Può essere riscritta, spezzando l'espressione in due sommatorie, come segue:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + S_0 \cdot e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

Effettuando la sostituzione  $n \rightarrow -n$ :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + S_{-n} \cdot e^{j2\pi (-n) \frac{t}{T_0}} \right)$$

Si esplicita  $S_n$  portandolo in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt - j \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \\ B_n &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt \end{aligned}$$

Risulta:

$$S_n = \frac{A_n - jB_n}{2}$$

Sostituendo  $S_n$  nella formula della serie di Fourier precedentemente ricavata:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n - jB_n}{2} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + \frac{A_{-n} - jB_{-n}}{2} \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right)$$

Consideriamo le proprietà trigonometriche di  $A_n, B_n$  ed  $S_0$ :

$$A_{-n} = A_n \quad B_{-n} = -B_n \quad S_0 = \frac{A_0}{2} \equiv a_0$$

Sostituendo e ridistribuendo i termini:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n - jB_n}{2} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + \frac{A_n + jB_n}{2} \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right) = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{2} \cdot \left( e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right) - j \frac{B_n}{2} \cdot \left( e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} - e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right) \right] = \boxed{j = -\frac{1}{j}} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n}{2} \cdot \left( e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} + e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right) + \frac{B_n}{2j} \cdot \left( e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} - e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} \right) \right] = \boxed{\text{Formule di Eulero}} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) + B_n \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T_0} \right) \end{aligned}$$

Quest'ultima è la forma trigonometrica della serie di Fourier. L'argomento della sommatoria prende il nome di armonica di ordine  $n$  della funzione  $s(t)$  e, in particolare, l'armonica di ordine 1 è detta armonica fondamentale. Infine,  $a_0$  è detto valore medio del segnale in un periodo e vale appunto:

$$a_0 \equiv \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) dt$$

## TEOREMA 9

### Deduzione elementare della trasformata di Fourier (\*)

Sia  $s(t)$  una funzione sommabile rappresentativa di un segnale  $s$  ad energia finita e sia  $s_T(t) = s(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$  la corrispondente funzione troncata. Una rappresentazione di quest'ultima si può ottenere mediante il seguente insieme di funzioni ortonormali:

$$u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \quad n \in \mathbb{Z}$$

La rappresentazione in questione è ottenibile come combinazione lineare dei segnali della precedente base ortonormale:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n u_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

Ricordiamo che i coefficienti  $\alpha_n$  di un segnale rappresentato in una base ortonormale equivalgono al prodotto scalare tra il segnale stesso e l' $n$ -esimo vettore della base ortonormale:

$$\alpha_n = \langle s_T, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi n \frac{\tau}{T}} d\tau$$

Sostituendo  $\alpha_n$  nell'espressione di  $s_T(t)$ :

$$s_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi n \frac{\tau}{T}} d\tau \right) \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

L'integrale interno alla sommatoria dipende sia da  $n$  che da  $T$ , quindi poniamo:

$$S\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi n \frac{\tau}{T}} d\tau$$

Dunque, risulta:

$$s_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{n}{T}\right) \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

Calcolando il limite di  $s_T(t)$  si ricostruisce  $s(t)$ :

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{n}{T}\right) \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right)$$

A questo punto osserviamo che per  $T \rightarrow \infty$  il termine  $\frac{1}{T} \rightarrow df$ , dove  $df$  rappresenta un incremento infinitesimale della dimensione della frequenza. Allora il termine  $\frac{n}{T} \rightarrow n \cdot df$ , ma anche  $n$  tende ad infinito, dunque  $n \cdot df \rightarrow f$ . In definitiva, al crescere di  $T$  la quantità  $f_n = \frac{n}{T}$  diventa una variabile continua  $f$ . Possiamo quindi considerare la somma di infinitesimi come integrale:

$$\begin{aligned} s(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot S\left(\frac{n}{T}\right) \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right) \cdot e^{j2\pi f t} df \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right) \cdot e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

Il limite per  $T \rightarrow \infty$  della rect è quasi ovunque uguale a 1

Nella precedente si individuano le espressioni, se esistono, rispettivamente della trasformata e dell'antitrasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

## TEOREMA 10

### Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

Data una funzione  $s(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , per cui vale quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

La definizione di trasformata di Fourier è valida, infatti è sicuramente vero che:

$$|S(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

La trasformata di Fourier di una funzione sommabile esiste dunque certamente ed è limitata e continua, ovvero:

$$\lim_{f \rightarrow f_0} S(f) = S(f_0)$$

Ciò si dimostra mediante il teorema di Lebesgue:

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow f_0} S(f) &= \lim_{f \rightarrow f_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{f \rightarrow f_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} dt = S(f_0) \end{aligned}$$

Bisogna precisare infine che la trasformata di Fourier di una funzione appartenente ad  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  non appartiene necessariamente ad  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ . Infatti, per esempio:

$$\mathcal{F} \left[ \Pi \left( \frac{t}{T} \right) \right] = T \text{sinc}(fT) \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

## TEOREMA 11

### Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ : teorema di Parseval (\*)

Data una funzione  $s(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , quindi che sia a quadrato sommabile e sommabile, allora la sua trasformata  $S(f)$  è una funzione appartenente ad  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Vale dunque la cosiddetta uguaglianza di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Da cui:

$$||s(t)|| = ||S(f)||$$

L'uguaglianza di Parseval si dimostra tramite l'omonimo teorema:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right) dt = \boxed{\text{Si scambia l'ordine di integrazione}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt \right) df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right)^* df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot S(f)^* df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che, prese due funzioni  $s_1(t), s_2(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , dette  $S_1(f)$  ed  $S_2(f)$  le loro rispettive trasformate di Fourier, vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2(f)^* df$$

## TEOREMA 12

### Trasformata di Fourier in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Sia  $s(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  una funzione a quadrato sommabile. Nella metrica di  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  la funzione troncata  $s_T(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  tende ad  $s(t)$ , ovvero la loro distanza euclidea tende a zero quando  $T \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - s_T(t)|^2 dt = 0$$

Dato che  $s_T(t)$  è a supporto limitato, oltre ad essere a quadrato sommabile è anche sommabile e dunque ammette trasformata di Fourier:

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Per il teorema di Parseval, vale la seguente uguaglianza:

$$||s_T(t)|| = ||S_T(f)||$$

Inoltre, poiché un qualsiasi troncamento è a quadrato sommabile e la trasformata di Fourier è lineare, allora la trasformata della differenza è la differenza delle trasformate:

$$||s_{T'}(t) - s_T(t)|| = ||S_{T'}(f) - S_T(f)||$$

Di conseguenza, comunque scelta una successione  $\{T_n\}$ , dato che  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{T_n}(t) = s(t)$  (espandendo il periodo del segnale troncato si ottiene il segnale di partenza), allora  $\{s_{T_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  è una successione di Cauchy convergente ad  $s(t)$ . Dunque, esiste un  $n_\varepsilon$  tale per cui  $p, q > n_\varepsilon$  implicano  $||s_{T_p}(t) - s_{T_q}(t)|| < \varepsilon$ . Perciò si ha anche:

$$||s_{T_p}(t) - s_{T_q}(t)|| = ||S_{T_p}(f) - S_{T_q}(f)|| < \varepsilon$$

E di conseguenza la successione delle trasformate dei troncati  $\{S_{T_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$  è di Cauchy. Poiché tale successione è di Cauchy e  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  è uno spazio di Hilbert (completo e dotato di prodotto scalare), allora la successione  $\{S_{T_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$  converge ad un  $S(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Da quanto detto, esplicitando  $S_T(f)$ , deriva che:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f) - S_T(f)|^2 df = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(f) - \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df =$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(f) - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(f) - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0
 \end{aligned}$$

Ciò significa che la trasformata di  $s(t)$  è quella  $S(f)$  la cui distanza euclidea da  $S_T(f)$  tende a 0 al divergere di  $T$ . Se una  $S(f)$  soddisfa la precedente per una rappresentazione  $s(t)$  di un segnale  $s$ , essa la soddisferà anche per tutte le altre rappresentazioni dello stesso segnale.

Per definire l'antitrasformata di  $S(f) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , si procede in modo analogo. Infatti, la trasformata troncata:

$$S_B(f) = S(f) \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Essendo a supporto limitato, oltre ad essere a quadrato sommabile, è anche sommabile e dunque ammette antitrasformata di Fourier:

$$\tilde{s}_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_B(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Per il teorema di Parseval vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_B(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}_B(t)|^2 dt$$

Allora vale sicuramente anche:

$$\begin{aligned}
 \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t) - \tilde{s}_B(t)|^2 dt &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{s}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} S_B(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right|^2 dt = \\
 &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{s}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \Pi\left(\frac{f}{B}\right) \cdot e^{j2\pi ft} df \right|^2 dt = \\
 &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \tilde{s}(t) - \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right|^2 dt = 0
 \end{aligned}$$

Ciò significa che l'antitrasformata di  $S(f)$  è quella  $s(t)$  la cui distanza euclidea da  $\tilde{s}_B(t)$  tende a 0 al divergere di  $B$ . Se una  $s(t)$  soddisfa la precedente per una data  $S(f)$ , essa la soddisferà anche per tutte le funzioni che sono uguali quasi ovunque ad  $S(f)$ .

