LE RIVELAZIONI DI ELETTROTECNICA

Raccolta di esercizi e prove d'esame

A cura di Marco Marino

Prof. Antonino Imburgia

Università degli studi di Palermo

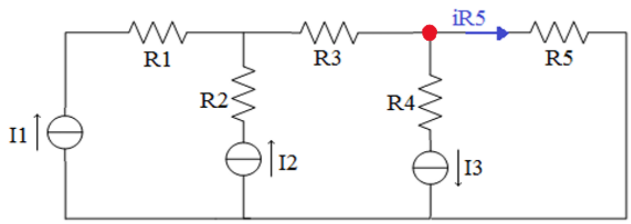
SOMMARIO

TOT. ESERCIZI = 129+28

ATTENZIONE: i risultati ottenuti dai lettori potrebbero differire di poco da quelli proposti, in seguito a scelte differenti nell'approssimazione dei valori. Ciononostante, si assicura che tutti i risultati a cui si è pervenuti in questo testo sono corretti e in accordo con quelli forniti dal Prof. Antonino Imburgia. Il metodo di risoluzione degli esercizi, generalmente, NON è unico, quindi sentitevi liberi di adottare la metodologia da voi preferita. Si raccomanda infine di effettuare gli esercizi solo dopo aver fissato bene i concetti teorici in questione, dato che, in alcuni di essi, alcuni passaggi potrebbero risultare poco chiari ad uno studente alle prime armi.

APPLICAZIONE DEI PRINCIPI DI KIRCHHOFF

1.1. Per la rete di figura, determinare il valore della corrente che scorre sul resistore R5, iR5. Dati: I1= 15A, I2= 6A, I3= 2A, R1= 3 Ω, R2= 2 Ω, R3= 6 Ω, R4= 4 Ω, R5= 9 Ω.



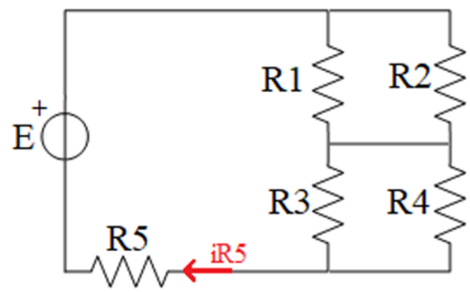
Il valore della corrente i_{R_5} si ricava applicando la LKC al nodo di interesse (evidenziato in rosso). La corrente entrante in tale nodo e che scorre sul resistore R_3 è data dalla somma delle correnti I_1 e I_2. Le correnti uscenti dal nodo sono I_3 e i_{R_5}. Per la LKC, la somma delle correnti entranti in un nodo deve essere pari alla somma delle correnti uscenti dal nodo stesso:

$$I_1 + I_2 = I_3 + i_{R_5}$$

$$15 + 6 = 2 + i_{R_5}$$

$$\Rightarrow i_{R_5} = 15 + 6 - 2 = 19\ A$$

1.2. Per la rete di figura, determinare la corrente che circola nel resistore R5, iR5. Dati: E= 100V, R1 = 7Ω, R2 = 8Ω, R3= 9Ω, R4= 6Ω, R5= 5Ω. (Si applica il calcolo della Req ed il II principio di Kirchhoff)



Calcoliamo innanzitutto i paralleli R_{12} ed R_{34}:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{7 \cdot 8}{7 + 8} = \frac{56}{15}$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{9 \cdot 6}{9 + 6} = \frac{54}{15}$$

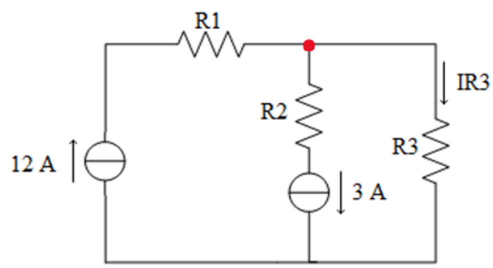
Calcoliamo la serie tra R_{12}, R_{34} ed R_5:

$$R_{eq} = R_{12} + R_{34} + R_5 = \frac{56}{15} + \frac{54}{15} + 5 = \frac{56 + 54 + 75}{15} = \frac{185}{15} \cong 12{,}33\ \Omega$$

La corrente $i_{R_5} = i_{R_{eq}}$ è data dal rapporto tra la tensione ai capi di R_{eq} e la R_{eq} stessa:

$$i_{R_{eq}} = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{100}{12{,}33} \cong 8{,}1\ A$$

1.3. Per la rete di figura, determinare il valore della corrente IR3.



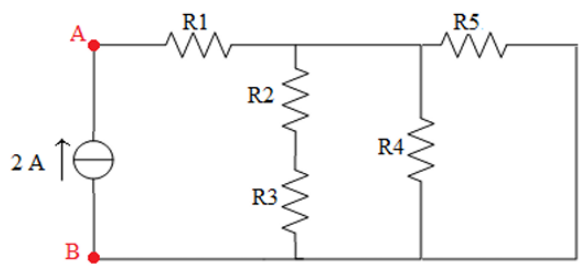
Il valore della corrente i_{R_3} si ricava applicando la LKC al nodo di interesse (evidenziato in rosso). La corrente entrante in tale nodo e che scorre sul resistore R_1 è di 12 A. Le correnti uscenti dal nodo sono I_{R_3} e quella di 3 A. Per la LKC, la somma delle correnti entranti in un nodo deve essere pari alla somma delle correnti uscenti dal nodo stesso:

$$12 = 3 + I_{R_3}$$

$$\Rightarrow I_{R_3} = 12 - 3 = 9\ A$$

RESISTENZA EQUIVALENTE

2.1.Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B. Dati: R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω ed R5= 5Ω.



Per procedere al calcolo della resistenza equivalente, dobbiamo dapprima spegnere gli eventuali generatori indipendenti. Un generatore di corrente spento equivale ad un corto circuito; dunque, tra i morsetti A e B la rete è a vuoto. Si calcola dapprima la serie R_{23}:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 2 + 3 = 5\ \Omega$$

Calcoliamo adesso il parallelo R_{45}:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{20}{9} \cong 2{,}22\ \Omega$$

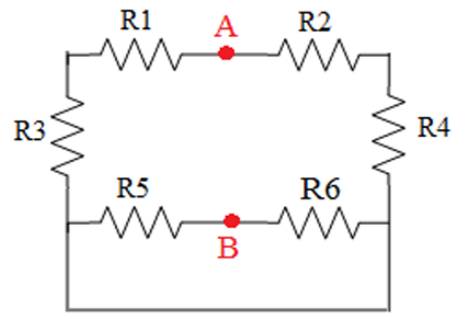
Calcoliamo il parallelo tra R_{23} ed R_{45}:

$$R_{2345} = \frac{R_{23} R_{45}}{R_{23} + R_{45}} = \frac{11{,}1}{7{,}22} \cong 1{,}54\ \Omega$$

Infine, calcoliamo la serie tra R_1 ed R_{2345}:

$$R_{eq} = R_1 + R_{2345} = 1 + 1{,}54 = 2{,}54\ \Omega$$

2.2. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B. Dati: R1=R2=R3=R4=R5=R6= 3Ω.



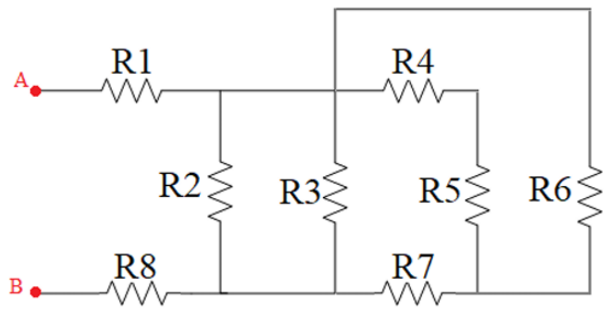
Si calcolano in primis le serie R_{135} ed R_{246}:

$$R_{135} = R_1 + R_3 + R_5 = 3 + 3 + 3 = 9\ \Omega = R_{246}$$

Si calcola il parallelo fra R_{135} ed R_{246}:

$$R_{eq} = \frac{R_{135}R_{246}}{R_{135} + R_{246}} = \frac{81}{18} = 4{,}5\ \Omega$$

2.3. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B. Dati: R1=R2=R3=R4=R5=R6=R7=R8= 10Ω.



Si calcola dapprima il parallelo R_{56}:

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} = \frac{100}{20} = 5\ \Omega$$

Si calcola la serie R_{4567}:

$$R_{4567} = R_4 + R_{56} + R_7 = 10 + 5 + 10 = 25\ \Omega$$

Si calcola il parallelo fra R_2 ed R_3:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{100}{20} = 5\ \Omega$$

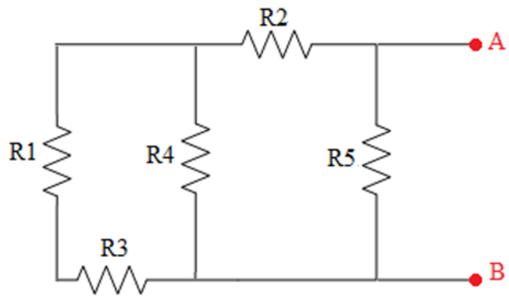
Si calcola il parallelo tra R_{23} e R_{4567}:

$$R_{234567} = \frac{R_{23} R_{4567}}{R_{23} + R_{4567}} = \frac{125}{30} \cong 4{,}17\ \Omega$$

Infine, si calcola la serie tra R_1, R_{234567} ed R_8:

$$R_{eq} = R_1 + R_{234567} + R_8 = 24{,}17\ \Omega$$

2.4. Per il circuito lineare di figura, calcolare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B. Dati: R1=R2=R3=R4= 3Ω, R5= 5Ω.



Calcoliamo la serie R_{13}:

$$R_{13} = R_1 + R_3 = 3 + 3 = 6\ \Omega$$

Calcoliamo il parallelo tra R_{13} ed R_4:

$$R_{134} = \frac{R_{13}R_4}{R_{13} + R_4} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = \frac{18}{9} = 2\ \Omega$$

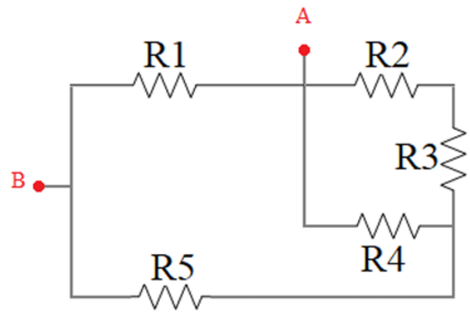
Calcoliamo la serie tra R_{134} ed R_2:

$$R_{1234} = R_{134} + R_2 = 2 + 3 = 5\ \Omega$$

Infine, calcoliamo il parallelo tra R_{1234} ed R_5:

$$R_{eq} = \frac{R_{1234}R_5}{R_{1234} + R_5} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} = 2{,}5\ \Omega$$

2.5. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B. Dati: R1= 30Ω, R2= 7Ω, R3= 9Ω, R4= 5Ω, R5= 1Ω.



Calcoliamo la serie R_{23}:

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 7 + 9 = 16\ \Omega$$

Calcoliamo il parallelo tra R_{23} ed R_4:

$$R_{234} = \frac{R_{23}R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{16 \cdot 5}{16 + 5} = \frac{80}{21} \cong 3{,}81\ \Omega$$

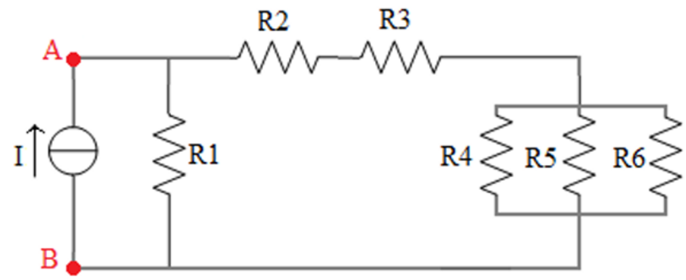
Calcoliamo la serie tra R_{234} ed R_5:

$$R_{2345} = R_{234} + R_5 = 3{,}81 + 1 = 4{,}81\ \Omega$$

Infine, calcoliamo il parallelo tra R_{2345} ed R_1:

$$R_{eq} = \frac{R_{2345}R_1}{R_{2345} + R_1} = \frac{4{,}81 \cdot 30}{4{,}81 + 30} \cong 4{,}15\ \Omega$$

2.6. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente vista ai morsetti del generatore.
Dati: I= 20 A, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω, R5= 5Ω, R6= 6Ω.



Calcoliamo il parallelo tra R_4 ed R_5:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{4 \cdot 5}{4 + 5} = \frac{20}{9} \cong 2{,}22\ \Omega$$

Calcoliamo il parallelo tra R_{45} ed R_6:

$$R_{456} = \frac{R_{45} R_6}{R_{45} + R_6} = \frac{2{,}22 \cdot 6}{2{,}22 + 6} \cong 1{,}62\ \Omega$$

Calcoliamo la serie tra R_2, R_3 ed R_{456}:

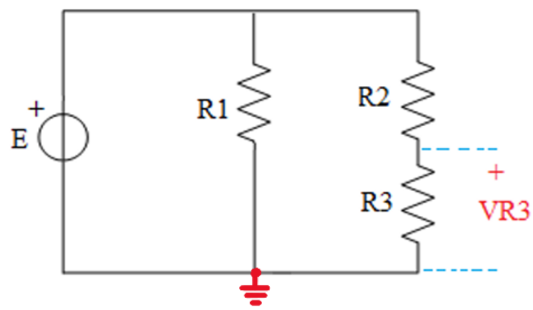
$$R_{23456} = R_2 + R_3 + R_{456} = 2 + 3 + 1{,}62 = 6{,}62\ \Omega$$

Infine, calcoliamo il parallelo tra R_{23456} ed R_1:

$$R_{eq} = \frac{R_{23456} R_1}{R_{23456} + R_1} = \frac{6{,}62 \cdot 1}{6{,}62 + 1} \cong 0{,}87\ \Omega$$

PARTITORE DI TENSIONE E DI CORRENTE

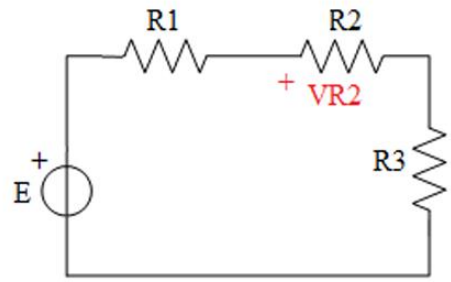
3.1. Per la rete di figura, determinare il valore della tensione ai capi di R3. Dati: E= 20 V, R1= 10 Ω, R2= 20 Ω, R3= 30 Ω.



I resistori R_2 ed R_3 sono in serie, applichiamo il partitore di tensione per trovare la tensione ai capi di R_3:

$$V_{R_3} = E \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 20 \cdot \frac{30}{20 + 30} = \frac{600}{50} = 12\ V$$

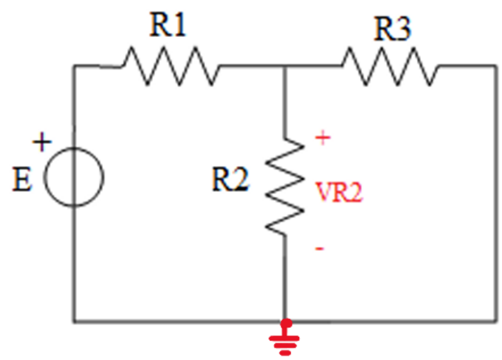
3.2. Per la rete di figura, determinare la differenza di potenziale ai capi del resistore R2, VR2. Dati: E= 20V, R1= 5Ω, R2= 8Ω, R3= 7Ω.



I resistori R_1, R_2 ed R_3 sono in serie, applichiamo il partitore di tensione per trovare la tensione ai capi di R_2:

$$V_{R_2} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 20 \cdot \frac{8}{5 + 8 + 7} = \frac{160}{20} = 8\,V$$

3.3. Per la rete di figura, determinare la tensione ai capi del resistore R2, VR2. Dati: E= 10V, R1= 2Ω, R2= 4Ω, R3= 6Ω.



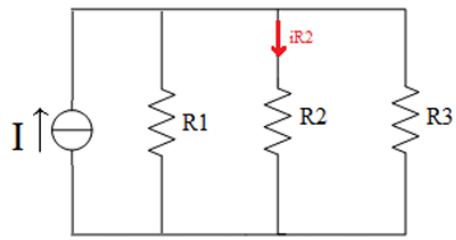
Calcoliamo il parallelo R_{23}:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{24}{10} = 2{,}4\ \Omega$$

I resistori R_1 ed R_{23} sono in serie, applichiamo il partitore di tensione per trovare la tensione ai capi di R_2 (ovvero ai capi di R_{23}):

$$V_{R_2} = E \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 10 \cdot \frac{2{,}4}{2 + 2{,}4} \cong 5{,}5\ V$$

3.4. Per il circuito lineare di figura, calcolare la corrente che circola nel resistore R2, iR2. Dati: I= 15A, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω.



I resistori R_1, R_2 ed R_3 sono in parallelo, applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_2:

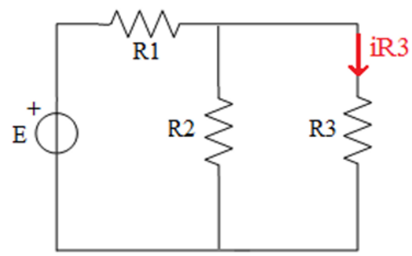
$$i_{R_2} = I \cdot \frac{R_{13}}{R_{13} + R_2}$$

Calcoliamo il parallelo R_{13}:

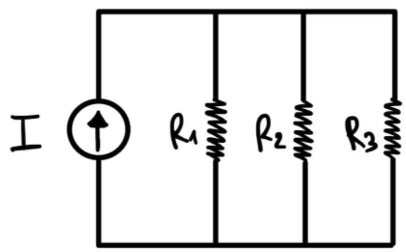
$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = 0{,}75\ \Omega$$

$$\Rightarrow i_{R_2} = I \cdot \frac{R_{13}}{R_{13} + R_2} = 15 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}75 + 2} = \frac{11{,}25}{2{,}75} \cong 4{,}1\ A$$

3.5. Per la rete di figura, determinare il valore della corrente IR3. Dati: E= 10V, R1 = 2Ω, R2 = 4Ω, R3 = 5Ω.



Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente (vedi trasformazione Thevenin-Norton):



$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{2} = 5\ A$$

I resistori R_1, R_2 ed R_3 sono in parallelo, applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_3:

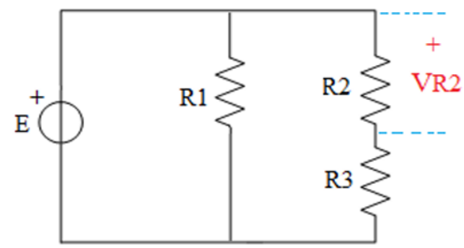
$$i_{R_3} = I \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3}$$

Calcoliamo il parallelo R_{12}:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{8}{6} \cong 1{,}33\ \Omega$$

$$\Rightarrow i_{R_3} = I \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} = 5 \cdot \frac{1{,}33}{1{,}33 + 5} = \frac{6{,}65}{6{,}33} \cong 1\ A$$

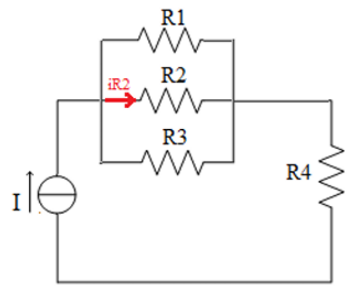
3.6. Per la rete di figura, ricavare VR2. Dati: E= 15V, R1 = 1Ω, R2 = 2Ω, R3 = 3Ω.



I resistori R_2 ed R_3 sono in serie, applichiamo il partitore di tensione per trovare la tensione ai capi di R_2:

$$V_{R_2} = E \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 15 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{30}{5} = 6\ V$$

3.7. Per il circuito lineare di figura, calcolare la corrente che circola nel resistore R2, iR2. Dati: I= 10A, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω.



I resistori R_1, R_2 ed R_3 sono in parallelo, applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_2:

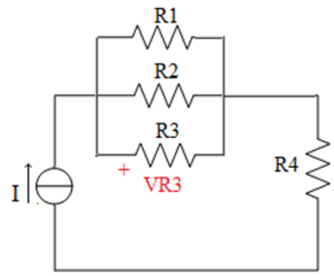
$$i_{R_2} = I \cdot \frac{R_{13}}{R_{13} + R_2}$$

Calcoliamo il parallelo R_{13}:

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{1 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{3}{4} \cong 0{,}75\ \Omega$$

$$\Rightarrow i_{R_2} = I \cdot \frac{R_{13}}{R_{13} + R_2} = 10 \cdot \frac{0{,}75}{0{,}75 + 2} = \frac{7{,}5}{2{,}75} \cong 2{,}7\ A$$

3.8. Per il circuito lineare di figura, calcolare la tensione ai capi del resistore R3. Dati: I= 12A, R1= 3Ω, R2= 6Ω, R3= 6Ω.



I resistori R_1, R_2 ed R_3 sono in parallelo, applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_3:

$$i_{R_3} = I \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3}$$

Calcoliamo il parallelo R_{12}:

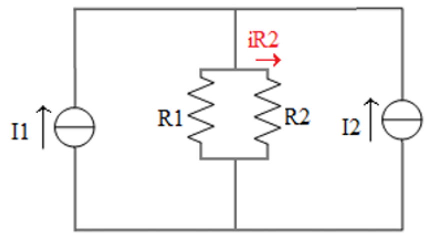
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} \cong 2\,\Omega$$

$$\Rightarrow i_{R_3} = I \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} = 12 \cdot \frac{2}{2 + 6} = \frac{24}{8} \cong 3\,A$$

Applichiamo la legge di Ohm per ricavare la tensione che scorre ai capi di R_3:

$$V_{R_3} = R_3 \cdot i_{R_3} = 6 \cdot 3 = 18\,V$$

3.9. Per la rete di figura, determinare la corrente che scorre nel resistore R2, iR2. Dati: I1= 10A, I2= 5A, R1= 2Ω, R2= 4Ω.

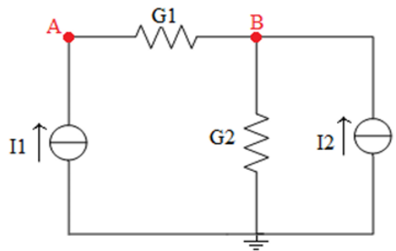


I resistori R_1 ed R_2 sono in parallelo, applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_2:

$$i_{R_2} = I_{TOT} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = (I_1 + I_2) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 15 \cdot \frac{2}{2+4} = \frac{30}{6} = 5\ A$$

METODO DEI POTENZIALI NODALI

4.1. Per il circuito lineare di figura, calcolare i potenziali dei nodi A e B. Dati: I1= 2 A, I2= 5 A, G1= 6 S, G2= 3 S.



Applichiamo il metodo dei potenziali nodali:

$A)\ I_1 = v_A \cdot G_1 - v_B \cdot G_1$

$B)\ I_2 = v_B \cdot (G_1 + G_2) - v_A \cdot G_1$

Mettiamo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} I_1 = v_A \cdot G_1 - v_B \cdot G_1 \\ I_2 = v_B \cdot (G_1 + G_2) - v_A \cdot G_1 \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo matriciale per trovare le incognite v_A e v_B:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante della matrice A:

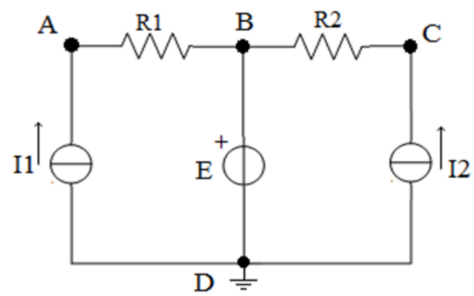
$\det A = 6 \cdot 9 - [-6 \cdot (-6)] = 54 - 36 = 18$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare le incognite v_A e v_B:

$$v_A = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2 \cdot 9 - [5 \cdot (-6)]}{18} = \frac{48}{18} \cong 2{,}67\ V$$

$$v_B = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{6 \cdot 5 - [-6 \cdot 2]}{18} = \frac{42}{18} \cong 2{,}33\ V$$

4.2. Nel circuito di figura, il nodo D è connesso a massa (VD= 0 V) determinare il potenziale dei restanti nodi A, B e C. Dati: I1= 2A, I2= 4A, E= 10V, R1= 1Ω, R2= 2Ω.



Applichiamo il metodo dei potenziali nodali:

$$A)\ I_1 = v_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - v_B \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right)$$

$$C)\ I_2 = v_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - v_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

Mettiamo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} I_1 = v_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - v_B \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) \\ I_2 = v_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - v_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \end{cases}$$

A primo acchito sembrerebbe un sistema di due equazioni in tre incognite; tuttavia, il valore di v_B è conosciuto (in quanto $v_D = 0$) ed è pari ad E, dunque:

$$\begin{cases} 2 = v_A - 10 \\ 4 = \frac{1}{2} v_C - 5 \end{cases}$$

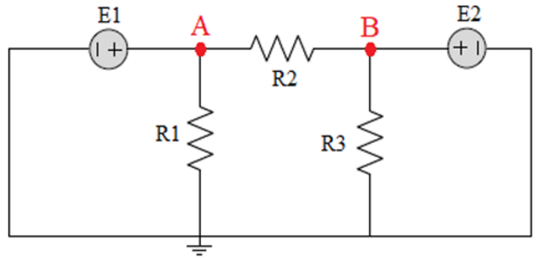
Da cui:

$v_A = 2 + 10 = 12\ V$

$v_B = 10\ V$

$v_C = (5 + 4) \cdot 2 = 18\ V$

4.3.Per il circuito lineare di figura, calcolare la corrente che scorre sul resistore R2, iR2. Dati: E1= 10V, E2= 10V, R1= 2Ω, R2= 4Ω, R3= 6Ω.



Considerando che:

$v_A = E_1 = 10\ V$

$v_B = E_2 = 10\ V$

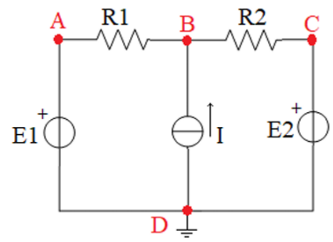
Calcoliamo la tensione ai capi di R_2 come differenza di potenziale tra i nodi A e B:

$V_{R_2} = v_A - v_B = 0\ V$

Utilizziamo la legge di Ohm per ricavare la corrente che scorre su R_2:

$$i_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{0}{4} = 0\ A$$

4.4. Per la rete di figura, determinare il potenziale del nodo B. Dati: E1= 15V, E2= 25V, I= 5A, R1 = 3Ω, R2 = 5Ω.



Considerando che:

$v_A = E_1 = 15\ V$

$v_C = E_2 = 25\ V$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali relativamente al nodo B per trovare la tensione v_B:

$$I = v_B \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - v_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - v_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

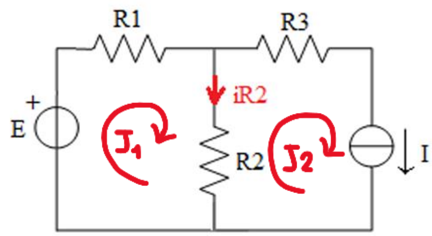
$$5 = v_B \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - 15 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$5 = \frac{8}{15} v_B - 5 - 5$$

$$v_B = (5 + 5 + 5) \cdot \frac{15}{8} = 15 \cdot \frac{15}{8} \cong 28{,}1\ V$$

METODO DELLE CORRENTI DI MAGLIA

5.1. Nel circuito di figura, calcolare il valore della corrente iR2 nel verso indicato. Dati: E= 10 V, I= 5A, R1=R2=R3= 3Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia scegliendo delle correnti arbitrarie per ogni maglia presente nel circuito. Il verso della corrente j_1 è dettato dal generatore di tensione (dal morsetto positivo al negativo) mentre quello della corrente j_2 è dettato ovviamente dal generatore di corrente. Si noti che j_2 è esattamente pari a I.

$$\begin{cases} E = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 \cdot (R_2) \\ j_2 = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = 6j_1 - 3j_2 \\ j_2 = 5\ A \end{cases}$$

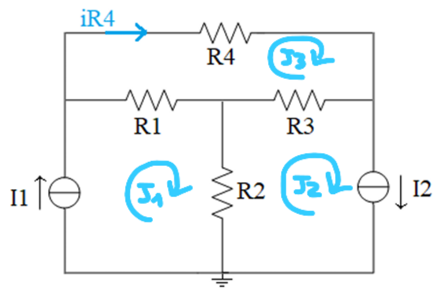
$$\begin{cases} 10 = 6j_1 - 15 \\ j_2 = 5\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{25}{6} \cong 4{,}2\ A \\ j_2 = 5\ A \end{cases}$$

La corrente che scorre sul resistore R_2, ovvero i_{R_2}, è data dalla differenza $j_1 - j_2$:

$i_{R_2} = j_1 - j_2 = 4{,}2 - 5 = 0{,}8\ A$

5.2. Per il circuito lineare di figura, calcolare la corrente che circola nel resistore R4, iR4. Dati: I1= 15A, I2= 5A, R1= 6Ω, R2= 2Ω, R3= 4Ω, R4= 10Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} j_1 = I_1 \\ j_2 = I_2 \\ 0 = j_3 \cdot (R_1 + R_3 + R_4) - j_1 \cdot (R_1) - j_2 \cdot (R_3) \end{cases}$$

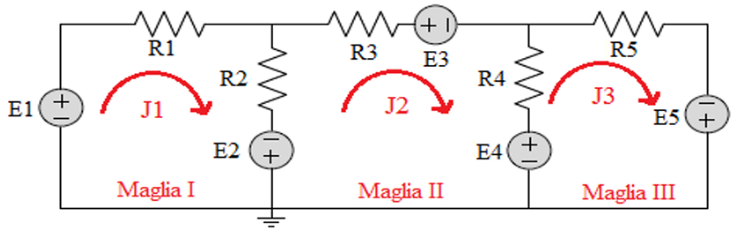
Al primo membro della terza equazione vi è uno zero poiché non vi sono generatori di tensione afferenti alla maglia in esame.

$$\begin{cases} j_1 = 15\ A \\ j_2 = 5\ A \\ 0 = 20 j_3 - 15 \cdot 6 - 5 \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 15\ A \\ j_2 = 5\ A \\ j_3 = \dfrac{110}{20} = 5{,}5\ A \end{cases}$$

Dunque, $i_{R_4} = j_3 = 5{,}5\ A$

5.3. Mediante il metodo delle correnti di maglia, determinare l'equazione alla maglia II della rete di figura.



Per il puro esercizio determineremo le equazioni a tutte le maglie della rete. Procediamo per gradi, scrivendo in primis l'equazione alla maglia I:

$$E_1 + E_2 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 \cdot (R_2)$$

Ricordiamo infatti che, se la corrente arbitraria (in questo caso j_1) scorre dal morsetto positivo a quello negativo del generatore di tensione, allora questo dovrà essere preso con segno positivo (viceversa con segno negativo).

Passiamo all'equazione della maglia II:

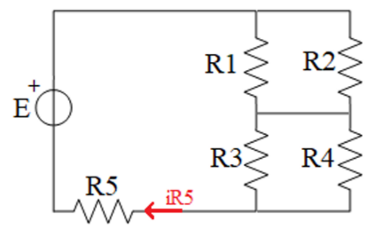
$$-E_2 - E_3 - E_4 = j_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - j_1 \cdot (R_2) - j_3 \cdot (R_4)$$

In questo caso la corrente arbitraria j_2 scorre dal morsetto negativo a quello positivo in ogni generatore di tensione, e per questo motivo ognuno di questi è stato preso con segno negativo.

Infine, ricaviamo l'equazione della maglia III:

$$E_4 + E_5 = j_3 \cdot (R_4 + R_5) - j_2 \cdot (R_4)$$

5.4. Per la rete di figura, determinare la corrente che circola nel resistore R5, iR5. Dati: E= 100V, R1 = 7Ω, R2 = 8Ω, R3= 9Ω, R4= 6Ω, R5= 5Ω.



Al fine di semplificare il circuito, possiamo calcolare la resistenza equivalente:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{7 \cdot 8}{7 + 8} = \frac{56}{15} \cong 3{,}7\ \Omega$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{9 \cdot 6}{9 + 6} = \frac{54}{15} = 3{,}6\ \Omega$$

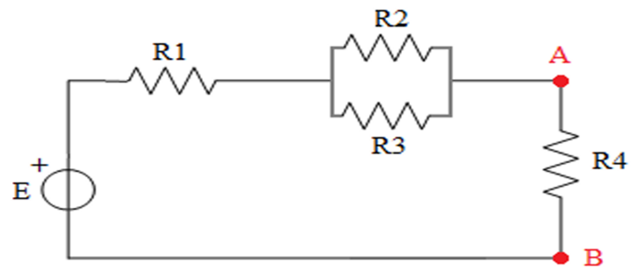
$$R_{eq} = R_{12} + R_{34} + R_5 = 3{,}7 + 3{,}6 + 5 = 12{,}3\ \Omega$$

$$i_{R_5} = I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{100}{12{,}3} \cong 8{,}1\ A$$

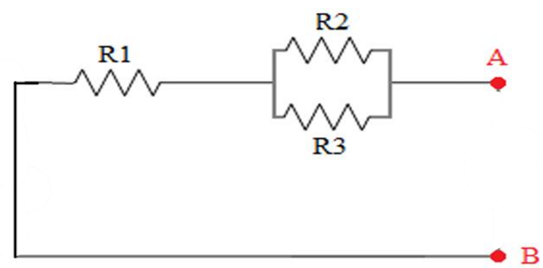
Sarebbe stato inefficiente e inutilmente tedioso, in questo caso, ricorrere al metodo delle correnti di maglia.

CIRCUITO EQUIVALENTE DI THEVENIN

6.1. Per il circuito di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R4. Dati: E= 10V, R1= 3 Ω, R2= 6 Ω, R3= 9 Ω, R4= 10 Ω.



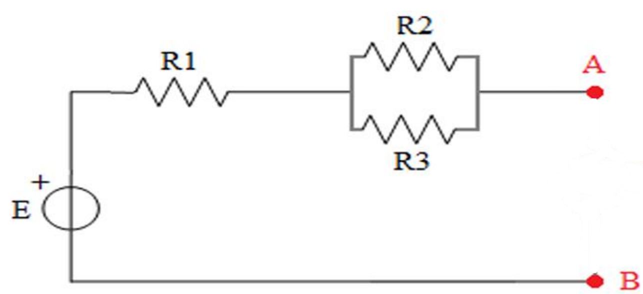
Per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin, dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito e considerare la rete a vuoto:



$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \cdot 9}{6 + 9} = \frac{54}{15} = 3{,}6\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{23} + R_1 = 3{,}6 + 3 = 6{,}6\ \Omega$$

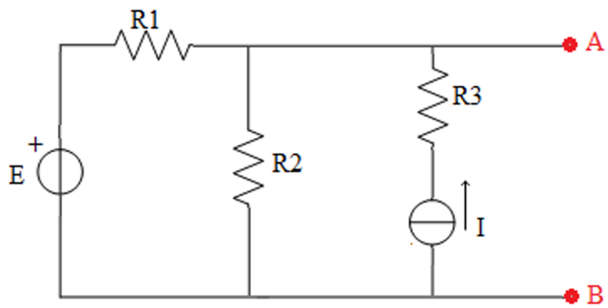
Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



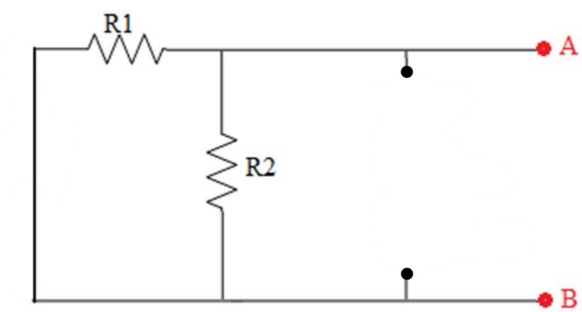
È facile intuire, in questo caso, che la tensione equivalente è dettata proprio dal generatore E ed è quindi pari a:

$$V_{eq} = E = 10\ V$$

6.2. Per il circuito di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin visto ai morsetti A-B. Dati: E= 20V, I= 10A, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω.



Per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito:

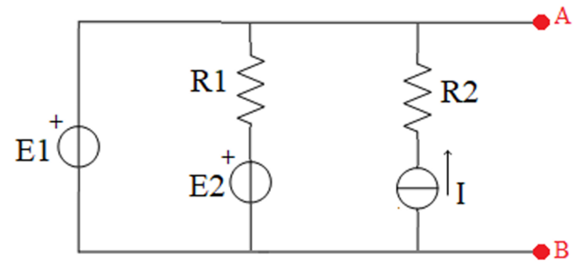


$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67\ \Omega$$

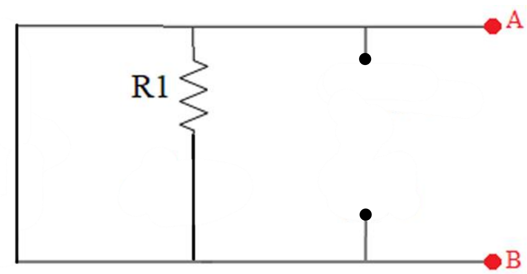
Per calcolare la tensione equivalente, invece, possiamo ricorrere al teorema di Millmann:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{0}{R_2} + I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{20 + 0 + 10}{1 + \frac{1}{2}} = 30 \cdot \frac{2}{3} = \frac{60}{3} = 20\ V = V_{eq}$$

6.3. Per la rete di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin visto ai morsetti A-B. Dati: E1= 100V, E2= 50V, I= 10A, R1= 3Ω, R2= 5Ω.



Spegniamo tutti i generatori indipendenti:



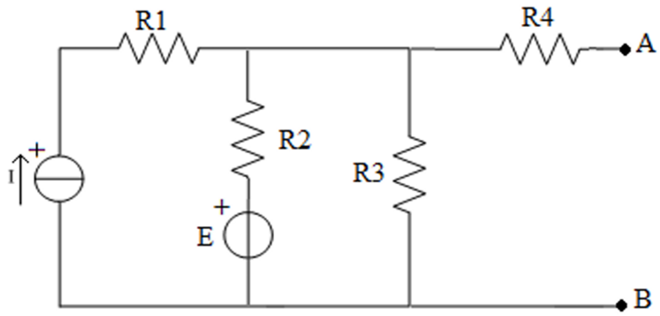
A primo acchito si potrebbe pensare che la resistenza equivalente del circuito di Thevenin sia pari ad R_1, tuttavia bisogna fare un'osservazione: la corrente scorre laddove trova meno resistenza e, poiché è presente un ramo privo di resistenze (corto circuito), possiamo affermare che su R_1 non scorrerà alcuna corrente. Dunque:

$R_{eq} = 0\ \Omega$

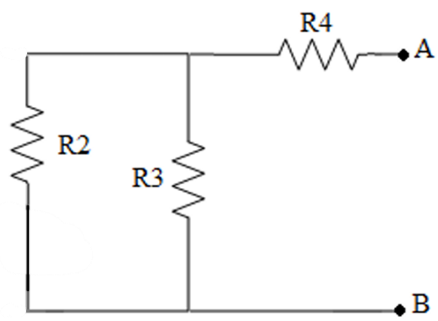
Per la tensione equivalente possiamo ricorrere al teorema di Millmann. In questo caso su un ramo è presente un generatore ideale di tensione (privo di resistori in serie), dunque:

$V_{AB} = E_1 = 100\ V = V_{eq}$

6.4. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente di Thevenin vista ai morsetti A-B. I resistori hanno valori R1=R2=R3=R4= 3 Ω, mentre i generatori E= 10 V ed I = 2 A.



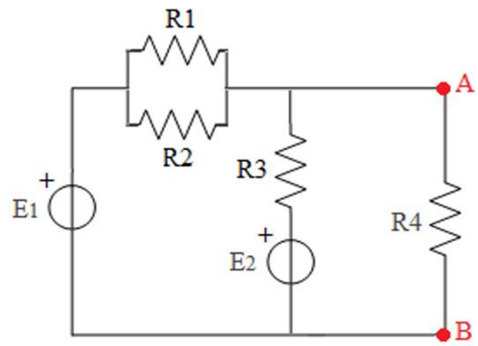
Spegniamo tutti i generatori indipendenti:



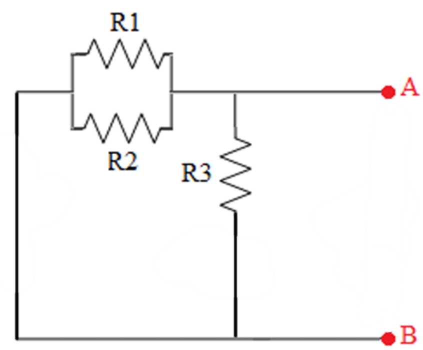
$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 3}{3+3} = \frac{9}{6} = 1{,}5\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{23} + R_4 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5\ \Omega$$

6.5. Per la rete di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi di R4. Dati: E1 = 18V, E2 = 6V, R1 = 5Ω, R2 = 8Ω, R3= 10Ω, R4= 3Ω.



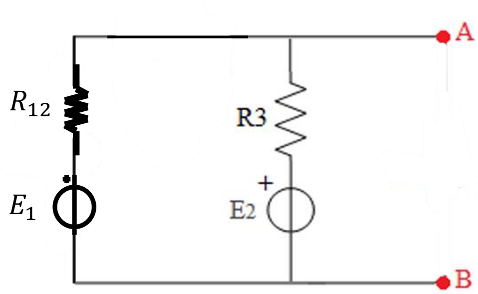
Per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin, dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito e considerare la rete a vuoto:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \cdot 8}{5+8} = \frac{40}{13} \cong 3{,}1\ \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{3{,}1 \cdot 10}{3{,}1+10} = \frac{31}{13{,}1} \cong 2{,}4\ \Omega$$

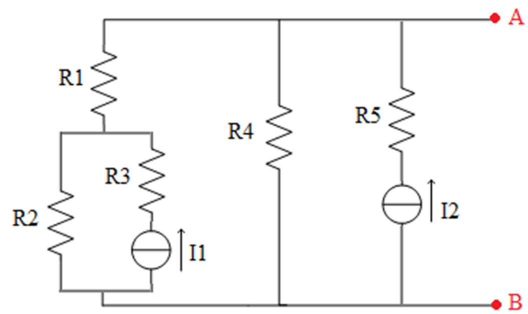
Per calcolare la tensione equivalente consideriamo il seguente circuito:



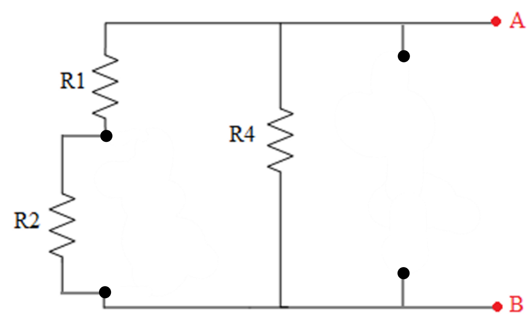
Applichiamo il teorema di Millmann:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_{12}} + \frac{E_2}{R_3}}{\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{18}{3{,}1} + \frac{6}{10}}{\frac{1}{3{,}1} + \frac{1}{10}} = \frac{5{,}8+0{,}6}{0{,}3+0{,}1} = \frac{6{,}4}{0{,}4} = 16\ V$$

6.6. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente di Thevenin vista ai morsetti A-B. Dati: I1= 10A, I2= 20A, R1 = 10Ω, R2 = 2Ω, R3= 3Ω, R4= 10Ω, R5= 6Ω.



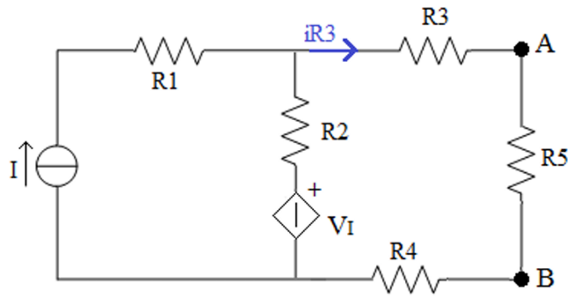
Spegniamo tutti i generatori indipendenti:



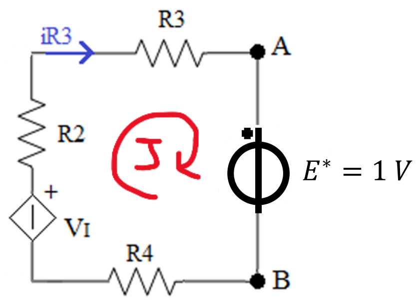
$$R_{12} = R_1 + R_2 = 10 + 2 = 12\ \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{12}R_4}{R_{12} + R_4} = \frac{12 \cdot 10}{12 + 10} = \frac{120}{22} \cong 5{,}5\ \Omega$$

6.7. Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente di Thevenin vista ai capi del resistore R5. Dati: I= 7A, R1 = 3Ω, R2 = 3Ω, R3= 12Ω, R4= 6Ω, R5= 2Ω, rm= 0.5Ω, VI= rmiR3.



Nel circuito è presente un generatore di tensione pilotato in corrente. In questo caso dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti ed eliminare il carico (in questo caso R_5) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione del valore convenzionale di $1\ V$.



La resistenza equivalente in presenza di generatori pilotati si calcola tramite la seguente formula:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}}$$

Ovviamente $V_{AB} = 1\ V$, dobbiamo dunque trovare la corrente I_{BA} sfruttando l'equazione alla maglia:

$$V_I - E^* = j \cdot (R_2 + R_3 + R_4)$$

$$R_m \cdot i_{R_3} - 1 = 21j$$

Ma $i_{R_3} = j$, dunque:

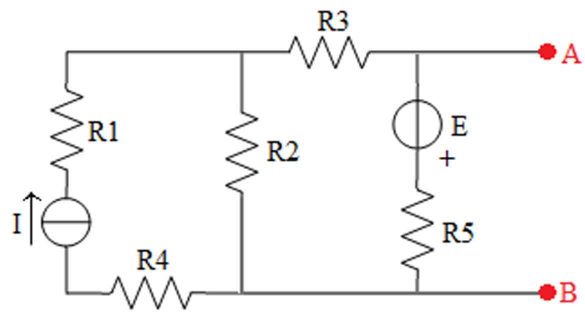
$$0{,}5j - 1 = 21j$$

$$j = -\frac{1}{20{,}5} \cong -0{,}049\ A$$

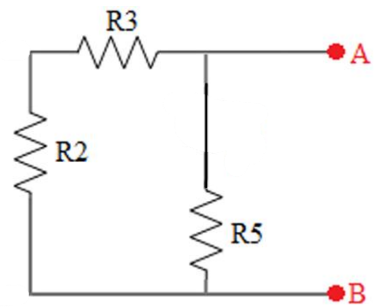
Ma $I_{BA} = -j = 0{,}049\ A$, dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}049} \cong 20{,}5\ \Omega$$

6.8.Per la rete di figura, determinare la resistenza equivalente di Thevenin vista ai morsetti A-B. Dati: I= 1A, E= 2V, R1= 7Ω, R2= 5Ω, R3= 4Ω, R4= 8Ω, R5= 2Ω.



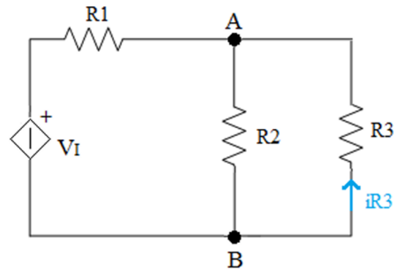
Spegniamo tutti i generatori indipendenti:



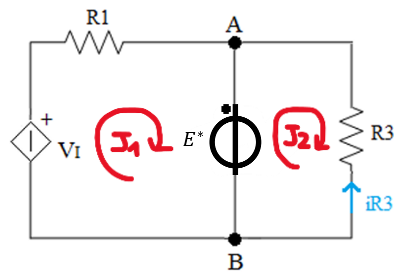
$$R_{23} = R_2 + R_3 = 5 + 4 = 9\ \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{R_{23}R_5}{R_{23} + R_5} = \frac{9 \cdot 2}{9 + 2} = \frac{18}{11} \cong 1{,}6\ \Omega$$

6.9. Per il circuito di figura, determinare la resistenza equivalente di Thevenin vista ai capi del resistore R2. Dati: VI= rm*iR3, rm= 0.5Ω , R1= 2Ω, R2= 5Ω, R3= 3Ω.



Nel circuito è presente un generatore di tensione pilotato in corrente. In questo caso dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti (non ce ne sono) ed eliminare il carico (in questo caso R_2) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione del valore convenzionale di $1\ V$.



$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}}$$

Ovviamente $V_{AB} = 1\ V$, dobbiamo dunque trovare la corrente I_{BA} sfruttando il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} V_I - E^* = j_1 \cdot R_1 \\ E^* = j_2 \cdot R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_m \cdot i_{R_3} - 1 = 2j_1 \\ 1 = 3j_2 \end{cases}$$

Ma $i_{R_3} = -j_2$, dunque:

$$\begin{cases} -0{,}5j_2 - 1 = 2j_1 \\ 1 = 3j_2 \end{cases}$$

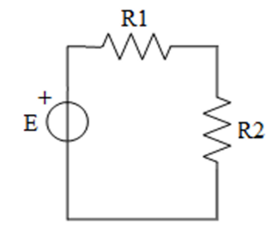
$$\begin{cases} j_1 \cong -0{,}58\ A \\ j_2 = \frac{1}{3}\ A \cong 0{,}33\ A \end{cases}$$

Osserviamo che $I_{BA} = -(j_1 - j_2) = -(-0{,}91) = 0{,}91\ A$, dunque:

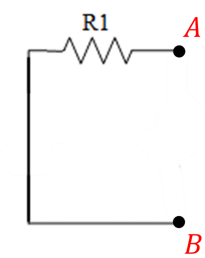
$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}91} \cong 1{,}1\ \Omega$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON

7.1. Per la rete di figura, calcolare il circuito equivalente di Norton ai capi del resistore R2. Dati: E= 10 V, R1= 10 Ω, R2= 20 Ω.



Analogamente a quanto fatto per Thevenin, per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.

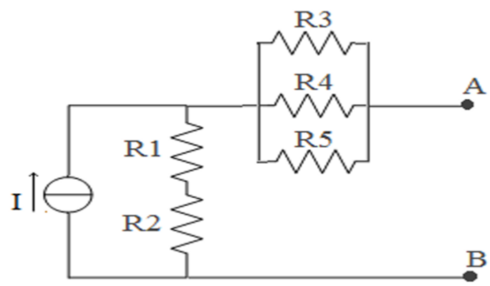


È evidente che $R_{eq} = R_1 = 10\ \Omega$.