Questo implica che  $\lim_{B \rightarrow \infty} \tilde{s}_B(t) = \tilde{s}(t)$  nella metrica di  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , e dunque è soddisfatta anche la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Resta da dimostrare che  $\tilde{s}(t) = s(t)$  quasi ovunque, cioè che:

$$\|\tilde{s}(t) - s(t)\|^2 = 0$$

Dimostriamolo, ricordando le proprietà del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \|\tilde{s}(t) - s(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t) - s(t)|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\tilde{s}^*(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)\tilde{s}(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Osserviamo che il primo e l'ultimo addendo sono uguali, in quanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2 dt$$

Gli ultimi due addendi sono anch'essi uguali, infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^*(t)\tilde{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\tilde{s}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t) \cdot \left[ \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_B(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right]^* dt$$

Uscendo i limiti:

$$= \lim_{T, B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_B^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df \right] dt =$$

Invertendo l'ordine di integrazione:

$$= \lim_{T, B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_B^*(f) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right] df =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{T, B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_B^*(f) \cdot S_T(f) df = \lim_{T, B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_T(f) \cdot S_B^*(f) df = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df
\end{aligned}$$

Quindi, la norma quadra sarà pari a:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{s}(t) - s(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{s}^*(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \tilde{s}(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{s}(t)|^2 dt \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df - 2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = 0
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, quasi ovunque, vale:

$$s(t) = \tilde{s}(t)$$

## TEOREMA 13

### Proprietà di derivazione della trasformata di Fourier

#### Derivazione nel dominio del tempo:

Sia:

$$s(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

continua e derivabile quasi ovunque con derivata appartenente ad  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Derivando ambo i membri della precedente rispetto a  $t$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(S(f) \cdot e^{j2\pi ft})}{dt} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \frac{d(e^{j2\pi ft})}{dt} df = \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f \cdot S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[j2\pi f \cdot S(f)] \end{aligned}$$

Applicando la trasformata ambo i membri, risulta:

$$\mathfrak{F}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = \mathfrak{F}[\mathfrak{F}^{-1}[j2\pi f \cdot S(f)]] = j2\pi f \cdot S(f) = j2\pi f \cdot \mathfrak{F}[s(t)]$$

La proprietà di derivazione appena enunciata si estende a derivate di qualsiasi ordine:

$$\begin{aligned} \frac{d^n s(t)}{dt^n} &= \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f)^n \cdot S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \mathfrak{F}^{-1}[(j2\pi f)^n \cdot S(f)] \\ \Rightarrow \mathfrak{F}\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] &= (j2\pi f)^n \cdot \mathfrak{F}[s(t)] \end{aligned}$$

#### Derivazione nel dominio della frequenza:

Sia:

$$S(f) = \mathfrak{F}[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

continua e derivabile quasi ovunque con derivata appartenente ad  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Derivando ambo i membri della precedente rispetto a  $f$ , si ottiene:



$$\begin{aligned}
\frac{dS(f)}{df} &= \frac{d \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt}{df} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(s(t) \cdot e^{-j2\pi ft})}{df} dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \frac{d(e^{-j2\pi ft})}{df} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (-j2\pi t) \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\
&= \mathfrak{F}[-j2\pi t \cdot s(t)]
\end{aligned}$$

Applicando l'antitrasformata ambo i membri, risulta:

$$\mathfrak{F}^{-1} \left[ \frac{dS(f)}{df} \right] = \mathfrak{F}^{-1} [\mathfrak{F}[-j2\pi t \cdot s(t)]] = -j2\pi t \cdot s(t) = -j2\pi t \cdot \mathfrak{F}^{-1}[S(f)]$$

La proprietà di derivazione appena enunciata si estende a derivate di qualsiasi ordine:

$$\begin{aligned}
\frac{d^n S(f)}{dt^n} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-j2\pi t)^n \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{F}[(-j2\pi t)^n \cdot s(t)] \\
\Rightarrow \mathfrak{F}^{-1} \left[ \frac{d^n S(f)}{dt^n} \right] &= (-j2\pi t)^n \cdot \mathfrak{F}^{-1}[S(f)]
\end{aligned}$$

## TEOREMA 14

### Derivata di una distribuzione (\*)

Si consideri una funzione  $f$  derivabile in  $\mathbb{R}$  con derivata continua. Detta  $f'$  la sua derivata, a questa si può associare la seguente distribuzione regolare:

$$\langle f', \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \cdot \phi(t) dt$$

Applicando il metodo di integrazione per parti, si ottiene:

$$\langle f', \phi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi'(t) dt + [f(t) \cdot \phi(t)]_{-\infty}^{+\infty}$$

Poiché  $\phi$  è una funzione di prova e dunque a supporto limitato e di classe  $c^\infty$ , il termine  $[f(t) \cdot \phi(t)]_{-\infty}^{+\infty}$  è pari a zero e risulta:

$$\langle f', \phi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi'(t) dt$$

Ovvero:

$$\langle f', \phi \rangle = \langle f, -\phi' \rangle$$

Da ciò si deduce che per derivata di una distribuzione si intende una distribuzione che opera sulla funzione di prova in modo analogo a come la distribuzione originaria opererebbe sull'opposto della derivata della funzione di prova. Questa considerazione si estende anche al caso di distribuzioni singolari.

Applicando ricorsivamente la precedente, si ottiene l'espressione della derivata generalizzata di ordine  $k$  di una distribuzione:

$$\langle T^k, \phi \rangle = \langle T, (-1)^k \phi^k \rangle$$

## TEOREMA 15

### Formula di Poisson (\*)

Si consideri la seguente funzione:

$$f_N(t) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

La quale rappresenta la somma di funzioni localmente sommabili e, in virtù di ciò, risulta anch'essa localmente sommabile. Si consideri adesso la distribuzione generata dalla funzione  $f_N(t)$ , che associa alla funzione di prova il seguente valore:

$$\langle f_N, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-N}^N e^{j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \cdot \phi(t) dt$$

Dividendo l'integrale in vari intervalli di ampiezza  $T$ , come il supporto della funzione, risulta:

$$\begin{aligned} \langle f_N, \phi \rangle &= \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{kT}^{(k+1)T} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \cdot \phi(t) dt = \boxed{t' = t - kT \Rightarrow t = t' + kT} \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{j2\pi n \frac{t' + kT}{T}} \cdot \phi(t' + kT) dt' = \end{aligned}$$

Si riscrive  $e^{j2\pi n \frac{t' + kT}{T}} = e^{j2\pi n \frac{t'}{T}} \cdot e^{j2\pi nk} = e^{j2\pi n \frac{t'}{T}} \cdot \underbrace{[\cos(2\pi nk) + j \sin(2\pi nk)]}_{1+j \cdot 0=1}$  :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{j2\pi n \frac{t'}{T}} \cdot \phi(t' + kT) dt' = \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{j2\pi n \frac{t'}{T}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t' + kT) dt' \end{aligned}$$

La sommatoria interna costituisce la ripetizione periodica  $\tilde{\phi}_T(t)$  della funzione di prova  $\phi(t)$ . La  $\tilde{\phi}_T(t)$  può dunque essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\tilde{\phi}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{Tn} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

In cui:

$$\tilde{S}_{Tn} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \tilde{\phi}_T(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt$$

Sostituendo in  $\langle f_N, \phi \rangle$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle f_N, \phi \rangle &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e^{j2\pi n \frac{t'}{T}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(t' + kT) dt' = \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \tilde{\phi}_T(t) \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \boxed{n \rightarrow -n} \\ &= \sum_{n=-N}^N \tilde{S}_{Tn} \end{aligned}$$

Se a questo punto si effettua il limite per  $N$  che tende ad infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle f_N, \phi \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \tilde{S}_{Tn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{Tn} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = \tilde{\phi}_T(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(-kT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(kT) = \langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \phi(t) \rangle < \infty \quad \boxed{\text{Pettine di delta}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\langle \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}, \phi(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-N}^N \langle e^{j2\pi n \frac{t}{T}}, \phi(t) \rangle = \langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \phi(t) \rangle$$

Risulta la seguente uguaglianza, nota come formula di Poisson:

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Essa ci dice che un treno di esponenziali pesato come distribuzione opera come un pettine di delta.



## TEOREMA 16

### Trasformata di Fourier di una distribuzione (\*)

Sia  $x(t)$  una funzione localmente sommabile e dotata di trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Alla precedente si può associare la seguente distribuzione:

$$\langle X(f), \phi_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot \phi(f) df$$

Esplicitando  $X(f)$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[x(t)], \phi_f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right) df = \boxed{\text{Si scambia l'ordine di integrazione}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \Phi(t) dt = \\ &= \langle x(t), \Phi(t) \rangle \end{aligned}$$

Dove  $\Phi(t)$  è la trasformata di Fourier di  $\phi(f)$ .

Bisogna osservare che, mentre  $\phi(f) \in D$  (ovvero  $\phi(f)$  appartiene allo spazio delle funzioni di prova),  $\Phi(t) \notin D$ . Occorre quindi definire uno spazio che, oltre alle funzioni di prova, contenga anche la trasformata di Fourier di ogni suo elemento. A questo proposito, sia  $\phi(t)$  una funzione dotata di derivate di qualsiasi ordine continue, tali che  $\forall k, p \in \mathbb{N}$  risulti:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^k \phi^{(p)}(t)| = 0$$

Allora  $\phi(t)$  è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata  $\Phi(f)$  è continua, dotata di derivate di qualsiasi ordine continue e tali che:

$$\lim_{|f| \rightarrow \infty} |f^k \Phi^{(p)}(f)| = 0$$

Tutte le funzioni che rispettano il teorema appena enunciato prendono il nome di funzioni temperate e vanno a definire lo spazio denotato con  $S$ , in cui  $D$  è contenuto. Chiaramente

le distribuzioni su  $S$  sono dette distribuzioni temperate e la loro trasformata è così definita:

$$\langle \mathcal{F}[T], \phi_f \rangle = \langle T, \Phi_t \rangle \quad \forall \phi, \Phi \in S$$

Il che significa che la trasformata di Fourier di una distribuzione  $T$  è quella distribuzione che opera sulla funzione  $\phi_f$  come la distribuzione  $T$  opererebbe sulla trasformata  $\Phi_t$  di  $\phi_f$ . In maniera analoga si definisce l'antitrasformata di una distribuzione temperata:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \Phi_t \rangle = \langle T, \phi_f \rangle \quad \forall \phi, \Phi \in S$$

## TEOREMA 17

### Trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto limitato (\*)

Sia  $x(t)$  una funzione sommabile a supporto limitato e dotata di trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Alla precedente si può associare la seguente distribuzione:

$$\langle X(f), \phi_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot \phi(f) df$$

Esplicitando  $X(f)$ :

$$\langle \mathfrak{F}[x(t)], \phi_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \right) df$$

Essendo  $x(t)$  a supporto limitato e poiché  $e^{-j2\pi ft} \in E$  (spazio delle funzioni continue e di classe  $c^\infty$ ), l'integrale interno rappresenta una distribuzione regolare in  $E'$  (spazio delle distribuzioni) dipendente dal parametro  $f$ . Si può dunque scrivere:

$$\mathfrak{F}[x(t)] = \langle x(t), e^{-j2\pi ft} \rangle$$

Generalizzando alle distribuzioni  $T$  singolari a supporto limitato, si scrive:

$$\mathfrak{F}[T] = \langle T, e^{-j2\pi ft} \rangle \quad \forall T \in E'$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[T] = \langle T, e^{j2\pi ft} \rangle \quad \forall T \in E'$$

Le quali dipendono rispettivamente dalle variabili  $f$  e  $t$ .

A questo punto, si consideri il limite del rapporto incrementale della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{\langle T, e^{-j2\pi(f+\Delta f)t} \rangle - \langle T, e^{-j2\pi ft} \rangle}{\Delta f} &= \langle T, \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{e^{-j2\pi(f+\Delta f)t} - e^{-j2\pi ft}}{\Delta f} \rangle = \\ &= \langle T, -j2\pi t \cdot e^{-j2\pi ft} \rangle \end{aligned}$$

Questo limite esiste, finito, per ogni  $f$ , dato che  $-j2\pi t \cdot e^{-j2\pi ft} \in E$ . Ciò comporta che la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto limitato, essendo derivabile (e anche infinite volte), è continua. Considerazioni analoghe valgono per l'antitrasformata.

## TEOREMA 18

### Trasformata di Fourier della convoluzione tra distribuzioni

Siano  $U$  e  $V$  due distribuzioni rispettivamente temperata e a supporto limitato. Le rispettive trasformate di Fourier saranno le seguenti:

$$\langle \mathcal{F}[U], \phi_f \rangle = \langle U, \Phi_t \rangle \quad \forall \phi, \Phi \in \mathcal{S}$$

$$\mathcal{F}[V] = \langle V, e^{-j2\pi f t} \rangle$$

Ricordando che la convoluzione tra distribuzioni è così definita:

$$\langle U * V, \phi \rangle = \langle U_\tau, \langle V_\theta, \phi(\tau + \theta) \rangle \rangle$$

Risulta che la trasformata della convoluzione è pari a:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[U * V], \phi_f \rangle &= \langle U * V, \Phi_t \rangle = \langle U_\tau, \langle V_\theta, \Phi(\tau + \theta) \rangle \rangle = \\ &= \langle U_\tau, \langle V_\theta, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot e^{-j2\pi f(\tau + \theta)} df \rangle \rangle = \\ &= \langle U_\tau, \langle V_\theta, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot e^{-j2\pi f \tau} \cdot e^{-j2\pi f \theta} df \rangle \rangle = \\ &= \langle U_\tau, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot \langle V_\theta, e^{-j2\pi f \theta} \rangle \cdot e^{-j2\pi f \tau} df \rangle \end{aligned}$$

Poiché  $V$  è supposta a supporto limitato, allora  $\langle V_\theta, e^{-j2\pi f \theta} \rangle$  è la trasformata di Fourier di  $V$ , che è una funzione continua e derivabile infinite volte di  $f$ . Da ciò consegue che:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[U * V], \phi_f \rangle &= \langle U_\tau, \int_{-\infty}^{\infty} \phi(f) \cdot \mathcal{F}[V] \cdot e^{-j2\pi f \tau} df \rangle = \\ &= \langle U_\tau, \mathcal{F}[\mathcal{F}[V] \cdot \phi_f] \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[U], \mathcal{F}[V] \cdot \phi_f \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[U] \cdot \mathcal{F}[V], \phi_f \rangle \end{aligned}$$

Si “torna indietro” usando la definizione di distribuzione temperata

Si sfrutta la proprietà del prodotto di una funzione per una distribuzione

Quindi risulta che:

$$\mathcal{F}[U * V] = \mathcal{F}[U] \cdot \mathcal{F}[V]$$

## TEOREMA 19

### Stabilità di un sistema lineare (BIBO)

Una trasformazione lineare si dice “stabile” se ad ogni ingresso limitato corrisponde un’uscita altrettanto limitata. Si parla in questi casi di stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output). In termini più formali, avendo:

$$|x(t)| < M_x \forall t$$

Deve risultare:

$$|y(t)| < M_y \forall t$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema LTI (lineare tempo invariante) sia stabile in senso BIBO è che la sua risposta all’impulso sia sommabile. Se il sistema non è tempo invariante allora la precedente condizione è solo sufficiente. Dimostriamo quest’ultima ipotesi, ricordando che nel caso di sistemi lineari la risposta del sistema è data dalla seguente relazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \tilde{h}(t, \tau) d\tau$$

Applichiamo il valore assoluto e osserviamo la seguente disuguaglianza:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \tilde{h}(t, \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |\tilde{h}(t, \tau)| d\tau$$

Ma poiché, per ipotesi,  $|x(\tau)| < M_x$ :

$$|y(t)| \leq M_x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(t, \tau)| d\tau$$

Per garantire che  $|y(t)|$  sia minore o uguale di  $M_y$  (ovvero che sia una quantità finita), deve risultare:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(t, \tau)| d\tau < \infty$$

Da ciò si evince che la risposta impulsiva è sommabile (condizione sufficiente).

Nel caso di sistemi LTI, dimostriamo che la condizione è anche necessaria supponendo per assurdo che, se la risposta impulsiva non è sommabile, il sistema sia comunque stabile BIBO. Per farlo, ricordiamo che per sistemi LTI la risposta è pari a:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Supponendo quindi che la risposta impulsiva non sia sommabile, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$$

Scegliendo un ingresso limitato del tipo:

$$x(t) = \frac{[h(-t)]^*}{|h(-t)|}$$

In corrispondenza ad esso, l'uscita calcolata in  $t = 0$  sarebbe la seguente:

$$\begin{aligned} y(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[h(-\tau)]^*}{|h(-\tau)|} \cdot h(-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|h(-\tau)|^2}{|h(-\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)| d\tau = \infty \end{aligned}$$

Si applica la definizione di modulo quadro

Il che è assurdo perché, se il sistema fosse lineare, sia l'entrata (che avevamo supposto limitata) che l'uscita dovrebbero risultare limitate. Quindi è dimostrato che, nel caso di sistemi LTI, la sommabilità della risposta all'impulso sia anche una condizione necessaria.