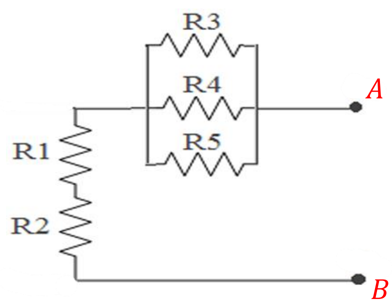
La corrente I_{eq} sarà data da:

$$I_{eq} = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{10} = 1\ A$$

7.2. Per la rete di figura, calcolare il circuito equivalente di Norton visto ai morsetti A-B. Dati: I= 12A, R1= 11Ω, R2= 12Ω, R3= 13Ω, R4= 14Ω, R5= 15Ω.



Per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.



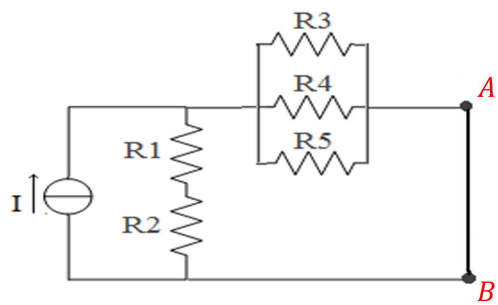
$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{13 \cdot 14}{13 + 14} \cong 6{,}7\ \Omega$$

$$R_{345} = \frac{R_{34} R_5}{R_{34} + R_5} = \frac{6{,}7 \cdot 15}{6{,}7 + 15} \cong 4{,}6\ \Omega$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 11 + 12 = 23\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{345} + R_{12} = 4{,}6 + 23 = 27{,}6\ \Omega$$

Per la I_{eq} consideriamo il seguente circuito:



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

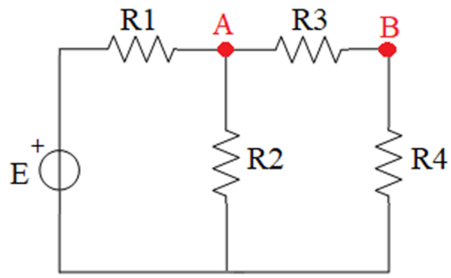
$$\begin{cases} j_1 = I = 12\ A \\ 0 = j_2 \cdot (R_{12} + R_{345}) - j_1 R_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ 0 = 27{,}6 j_2 - 12 \cdot 23 \end{cases}$$

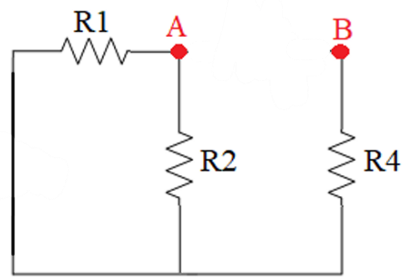
$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ j_2 = \dfrac{276}{27{,}6} = 10\ A \end{cases}$$

Infine, $j_2 = I_{AB} = I_{eq} = 10\ A$

7.3. Per la rete di figura, determinare il circuito equivalente di Norton visto ai morsetti A-B. Dati: E= 12V, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω.



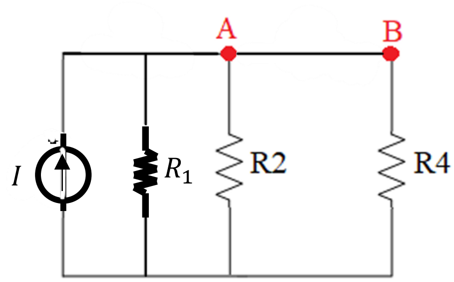
Per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.

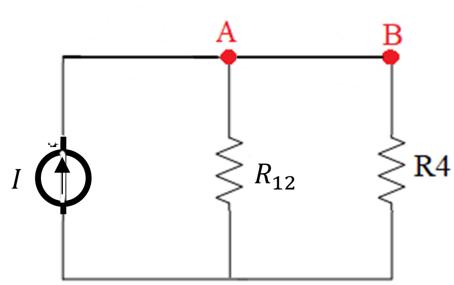


$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \cong 0{,}7\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{12} + R_4 = 0{,}7 + 4 = 4{,}7\ \Omega$$

Per il calcolo della I_{eq} si devono effettuare alcune trasformazioni:





Ricorrendo al metodo delle correnti di maglia si ottiene:

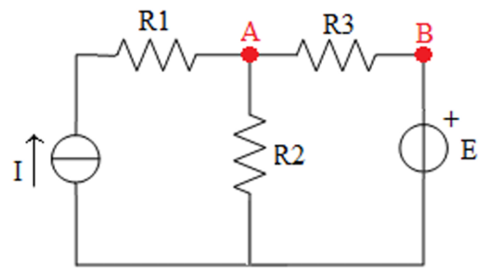
$$\begin{cases} j_1 = I = \dfrac{E}{R_1} = \dfrac{12}{1} = 12\ A \\ 0 = j_2 \cdot (R_{12} + R_4) - j_1 R_{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ 0 = 4{,}7 j_2 - 12 \cdot 0{,}7 \end{cases}$$

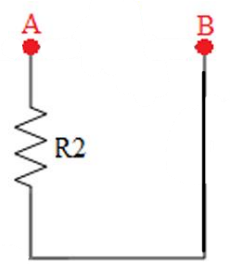
$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ j_2 = \dfrac{8{,}4}{4{,}7} \cong 1{,}8\ A \end{cases}$$

Infine, $j_2 = I_{AB} = I_{eq} = 1{,}8\ A$

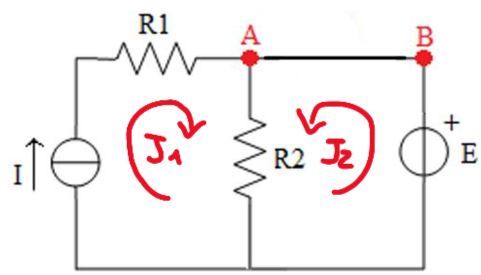
7.4. Per il circuito di figura, determinare il circuito equivalente di Norton visto dal resistore R3. Dati: I= 12A, E= 10V, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω.



Per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.



È evidente che $R_{eq} = R_2 = 2\ \Omega$. Per il calcolo della I_{eq} consideriamo il seguente circuito:



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

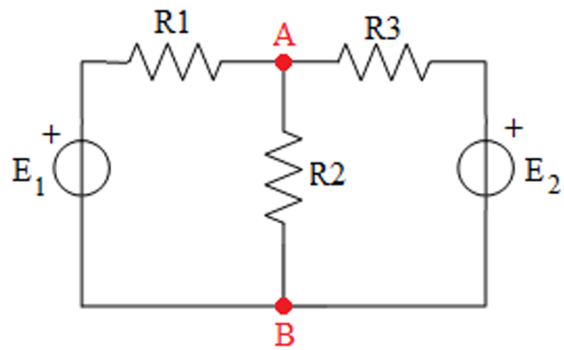
$$\begin{cases} j_1 = I = 12\ A \\ E = j_2 \cdot (R_2) + j_1 R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ 10 = 2j_2 + 12 \cdot 2 \end{cases}$$

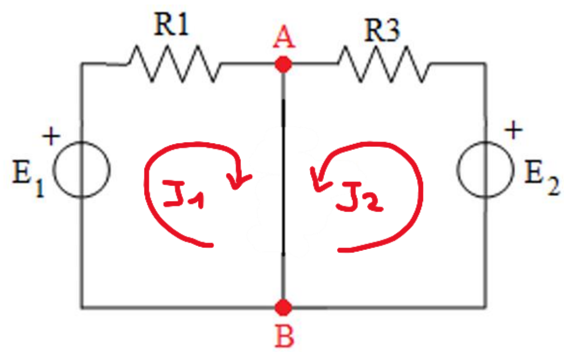
$$\begin{cases} j_1 = 12\ A \\ j_2 = -\dfrac{14}{2} = -7\ A \end{cases}$$

Ma osserviamo che $I_{AB} = -j_2 = 7\ A = I_{eq}$

7.5. Per la rete di figura, determinare la corrente di corto cortocircuito di Norton vista dal resistore R2. Dati: E1= 20V, E2= 10V, R1= 2Ω, R2= 6Ω, R3= 10Ω.



Per il calcolo della I_{eq} consideriamo il seguente circuito:



Utilizziamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} E_1 = j_1 R_1 \\ E_2 = j_2 R_3 \end{cases}$$

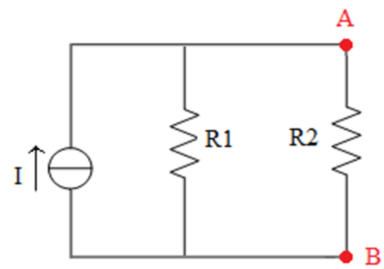
$$\begin{cases} 20 = 2j_1 \\ 10 = 10j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 10\ A \\ j_2 = 1\ A \end{cases}$$

Osserviamo che $I_{AB} = j_1 + j_2 = 10 + 1 = 11\ A = I_{eq}$

POTENZA

8.1. Nel circuito di figura, determinare la potenza impegnata dal resistore R2. Dati: I= 12 A, R1= 5 Ω, R2= 4 Ω.



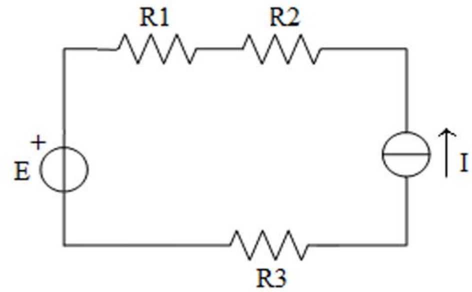
Possiamo applicare il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_2:

$$i_{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 12 \cdot \frac{5}{5+4} = \frac{60}{9} \cong 6{,}7\ A$$

Conoscendo la corrente i_{R_2}, possiamo sfruttare la seguente formula per ricavare la potenza impegnata dal resistore R_2:

$$P_{R_2} = v_{R_2} \cdot i_{R_2} = R_2 \cdot i_{R_2} \cdot i_{R_2} = R_2 \cdot i_{R_2}^2 = 4 \cdot 44{,}9 = 179{,}6\ W$$

8.2. Per il circuito di figura, calcolare la potenza erogata dal generatore di tensione E. Dati: E= 30 V, I= 10 A, R1= 1 Ω, R2= 2 Ω, R3= 3 Ω.

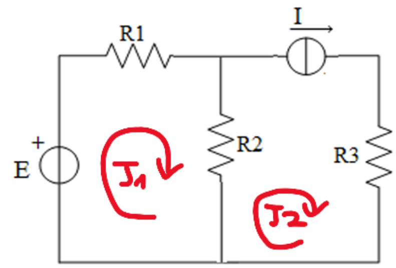


$P_E = v_E \cdot i_E = E \cdot I = 30 \cdot 10 = 300\ W$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di E, per la convenzione degli utilizzatori, la potenza sarà assorbita positiva (generata negativa). Dunque:

$P_E = -300\ W$

8.3. Per il circuito lineare di figura, calcolare la potenza erogata dal generatore di tensione E. Dati: E= 10V, I= 5A, R1= 6 Ω, R2= 7 Ω, R3= 8 Ω.



Per trovare la corrente che scorre sul generatore di tensione E, applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} E = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ j_2 = I \end{cases}$$

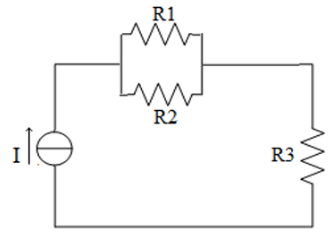
$$\begin{cases} 10 = 13 j_1 - 5 \cdot 7 \\ j_2 = I = 5\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{45}{13} \cong 3{,}5\ A \\ j_2 = 5\ A \end{cases}$$

La corrente che scorre sul generatore di tensione è j_1, dunque:

$$P_E = v_E \cdot i_E = E \cdot j_1 = 10 \cdot 3{,}5 = 35\ W$$

8.4. Per il circuito lineare di figura, calcolare la potenza dissipata dal resistore R1. Dati: I= 3A, R1= 4Ω, R2= 5Ω, R3= 6Ω.



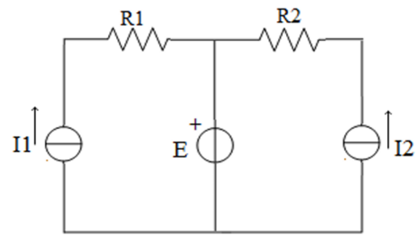
Possiamo applicare il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_1:

$$i_{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \cdot \frac{5}{4+5} = \frac{15}{9} \cong 1{,}7\ A$$

Conoscendo la corrente i_{R_1}, possiamo sfruttare la seguente formula per ricavare la potenza impegnata dal resistore R_1:

$$P_{R_1} = v_{R_1} \cdot i_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} \cdot i_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1}^2 = 4 \cdot 2{,}9 = 11{,}6\ W$$

8.5. Per il circuito di figura, calcolare la potenza erogata dal generatore di tensione E. Dati: I1= 2A, I2= 4A, E= 10V, R1= 1Ω, R2= 2Ω.



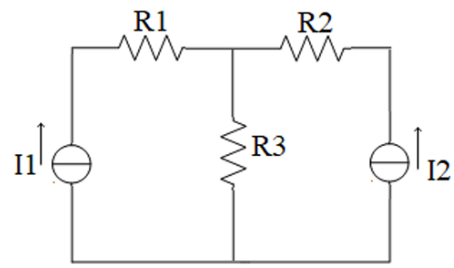
La corrente che scorre sul generatore di tensione E è pari alla somma delle correnti I_1 e I_2, dunque:

$$P_E = v_E \cdot i_E = E \cdot (I_1 + I_2) = 10 \cdot 6 = 60\ W$$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di E, per la convenzione degli utilizzatori, la potenza sarà assorbita positiva (generata negativa). Dunque:

$$P_E = -60\ W$$

8.6. Per il circuito di figura, calcolare la somma delle potenze dissipate dai resistori R1, R2 ed R3. Dati: I1= 3A, I2= 7A, R1= 8Ω, R2= 9Ω, R3= 5Ω.



La corrente che scorre su R_1 è I_1, dunque:

$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 8 \cdot 9 = 72\ W$

La corrente che scorre su R_2 è I_2, dunque:

$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 9 \cdot 49 = 441\ W$

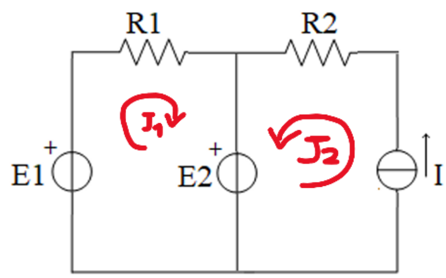
La corrente che scorre su R_3 è data dalla somma di I_1 e I_2, dunque:

$P_{R_3} = R_3 \cdot (I_1 + I_2)^2 = 5 \cdot 100 = 500\ W$

Dunque, la somma delle potenze impegnate dai resistori è la seguente:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 72 + 441 + 500 = 1013\ W$

8.7. Per la rete di figura, calcolare la potenza erogata dal generatore di tensione E2. Dati: I= 15A, E1= 15V, E2= 5V, R1= 4Ω, R2= 8Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per ricavare la corrente che scorre su E_2:

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = j_1 R_1 \\ j_2 = I \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = 4j_1 \\ j_2 = 15\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{10}{4} = 2{,}5\ A \\ j_2 = 15\ A \end{cases}$$

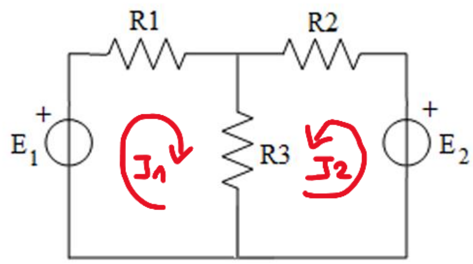
Osserviamo che la corrente che scorre su E_2 è data dalla somma di j_1 e j_2, dunque:

$$P_{E_2} = v_{E_2} \cdot i_{E_2} = E_2 \cdot (j_1 + j_2) = 5 \cdot 17{,}5 = 87{,}5\ W$$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di E_2, per la convenzione degli utilizzatori, la potenza sarà assorbita positiva (generata negativa). Dunque:

$$P_{E_2} = -87{,}5\ W$$

8.8. Per il circuito lineare di figura, determinare la potenza dissipata dal resistore R1. Dati: E1= 20V, E2= 10V, R1= 8Ω, R2= 2Ω, R3= 5Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per conoscere la corrente che scorre su R_1:

$$\begin{cases} E_1 = j_1 \cdot (R_1 + R_3) + j_2 R_3 \\ E_2 = j_2 \cdot (R_2 + R_3) + j_1 R_3 \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 13 \cdot 7 - 5 \cdot 5 = 66$$

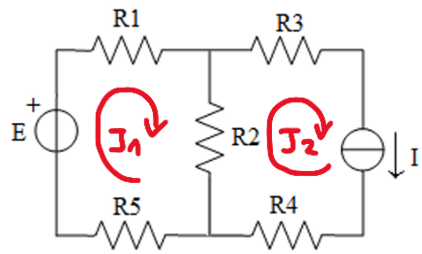
Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare la corrente che ci interessa, ovvero j_1:

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 10 & 7 \end{vmatrix}}{66} = \frac{20 \cdot 7 - 10 \cdot 5}{66} = \frac{90}{66} \cong 1{,}4\ A$$

Dunque:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot j_1^2 = 8 \cdot 2 = 16\ W$$

8.9. Per il circuito di figura, determinare la potenza erogata dal generatore di tensione E. Dati: E= 100V, I= 20A, R1= 10Ω, R2= 20Ω, R3= 30Ω, R4= 40Ω, R5= 50Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per conoscere la corrente che scorre su E:

$$\begin{cases} E = j_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_5) - j_2 R_2 \\ j_2 = I \end{cases}$$

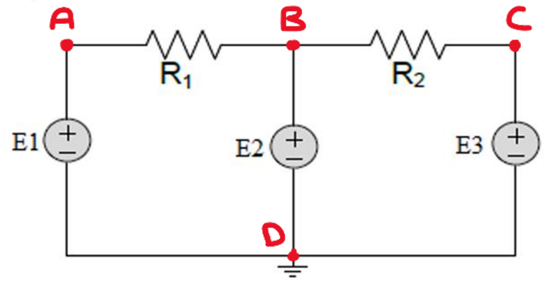
$$\begin{cases} 100 = 80 j_1 - 20 \cdot 20 \\ j_2 = 20\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \dfrac{500}{80} = 6{,}25\ A \\ j_2 = 20\ A \end{cases}$$

La corrente che scorre sul generatore di tensione è j_1, dunque:

$$P_E = v_E \cdot i_E = E \cdot j_1 = 100 \cdot 6{,}25 = 625\ W$$

8.10. Per la rete di figura, determinare le potenze dissipate dai due resistori R1 ed R2 sapendo che E1 = 30 V, E2 = 20 V, E3 = 10 V, R1 = 1 Ω ed R2 = 2 Ω.



Osserviamo che:

$v_A = E_1 = 30\ V$

$v_C = E_3 = 10\ V$

Inoltre, essendo D a massa ($v_D = 0\ V$):

$v_B = E_2 = 20\ V$

Di conseguenza possiamo calcolare le cadute di tensione su R_1 ed R_2:

$V_{R_1} = v_A - v_B = 30 - 20 = 10\ V$

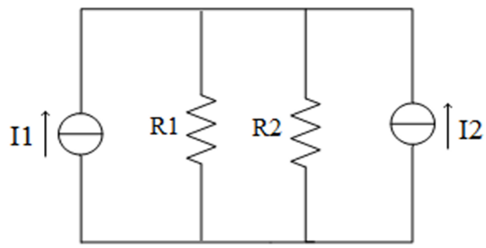
$V_{R_2} = v_B - v_C = 20 - 10 = 10\ V$

Calcoliamo dunque le potenze impegnate dai resistori:

$$P_{R_1} = V_{R_1} \cdot i_{R_1} = V_{R_1} \cdot \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{V_{R_1}^2}{R_1} = \frac{100}{1} = 100\ W$$

$$P_{R_2} = V_{R_2} \cdot i_{R_2} = V_{R_2} \cdot \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_{R_2}^2}{R_2} = \frac{100}{2} = 50\ W$$

8.11. Per la rete di figura, determinare la potenza erogata dai generatori di corrente I1 e I2. Dati: I1= 3A, I2= 2A, R1 = 12Ω, R2 = 14Ω.



Osserviamo che i due generatori di corrente in parallelo possono essere sommati:

$I_{eq} = I_1 + I_2 = 3 + 2 = 5\ A$

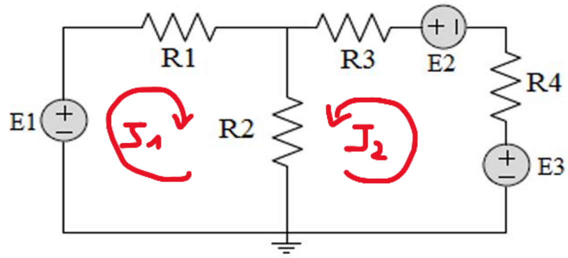
$R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{12 \cdot 14}{12 + 14} \cong 6{,}5\ \Omega$

$E = I_{eq} \cdot R_{eq} = 5 \cdot 6{,}5 = 32{,}5\ V$

$P_{I_1} = E \cdot I_1 = 32{,}5 \cdot 3 = 97{,}5\ W$

$P_{I_2} = E \cdot I_2 = 32{,}5 \cdot 2 = 65\ W$

8.12. Per la rete di figura, determinare la potenza dissipata dal resistore R2. Dati: E1 = 5V, E2 = 1V, E3 = 3V, R1 = 1Ω, R2 = 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per determinare la corrente che scorre su R_2:

$$\begin{cases} E_1 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) + j_2 R_2 \\ E_2 + E_3 = j_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) + j_1 R_2 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 + E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 2 = 23$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare le correnti interessate:

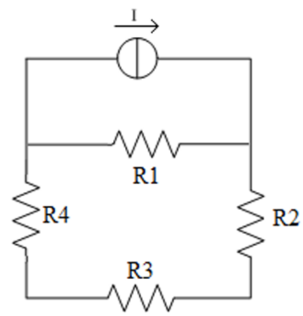
$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{23} = \frac{5 \cdot 9 - 4 \cdot 2}{23} = \frac{37}{23} \cong 1{,}6\ A$$

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{23} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{23} = \frac{2}{23} \cong 0{,}09\ A$$

Osserviamo che la corrente che scorre su R_2 è data dalla somma di j_1 e j_2, dunque:

$$P_{R_2} = R_2 \cdot (j_1 + j_2)^2 = 2 \cdot 2{,}86 = 5{,}72\ W$$

8.13. Per la rete di figura, determinare la potenza impegnata dal resistore R3. Dati: I= 20A, R1 = 5Ω, R2 = 4Ω, R3= 3Ω, R4= 2Ω.



$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4 = 9\ \Omega$

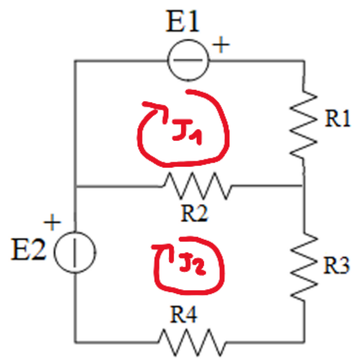
Applichiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_{234} (poiché R_2, R_3 ed R_4 sono in serie, la corrente che le attraversa è la stessa):

$$i_{R_3} = i_{R_{234}} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} = 20 \cdot \frac{5}{14} = \frac{100}{14} \cong 7{,}15\ A$$

Dunque:

$P_{R_3} = R_3 \cdot i_{R_3}^2 = 3 \cdot 51{,}1 = 153{,}3\ W$

8.14. Per il circuito di figura, calcolare la somma delle potenze erogate dai generatori E1 ed E2. Dati: E1= 10V, E2= 15V, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, R4= 4Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare le correnti che scorrono in E_1 ed E_2:

$$\begin{cases} E_1 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ E_2 = j_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - j_1 R_2 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 9 - [-2 \cdot (-2)] = 23$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare le correnti interessate:

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 15 & 9 \end{vmatrix}}{23} = \frac{10 \cdot 9 - 15 \cdot (-2)}{23} = \frac{120}{23} \cong 5{,}2\ A$$

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{vmatrix}}{23} = \frac{3 \cdot 15 - (-2) \cdot 10}{23} = \frac{65}{23} \cong 2{,}8\ A$$

La corrente che scorre su E_1 è j_1, dunque:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot j_1 = 10 \cdot 5{,}2 = 52\ W$$

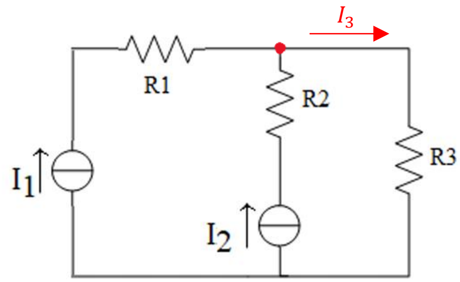
La corrente che scorre su E_2 è j_2, dunque:

$$P_{E_2} = E_2 \cdot j_2 = 15 \cdot 2{,}8 = 42\ W$$

La somma delle potenze generate sarà la seguente:

$$P_{E_1} + P_{E_2} = 52 + 42 = 94\ W$$

8.15.Per la rete di figura, determinare la somma delle potenze dissipate dai resistori. Dati: I1= 5A, I2= 3A, R1= 7Ω, R2= 8Ω, R3= 3Ω.



Applichiamo la LKC al nodo evidenziato:

$I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$5 + 3 - I_3 = 0$

$I_3 = 8\ A$

Su R_1 scorre la corrente I_1, dunque:

$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 7 \cdot 25 = 175\ W$

Su R_2 scorre la corrente I_2, dunque:

$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 8 \cdot 9 = 72\ W$

Su R_3 scorre la corrente I_3, dunque:

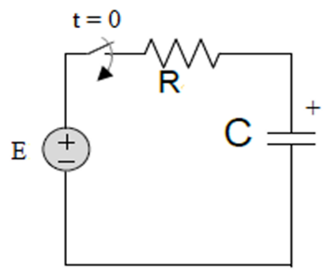
$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 3 \cdot 64 = 192\ W$

La somma delle potenze dissipate sarà la seguente:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = 175 + 72 + 192 = 439\ W$

CIRCUITI DINAMICI DEL PRIMO ORDINE

9.1. La rete di figura si trova inizialmente allo stato zero, all'istante t=0 il tasto si chiude, determinare la tensione ai capi del condensatore all'istante zero Vc(0), sapendo che E=10 V, R= 1 Ω e C= 1F.

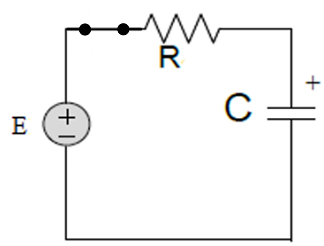


Prima che l'interruttore si chiuda, ovvero per $t < 0$, si osserva che non vi è tensione ai capi del condensatore, dunque possiamo affermare che:

$v_C(0^-) = 0\ V$

Dove $v_C(0^-)$ è la tensione ai capi del condensatore un istante prima della chiusura dell'interruttore.

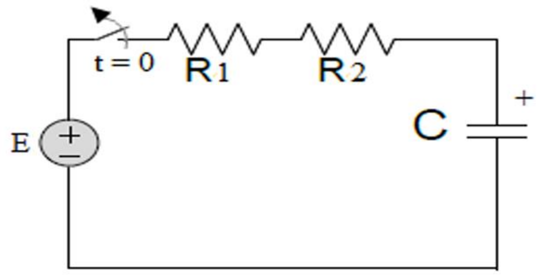
All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, quindi per $t \geq 0$ il circuito che risulta è il seguente:



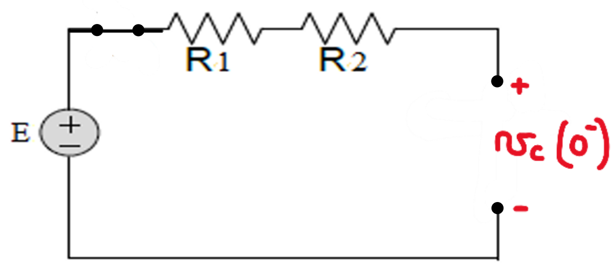
Ovviamente il condensatore non si carica istantaneamente, ma lo farà con una certa costante di tempo τ. Dunque, possiamo sfruttare la relazione secondo cui $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+)$ per affermare che anche all'istante 0 la tensione ai capi del condensatore è ancora nulla:

$v_C(0) = 0\ V$

9.2. La rete di figura si trova a regime con l'interruttore chiuso. A t = 0 l'interruttore si apre, determinare il valore all'istante zero della tensione sul condensatore Vc(0). Dati: E = 30 V, R1 = 1Ω , R2 = 2Ω e C = 2 mF.

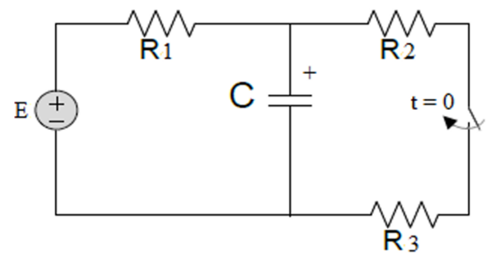


Per $t < 0$ il condensatore è carico (circuito aperto), dunque risulta il seguente circuito:

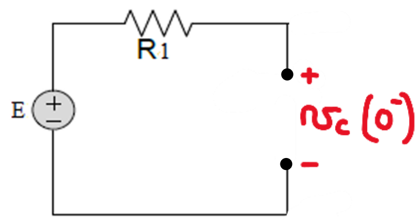


$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = E = 30\ V$

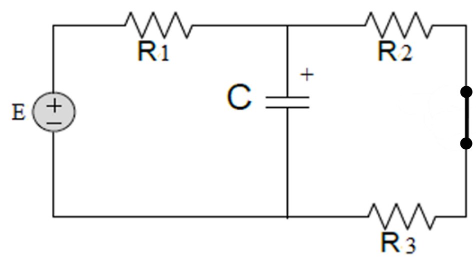
9.3. Nel circuito dinamico di figura, per t < 0 il condensatore presenta ai suoi capi una tensione di regime pari a 50 V. Considerando i resistori tutti di pari valore, cosa succede non appena il tasto viene chiuso?



Per $t < 0$ il condensatore è carico e la tensione ai suoi capi è pari a $v_C(0^-) = 50\ V$. Il circuito risulta il seguente:



Per $t \geq 0$, una volta che l'interruttore viene chiuso, il circuito diventa il seguente:



Dato che le resistenze sono tutte di pari valore:

$R_{23} = R_2 + R_3 = 2R$

Il condensatore inizia a scaricarsi, tuttavia si può considerare ancora trascurabile la corrente che scorre su di esso. Applicando la LKT:

$E - R \cdot i - 2R \cdot i = 0$

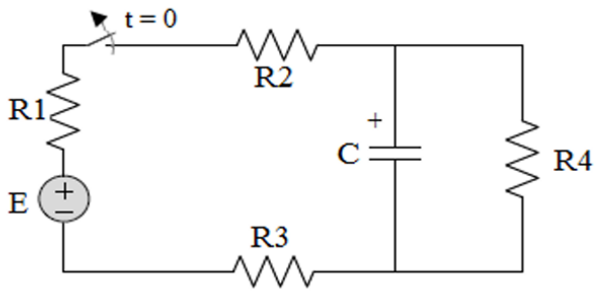
$E - 3R \cdot i = 0$

$$i = \frac{E}{3R}\ A$$

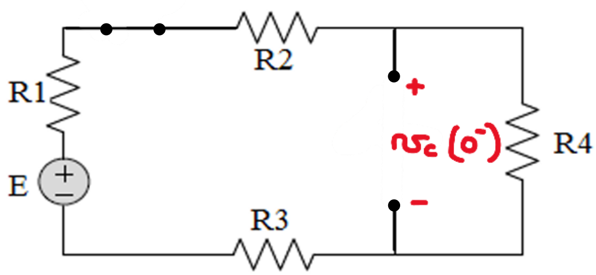
$$v_{2R} = 2R \cdot i = 2R \cdot \frac{E}{3R} = \frac{2}{3}E$$

Poiché $v_C(\infty) = v_{2R}$, osserviamo che la $v_C(t)$ tende a diminuire con il passare del tempo.

9.4. La rete di figura si trova a regime con il tasto chiuso. All'istante t=0 il tasto si apre, determinare la tensione ai capi del condensatore all'istante zero Vc(0+). Dati: E= 100V, R1=R2=R3=R4= 6Ω e C= 2F.



Per $t < 0$ il condensatore è carico e si comporta da circuito aperto; dunque, il circuito risultante è il seguente:



La tensione $v_C(0^-)$ è pari a V_{R_4}, che troveremo applicando il partitore di tensione:

$$V_{R_4} = E \cdot \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 100 \cdot \frac{6}{24} = 25\ V = v_C(0^-)$$

Dunque:

$v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = 25\ V$

9.5. Lo studio di un circuito dinamico del primo ordine fornisce un equazione differenziale del tipo [(dVc/dt)+(Vc/RC) = (E/RC)]. Determinare VC(t). Dati: E= 10V, VC(0)= 20V, R= 5Ω, C = 2F.

$$\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{RC}=\frac{E}{RC}$$

L'equazione differenziale a nostra disposizione è del primo ordine, lineare a coefficienti costanti e non omogenea. La soluzione di tale equazione sarà del tipo:

$$v_C(t)=v_{ch}(t)+v_{cp}(t)$$

Ricaviamo l'omogenea associata $v_{ch}(t)$:

$$\frac{dv_C}{dt}+\frac{v_C}{RC}=0$$

Questo tipo di equazione ha soluzione nota del tipo:

$$v_{ch}(t)=k\cdot e^{S_0 t}$$

Determiniamo S_0 sostituendo tale soluzione alle v_C dell'omogenea associata:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt}+\frac{ke^{S_0 t}}{RC}=0$$

Utilizzando la proprietà di derivazione del prodotto, otteniamo:

$$(0\cdot e^{S_0 t})+kS_0e^{S_0 t}+\frac{ke^{S_0 t}}{RC}=0$$

$$\Rightarrow S_0=-\frac{1}{RC}=-\frac{1}{5\cdot 2}=-0{,}1\ Hz$$

Abbiamo trovato S_0, detta frequenza naturale del circuito.

$$\Rightarrow v_{ch}(t)=k\cdot e^{S_0 t}=k\cdot e^{-0{,}1t}$$

Adesso determiniamo l'integrale particolare $v_{cp}(t)$. Esso ha la stessa forma dell'ingresso, il quale nel nostro caso corrisponde al generatore (che è costante). Dunque, anche $v_{cp}(t)$ è costante e lo indichiamo nel seguente modo:

$$v_{cp}(t)=k'$$

Sostituiamo k' alle v_C dell'equazione differenziale di partenza:

$$\frac{dk'}{dt}+\frac{k'}{RC}=\frac{E}{RC}$$

La derivata di una costante è nulla, dunque:

$$\frac{k'}{RC}=\frac{E}{RC}$$

$\Rightarrow k' = E$

Dunque:

$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t) = k \cdot e^{-0,1t} + E$

Determiniamo k imponendo la condizione iniziale $v_C(0) = 20\ V$:

$v_C(0) = k \cdot e^0 + E$

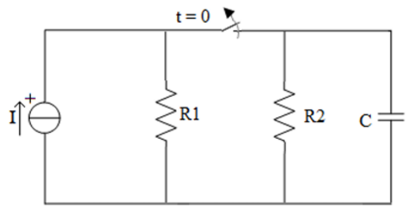
$20 = k + 10$

$k = 10$

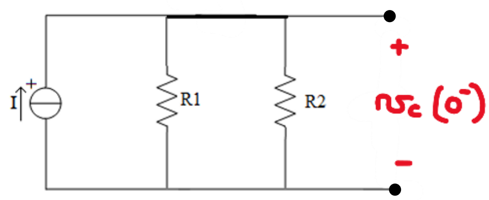
Avremo quindi infine:

$v_C(t) = 10 \cdot e^{-0,1t} + 10$

9.6. Nella rete di figura, per t<0 il circuito è a regime con il tasto chiuso. A t≥0 il tasto si apre. Determinare la tensione ai capi del condensatore nell'istante 0+, VC(0+). Dati: I= 20A, R1= 2Ω, R2= 3Ω, C= 3F.



Per $t < 0$ il condensatore è carico e si comporta da circuito aperto; dunque, il circuito risultante è il seguente:



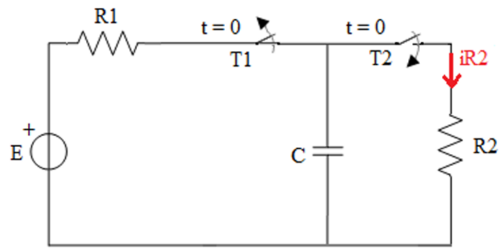
È evidente che $v_C(0^-) = v_{R_2}$. Sfruttiamo il partitore di corrente per trovare la corrente che scorre su R_2:

$$i_{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 20 \cdot \frac{2}{2+3} = \frac{40}{5} = 8\ A$$

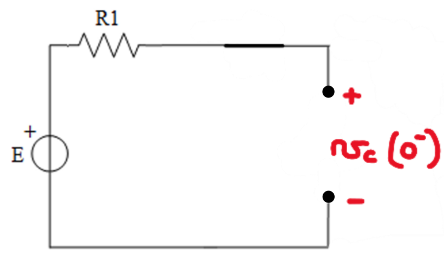
Di conseguenza:

$$v_{R_2} = v_C(0^-) = R_2 \cdot i_{R_2} = 3 \cdot 8 = 24\ V = v_C(0^+)$$

9.7. Il circuito dinamico di figura si trova a regime per t<0 con il tasto T1 chiuso e T2 aperto. All'istante t=0, il tasto T1 si apre e il tasto T2 si chiude. Determinare la corrente che scorre sul resistore R2 all'istante t=0+. Dati: E= 100V, R1= 20Ω, R2= 40Ω, C = 2mF.

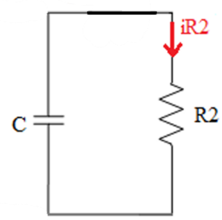


Per $t < 0$ il condensatore è carico e si comporta da circuito aperto; dunque, il circuito risultante è il seguente:



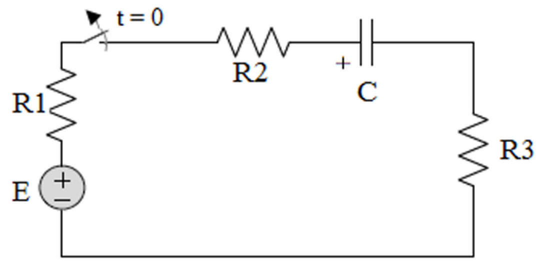
È evidente che $v_C(0^-) = E = 100\ V = v_C(0^+)$.

Per $t \geq 0$ il circuito risultante è il seguente:

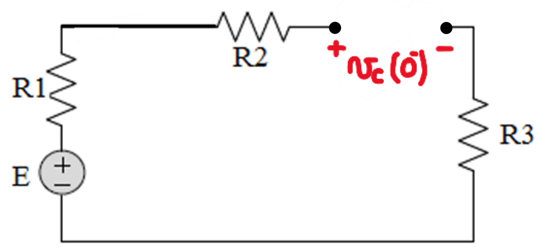


$$i_{R_2} = \frac{v_C(0^+)}{R_2} = \frac{100}{40} = 2{,}5\ A$$

9.8. La rete è a regime con l'interruttore chiuso per t<0. A t=0 l'interruttore si apre, determinare la tensione ai capi del condensatore nell'stante t=0+. Dati: E= 12V, R1= 1Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, C= 2F.

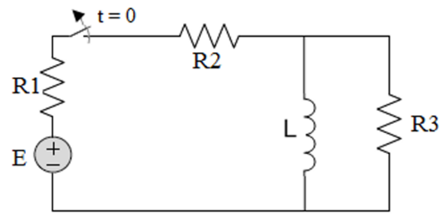


Per $t < 0$ il condensatore è carico e si comporta da circuito aperto; dunque, il circuito risultante è il seguente:

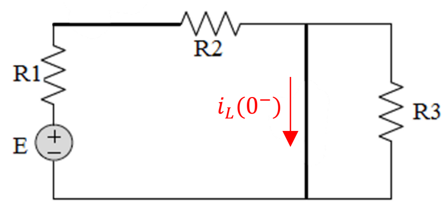


È evidente che $v_C(0^-) = v_C(0) = v_C(0^+) = E = 12\ V$.

9.9. La rete è a regime con l'interruttore chiuso per t<0. A t=0 l'interruttore si apre, determinare la corrente che scorre nell'induttore all'stante t=0+. Dati: E= 30V, R1= 5Ω, R2= 5Ω, R3= 8Ω, L= 2H.



Per $t < 0$ l'induttore è carico e si comporta da cortocircuito; dunque, il circuito risultante è il seguente:



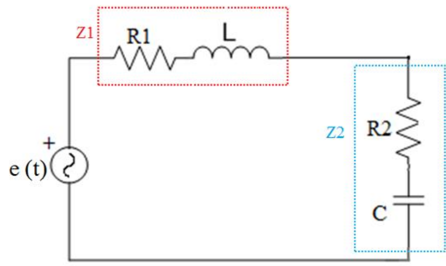
$$R_{12} = R_1 + R_2 = 5 + 5 = 10\ \Omega$$

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = \frac{E}{R_{12}} = \frac{30}{10} = 3\ A$$

CIRCUITI DINAMICI DEL SECONDO ORDINE

CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE

11.1. Determinare le impedenze Z1 e Z2 nel circuito di figura. Dati: e(t)= 5 cos wt [V], w= 2 [rad/sec], R1= 1Ω, R2= 2Ω, L=10mH, C= 5mF.



L'impedenza Z_1 è il risultato della serie tra le impedenze Z_{R_1} e Z_L:

$$Z_{R_1} = R_1 = 1\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega\mathrm{L} = \mathrm{j} \cdot 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02\mathrm{j}\ \Omega$$

$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_L = 1 + 0{,}02j\ \Omega$$

L'impedenza Z_2 è il risultato della serie tra le impedenze Z_{R_2} e Z_C:

$$Z_{R_2} = R_2 = 2\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{\mathrm{j}}{2 \cdot 0{,}005} = -\frac{\mathrm{j}}{0{,}01} = -100j\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_C = 2 - 100j\ \Omega$$

11.2. Per una rete in regime sinusoidale è stata calcolata una corrente circolante in un bipolo di valore pari a I= -1,2 - 2,1j [A]. Determinare modulo e fase di I.

Il modulo di un numero complesso (in questo caso la corrente) è pari a:

$$|\dot{I}| = \sqrt{Re[I]^2 + Im[I]^2} = \sqrt{(-1,2)^2 + (-2,1)^2} \cong 2,42$$

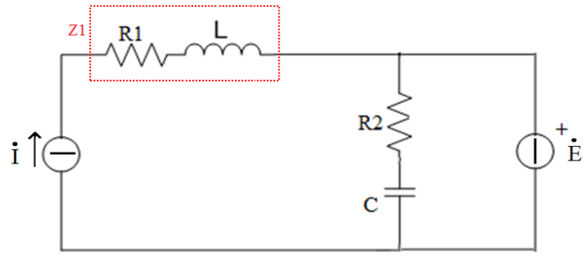
La fase di un numero complesso è pari a:

$$\angle\dot{I} = \theta_I = \tan^{-1}\left(\frac{Im[I]}{Re[I]}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-2,1}{-1,2}\right) \cong 60,26^{\circ}$$

Osserviamo che $Re[\dot{I}] < 0$ e $Im[\dot{I}] < 0$ e, di conseguenza, il valore dell'angolo di fase dovrebbe rientrare nel terzo quadrante di un grafico cartesiano. Tuttavia, $60,26^{\circ}$ rientra nel primo quadrante e, dunque, dovremo correggere il risultato in questo modo:

$$\theta_I = 60,26^{\circ} + 180^{\circ} = 240,26^{\circ}$$

11.3. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, il generatore I eroga una corrente I= 2 A (Valore efficace), mentre il generatore E eroga una tensione E= 10 V (Valore efficace). Calcolare la potenza attiva e reattiva impegnata dalla impedenza Z1. Dati: R1= 2 Ω, R2= 1 Ω, L= 1 H, C= 0,5 F, w= 1 [rad/sec].



L'impedenza Z_1 è il risultato della serie tra le impedenze Z_{R_1} e Z_L:

$Z_{R_1} = R_1 = 2\ \Omega$

$Z_L = j\omega\mathrm{L} = \mathrm{j} \cdot 1 \cdot 1 = \mathrm{j}\ \Omega$

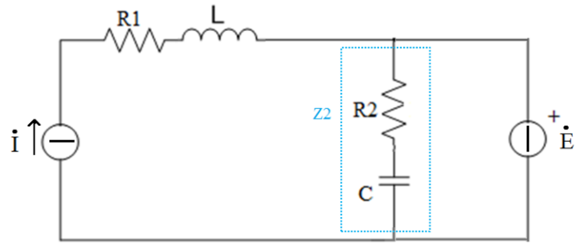
$Z_1 = Z_{R_1} + Z_L = 2 + j\ \Omega$

Conosciamo la corrente che scorre su Z_1, dunque:

$P_{Z_1} = Re[Z_1] \cdot |\dot{I}|^2 = 2 \cdot 2^2 = 8\ W$

$Q_{Z_1} = Im[Z_1] \cdot |\dot{I}|^2 = 1 \cdot 2^2 = 4\ VAR$

11.4. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, il generatore I eroga una corrente I= 2 A (Valore efficace), mentre il generatore E eroga una tensione E= 10 V (Valore efficace). Calcolare la potenza attiva e reattiva impegnata dalla impedenza Z2. Dati: R1= 2 Ω, R2= 1 Ω, L= 1 H, C= 0,5 F, w= 1 rad/sec.



L'impedenza Z_2 è il risultato della serie tra le impedenze Z_{R_2} e Z_C:

$$Z_{R_2} = R_2 = 1\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{\mathrm{j}}{1 \cdot 0{,}5} = -\frac{\mathrm{j}}{0{,}5} = -2j\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_C = 1 - 2j\ \Omega$$

Conosciamo la corrente tensione ai capi di Z_2, dunque:

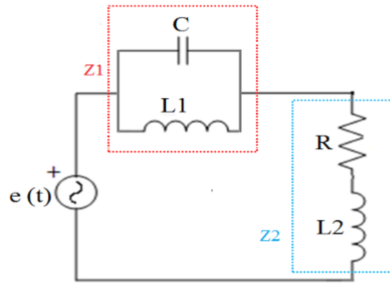
$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{1-2j} = \frac{1}{1-2j} \cdot \frac{1+2j}{1+2j} = \frac{1+2j}{1+4} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} j\ \ S$$

$$Y_2^* = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} j\ \ S$$

$$P_{Z_2} = Re[Y_2^*] \cdot \left|\dot{V}\right|^2 = \frac{1}{5} \cdot 10^2 = 20\ W$$

$$Q_{Z_2} = Im[Y_2^*] \cdot \left|\dot{V}\right|^2 = -\frac{2}{5} \cdot 10^2 = -40\ VAR$$

11.5 Determinare le impedenze Z1 e Z2 nel circuito di figura. Dati: e(t)= 10 cos wt [V], w= 3 [rad/sec], R= 5Ω, L1= 1mH, L2= 2mH, C= 3mF.



L'impedenza Z_1 è il risultato del parallelo tra le impedenze Z_C e Z_{L_1}:

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{3 \cdot 0{,}003} = -\frac{j}{0{,}009} \cong -111j\ \Omega$$

$$Z_{L_1} = j\omega \mathrm{L}_1 = \mathrm{j} \cdot 3 \cdot 0{,}001 = 0{,}003\mathrm{j}\ \Omega$$

$$Z_1 = \frac{Z_C \cdot Z_{L_1}}{Z_C + Z_{L_1}} = \frac{-111j \cdot 0{,}003j}{-111j + 0{,}003j} = \frac{0{,}333}{-111{,}003j} = \frac{0{,}333}{-111{,}003j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{0{,}333j}{111{,}003} \cong 0{,}003j\ \Omega$$

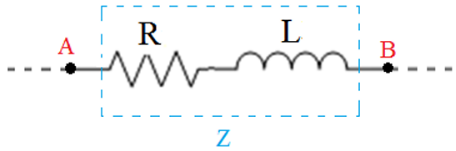
L'impedenza Z_2 è il risultato della serie tra le impedenze Z_R e Z_{L_2}:

$$Z_R = R = 5\ \Omega$$

$$Z_{L_2} = j\omega \mathrm{L}_2 = \mathrm{j} \cdot 3 \cdot 0{,}002 = 0{,}006\mathrm{j}\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_R + Z_{L_2} = 5 + 0{,}006j\ \Omega$$

11.6. Ai morsetti dell'impedenza Z sono stati calcolati i potenziali dei nodi VA= 2+5j [V] e VB= 1+3j [V] in termini di valore efficace. Determinare la potenza reattiva impegnata dall' impedenza Z. Dati: w= 2 [rad/sec], R= 7Ω, L= 5H.



L'impedenza Z è il risultato della serie tra le impedenze Z_R e Z_L:

$Z_R = R = 7\ \Omega$

$Z_L = j\omega L = j \cdot 2 \cdot 5 = 10j$

$Z = Z_R + Z_L = 7 + 10j$

Possiamo ricavare la tensione ai capi di Z come differenza di potenziale tra i nodi A e B:

$\dot{V} = V_A - V_B = 2 + 5j - 1 - 3j = 1 + 2j$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{7+10j} = \frac{1}{7+10j} \cdot \frac{7-10j}{7-10j} = \frac{7-10j}{49+100} = \frac{7}{149} - \frac{10}{149}j$$

$$Y^* = \frac{7}{149} + \frac{10}{149}j$$

Conoscendo la tensione ai capi di Z:

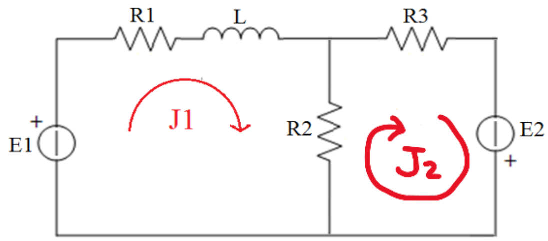
$$Q_Z = Im[Y^*] \cdot \left|\dot{V}\right|^2 = \frac{10}{149} \cdot \left(\sqrt{1+4}\right)^2 = \frac{50}{149} \cong 0{,}34\ VAR$$

11.7. Per una rete in regime sinusoidale è stata calcolata una differenza di potenziale pari a VAB= 1-3j [V] ai capi di un bipolo. Determinare modulo e fase di VAB.

$$\left|\dot{V_{AB}}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$$

$$\angle \dot{V_{AB}} = \theta_V = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{1}\right) \cong -71{,}57^{\circ}$$

11.8. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare la corrente fittizia di maglia J1. Dati E1= 2V (Valore efficace), E2= 5V (Valore efficace), R1= 3Ω, R2= 1Ω, R3= 2Ω, ZL= 4j Ω.