## TEOREMA 20

### Teorema di Wiener-Khinchine (\*)

Data la funzione di autocorrelazione di un segnale:

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt$$

Si consideri la sua trasformata di Fourier:

$$\mathfrak{F}[\gamma(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Esplicitando  $\gamma(\tau)$ , risulta:

$$\mathfrak{F}[\gamma(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt \right) d\tau$$

Cambiando l'ordine di integrazione:

$$\mathfrak{F}[\gamma(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt$$

Denotando con  $S(f)$  la trasformata di Fourier del segnale e utilizzando la proprietà di traslazione nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\gamma(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot S(f) \cdot e^{j2\pi ft} dt = \\ &= S(f) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt = \\ &= S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 = W(f) \end{aligned}$$

Da cui si evince che la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione è pari alla densità spettrale di energia.

## TEOREMA 21

### Trasformata di Hilbert

Siano  $s(t)$  e  $S(f)$  rispettivamente un segnale reale e la sua trasformata di Fourier. Se  $S(f)$  non presenta una delta di Dirac centrata nell'origine, allora ad essa si può associare la funzione  $Z(f)$  così definita:

$$Z(f) = S(f) \cdot [1 + \text{sgm}(f)]$$

La funzione segno è così definita:

$$\text{sgm}(f) = \begin{cases} -1; & f < 0 \\ 0; & f = 0 \\ 1; & f > 0 \end{cases}$$

Quindi  $Z(f)$  è unilatera (identicamente nulla per  $f < 0$ ). Per tale motivo  $Z(f)$  non gode di simmetria hermitiana ( $Z(-f) = Z^*(f)$ ) e, di conseguenza, la sua antitrasformata  $z(t)$  è una funzione complessa ricavabile applicando la proprietà di convoluzione nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}[Z(f)] &= z(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S(f)] * \mathfrak{F}^{-1}[1 + \text{sgm}(f)] = \\ &= s(t) * \left[ \delta(t) - Pf\left(\frac{1}{j\pi t}\right) \right] = s(t) * \left[ \delta(t) - \frac{j}{j} \cdot \frac{1}{j} \cdot Pf\left(\frac{1}{\pi t}\right) \right] = \\ &= s(t) * \left[ \delta(t) + jPf\left(\frac{1}{\pi t}\right) \right] = s(t) + \left[ s(t) * jPf\left(\frac{1}{\pi t}\right) \right] \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau = s(t) * Pf\left(\frac{1}{\pi t}\right)$$

Risulta:

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

Trasformando  $\hat{s}(t)$  si ottiene:

$$\hat{S}(f) = S(f) \cdot (-j \text{sgm}(f)) = -j S(f) \text{sgm}(f)$$

Da cui si evince che:



$$S(f) = \frac{\hat{S}(f)}{-j \operatorname{sgm}(f)} = \frac{j \operatorname{sgm}(f)}{j \operatorname{sgm}(f)} \cdot \frac{\hat{S}(f)}{-j \operatorname{sgm}(f)} = \underbrace{\frac{j \operatorname{sgm}(f)}{-j^2 \operatorname{sgm}^2(f)}}_1 \cdot \hat{S}(f) = j \hat{S}(f) \operatorname{sgm}(f)$$

Da cui, antitrasformando, si ottiene:

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \cdot VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{s}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

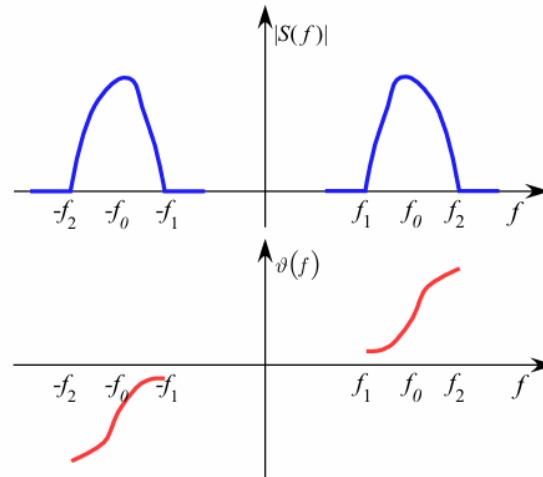
$\hat{s}(t)$  ed  $s(t)$  sono rispettivamente la **trasformata** e l'**antitrasformata di Hilbert**.

## TEOREMA 22

### Segnali a banda o durata rigorosamente limitata

Un segnale  $s(t)$  si dice a **banda rigorosamente limitata** se la sua trasformata di Fourier soddisfa la seguente condizione:

$$\exists f', f'' \text{ con } 0 \leq f' \leq f'' < \infty \text{ t.c. } S(f) = 0 \quad \forall f \text{ t.c. } |f| \notin [f', f'']$$



Siano  $f_1$  l'estremo superiore dell'insieme  $\{f'\}$  ed  $f_2$  l'estremo inferiore dell'insieme  $\{f''\}$ , si definisce **ampiezza di banda** del segnale la seguente quantità:

$$B = f_2 - f_1$$

$f_1$  ed  $f_2$  sono rispettivamente dette **frequenza di taglio** inferiore e superiore. Se per un segnale  $s(t)$  a banda rigorosamente limitata risulta  $f_1 = 0$ , allora  $s(t)$  è un segnale **passabasso**, altrimenti è un segnale **passabanda**.

Un segnale  $s(t)$  si dice a **durata rigorosamente limitata** se è soddisfatta la seguente condizione:

$$\exists t', t'' \text{ t.c. } s(t) = 0 \quad \forall t \in [t', t'']$$

Si definisce **durata** del segnale la misura dell'intersezione tra tutti gli intervalli  $[t', t'']$  che verificano la precedente:

$$T = t'' - t'$$

Dove  $t''$  e  $t'$  sono gli estremi dell'intersezione.

Bisogna precisare infine che un segnale non può contemporaneamente essere a banda e durata rigorosamente limitate. Per dimostrarlo, consideriamo la trasformata di Fourier di un segnale a banda rigorosamente limitata:

$$S(f) = S(f) \cdot \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + S(f) \cdot \Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right)$$

Dove  $f_0 = \frac{f_1 + f_2}{2}$  è il valore della **frequenza di centro banda**. Antitrasformando  $S(f)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[S(f)] &= [s(t) * B \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi f_0 t}] + [s(t) * B \operatorname{sinc}(Bt) e^{j2\pi f_0 t}] = \\ &= s(t) * B [\operatorname{sinc}(Bt) e^{j2\pi f_0 t} + \operatorname{sinc}(Bt) e^{-j2\pi f_0 t}]\end{aligned}$$

Considerando che abbiamo potuto esprimere  $s(t)$  mediante una convoluzione in cui uno dei due operandi ha supporto non limitato, allora sicuramente  $s(t)$  non sarà a durata rigorosamente limitata. Analogamente, la trasformata di Fourier di un segnale a durata rigorosamente limitata si estenderà su tutto l'asse delle frequenze.

## TEOREMA 23

### Proprietà dei segnali a banda rigorosamente limitata: segnali passabasso (\*)

Dato un segnale passabasso  $s(t)$ , esso si può esprimere tramite una funzione continua e derivabile infinite volte:

$$s(t) = \int_{-f_m}^{f_m} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Dove  $f_m$  è la frequenza di taglio. Applicando il valore assoluto ad entrambi i membri della precedente:

$$|s(t)| = \left| \int_{-f_m}^{f_m} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \right|$$

Dalla disuguaglianza triangolare per integrali discende che:

$$|s(t)| \leq \int_{-f_m}^{f_m} |S(f)| \cdot |e^{j2\pi ft}| df$$

E poiché il modulo dell'esponenziale complesso è pari a 1  $\forall f, t$ :

$$|s(t)| \leq \int_{-f_m}^{f_m} |S(f)| df < \infty$$

Derivando  $s(t)$  rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \int_{-f_m}^{f_m} j2\pi f \cdot S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Facendo lo stesso con  $|s(t)|$ , si ottiene:

$$\left| \frac{ds(t)}{dt} \right| \leq \int_{-f_m}^{f_m} |2\pi f| \cdot |S(f)| df \leq 2\pi f_m \cdot \int_{-f_m}^{f_m} |S(f)| df$$

Tutto ciò può essere generalizzato alla derivata n-esima, ottenendo la seguente limitazione:

$$\left| \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right| = (2\pi f_m)^n \cdot \int_{-f_m}^{f_m} |S(f)| df$$

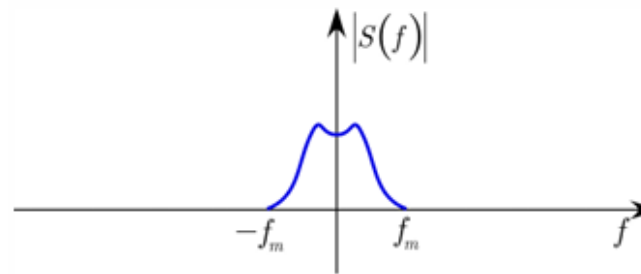


Ciò vuol dire che il modulo di un segnale passabasso è limitato, così come lo è quello della sua derivata. Questi limiti ovviamente dipendono dall'ampiezza  $f_m$  della banda del segnale. Pertanto, un segnale passabasso ha un andamento regolare nel tempo con variazioni tanto più lente quanto più piccola è la sua frequenza di taglio.

## TEOREMA 24

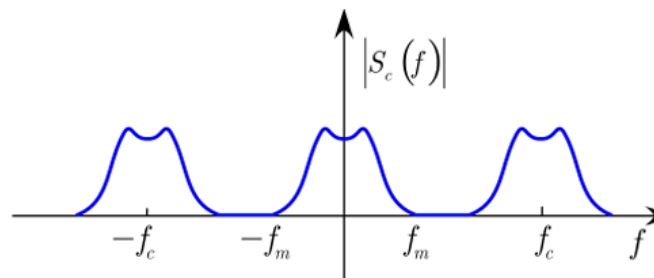
### Teorema del campionamento (Nyquist-Shannon) (\*)

Un segnale a banda limitata può essere ricostruito conoscendo i valori (campioni) assunti dal segnale stesso in corrispondenza di un'opportuna sequenza di istanti. Dato un segnale  $s(t)$  rigorosamente passabasso, la sua trasformata di Fourier si può scrivere come segue:



$$S(f) = S(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right) \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

Si consideri adesso la funzione  $S_c(f)$ , ottenuta dalla ripetizione periodica di periodo  $f_c$  dello spettro  $S(f)$ :



$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c)$$

Scegliendo  $f_c \geq 2f_m$  si evita che le ripetizioni si sovrappongano, quindi:

$$S(f) = S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

Da cui si evince che  $S(f)$  e  $S_c(f)$  coincidono nell'intervallo  $\left(-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right)$ . Poiché  $S_c(f)$  è periodica, può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n \frac{f}{f_c}}$$

Dove:

$$C_n = \frac{1}{f_c} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{-j2\pi n \frac{f}{f_c}} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) df = \frac{1}{f_c} \cdot \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} S(f) \cdot e^{-j2\pi n \frac{f}{f_c}} df$$

Poiché  $S(f)$  è a supporto limitato, possiamo comunque scrivere l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$  ottenendo lo stesso risultato:

$$C_n = \frac{1}{f_c} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{-j2\pi n \frac{f}{f_c}} df = \frac{1}{f_c} \cdot s\left(-\frac{n}{f_c}\right)$$

Sostituendo quanto ricavato nell'espressione della  $S(f)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} S(f) &= S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_c} \cdot s\left(-\frac{n}{f_c}\right) \cdot e^{j2\pi n \frac{f}{f_c}} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \boxed{n \rightarrow -n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{f_c} \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) \cdot s\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot e^{-j2\pi n \frac{f}{f_c}} \end{aligned}$$

Se antitrasformiamo  $S(f)$ , ricordando che l'antitrasformata di  $\Pi\left(\frac{f}{f_c}\right)$  è  $f_c \operatorname{sinc}(f_c t)$  e che il prodotto per un fattore  $e^{-j2\pi n \frac{f}{f_c}}$  equivale a una traslazione:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot \left[ \operatorname{sinc}(f_c t) * \delta\left(t - \frac{n}{f_c}\right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{f_c}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(f_c \left(t - \frac{n}{f_c}\right)\right)$$

Quest'ultima rappresenta l'espressione formale del teorema del campionamento. Da essa risulta come un segnale passabasso possa essere ricostruito a partire dalla sequenza

$\left\{ s\left(\frac{n}{f_c}\right) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  dei suoi campioni. Tale ricostruzione avviene sommando una serie di

funzioni *sinc* opportunamente ritardate e pesate per mezzo dei campioni  $s\left(\frac{n}{f_c}\right)$ . Tale

teorema vale esclusivamente a patto che sia rispettata la condizione  $f_c \geq 2f_m$ . Risulta

evidente che  $f_c = 2f_m$ , detta **frequenza di Nyquist**, sia la minima frequenza di

campionamento che soddisfa tale limitazione. La quantità  $T_c = \frac{1}{2f_m}$ , detta anche **periodo**

**di Nyquist**, è il corrispondente massimo periodo di campionamento.

## TEOREMA 25

### Teorema del campionamento ideale

Dato un segnale  $s(t)$  rigorosamente passabasso, si consideri la ripetizione periodica della sua trasformata di Fourier:

$$S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c)$$

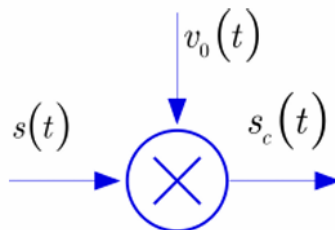
Questa corrisponde nel dominio del tempo alla seguente:

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[S(f - nf_c)] = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_c t}$$

Poniamo:

$$v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_c t}$$

$v_0(t)$  è detta **funzione campionatrice**. Ci rendiamo conto di poter ottenere il segnale campionato attraverso un campionatore:



Sfruttando la formula di Poisson:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Possiamo scrivere  $v_0(t)$  come segue:

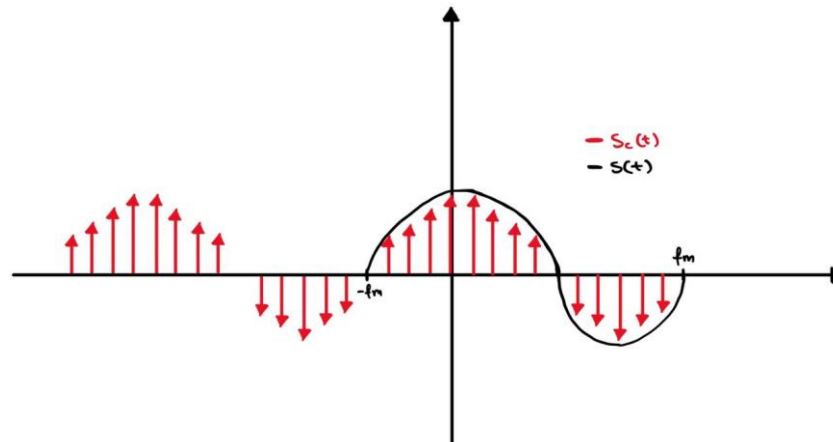
$$v_0(t) = T_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c)$$

Quindi:

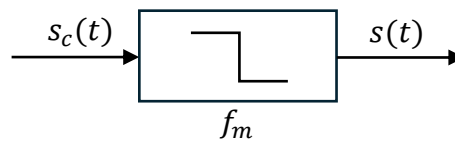


$$s_c(t) = s(t) \cdot v_0(t) = s(t) \cdot T_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c) = T_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c)$$

Che si può interpretare come un treno di impulsi di Dirac pesati su  $s(t)$ .



Per riottenere il segnale  $s(t)$  dovremmo usare un filtro passabasso con frequenza di taglio  $f_m$ :



Ma qui sorge il problema del campionamento ideale: per costruzione, le delta di Dirac sono irrealizzabili nella realtà. Per risolvere tale problema si può scegliere di ricorrere al campionamento naturale.

## TEOREMA 26

### Teorema del campionamento naturale

Al fine di ovviare al problema introdotto dal campionamento ideale, ovvero quello dell'irrealizzabilità delle delta di Dirac, si sceglie come funzione campionatrice un treno di impulsi che costituisca la ripetizione periodica di passo  $T_c$  di un impulso  $p(t)$  di durata  $T < T_c$  e trasformata di Fourier  $P(f)$ :

$$v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_c)$$

Il segnale campionato vale dunque:

$$s_c(t) = s(t) \cdot v_0(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_c)$$

Che in frequenza vale:

$$S_c(f) = S(f) * V_0(f)$$

In cui:

$$\begin{aligned} V_0(f) &= \mathfrak{F}[v_0(t)] = \mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_c)\right] = \boxed{v_0(t) \text{ è periodico, dunque si può esprimere in serie di Fourier}} \\ &= \mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_c}}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} \cdot \delta(f - nf_c) \end{aligned}$$

Dove  $V_{0n}$ , ovvero il coefficiente della serie di Fourier, vale:

$$V_{0n} = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) \cdot e^{-j2\pi n f_c t} dt = \frac{P(nf_c)}{T_c}$$

A questo punto, risulta che  $S_c(f)$  vale:

$$S_c(f) = S(f) * V_0(f) = S(f) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} \cdot \delta(f - nf_c)\right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= S(f) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P(nf_c)}{T_c} \cdot \delta(f - nf_c) \right] = \\
 &= \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_c) \cdot S(f) * \delta(f - nf_c) = \\
 &= \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_c) \cdot S(f - nf_c)
 \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T \operatorname{sinc}(fT)$ , risulta ad esempio:

$$S_c(f) = \frac{T}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(nf_c T) \cdot S(f - nf_c)$$