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = j_1 \cdot (Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2}) - j_2 \cdot (Z_{R_2}) \\ \dot{E}_2 = j_2 \cdot (Z_{R_2} + Z_{R_3}) - j_1 \cdot (Z_{R_2}) \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2} & -Z_{R_2} \\ -Z_{R_2} & Z_{R_2} + Z_{R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4+4j & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

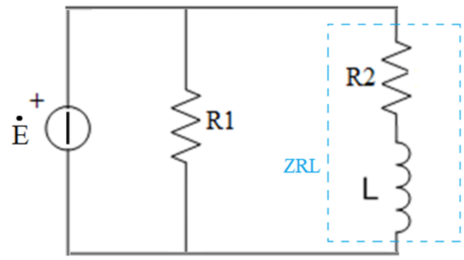
$$\det A = (4+4j) \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = 12 + 12j - 1 = 11 + 12j$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare j_1:

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{11+12j} = \frac{2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1)}{11+12j} = \frac{11}{11+12j} = \frac{11}{11+12j} \cdot \frac{11-12j}{11-12j} = \frac{121-132j}{121+144} =$$

$$= \frac{121}{265} - \frac{132}{265} j \cong 0{,}46 - 0{,}5j\ A$$

11.9. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, calcolare la potenza attiva e reattiva impegnata nell'impedenza ZRL. Dati E= 6V (Valore efficace), R1= 2Ω, R2= 1Ω, L= 2H, w= 1[rad/sec].



L'impedenza Z_{RL} è data dal risultato della serie tra Z_{R_2} e Z_L:

$$Z_{R_2} = R_2 = 1\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 1 \cdot 2 = 2j\ \Omega$$

$$Z_{RL} = Z_{R_2} + Z_L = 1 + 2j\ \Omega$$

Noi conosciamo la tensione ai capi di Z_{RL}, dunque:

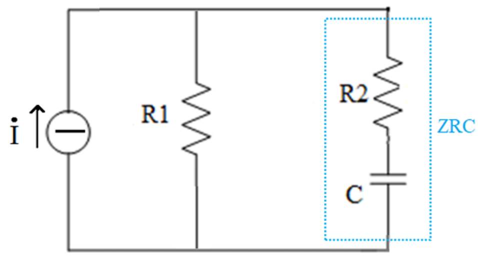
$$Y_{RL} = \frac{1}{Z_{RL}} = \frac{1}{1+2j} = \frac{1}{1+2j} \cdot \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{1-2j}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j\ \ S$$

$$Y_{RL}^* = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j\ \ S$$

$$P_{Z_{RL}} = Re[Y_{RL}^*] \cdot \left|\dot{E}\right|^2 = \frac{1}{5} \cdot 6^2 = \frac{36}{5} = 7{,}2\ W$$

$$Q_{Z_{RL}} = Im[Y_{RL}^*] \cdot \left|\dot{E}\right|^2 = \frac{2}{5} \cdot 6^2 = \frac{72}{5} = 14{,}4\ VAR$$

11.10. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, calcolare la potenza attiva e reattiva impegnata nell'impedenza ZRC. Dati I= 10A (Valore efficace), R1= 3Ω, R2= 6Ω, C= 2F, w= 2[rad/sec].



L'impedenza Z_{RC} è data dal risultato della serie tra Z_{R_2} e Z_C:

$$Z_{R_2} = R_2 = 6\,\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2 \cdot 2} = -\frac{j}{4}\,\Omega$$

$$Z_{RC} = Z_{R_2} + Z_C = 6 - \frac{1}{4}j\,\Omega$$

Possiamo ricavare la corrente che scorre su Z_{RC} tramite il partitore di corrente:

$$\dot{I}_{Z_{RC}} = \dot{I} \cdot \frac{Z_{R_1}}{Z_{R_1} + Z_{RC}} = 10 \cdot \frac{3}{3 + 6 - \frac{1}{4}j} = \frac{30}{9 - \frac{1}{4}j} = \frac{30}{\frac{36 - j}{4}} = \frac{120}{36 - j} = \frac{120}{36 - j} \cdot \frac{36 + j}{36 + j} =$$

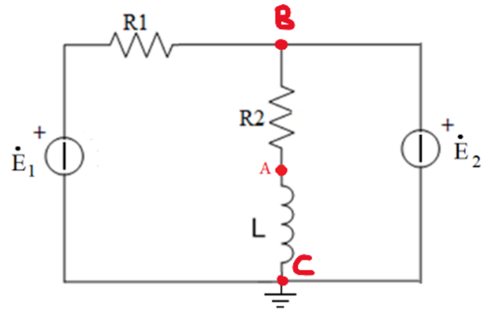
$$= \frac{4340 + 120j}{1296 + 1} \cong 3{,}33 + 0{,}09j\ A$$

Conoscendo la corrente che scorre su Z_{RC}:

$$P_{Z_{RC}} = Re[Z_{RC}] \cdot \left|\dot{I}_{Z_{RC}}\right|^2 = 6 \cdot \left(\sqrt{3{,}33^2 + 0{,}09^2}\right)^2 = 6 \cdot 11{,}1 = 66{,}6\ W$$

$$Q_{Z_{RC}} = Im[Z_{RC}] \cdot \left|\dot{I}_{Z_{RC}}\right|^2 = -\frac{1}{4} \cdot 11{,}1 \cong -2{,}8\ VAR$$

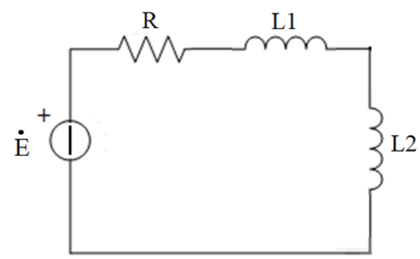
11.11. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare il potenziale del nodo A. Dati E1= 10V (Valore efficace), E2= 20V (Valore efficace), R1= 1Ω, R2= 2Ω, L= 2H, w= 3[rad/sec].



La tensione ai capi della serie tra le impedenze Z_{R_2} e Z_L è data dal generatore ideale di tensione posto sul ramo destro del circuito. Applichiamo dunque il partitore di tensione per ricavare il potenziale al nodo A:

$$V_A = \dot{E}_2 \cdot \frac{Z_L}{Z_{R_2} + Z_L} = 20 \cdot \frac{6j}{2+6j} = \frac{60j}{1+3j} = \frac{60j}{1+3j} \cdot \frac{1-3j}{1-3j} = \frac{60j+180}{1+9} = 18 + 6j\ V$$

11.12. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare il potenziale reattiva erogata dal generatore di tensione E. Dati E= 10V (Valore efficace), R1= 1Ω, L1= 2H, L2= 4H, w= 2[rad/sec].



Calcoliamo l'impedenza equivalente:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_{L_1} + Z_{L_2} = R + j\omega L_1 + j\omega L_2 = 1 + 4j + 8j = 1 + 12j\ \Omega$$

Utilizziamo la legge di Ohm simbolica per ricavare la corrente:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_{eq}} = \frac{10}{1+12j} = \frac{10}{1+12j} \cdot \frac{1-12j}{1-12j} = \frac{10-120j}{1+144} = \frac{2}{29} - \frac{24}{29} j\ A$$

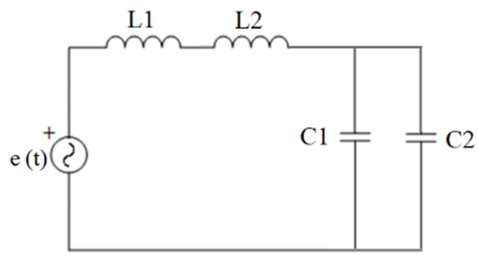
Calcoliamo lo sfasamento:

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = \tan^{-1}\left(\frac{0}{10}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{24}{29}}{\frac{2}{29}}\right) = 0 - \tan^{-1}(-12) \cong 85{,}24^{\circ}$$

Calcoliamo la potenza reattiva erogata dal generatore di tensione:

$$Q_E = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin\varphi = 10 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{29}\right)^2 + \left(-\frac{24}{29}\right)^2} \cdot \sin(85{,}24^{\circ}) = 10 \cdot 0{,}83 \cdot 1 = 8{,}3\ VAR$$

11.13. Per il circuito di figura, determinare l'impedenza equivalente vista ai capi del generatore di tensione e(t). Dati: e(t)= 10coswt [V], L1=2 mH, L2= 6 mH, C1= 3 mF, C2= 8 mF, w= 2[rad/sec].



Calcoliamo dapprima il parallelo tra Z_{C_1} e Z_{C_2}:

$$Z_{C_{12}} = \frac{Z_{C_1} \cdot Z_{C_2}}{Z_{C_1} + Z_{C_2}} = \frac{-\frac{j}{\omega C_1} \cdot \left(-\frac{j}{\omega C_2}\right)}{-\frac{j}{\omega C_1} - \frac{j}{\omega C_2}} = \frac{-\frac{j}{0{,}006} \cdot \left(-\frac{j}{0{,}016}\right)}{-\frac{j}{0{,}006} - \frac{j}{0{,}016}} = \frac{-\frac{1}{0{,}000096}}{-166{,}6j - 62{,}5j} =$$

$$= \frac{10416{,}7}{229{,}1j} = \frac{10416{,}7}{229{,}1j} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{10416{,}7j}{229{,}1} \cong -45{,}5j\ \Omega$$

Calcoliamo infine la serie tra Z_{L_1}, Z_{L_2} e $Z_{C_{12}}$:

$$Z_{eq} = Z_{L_1} + Z_{L_2} + Z_{C_{12}} = j\omega L_1 + j\omega L_2 - 45{,}5j = 0{,}004j + 0{,}012j - 45{,}5j \cong -45{,}5j\ \Omega$$

11.14. Per una rete in regime sinusoidale è stata calcolata una corrente circolante in un bipolo di valore pari a I= -2.5 - 4j [A]. Determinare modulo e fase di I

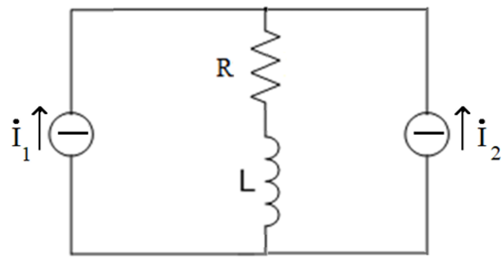
$$|\dot{I}| = \sqrt{(-2,5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{6,25 + 16} = \sqrt{22,25} \cong 4,7$$

$$\angle\dot{I} = \theta_I = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-2,5}\right) \cong 58^{\circ}$$

Osserviamo che $Re[\dot{I}] < 0$ e $Im[\dot{I}] < 0$ e, di conseguenza, il valore dell'angolo di fase dovrebbe rientrare nel terzo quadrante di un grafico cartesiano. Tuttavia, 58° rientra nel primo quadrante e, dunque, dovremo correggere il risultato in questo modo:

$$\theta_I = 58^{\circ} + 180^{\circ} = 238^{\circ}$$

11.15. Per la rete in regime sinusoidale di figura, determinare la potenza attiva e reattiva impegnata. Dati: I1= 3A (valore efficace), I2= 5A (valore efficace), R= 2Ω, L= 3H, w= 3 rad/sec.



Calcoliamo l'impedenza equivalente:

$Z_{eq} = Z_R + Z_L = R + j\omega L = 2 + 9j\ \Omega$

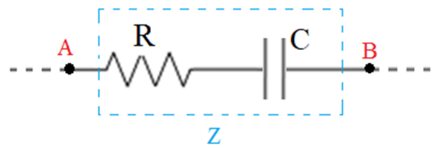
La corrente che scorre su Z_{eq} è pari alla somma di $\dot{I}_1$ e $\dot{I}_2$, dunque:

$\dot{I}_{tot} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 8\ A$

$P = Re[Z_{eq}] \cdot |\dot{I}_{tot}|^2 = 2 \cdot 8^2 = 128\ W$

$Q = Im[Z_{eq}] \cdot |\dot{I}_{tot}|^2 = 9 \cdot 8^2 = 576\ VAR$

11.16. Ai morsetti dell'impedenza Z sono stati calcolati i potenziale dei nodi VA= 3+7j [V] e VB= 2+j [V] in termini di valore efficace. Determinare la potenza reattiva impegnata dall' impedenza Z.
Dati: w= 3 [rad/sec], R= 2Ω, C= 3F.



L'impedenza Z è il risultato della serie tra le impedenze Z_R e Z_C:

$$Z_R = R = 2\,\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{9}$$

$$Z = Z_R + Z_C = 2 - \frac{1}{9}j$$

Possiamo ricavare la tensione ai capi di Z come differenza di potenziale tra i nodi A e B:

$$\dot{V} = V_A - V_B = 3 + 7j - 2 - j = 1 + 6j$$

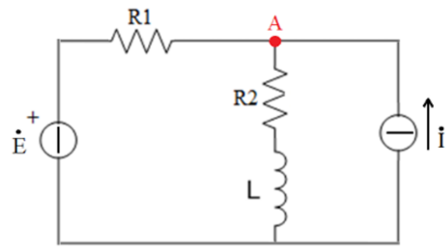
$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{2 - \frac{1}{9}j} = \frac{1}{\frac{18-j}{9}} = \frac{9}{18-j} = \frac{9}{18-j} \cdot \frac{18+j}{18+j} = \frac{162+9j}{324+1} = 0{,}5 + 0{,}028j$$

$$Y^* = 0{,}5 - 0{,}028j$$

Conoscendo la tensione ai capi di Z:

$$Q_Z = Im[Y^*] \cdot \left|\dot{V}\right|^2 = -0{,}028 \cdot \left(\sqrt{1+36}\right)^2 \cong -1\,VAR$$

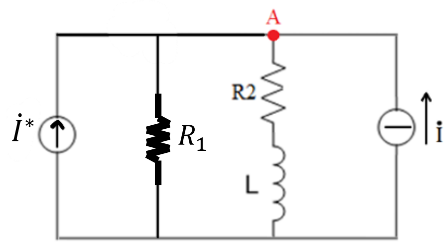
11.17. Per la rete di figura in regime sinusoidale, determinare il potenziale del nodo A. Dati: E= 20V (valore efficace), I= 10A (valore efficace), R1= 3Ω, R2= 2Ω, L= 1H, w= 2[rad/sec].



Calcoliamo la serie tra Z_{R_2} e Z_L:

$$Z_{R_2L} = Z_{R_2} + Z_L = R_2 + j\omega L = 2 + 2j$$

Trasformiamo il generatore di tensione $\dot{E}$ in generatore di corrente $\dot{I}^*$:



$$\dot{I}^* = \frac{\dot{E}}{Z_{R_1}} = \frac{20}{3}\ A$$

Calcoliamo il parallelo tra Z_{R_1} e Z_{R_2L}:

$$Z_{eq} = \frac{Z_{R_1} \cdot Z_{R_2L}}{Z_{R_1} + Z_{R_2L}} = \frac{3 \cdot (2+2j)}{3+2+2j} = \frac{6+6j}{5+2j} = \frac{6+6j}{5+2j} \cdot \frac{5-2j}{5-2j} = \frac{30 - 12j + 30j + 12}{25+4} =$$

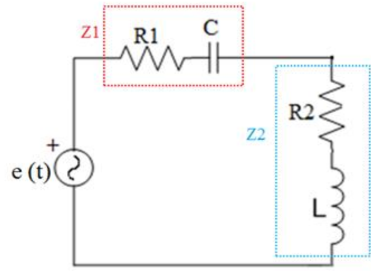
$$= \frac{42}{29} + \frac{18}{29} j\ \Omega$$

La corrente che scorre al nodo A è la risultante della somma tra $\dot{I}$ e $\dot{I}^*$, dunque:

$$V_A = Z_{eq} \cdot (\dot{I} + \dot{I}^*) = \left(\frac{42}{29} + \frac{18}{29} j\right) \cdot \left(10 + \frac{20}{3}\right) = \left(\frac{42}{29} + \frac{18}{29} j\right) \cdot \frac{50}{3} = \frac{700}{29} + \frac{300}{29} j \cong$$

$$\cong 24{,}14 + 10{,}34j\ V$$

11.18. Determinare le impedenze Z1 e Z2 nel circuito di figura, sapendo che: e(t)= 10 cos wt [V], w= 10 [rad/sec], R1= 2Ω , R2= 3Ω , L=5H, C= 2mF.



L'impedenza Z_1 è data dalla serie tra Z_{R_1} e Z_C:

$$Z_{R_1} = R_1 = 2\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{10 \cdot 0{,}002} = -\frac{j}{0{,}02} = -50j\ \Omega$$

$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_C = 2 - 50j\ \Omega$$

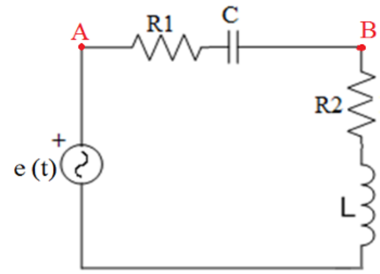
L'impedenza Z_2 è data dalla serie tra Z_{R_2} e Z_L:

$$Z_{R_2} = R_2 = 3\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = 50j\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_L = 3 + 50j\ \Omega$$

11.19. Nel circuito di figura sono stati calcolati i valori dei potenziali ai nodi A e B. Essi risultano VA = 8 [V] e VB = 6 + 3j [V]. Calcolare modulo e fase della differenza di potenziale VAB.



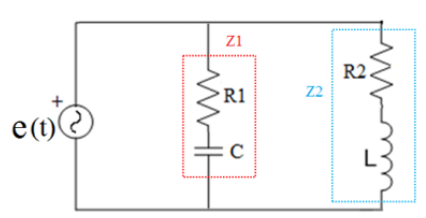
La differenza di potenziale V_{AB} vale:

$V_{AB} = V_A - V_B = 8 - 6 - 3j = 2 - 3j\ V$

$|V_{AB}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3{,}6\ V$

$\angle V_{AB} = \theta_V = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) \cong -56{,}3^\circ$

11.20. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare la potenza reattiva impegnata dalla impedenza Z2. Dati: e(t)= √2 10 cos t [V], R1= 10Ω , R2= 20Ω , L= 2H, C= 3mF, w = 1 [rad/sec].



Riscriviamo innanzitutto la tensione in termini di valore efficace:

$$V_{eff} = \frac{V_x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10}{\sqrt{2}} = 10\ V$$

Scriviamo Z_2 come risultato della serie tra le impedenze Z_{R_2} e Z_L:

$$Z_{R_2} = R_2 = 20\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = 2j\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_L = 20 + 2j\ \Omega$$

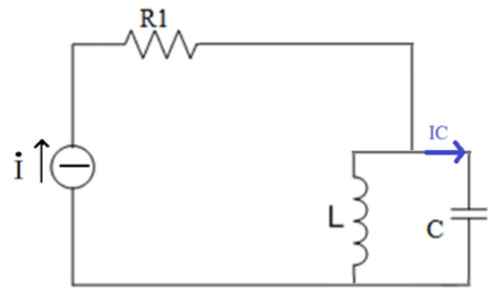
Conoscendo la tensione ai capi di Z_2:

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{20+2j} = \frac{1}{20+2j} \cdot \frac{20-2j}{20-2j} = \frac{20-2j}{400+4} = \frac{5}{101} - \frac{1}{202} j\ \ S$$

$$Y_2^* = \frac{5}{101} + \frac{1}{202} j\ \ S$$

$$Q_{Z_2} = Im[Y_2^*] \cdot |V_{eff}|^2 = \frac{1}{202} \cdot 100 \cong 0{,}5\ VAR$$

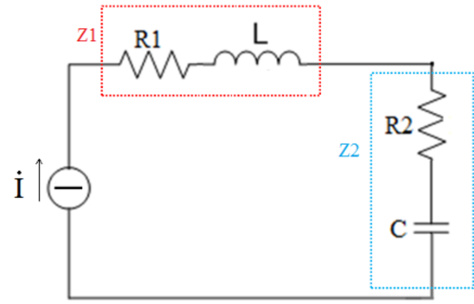
11.21.Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare il modulo della corrente che scorre nel condensatore, IC. Dati: I= 15A (valore efficace), ZR= 3Ω, ZL= j5 [Ω], ZC= -j2 [Ω].



Applichiamo il partitore di corrente per trovare I_C:

$$I_C = \dot{I} \cdot \frac{Z_L}{Z_L + Z_C} = 15 \cdot \frac{5j}{5j - 2j} = 15 \cdot \frac{5j}{3j} = \frac{75j}{3j} = 25\ A$$

11.22. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare la potenza reattiva dissipata nelle impedenze Z1 e Z2. Dati: I= 5A (valore efficace), R1= 3Ω, R2= 5Ω L= 1H, C= 1F, w= 2 rad/sec.



L'impedenza Z_1 è data dalla serie tra Z_{R_1} e Z_L:

$$Z_{R_1} = R_1 = 3\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = 2j\ \Omega$$

$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_L = 3 + 2j\ \Omega$$

L'impedenza Z_2 è data dalla serie tra Z_{R_2} e Z_C:

$$Z_{R_2} = R_2 = 5\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2} = -0{,}5j\ \Omega$$

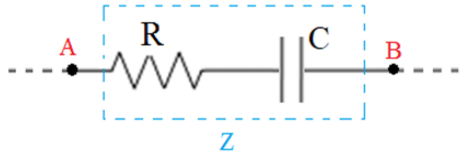
$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_C = 5 - 0{,}5j\ \Omega$$

Conoscendo la corrente che scorre in Z_1 e Z_2:

$$Q_{Z_1} = Im[Z_1] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = 2 \cdot 5^2 = 50\ VAR$$

$$Q_{Z_2} = Im[Z_2] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = -0{,}5 \cdot 5^2 = -12{,}5\ VAR$$

11.23. Ai morsetti dell'impedenza Z sono stati calcolati i potenziale dei nodi VA= 10+3j [V] e VB= 1+j [V] in termini di valore efficace. Determinare la potenza reattiva impegnata dall' impedenza Z. Dati: w= 2 [rad/sec], R= 1Ω, C= 2F.



La differenza di potenziale V_{AB} vale:

$$V_{AB} = V_A - V_B = 10 + 3j - 1 - j = 9 + 2j\ V$$

L'impedenza Z è data dalla serie tra Z_R e Z_C:

$$Z_R = R = 1\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{4}\ \Omega$$

$$Z = Z_R + Z_C = 1 - \frac{1}{4}j\ \Omega$$

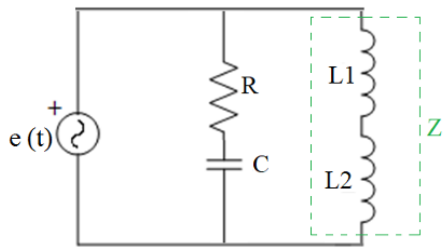
Conoscendo la tensione ai capi di Z:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}j} = \frac{1}{\frac{4-j}{4}} = \frac{4}{4-j} = \frac{4}{4-j} \cdot \frac{4+j}{4+j} = \frac{16+4j}{16+1} = \frac{16}{17} + \frac{4}{17}j\ S$$

$$Y^* = \frac{16}{17} - \frac{4}{17}j$$

$$Q_Z = Im[Y^*] \cdot |V_{AB}|^2 = -\frac{4}{17} \cdot \sqrt{85}^2 = -20\ VAR$$

11.24. Per il circuito in regime sinusoidale di figura, determinare la potenza reattiva impegnata dall' impedenza Z. Dati: e(t)= √2 10 cos t [V], R1= 3Ω, L1=L2= 3H, C= 5mF, w = 1 [rad/sec].



Riscriviamo innanzitutto la tensione in termini di valore efficace:

$$V_{eff} = \frac{V_x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10}{\sqrt{2}} = 10\ V$$

Scriviamo Z come risultato della serie tra le impedenze Z_{L_1} e Z_{L_2}:

$$Z_{L_1} = j\omega L_1 = 3j\ \Omega$$

$$Z_{L_2} = j\omega L_2 = 3j\ \Omega$$

$$Z = Z_{L_1} + Z_{L_2} = 6j\ \Omega$$

Conoscendo la tensione ai capi di Z_2:

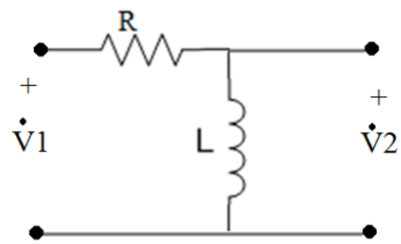
$$Y = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{6j} = \frac{1}{6j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-6} = -\frac{1}{6}j\ \ S$$

$$Y^* = \frac{1}{6}j\ \ S$$

$$Q_Z = Im[Y^*] \cdot \left|V_{eff}\right|^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cong 17\ VAR$$

RISPOSTA IN FREQUENZA

12.1. Per il circuito di figura, determinare l'espressione della funzione di trasferimento H(jw).



Si definisce funzione di rete il rapporto tra il fasore della grandezza di uscita e il fasore della grandezza di ingresso:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_L:

$$\dot{V}_2 = Z_L \cdot \dot{I}_L = Z_L \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_R + Z_L}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

12.2. Per la seguente funzione di trasferimento H(jw)= R/(R+jwL), ricavare la w di taglio, wt. Dati: R = 5Ω, L = 2H.

Data la funzione di trasferimento:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{5}{5 + 2\omega j}$$

Per ricavare la frequenza di taglio ω_T dobbiamo dapprima calcolare il modulo di $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{5^2 + 0^2}}{\sqrt{5^2 + (2\omega)^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 + 4\omega^2}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \frac{5}{\infty} = 0$$

Imponiamo la seguente relazione:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{25 + 4\omega_T^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{25 + 4\omega_T^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{25 + 4\omega_T^2}\right)^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$$

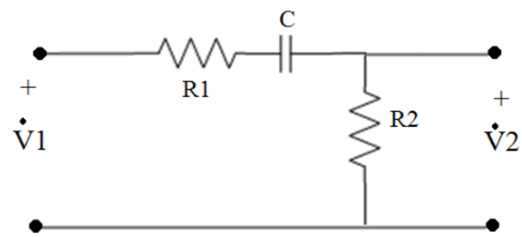
$$25 + 4\omega_T^2 = 50$$

$$4\omega_T^2 = 25$$

$$\omega_T^2 = \frac{25}{4}$$

$$\omega_T = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ rad/s$$

12.3. Per il circuito di figura, determinare l'espressione della funzione di trasferimento H(jw).



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

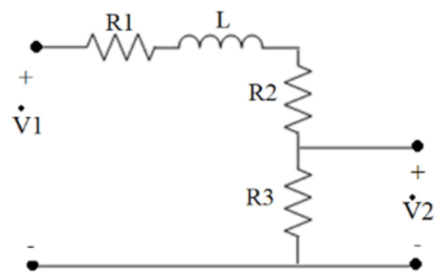
La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_2}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_2} \cdot \dot{I}_{R_2} = Z_{R_2} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_{R_1} + Z_C + Z_{R_2}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_2}}{Z_{R_1} + Z_C + Z_{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 - \frac{j}{\omega C} + R_2}$$

12.4. Per il circuito di figura, determinare l'espressione della funzione di trasferimento H(jw).



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

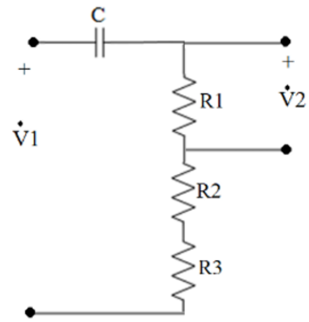
La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_3}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_3} \cdot \dot{I}_{R_3} = Z_{R_3} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2} + Z_{R_3}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_3}}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2} + Z_{R_3}} = \frac{R_3}{R_1 + j\omega L + R_2 + R_3}$$

12.5. Per il circuito di figura, determinare il valore massimo del modulo della funzione di trasferimento H(jw). Dati: R1= 14Ω, R2= 8Ω, R3= 6Ω, C= 2mF.



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_1}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_1} \cdot \dot{I}_{R_1} = Z_{R_1} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_C + Z_{R_1} + Z_{R_2} + Z_{R_3}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_1}}{Z_C + Z_{R_1} + Z_{R_2} + Z_{R_3}} = \frac{R_1}{-\frac{j}{\omega C} + R_1 + R_2 + R_3} = \frac{14}{28 - \frac{j}{0{,}002\omega}}$$

Calcoliamo il modulo della funzione di rete:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{14^2 + 0^2}}{\sqrt{28^2 + \left(-\frac{1}{0{,}002\omega}\right)^2}} = \frac{14}{\sqrt{28^2 + \left(\frac{1}{0{,}002\omega}\right)^2}}$$

Calcoliamone i limiti:

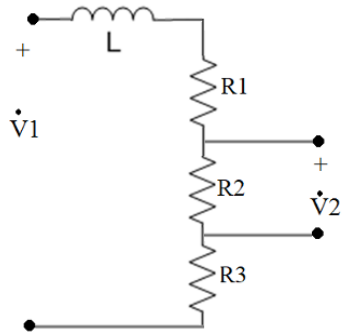
$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \frac{14}{\infty} = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

Il valore massimo del modulo della funzione di rete è:

$$|H(j\omega)|x = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

12.6. Per il circuito di figura, determinare il valore che assume la fase della funzione di trasferimento H(jw), nel caso in cui w tende a infinito. Dati: R1= 10Ω, R2= 2Ω, R3= 3Ω, L= 1H.



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_2}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_2} \cdot \dot{I}_{R_2} = Z_{R_2} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_L + Z_{R_1} + Z_{R_2} + Z_{R_3}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_2}}{Z_L + Z_{R_1} + Z_{R_2} + Z_{R_3}} = \frac{R_2}{j\omega L + R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2}{15 + j\omega}$$

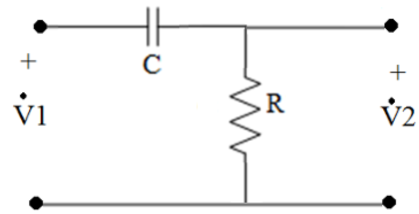
Calcoliamo la fase della funzione di rete:

$$\angle H(j\omega) = \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)}_{num} - \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{15}\right)}_{denom} = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{15}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{15}\right)$$

Se $\omega \to \infty$:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{15}\right) = -\tan^{-1}(+\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90^{\circ}$$

12.7. Per il circuito di figura, determinare l'espressione della funzione di trasferimento H(jw).



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_R:

$$\dot{V}_2 = Z_R \cdot \dot{I}_R = Z_R \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_C + Z_R}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{-\frac{j}{\omega C} + R}$$

12.8. Per la seguente funzione di trasferimento H(jw)= JwCR/(1+jwCR), ricavare la w di taglio, wt.
Dati: R = 2Ω, C= 2mF.

Per ricavare la frequenza di taglio ω_T dobbiamo dapprima calcolare il modulo di $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{0^2 + (\omega CR)^2}}{\sqrt{1^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} = \frac{0{,}004\omega}{\sqrt{1 + 0{,}000016\omega^2}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{0{,}004\omega}{\sqrt{1 + 0{,}000016\omega^2}} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{0{,}004\omega}{\omega\sqrt{\frac{1}{\omega^2} + 0{,}000016}} =$$

$$= \lim_{\omega \to \infty} \frac{0{,}004}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} + 0{,}000016}} = \frac{0{,}004}{0{,}004} = 1$$

Imponiamo la seguente relazione:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{0{,}004\omega_T}{\sqrt{1 + 0{,}000016\omega_T^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{0{,}004\omega_T}{\sqrt{1 + 0{,}000016\omega_T^2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{0{,}000016\omega_T^2}{1 + 0{,}000016\omega_T^2} = \frac{1}{2}$$

$$0{,}000016\omega_T^2 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0{,}000016\omega_T^2)$$

$$0{,}000016\omega_T^2 = \frac{1}{2} + 0{,}000008\omega_T^2$$

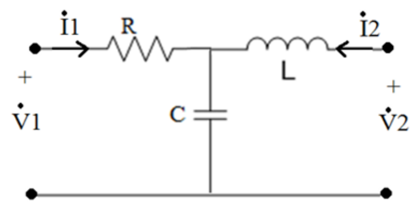
$$0{,}000008\omega_T^2 = \frac{1}{2}$$

$$\omega_T^2 = \frac{1}{0{,}000016}$$

$$\omega_T = \frac{1}{\sqrt{0{,}000016}} = \frac{1}{0{,}004} = 250\ rad/s$$

DOPPI BIPOLI

13.1. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di ammettenza Z11. Dati: R = 5 Ω, L = 100 mH, C = 2 mF, w = 20 rad/sec.

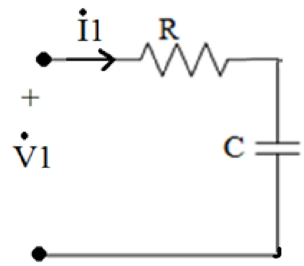


Si applica la LKT ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

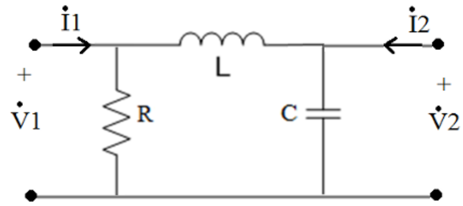
Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_C)$

Dunque, risulta:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_C)}{\dot{I}_1} = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C} = 5 - \frac{j}{20 \cdot 0{,}002} = 5 - 25j\ \Omega$$

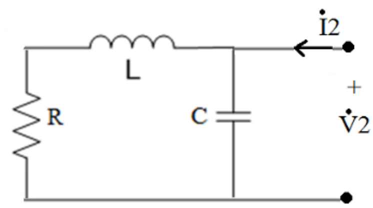
13.2. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z22. Dati: R = 5Ω, L = 300mH, C = 2mF, w = 10 [rad/sec].



$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{22}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_2 Z_{22}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_2$:

$$\dot{V}_2 = \dot{I}_2 \cdot [(Z_R + Z_L)//Z_C] = \dot{I}_2 \cdot Z_{eq}$$

$$Z_R = R = 5\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = 10 \cdot 0{,}3 \cdot j = 3j\ \Omega$$

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = 5 + 3j\ \Omega$$

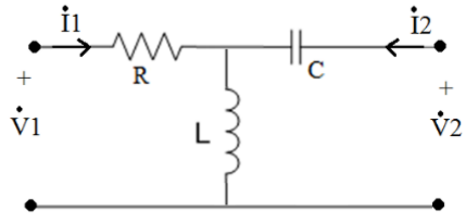
$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{10 \cdot 0{,}002} = -50j\ \Omega$$

$$Z_{eq} = \frac{Z_{RL} \cdot Z_C}{Z_{RL} + Z_C} = \frac{(5+3j)\cdot(-50j)}{5+3j-50j} = \frac{-250j+150}{5-47j} \cdot \frac{5+47j}{5+47j} =$$

$$= \frac{750 + 7050j - 1250j + 11750}{25 + 2209} = \frac{12500 + 5800j}{2234} \cong 5{,}6 + 2{,}6j\ \Omega$$

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_2 \cdot Z_{eq}}{\dot{I}_2} = Z_{eq} = 5{,}6 + 2{,}6j\ \Omega$$

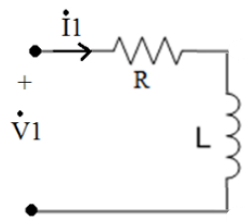
13.3. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z21. Dati: R= 2Ω, L= 4H, C= 2F, w= 3[rad/sec].



$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{21}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}$$

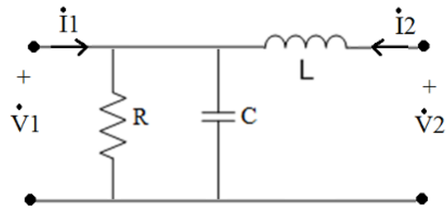
Osserviamo che $\dot{V}_2 = \dot{V}_{Z_L}$

$Z_L = j\omega L = 3 \cdot 4 \cdot j = 12j\ \Omega$

$\dot{V}_{Z_L} = \dot{I}_1 \cdot Z_L$

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot Z_L}{\dot{I}_1} = Z_L = 12j\ \Omega$$

13.4. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di ammettenza Y11. Dati: R= 0.1Ω, C= 2F, L= 0.3H, w= 2[rad/sec].



Si applica la LKC ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$$\dot{I}_1 = \dot{V}_1 Y_{11} + \dot{V}_2 Y_{12}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22}$$

Si vuole calcolare il parametro di ammettenza Y_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{V}_1 Y_{11}$. Ne consegue che:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}$$

Troviamo $\dot{I}_1$ in funzione di $\dot{V}_1$:

$$\dot{I}_1 = \dot{V}_1 \cdot (Y_R // Y_C // Y_L)$$

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{0{,}1} = 10\ S$$

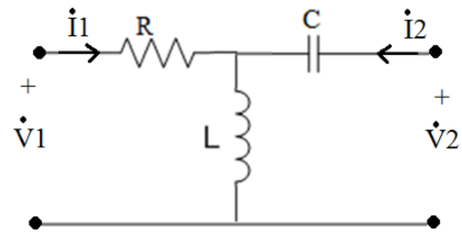
$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-\frac{j}{\omega C}} = -\frac{4}{j} = -\frac{4}{j} \cdot \frac{j}{j} = 4j\ S$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{0{,}6j} = \frac{1}{0{,}6j} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{0{,}6} = -\frac{5}{3}j\ S$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{V}_1 \cdot (Y_R // Y_C // Y_L) = \dot{V}_1 \cdot (10 + 4j - \frac{5}{3}j) = \dot{V}_1 \cdot \left(10 + \frac{7}{3}j\right)$$

$$\Rightarrow Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{V}_1 \cdot \left(10 + \frac{7}{3}j\right)}{\dot{V}_1} = 10 + \frac{7}{3}j\ S$$

13.5. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z11. Dati: R= 5Ω, C= 1F, L= 2H, w= 4[rad/sec].

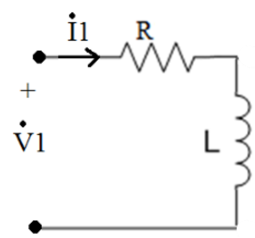


Si applica la LKT ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

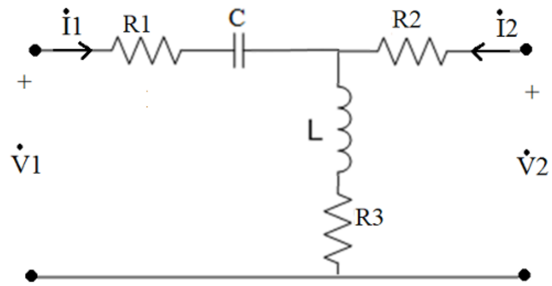
Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_L)$

Dunque, risulta:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_L)}{\dot{I}_1} = Z_R + Z_L = R + j\omega L = 5 + 8j\ \Omega$$

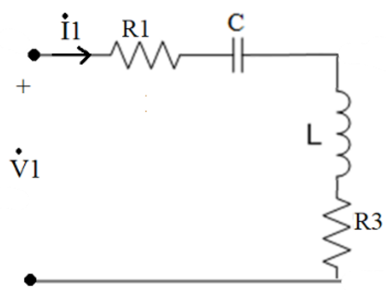
13.6. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z21. Dati: R1= 2Ω, R2= 3Ω, R3= 4Ω, C= 5F, L= 7H, w= 1[rad/sec].



$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{21}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}$$

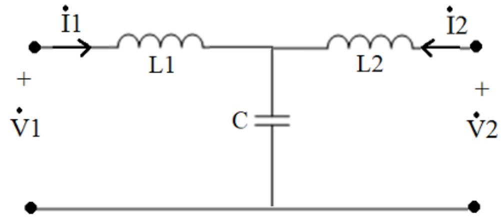
Osserviamo che $\dot{V}_2 = \dot{V}_{Z_{LR_3}}$

$$Z_{LR_3} = Z_L + Z_{R_3} = j\omega L + R_3 = 4 + 7j\ \Omega$$

$$\dot{V}_{Z_{LR_3}} = \dot{I}_1 \cdot Z_{LR_3}$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot Z_{LR_3}}{\dot{I}_1} = Z_{LR_3} = 4 + 7j\ \Omega$$

13.7. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z11. Dati: L1= 1H, L2= 2H C= 3mF, w= 20 [rad/sec].

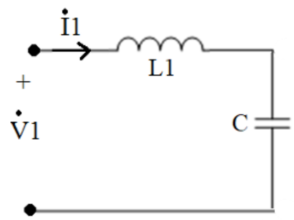


Si applica la LKT ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

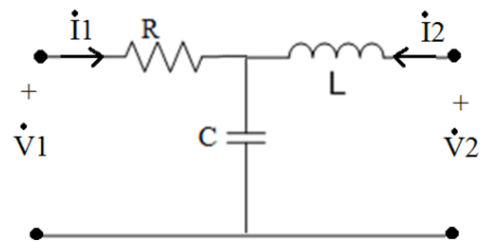
Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_{L_1} + Z_C)$

Dunque, risulta:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot (Z_{L_1} + Z_C)}{\dot{I}_1} = Z_{L_1} + Z_C = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C} = 20j - \frac{50}{3}j \cong 3{,}33j\ \Omega$$

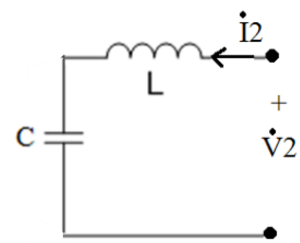
13.8. Per il doppio bipolo di figura, calcolare il parametro di impedenza Z12. Dati: R= 5 Ω, L= 100 mH, C= 3mF, w= 20 [rad/sec].



$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{12}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_2 Z_{12}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}$$

Osserviamo che $\dot{V}_1 = \dot{V}_C$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{50}{3} j\ \Omega$$

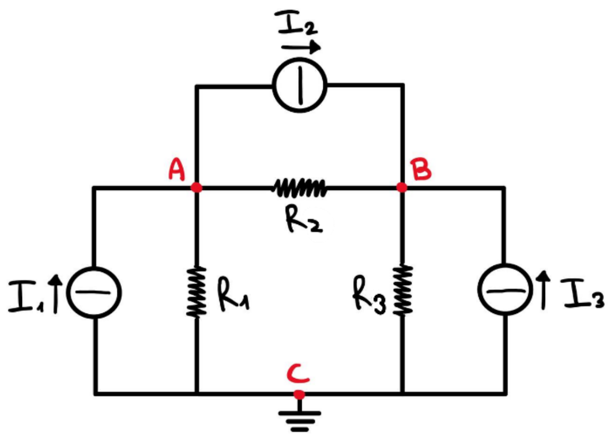
$$\dot{V}_C = \dot{I}_2 \cdot Z_C$$

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_2 \cdot Z_C}{\dot{I}_2} = Z_C = -\frac{50}{3} j\ \Omega \cong -16{,}7\text{j}\ \Omega$$

ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE

1. Metodo dei potenziali nodali e bilancio delle potenze

Si ricavino i potenziali V_A e V_B con l'ausilio del metodo dei potenziali nodali e si effettui il bilancio delle potenze.



$I_1 = 57\ A$

$I_2 = 15\ A$

$I_3 = 39\ A$

$R_1 = 0{,}25\ \Omega$

$R_2 = 0{,}166\ \Omega$

$R_3 = 0{,}125\ \Omega$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali per conoscere i potenziali incogniti:

$$A)\ I_1 - I_2 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right)$$

$$B)\ I_2 + I_3 = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_3}\right)$$

$$C)\ V_C = 0$$

Sostituiamo i valori noti:

$$\begin{cases} 57 - 15 = V_A \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}25} + \dfrac{1}{0{,}166}\right) - V_B \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}166}\right) - 0 \\ 15 + 39 = V_B \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}166} + \dfrac{1}{0{,}125}\right) - V_A \cdot \left(\dfrac{1}{0{,}166}\right) - 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42 = 10V_A - 6V_B \\ 54 = 14V_B - 6V_A \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 42 \\ 54 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix}$$

$$\det A = 10 \cdot 14 - 6 \cdot 6 = 140 - 36 = 104$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare i potenziali interessati:

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} 42 & -6 \\ 54 & 14 \end{vmatrix}}{104} = \frac{42 \cdot 14 + 54 \cdot 6}{104} = \frac{912}{104} \cong 8{,}77\ V$$

$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 42 \\ -6 & 54 \end{vmatrix}}{104} = \frac{10 \cdot 54 + 6 \cdot 42}{104} = \frac{792}{104} \cong 7{,}62\ V$$

Da cui possiamo ricavare la tensione ai capi di ciascuna resistenza:

$V_{R_1} = V_A - V_C = 8{,}77 - 0 = 8{,}77\ V$

$V_{R_2} = V_A - V_B = 8{,}77 - 7{,}62 = 1{,}15\ V$

$V_{R_3} = V_B - V_C = 7{,}62 - 0 = 7{,}62\ V$

Possiamo quindi procedere a calcolare la potenza dissipata dalle resistenze:

$$P_{R_1} = \frac{V_{R_1}^2}{R_1} = \frac{8{,}77^2}{0{,}25} \cong 307{,}7\ W$$

$$P_{R_2} = \frac{V_{R_2}^2}{R_2} = \frac{1{,}15^2}{0{,}166} \cong 8\ W$$

$$P_{R_3} = \frac{V_{R_3}^2}{R_3} = \frac{7{,}62^2}{0{,}125} \cong 464{,}5\ W$$

Calcoliamo adesso le potenze generate dai tre generatori di corrente:

$P_{I_1} = V_{I_1} \cdot I_{I_1} = V_{R_1} \cdot I_1 = 8{,}77 \cdot 57 \cong 499{,}9\ W$

$P_{I_2} = V_{I_2} \cdot I_{I_2} = -V_{R_2} \cdot I_2 = -1{,}15 \cdot 15 \cong -17{,}3\ W$

Si osservi che P_{I_2} è una potenza generata negativa, ovvero una potenza assorbita positiva.

$P_{I_3} = V_{I_3} \cdot I_{I_3} = V_{R_3} \cdot I_3 = 7{,}62 \cdot 39 \cong 297{,}2\ W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = P_{I_1} + P_{I_2} + P_{I_3}$

$307{,}7 + 8 + 464{,}5 = 499{,}9 + (-17{,}3) + 297{,}2$

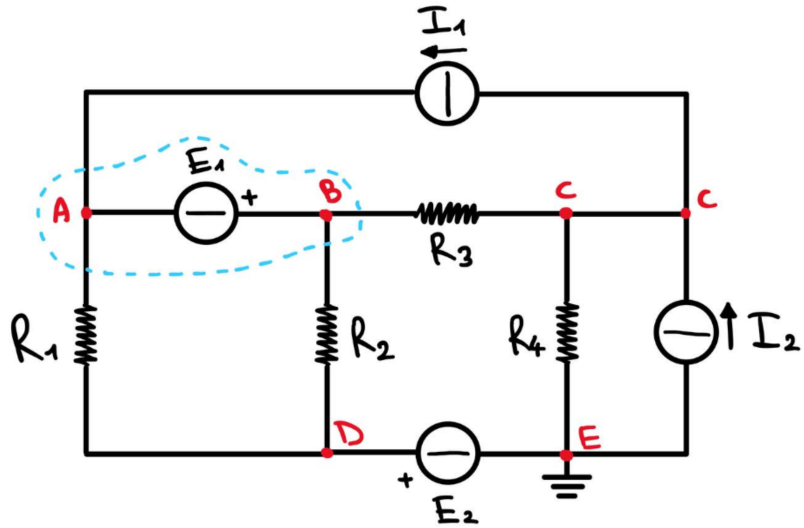
$780{,}2\ W \cong 779{,}8\ W$

Il bilancio delle potenze è verificato.

2. Metodo dei potenziali nodali con supernodo e bilancio delle potenze

Si ricavino i potenziali di tutti i nodi con l'ausilio del metodo dei potenziali nodali e si effettui il bilancio delle potenze.