Se facciamo passare  $S_c(f)$  attraverso un filtro passabasso di frequenza  $f_c$ , nell'intervallo  $\left(-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right)$  la forma dello spettro rimane invariata, dunque il segnale può essere ricostruito:

$$\begin{aligned}
 S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) &= \left[ \frac{T}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(nf_c T) \cdot S(f - nf_c) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \\
 &= \left[ \frac{T}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(nf_c T) \cdot S(f - nf_c) \right] \Big|_{n=0} = \\
 &= \frac{T}{T_c} \cdot \operatorname{sinc}(0) \cdot S(f) = \frac{T}{T_c} \cdot S(f)
 \end{aligned}$$

In generale:

$$\begin{aligned}
 S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) &= \left[ \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_c) \cdot S(f - nf_c) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \\
 &= \left[ \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_c) \cdot S(f - nf_c) \right] \Big|_{n=0} = \frac{P_0}{T_c} \cdot S(f)
 \end{aligned}$$

Dove:

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot e^{j2\pi ft} dt \Rightarrow P(0) = P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt$$

Da ciò si evince che il segnale può sì essere ricostruito, ma a meno di un fattore moltiplicativo costante. Sorge quindi un nuovo problema: il generico impulso  $p(t - nT_c)$  viene in realtà distorto dal segnale. Dunque, in questo caso non si può parlare di vero e proprio campionamento, in quanto non si potrebbe ricostruire il segnale di partenza conoscendo i soli valori che esso assume in una sequenza di istanti.

## TEOREMA 27

### Teorema del campionamento istantaneo (\*)

Un'ulteriore modalità di campionamento consiste in quello istantaneo. In questo caso, il segnale campionato è il seguente:

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c) \cdot p(t - nT_c)$$

In modo differente da quanto accadeva nel campionamento naturale, in cui all'impulso si moltiplicava  $s(t)$ , in questo caso gli impulsi che costituiscono  $s_c(t)$  mantengono la loro forma mentre le loro ampiezze sono proporzionali ai campioni  $s(nT_c)$  del segnale. È conveniente scrivere  $p(t - nT_c)$  come prodotto di convoluzione:

$$p(t - nT_c) = p(t) * \delta(t - nT_c)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} s_c(t) &= p(t) * \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) \right) = \\ &= p(t) * \left( s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c) \right) = \boxed{\text{Formula di Poisson}} \\ &= p(t) * \left( s(t) \cdot \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T_c}} \right) \end{aligned}$$

Trasformiamo  $s_c(t)$ , ricordando che la trasformata della funzione esponenziale è pari a una delta di Dirac traslata in frequenza:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= P(f) \cdot \mathcal{F} \left[ s(t) \cdot \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T_c}} \right] = \\ &= P(f) \cdot \left( S(f) * \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_c) \right) = \\ &= \frac{P(f)}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c) \end{aligned}$$

Nel caso in cui  $p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow P(f) = T \operatorname{sinc}(fT)$ , risulta ad esempio:

$$S_c(f) = \frac{T}{T_c} \operatorname{sinc}(fT) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c)$$

Se facciamo passare  $S_c(f)$  attraverso un filtro passabasso di frequenza  $f_c$ :

$$\begin{aligned} S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) &= \left[ \frac{T}{T_c} \operatorname{sinc}(fT) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \\ &= \left[ \frac{T}{T_c} \operatorname{sinc}(fT) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c) \right] \Big|_{n=0} = \\ &= \frac{T}{T_c} \operatorname{sinc}(fT) \cdot S(f) \end{aligned}$$

In generale:

$$\begin{aligned} S_c(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) &= \left[ \frac{P(f)}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c) \right] \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_c}\right) = \\ &= \left[ \frac{P(f)}{T_c} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_c) \right] \Big|_{n=0} = \\ &= \frac{P(f)}{T_c} \cdot S(f) \end{aligned}$$

Il campionamento istantaneo risolve il problema di quello naturale, quindi in questo caso risulta possibile ricostruire il segnale originario avendo a disposizione i valori che esso assume in corrispondenza di una sequenza di istanti. Tuttavia, ne introduce un altro:

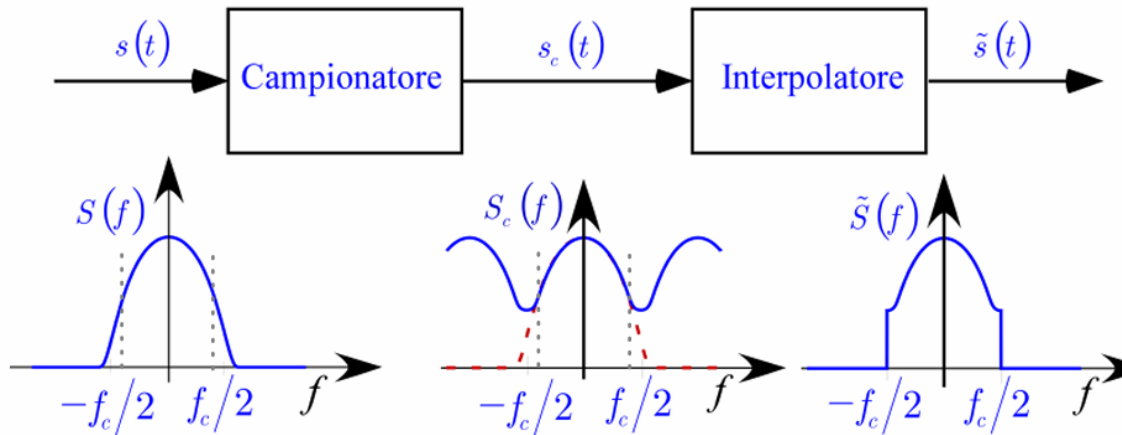
nell'intervallo  $\left(-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right)$  il fattore  $\frac{P(f)}{T_c} = \frac{T}{T_c} \operatorname{sinc}(fT)$  causa una deformazione per la quale lo spettro presenta una forma diversa da quella del segnale nella porzione contenuta nell'intervallo  $\left(-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right)$ . In questo caso, quindi, l'utilizzo di un filtro passabasso non è sufficiente a ricostruire il segnale. Ma poiché il legame tra lo spettro del segnale campionato ed  $s(t)$  è noto, è possibile individuare ed eliminare la distorsione introdotta dal campionatore. Infatti, siano  $T$  e  $T_c$  rispettivamente la durata e il passo di campionamento, se scegliamo opportunamente  $T \ll T_c$ , la distorsione introdotta diventa

trascurabile, in quanto il fattore  $\text{sinc}(fT)$  varia poco nella banda di interesse. Di contro, questa scelta porta ad un'inevitabile attenuazione del segnale a causa del fattore  $\frac{T}{T_c} \ll 1$ .

## TEOREMA 28

### Errori di ricoprimento spettrale (aliasing)

Dato un segnale  $s(t)$  non rigorosamente passabasso, si supponga che esso abbia la maggior parte di energia concentrata in una banda  $(-f_m, f_m)$ . È possibile effettuare un campionamento, supposto ideale per semplicità con  $f_c = 2f_m$ , anche se in questo caso il segnale ricostruito  $\tilde{s}(t)$  non può riprodurre fedelmente  $s(t)$ .



Infatti, si ottiene un segnale le cui ripetizioni si sovrappongono tra loro (fenomeno dell'**aliasing**) e, dunque, si rivela necessario stimare l'entità dell'errore commesso. A tal proposito, si calcola la distanza euclidea tra il segnale e la sua versione ricostruita:

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - \tilde{s}(t)|^2 dt$$

Applicando il teorema di Parseval:

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f) - \tilde{S}(f)|^2 df$$

Ricordando che la ricostruzione del segnale avviene mediante un filtro passabasso, e che quindi lo spettro  $\tilde{S}(f)$  è nullo all'esterno di  $(-f_m, f_m)$ , possiamo riscrivere la precedente come segue:

$$e = \int_{|f| > f_m} |S(f)|^2 df + \int_{-f_m}^{f_m} |S(f) - \tilde{S}(f)|^2 df$$

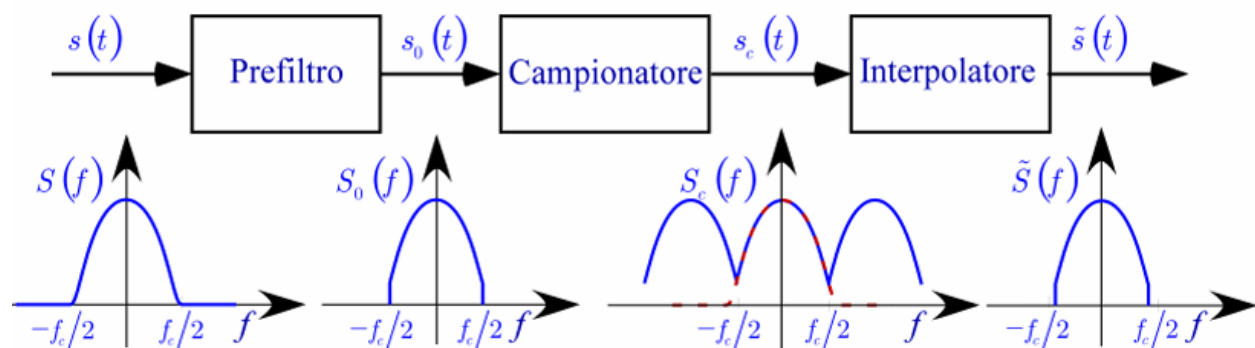


Il primo addendo della precedente è dovuto alle componenti spettrali di  $s(t)$  che cadono al di fuori della banda di interesse, mentre il secondo addendo è dovuto proprio al ricoprimento spettrale (aliasing).

Se si provvede a prefiltrare il segnale mediante un filtro passabasso, supposto ideale per semplicità e di banda  $f_m$ , prima di campionarlo, la distanza euclidea risulta:

$$\tilde{e} = \int_{|f| > f_m} |S(f)|^2 df$$

Ovvero si elimina il contributo all'errore dovuto all'aliasing.



Poiché, com'è evidente, risulta  $e > \tilde{e}$ , conviene sempre applicare un prefilter al segnale da campionare, in modo tale da ridurre l'errore.

## TEOREMA 29

### Disuguaglianza di Chebyshev (\*)

Data una variabile aleatoria  $X$  la cui varianza  $\sigma^2$  è finita, si vuole calcolare la probabilità che questa si discosti dal suo valor medio  $\bar{X}$  per più di un certo valore  $\varepsilon$ . A questo proposito, vale la seguente disuguaglianza:

$$\Pr\{|X - m| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Per dimostrare che la precedente è vera, si deve calcolare la probabilità che  $X$  differisca dal suo valor medio per una quantità maggiore di  $\varepsilon$ , ovvero si deve calcolare la densità di probabilità di  $X$ :

$$\Pr\{|X - m| \geq \varepsilon\} = \Pr(x - m \leq -\varepsilon \cup x - m \geq \varepsilon) =$$

$$= \Pr(x \leq m - \varepsilon) + \Pr(x \geq m + \varepsilon) =$$

$$= \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} p_X(x) dx + \int_{m+\varepsilon}^{\infty} p_X(x) dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} \frac{(x - m)^2}{\varepsilon^2} \cdot p_X(x) dx + \int_{m+\varepsilon}^{\infty} \frac{(x - m)^2}{\varepsilon^2} \cdot p_X(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} (x - m)^2 \cdot p_X(x) dx + \int_{m+\varepsilon}^{\infty} (x - m)^2 \cdot p_X(x) dx \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot p_X(x) dx \right) = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$|x - m| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{|x - m|}{\varepsilon} \geq 1 \Rightarrow \frac{(x - m)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$$

Dunque, possiamo maggiorare la precedente quantità con quella che segue.

Dalla disuguaglianza di Chebyshev discende che, se una variabile aleatoria ha varianza nulla, allora essa è uguale al suo valor medio con probabilità 1, infatti:

$$\bar{X} = m$$

$$\sigma^2 = \overline{(X - m)^2} = 0 \Leftrightarrow m = X$$

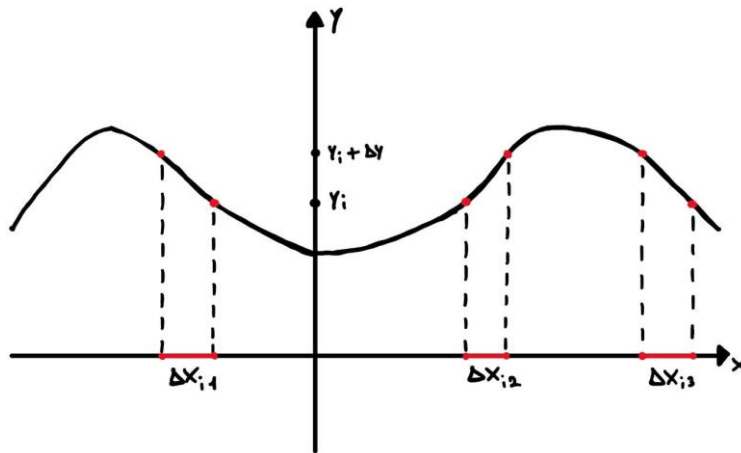
## TEOREMA 30

### Teorema della media

Sia  $Y = f(X)$  una funzione di una variabile aleatoria  $X$  con  $f(\cdot)$  funzione misurabile definita quasi ovunque in  $\mathbb{R}$ .  $Y$  è a sua volta una variabile aleatoria il cui valore medio è dato dalla seguente:

$$m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y) dy$$

Scomponendo l'asse reale in intervalli  $E_i = (y_i, y_i + \Delta y]$  a due a due disgiunti, la probabilità che la variabile aleatoria  $Y = f(X)$  assuma un valore appartenente al generico intervallo  $E_i$  è pari alla probabilità che la variabile  $X$  assuma un valore appartenente all'insieme  $f^{-1}(E_i)$  controimmagine  $E_i$ , costituita da un'unione al più numerabile di intervalli elementari a due a due disgiunti di misura  $\Delta x_{ij}$ :



$$\begin{aligned} \Pr\{f^{-1}(E_i)\} &= \Pr\left\{\bigcup_{j=1}^n X^{-1}([x_{ij}, x_{ij} + \Delta x_{ij}])\right\} = \\ &= \sum_{j=1}^n \Pr\{X^{-1}([x_{ij}, x_{ij} + \Delta x_{ij}])\} = \\ &= \sum_{j=1}^n p_X(x_{ij}) \cdot \Delta x_{ij} \end{aligned}$$

E, dunque, risulta:

$$\Pr\{E_i\} \cong p_Y(y_i) \cdot \Delta y \cong \sum_{j=1}^n p_X(x_{ij}) \cdot \Delta x_{ij} = \Pr\{f^{-1}(E_i)\}$$

Moltiplicando ambo i membri per  $y_i = f(x_{ij})$ :

$$y_i \cdot p_Y(y_i) \cdot \Delta y \cong \sum_{j=1}^n f(x_{ij}) \cdot p_X(x_{ij}) \cdot \Delta x_{ij}$$

Da ciò si deduce che il contributo di ogni intervallo elementare all'integrale del valore medio  $m_Y$  è esprimibile come somma di quelli di opportuni intervalli disgiunti nel dominio di  $X$ .

Poiché al variare dell'indice  $i$  viene ricoperto l'intero asse reale, la cui controimmagine secondo  $f(\cdot)$  è  $\mathbb{R}$ , l'integrale del valore medio  $m_Y$  può essere calcolato come segue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$$

Quest'ultima uguaglianza costituisce l'espressione formale del teorema della media.

## TEOREMA 31

### Densità di probabilità di una variabile aleatoria $Z = X + Y$

Data una variabile aleatoria  $Z$  ottenuta dalla somma di due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  statisticamente indipendenti, sappiamo che:

$$Z = X + Y$$

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

La funzione di distribuzione di probabilità di  $Z$  risulta essere:

$$\begin{aligned} P_Z(z) &= \Pr\{Z \leq z\} = \Pr\{X + Y \leq z\} = \Pr\{X < \infty \cap Y \leq z - X\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_{XY}(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_X(x) \cdot p_Y(y) dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{z-x} p_Y(y) dy \right] dx \end{aligned}$$

Derivando otteniamo la densità di probabilità di  $Z$ :

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{dP_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot \frac{d}{dz} \left[ \int_{-\infty}^{z-x} p_Y(y) dy \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z - x) dx = \\ &= p_X * p_Y(z) \end{aligned}$$

## TEOREMA 32

### Valore medio e varianza di una variabile gaussiana

Una variabile aleatoria si dice **normale** o **gaussiana** se la sua densità di probabilità è del tipo:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Il valore medio di una variabile aleatoria gaussiana si calcola come segue:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \boxed{x = z + m} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z + m}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz + m \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \end{aligned}$$

Il primo integrale contiene un prodotto tra una funzione dispari ( $z$ ) e una funzione pari ( $e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$ ). Tale prodotto produrrà una funzione dispari, e l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico da  $-\infty$  a  $+\infty$  è pari a zero. Il secondo integrale è quello della densità di probabilità gaussiana con media  $m = 0$ , dunque sarà pari a 1. Fatte queste considerazioni, risulta:

$$\bar{X} = 0 + m \cdot 1 = m$$

La varianza della variabile aleatoria gaussiana si calcola prendendo in considerazione la condizione di normalizzazione:

$$I(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

La derivata prima della precedente quantità è pari a:

$$\frac{dI}{dm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-m}{\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

La derivata prima vale zero per le stesse considerazioni fatte nel caso del valore medio.