$I_1 = 34\ A$	$R_1 = 1\ \Omega$
$I_2 = 35\ A$	$R_2 = 2\ \Omega$
$E_1 = 4\ V$	$R_3 = 4\ \Omega$
$E_2 = 8\ V$	$R_4 = 8\ \Omega$



Si osservi che il nodo E è collegato a massa, dunque:

$E)\ V_E = 0\ V$

Inoltre, $E_2 = 8\ V = V_D - V_E = V_D - 0$, dunque:

$D)\ V_D = 8\ V$

Consideriamo il supernodo A-B, ricordando che esso è un nodo che contiene al suo interno i nodi a cui è connesso il generatore di tensione. Scriviamo l'equazione al supernodo e l'equazione di vincolo al supernodo:

$$A - B)\ I_1 = \left[V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) + V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\right] - V_C \cdot \frac{1}{R_3} - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$A - B)\ E_1 = V_B - V_A$$

Scriviamo adesso l'equazione al nodo C:

$$C)\ I_2 - I_1 = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_3}\right) - V_E \cdot \left(\frac{1}{R_4}\right)$$

Riscriviamo le equazioni eliminando i termini nulli e facendo le dovute sostituzioni:

$$V_E = 0\ V$$

$$V_D = 8\ V$$

$$V_B = E_1 + V_A$$

$$I_1 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) + (E_1 + V_A) \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_C \cdot \frac{1}{R_3} - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$I_2 - I_1 = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) - (E_1 + V_A) \cdot \left(\frac{1}{R_3}\right)$$

Portiamo i termini noti a primo membro e sostituiamo i valori:

$$\begin{cases} I_1 - E_1 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_C \cdot \frac{1}{R_3} \\ I_2 - I_1 + E_1 \cdot \frac{1}{R_3} = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) - V_A \cdot \frac{1}{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) = V_A \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - V_C \cdot \frac{1}{4} \\ 35 - 34 + 4 \cdot \frac{1}{4} = V_C \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) - V_A \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 43 = 1{,}75V_A - 0{,}25V_C \\ 2 = 0{,}375V_C - 0{,}25V_A \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 43 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}375 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1{,}75 \cdot 0{,}375 - 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cong 0{,}6$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare i potenziali interessati:

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} 43 & -0{,}25 \\ 2 & 0{,}375 \end{vmatrix}}{0{,}6} = \frac{43 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}25}{0{,}6} = \frac{16{,}625}{0{,}6} \cong 27{,}7\ V$$

$$V_C = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}75 & 43 \\ -0{,}25 & 2 \end{vmatrix}}{0{,}6} = \frac{1{,}75 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 43}{0{,}6} = \frac{14{,}25}{0{,}6} \cong 23{,}8\ V$$

Di conseguenza:

$$V_B = E_1 + V_A = 4 + 27{,}7 = 31{,}7\ V$$

Conoscendo i potenziali ai nodi, possiamo ricavare la tensione ai capi di ciascuna resistenza:

$$V_{R_1} = V_A - V_D = 27{,}7 - 8 = 19{,}7\ V$$

$$V_{R_2} = V_B - V_D = 31{,}7 - 8 = 24{,}3\ V$$

$$V_{R_3} = V_B - V_C = 31{,}7 - 23{,}8 = 7{,}9\ V$$

$V_{R_4} = V_C - V_E = 23{,}8 - 0 = 23{,}8\ V$

Possiamo quindi procedere a calcolare la potenza dissipata dalle resistenze:

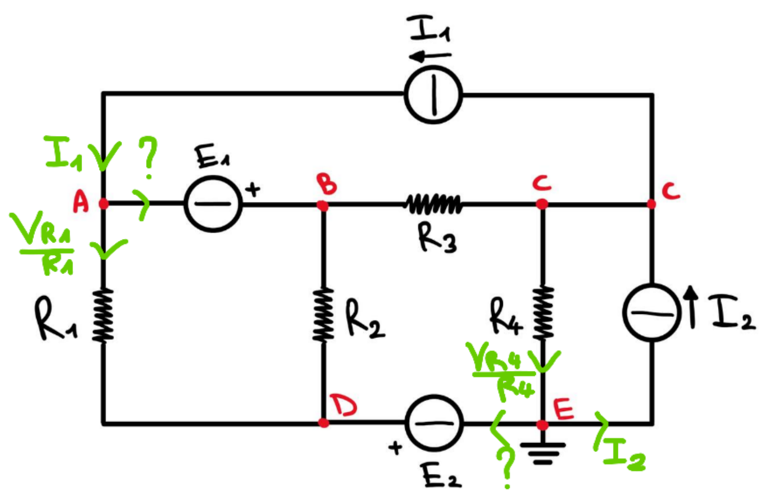
$$P_{R_1} = \frac{V_{R_1}^2}{R_1} = \frac{19{,}7^2}{1} \cong 388{,}1\ W$$

$$P_{R_2} = \frac{V_{R_2}^2}{R_2} = \frac{24{,}3^2}{2} \cong 295{,}2\ W$$

$$P_{R_3} = \frac{V_{R_3}^2}{R_3} = \frac{7{,}9^2}{4} \cong 15{,}6\ W$$

$$P_{R_4} = \frac{V_{R_4}^2}{R_4} = \frac{23{,}8^2}{8} \cong 70{,}8\ W$$

Calcoliamo le correnti I_{E_1} e I_{E_2} applicando la LKC ai nodi:



$$LKC\ A)\ \ I_1 - \frac{V_{R_1}}{R_1} - I_{E_1} = 0 \Rightarrow I_{E_1} = I_1 - \frac{V_{R_1}}{R_1} = 34 - \frac{19{,}7}{1} = 14{,}3\ A$$

$$LKC\ E)\ \frac{V_{R_4}}{R_4} - I_2 - I_{E_2} = 0 \Rightarrow I_{E_2} = \frac{V_{R_4}}{R_4} - I_2 = \frac{23{,}8}{8} - 35 \cong -32\ A$$

Calcoliamo adesso le potenze generate dai due generatori di tensione e dai due generatori di corrente:

$$P_{E_1} = V_{E_1} \cdot I_{E_1} = E_1 \cdot I_{E_1} = 4 \cdot 14{,}3 = 57{,}2\ W$$

$$P_{E_2} = V_{E_2} \cdot I_{E_2} = E_2 \cdot I_{E_2} = 8 \cdot (-32) = -256\ W$$

Si osservi che P_{E_2} è una potenza generata negativa, ovvero una potenza assorbita positiva.

$P_{I_1} = V_{I_1} \cdot I_{I_1} = (V_A - V_C) \cdot I_1 = (27{,}7 - 23{,}8) \cdot 34 = 132{,}6\ W$

$P_{I_2} = V_{I_2} \cdot I_{I_2} = (V_C - V_E) \cdot I_2 = (23{,}8 - 0) \cdot 35 = 833\ W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_{I_1} + P_{I_2} + P_{I_3}$

$388{,}1 + 295{,}2 + 15{,}6 + 70{,}8 = 57{,}2 + (-256) + 132{,}6 + 833$

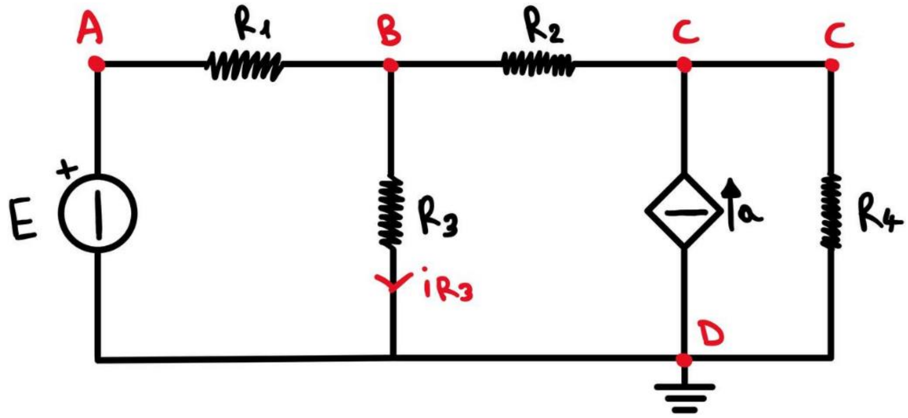
$769{,}7\ W \cong 766{,}8\ W$

Il bilancio delle potenze è verificato.

3. Metodo dei potenziali nodali con gen. pilotato e bilancio delle potenze

Si ricavino i potenziali di tutti i nodi con l'ausilio del metodo dei potenziali nodali e si effettui il bilancio delle potenze.

$E = 16\,V$	$R_1 = 10\,\Omega$
$a = \beta \cdot i_{R_3}$	$R_2 = 2\,\Omega$
$\beta = 3$	$R_3 = 3\,\Omega$
	$R_4 = 4\,\Omega$



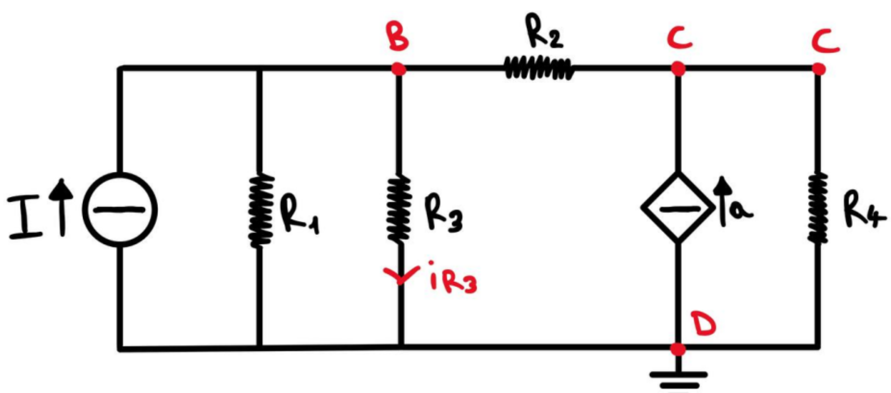
Si osservi che il nodo D è collegato a massa, dunque:

$D)\ V_D = 0\,V$

Si osservi anche che:

$A)\ V_A = E = 16\,V$

Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



$$I = \frac{E}{R_1} = \frac{16}{10} = 1{,}6\,A$$

Scriviamo dunque le equazioni ai nodi B e C e l'equazione di vincolo del generatore di corrente pilotato in corrente:

$$B)\ I = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$C)\ a = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$a = \beta \cdot i_{R_3} = \beta \cdot \left(\frac{V_B - V_D}{R_3}\right) = \beta \cdot \frac{V_B}{R_3}$$

Scriviamo il sistema di equazioni sostituendo quanto trovato con l'equazione di vincolo:

$$\begin{cases} I = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \\ \beta \cdot \frac{V_B}{R_3} = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \\ 0 = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\beta}{R_3}\right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 1{,}6 = V_B \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 = V_C \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}6 = 0{,}93 V_B - 0{,}5 V_C \\ 0 = 0{,}75 V_C - 1{,}5 V_B \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}93 & -0{,}5 \\ -1{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} V_B \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0{,}93 \cdot 0{,}75 - 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cong -0{,}05$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare i potenziali interessati:

$$V_B = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}6 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}75 \end{vmatrix}}{-0{,}05} = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}75}{-0{,}05} = \frac{1{,}2}{-0{,}05} = -24\ V$$

$$V_C = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}93 & 1{,}6 \\ -1{,}5 & 0 \end{vmatrix}}{-0{,}05} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}6}{-0{,}05} = \frac{2{,}4}{-0{,}05} \cong -48\ V$$

Conoscendo i potenziali ai nodi, possiamo ricavare la tensione ai capi di ciascuna resistenza:

$V_{R_1} = V_{R_3} = V_B - V_D = -24 - 0 = -24\ V$

$V_{R_2} = V_B - V_C = -24 - (-48) = 24\ V$

$V_{R_4} = V_C - V_D = -48 - 0 = -48\ V$

Possiamo quindi procedere a calcolare la potenza dissipata dalle resistenze:

$$P_{R_1} = \frac{V_{R_1}^2}{R_1} = \frac{-24^2}{10} = 57{,}6\ W$$

$$P_{R_2} = \frac{V_{R_2}^2}{R_2} = \frac{24^2}{2} = 288\ W$$

$$P_{R_3} = \frac{V_{R_3}^2}{R_3} = \frac{-24^2}{3} = 192\ W$$

$$P_{R_4} = \frac{V_{R_4}^2}{R_4} = \frac{-48^2}{4} = 576\ W$$

Calcoliamo adesso le potenze generate dal generatore di corrente e dal generatore di corrente pilotato in corrente:

$$P_I = V_I \cdot I_I = V_{R_1} \cdot I = -24 \cdot 1{,}6 = -38{,}4\ W$$

$$P_a = V_a \cdot I_a = V_{R_4} \cdot \beta \cdot \frac{V_B}{R_3} = -48 \cdot 3 \cdot \frac{-24}{3} = 1152\ W$$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_I + P_a$$

$$57{,}6 + 288 + 192 + 576 = -38{,}4 + 1152$$

$$1113{,}6\ W = 1113{,}6\ W$$

Il bilancio delle potenze è verificato.

4. Metodo delle correnti di maglia e bilancio delle potenze

Si ricavino le correnti che scorrono sui rami del circuito con l'ausilio del metodo delle correnti di maglia e si effettui il bilancio delle potenze.

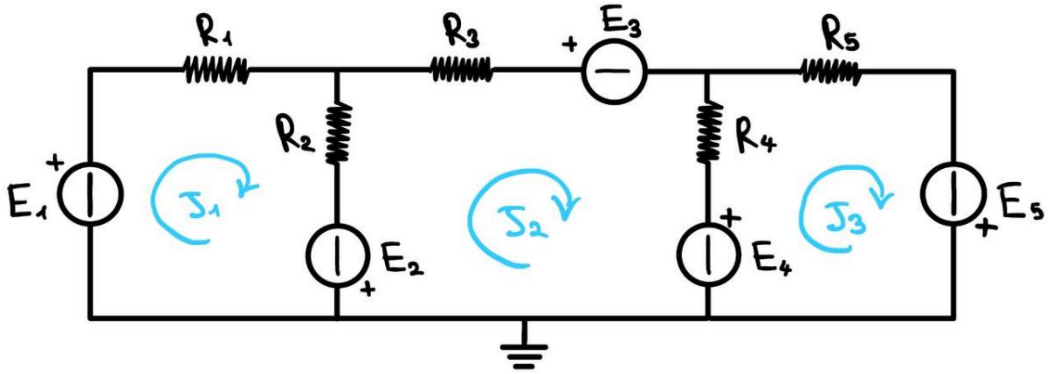
$E_1 = 42\,V \qquad R_1 = 3\,\Omega$

$E_2 = 25\,V \qquad R_2 = 4\,\Omega$

$E_3 = 57\,V \qquad R_3 = 5\,\Omega$

$E_4 = 70\,V \qquad R_4 = 6\,\Omega$

$E_5 = 4\,V \qquad R_5 = 7\,\Omega$



Si ricorre al metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ -E_2 - E_3 - E_4 = j_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - j_1 R_2 - j_3 R_4 \\ E_4 + E_5 = j_3 \cdot (R_4 + R_5) - j_2 R_4 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori:

$$\begin{cases} 42 + 25 = j_1 \cdot (3 + 4) - 4j_2 \\ -25 - 57 - 70 = j_2 \cdot (4 + 5 + 6) - 4j_1 - 6j_3 \\ 70 + 4 = j_3 \cdot (6 + 7) - 6j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 67 = 7j_1 - 4j_2 \\ -152 = 15j_2 - 4j_1 - 6j_3 \\ 74 = 13j_3 - 6j_2 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 67 \\ -152 \\ 74 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc:cc} 7 & -4 & 0 & 7 & -4 \\ -4 & 15 & -6 & -4 & 15 \\ 0 & -6 & 13 & 0 & -6 \end{array}\right| =$$

$$= (7 \cdot 15 \cdot 13) + 0 + 0 - 0 - [(-6) \cdot (-6) \cdot 7] - [13 \cdot (-4) \cdot (-4)] =$$

$$= 1365 - 252 - 208 = 905$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare j_1, j_2 e j_3:

$$j_1 = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 67 & -4 & 0 & 67 & -4 \\ -152 & 15 & -6 & -152 & 15 \\ 74 & -6 & 13 & 74 & -6 \end{array}\right|}{905} =$$

$$= \frac{(67 \cdot 15 \cdot 13) + [(-4) \cdot (-6) \cdot 74] + 0 - 0 - [(-6) \cdot (-6) \cdot 67] - [13 \cdot (-152) \cdot (-4)]}{905} =$$

$$= \frac{13065 + 1776 - 2412 - 7904}{905} = \frac{4525}{905} = 5\ A$$

$$j_2 = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 7 & 67 & 0 & 7 & 67 \\ -4 & -152 & -6 & -4 & -152 \\ 0 & 74 & 13 & 0 & 74 \end{array}\right|}{905} =$$

$$= \frac{[7 \cdot (-152) \cdot 13] + 0 + 0 - 0 - [74 \cdot (-6) \cdot 7] - [13 \cdot (-4) \cdot 67]}{905} =$$

$$= \frac{-13832 + 3108 + 3484}{905} = \frac{-7240}{905} = -8\ A$$

$$j_3 = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 7 & -4 & 67 & 7 & -4 \\ -4 & 15 & -152 & -4 & 15 \\ 0 & -6 & 74 & 0 & -6 \end{array}\right|}{905} =$$

$$= \frac{[7 \cdot 15 \cdot 74] + 0 + [67 \cdot (-4) \cdot (-6)] - 0 - [(-6) \cdot (-152) \cdot 7] - [74 \cdot (-4) \cdot (-4)]}{905} =$$

$$= \frac{7770 + 1608 - 6384 - 1184}{905} = \frac{1810}{905} = 2\ A$$

Trovate le correnti che scorrono nei rami, possiamo calcolare le potenze dissipate dai resistori:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot j_1^2 = 3 \cdot 5^2 = 75\ W$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot (j_1 - j_2)^2 = 4 \cdot (13)^2 = 676\ W$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot j_2^2 = 5 \cdot (-8)^2 = 320\ W$$

$$P_{R_4} = R_4 \cdot (j_2 - j_3)^2 = 6 \cdot (-10)^2 = 600\ W$$

$$P_{R_5} = R_5 \cdot j_3^2 = 7 \cdot 2^2 = 28\ W$$

Adesso si calcolano le potenze generate dai cinque generatori di tensione:

$$P_{E_1} = V_{E_1} \cdot I_{E_1} = E_1 \cdot j_1 = 42 \cdot 5 = 210\ W$$

$$P_{E_2} = V_{E_2} \cdot I_{E_2} = E_2 \cdot (j_1 - j_2) = 25 \cdot 13 = 325\ W$$

$P_{E_3} = V_{E_3} \cdot I_{E_3} = E_3 \cdot (-j_2) = 57 \cdot 8 = 456\ W$

$P_{E_4} = V_{E_4} \cdot I_{E_4} = E_4 \cdot (j_3 - j_2) = 70 \cdot 10 = 700\ W$

$P_{E_5} = V_{E_5} \cdot I_{E_5} = E_5 \cdot j_3 = 4 \cdot 2 = 8\ W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} = P_{E_1} + P_{E_2} + P_{E_3} + P_{E_4} + P_{E_5}$

$75 + 676 + 320 + 600 + 28 = 210 + 325 + 456 + 700 + 8$

$1699\ W = 1699\ W$

Il bilancio delle potenze è verificato.

5. Metodo delle correnti di maglia con supermaglia e potenza dissipata

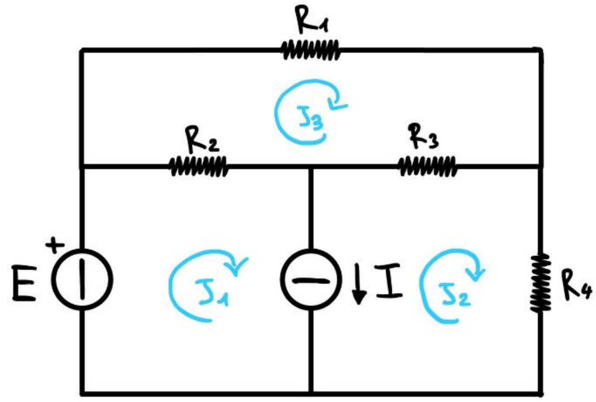
Si ricavi la potenza P_{R_1} dissipata dal resistore R_1.

$E = 80\ V$ $\quad R_1 = 10\ \Omega$

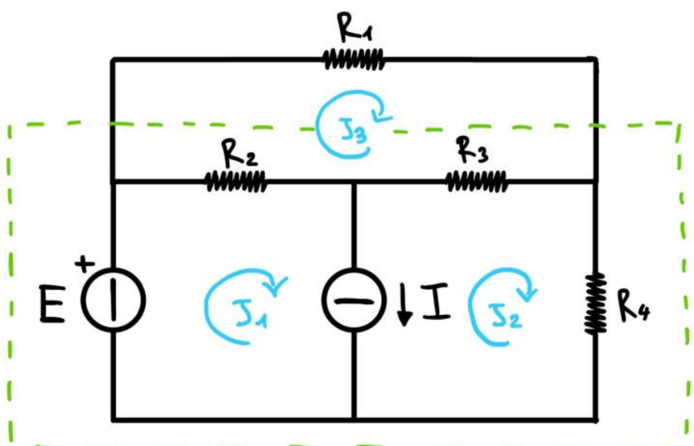
$I = 32\ A$ $\quad R_2 = 5\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$

$R_4 = 3\ \Omega$



Si osservi che le due maglie inferiori vanno a costituire una supermaglia con generatore di corrente I in comune:



Scriviamo l'equazione di vincolo della supermaglia e l'equazione alla supermaglia:

$I = j_1 - j_2$

$E = j_1 R_2 + j_2(R_3 + R_4) - j_3(R_2 + R_3)$

Scriviamo l'equazione alla maglia superiore:

$0 = j_3(R_1 + R_2 + R_3) - j_1 R_2 - j_2 R_3$

Risulta un sistema di due equazioni in due incognite:

$j_1 = I + j_2$

$$\begin{cases} E = (I + j_2)R_2 + j_2(R_3 + R_4) - j_3(R_2 + R_3) \\ 0 = j_3(R_1 + R_2 + R_3) - (I + j_2)R_2 - j_2 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = IR_2 + j_2R_2 + j_2(R_3 + R_4) - j_3(R_2 + R_3) \\ 0 = j_3(R_1 + R_2 + R_3) - IR_2 - j_2R_2 - j_2R_3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 80 - 32 \cdot 5 = 5j_2 + 8j_2 - 10j_3 \\ 32 \cdot 5 = 20j_3 - 5j_2 - 5j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80 - 160 = 13j_2 - 10j_3 \\ 160 = 20j_3 - 10j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -80 = 13j_2 - 10j_3 \\ 160 = 20j_3 - 10j_2 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -80 \\ 160 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 13 \cdot 20 - 10 \cdot 10 = 160$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare la corrente j_3, ovvero quella che scorre su R_1:

$$j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -80 \\ -10 & 160 \end{vmatrix}}{160} = \frac{13 \cdot 160 - 10 \cdot 80}{160} = \frac{1280}{160} = 8\ A$$

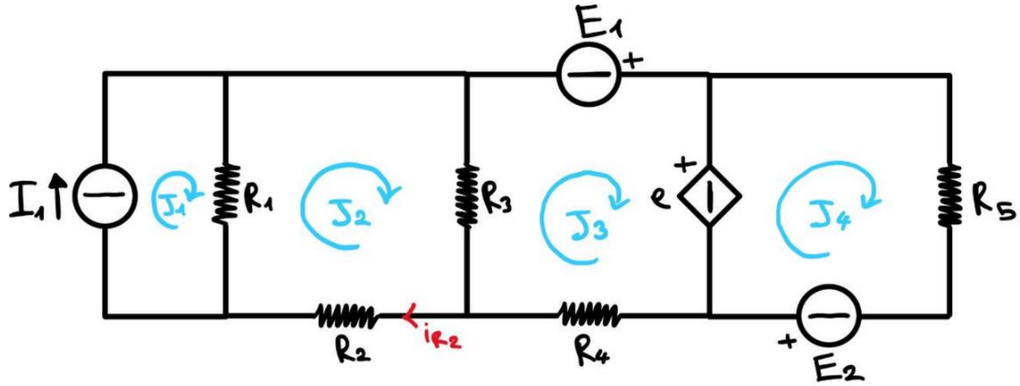
Poiché conosciamo la corrente che scorre su R_1, possiamo calcolare la potenza dissipata come segue:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot j_3^2 = 10 \cdot 8^2 = 640\ W$$

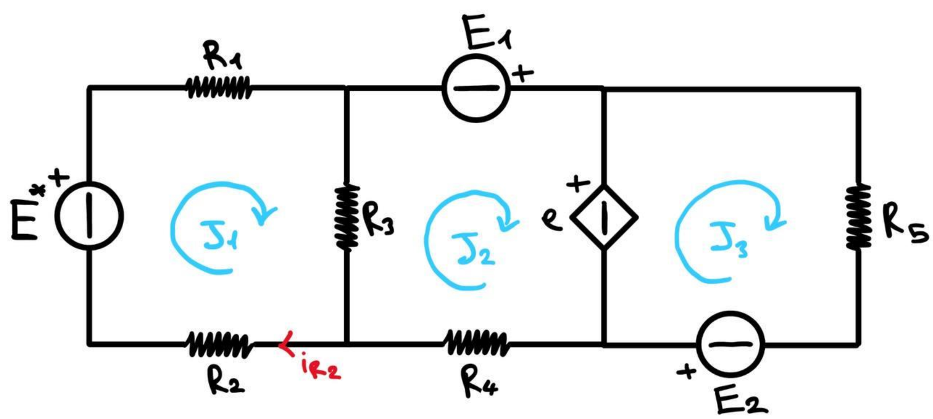
6. Metodo delle correnti di maglia con gen. pilotato

Si determinino tutte le correnti che scorrono nelle maglie del circuito.

$E_1 = 10\ V$	$R_1 = 2\ \Omega$
$E_2 = 8\ V$	$R_2 = 4\ \Omega$
$e = R_m \cdot i_{R_2}$	$R_3 = 6\ \Omega$
$R_m = 2\ \Omega$	$R_4 = 8\ \Omega$
$I = 3\ A$	$R_5 = 10\ \Omega$

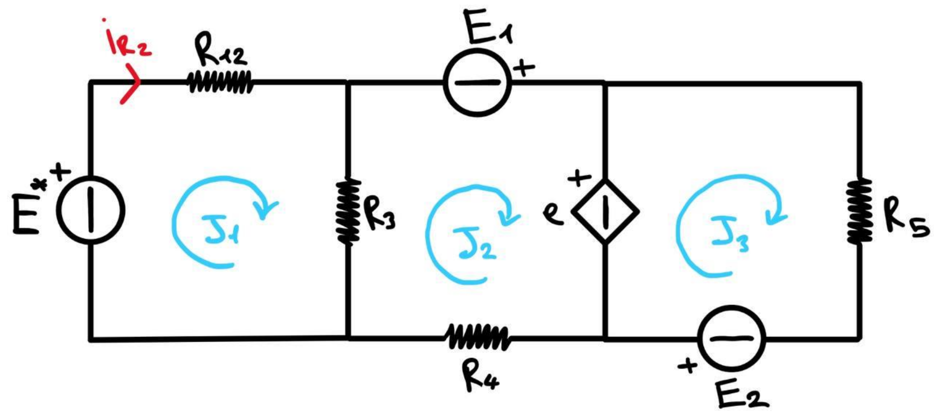


Al fine di semplificare il circuito, possiamo trasformare il generatore di corrente I in generatore di tensione E^*:



$E^* = R_1 \cdot I = 2 \cdot 3 = 6\ V$

Notiamo inoltre che R_1 ed R_2 nella prima maglia sono in serie (vi scorre la stessa corrente):



$R_{12} = R_1 + R_2 = 2 + 4 = 6\ \Omega$

Abbiamo quindi ridotto a tre il numero delle incognite da trovare. Applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} E^* = j_1(R_{12} + R_3) - j_2 R_3 \\ E_1 - e = j_2(R_3 + R_4) - j_1 R_3 \\ E_2 + e = j_3 R_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^* = j_1(R_{12} + R_3) - j_2 R_3 \\ E_1 - R_m \cdot i_{R_2} = j_2(R_3 + R_4) - j_1 R_3 \\ E_2 + R_m \cdot i_{R_2} = j_3 R_5 \end{cases}$$

Ma $i_{R_2} = i_{R_{12}} = j_1$, dunque:

$$\begin{cases} E^* = j_1(R_{12} + R_3) - j_2 R_3 \\ E_1 - R_m j_1 = j_2(R_3 + R_4) - j_1 R_3 \\ E_2 + R_m j_1 = j_3 R_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^* = j_1(R_{12} + R_3) - j_2 R_3 \\ E_1 = j_2(R_3 + R_4) - j_1(R_3 - R_m) \\ E_2 = j_3 R_5 - R_m j_1 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 6 = 12 j_1 - 6 j_2 \\ 10 = 14 j_2 - 4 j_1 \\ 8 = 10 j_3 - 2 j_1 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -4 & 14 & 0 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc:cc} 12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ -4 & 14 & 0 & -4 & 14 \\ -2 & 0 & 10 & -2 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= (12 \cdot 14 \cdot 10) + 0 + 0 - 0 - 0 - [10 \cdot (-4) \cdot (-6)] =$$

$$= 1680 - 240 = 1440$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare j_1, j_2 e j_3:

$$j_1 = \frac{\left| \begin{array}{ccc:cc} 6 & -6 & 0 & 6 & -6 \\ 10 & 14 & 0 & 10 & 14 \\ 8 & 0 & 10 & 8 & 0 \end{array} \right|}{1440} =$$

$$= \frac{(6 \cdot 14 \cdot 10) + 0 + 0 - 0 - 0 - [10 \cdot 10 \cdot (-6)]}{1440} =$$

$$= \frac{840 + 600}{1440} = \frac{1440}{1440} = 1\ A$$

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ -4 & 10 & 0 & -4 & 10 \\ -2 & 8 & 10 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{1440} =$$

$$= \frac{[12 \cdot 10 \cdot 10] + 0 + 0 - 0 - 0 - [10 \cdot (-4) \cdot 6]}{1440} =$$

$$= \frac{1200 + 240}{1440} = \frac{1440}{1440} = 1\ A$$

$$j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -6 & 6 & 12 & -6 \\ -4 & 14 & 10 & -4 & 14 \\ -2 & 0 & 8 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{1440} =$$

$$= \frac{[12 \cdot 14 \cdot 8] + [(-6) \cdot 10 \cdot (-2)] + 0 - [(-2) \cdot 14 \cdot 6] - 0 - [8 \cdot (-4) \cdot (-6)]}{1440} =$$

$$= \frac{1344 + 120 + 168 - 192}{1440} = \frac{1440}{1440} = 1\ A$$

7. Teorema di Thevenin

Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi A-B.

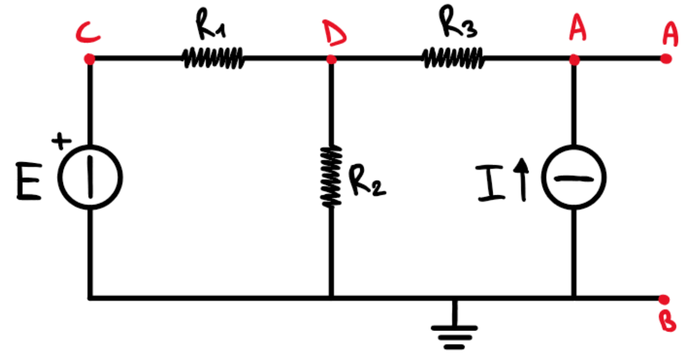
$E = 10\ V$

$I = 5\ A$

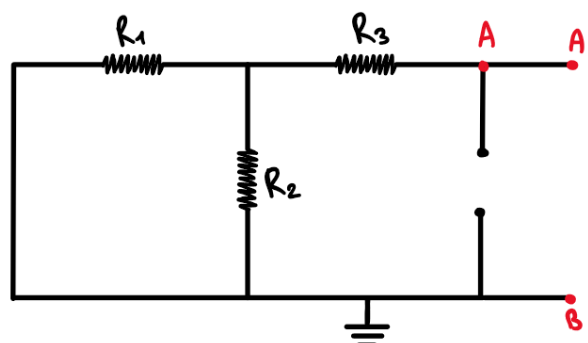
$R_1 = 2\ \Omega$

$R_2 = 4\ \Omega$

$R_3 = 6\ \Omega$



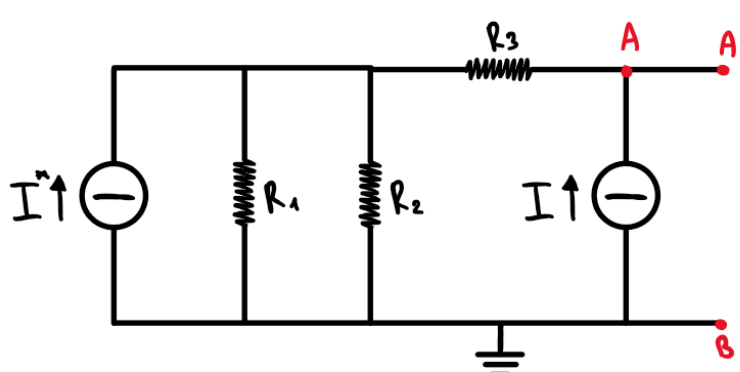
Per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin, dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{12} + R_3 = 1{,}33 + 6 = 7{,}33\ \Omega$$

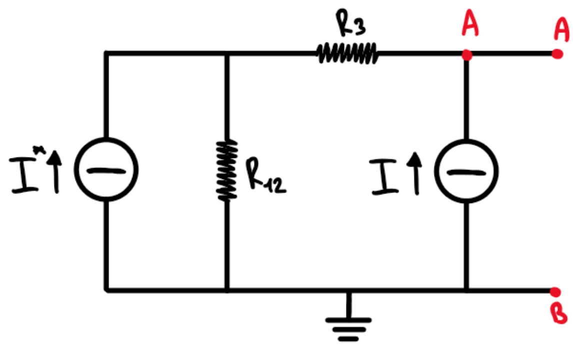
Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto). Consideriamo il circuito iniziale e trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



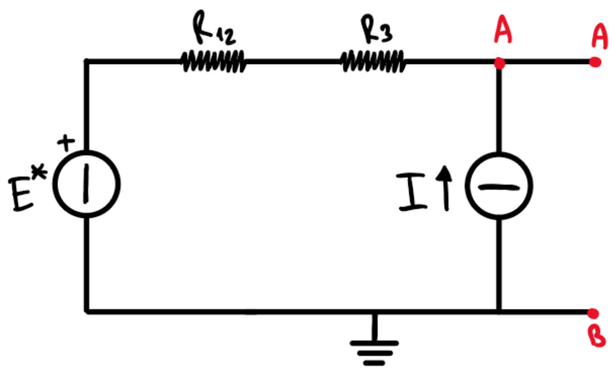
$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{2} = 5\,A$$

Conosciamo già il parallelo R_{12}:

$R_{12} = 1{,}33\,\Omega$



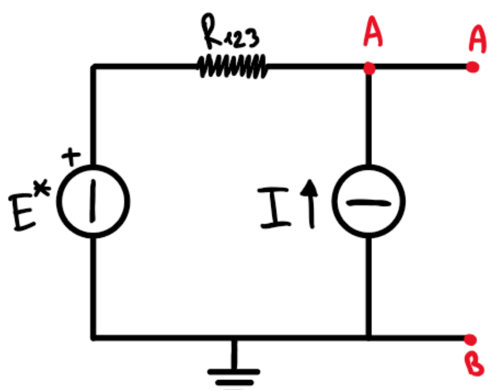
Ritrasformiamo il generatore di corrente I^* in generatore di tensione:



$E^* = I^* \cdot R_{12} = 5 \cdot 1{,}33 = 6{,}65\,V$

Conosciamo già la serie R_{123}:

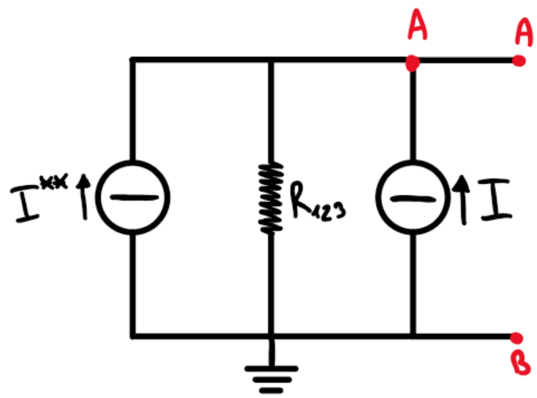
$R_{123} = 7{,}33\,\Omega$



A questo punto possiamo procedere in due modi. Il primo di essi è applicare il teorema di Millmann:

$$V_{AB} = \frac{\frac{E^*}{R_{123}} + I}{\frac{1}{R_{123}}} = \frac{\frac{6,65}{7,33} + 5}{\frac{1}{7,33}} = 5,91 \cdot 7,33 \cong 43,3\ V$$

Oppure ritrasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



$$I^{**} = \frac{E^*}{R_{123}} = \frac{6,65}{7,33} \cong 0,91\ A$$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali considerando che $V_B = 0$:

$$A)\ I^{**} + I = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_{123}}\right)$$

$$A)\ 5,91 = V_A \cdot \left(\frac{1}{7,33}\right)$$

$$\Rightarrow V_A \cong 43,3\ V$$

$$\Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B = 43,3 - 0 = 43,3\ V$$

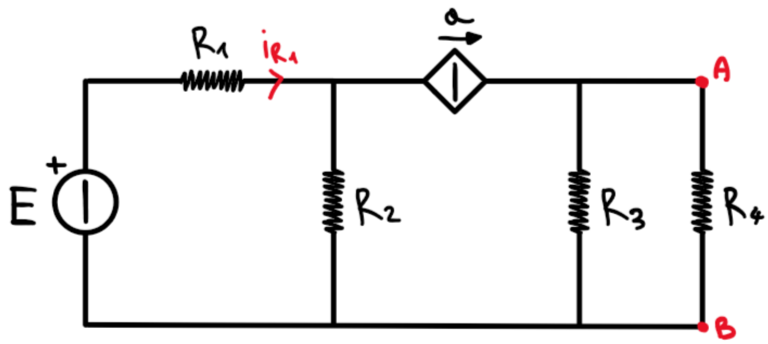
8. Teorema di Thevenin con gen. pilotato

Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_4.

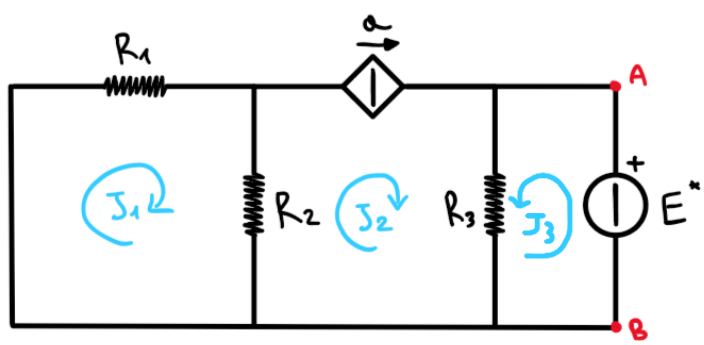
$E = 10\,V$ $\quad R_1 = 2\,\Omega$

$a = \beta \cdot i_{R_1}$ $\quad R_2 = 4\,\Omega$

$\beta = 3$ $\quad R_3 = 6\,\Omega$



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_4) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione E^* del valore convenzionale di $1\,V$:



Noi sappiamo che $R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}}$, dunque applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare la corrente interessata:

$$\begin{cases} 0 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ a = j_2 \cdot (R_2 + R_3) - j_1 R_2 + j_3 R_3 \\ E^* = j_3 R_3 + j_2 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ \beta \cdot i_{R_1} = j_2 \cdot (R_2 + R_3) - j_1 R_2 + j_3 R_3 \\ E^* = j_3 R_3 + j_2 R_3 \end{cases}$$

Ma $i_{R_1} = j_1$, dunque:

$$\begin{cases} 0 = j_1 \cdot (R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ 0 = j_2 \cdot (R_2 + R_3) - j_1 (R_2 + \beta) + j_3 R_3 \\ E^* = j_3 R_3 + j_2 R_3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 0 = 6j_1 - 4j_2 \\ 0 = 10j_2 - 7j_1 + 6j_3 \\ 1 = 6j_3 + 6j_2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} j_1 = \frac{2}{3}j_2 \\ 0 = 10j_2 - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}j_2\right) + 6j_3 \\ 1 = 6j_3 + 6j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \frac{2}{3}j_2 \\ 0 = 10j_2 - \frac{14}{3}j_2 + 6j_3 \\ 1 = 6j_3 + 6j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \frac{2}{3}j_2 \\ j_2 = -\frac{9}{8}j_3 \\ 1 = 6j_3 + 6 \cdot \left(-\frac{9}{8}j_3\right) \end{cases}$$

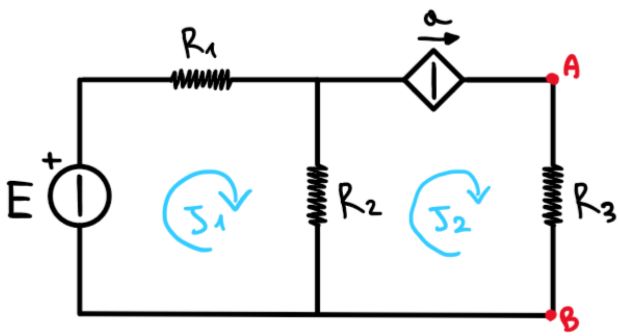
$$\begin{cases} j_1 = \frac{2}{3}j_2 \\ j_2 = -\frac{9}{8}j_3 \\ 1 = 6j_3 - \frac{27}{4}j_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = \frac{2}{3}j_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1\ A \\ j_2 = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{2}\ A = -1{,}5\ A \\ j_3 = -\frac{4}{3}\ A \cong -1{,}33\ A \end{cases}$$

Notiamo che $I_{BA} = -j_3 = 1{,}33\ A$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{1{,}33} \cong 0{,}75\ \Omega$$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare la corrente che scorre ai capi di R_3:

$$\begin{cases} E = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ a = j_2(R_2 + R_3) - j_1 R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ \beta \cdot i_{R_1} = j_2(R_2 + R_3) - j_1 R_2 \end{cases}$$

Ma $i_{R_1} = j_1$:

$$\begin{cases} E = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ 0 = j_2(R_2 + R_3) - j_1(R_2 + \beta) \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 10 = 6j_1 - 4j_2 \\ 0 = 10j_2 - 7j_1 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}}_{\det A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$\det A = 6 \cdot 10 - 7 \cdot 4 = 60 - 28 = 32$

Applichiamo il metodo di Cramer per trovare la corrente j_2, ovvero la corrente che scorre su R_3:

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{32} = \frac{100}{32} = \cancel{3{,}125}\,A \quad 2{,}2\ A$$

Dunque:

$13{,}2\ V$

$E_{eq} = V_{AB} = V_{R_3} = R_3 \cdot i_{R_3} = R_3 \cdot j_2 = 6 \cdot 3{,}125 = 18{,}75\ V$

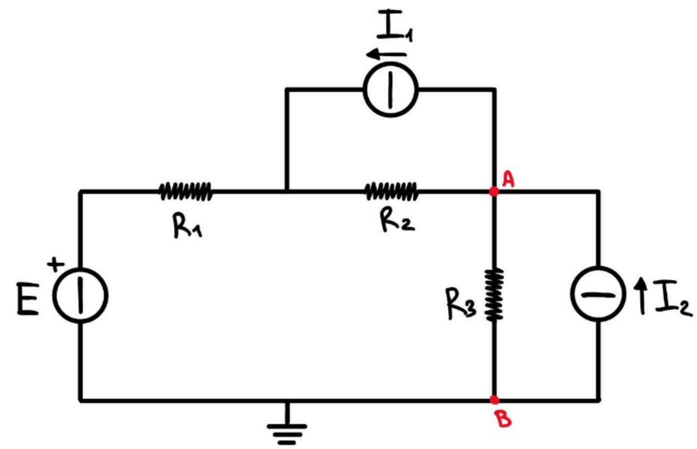
9. Teorema di Thevenin con calcolo della potenza dissipata

Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_3 e calcolarne la potenza dissipata.

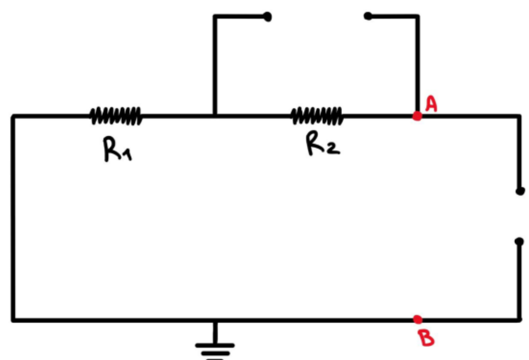
$E = 2\,V$ $\quad R_1 = 2\,\Omega$

$I_1 = 1\,A$ $\quad R_2 = 6\,\Omega$

$I_2 = 5\,A$ $\quad R_3 = 4\,\Omega$

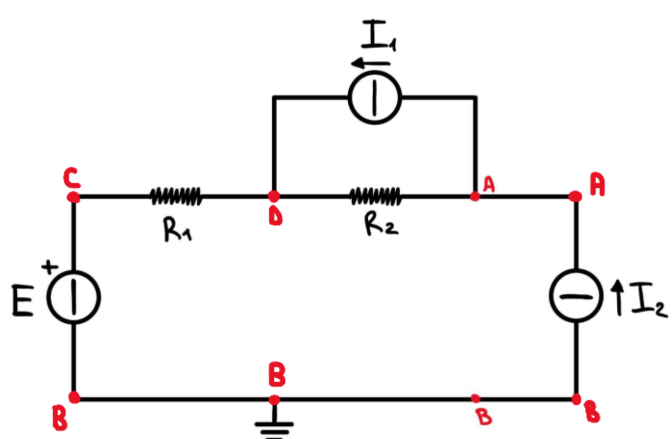


Per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin, dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B:



$R_{eq} = R_1 + R_2 = 2 + 6 = 8\,\Omega$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto). Consideriamo il circuito iniziale e trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



Osserviamo che il nodo B è collegato a massa:

$V_B = 0\ V$

Inoltre:

$V_C = E = 2\ V$

Applichiamo il metodo dei potenziali nodali per ricavare V_A:

$$A)\ I_2 - I_1 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$D)\ I_1 = V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

Sostituiamo i valori:

$$A)\ 5 - 1 = \frac{1}{6} V_A - \frac{1}{6} V_D$$

$$D)\ 1 = \frac{2}{3} V_D - 1 - \frac{1}{6} V_A$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}16 & -0{,}16 \\ -0{,}16 & 0{,}66 \end{bmatrix}}_{\det A} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_D \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0{,}16 \cdot 0{,}66 - 0{,}16 \cdot 0{,}16 = 0{,}08$$

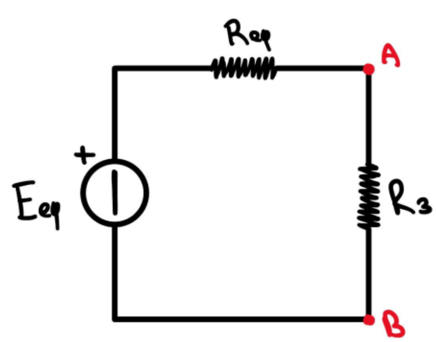
Applichiamo il metodo di Cramer per trovare V_A:

$$V_A = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -0{,}16 \\ 2 & 0{,}66 \end{vmatrix}}{0{,}08} = \frac{4 \cdot 0{,}66 + 2 \cdot 0{,}16}{0{,}08} = 37\ V$$

Dunque:

$$E_{eq} = V_{AB} = V_A - V_B = 37 - 0 = 37\ V$$

Il circuito di Thevenin è il seguente:



Utilizziamo il partitore di tensione per ricavare la tensione ai capi di R_3:

$$V_{R_3} = E_{eq} \cdot \frac{R_3}{R_{eq} + R_3} = 37 \cdot \frac{4}{8+4} = 37 \cdot \frac{1}{3} \cong 12{,}3\ V$$

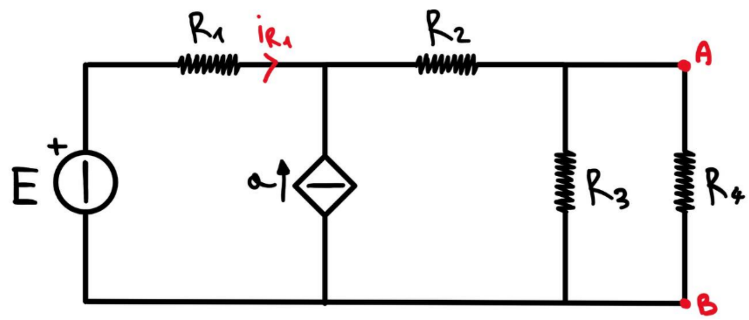
Conoscendo la tensione ai capi di R_3, possiamo esprimere la potenza dissipata come segue:

$$P_{R_3} = \frac{V_{R_3}^2}{R_3} = \frac{12{,}3^2}{4} = 37{,}8\ W$$

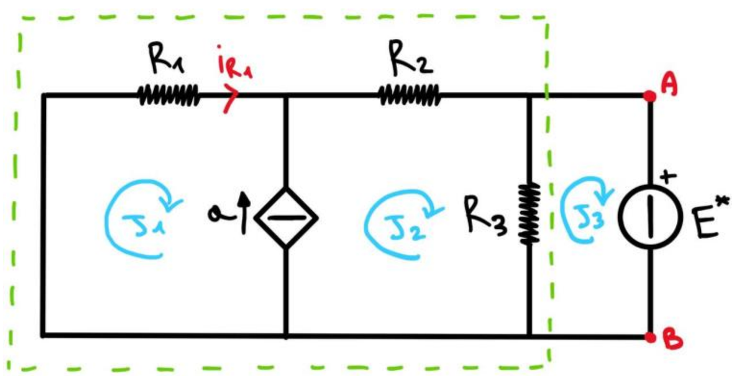
10. Teorema di Thevenin con gen. pilotato e supermaglia

Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_4.

$E = 12\,V$	$R_1 = 6\,\Omega$
$a = \beta \cdot i_{R_1}$	$R_2 = 3\,\Omega$
$\beta = 3$	$R_3 = 3\,\Omega$
	$R_4 = 10\,\Omega$



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_4) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione E^* del valore convenzionale di $1\,V$:



Nel circuito si individua una supermaglia che comprende le due maglie che hanno il generatore pilotato di corrente in comune e, utilizzando il metodo delle correnti di maglia, si impone l'equazione di vincolo alla supermaglia $a = j_2 - j_1$:

$$\begin{cases} 0 = j_1R_1 + j_2(R_2 + R_3) - j_3R_3 \\ -E^* = j_3R_3 - j_2R_3 \end{cases}$$

Abbiamo due equazioni in tre incognite, ma dall'equazione di vincolo del generatore pilotato otteniamo:

$$a = \beta \cdot i_{R_1} = \beta j_1 = 3j_1$$

$$\Rightarrow 3j_1 = j_2 - j_1 \Rightarrow j_2 = 4j_1$$

Sostituendo nel sistema:

$$\begin{cases} 0 = j_1R_1 + 4j_1(R_2 + R_3) - j_3R_3 \\ -E^* = j_3R_3 - 4j_1R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = j_1(R_1 + 4R_2 + 4R_3) - j_3R_3 \\ \quad -E^* = j_3R_3 - 4j_1R_3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 0 = 30j_1 - 3j_3 \\ -1 = 3j_3 - 12j_1 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30 & -3 \\ -12 & 3 \end{bmatrix}}_{\det A} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$\det A = 30 \cdot 3 - 12 \cdot 3 = 54$

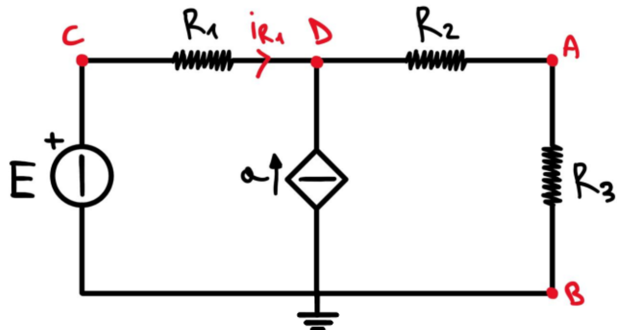
Applichiamo il metodo di Cramer per trovare j_3:

$$j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 0 \\ -12 & -1 \end{vmatrix}}{54} = \frac{30 \cdot (-1)}{54} \cong -0{,}55\ A$$

Ma $I_{BA} = -j_3 = 0{,}55\ A$, dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{E^*}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}55} \cong 1{,}8\ \Omega$$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



Si pone B a massa in modo tale che $V_B = 0\ V$, inoltre:

$V_C = E = 12\ V$

Tramite il metodo dei potenziali nodali, calcoliamo i potenziali ai nodi D ed A:

$$D)\ a = V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$A)\ 0 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

In questo modo abbiamo due equazioni in tre incognite, quindi imponiamo l'equazione di vincolo del generatore pilotato:

$$a = \beta i_{R_1} = \beta \cdot \frac{V_C - V_D}{R_1}$$

Sostituendo nel sistema:

$$D)\ \beta \cdot \frac{V_C - V_D}{R_1} = V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$A)\ 0 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$D)\ 0 = V_D \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{\beta}{R_1}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\beta}{R_1}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

$$A)\ 0 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

Sostituendo i valori:

$$D)\ 0 = V_D \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{6}\right) - 12 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$A)\ 0 = V_A \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) - V_D \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$D)\ 0 = V_D - 8 - \frac{1}{3} V_A$$

$$A)\ 0 = \frac{2}{3} V_A - \frac{1}{3} V_D$$

Risolviamo per sostituzione:

$$D)\ V_D = 8 + \frac{1}{3} V_A$$

$$A)\ 0 = \frac{2}{3} V_A - \frac{1}{3} \cdot \left(8 + \frac{1}{3} V_A\right)$$

$$D)\ V_D = 8 + \frac{1}{3} V_A$$

$$A)\ 0 = \frac{2}{3} V_A - \frac{8}{3} - \frac{1}{9} V_A$$

$D)\ V_D = 8 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{24}{5}\right) = 9{,}6\ V$

$A)\ V_A = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8\ V$

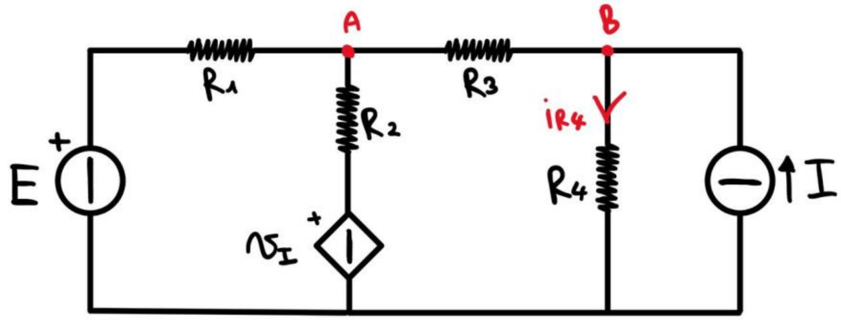
Dunque:

$E_{eq} = V_{AB} = V_A - V_B = 4{,}8 - 0 = 4{,}8\ V$

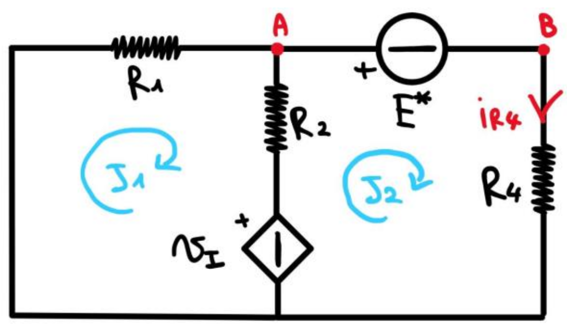
11. Teorema di Thevenin con gen. pilotato e Millmann

Determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_3.

$E = 1\,V$	$R_1 = 1\,\Omega$
$v_I = R_m \cdot i_{R_4}$	$R_2 = 2\,\Omega$
$R_m = 2\,\Omega$	$R_3 = 2\,\Omega$
$I = 1\,A$	$R_4 = 2\,\Omega$



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_3) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione E^* del valore convenzionale di $1\,V$:



Per trovare I_{BA}, applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} -v_I = j_1(R_1 + R_2) - j_2R_2 \\ v_I - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(R_m \cdot i_{R_4}) = j_1(R_1 + R_2) - j_2R_2 \\ (R_m \cdot i_{R_4}) - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1R_2 \end{cases}$$

Ma $i_{R_4} = j_2$, quindi:

$$\begin{cases} -R_mj_2 = j_1(R_1 + R_2) - j_2R_2 \\ R_mj_2 - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = j_1(R_1 + R_2) - j_2(R_2 - R_m) \\ -E^* = j_2(R_2 + R_4 - R_m) - j_1R_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

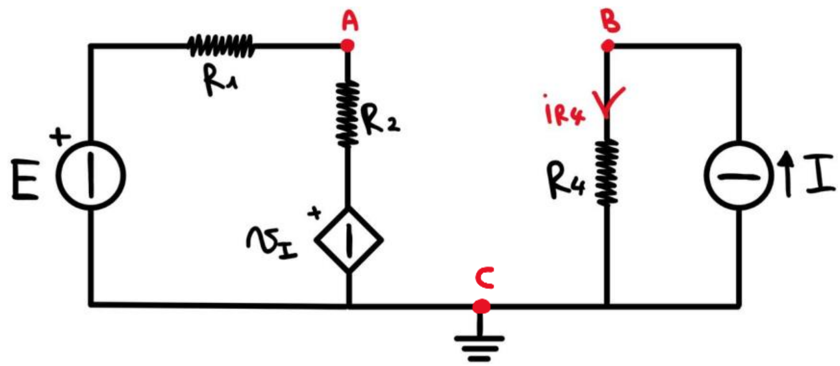
$$\begin{cases} 0 = 3j_1 \\ -1 = 2j_2 - 2j_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 0 \\ j_2 = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5\ A \end{cases}$$

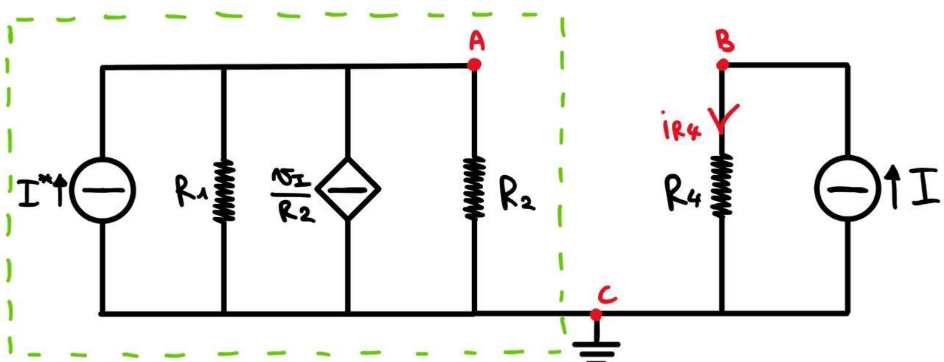
Ma $I_{BA} = -j_2 = 0{,}5\ A$, dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \Omega$$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente e il generatore di tensione pilotato in corrente in generatore di corrente pilotato in tensione:



$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{1}{1} = 1\ A$$

Si osservi che è possibile ricavare la tensione V_{AC} applicando il teorema di Millmann alla parte sinistra del circuito:

$$V_{AC} = \frac{I^* + \frac{0}{R_1} + \frac{v_I}{R_2} + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1 + \frac{R_m i_{R_4}}{R_2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{1 + I}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \cong 1{,}33\ V$$

E poiché $V_C = 0\ V$:

$V_{AC} = V_A - V_C = 1{,}33\ V = V_A$

Tramite la legge di Ohm, si osserva che:

$V_B = I \cdot R_4 = 1 \cdot 2 = 2\ V$

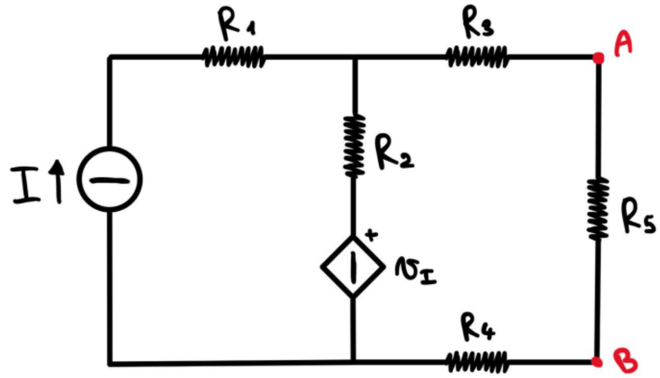
Dunque:

$E_{eq} = V_{AB} = V_A - V_B = 1{,}33 - 2 = -0{,}66\ V$

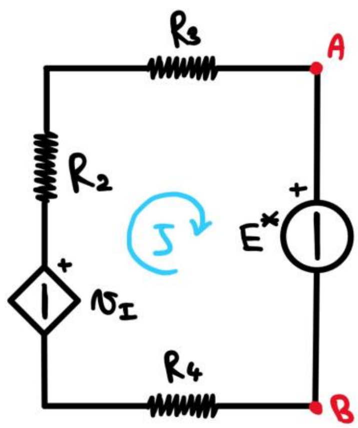
12. Resistenza equivalente di Thevenin con gen. pilotato

Determinare la resistenza equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_5.

$I = 7\ A$	$R_1 = 3\ \Omega$
$v_I = R_m \cdot i_{R_3}$	$R_2 = 3\ \Omega$
$R_m = 0{,}5\ \Omega$	$R_3 = 12\ \Omega$
	$R_4 = 6\ \Omega$
	$R_5 = 2\ \Omega$



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_5) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione E^* del valore convenzionale di 1 V, oppure inserendo un generatore di corrente I^* del valore convenzionale di 1 A. Se inseriamo il generatore di tensione:



Per trovare I_{BA} ci basta trovare la corrente che scorre nella maglia:

$v_I - E^* = j(R_2 + R_3 + R_4)$

$R_m \cdot i_{R_3} - E^* = j(R_2 + R_3 + R_4)$

Ma $i_{R_3} = j$:

$R_m j - E^* = j(R_2 + R_3 + R_4)$

$-E^* = j(R_2 + R_3 + R_4 - R_m)$

Sostituendo i valori:

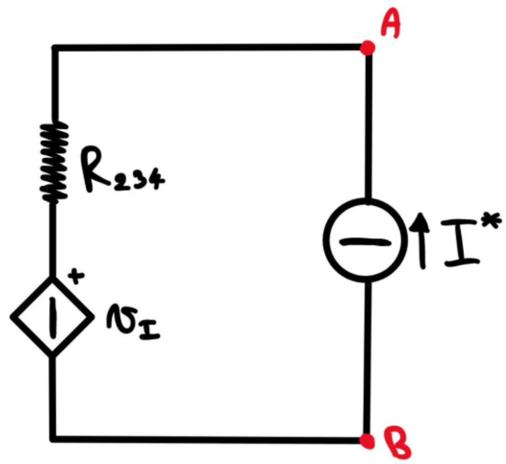
$-1 = 20{,}5j$

$$j = -\frac{1}{20{,}5} \cong -0{,}048\ A$$

Ma $I_{BA} = -j = 0{,}048\ A$, dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}048} \cong 20{,}8\ \Omega$$

Analogamente, inserendo un generatore di corrente tra i morsetti A-B e notando, se vogliamo, che R_2, R_3 ed R_4 sono in serie:



$$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4 = 21\ \Omega$$

Applicando Millmann, possiamo trovare la tensione V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{\frac{v_I}{R_{234}} + I^*}{\frac{1}{R_{234}}} = \frac{\frac{R_m i_{R_3}}{R_{234}} + I^*}{\frac{1}{R_{234}}} = \frac{\frac{R_m I^*}{R_{234}} + I^*}{\frac{1}{R_{234}}} = \frac{\frac{0{,}5}{21} + 1}{\frac{1}{21}} = 1{,}02 \cdot 21 \cong 21{,}4\ V$$

Dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{21{,}4}{1} \cong 21{,}4\ \Omega$$

I due valori di R_{eq} differiscono di poco per questioni di approssimazione.

13. Teorema di Norton

Si determini il circuito equivalente di Norton ai capi del resistore R_4.

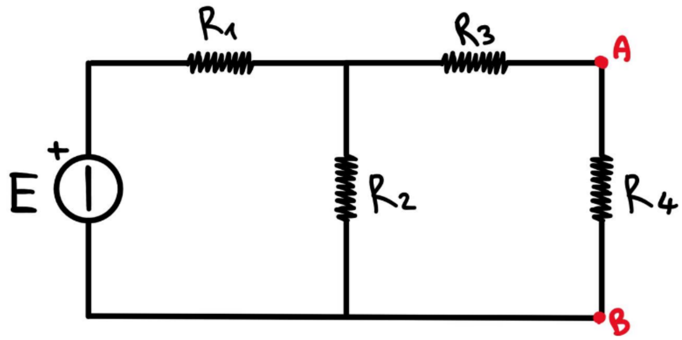
$E = 24\ V$

$R_1 = 6\ \Omega$

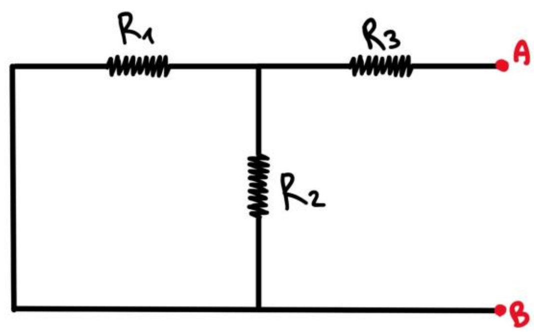
$R_2 = 6\ \Omega$

$R_3 = 3\ \Omega$

$R_4 = 5\ \Omega$



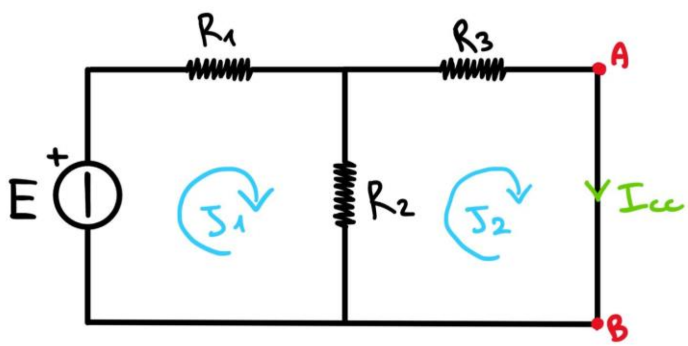
Per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = \frac{36}{12} = 3\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{12} + R_3 = 3 + 3 = 6\ \Omega$$

Passiamo al calcolo della I_{CC} di Norton che scorre nel cortocircuito fra i nodi A-B.



Utilizziamo il metodo delle correnti di maglia per ricavare j_2:

$$\begin{cases} E = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ 0 = j_2(R_2 + R_3) - j_1 R_2 \end{cases}$$

Sostituiamo i valori:

$$\begin{cases} 24 = 12j_1 - 6j_2 \\ 0 = 9j_2 - 6j_1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} 24 = 12 \cdot \left(\frac{9}{6}j_2\right) - 6j_2 \\ j_1 = \frac{9}{6}j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24 = 18j_2 - 6j_2 \\ j_1 = \frac{9}{6}j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_2 = \frac{24}{12} = 2\ A \\ j_1 = \frac{9}{6}j_2 = \frac{9}{6} \cdot 2 = 3\ A \end{cases}$$

Dunque:

$I_{CC} = j_2 = 2\ A$

14. Teorema di Norton

Si determini il circuito equivalente di Norton ai morsetti A-B.

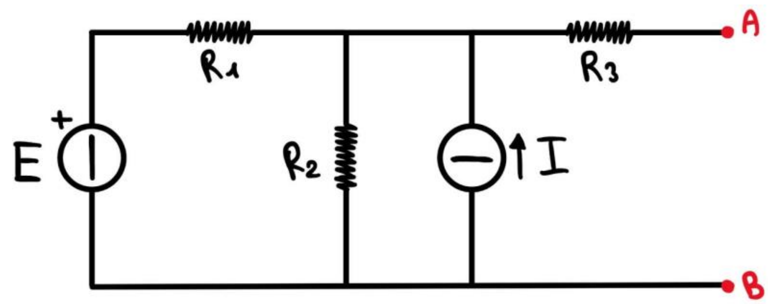
$E = 12\ V$

$I = 2\ A$

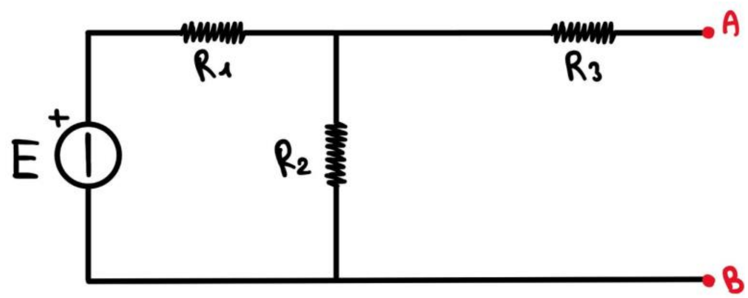
$R_1 = 24\ \Omega$

$R_2 = 12\ \Omega$

$R_3 = 2\ \Omega$



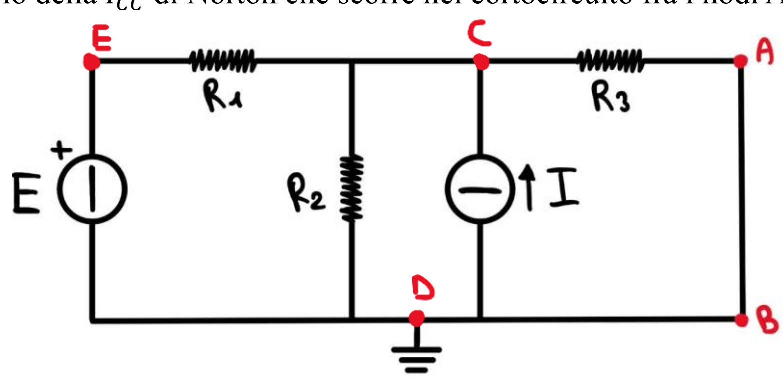
Per trovare la resistenza equivalente di Norton bisogna spegnere i generatori indipendenti e considerare la rete a vuoto tra i nodi A-B.



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24 \cdot 12}{24 + 12} = \frac{288}{36} = 8\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_{12} + R_3 = 8 + 2 = 10\ \Omega$$

Passiamo al calcolo della I_{CC} di Norton che scorre nel cortocircuito fra i nodi A-B.



Notiamo che la I_{CC} di Norton è pari alla i_{R_3}:

$$I_{CC} = i_{R_3} = \frac{V_{CA}}{R_3}$$

Inoltre, si osservi che:

$V_E = E = 12\ V$

$V_D = V_B = V_A = 0\ V$

Utilizziamo il metodo dei potenziali nodali per ricavare V_C:

$$I = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_3}\right) - V_E \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right)$$

Sostituendo i valori:

$$2 = V_C \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right) - 12 \cdot \left(\frac{1}{24}\right)$$

$$2 = \frac{5}{8} V_C - \frac{1}{2}$$

$$V_C = 2{,}5 \cdot \frac{8}{5} = \frac{20}{5} = 4\ V$$

Dunque:

$$I_{CC} = i_{R_3} = \frac{V_{CA}}{R_3} = \frac{V_C - V_A}{R_3} = \frac{4 - 0}{2} = 2\ A$$

15. Circuito RC

La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto chiuso. All'istante $t = 0$ l'interruttore si apre, determinare l'andamento di $v_C(t)$ per $t \geq 0$.

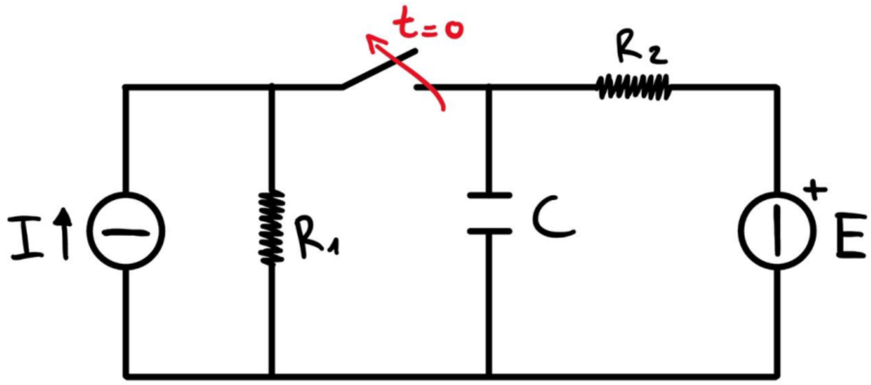
$E = 60\,V$

$I = 3{,}5\,A$

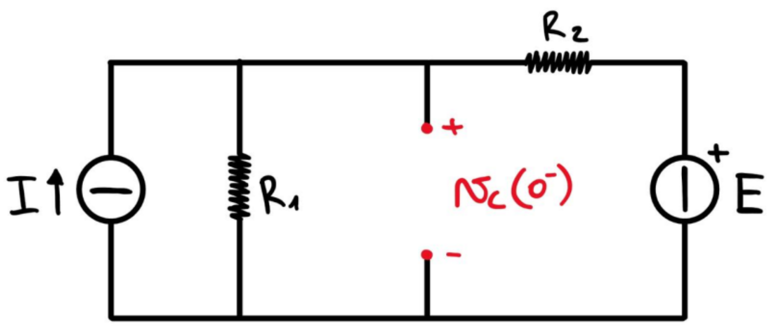
$C = 10\,mF$

$R_1 = 1\,\Omega$

$R_2 = 2\,\Omega$



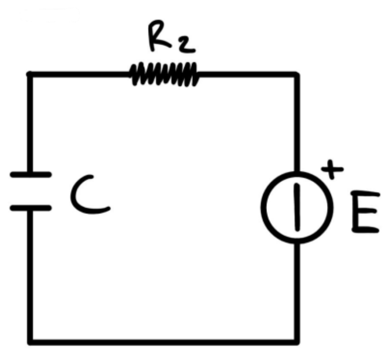
Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



Calcoliamo $v_C(0^-)$ utilizzando Millmann:

$$v_C(0^-) = \frac{I + \frac{0}{R_1} + \frac{E}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{3{,}5 + \frac{60}{2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{33{,}5}{1{,}5} \cong 22{,}3\,V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



Scriviamo le equazioni costitutive:

$v_{R_2} = R_2 \cdot i_{R_2}$

$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$

$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_C = i_{R_2} = i_E$

LKT) $E - v_{R_2} - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_{R_2} = E$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_{R_2} = R_2 \cdot i_{R_2} = R_2 \cdot i_C$

$\Rightarrow v_C + R_2 \cdot i_C = E$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$v_C + R_2 C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_2 C} v_C = \frac{1}{R_2 C} \cdot E$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_2 C} v_C = 0$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{R_2 C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$

$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{R_2 C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{R_2C} = -\frac{1}{2 \cdot 0{,}01} = -50\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-50t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = k'$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{k'}{R_2C} = \frac{1}{R_2C} \cdot E$$

$$k' = E = 60\ V$$

$$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-50t} + 60$$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$$v_C(0) = 22{,}3\ V$$

$$22{,}3 = k \cdot e^0 + 60 = k + 60$$

$$\Rightarrow k = -37{,}7$$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

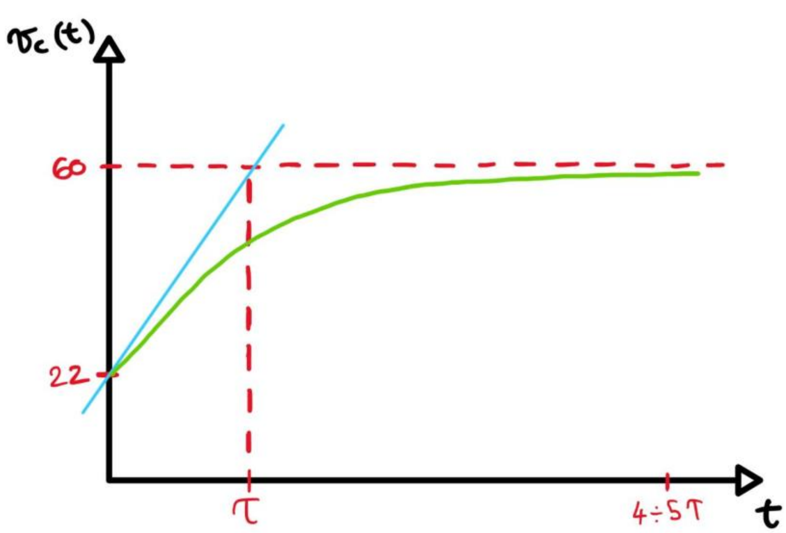
$$v_C(t) = k \cdot e^{-50t} + 60 = -37{,}7 \cdot e^{-50t} + 60$$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$$\tau = R_2C = 0{,}02\ s$$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 22{,}3\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 60\ V$



16. Circuito RC

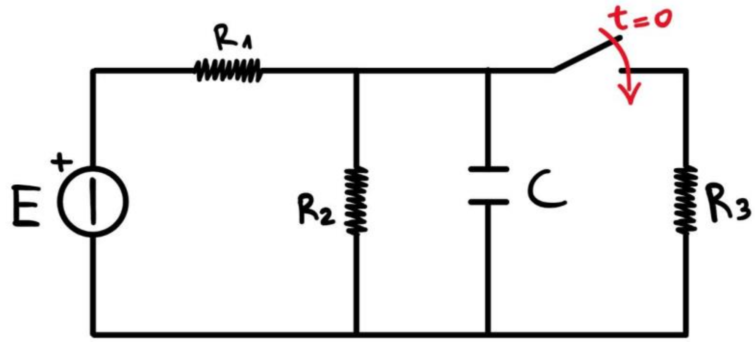
La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, determinare l'andamento di $v_C(t)$ per $t \geq 0$.

$E = 220\ V$

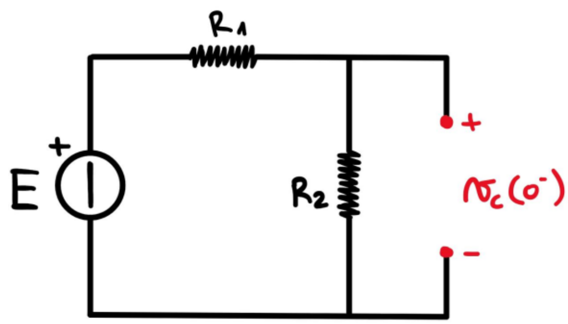
$C = 1\ \mu F$

$R_1 = R_3 = 1\ k\Omega$

$R_2 = 0{,}5\ k\Omega$



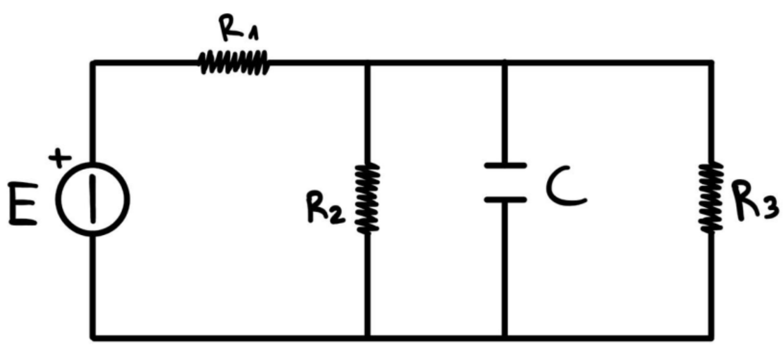
Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



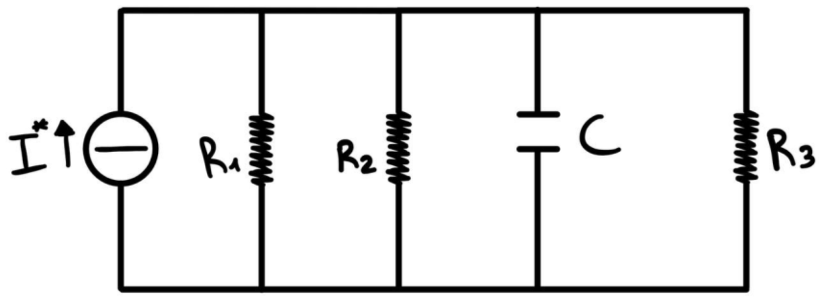
Si osservi che $v_C(0^-) = V_{R_2}$, dunque applichiamo il partitore di tensione:

$$v_C(0^-) = V_{R_2} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 220 \cdot \frac{0{,}5}{1 + 0{,}5} \cong 73{,}3\ V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un cortocircuito. Dunque, il circuito assume questa forma:



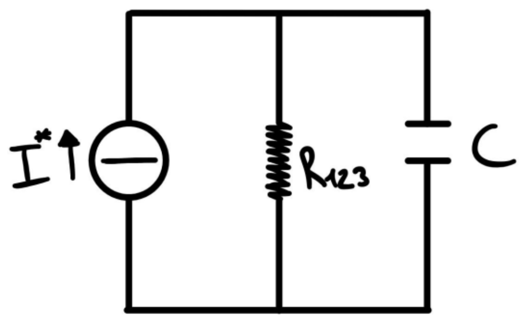
Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



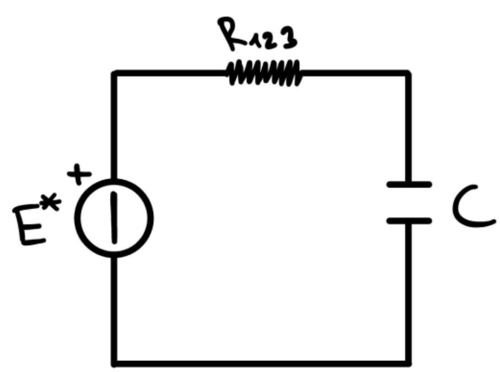
$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{220}{1000} = 0{,}22\ A$$

Si osservi che R_1, R_2 ed R_3 sono in parallelo, dunque:

$$R_{123} = R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ k\Omega = 250\ \Omega$$



Ritrasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:



$$E^* = I^* \cdot R_{eq} = 0{,}22 \cdot 250 = 55\ V$$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$$v_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_{R_{eq}}$$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_C = i_{R_{eq}} = i_{E^*}$

LKT) $E^* - v_{R_{eq}} - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_{R_{eq}} = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$$v_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_C$$

$$\Rightarrow v_C + R_{eq} \cdot i_C = E^*$$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$v_C + R_{eq}C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} v_C = \frac{1}{R_{eq}C} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{R_{eq}C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{R_{eq}C} = -\frac{1}{250 \cdot 0{,}000001} = -4000\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-4000t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$v_{cp}(t) = k'$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{k'}{R_{eq}C} = \frac{1}{R_{eq}C} \cdot E^*$$

$k' = E^* = 55\,V$

$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-4000t} + 55$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 73{,}3\,V$

$73{,}3 = k \cdot e^0 + 55 = k + 55$

$\Rightarrow k = 18{,}3$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

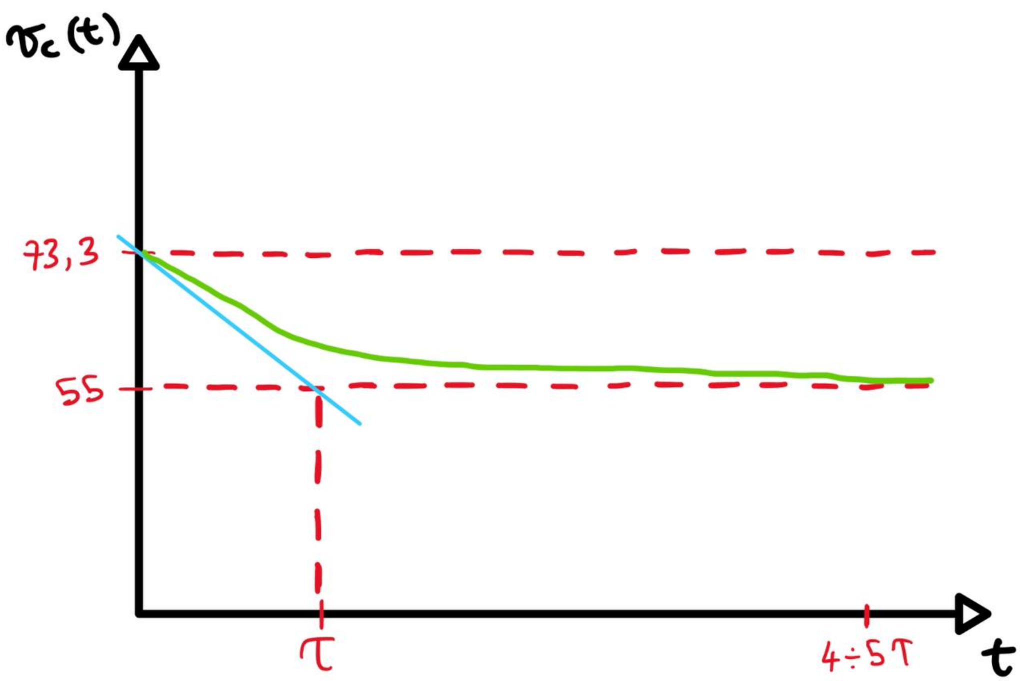
$v_C(t) = k \cdot e^{-4000t} + 55 = 18{,}3 \cdot e^{-4000t} + 55$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_{eq}C = 0{,}00025\,s$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 73{,}3\,V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 55\,V$



17. Circuito RL

La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, determinare l'andamento di $i_L(t)$ per $t \geq 0$.

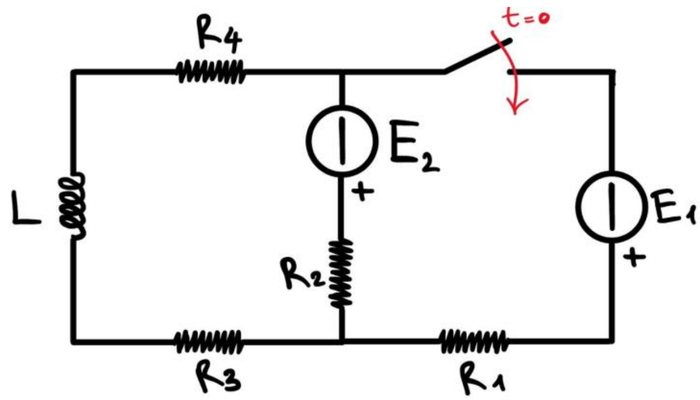
$E_1 = 30\ V$

$E_2 = 10\ V$

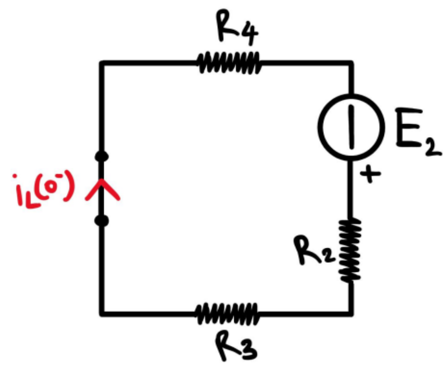
$L = 0{,}33\ H$

$R_1 = R_3 = R_4 = 3\ \Omega$

$R_2 = 6\ \Omega$



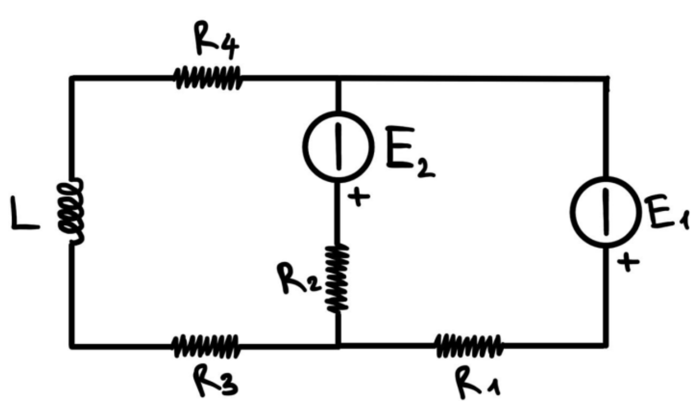
Per $t < 0$ l'induttore è carico, dunque si comporta da corto circuito e il circuito equivalente risulta il seguente:



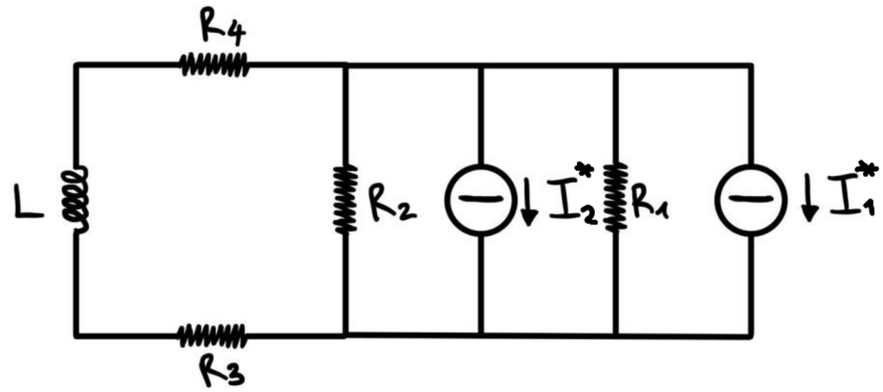
Calcoliamo la condizione iniziale:

$$i_L(0^-) = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{10}{12} \cong 0{,}83\ A$$

Per $t \geq 0$ l'induttore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un cortocircuito. Dunque, il circuito assume questa forma:



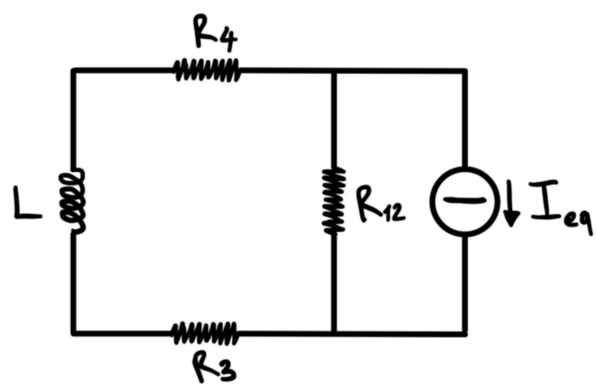
Trasformiamo i due generatori di tensione in generatori di corrente:



$$I_1^* = \frac{E_1}{R_1} = \frac{30}{3} = 10\ A$$

$$I_2^* = \frac{E_2}{R_2} = \frac{10}{6} \cong 1{,}67\ A$$

Si osservi che I_1 e I_2, così come R_1 e R_2, sono in parallelo, dunque:



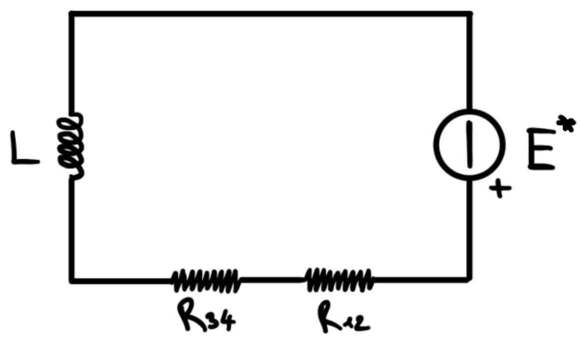
$$I_{eq} = I_1^* + I_2^* = 10 + 1{,}67 = 11{,}67\ A$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2\ \Omega$$

Si osservi che R_3 ed R_4 sono in serie, dunque:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 3 + 3 = 6\ \Omega$$

Trasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:

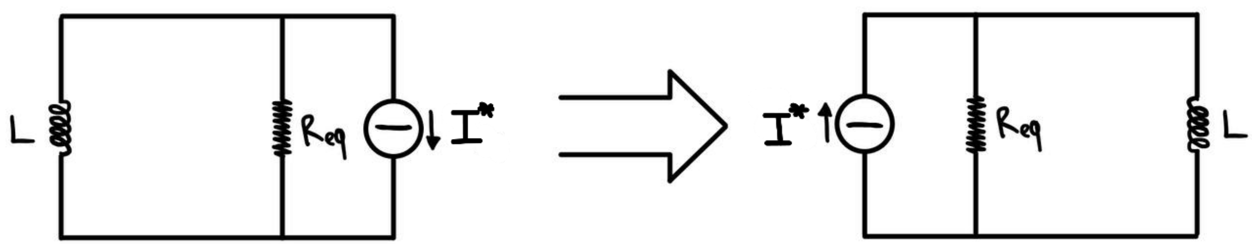


$E^* = I_{eq}R_{12} = 11{,}67 \cdot 2 \cong 23{,}3\ V$

Si osservi infine che R_{34} ed R_{12} sono in serie, dunque:

$R_{eq} = R_{12} + R_{34} = 2 + 6 = 8\ \Omega$

Ritrasformando il generatore di tensione in generatore di corrente:



$I^* = \dfrac{E^*}{R_{eq}} = \dfrac{23{,}3}{8} \cong 2{,}9\ A$

Scriviamo le equazioni costitutive del circuito:

$$i_{R_{eq}} = \frac{V_{R_{eq}}}{R_{eq}}$$

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v_L(t)\, dt$$

Applichiamo LKI ed LKT:

LKT) $v_{I^*} = v_{R_{eq}} = v_L$

LKI) $i_{R_{eq}} + i_L = I^*$

Ricaviamo l'equazione differenziale:

$$i_{R_{eq}} = \frac{V_{R_{eq}}}{R_{eq}} = \frac{v_L}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_L}{R_{eq}} + i_L = I^*$$

Ma $v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$:

$$\frac{L}{R_{eq}} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L = I^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot i_L = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^*$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$i_L(t) = i_{lh}(t) + i_{lp}(t)$$

Ricaviamo l'omogenea associata:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot i_L = 0$$

La soluzione dell'omogenea associata è del tipo:

$$i_{lh}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Determiniamo S_0, ovvero la frequenza naturale del circuito, sostituendo la precedente soluzione nell'omogenea associata:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + k \cdot S_0 e^{S_0 t} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t} = 0$$

$$k \cdot S_0 e^{S_0 t} = -\frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t}$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{R_{eq}}{L} = -\frac{8}{0{,}33} \cong -24{,}2\ Hz$$

$$\Rightarrow i_{lh}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-24{,}2t}$$

Determiniamo l'integrale particolare $i_{lp}(t)$. Esso ha la stessa forma dell'ingresso, il quale nel nostro caso corrisponde al generatore (che è costante). Dunque, anche $i_{lp}(t)$ è costante e lo indichiamo nel seguente modo:

$$i_{lp}(t) = k'$$

Troviamo $i_{lp}(t)$ sostituendo la precedente nell'equazione differenziale di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k' = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^*$$

$$\frac{R_{eq}}{L} \cdot k' = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^*$$

$$\Rightarrow k' = I^*$$

$$\Rightarrow i_{lp}(t) = k' = I^* = 2{,}9\ A$$

Sostituendo nella soluzione dell'equazione differenziale:

$$i_L(t) = i_{lh}(t) + i_{lp}(t) = k \cdot e^{-24{,}2t} + 2{,}9$$

Determiniamo k imponendo la condizione iniziale:

$$i_L(0) = I_0 = k \cdot e^0 + 2{,}9$$

$$0{,}83 = k + 2{,}9$$

$$\Rightarrow k = -2{,}07$$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

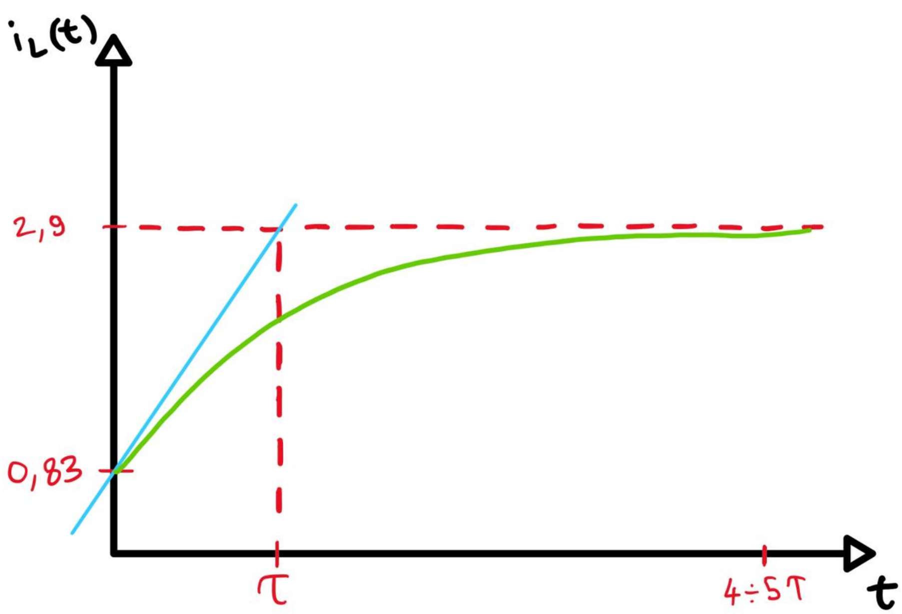
$$i_L(t) = k \cdot e^{-24{,}2t} + 2{,}9 = -2{,}07 \cdot e^{-24{,}2t} + 2{,}9$$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R_{eq}}{L} \Rightarrow \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0{,}33}{8} \cong 0{,}04\ s$$

Per $t \to 0 \Rightarrow i_L(0) = 0{,}83\ A$

Per $t \to \infty \Rightarrow i_L(\infty) = 2{,}9\ A$



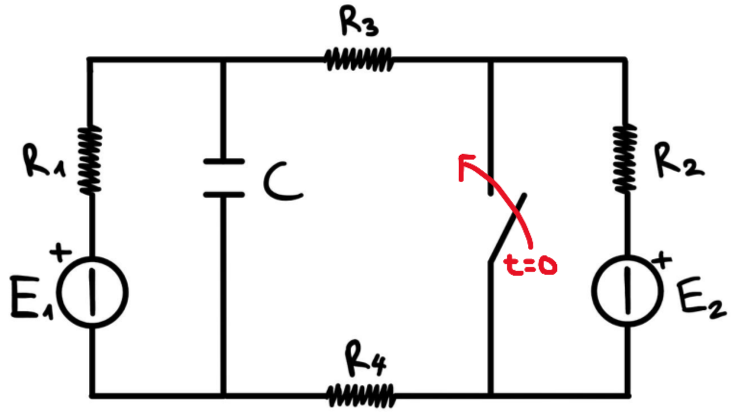
18. Circuito RC

La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto aperto. All'istante $t = 0$ l'interruttore si chiude, determinare l'andamento di $v_C(t)$ per $t \geq 0$.