Deriviamo ancora una volta usando la proprietà di derivazione di un prodotto

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x):$$

$$\frac{d^2 I}{dm^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \left[ -\frac{1}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - \frac{x-m}{\sigma^2} \cdot \left( -\frac{x-m}{\sigma^2} \right) \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right] dx$$

Dividendo in due integrali:

$$\frac{d^2 I}{dm^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \frac{(x-m)^2}{\sigma^4} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = 0$$

Eguagliando i precedenti integrali, risulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \frac{(x-m)^2}{\sigma^4} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma^2} \cdot 1 = \frac{1}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{1}{\sigma^4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot (x-m)^2 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma^2}$$

Da cui si ricava:

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot (x-m)^2 \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Ovvero:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot p_X(x) dx$$

## TEOREMA 33

### Segnali stazionari (\*)

Un segnale si dice **stazionario in senso stretto** se le sue funzioni di probabilità di qualsiasi ordine dipendono esclusivamente dalla posizione relativa degli istanti in cui il segnale viene osservato:

$$p_{s(t_1)s(t_2)\dots s(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{s(t_1+T)s(t_2+T)\dots s(t_n+T)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall T \in \mathbb{R}$$

Se questa uguaglianza vale solo fino a un certo valore  $k$ , allora il segnale si dice stazionario all'ordine  $k$ . Poiché la densità di probabilità di ordine  $n - 1$  può essere dedotta da quella di ordine  $n$ , la stazionarietà all'ordine  $k$  comporta quella agli ordini inferiori, ma non vale il viceversa.

Verificare la stazionarietà in senso stretto di segnali aleatori è complesso, ecco perché solitamente se ne verifica la stazionarietà in senso lato. Un segnale si dice **stazionario in senso lato** se il suo valore medio statistico è costante (indipendente dal tempo) e se la sua autocorrelazione dipende solo dalla differenza tra gli istanti  $t_2$  e  $t_1$ :

1.  $\overline{s(t, \zeta)} = cost$
2.  $\overline{s(t_1, \zeta)s(t_2, \zeta)} = R_s(t_2 - t_1)$

È opportuno chiarire che un segnale stazionario in senso stretto lo è anche in senso lato, ma non vale il viceversa.



## TEOREMA 34

La funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio è semi definita positiva (\*)

Dato un segnale aleatorio  $s(t, \zeta)$  reale o complesso a tempo continuo, la sua funzione di autocorrelazione è definita dalla media statistica del secondo ordine:

$$R_s(t_1, t_2) = \overline{s^*(t_1)s(t_2)}$$

La funzione di autocorrelazione è **semidefinita positiva**, quindi vale:

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t_1) \cdot R_s(t_1, t_2) \cdot \phi^*(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0$$

Per dimostrarlo, si consideri la seguente variabile aleatoria:

$$S_\phi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \cdot s^*(t, \zeta) dt$$

Se ne calcola il momento assoluto del secondo ordine:

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{|S_\phi|^2} &= \overline{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \cdot s^*(t) dt \right|^2} = \\ &= \overline{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t_1) \cdot s^*(t_1) dt_1 \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t_2) \cdot s^*(t_2) dt_2 \right)^*} = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t_1) \cdot \overline{s^*(t_1)s(t_2)} \cdot \phi^*(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t_1) \cdot R_s(t_1, t_2) \cdot \phi^*(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

## TEOREMA 35

### Densità spettrale di potenza di un segnale aleatorio (\*)

Dato un segnale aleatorio, ogni sua manifestazione  $s(t, \zeta)$  possiede una certa densità spettrale di potenza  $w_s(f, \zeta)$ . Sia  $S_T(f, \zeta)$  la trasformata di Fourier del segnale troncato  $s_T(t, \zeta) = s(t, \zeta) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ , allora  $w_s(f, \zeta)$  è data dalla seguente:

$$w_s(f, \zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f, \zeta)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_T(f, \zeta) \cdot S_T^*(f, \zeta)}{T}$$

La densità spettrale di potenza di un segnale aleatorio è pari alla media statistica delle densità spettrali di potenza delle singole manifestazioni:

$$W_s(f) = \overline{w_s(f, \zeta)}$$

Calcolando in termini di trasformata di Fourier, troviamo una relazione tra la densità spettrale di potenza e la funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} W_s(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{S_T(f, \zeta) \cdot S_T^*(f, \zeta)}}{T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \overline{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t_1, \zeta) \cdot s(t_2, \zeta) \cdot e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{s^*(t_1, \zeta) \cdot s(t_2, \zeta) \cdot e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)}} dt_1 dt_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t_1, t_2) \cdot e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

L'antitrasformata della  $W_s(f)$  vale:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}[W_s(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t_1, t_2) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(t_2 - t_1 - \tau)} df \right) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Valutando l'integrale interno nel senso delle distribuzioni, risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(t_2 - t_1 - \tau)} df = \delta(t_2 - t_1 - \tau) = \delta(t_2 - (t_1 + \tau))$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^{-1}[W_s(f)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t_1, t_2) \cdot \delta(t_2 - (t_1 + \tau)) dt_1 dt_2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t_1, t_1 + \tau) dt_1\end{aligned}$$

Se il segnale è stazionario in senso lato, allora vale sicuramente:

$$R_s(t_1, t_1 + \tau) = R_s(\tau)$$

Dunque:

$$\mathfrak{F}^{-1}[W_s(f)] = R_s(\tau) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt_1 = R_s(\tau)$$

E vale il teorema di Wiener-Khinchine:

$$W_s(f) = \mathfrak{F}[R_s(\tau)]$$

Se il segnale non è stazionario, bisogna porre:

$$\phi_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t_1, t_1 + \tau) dt_1$$

Che altro non è che la media temporale della funzione di autocorrelazione espressa in tempo-ritardo. La densità spettrale di potenza del segnale sarà quindi calcolata come:

$$W_s(f) = \mathfrak{F}[\phi_s(\tau)]$$

## TEOREMA 36

### Segnali ciclostazionari (\*)

Un segnale si dice **ciclostazionario** se la sua funzione di autocorrelazione espressa in tempo-ritardo  $R_s(t, \tau)$  è periodica di periodo  $T$  rispetto al tempo. In questo caso, l'autocorrelazione può quindi essere espansa in serie di Fourier:

$$R_s(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(\tau) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

O, in termini di  $t_1, t_2$ :

$$R_s(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(t_2 - t_1) \cdot e^{j2\pi \frac{n}{T} t_1}$$

È possibile ottenere la densità spettrale di potenza dalla trasformata bidimensionale della funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} G_s(f_1, f_2) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} R_n(t_2 - t_1) \cdot e^{-j2\pi \left[ \left( f_1 - \frac{n}{T} \right) t_1 + f_2 t_2 \right]} dt_1 dt_2 = \boxed{t_1 = t, t_2 = t_1 + \tau} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) \cdot e^{-j2\pi f_2 \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \left( f_1 + f_2 - \frac{n}{T} \right) t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) \cdot e^{-j2\pi f_2 \tau} d\tau \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left( f_1 + f_2 - \frac{n}{T} \right) = \end{aligned}$$

Se indichiamo con  $W_n(f)$  la trasformata di  $R_n(\tau)$ , allora otteniamo:

$$G_s(f_1, f_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(f_2) \cdot \delta \left( f_1 + f_2 - \frac{n}{T} \right)$$

Dove le delta sono centrate lungo un fascio di rette parallele alla seconda bisettrice. Possiamo affermare quindi che la densità spettrale di potenza di un segnale ciclostazionario è pari alla trasformata di Fourier di  $R_0(\tau)$ , ovvero il coefficiente di posto zero dello sviluppo in serie di Fourier rispetto a  $t$  della funzione di autocorrelazione del segnale espressa in tempo-ritardo:

$$W_0(f_2) = \mathfrak{F}[R_0(\tau)] = \mathfrak{F} \left[ \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_s(t, \tau) dt \right]$$

## TEOREMA 37

### Rumore bianco

Il **rumore bianco** è un segnale aleatorio  $n(t, \zeta)$  stazionario la cui densità spettrale di potenza è costante. Posto:

$$W_n(f) = \eta$$

Risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_n(f) df = \infty$$

Il rumore bianco non è quindi a potenza finita, ma si rivela molto utile perché la maggior parte dei disturbi presenta una densità spettrale di potenza pressoché costante, almeno entro la banda di frequenze comunemente utilizzata per trasmettere informazioni.

La funzione di autocorrelazione del rumore bianco è la seguente:

$$R_n(\tau) = \eta \cdot \delta(\tau)$$

Questo significa che i valori  $n(t, \zeta)$  e  $n(t + \tau, \zeta)$  assunti dal rumore bianco in  $t$  e  $t + \tau$  sono fra loro non correlati  $\forall \tau \neq 0$ .