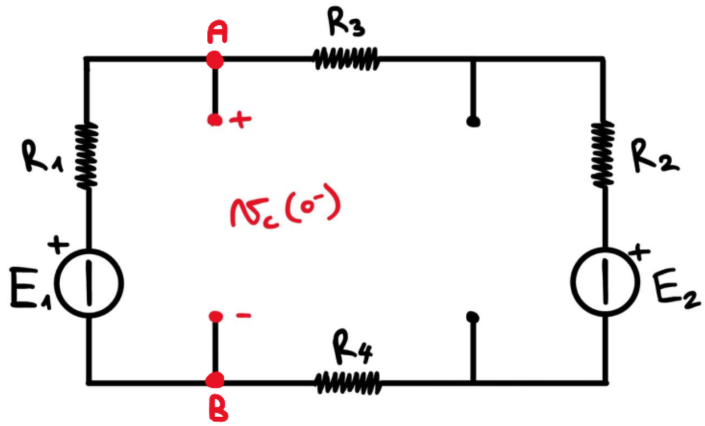
$E_1 = 30\,V$ $\quad R_1 = R_2 = 50\,\Omega$

$E_2 = 20\,V$ $\quad R_3 = 40\,\Omega$

$C = 2\,F$ $\quad R_4 = 60\,\Omega$



Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



Possiamo calcolare $v_C(0^-)$ utilizzando Millmann oppure applicando la LKT:

$$v_C(0^-) = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{\frac{30}{50} + \frac{20}{50 + 40 + 60}}{\frac{1}{50} + \frac{1}{50 + 40 + 60}} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{15}}{\frac{2}{75}} = \frac{11}{15} \cdot \frac{75}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5\,V$$

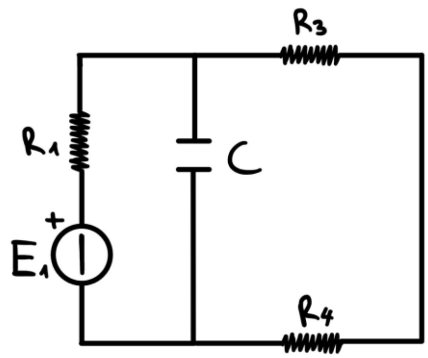
Se invece applichiamo la LKT:

$$E_1 - R_1 i - V_{AB} = 0$$

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{30 - 20}{50 + 50 + 40 + 60} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05\,A$$

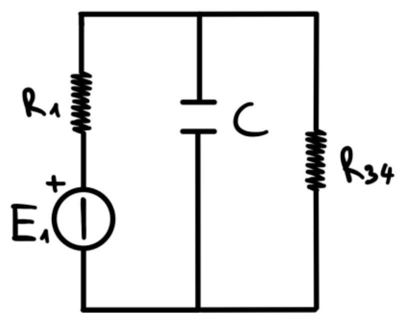
$$\Rightarrow V_{AB} = E_1 - R_1 i = 30 - 50 \cdot 0{,}05 = 30 - 2{,}5 = 27{,}5\,V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un cortocircuito. Dunque, il circuito assume questa forma:

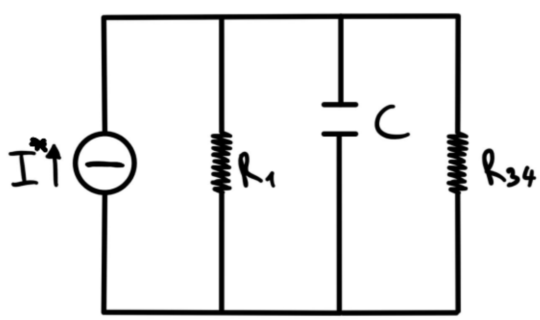


Si osservi che R_3 ed R_4 sono in serie, dunque:

$R_{34} = R_3 + R_4 = 40 + 60 = 100\ \Omega$

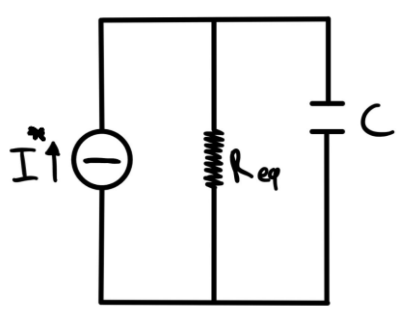


Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



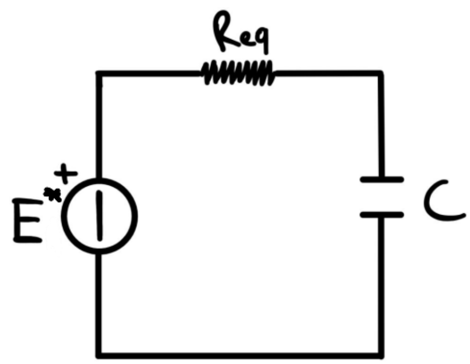
$I^* = \dfrac{E_1}{R_1} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6\ A$

Si osservi che R_1 ed R_{34} sono in parallelo, dunque:



$$R_{eq} = \frac{R_1 R_{34}}{R_1 + R_{34}} = \frac{50 \cdot 100}{50 + 100} = \frac{5000}{150} = \frac{100}{3} \cong 33{,}3\ \Omega$$

Ritrasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:



$$E^* = I^* \cdot R_{eq} = 0{,}6 \cdot 33{,}3 \cong 20\ V$$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$$v_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_{R_{eq}}$$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_C = i_{R_{eq}} = i_{E^*}$

LKT) $E^* - v_{R_{eq}} - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_{R_{eq}} = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$$v_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_{R_{eq}} = R_{eq} \cdot i_C$$

$$\Rightarrow v_C + R_{eq} \cdot i_C = E^*$$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$v_C + R_{eq} C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} v_C = \frac{1}{R_{eq}C} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{R_{eq}C} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{R_{eq}C} = -\frac{1}{33{,}3 \cdot 2} = -0{,}015\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-0{,}015t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$v_{cp}(t) = k'$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{k'}{R_{eq}C} = \frac{1}{R_{eq}C} \cdot E^*$$

$k' = E^* = 20\ V$

$$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-0{,}015t} + 20$$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 27{,}5\ V$

$27{,}5 = k \cdot e^0 + 20 = k + 20$

$\Rightarrow k = 7{,}5$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

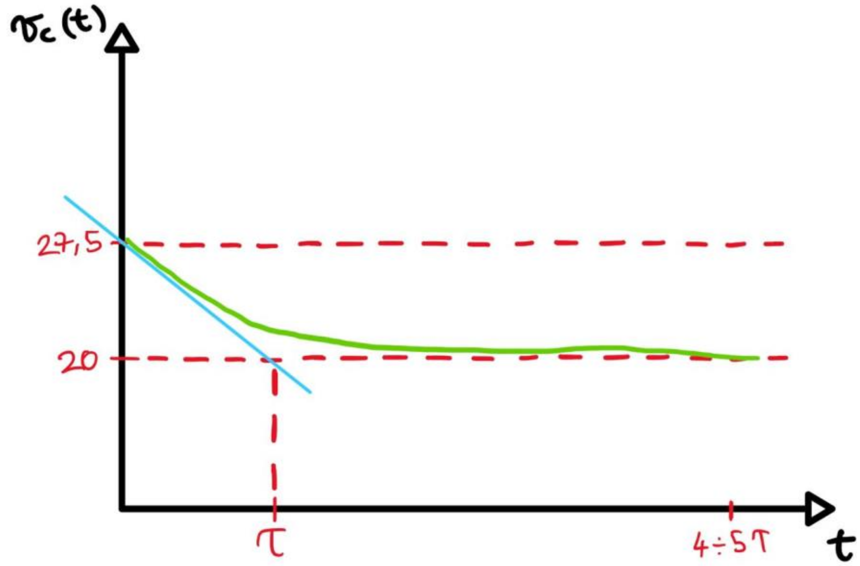
$$v_C(t) = k \cdot e^{-0{,}015t} + 20 = 7{,}5 \cdot e^{-0{,}015t} + 20$$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_{eq}C = 66{,}6\ s$

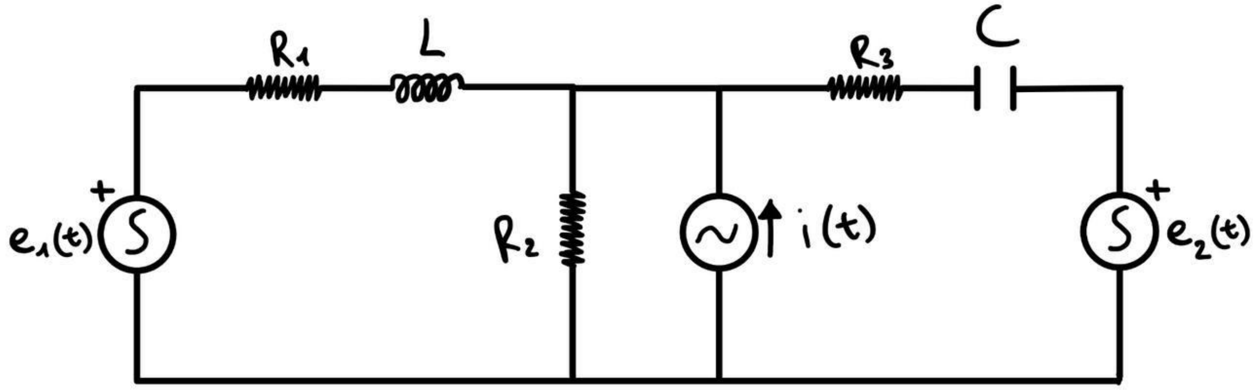
Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 27{,}5\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 20\ V$



19. Bilancio delle potenze in regime sinusoidale

Si effettui il bilancio delle potenze attive e reattive nel seguente circuito:



$e_1(t) = 8{,}5\cos(\omega t + 30)$ $\quad R_1 = 3\,\Omega \quad \omega = 2\,rad/s$

$e_2(t) = 11{,}3\cos(\omega t - 15)$ $\quad R_2 = 5\,\Omega \quad C = 83\,mF$

$i(t) = 2{,}85\cos(\omega t + 65)$ $\quad R_3 = 4\,\Omega \quad L = 2\,H$

Scriviamo innanzitutto i fasori associati alle sinusoidi date:

$\dot{E}_1 = 8{,}5 \cdot e^{j30}$

$\dot{E}_2 = 11{,}3 \cdot e^{-j15}$

$\dot{I} = 2{,}85 \cdot e^{j65}$

Esprimiamo i precedenti valori in termini di valori efficaci:

$$\dot{E}_1 = \frac{8{,}5}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30} \cong 6 \cdot e^{j30}$$

$$\dot{E}_2 = \frac{11{,}3}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j15} \cong 8 \cdot e^{-j15}$$

$$\dot{I} = \frac{2{,}85}{\sqrt{2}} \cdot e^{j65} \cong 2 \cdot e^{j65}$$

Portiamo le espressioni dei generatori dalla forma polare alla forma cartesiana:

$\dot{E}_1 = 6 \cdot e^{j30} = 6\cos(30^\circ) + 6j\sin(30^\circ) \cong 5{,}2 + 3j\ V$

$\dot{E}_2 = 8 \cdot e^{-j15} = 8\cos(-15^\circ) + 8j\sin(-15^\circ) \cong 7{,}7 - 2{,}1j\ V$

$\dot{I} = 2 \cdot e^{j65} = 2\cos(65^\circ) + 2j\sin(65^\circ) \cong 0{,}8 + 1{,}8j\ A$

Calcoliamo le impedenze:

$Z_{R_1} = R_1 = 3\ \Omega$

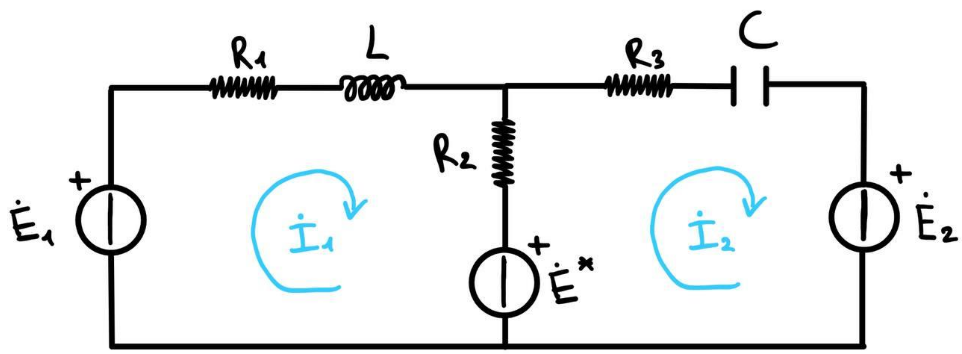
$Z_{R_2} = R_2 = 5\ \Omega$

$Z_{R_3} = R_3 = 4\ \Omega$

$Z_L = j\omega L = 4j\ \Omega$

$Z_C = -\dfrac{j}{\omega C} = -\dfrac{j}{2 \cdot 0{,}083} \cong -6j\ \Omega$

Trasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:



$\dot{E}^* = Z_{R_2} \cdot \dot{I} = 5 \cdot (0{,}8 + 1{,}8j\ ) = 4 + 9j\ V$

Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare le correnti che scorrono nelle impedenze:

$$\begin{cases} \dot{E}_1 - \dot{E}^* = \dot{I}_1\left(Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2}\right) - \dot{I}_2(Z_{R_2}) \\ \dot{E}^* - \dot{E}_2 = \dot{I}_2\left(Z_{R_2} + Z_{R_3} + Z_C\right) - \dot{I}_1(Z_{R_2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5{,}2 + 3j - 4 - 9j = \dot{I}_1(3 + 4j + 5) - 5\dot{I}_2 \\ 4 + 9j - 7{,}7 + 2{,}1j = \dot{I}_2(5 + 4 - 6j) - 5\dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}2 - 6j = \dot{I}_1(8 + 4j) - 5\dot{I}_2 \\ -3{,}7 + 11{,}1j = \dot{I}_2(9 - 6j) - 5\dot{I}_1 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1{,}2 - 6j \\ -3{,}7 + 11{,}1j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 + 4j & -5 \\ -5 & 9 - 6j \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (8 + 4j) \cdot (9 - 6j) - 5 \cdot 5 = 72 - 48j + 36j + 24 - 25 = 71 - 12j$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1{,}2 - 6j & -5 \\ -3{,}7 + 11{,}1j & 9 - 6j \end{vmatrix}}{71 - 12j} = \frac{(1{,}2 - 6j) \cdot (9 - 6j) - [(-3{,}7 + 11{,}1j) \cdot (-5)]}{71 - 12j} =$$

$$= \frac{10{,}8 - 7{,}2j - 54j - 36 - 18{,}5 + 55{,}5j}{71 - 12j} = \frac{-43{,}7 - 5{,}7j}{71 - 12j} = \frac{-43{,}7 - 5{,}7j}{71 - 12j} \cdot \frac{71 + 12j}{71 + 12j} =$$

$$= \frac{-3012{,}7 - 524{,}4j - 404{,}7j + 68{,}4}{5041 + 144} = -\frac{2944{,}3}{5185} - \frac{929{,}1}{5185}j \cong -0{,}57 - 0{,}18j\ A$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 + 4j & 1{,}2 - 6j \\ -5 & -3{,}7 + 11{,}1j \end{vmatrix}}{71 - 12j} = \frac{(8 + 4j) \cdot (-3{,}7 + 11{,}1j) - [(-5) \cdot (1{,}2 - 6j)]}{71 - 12j} =$$

$$= \frac{-29{,}6 + 88{,}8j - 14{,}8j - 44{,}4 + 6 - 30j}{71 - 12j} = \frac{-68 + 44j}{71 - 12j} = \frac{-68 + 44j}{71 - 12j} \cdot \frac{71 + 12j}{71 + 12j} =$$

$$= \frac{-4828 - 816j + 3124j - 528}{5041 + 144} = -\frac{5356}{5185} + \frac{2308}{5185}j \cong -1 + 0{,}45j\ A$$

Calcoliamo i moduli di $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ e $(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)$:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -0{,}57 - 0{,}18j + 1 - 0{,}45j = 0{,}43 - 0{,}63j\ A$$

$$|\dot{I}_1| = \sqrt{(-0{,}57)^2 + (-0{,}18)^2} \cong 0{,}6\ A$$

$$|\dot{I}_2| = \sqrt{(-1)^2 + (0{,}45)^2} \cong 1{,}1\ A$$

$$|\dot{I}_1 - \dot{I}_2| = \sqrt{(0{,}43)^2 + (-0{,}63)^2} \cong 0{,}8\ A$$

Calcoliamo le potenze attive e reattive dissipate da tutte le impedenze:

$$P_{Z_{R_1}} = Re[Z_{R_1}] \cdot |\dot{I}_1|^2 = 3 \cdot (0{,}6)^2 = 1{,}08\ W$$

$$Q_{Z_{R_1}} = Im[Z_{R_1}] \cdot |\dot{I}_1|^2 = 0 \cdot (0{,}6)^2 = 0\ VAR$$

$$P_{Z_{R_2}} = Re[Z_{R_2}] \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2|^2 = 5 \cdot (0{,}8)^2 = 3{,}2\ W$$

$$Q_{Z_{R_2}} = Im[Z_{R_2}] \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2|^2 = 0 \cdot (0{,}8)^2 = 0\ VAR$$

$$P_{Z_{R_3}} = Re[Z_{R_3}] \cdot |\dot{I}_2|^2 = 4 \cdot (1{,}1)^2 = 4{,}84\ W$$

$$Q_{Z_{R_3}} = Im[Z_{R_3}] \cdot |\dot{I}_2|^2 = 0 \cdot (1{,}1)^2 = 0\ VAR$$

$$P_{Z_L} = Re[Z_L] \cdot |\dot{I}_1|^2 = 0 \cdot (0{,}6)^2 = 0\ W$$

$$Q_{Z_L} = Im[Z_L] \cdot |\dot{I}_1|^2 = 4 \cdot (0{,}6)^2 = 1{,}44\ VAR$$

$$P_{Z_C} = Re[Z_C] \cdot |\dot{I}_2|^2 = 0 \cdot (1{,}1)^2 = 0\ W$$

$$Q_{Z_C} = Im[Z_C] \cdot |\dot{I}_2|^2 = -6 \cdot (1{,}1)^2 = -7{,}26\ VAR$$

Calcoliamo la fase della tensione e della corrente per ognuno dei tre generatori:

$$\theta_{\dot{E}_1} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5,2}\right) = 29,98^\circ$$

$$\theta_{\dot{I}_1} = \tan^{-1}\left(\frac{-0,18}{-0,57}\right) = 17,53^\circ + 180^\circ = 197,53^\circ$$

$$\theta_{\dot{E}_2} = \tan^{-1}\left(\frac{-2,1}{7,7}\right) = -15,26^\circ$$

$$\theta_{\dot{I}_2} = \tan^{-1}\left(\frac{0,45}{-1}\right) = -24,23^\circ + 180^\circ = 155,77^\circ$$

$$\theta_{\dot{E}^*} = \tan^{-1}\left(\frac{9}{4}\right) = 66,04^\circ$$

$$\theta_{(\dot{I}_1-\dot{I}_2)} = \tan^{-1}\left(\frac{-0,63}{0,43}\right) = -55,68^\circ$$

Adesso calcoliamo i moduli di $\dot{E}_1, \dot{E}_2$ ed $\dot{E}^*$:

$$|\dot{E}_1| = \sqrt{(5,2)^2 + (3)^2} \cong 6\,V$$

$$|\dot{E}_2| = \sqrt{(7,7)^2 + (-2,1)^2} \cong 8\,V$$

$$|\dot{E}^*| = \sqrt{(4)^2 + (9)^2} = \sqrt{32} = 9,85\,V$$

Calcoliamo adesso le potenze attive e reattive generate da $\dot{E}_1, \dot{E}_2$ ed $\dot{E}^*$.

$$P_{\dot{E}_1} = |\dot{E}_1| \cdot |\dot{I}_1| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}_1| \cdot |\dot{I}_1| \cdot \cos\left(\theta_{\dot{E}_1} - \theta_{\dot{I}_1}\right) =$$

$$= 6 \cdot 0,6 \cdot \cos(29,98^\circ - 197,53^\circ) = 3,6 \cdot (-0,98) \cong -3,53\,W$$

$$Q_{\dot{E}_1} = |\dot{E}_1| \cdot |\dot{I}_1| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}_1| \cdot |\dot{I}_1| \cdot \sin\left(\theta_{\dot{E}_1} - \theta_{\dot{I}_1}\right) = 6 \cdot 0,6 \cdot \sin(29,98^\circ - 197,53^\circ) =$$

$$= 3,6 \cdot (-0,22) \cong -0,79\,VAR$$

$$P_{\dot{E}_2} = |\dot{E}_2| \cdot |\dot{I}_2| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}_2| \cdot |\dot{I}_2| \cdot \cos\left(\theta_{\dot{E}_2} - \theta_{\dot{I}_2}\right) =$$

$$= 8 \cdot 1,1 \cdot \cos(-15,26^\circ - 155,77^\circ) = 8,8 \cdot (-0,99) \cong -8,71\,W$$

$$Q_{\dot{E}_2} = |\dot{E}_2| \cdot |\dot{I}_2| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}_2| \cdot |\dot{I}_2| \cdot \sin\left(\theta_{\dot{E}_2} - \theta_{\dot{I}_2}\right) = 8 \cdot 1,1 \cdot \sin(-15,26^\circ - 155,77^\circ) =$$

$$= 8,8 \cdot (-0,16) \cong -1,41\,VAR$$

$$P_{\dot{E}^*} = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2| \cdot \cos\left(\theta_{\dot{E}^*} - \theta_{(\dot{I}_1-\dot{I}_2)}\right) =$$

$$= 9,85 \cdot 0,8 \cdot \cos(66,04^\circ + 55,68^\circ) = 7,88 \cdot (-0,53) \cong -4,18\,W$$

$Q_{\dot{E}^*} = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}_1 - \dot{I}_2| \cdot \sin\left(\theta_{\dot{E}^*} - \theta_{(\dot{I}_1 - \dot{I}_2)}\right) =$

$= 9{,}85 \cdot 0{,}8 \cdot \sin(66{,}04^{\circ} + 55{,}68^{\circ}) \cong 7{,}88 \cdot (0{,}85) \cong 6{,}7\,VAR$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di $\dot{E}^*$e $\dot{E}_2$, per la convenzione degli utilizzatori:

$P_{\dot{E}_2} = 8{,}71\,W$

$Q_{\dot{E}_2} = 1{,}41\,VAR$

$P_{\dot{E}^*} = 4{,}18\,W$

$Q_{\dot{E}^*} = -6{,}7\,VAR$

Effettuiamo il bilancio delle potenze attive dissipate e generate:

$P_{Z_{R_1}} + P_{Z_{R_2}} + P_{Z_{R_3}} + P_{Z_L} + P_{Z_C} = P_{\dot{E}_1} + P_{\dot{E}_2} + P_{\dot{E}^*}$

$1{,}08 + 3{,}2 + 4{,}84 + 0 + 0 = -3{,}53 + 8{,}71 + 4{,}18$

$9{,}12\,W \cong 9{,}36\,W$

Il bilancio delle potenze attive è verificato.

Effettuiamo il bilancio delle potenze reattive dissipate e generate:

$Q_{Z_{R_1}} + Q_{Z_{R_2}} + Q_{Z_{R_3}} + Q_{Z_L} + Q_{Z_C} = Q_{\dot{E}_1} + Q_{\dot{E}_2} + Q_{\dot{E}^*}$

$0 + 0 + 0 + 1{,}44 - 7{,}26 = -0{,}79 + 1{,}41 - 6{,}7$

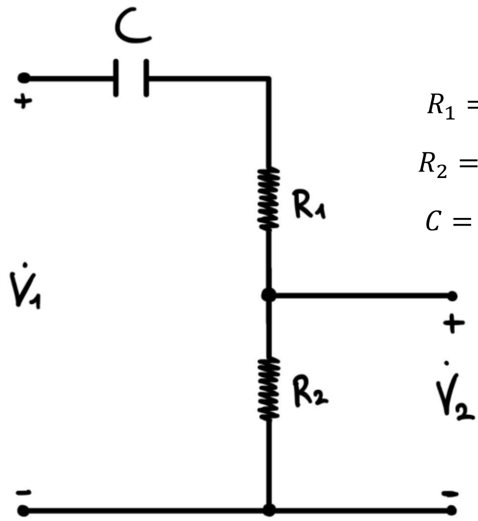
$-5{,}82\,VAR \cong -6{,}08\,VAR$

Il bilancio delle potenze reattive è verificato.

L'esercizio poteva essere risolto in meno passaggi calcolando le impedenze in serie. Tuttavia, si è voluto procedere in questo modo al fine di esercitare il calcolo con i numeri complessi.

20. Risposta in frequenza

Determinare la funzione di trasferimento $H(j\omega)$ e la risposta in frequenza del seguente circuito.



$R_1 = 5\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$C = 1\ nF$

Si definisce funzione di rete il rapporto tra il fasore della grandezza di uscita e il fasore della grandezza di ingresso:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_2}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_2} \cdot \dot{I}_{R_2} = Z_{R_2} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_C + Z_{R_1} + Z_{R_2}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_2}}{Z_C + Z_{R_1} + Z_{R_2}} = \frac{R_2}{-\frac{j}{\omega C} + R_1 + R_2} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) - \frac{1}{\omega C} j}$$

Calcoliamo il modulo della funzione di rete:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{R_2^2 + 0^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty}|H(j\omega)| = \lim_{\omega\to\infty}\frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}} = \frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{10}{5+10} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67$$

Calcoliamo la fase della funzione di rete:

$$\angle H(j\omega) = \angle\frac{R_2}{-\frac{j}{\omega C}+R_1+R_2} = \tan^{-1}\frac{0}{R_2} - \tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2} = 0 - \tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega\to 0}\angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0}\left(-\tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\left(-\tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_1+R_2}\right) = 0$$

Determiniamo il valore della frequenza di taglio:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+\frac{1}{\omega_T^2C^2}}} = \frac{0{,}67}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2+\frac{1}{\omega_T^2C^2}} = \frac{0{,}45}{2}$$

$$\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2+\frac{1}{\omega_T^2C^2}} = 0{,}225$$

$$R_2^2 = 0{,}225\cdot\left[(R_1+R_2)^2+\frac{1}{\omega_T^2C^2}\right]$$

$$100 = 0{,}225\cdot\left[225+\frac{1}{1\cdot 10^{-18}\omega_T^2}\right]$$

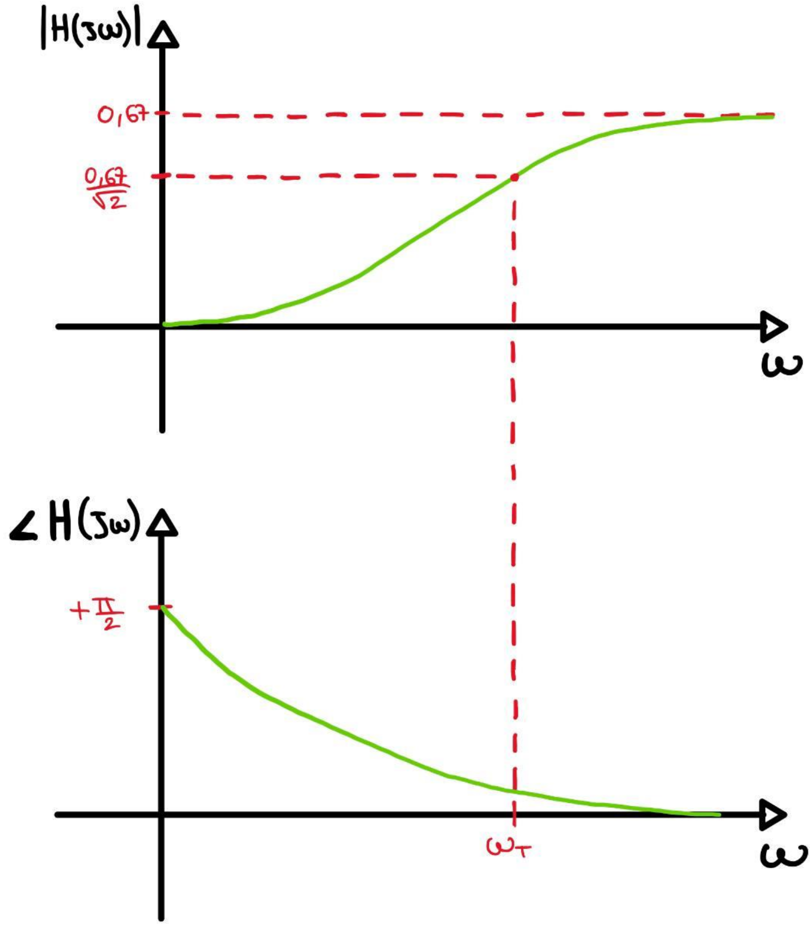
$$100 = 50{,}625+\frac{0{,}225}{1\cdot 10^{-18}\omega_T^2}$$

$$\frac{49{,}375 \cdot 1 \cdot 10^{-18}}{0{,}225} = \frac{1}{\omega_T^2}$$

$$\omega_T^2 = \frac{0{,}225}{49{,}375 \cdot 1 \cdot 10^{-18}} = 4{,}556962025 \cdot 10^{15}$$

$$\omega_T = \sqrt{4{,}556962025 \cdot 10^{15}} \cong 0{,}06 \cdot 10^9\ rad/s$$

Tracciamo gli andamenti qualitativi:



21. Matrice dei parametri di impedenza

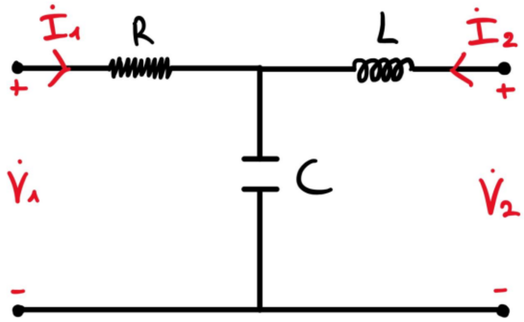
Per il doppio bipolo in figura, determinare la matrice dei parametri di impedenza $[Z]$.

$R = 10\,\Omega$

$L = 300\,mH$

$C = 2\,mF$

$\omega = 20\,rad/s$

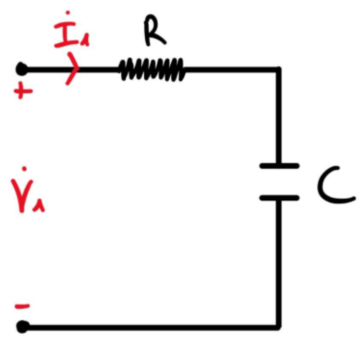


Si applica la LKT ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

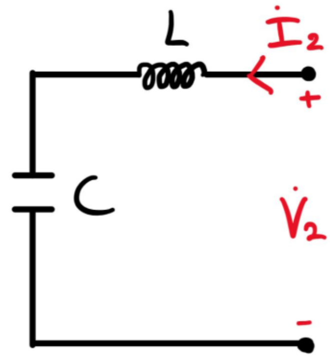
Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_C)$$

Dunque, risulta:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot (Z_R + Z_C)}{\dot{I}_1} = Z_R + Z_C = R - \frac{j}{\omega C} = 10 - \frac{j}{20 \cdot 0{,}002} = 10 - 25j\,\Omega$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di impedenza Z_{12}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_2 Z_{12}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_2$:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_{Z_C} = Z_C \cdot \dot{I}_C = Z_C \cdot \dot{I}_2$$

Dunque, risulta:

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} = \frac{Z_C \cdot \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{20 \cdot 0{,}002} = -25j\ \Omega$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di impedenza Z_{21}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21}$ e il circuito è analogo al primo. Ne consegue che:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_C = Z_C \cdot \dot{I}_C = Z_C \cdot \dot{I}_1$$

Dunque, risulta:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_C \cdot \dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{20 \cdot 0{,}002} = -25j\ \Omega$$

Si vuole infine calcolare il parametro di impedenza Z_{22}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_2 Z_{22}$ e il circuito è analogo al secondo. Ne consegue che:

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_2$:

$\dot{V}_2 = \dot{I}_2 \cdot (Z_L + Z_C)$

Dunque, risulta:

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_2 \cdot (Z_L + Z_C)}{\dot{I}_2} = Z_L + Z_C = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = (20 \cdot 0{,}3)j - \frac{j}{20 \cdot 0{,}002} = 6j - 25j =$$

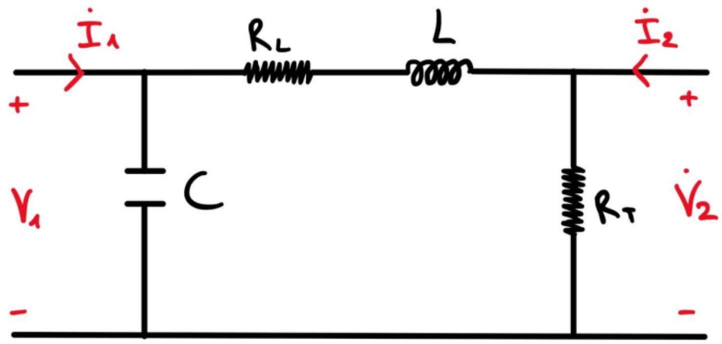
$$= -19j\ \Omega$$

La matrice dei parametri di impedenza è la seguente:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 25j & -25j \\ -25j & -19j \end{bmatrix}$$

22. Matrice dei parametri di trasmissione

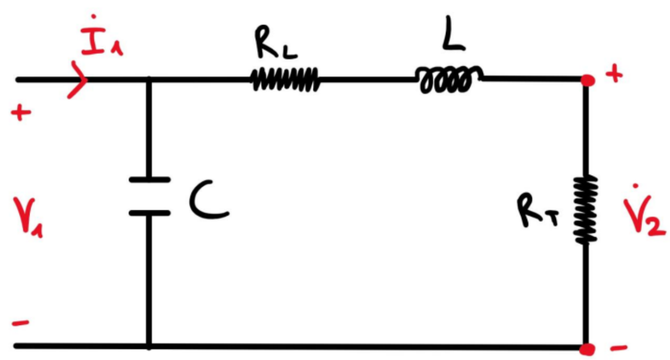
Per il doppio bipolo in figura, determinare la matrice dei parametri di trasmissione $[T]$.



Scriviamo le relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A \cdot \dot{V}_2 + B \cdot (-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 = C \cdot \dot{V}_2 + D \cdot (-\dot{I}_2) \end{cases}$$

Si vuole in primis calcolare il parametro di trasmissione A, dunque consideriamo la prima delle due equazioni precedenti. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = A \cdot \dot{V}_2$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$A = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$$

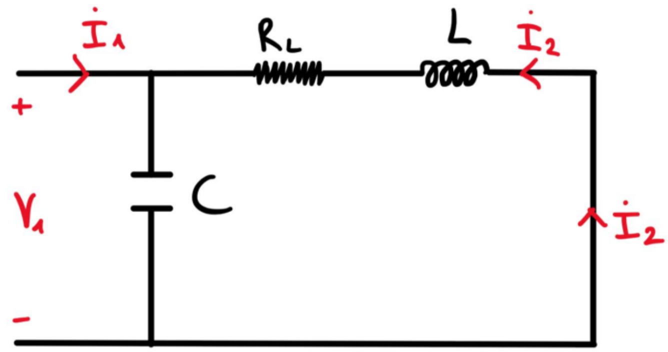
Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{V}_1$:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{Z_{R_T}} = Z_{R_T} \cdot \dot{I}_{R_T} = Z_{R_T} \cdot \frac{V_1}{Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}$$

Dunque, risulta:

$$A = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}{Z_{R_T}}$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di trasmissione B, dunque consideriamo la prima delle due equazioni costitutive. Per $\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = B \cdot (-\dot{I}_2)$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$B = \frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{I}_2$ in funzione di $\dot{V}_1$:

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{V}_1}{Z_{R_L} + Z_L}$$

Dunque, risulta:

$$B = \frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_2} = Z_{R_L} + Z_L$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di trasmissione C, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni costitutive. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = C \cdot \dot{V}_2$ e il circuito è pari al primo ricavato sopra. Ne consegue che:

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_{R_T} = Z_{R_T} \cdot \dot{I}_{R_T} = Z_{R_T} \cdot \dot{I}_1 \cdot \frac{Z_C}{Z_C + Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}$$

Dunque, risulta:

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} = \frac{Z_C + Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}{Z_{R_T} \cdot Z_C}$$

Si vuole infine calcolare il parametro di trasmissione D, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni costitutive. Per $\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = D \cdot (-\dot{I}_2)$ e il circuito è pari al secondo ricavato sopra. Ne consegue che:

$$D = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{I}_2$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \cdot \frac{Z_C}{Z_{R_L} + Z_L + Z_C}$$

Dunque, risulta:

$$D = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} = \frac{Z_{R_L} + Z_L + Z_C}{Z_C}$$

La matrice dei parametri di trasmissione è la seguente:

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}{Z_{R_T}} & Z_{R_L} + Z_L \\ \dfrac{Z_C + Z_{R_L} + Z_L + Z_{R_T}}{Z_{R_T} \cdot Z_C} & \dfrac{Z_{R_L} + Z_L + Z_C}{Z_C} \end{bmatrix}$$

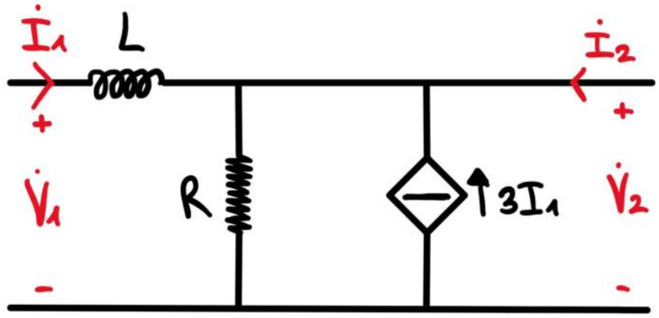
23. Matrice dei parametri di impedenza con gen. pilotato

Per il doppio bipolo in figura, determinare la matrice dei parametri di impedenza $[Z]$.

$R = 2\,\Omega$

$L = 5\,H$

$\omega = 2\,rad/s$

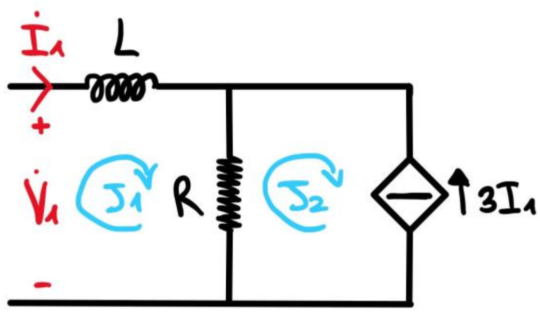


Si applica la LKT ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12}$

$\dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21} + \dot{I}_2 Z_{22}$

Si vuole calcolare il parametro di impedenza Z_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_1 Z_{11}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}$$

Calcoliamo $\dot{V}_1$ con il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j_1 \cdot (Z_L + Z_R) - j_2 Z_R \\ j_2 = -3\dot{I}_1 \end{cases}$$

Ma $j_1 = \dot{I}_1$, dunque:

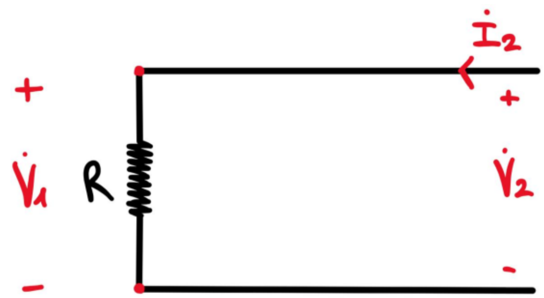
$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_L + Z_R) + 3\dot{I}_1 Z_R \\ j_2 = -3\dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \dot{I}_1 \cdot (Z_L + 4Z_R) \\ j_2 = -3\dot{I}_1 \end{cases}$$

Dunque, risulta:

$$Z_{11} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot (Z_L + 4Z_R)}{\dot{I}_1} = Z_L + 4Z_R = j\omega L + 4R = 8 + 10j\ \Omega$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di impedenza Z_{12}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_1 = \dot{I}_2 Z_{12}$ e il circuito diventa:



Ne consegue che:

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_1$ in funzione di $\dot{I}_2$:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_R = Z_R \cdot \dot{I}_R = Z_R \cdot \dot{I}_2$$

Dunque, risulta:

$$Z_{12} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} = \frac{Z_R \cdot \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_R = R = 2\ \Omega$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di impedenza Z_{21}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_2 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_1 Z_{21}$ e il circuito è analogo al primo. Ne consegue che:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_1$:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_R = Z_R \cdot \dot{I}_R = Z_R \cdot \left(\dot{I}_1 + 3\dot{I}_1\right) = Z_R \cdot 4\dot{I}_1$$

Dunque, risulta:

$$Z_{21} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} = \frac{Z_R \cdot 4\dot{I}_1}{\dot{I}_1} = Z_R \cdot 4 = R \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8\ \Omega$$

Si vuole infine calcolare il parametro di impedenza Z_{22}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKT. Per $\dot{I}_1 = 0 \Rightarrow \dot{V}_2 = \dot{I}_2 Z_{22}$ e il circuito è analogo al secondo. Ne consegue che:

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2}$$

Calcoliamo $\dot{V}_2$ in funzione di $\dot{I}_2$:

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 = \dot{V}_R = Z_R \cdot \dot{I}_R = Z_R \cdot \dot{I}_2$$

Dunque, risulta:

$$Z_{22} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} = \frac{Z_R \cdot \dot{I}_2}{\dot{I}_2} = Z_R = R = 2\ \Omega$$

La matrice dei parametri di impedenza è la seguente:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 10j & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

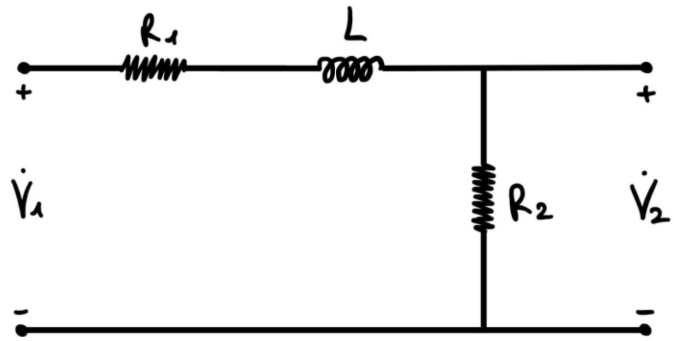
24. Risposta in frequenza

Determinare la funzione di trasferimento $H(j\omega)$ e la risposta in frequenza del seguente circuito.

$R_1 = 1\,\Omega$

$R_2 = 2\,\Omega$

$L = 10\,mH$



Si definisce funzione di rete il rapporto tra il fasore della grandezza di uscita e il fasore della grandezza di ingresso:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_2}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_2} \cdot \dot{I}_{R_2} = Z_{R_2} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_2}}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + j\omega L + R_2} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega L}$$

Calcoliamo il modulo della funzione di rete:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{R_2^2 + 0^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}} = 0$$

Calcoliamo la fase della funzione di rete:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{R_2}{(R_1 + R_2) + j\omega L} = \tan^{-1}\frac{0}{R_2} - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1 + R_2} = 0 - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1 + R_2}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega\to 0} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0}\left(-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2}\right) = 0$$

$$\lim_{\omega\to \infty} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to \infty}\left(-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Determiniamo il valore della frequenza di taglio:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+\omega_T^2L^2}} = \frac{0{,}67}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2+\omega_T^2L^2} = \frac{0{,}45}{2}$$

$$\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2+\omega_T^2L^2} = 0{,}225$$

$$R_2^2 = 0{,}225\cdot[(R_1+R_2)^2+\omega_T^2L^2]$$

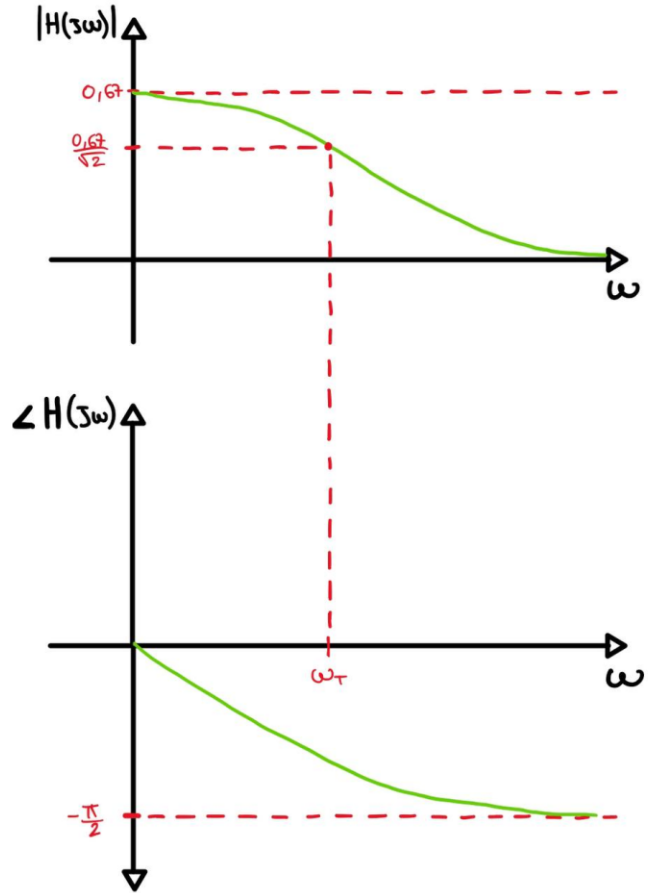
$$4 = 0{,}225\cdot[3+0{,}0001\omega_T^2]$$

$$4 = 0{,}675+2{,}25\cdot 10^{-5}\omega_T^2$$

$$\omega_T^2 = \frac{3{,}325}{2{,}25\cdot 10^{-5}} \cong 147777{,}77$$

$$\omega_T = \sqrt{147777{,}77} \cong 384{,}42\ rad/s$$

Tracciamo gli andamenti qualitativi:



|H(jω)|
0,67
0,67/√2
ω
∠H(jω)
ω_T
ω
-π/2

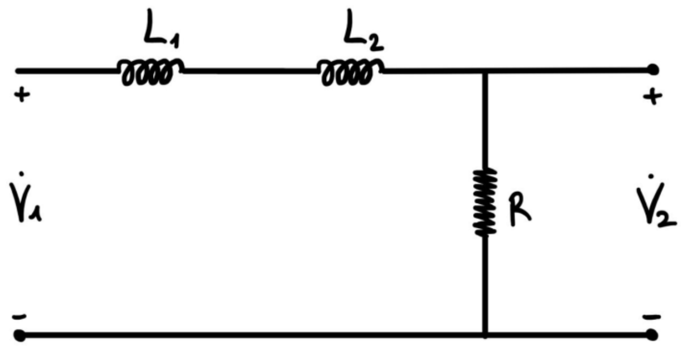
25. Risposta in frequenza

Determinare la funzione di trasferimento $H(j\omega)$ e la risposta in frequenza del seguente circuito.

$L_1 = 4\ mH$

$L_2 = 12\ mH$

$R = 3\ \Omega$



Si definisce funzione di rete il rapporto tra il fasore della grandezza di uscita e il fasore della grandezza di ingresso:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_R:

$$\dot{V}_2 = Z_R \cdot \dot{I}_R = Z_R \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_{L_1} + Z_{L_2} + Z_R}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_R}{Z_{L_1} + Z_{L_2} + Z_R} = \frac{R}{j\omega L_1 + j\omega L_2 + R} = \frac{R}{R + j\omega(L_1 + L_2)}$$

Calcoliamo il modulo della funzione di rete:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{R^2 + 0^2}}{\sqrt{R^2 + [\omega(L_1 + L_2)]^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)}} = 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)}} = 0$$

Calcoliamo la fase della funzione di rete:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{R}{R + j\omega(L_1 + L_2)} = \tan^{-1}\frac{0}{R} - \tan^{-1}\frac{R}{\omega(L_1 + L_2)} = 0 - \tan^{-1}\frac{R}{\omega(L_1 + L_2)}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \left(-\tan^{-1} \frac{R}{\omega(L_1 + L_2)} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \left(-\tan^{-1} \frac{R}{\omega(L_1 + L_2)} \right) = 0$$

Determiniamo il valore della frequenza di taglio:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R^2}{R^2 + \omega_T^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)} = \frac{1}{2}$$

$$R^2 = 0{,}5 \cdot [R^2 + \omega_T^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2)]$$

$$9 = 0{,}5 \cdot [9 + (0{,}004^2 + 0{,}012^2 + 2 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}012)\omega_T^2]$$

$$9 = 0{,}5 \cdot [9 + (0{,}004^2 + 0{,}012^2 + 2 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}012)\omega_T^2]$$

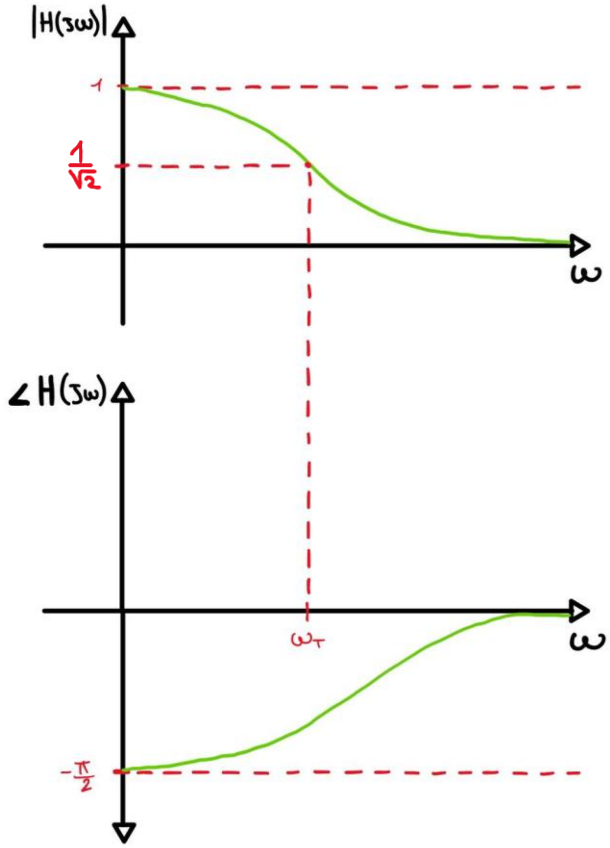
$$9 = 0{,}5 \cdot [9 + 0{,}000256\omega_T^2]$$

$$9 = 4{,}5 + 0{,}000128\omega_T^2$$

$$\omega_T^2 = \frac{4{,}5}{0{,}000128} \cong 35156{,}25$$

$$\omega_T = \sqrt{35156{,}25} \cong 187{,}5\ rad/s$$

Tracciamo gli andamenti qualitativi:



|H(jω)|
1
1/√2
ω
∠H(jω)
ω_T
ω
-π/2

27. Bilancio delle potenze in regime sinusoidale

Si effettui il bilancio delle potenze attive e reattive nel seguente circuito:

$\dot{E} = 48\ V$ (Val. efficace)

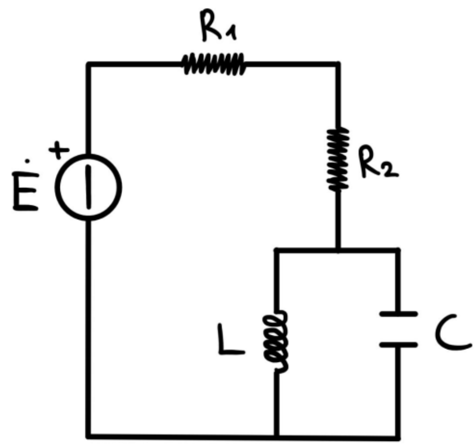
$R_1 = 7\ \Omega$

$R_2 = 3\ \Omega$

$L = 450\ mH$

$C = 0{,}01\ F$

$\omega = 20\ rad/s$



Calcoliamo innanzitutto le impedenze:

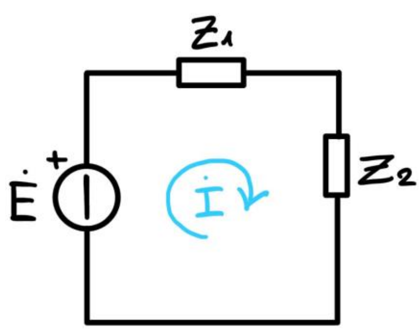
$$Z_{R_1} = R_1 = 7\ \Omega$$

$$Z_{R_2} = R_2 = 3\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = 9j\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{20 \cdot 0{,}01} \cong -5j\ \Omega$$

Si consideri l'impedenza Z_1 come risultato della serie tra Z_{R_1} e Z_{R_2} e Z_2 come risultato del parallelo tra Z_L e Z_C:



$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_{R_2} = 7 + 3 = 10\ \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{9j \cdot (-5j)}{9j - 5j} = \frac{45}{4j} = \frac{45j}{-4} = -11{,}25j\ \Omega$$

Calcoliamo la corrente che scorre nella maglia:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_2} = \frac{48}{10 - 11{,}25j} = \frac{48}{10 - 11{,}25j} \cdot \frac{10 + 11{,}25j}{10 + 11{,}25j} = \frac{480 + 540j}{100 + 126{,}6} \cong 2{,}12 + 2{,}38j\ A$$

Calcoliamo il modulo di $\dot{I}$:

$$\left|\dot{I}\right| = \sqrt{(2{,}12)^2 + (2{,}38)^2} \cong 3{,}19\ A$$

Calcoliamo le potenze attive e reattive dissipate da tutte le impedenze:

$$P_{Z_1} = Re[Z_1] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = 10 \cdot (3{,}19)^2 \cong 101{,}76\ W$$

$$Q_{Z_1} = Im[Z_1] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = 0 \cdot (3{,}19)^2 = 0\ VAR$$

$$P_{Z_2} = Re[Z_2] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = 0 \cdot (3{,}19)^2 = 0\ W$$

$$Q_{Z_2} = Im[Z_2] \cdot \left|\dot{I}\right|^2 = -11{,}25 \cdot (3{,}19)^2 \cong -114{,}48\ VAR$$

Il modulo di $\dot{E}$ è pari a:

$$\left|\dot{E}\right| = 48\ V$$

Calcoliamo la fase della tensione e della corrente per il generatore:

$$\theta_{\dot{E}} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{48}\right) = 0^\circ$$

$$\theta_{\dot{I}} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}38}{2{,}12}\right) = 48{,}31^\circ$$

Calcoliamo adesso le potenze attive e reattive generate da $\dot{E}$.

$$P_{\dot{E}} = \left|\dot{E}\right| \cdot \left|\dot{I}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\dot{E}\right| \cdot \left|\dot{I}\right| \cdot \cos(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 48 \cdot 3{,}19 \cdot \cos(0^\circ - 48{,}31^\circ) =$$

$$= 153{,}12 \cdot (0{,}67) \cong 102{,}6\ W$$

$$Q_{\dot{E}} = \left|\dot{E}\right| \cdot \left|\dot{I}\right| \cdot \sin\varphi = \left|\dot{E}\right| \cdot \left|\dot{I}\right| \cdot \sin(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 48 \cdot 3{,}19 \cdot \sin(0^\circ - 48{,}31^\circ) =$$

$$= 153{,}12 \cdot (-0{,}75) \cong -114{,}84\ VAR$$

Effettuiamo il bilancio delle potenze attive dissipate e generate:

$$P_{Z_1} + P_{Z_2} = P_{\dot{E}}$$

$$101{,}76\ W \cong 102{,}6\ W$$

Il bilancio delle potenze attive è verificato.

Effettuiamo il bilancio delle potenze reattive dissipate e generate:

$$Q_{Z_1} + Q_{Z_1} = Q_{\dot{E}}$$

$$-114{,}48\ VAR = -114{,}84\ VAR$$

Il bilancio delle potenze reattive è verificato.

28. Bilancio delle potenze in regime sinusoidale

Si effettui il bilancio delle potenze attive e reattive nel seguente circuito:

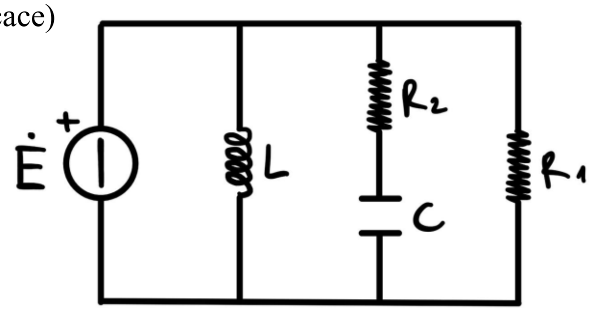
$\dot{E} = 100e^{j0}\ V$ (Val. efficace)

$Z_{R_1} = 10\ \Omega$

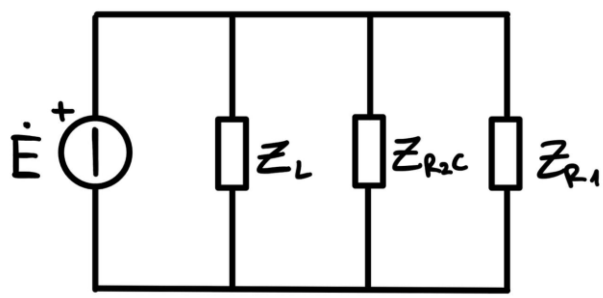
$Z_{R_2} = 5\ \Omega$

$Z_L = 10j\ \Omega$

$Z_C = -5j\ \Omega$



In questo caso conosciamo a priori i valori delle impedenze del circuito. Calcoliamo l'impedenza Z_{R_2C}, che è il risultato della serie tra le impedenze Z_{R_2} e Z_C:



$Z_{R_2C} = Z_{R_2} + Z_C = 5 - 5j\ \Omega$

Notiamo che tutte le impedenze sono in parallelo con il generatore di tensione e quindi ai loro capi vi è la stessa differenza di potenziale che è pari a:

$\dot{E} = 100e^{j0} = 100\ V$

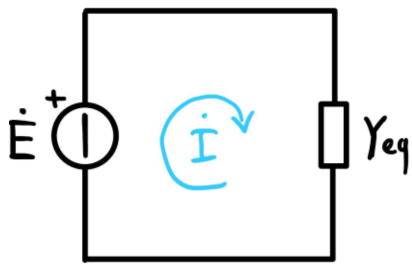
Calcoliamo dunque le rispettive ammettenze:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{10j} = \frac{j}{-10} = -0{,}1j\ S$$

$$Y_{R_2C} = \frac{1}{Z_{R_2C}} = \frac{1}{5-5j} = \frac{1}{5-5j} \cdot \frac{5+5j}{5+5j} = \frac{5+5j}{25+25} = 0{,}1 + 0{,}1j\ S$$

$$Y_{R_1} = \frac{1}{Z_{R_1}} = \frac{1}{10} = 0{,}1\ S$$

Si osservi che le ammettenze sono tra loro in parallelo, dunque:



$Y_{eq} = Y_L + Y_{R_2C} + Y_{R_1} = -0{,}1j + 0{,}1 + 0{,}1j + 0{,}1 = 0{,}2\ S$

Conoscendo la tensione ai suoi capi, calcoliamo le potenze attiva e reattiva assorbita da Y_{eq} come segue:

$P_{Y_{eq}} = Re[Y_{eq}^*] \cdot |\dot{E}|^2 = 0{,}2 \cdot 100^2 = 2000\ W$

$Q_{Y_{eq}} = Im[Y_{eq}^*] \cdot |\dot{E}|^2 = 0 \cdot 100^2 = 0\ VAR$

La corrente che scorre nella maglia si ricava tramite la legge simbolica di Ohm:

$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_{eq}} = \dot{E} \cdot Y_{eq} = 100 \cdot 0{,}2 = 20\ A$

Calcoliamo le fasi di tensione e corrente:

$\theta_{\dot{E}} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{100}\right) = 0^{\circ}$

$\theta_{\dot{I}} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{20}\right) = 0^{\circ}$

Calcoliamo infine le potenze attiva e reattiva generata da $\dot{E}$ come segue:

$P_{\dot{E}} = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 100 \cdot 20 \cdot \cos(0^{\circ}) = 2000\ W$

$Q_{\dot{E}} = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 100 \cdot 20 \cdot \sin(0^{\circ}) = 0\ VAR$

Effettuiamo il bilancio delle potenze attive dissipate e generate:

$P_{Y_{eq}} = P_{\dot{E}}$

$2000\ W = 2000\ W$

Il bilancio delle potenze attive è verificato.

Effettuiamo il bilancio delle potenze reattive dissipate e generate:

$Q_{Y_{eq}} = Q_{\dot{E}}$

$0\ VAR = 0\ VAR$

Il bilancio delle potenze reattive è verificato.

ESERCIZI DELLE SIMULAZIONI

SIMULAZIONE A

N° 1 – Per il circuito lineare di figura, effettuare il bilancio delle potenze

Dati:

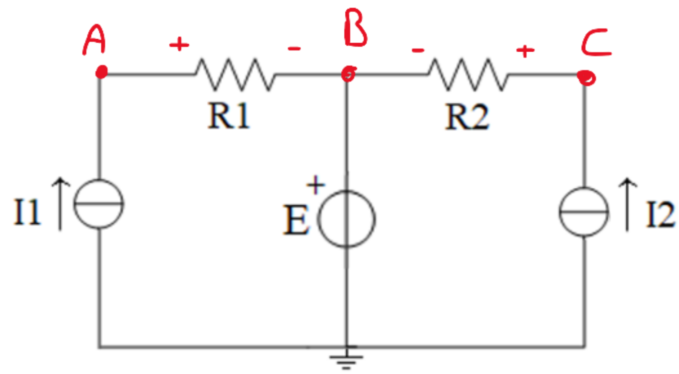
$I_1 = 2$ [A];

$I_2 = 4$ [A];

$E = 10$ [V];

$R_1 = 1$ [Ω];

$R_2 = 2$ [Ω].



Si osservi che nella maglia di sinistra scorre la corrente I_1 mentre nella maglia di destra scorre la corrente I_2. Di conseguenza, la corrente che scorre su R_1 è I_1 mentre la corrente che scorre su R_2 è I_2. Conoscendo le correnti che scorrono nei bipoli resistivi, possiamo ricavare la potenza da essi impegnata:

$$P_{R_1} = V_{R_1} \cdot I_1 = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot 4 = 4W$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 2 \cdot 16 = 32\ W$$

Calcoliamo adesso le potenze generate dai due generatori di corrente e dal generatore di tensione. La corrente che scorre nel generatore E è pari alla somma delle correnti I_1 e I_2:

$$I_E = I_1 + I_2 = 2 + 4 = 6\ A$$

$$P_E = E \cdot I_E = 10 \cdot 6 = 60\ W$$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di E, per la convenzione degli utilizzatori, la potenza sarà assorbita positiva (generata negativa). Dunque:

$$P_E = -60\ W$$

Troviamo adesso V_A e V_C, sapendo che $V_B = 10\ V$.

$$P_{R_1} = V_{R_1} \cdot I_{R_1}$$

$$\Rightarrow V_{R_1} = \frac{P_{R_1}}{I_{R_1}} = \frac{4}{2} = 2\ V$$

Ma $V_{R_1} = V_{AB} = V_A - V_B$, dunque:

$V_A = V_B + V_{BA} = 10 + 2 = 12\,V$

Analogamente:

$$V_{R_2} = \frac{P_{R_2}}{I_{R_2}} = \frac{32}{4} = 8\,V$$

Ma $V_{R_2} = V_{BC} = V_C - V_B$, dunque:

$V_C = V_B + V_{BC} = 10 + 8 = 18\,V$

Possiamo adesso calcolare le potenze generate dai due generatori di corrente:

$P_{I_1} = V_A \cdot I_1 = 12 \cdot 2 = 24\,W$

$P_{I_2} = V_C \cdot I_2 = 18 \cdot 4 = 72\,W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze eguagliando le potenze dissipate a quelle generate:

$P_{diss} = P_{gen} \Rightarrow 4 + 32 = -60 + 24 + 72 \Rightarrow 36 = 36$

Abbiamo verificato che la potenza dissipata è pari a quella generata.

N° 2 – La rete lineare di figura si trova inizialmente a regime con il tasto chiuso. All'istante t=0 il tasto si apre, determinare l'andamento di *vc(t)* per t ≥ 0.

Dati:

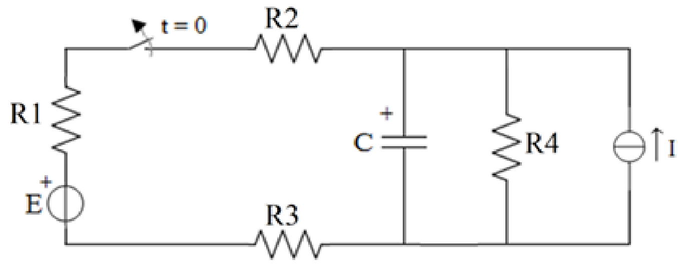
E = 100 [V];

I = 2 [A];

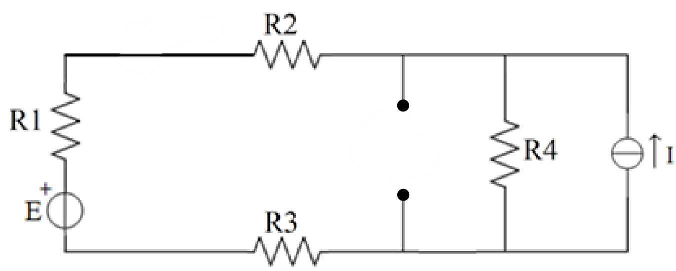
$R_1 = R_2 = 10$ [Ω];

$R_3 = R_4 = 10$ [Ω];

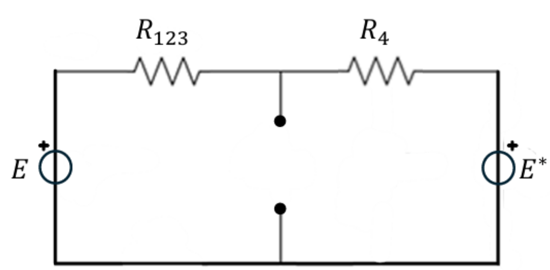
C = 2 [mF].



Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



Calcoliamo la serie $R_{123} = 10 + 10 + 10 = 30\ \Omega$ e trasformiamo il generatore di corrente I in generatore di tensione E^*:

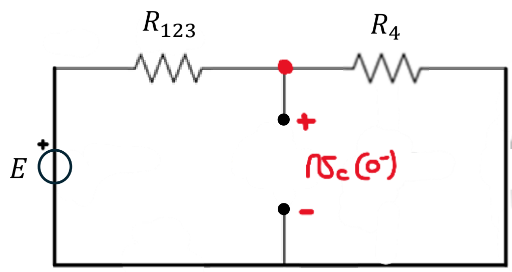


$E^* = R_4 \cdot I = 10 \cdot 2 = 20\ V$

I generatori di tensione sono in serie, dunque:

$E_{eq} = E - E^* = 100 - 20 = 80\ V$

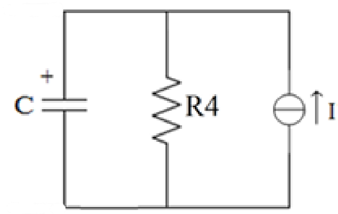
Il circuito risultante finale sarà il seguente:



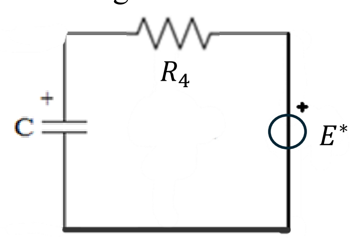
Applichiamo il partitore di tensione per ricavare $v_C(0^-)$:

$$v_C(0^-) = v_C(0) = E_{eq} \cdot \frac{R_4}{R_{123} + R_4} = 80 \cdot \frac{10}{40} = 20\ V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



Trasformiamo il generatore di corrente I in generatore di tensione E^*:



$$E^* = I \cdot R_4 = 2 \cdot 10 = 20\ V$$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$$V_R = R \cdot i_R$$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_C = i_R = i_E$

LKT) $E^* - v_R - v_C = 0 \Rightarrow v_R + v_C = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_R = R \cdot i_R = R \cdot i_C$

$\Rightarrow R \cdot i_C + v_R = E^*$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} + v_C = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{R_4 C} = -\frac{1}{10 \cdot 0{,}002} = -50\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-50t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = k'$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot k' = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

$$k' = E^* = 20\ V$$

$$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-50t} + 20$$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 20\ V$

$20 = k \cdot e^0 + 20 = k + 20$

$\Rightarrow k = 0$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

$v_C(t) = k \cdot e^{-50t} + 20 = 20\ V$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_4C = 0{,}02\ s$

Per $t \rightarrow 0 \Rightarrow v_C(0) = 20\ V$

Per $t \rightarrow \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 20\ V$

Se l'asse delle ordinate rappresenta le $v_C(t)$ e quello delle ascisse rappresenta il tempo t, l'andamento qualitativo corrisponde a una retta costante orizzontale passante per $y = 20$.

SIMULAZIONE B

N° 1 – Per il circuito lineare a tempo invariante di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti A-B.

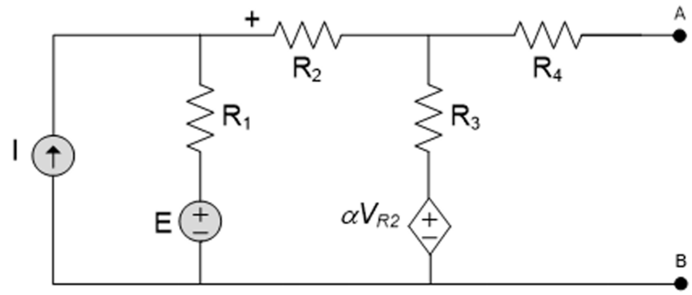
Dati:

$I_1 = 2$ [A]; $E = 5$ [V];

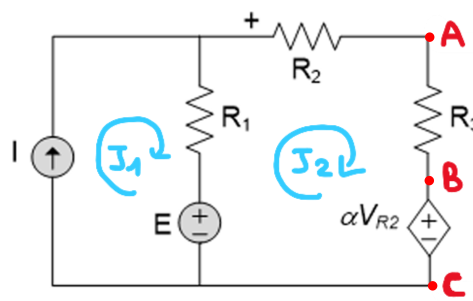
$R_1 = 2$ [Ω]; $R_2 = 4$ [Ω];

$R_3 = 5$ [Ω]; $R_4 = 6$ [Ω];

$\alpha = 0.2$ [Ω].



Calcoliamo $E_{eq} = V_{AB}$ eliminando dal circuito la resistenza R_4 (sulla quale non scorre corrente):



Utilizziamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} j_1 = I = 2\ A \\ E - \alpha V_{R_2} = j_2(R_1 + R_2 + R_3) - j_1 R_1 \end{cases}$$

Ma $V_{R_2} = j_2 R_2$:

$$\begin{cases} j_1 = 2\ A \\ E - \alpha j_2 R_2 = j_2(R_1 + R_2 + R_3) - j_1 R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 2\ A \\ E = j_2(R_1 + R_2 + R_3 + \alpha R_2) - j_1 R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 2\ A \\ 5 = 11{,}8 j_2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 2\ A \\ j_2 = \dfrac{9}{11{,}8} = 0{,}76\ A \end{cases}$$

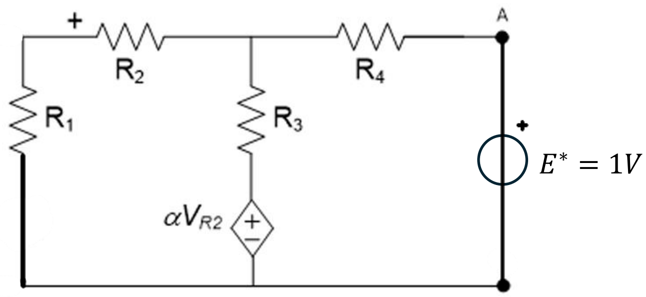
Noi sappiamo che $V_{R_3} = V_A - V_C = V_A - \alpha V_{R_2}$, dunque:

$$V_A = V_{R_3} + \alpha V_{R_2} = j_2 R_3 + \alpha j_2 R_2 = 0{,}76 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 0{,}76 \cong 4{,}4\ V$$

Dato che B è a massa:

$V_{AB} = V_A - V_B = V_A = 4{,}4\ V = E_{eq}$

Adesso calcoliamo R_{eq} staccando i generatori indipendenti e ponendo un generatore ausiliario di $E^* = 1\ V$ fra i morsetti A-B:



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare I_{BA}:

$$\begin{cases} -\alpha V_{R_2} = j_1(R_1 + R_2 + R_3) - j_2 R_3 \\ \alpha V_{R_2} - E^* = j_2(R_3 + R_4) - j_1 R_3 \end{cases}$$

Ma $V_{R_2} = j_1 R_2$:

$$\begin{cases} -\alpha j_1 R_2 = j_1(R_1 + R_2 + R_3) - j_2 R_3 \\ \alpha j_1 R_2 - E^* = j_2(R_3 + R_4) - j_1 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = j_1(R_1 + R_2 + \alpha R_2 + R_3) - j_2 R_3 \\ -E^* = j_2(R_3 + R_4) - j_1(R_3 + \alpha R_2) \end{cases}$$

Utilizziamo il metodo matriciale per la risoluzione del sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -E^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 + \alpha R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 - \alpha R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11{,}8 & -5 \\ -5{,}8 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$\det A = 11{,}8 \cdot 11 - 5{,}8 \cdot 5 = 100{,}8$

A noi serve j_2:

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 11{,}8 & 0 \\ -5{,}8 & -1 \end{vmatrix}}{100{,}8} = -\frac{11{,}8}{100{,}8} \cong -0{,}12\ A = -I_{BA}$$

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}3\ \Omega$$

N° 2 – Il circuito di figura si trova a regime per t < 0. All'istante t = 0 l'interruttore si apre. Determinare l'andamento della corrente $i_L(t)$ per $t \geq 0$.

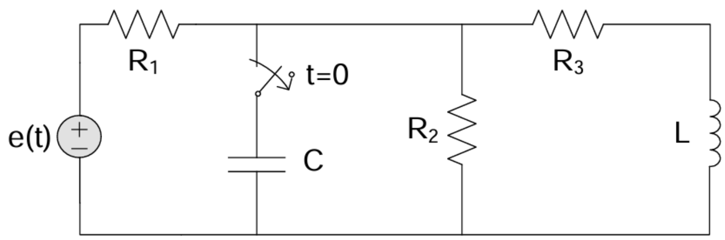
Dati:

e(t) = 24 [V];

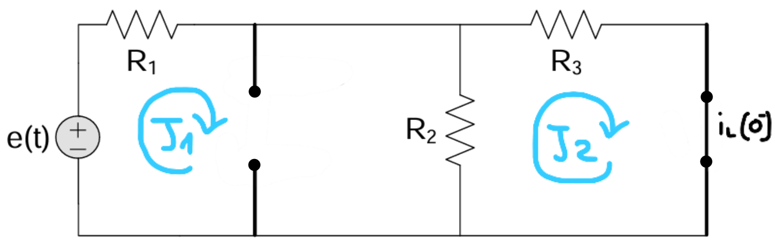
$R_1 = 4\ [\Omega]$; $R_2 = 5\ [\Omega]$;

$R_3 = 6\ [\Omega]$;

C = 0.1 [F]. L = 15 [mH].



Per $t < 0$ il condensatore è carico e si comporta da circuito aperto, mentre l'induttanza da cortocircuito. Il circuito che ne deriva è il seguente:



Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare $i_L(0^-) = i_L(0)$:

$$\begin{cases} e(t) = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ 0 = j_2(R_2 + R_3) - j_1 R_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

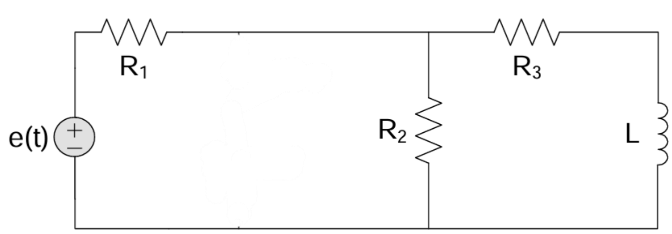
$$\det A = 9 \cdot 11 - 5 \cdot 5 = 74$$

A noi serve j_2:

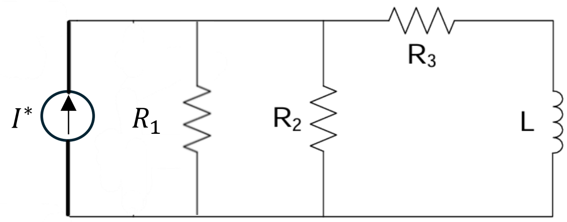
$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 24 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{74} = -\frac{120}{74} \cong 1{,}62\ A = \ i_L(0) = I_0$$

Abbiamo calcolato la condizione iniziale.

Per $t \geq 0$ il circuito assume questa forma:



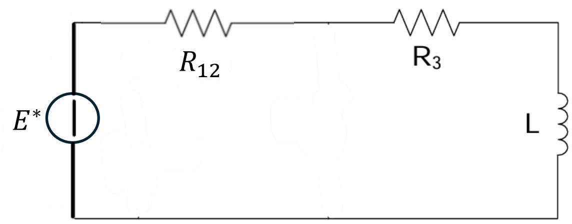
Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



$$I^* = \frac{e(t)}{R_1} = \frac{24}{4} = 6\ A$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20}{9} = 2{,}2\ \Omega$$

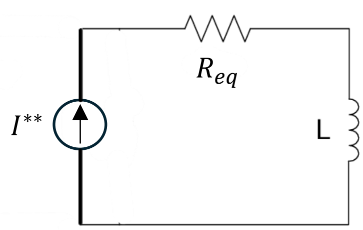
Ritrasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:



$$E^* = I^* \cdot R_{12} = 6 \cdot 2{,}2 = 13{,}2\ V$$

$$R_{eq} = R_{12} + R_3 = 2{,}2 + 6 = 8{,}2\ \Omega$$

Ritrasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente, ottenendo il circuito finale:



$$I^{**} = \frac{E^*}{R_{eq}} = \frac{13{,}2}{8{,}2} = 1{,}62\ A$$

Scriviamo le equazioni costitutive del circuito:

$$i_R = \frac{V_R}{R_{eq}}$$

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v_L(t)\, dt$$

Applichiamo LKI ed LKT:

LKT) $v_{I^{**}} = v_R = v_L$

LKI) $I^{**} = i_R + i_L$

Ricaviamo l'equazione differenziale:

$$i_R = \frac{V_R}{R_{eq}} = \frac{V_L}{R_{Eq}}$$

$$\Rightarrow I^{**} = \frac{V_L}{R_{eq}} + i_L$$

Ma $v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$:

$$\frac{L}{R_{eq}} \cdot \frac{di_L}{dt} + i_L = I^{**}$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot i_L = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^{**}$$

La soluzione dell'equazione differenziale sarà del tipo:

$$i_L(t) = i_{lh}(t) + i_{lp}(t)$$

Ricaviamo l'omogenea associata:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot i_L = 0$$

La soluzione dell'omogenea associata è del tipo:

$$i_{lh}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Determiniamo S_0, ovvero la frequenza naturale del circuito, sostituendo la precedente soluzione nell'omogenea associata:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + k \cdot S_0 e^{S_0 t} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t} = 0$$

$$k \cdot S_0 e^{S_0 t} = -\frac{R_{eq}}{L} \cdot k \cdot e^{S_0 t}$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{R_{eq}}{L} = -\frac{8{,}2}{0{,}015} = -546{,}7\ Hz$$

$\Rightarrow i_{lh}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-546,7t}$

Determiniamo l'integrale particolare $i_{lp}(t)$. Esso ha la stessa forma dell'ingresso, il quale nel nostro caso corrisponde al generatore (che è costante). Dunque, anche $i_{lp}(t)$ è costante e lo indichiamo nel seguente modo:

$i_{lp}(t) = k'$

Troviamo $i_{lp}(t)$ sostituendo la precedente nell'equazione differenziale di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{R_{eq}}{L} \cdot k' = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^{**}$$

$$\frac{R_{eq}}{L} \cdot k' = \frac{R_{eq}}{L} \cdot I^{**}$$

$\Rightarrow k' = I^{**}$

$\Rightarrow i_{lp}(t) = k' = I^{**} = 1{,}62\ A$

Sostituendo nella soluzione dell'equazione differenziale:

$i_L(t) = i_{lh}(t) + i_{lp}(t) = k \cdot e^{-546,7t} + 1{,}62$

Determiniamo k imponendo la condizione iniziale $I_0 = 1{,}62\ A$:

$i_L(0) = I_0 = k \cdot e^0 + 1{,}62$

$1{,}62 = k + 1{,}62$

$\Rightarrow k = 0$

Sostituendo k nella soluzione dell'equazione differenziale, osserviamo che i_L è costante nel tempo:

$i_L(t) = k \cdot e^{-546,7t} + 1{,}62 = 1{,}62\ A$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0{,}015}{8{,}2} \cong 0{,}0018\ s$$

Per $t \to 0 \Rightarrow i_L(0) = 1{,}62\ A$

Per $t \to \infty \Rightarrow i_L(\infty) = 1{,}62\ A$

Se l'asse delle ordinate rappresenta le $i_L(t)$ e quello delle ascisse rappresenta il tempo t, l'andamento qualitativo corrisponde a una retta costante orizzontale passante per $y = 1{,}62$.

SIMULAZIONE C

N° 1 – Per il circuito di figura, determinare il valore della corrente che circola sul resistore R_3.

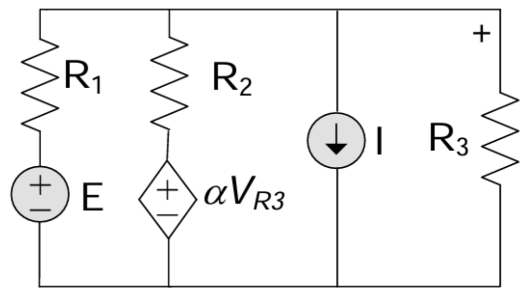
Dati:

E = 10 [V]; I = 5 [A];

$R_1 = 0{,}5\ [\Omega];\ R_2 = 2\ [\Omega];\ R_3 = 5\ [\Omega];$

$V_P = \alpha V_{A\text{-}B}\ [V];$

$\alpha = 0{,}5;$



Il circuito in questione si presta all'applicazione del teorema di Millmann:

$$V_{AB} = V_{R_3} = \frac{\frac{E}{R_1} + \frac{\alpha V_{R_3}}{R_2} - I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{10}{0{,}5} + \frac{0{,}5 V_{R_3}}{2} - 5}{\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = \frac{20 + 0{,}25 V_{R_3} - 5}{2 + 0{,}5 + 0{,}2} =$$

$$= \frac{15 + 0{,}25 V_{R_3}}{2{,}7}$$

Dunque:

$$V_{R_3} = \frac{15 + 0{,}25 V_{R_3}}{2{,}7}$$

$$2{,}7 V_{R_3} = 15 + 0{,}25 V_{R_3}$$

$$2{,}45 V_{R_3} = 15$$

$$V_{R_3} = \frac{15}{2{,}45} \cong 6{,}12\ V$$

$$\Rightarrow i_{R_3} = \frac{V_{R_3}}{R_3} = \frac{6{,}12}{5} \cong 1{,}22\ A$$

N° 2 – Per il doppio bipolo di figura, determinare i parametri di ammetenza Y.

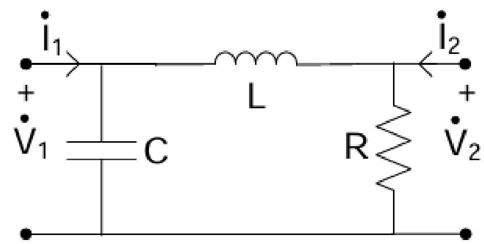
Dati:

R = 4 [Ω],

L = 2.5 [mH],

C = 80 [mF].

ω = 20 [rad/sec].

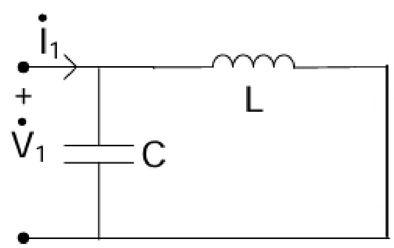


Si applica la LKC ad entrambi i lati del bipolo, ottenendo:

$\dot{I}_1 = \dot{V}_1 Y_{11} + \dot{V}_2 Y_{12}$

$\dot{I}_2 = \dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2 Y_{22}$

Si vuole per prima cosa calcolare il parametro di ammetenza Y_{11}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni sopra riportate. Per $\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{V}_1 Y_{11}$ e il circuito che risulta è il seguente:



Ne consegue che:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1}$$

Troviamo $\dot{I}_1$ in funzione di $\dot{V}_1$:

$\dot{I}_1 = \dot{V}_1 \cdot (Y_C // Y_L)$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-\frac{j}{\omega C}} = -\frac{1{,}6}{j} = -\frac{1{,}6}{j} \cdot \frac{j}{j} = 1{,}6j\ S$$

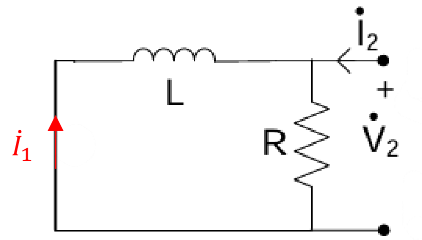
$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{0{,}05j} = \frac{1}{0{,}05j} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{0{,}05} = -20j\ S$$

$Y_{CL} = Y_C // Y_L = Y_C + Y_L = 1{,}6j - 20j = -18{,}4j\ S$

$\Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{V}_1 \cdot (Y_C // Y_L) = \dot{V}_1 \cdot (-18{,}4j)$

$$\Rightarrow Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{V}_1 \cdot (-18{,}4j)}{\dot{V}_1} = -18{,}4j\ \ S$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di ammettenza Y_{12}, dunque consideriamo la prima delle due equazioni della LKC. Per $\dot{V}_1 = 0 \Rightarrow \dot{I}_1 = \dot{V}_2 Y_{12}$ e il circuito che risulta è il seguente:



Ne consegue che:

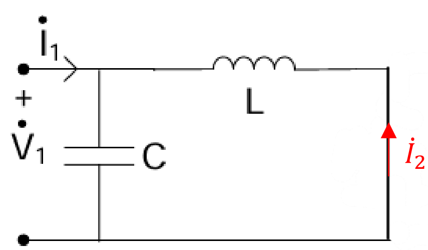
$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}$$

Troviamo $\dot{I}_1$ in funzione di $\dot{V}_2$:

$$\dot{I}_1 = \dot{V}_L \cdot Y_L = \dot{V}_2 \cdot Y_L$$

$$\Rightarrow Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} = \frac{\dot{V}_2 \cdot Y_L}{\dot{V}_2} = Y_L = -20j\ \ S$$

Si vuole adesso calcolare il parametro di ammettenza Y_{21}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKC. Per $\dot{V}_2 = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{V}_1 Y_{21}$ e il circuito che risulta è analogo al primo ottenuto:



Ne consegue che:

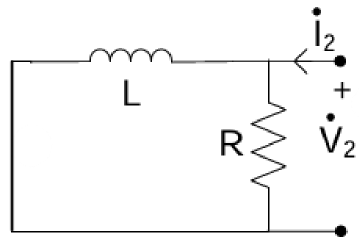
$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1}$$

Troviamo $\dot{I}_2$ in funzione di $\dot{V}_1$:

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_L = -\dot{V}_L \cdot Y_L = -\dot{V}_1 \cdot Y_L$$

$$\Rightarrow Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} = \frac{-\dot{V}_1 \cdot Y_L}{\dot{V}_1} = -Y_L = 20j\ \ S$$

Si vuole infine calcolare il parametro di ammettenza Y_{22}, dunque consideriamo la seconda delle due equazioni della LKC. Per $\dot{V}_1 = 0 \Rightarrow \dot{I}_2 = \dot{V}_2 Y_{22}$ e il circuito che risulta è analogo al secondo ottenuto:



Ne consegue che:

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2}$$

Troviamo $\dot{I}_2$ in funzione di $\dot{V}_2$:

$$\dot{I}_2 = \dot{V}_2 \cdot (Y_L // Y_R)$$

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ S}$$

$$Y_{LR} = Y_L // Y_R = Y_L + Y_R = 0{,}25 - 20j \;\; S$$

$$\Rightarrow Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} = \frac{\dot{V}_2 \cdot Y_{LR}}{\dot{V}_2} = Y_{LR} = 0{,}25 - 20j \;\; S$$

Possiamo anche scrivere la matrice dei parametri di ammettenza:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18{,}4j & -20j \\ 20j & 0{,}25 - 20j \end{bmatrix}$$

SIMULAZIONE D

N° 1 – Per il circuito lineare di figura, determinare la potenza impegnata sul resistore R_1.

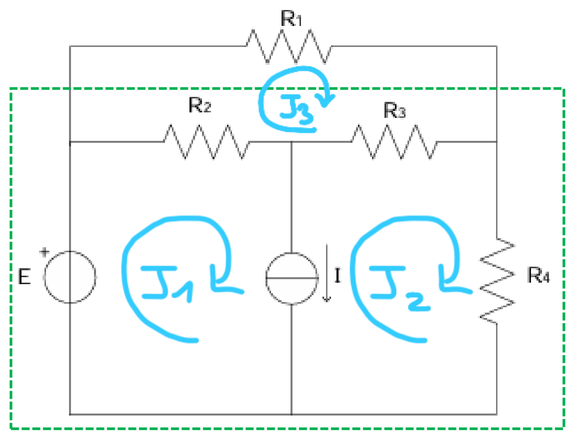
Dati:

E = 80 [V];

I = 32 [A];

R_1 = 10 [Ω], R_2 = 5 [Ω];

R_3 = 5 [Ω]; R_4 = 3 [Ω];



Per determinare la potenza impegnata su R_1 sarà necessario calcolare la corrente che scorre su R_1. Nel circuito si individua una supermaglia che comprende le due maglie che hanno il generatore di corrente in comune e, utilizzando il metodo delle correnti di maglia, si impone l'equazione di vincolo alla supermaglia $I = j_1 - j_2$.

$$\begin{cases} I = j_1 - j_2 \\ E = j_1 R_2 + j_2 \cdot (R_3 + R_4) - j_3 \cdot (R_2 + R_3) \\ 0 = j_3 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - j_1 R_2 - j_2 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 = j_1 - j_2 \\ 80 = 5j_1 + 8j_2 - 10j_3 \\ 0 = 20j_3 - 5j_1 - 5j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 32 + j_2 \\ 80 = 5 \cdot (32 + j_2) + 8j_2 - 10j_3 \\ 0 = 20j_3 - 5 \cdot (32 + j_2) - 5j_2 \end{cases}$$

Riconduciamo il sistema a un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 80 = 160 + 5j_2 + 8j_2 - 10j_3 \\ 0 = 20j_3 - 160 - 5j_2 - 5j_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -80 = 13j_2 - 10j_3 \\ 160 = 20j_3 - 10j_2 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} -80 \\ 160 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 13 \cdot 20 - 10 \cdot 10 = 160$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare la corrente che ci interessa, ovvero j_3:

$$j_3 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -80 \\ -10 & 160 \end{vmatrix}}{160} = \frac{13 \cdot 160 - 10 \cdot 80}{160} = \frac{1280}{160} = 8\ A$$

Dunque:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot j_3^2 = 10 \cdot 8^2 = 640\ W$$

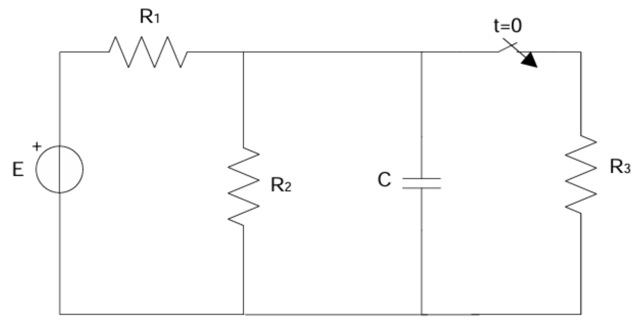
N° 2 – La rete di figura si trova a regime per t<0. A t=0 l'interruttore si chiude, determinare l'andamento della tensione sul condensatore *vc (t)* per t ≥ 0.

Dati:

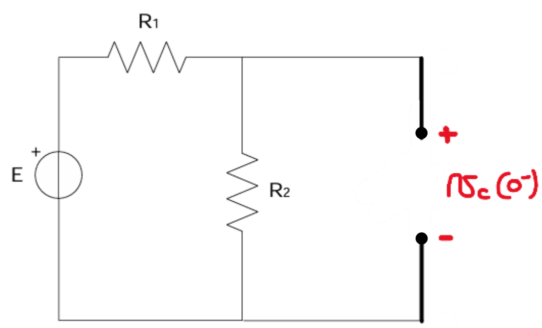
E = 220 [V];

C = 1 [μF];

R1 = R3 = 1 [kΩ], R2 =0.5 [kΩ];



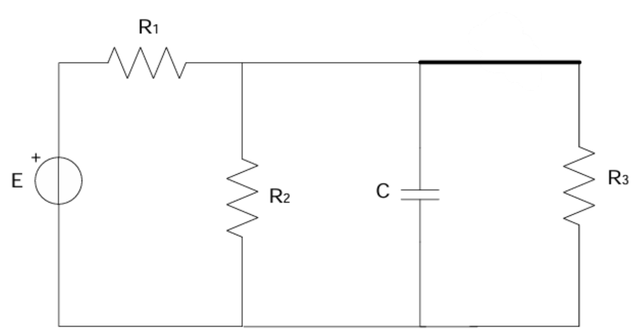
Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



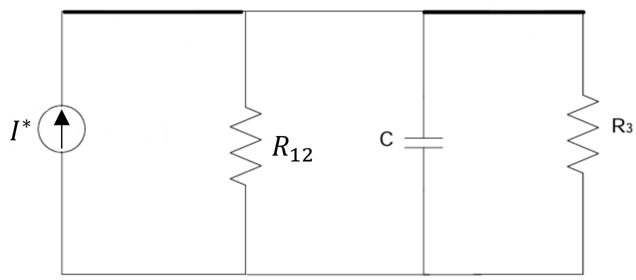
Si applica il partitore di tensione per ricavare $v_C(0^-) = V_{R_2}$:

$$V_{R_2} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 220 \cdot \frac{500}{1500} = \frac{220}{3} \cong 73{,}33\ V = v_C(0^-)$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



Trasformiamo il generatore di tensione E in generatore di corrente I^*:

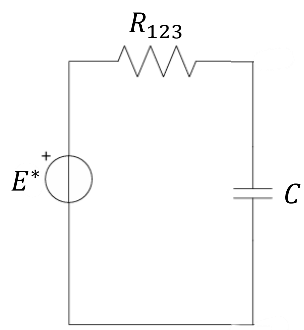


$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{220}{1000} = 0{,}22\ A$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{500000}{1500} \cong 333{,}33\ \Omega$$

$$R_{123} = \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{333{,}33 \cdot 1000}{1333{,}33} \cong 250\ \Omega$$

Ritrasformiamo il generatore di corrente I^* in generatore di tensione E^*, ottenendo il circuito finale:



$$E^* = I^* \cdot R_{123} = 0{,}22 \cdot 250 = 55\ V$$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$$v_R = R \cdot i_R$$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\ dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_E = i_R = i_C$

LKT) $E^* - v_R - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_R = E^*$

Troviamo l’equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_R = R \cdot i_R = R \cdot i_C$

$\Rightarrow v_C + R \cdot i_C = E^*$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$v_C + R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$$

Calcoliamo l’omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Sostituiamo nell’omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{R_{123} C} = -\frac{1}{250 \cdot 0{,}000001} = -4000\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-4000t}$$

Calcoliamo l’integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = k'$$

Sostituiamo nell’equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot k' = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

$$k' = E^* = 55\ V$$

$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-4000t} + 55$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 73{,}33\ V$

$73{,}33 = k \cdot e^{0} + 55$

$\Rightarrow k = 73{,}33 - 55 = 18{,}33$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

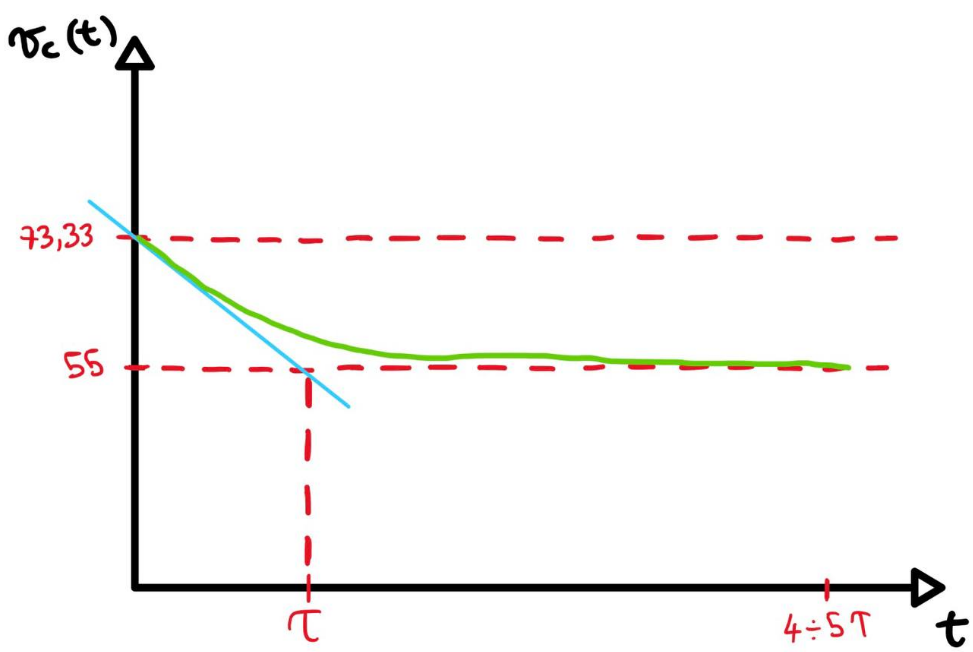
$v_C(t) = 18{,}33 \cdot e^{-4000t} + 55$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_{123}C = 250 \cdot 0{,}000001 = 0{,}00025\ s$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 73{,}33\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 55\ V$



ESERCIZI D'ESAME

ESAME DEL 16/01/2024

N° 1 – Per la rete di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R_2.

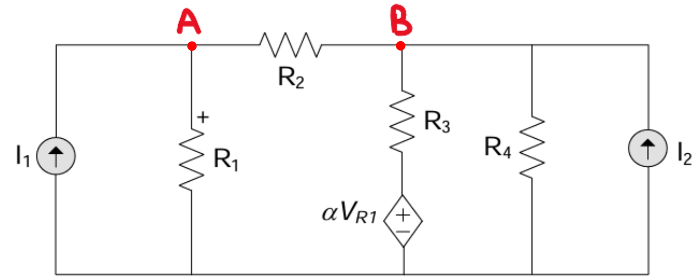
Dati:

$I_1 = 12\ [A];\ I_2 = 10\ [A];$

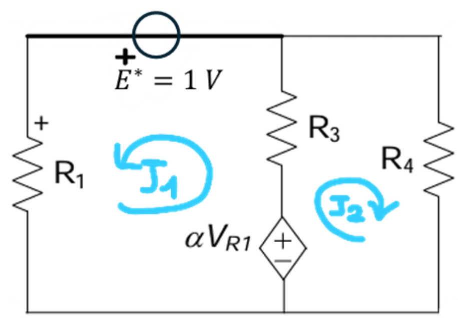
$R_1 = 10\ [\Omega];\ R_2 = 2\ [\Omega];$

$R_3 = 3\ [\Omega];\ R_4 = 4\ [\Omega];$

$\alpha = 0.5.$



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_2) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione del valore convenzionale di $1\ V$:



Noi sappiamo che $R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}}$, dunque applichiamo il metodo delle correnti di maglia per trovare la corrente interessata:

$$\begin{cases} \alpha V_{R_1} + E^* = j_1 \cdot (R_1 + R_3) + j_2 R_3 \\ \alpha V_{R_1} = j_2 \cdot (R_3 + R_4) + j_1 R_3 \end{cases}$$

Ma $V_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = R_1 j_1$, dunque:

$$\begin{cases} \alpha R_1 j_1 + E^* = j_1 \cdot (R_1 + R_3) + j_2 R_3 \\ \alpha R_1 j_1 = j_2 \cdot (R_3 + R_4) + j_1 R_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^* = j_1 \cdot (R_1 - \alpha R_1 + R_3) + j_2 R_3 \\ 0 = j_2 \cdot (R_3 + R_4) + j_1 \cdot (R_3 - \alpha R_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 8 j_1 + 3 j_2 \\ 0 = 7 j_2 - 2 j_1 \end{cases}$$

Trasformiamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}8 & 3\\-2 & 7\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}j_1\\j_2\end{bmatrix}$$

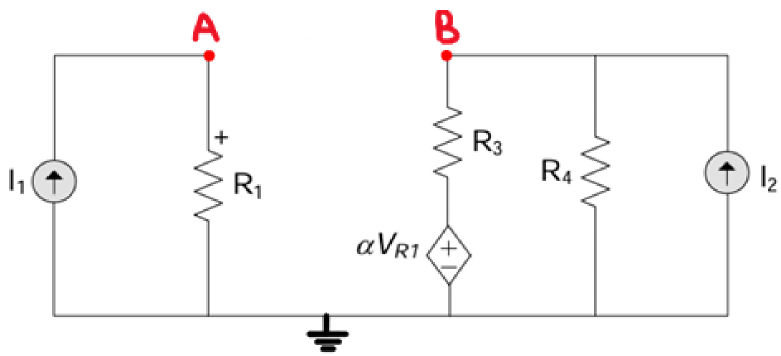
$$\det A = 8 \cdot 7 - (-2) \cdot 3 = 56 + 6 = 62$$

Osserviamo che $I_{BA} = j_1$, dunque utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare j_1:

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 7\end{vmatrix}}{62} = \frac{1 \cdot 7 - 0}{62} \cong 0{,}11\ A$$

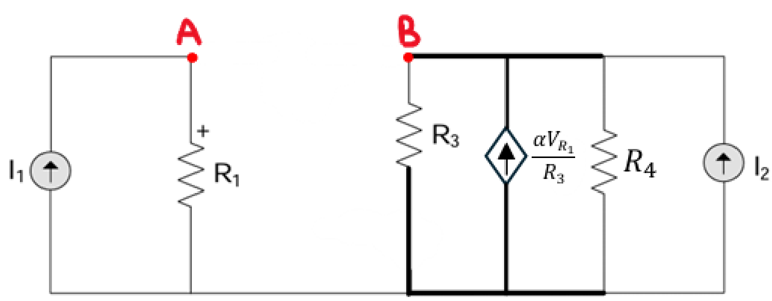
$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}11} \cong 9{,}11\ \Omega$$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



Ovviamente $V_A = V_{R_1} = I_1 R_1 = 12 \cdot 10 = 120\ V$.

Trasformiamo il generatore di tensione pilotato in tensione in generatore di corrente pilotato in corrente:



Ricaviamo il potenziale al nodo B:

$$I_2 + \frac{\alpha V_{R_1}}{R_3} = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)$$

$$10 + \frac{0{,}5 \cdot 120}{3} = V_B \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$30 = \frac{7}{12} V_B$$

$$\Rightarrow V_B = 30 \cdot \frac{12}{7} \cong 51{,}4\, V$$

Di conseguenza:

$$V_{AB} = V_A - V_B = 120 - 51{,}4 = 68{,}6\, V = E_{eq}$$

N° 2 – Il circuito dinamico di figura si trova inizialmente a regime con l'interruttore chiuso. All'istante t = 0 l'interruttore si apre, determinare l'andamento di *vc(t)* per t ≥ 0.

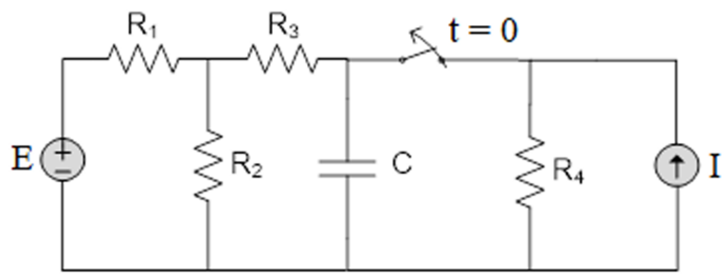
Dati:

$E = 10\ [V]$; $I = 5\ [A]$;

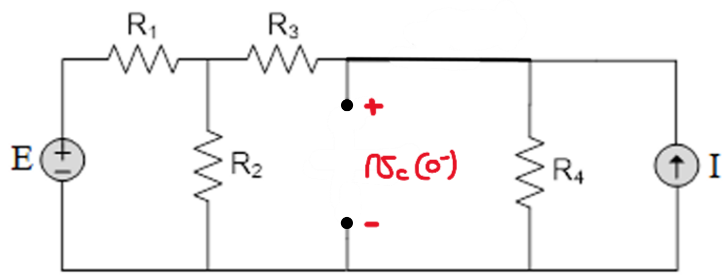
$R_1 = 5\ [\Omega]$; $R_2 = 3\ [\Omega]$;

$R_3 = 10\ [\Omega]$; $R_4 = 7\ [\Omega]$;

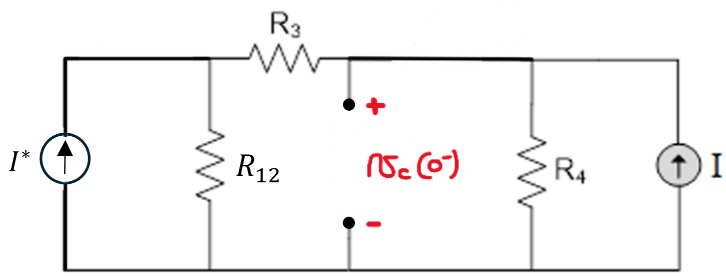
$C = 0.2\ [F]$.



Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:



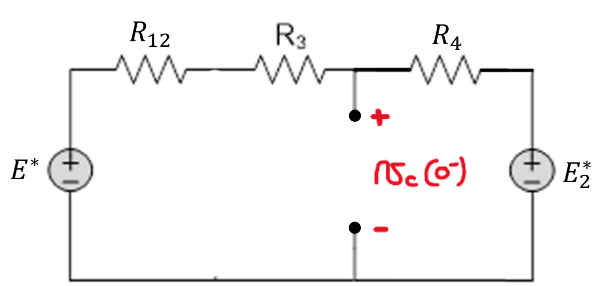
Trasformiamo il generatore di tensione E in generatore di corrente I^*:



$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{5} = 2\ A$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{15}{8} = 1{,}875\ \Omega$$

Ritrasformiamo il generatore di corrente I^* in generatore di tensione E^* e trasformiamo il generatore di corrente I in generatore di tensione E_2^*:



$E^* = I^* \cdot R_{12} = 2 \cdot 1{,}875 = 3{,}75\ V$

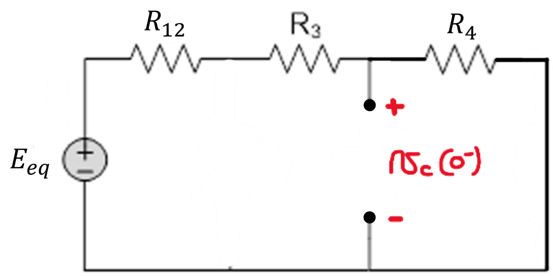
$R_{123} = R_{12} + R_3 = 1{,}875 + 10 = 11{,}875\ \Omega$

$E_2^* = I \cdot R_4 = 5 \cdot 7 = 35\ V$

E_2^* ed E^* sono in serie, pertanto:

$E_{eq} = E_2^* - E^* = 35 - 3{,}75 = 31{,}25\ V$

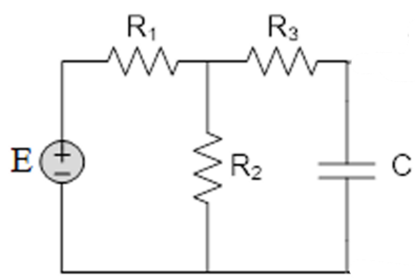
Il circuito risultante sarà:



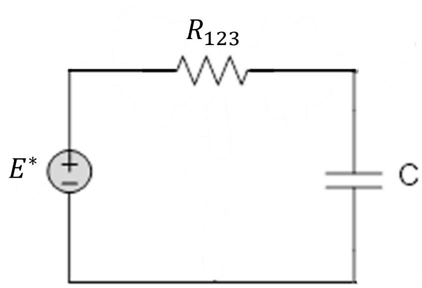
Possiamo ricavare $v_C(0^-)$ applicando il partitore di tensione:

$$v_C(0^-) = E_{eq} \cdot \frac{R_4}{R_{123} + R_4} = 31{,}25 \cdot \frac{7}{18{,}875} \cong 11{,}6\ V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



Ovvero:



$R_{123} = 11{,}875\ \Omega$

$E^* = 3{,}75\ V$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$v_R = R \cdot i_R$

$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$

$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_E = i_R = i_C$

LKT) $E^* - v_R - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_R = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_R = R \cdot i_R = R \cdot i_C$

$\Rightarrow v_C + R \cdot i_C = E^*$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$v_C + R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} \cdot E^*$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$

$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$

$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{R_{123}C} = -\frac{1}{11,875 \cdot 0,2} \cong -0,42\ Hz$

$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-0,42t}$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$v_{cp}(t) = k'$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$\frac{dk'}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot k' = \frac{1}{RC} \cdot E^*$

$k' = E^* = 3,75\ V$

$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-0,42t} + 3,75$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 11,6\ V$

$11,6 = k \cdot e^0 + 3,75$

$\Rightarrow k = 11,6 - 3,75 = 7,85$

Sostituiamo nella soluzione dell'equazione differenziale:

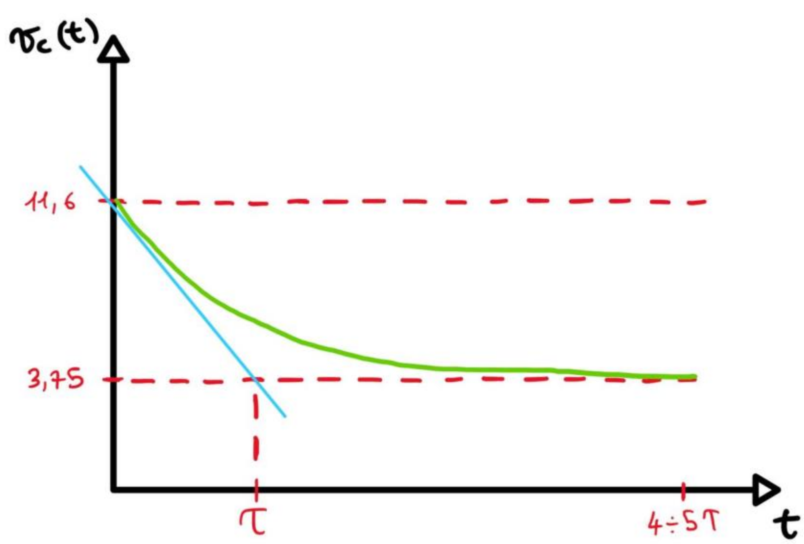
$v_C(t) = 7,85 \cdot e^{-0,42t} + 3,75$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_{123}C = 11,875 \cdot 0,2 = 2,375\ s$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 11,6\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 3,75\ V$



ESAME DEL 29/01/2024

N° 1 – Per la rete di figura, determinare la potenza impegnata dal resistore R_3.

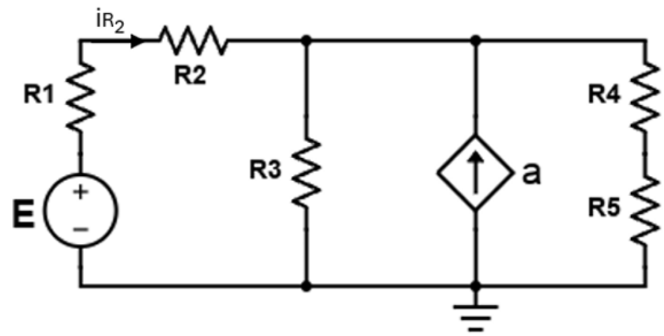
Dati:

$E = 10\ [V];\ a = \beta \cdot i_{R2}\ [A];$

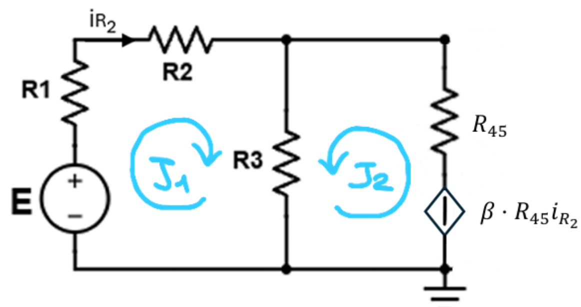
$R_1 = 1\ [\Omega];\ R_2 = 2\ [\Omega];$

$R_3 = 3\ [\Omega];\ R_4 = 4\ [\Omega];$

$R_5 = 5\ [\Omega];\ \beta = 3$



Calcoliamo la serie R_{45} e trasformiamo il generatore di corrente pilotato in corrente in generatore di tensione pilotato in tensione:



$R_{45} = R_4 + R_5 = 4 + 5 = 9\ \Omega$

$e = \beta \cdot R_{45} i_{R_2}$

Applichiamo il metodo delle correnti di maglia per ricavare i_{R_3}:

$$\begin{cases} E = j_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + j_2 R_3 \\ \beta \cdot R_{45} i_{R_2} = j_2 (R_3 + R_{45}) + j_1 R_3 \end{cases}$$

Ma $i_{R_2} = j_1$, dunque:

$$\begin{cases} E = j_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) + j_2 R_3 \\ 0 = j_2 (R_3 + R_{45}) + j_1 (R_3 - \beta R_{45}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 = 6 j_1 + 3 j_2 \\ 0 = 12 j_2 - 24 j_1 \end{cases}$$

Scriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -24 & 12 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 6 \cdot 12 + 24 \cdot 3 = 72 + 72 = 144$$

Utilizziamo il metodo di Cramer per ricavare j_1 e j_2:

$$j_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}}{144} = \frac{120}{144} \cong 0{,}83\ A$$

$$j_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -24 & 0 \end{vmatrix}}{144} = \frac{240}{144} \cong 1{,}66\ A$$

Osserviamo che $i_{R_3} = j_1 + j_2 = 0{,}83 + 1{,}66 \cong 2{,}5\ A$, dunque:

$P_{R_3} = R_3 \cdot i_{R_3}^2 = 3 \cdot 2{,}5^2 = 18{,}75\ W$

N° 2 – Per il circuito in regime sinusoidale di figura, effettuare il bilancio delle potenze attive e reattive.

Dati:

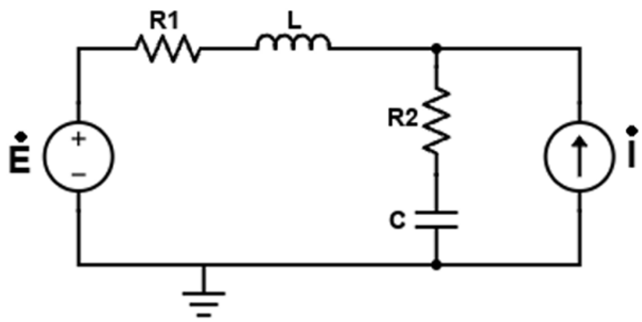
$\dot{E} = 10e^{j0}$ *[V]* Valore efficace;

$\dot{I} = 2e^{j0}$ *[A]* Valore efficace;

$R_1 = 1\ [\Omega]$; $R_2 = 2\ [\Omega]$;

$L = 1\ [H]$; $C = 0.5\ [F]$;

$\omega = 1\ [rad/sec]$.



Osserviamo che:

$$\dot{E} = 10e^{j0} = 10\ V$$

$$\dot{I} = 2e^{j0} = 2\ A$$

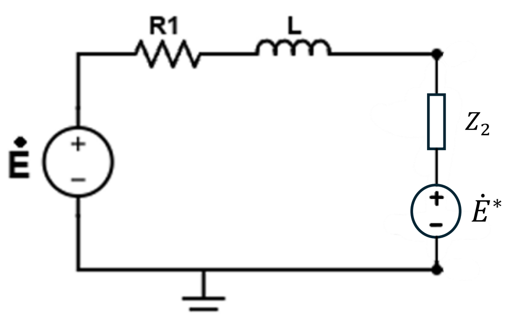
Consideriamo Z_2 come l'impedenza risultante della serie tra Z_{R_2} e Z_C e trasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:

$$Z_{R_2} = R_2 = 2\ \Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{0{,}5} = -2j\ \Omega$$

$$Z_2 = Z_{R_2} + Z_C = 2 - 2j\ \Omega$$

$$\dot{E}^* = Z_2 \cdot \dot{I} = (2 - 2j) \cdot 2 = 4 - 4j\ V$$

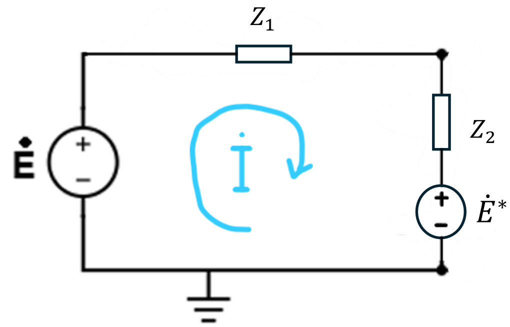


Consideriamo Z_1 come l'impedenza risultante della serie tra Z_{R_1} e Z_L e troviamo la corrente che scorre nella maglia:

$$Z_{R_1} = R_1 = 1\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j\ \Omega$$

$$Z_1 = Z_{R_1} + Z_L = 1 + j\ \Omega$$



$\dot{E} - \dot{E}^* = \dot{I} \cdot (Z_1 + Z_2)$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E} - \dot{E}^*}{Z_1 + Z_2} = \frac{10 - (4 - 4j)}{1 + j + 2 - 2j} = \frac{6 + 4j}{3 - j} = \frac{6 + 4j}{3 - j} \cdot \frac{3 + j}{3 + j} = \frac{18 + 6j + 12j - 4}{9 + 1} = \frac{14 + 18j}{10} =$$

$$= \frac{7}{5} + \frac{9}{5}j$$

Calcoliamo il modulo di $\dot{I}$:

$$|\dot{I}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{25} + \frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{130}}{5} \cong 2{,}28\ A$$

Calcoliamo le potenze attive e reattive dissipate da Z_1 e Z_2:

$$P_{Z_1} = Re[Z_1] \cdot |\dot{I}|^2 = 1 \cdot (2{,}28)^2 \cong 5{,}2\ W$$

$$Q_{Z_1} = Im[Z_1] \cdot |\dot{I}|^2 = 1 \cdot (2{,}28)^2 \cong 5{,}2\ VAR$$

$$P_{Z_2} = Re[Z_2] \cdot |\dot{I}|^2 = 2 \cdot (2{,}28)^2 \cong 10{,}4\ W$$

$$Q_{Z_2} = Im[Z_2] \cdot |\dot{I}|^2 = -2 \cdot (2{,}28)^2 \cong -10{,}4\ VAR$$

Calcoliamo adesso le potenze attive e reattive generate da $\dot{E}$ ed $\dot{E}^*$. In primis calcoliamo la fase della tensione e della corrente per ognuno dei due generatori:

$$\theta_{\dot{E}} = \tan^{-1}\left(\frac{0}{10}\right) = 0^\circ$$

$$\theta_{\dot{E}^*} = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{4}\right) = -45^\circ$$

$$\theta_{\dot{I}} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}\right) = 52{,}13^\circ$$

Adesso calcoliamo i moduli di $\dot{E}$ ed $\dot{E}^*$:

$|\dot{E}| = 10\,V$

$|\dot{E}^*| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5{,}66\,V$

Dunque, risulta:

$P_{\dot{E}} = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 10 \cdot 2{,}28 \cdot \cos(0 - 52{,}13^\circ) = 22{,}8 \cdot 0{,}61 \cong$

$\cong 13{,}9\,W$

$Q_{\dot{E}} = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin(\theta_{\dot{E}} - \theta_{\dot{I}}) = 10 \cdot 2{,}28 \cdot \sin(0 - 52{,}13^\circ) =$

$= 22{,}8 \cdot (-0{,}79) \cong -18\,VAR$

$P_{\dot{E}^*} = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos\varphi = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}| \cdot \cos(\theta_{\dot{E}^*} - \theta_{\dot{I}}) = 5{,}66 \cdot 2{,}28 \cdot \cos(-45^\circ - 52{,}13^\circ) =$

$= 12{,}9 \cdot (-0{,}12) \cong -1{,}55\,W$

$Q_{\dot{E}^*} = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin\varphi = |\dot{E}^*| \cdot |\dot{I}| \cdot \sin(\theta_{\dot{E}^*} - \theta_{\dot{I}}) = 5{,}66 \cdot 2{,}28 \cdot \sin(-45^\circ - 52{,}13^\circ) \cong$

$\cong 12{,}9 \cdot (-1) = -12{,}9\,VAR$

Tuttavia, osserviamo che, poiché la corrente è entrante nel morsetto positivo di E^*, per la convenzione degli utilizzatori, la potenza sarà assorbita negativa (generata positiva). Dunque:

$P_{\dot{E}^*} = 1{,}55\,W$

$Q_{\dot{E}^*} = 12{,}9\,VAR$

Effettuiamo il bilancio delle potenze attive dissipate e generate:

$P_{Z_1} + P_{Z_2} = P_{\dot{E}} + P_{\dot{E}^*}$

$5{,}2 + 10{,}4 = 13{,}9 + 1{,}55$

$15{,}6\,W \cong 15{,}45\,W$

Il bilancio delle potenze attive è verificato.

Effettuiamo il bilancio delle potenze reattive dissipate e generate:

$Q_{Z_1} + Q_{Z_2} = Q_{\dot{E}} + Q_{\dot{E}^*}$

$5{,}2 - 10{,}4 = -18 + 12{,}9$

$-5{,}2\,VAR \cong -5{,}1\,VAR$

Il bilancio delle potenze reattive è verificato.

ESAME DEL 12/02/2024

N° 1 – Per la rete di figura, effettuare il bilancio delle potenze evidenziando i termini relativi ai singoli bipoli.

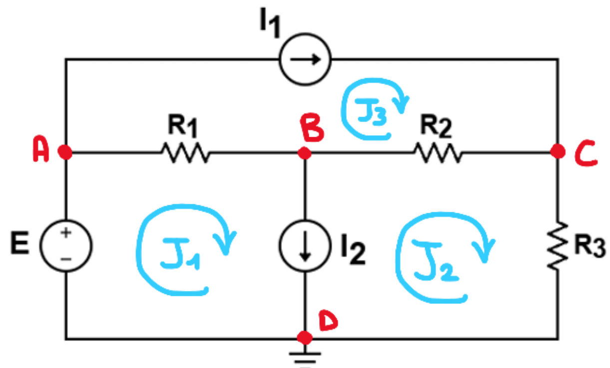
Dati:

E = 10 [V];

I_1=4 [A]; I_2=5 [A];

R_1 = 1 [Ω]; R_2 = 1 [Ω];

R_3 = 2 [Ω].



Si osservi che è possibile individuare una supermaglia formata dalle due maglie inferiori. Utilizziamo il metodo delle correnti di maglia scrivendo la dovuta equazione di vincolo:

$$\begin{cases} I_2 = j_1 - j_2 \\ E = j_1 R_1 + j_2(R_2 + R_3) - j_3(R_1 + R_2) \\ I_1 = j_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = I_2 + j_2 \\ E = I_2 R_1 + j_2 R_1 + j_2(R_2 + R_3) - I_1(R_1 + R_2) \\ I_1 = j_3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} j_1 = 5 + j_2 \\ 10 = 5 + j_2 + 3j_2 - 8 \\ j_3 = 4\ A \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_1 = 5 + 3{,}25 = 8{,}25\ A \\ j_2 = \dfrac{13}{4} = 3{,}25\ A \\ j_3 = 4\ A \end{cases}$$

Conoscendo queste correnti, possiamo ricavare le potenze dissipate dai resistori e quella generata dal generatore di tensione:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot (j_1 - j_3)^2 = 1 \cdot (8{,}25 - 4)^2 = 1 \cdot (4{,}25)^2 \cong 18{,}06\ W$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot (j_2 - j_3)^2 = 1 \cdot (3{,}25 - 4)^2 = 1 \cdot (-0{,}75)^2 \cong 0{,}56\ W$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot (j_2)^2 = 2 \cdot (3{,}25)^2 \cong 21{,}13\ W$$

$$P_E = V_E \cdot I_E = E \cdot j_1 = 10 \cdot 8{,}25 = 82{,}5\ W$$

Guardando il circuito, notiamo che:

$V_A = E = 10\ V$

Inoltre, dato che D è posto a massa:

$V_D = 0\ V$

Per ricavare i potenziali ai nodi incogniti, utilizziamo il metodo dei potenziali nodali:

$$\begin{cases} -I_2 = V_B \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \\ I_1 = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} -5 = 2V_B - 10 - V_C \\ 4 = 1{,}5V_C - V_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (1{,}5V_C - 4) = 5 + V_C \\ V_B = 1{,}5V_C - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V_C - 8 = 5 + V_C \\ V_B = 1{,}5V_C - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_C = \frac{13}{2} = 6{,}5\ V \\ V_B = 1{,}5 \cdot (6{,}5) - 4 = 5{,}75\ V \end{cases}$$

Conoscendo i potenziali ai nodi, possiamo calcolare la differenza di potenziale dei generatori di corrente e calcolarne le potenze erogate:

$V_{I_1} = V_{CA} = V_C - V_A = 6{,}5 - 10 = -3{,}5\ V$

$V_{I_2} = V_{DB} = V_D - V_B = 0 - 5{,}75 = -5{,}75\ V$

$P_{I_1} = V_{I_1} \cdot I_1 = -3{,}5 \cdot 4 = -14\ W$

$P_{I_2} = V_{I_2} \cdot I_2 = -5{,}75 \cdot 5 = -28{,}75\ W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} = P_{I_1} + P_{I_2} + P_E$

$18{,}06 + 0{,}56 + 21{,}13 = 82{,}5 - 14 - 28{,}75$

$39{,}75\ W = 39{,}75\ W$

Il bilancio delle potenze è verificato.

N° 2 – La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto chiuso. All'istante t = 0 l'interruttore si apre, determinare l'andamento di *vc(t)* per t ≥ 0.

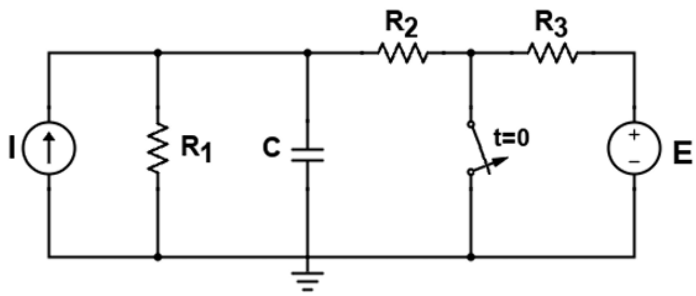
Dati:

E = *20 [V]*; I = *10 [A]*;

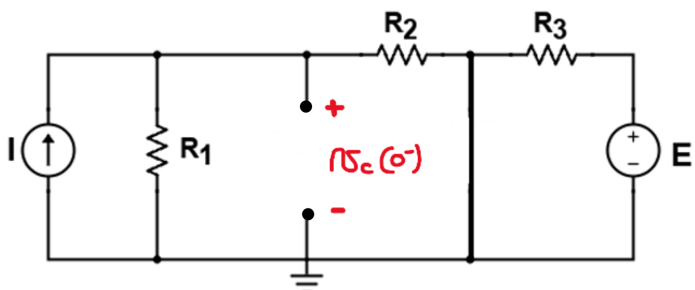
R_1 = *10 [Ω]*; R_2 = *20 [Ω]*;

R_3 = *40 [Ω]*;

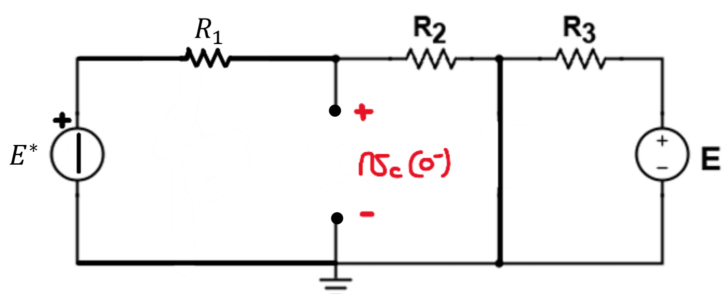
C = *20 [mF]*.



Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente è il seguente:



Trasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:

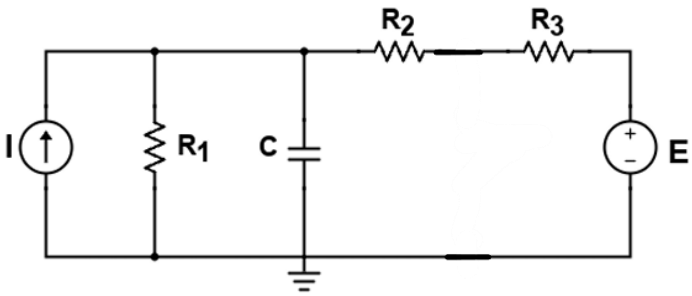


$E^* = I \cdot R_1 = 10 \cdot 10 = 100\ V$

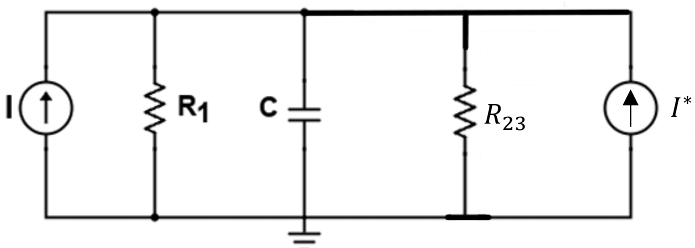
Possiamo ricavare $v_C(0^-)$ applicando il partitore di tensione:

$$v_C(0^-) = E^* \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \cdot \frac{20}{30} = \frac{2000}{30} \cong 66{,}67\ V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



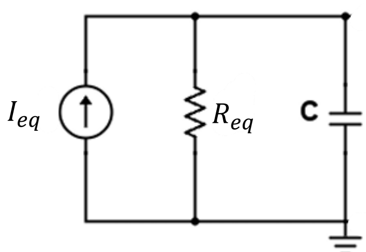
Calcoliamo la serie R_{23} e trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente:



$$R_{23} = R_2 + R_3 = 20 + 40 = 60\ \Omega$$

$$I^* = \frac{E}{R_{23}} = \frac{20}{60} \cong 0{,}33\ A$$

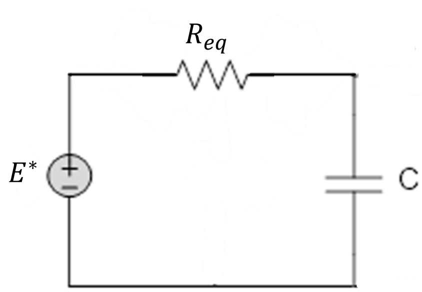
I generatori di corrente e le resistenze sono in parallelo, quindi calcoliamo I_{eq} e R_{eq}:



$$I_{eq} = I + I^* = 10 + 0{,}33 = 10{,}33\ A$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_{23}}{R_1 + R_{23}} = \frac{10 \cdot 60}{10 + 60} = \frac{600}{70} \cong 8{,}57\ \Omega$$

Ritrasformiamo il generatore di corrente in generatore di tensione:



$E^* = I_{eq} \cdot R_{eq} = 10{,}33 \cdot 8{,}57 \cong 88{,}53\ V$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$v_R = R \cdot i_R$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_E = i_R = i_C$

LKT) $E^* - v_R - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_R = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_R = R \cdot i_R = R \cdot i_C$

$\Rightarrow v_C + R \cdot i_C = E^*$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$v_C + R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{R_{eq}C} = -\frac{1}{8{,}57 \cdot 0{,}02} \cong -5{,}83\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-5{,}83t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = k'$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot k' = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

$$k' = E^* = 88{,}53\ V$$

$$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-5{,}83t} + 88{,}53$$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$$v_C(0) = 66{,}67\ V$$

$$66{,}67 = k \cdot e^0 + 88{,}53$$

$$\Rightarrow k = 66{,}67 - 88{,}53 = -21{,}86$$

Sostituendo nella soluzione dell'equazione differenziale, osserviamo che v_C è costante nel tempo:

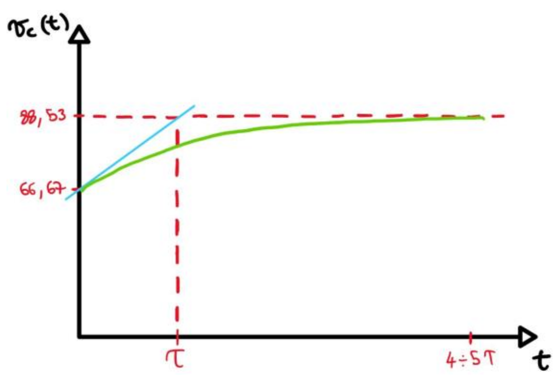
$$v_C(t) = -21{,}86 \cdot e^{-5{,}83t} + 88{,}53$$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$$\tau = R_{eq}C = 8{,}57 \cdot 0{,}02 \cong 0{,}17\ s$$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 66{,}67\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 88{,}53\ V$



ESAME DEL 10/04/2024

N° 1 – Per la rete di figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai capi del resistore R3.
Dati:

E = 10 [V];

I=10 [A];

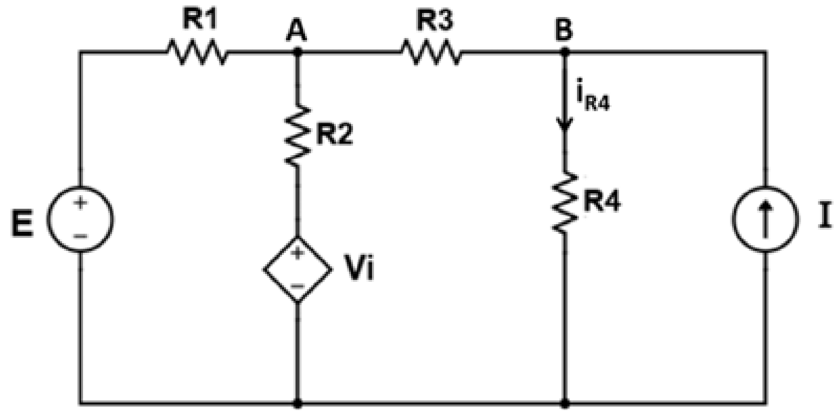
R_1 = 2 [Ω];

R_2 = R_3 = 4 [Ω];

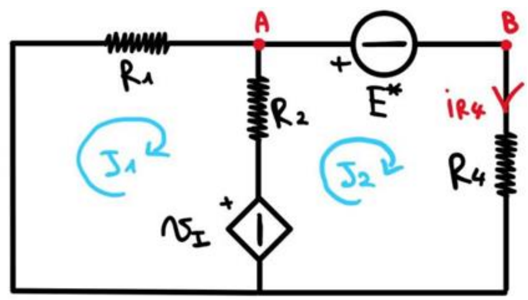
R_4 = 1 [Ω];

V_i = Rmi_{R4};

Rm = 2 [Ω].



Data la presenza di un generatore pilotato, per trovare la resistenza equivalente del circuito di Thevenin dobbiamo spegnere tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito ed eliminare il carico (in questo caso R_3) presente tra i morsetti A-B, inserendo al suo posto un generatore di tensione E^* del valore convenzionale di 1 V:



Per trovare I_{BA}, applichiamo il metodo delle correnti di maglia:

$$\begin{cases} -v_I = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ v_I - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1 R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(R_m \cdot i_{R_4}) = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ (R_m \cdot i_{R_4}) - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1 R_2 \end{cases}$$

Ma $i_{R_4} = j_2$, quindi:

$$\begin{cases} -R_m j_2 = j_1(R_1 + R_2) - j_2 R_2 \\ R_m j_2 - E^* = j_2(R_2 + R_4) - j_1 R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = j_1(R_1 + R_2) - j_2(R_2 - R_m) \\ -E^* = j_2(R_2 + R_4 - R_m) - j_1 R_2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 0 = 6j_1 - 2j_2 \\ -1 = 3j_2 - 4j_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_2 = 3j_1 \\ -1 = 3 \cdot (3j_1) - 4j_1 \end{cases}$$

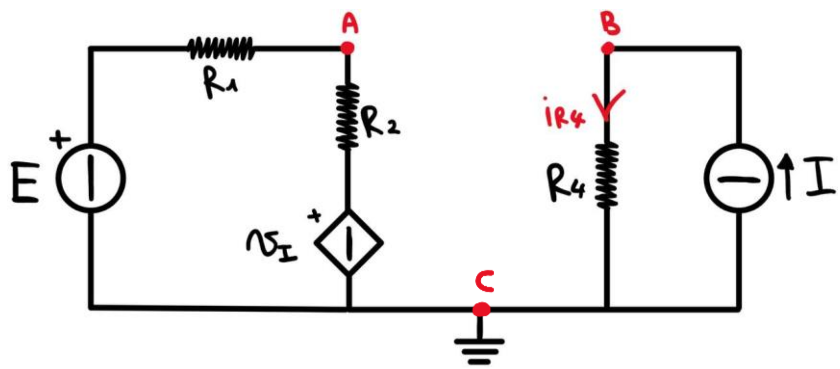
$$\begin{cases} j_2 = 3j_1 \\ -1 = 5j_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_2 = 3 \cdot (-0{,}2) = -0{,}6\ A \\ j_1 = -\dfrac{1}{5} = -0{,}2\ A \end{cases}$$

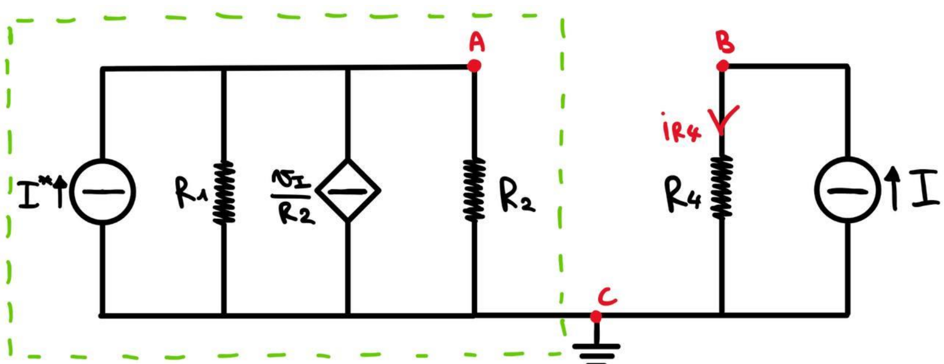
Ma $I_{BA} = -j_2 = 0{,}6\ A$, dunque:

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{BA}} = \frac{1}{0{,}6} \cong 1{,}67\ \Omega$$

Per trovare la tensione equivalente di Thevenin, dobbiamo considerare che questa è pari alla differenza di potenziale V_{AB} tra i due nodi A-B a circuito aperto (rete a vuoto).



Trasformiamo il generatore di tensione in generatore di corrente e il generatore di tensione pilotato in corrente in generatore di corrente pilotato in tensione:



$$I^* = \frac{E}{R_1} = \frac{10}{2} = 5\ A$$

Si osservi che è possibile ricavare la tensione V_{AC} applicando il teorema di Millmann alla parte sinistra del circuito:

$$V_{AC} = \frac{I^* + \frac{0}{R_1} + \frac{v_I}{R_2} + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{5 + \frac{R_m i_{R_4}}{R_2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{5 + \frac{1}{2} I}{\frac{3}{4}} = \frac{40}{3} \cong 13{,}33\ V$$

E poiché $V_C = 0\ V$:

$$V_{AC} = V_A - V_C = 13{,}33\ V = V_A$$

Tramite la legge di Ohm, si osserva che:

$$V_B = I \cdot R_4 = 10 \cdot 1 = 10\ V$$

Dunque:

$$E_{eq} = V_{AB} = V_A - V_B = 13{,}33 - 10 = 3{,}33\ V$$

N° 2 – Per il circuito lineare di figura, determinare la risposta in frequenza per la funzione di rete H(jω) = $\dot{V}2/\dot{V}1$.

Dati:

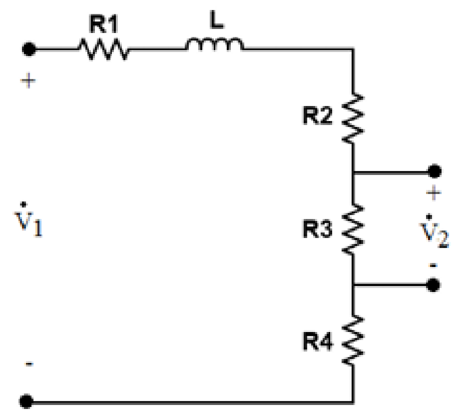
R₁ = *2 [Ω]*;

R₂ = *4 [Ω]*;

R₃ = *8 [Ω]*;

R₄ = *1 [Ω]*;

L = *2 [H]*.



Si definisce funzione di rete il rapporto tra il fasore della grandezza di uscita e il fasore della grandezza di ingresso:

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}$$

La tensione $\dot{V}_2$ è pari alla tensione ai capi di Z_{R_3}:

$$\dot{V}_2 = Z_{R_3} \cdot \dot{I}_{R_3} = Z_{R_3} \cdot \frac{\dot{V}_1}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2} + Z_{R_3} + Z_{R_4}}$$

Di conseguenza:

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{Z_{R_3}}{Z_{R_1} + Z_L + Z_{R_2} + Z_{R_3} + Z_{R_4}} = \frac{R_3}{R_1 + j\omega L + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{R_3}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + j\omega L}$$

Calcoliamo il modulo della funzione di rete:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{R_3^2 + 0^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R_3}{\sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + (\omega L)^2}}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{R_3}{\sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{8}{2 + 4 + 8 + 1} =$$

$$= \frac{8}{15} \cong 0{,}53$$

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{R_3}{\sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 + (\omega L)^2}} = 0$$

Calcoliamo la fase della funzione di rete:

$$\angle H(j\omega) = \angle\frac{R_3}{(R_1+R_2+R_3+R_4)+j\omega L} = \tan^{-1}\frac{0}{R_3} - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2+R_3+R_4} =$$

$$= 0 - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

Calcoliamone i limiti:

$$\lim_{\omega\to 0}\angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to 0}\left(-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2+R_3+R_4}\right) = 0$$

$$\lim_{\omega\to \infty}\angle H(j\omega) = \lim_{\omega\to \infty}\left(-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R_1+R_2+R_3+R_4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Determiniamo il valore della frequenza di taglio:

$$|H(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_3}{\sqrt{(R_1+R_2+R_3+R_4)^2+(\omega_T L)^2}} = \frac{0{,}53}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_3^2}{(R_1+R_2+R_3+R_4)^2+(\omega_T L)^2} = \frac{0{,}28}{2}$$

$$\frac{R_3^2}{(R_1+R_2+R_3+R_4)^2+(\omega_T L)^2} = 0{,}14$$

$$R_3^2 = 0{,}14\cdot[(R_1+R_2+R_3+R_4)^2+(\omega_T L)^2]$$

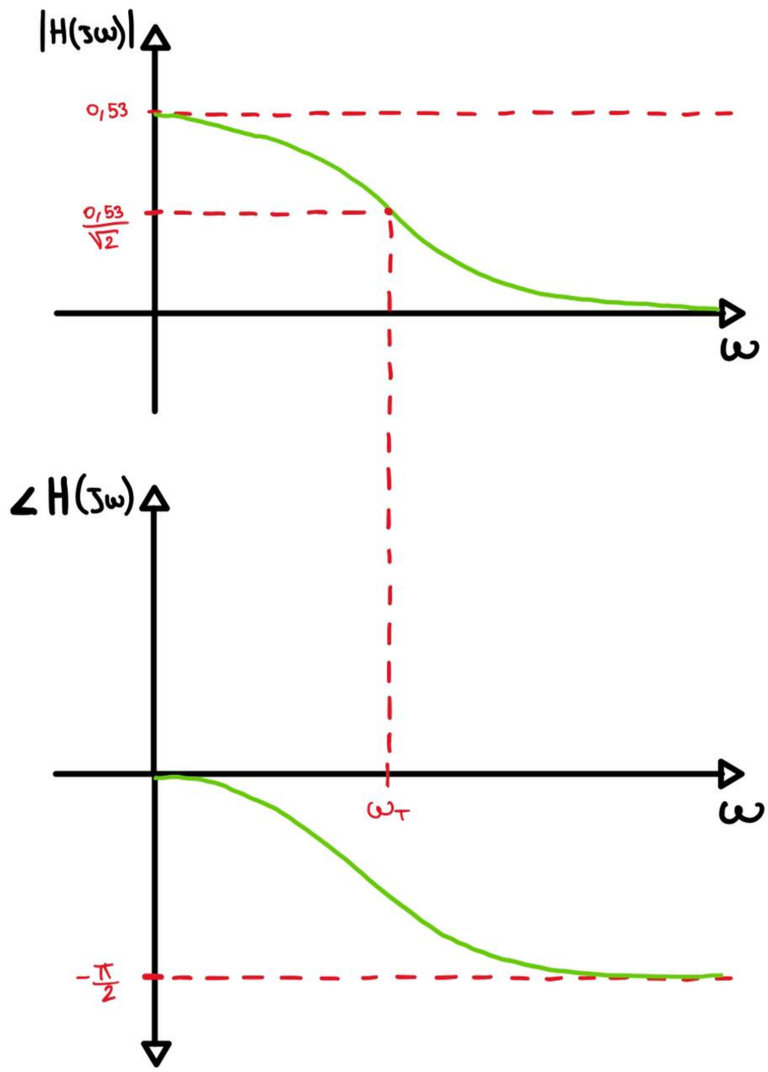
$$64 = 0{,}14\cdot[225+4\omega_T^2]$$

$$64 = 31{,}5+0{,}56\omega_T^2$$

$$\omega_T^2 = \frac{32{,}5}{0{,}56} \cong 58$$

$$\omega_T = \sqrt{58} \cong 7{,}62\ rad/s$$

Tracciamo gli andamenti qualitativi:


|H(jω)|
0,53
0,53/√2
ω
∠H(jω)
ω_T
ω
-π/2

ESAME DEL 10/06/2024

N° 1 – Per il circuito lineare di figura, effettuare il bilancio delle potenze evidenziando i termini relativi ai singoli bipoli.

Dati:

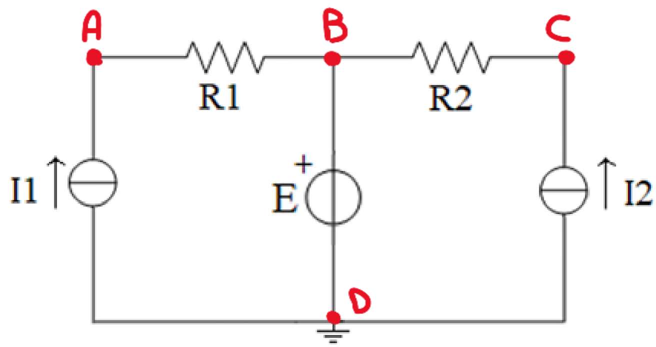
$I_1 = 2$ [A];

$I_2 = 4$ [A];

$E = 10$ [V];

$R_1 = 1$ [Ω];

$R_2 = 2$ [Ω].



Conoscendo la corrente che scorre in R_1 e R_2:

$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot 2^2 = 4\ W$

$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 2 \cdot 4^2 = 32\ W$

Noi sappiamo che:

$V_B = E = 10\ V$

Utilizziamo il metodo dei potenziali nodali per calcolare i potenziali ai nodi incogniti:

$$A)\ I_1 = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_1}\right)$$

$$C)\ I_2 = V_C \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2}\right)$$

Sostituiamo i valori:

$A)\ 2 = V_A - V_B$

$C)\ 4 = 0{,}5V_C - 0{,}5V_B$

$A)\ 2 = V_A - 10$

$C)\ 4 = 0{,}5V_C - 5$

Dunque:

$V_A = 12\ V$

$$V_C = \frac{9}{0{,}5} = 18\ V$$

Non ci resta che calcolare le potenze erogate dai generatori:

$P_{I_1} = V_{AD} \cdot I_1 = (V_A - V_D) \cdot I_1 = V_A \cdot I_1 = 12 \cdot 2 = 24\ W$

$P_{I_2} = V_{CD} \cdot I_2 = (V_C - V_D) \cdot I_2 = V_C \cdot I_2 = 18 \cdot 4 = 72\ W$

$P_E = E \cdot I_E = E \cdot (I_1 + I_2) = 10 \cdot 6 = 60\ W$

Tuttavia, poiché la corrente entra nel morsetto positivo di E, per la convenzione degli utilizzatori si avrà una potenza assorbita positiva (e quindi una potenza generata negativa). Dunque:

$P_E = -60\ W$

Effettuiamo il bilancio delle potenze:

$P_{R_1} + P_{R_2} = P_{I_1} + P_{I_2} + P_E$

$4 + 32 = 24 + 72 - 60$

$36\ W = 36\ W$

Il bilancio delle potenze è verificato.

N° 2 – La rete di figura si trova inizialmente a regime con il tasto chiuso. All'istante t=0 il tasto si apre, determinare l'andamento di *vc(t)* per t ≥ 0.

Dati:

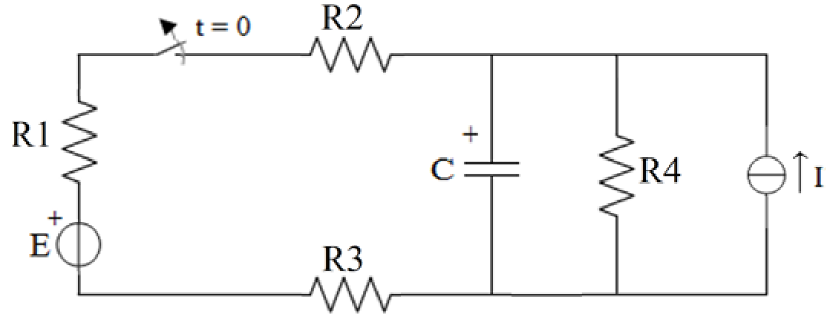
E = 100 [V];

I = 2 [A];

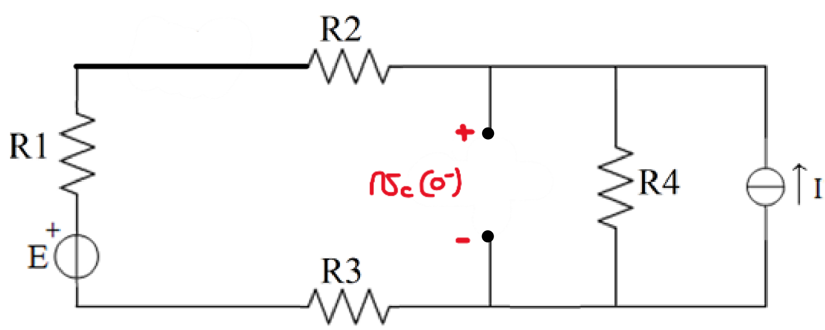
$R_1 = R_2 = 10$ [Ω];

$R_3 = R_4 = 10$ [Ω];

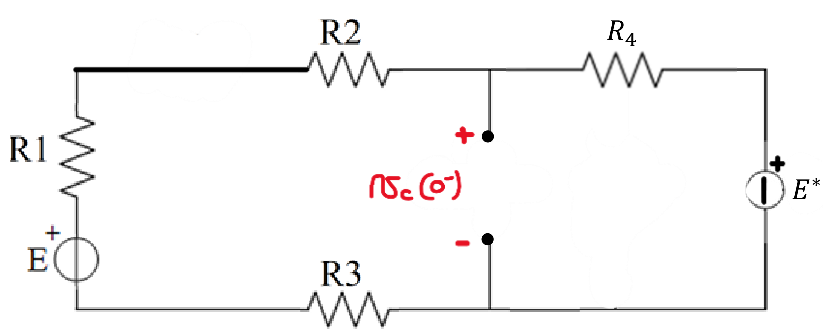
C = 2 [mF].



Per $t < 0$ il condensatore è carico, dunque si comporta da circuito aperto e il circuito equivalente risulta il seguente:

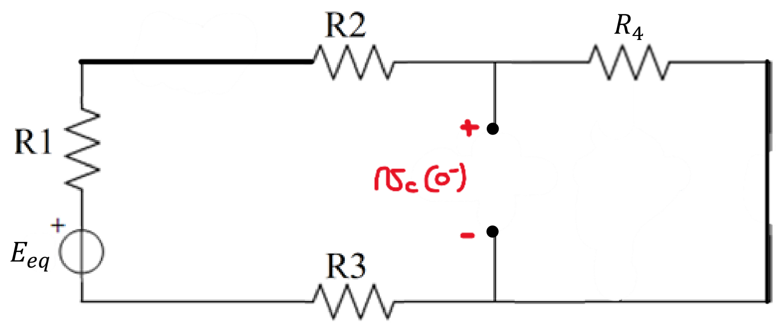


Trasformiamo il generatore di corrente I in generatore di tensione E^*:



$E^* = I \cdot R_4 = 2 \cdot 10 = 20\ V$

I due generatori di tensione sono in serie, dunque il circuito diventa:

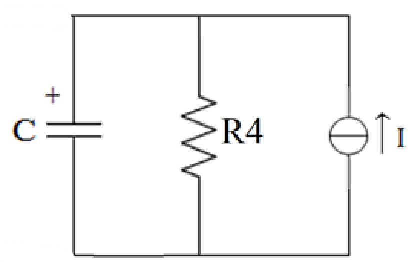


$E_{eq} = E - E^* = 100 - 20 = 80\ V$

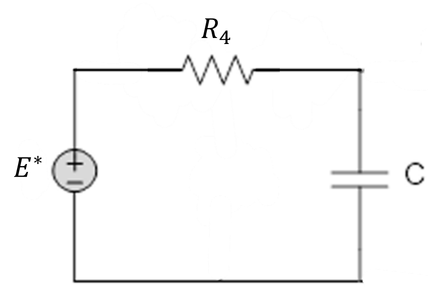
Possiamo ricavare $v_C(0^-)$ applicando il partitore di tensione:

$$v_C(0^-) = E_{eq} \cdot \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 80 \cdot \frac{10}{40} = 20\ V$$

Per $t \geq 0$ il condensatore inizia a scaricarsi e l'interruttore diventa un circuito aperto. Dunque, il circuito assume questa forma:



Trasformando il generatore di corrente in generatore di tensione e ruotando il circuito, si ottiene:



$E^* = I \cdot R_4 = 2 \cdot 10 = 20\ V$

Scriviamo le equazioni costitutive:

$v_R = R \cdot i_R$

$$i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$$

$$v_c(t) = V_0 + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(t)\, dt$$

Scriviamo LKI ed LKT:

LKI) $i_E = i_R = i_C$

LKT) $E^* - v_R - v_C = 0 \Rightarrow v_C + v_R = E^*$

Troviamo l'equazione differenziale nella $v_c(t)$:

$v_R = R \cdot i_R = R \cdot i_C$

$\Rightarrow v_C + R \cdot i_C = E^*$

Dato che $i_C = C \cdot \frac{dV_C}{dt}$:

$$v_C + R \cdot C \cdot \frac{dV_C}{dt} = E^*$$

Rendiamo unitario il coefficiente della derivata prima:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

La soluzione di questa equazione differenziale sarà del tipo:

$$v_C(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t)$$

Calcoliamo l'omogenea associata:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0$$

Questa equazione ha soluzione del tipo:

$$v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t}$$

Sostituiamo nell'omogenea associata e troviamo S_0:

$$\frac{dke^{S_0 t}}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$0 \cdot e^{S_0 t} + kS_0 e^{S_0 t} + \frac{1}{RC} \cdot ke^{S_0 t} = 0$$

$$\Rightarrow S_0 = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{R_4 C} = -\frac{1}{10 \cdot 0{,}002} \cong -50\ Hz$$

$$\Rightarrow v_{ch}(t) = k \cdot e^{S_0 t} = k \cdot e^{-50t}$$

Calcoliamo l'integrale particolare:

$$v_{cp}(t) = k'$$

Sostituiamo nell'equazione di partenza:

$$\frac{dk'}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot k' = \frac{1}{RC} \cdot E^*$$

$k' = E^* = 20\ V$

$\Rightarrow v_C(t) = k \cdot e^{-50t} + 20$

Troviamo k imponendo la condizione iniziale:

$v_C(0) = 20\ V$

$20 = k \cdot e^0 + 20$

$\Rightarrow k = 20 - 20 = 0$

Sostituendo nella soluzione dell'equazione differenziale, osserviamo che v_C è costante nel tempo:

$v_C(t) = 0 \cdot e^{-50t} + 20 = 20\ V$

Tracciamo l'andamento qualitativo:

$\tau = R_4 C = 10 \cdot 0{,}002 = 0{,}02\ s$

Per $t \to 0 \Rightarrow v_C(0) = 20\ V$

Per $t \to \infty \Rightarrow v_C(\infty) = 20\ V$

Se l'asse delle ordinate rappresenta le $v_C(t)$ e quello delle ascisse rappresenta il tempo t, l'andamento qualitativo corrisponde a una retta costante orizzontale passante per $y = 20$.