

BLOCCO UTILITIES ENHANCED

[Scrivere un sunto, ovvero un breve riepilogo del documento, significativo e in grado di attrarre l'attenzione del lettore. Per aggiungere contenuto, è sufficiente fare clic qui e iniziare a digitare.]

[Sottotitolo del
documento]

UTILITIES

PREGHIERINE DI GARBO

Simmetria delle funzioni seno e coseno

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ Il seno è una funzione a simmetria dispari

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ Il coseno è una funzione a simmetria pari

Identità fondamentale della trigonometria

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Formule di duplicazione

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & \Rightarrow \sin^2(\alpha) &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{aligned}$$

Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

I segni + o - non sono arbitrari, ma dipendono dal quadrante in cui cade $\alpha/2$:

Quadrante di $\frac{\alpha}{2}$	$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
<i>I</i> ($0^\circ - 90^\circ$)	+	+
<i>II</i> ($90^\circ - 180^\circ$)	+	-
<i>III</i> ($180^\circ - 270^\circ$)	-	-
<i>IV</i> ($270^\circ - 360^\circ$)	-	+

Formule di Werner

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

Formule di prostaferesi

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Formule di Eulero

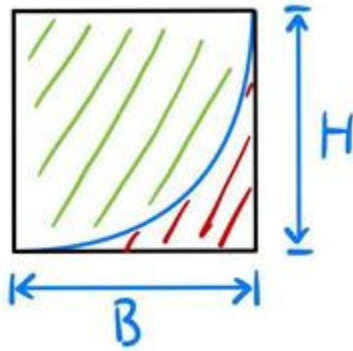
$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Teorema di Archimede

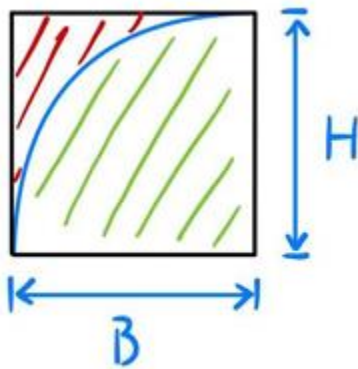
Dato un arco di parabola con concavità verso l'alto, racchiuso in un rettangolo di base B e altezza H , si considerino l'area A sottesa dall'arco di parabola e l'area A^c ad essa complementare. Risulta:



$$A = \frac{BH}{3}$$

$$A^c = \frac{2BH}{3}$$

Analogamente, se l'arco di parabola ha concavità verso il basso, risulta:



$$A = \frac{2BH}{3}$$

$$A^c = \frac{BH}{3}$$

UTILITIES

CAPITOLO 0

Definizione di segnale

Una grandezza fisica alla cui variazione rispetto a determinate variabili (ad esempio il tempo) è associata una certa quantità di informazione, costituisce un segnale.

Classificazione di un segnale

Esistono quattro tipi di classificazioni per i segnali:

- Fenomenologica:
si basa sul tipo di evoluzione subita dal segnale in funzione delle variabili indipendenti. Secondo tale classificazione, i segnali si dividono in:
 - Determinati: sono segnali i cui valori assunti in corrispondenza di un qualsiasi istante sono conosciuti esattamente. Segnali di questo tipo sono perfettamente ripetibili e rappresentabili mediante funzioni (reali o complesse) di un certo numero di variabili indipendenti. Il loro studio si affronta mediante l'utilizzo di algoritmi matematici che presuppongono una rappresentazione analitica del segnale.
 - Aleatori: sono segnali il cui andamento temporale è imprevedibile, pur potendone determinare alcune caratteristiche medie. Un segnale di questo tipo può assumere forme diverse anche se osservato in esperimenti effettuati nelle medesime condizioni. Segnali di questo tipo, per la loro natura casuale, non sono rappresentabili mediante funzioni, a meno che queste non vengano costruite sulla base di una manifestazione del segnale ottenuta a posteriori. Il loro studio si affronta mediante l'utilizzo di metodologie di analisi statistiche basate sulla teoria della probabilità.
- Morfologica:
si basa sul carattere continuo (C) o discreto (D) dell'ampiezza del segnale o delle variabili da cui dipende la sua evoluzione. Secondo tale classificazione, i segnali si dividono in:

- Analogici: detti anche a tempo continuo, sono segnali in cui la variabile t può assumere valori nell'intervallo di ampiezza finita $[-a, +a]$ o infinita $(-\infty, +\infty)$.
 - Campionati: detti anche a tempo discreto, sono segnali in cui la variabile t può assumere valori in un insieme al più numerabile (insieme finito che ha la stessa cardinalità di \mathbb{N}) di valori $\{t_n\}$ con $t_{n-1} < t_n < t_{n+1}$. Normalmente, gli istanti di tempo t_n si succedono con regolarità secondo la relazione $t_n = n \cdot T$ (con n costante di proporzionalità e T periodo).
 - Discreti in ampiezza: sono segnali la cui ampiezza può assumere un insieme finito o al più numerabile di valori $\{q_n\}$ con $q_{n-1} \leq q_n \leq q_{n+1}$. A loro volta si suddividono in:
 - ★ Quantizzati: sono segnali discreti in ampiezza a tempo continuo.
 - ★ Digitali: detti anche numerici, sono segnali discreti in ampiezza a tempo discreto.
- Energetica:

Si definisce *energia specifica* associata ad un segnale (a tempo continuo) rappresentato da una funzione definita su tutto l'asse dei tempi a valori generalmente complessi, la quantità:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$$

Tale energia è detta specifica poiché essa rappresenterebbe l'energia effettivamente dissipata su una resistenza di valore unitario che venisse attraversata da una corrente $s(t)$.

Si definisce *potenza (media) specifica*, in accordo con la formula precedente, la quantità:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Per segnali a tempo discreto valgono invece le seguenti:

$$E = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(nT)|^2$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \cdot \sum_{n=-N}^N |s(nT)|^2$$

In base a tale classificazione, dunque, i segnali possono essere:

- Ad energia finita: sono segnali per cui l'energia specifica è finita (e la potenza specifica è nulla).
 - A potenza finita: sono segnali per cui la potenza specifica è finita e non nulla (e l'energia specifica è non finita).
- Dimensionale:
si basa sul numero di variabili indipendenti da cui il segnale dipende. A seconda di tale numero questi segnali possono dunque essere monodimensionali, bidimensionali, tridimensionali ecc.

UTILITIES

CAPITOLO 1

Funzioni sommabili

Una funzione $f(x)$ si dice sommabile su un insieme E ($f(x) \in \mathcal{L}(E)$) se risulta:

$$\int_E f(x) dx < \infty$$

Disuguaglianza di valore assoluto per integrali

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq \int_E |f(x)| dx$$

Funzioni a quadrato sommabile

Una funzione $f(x) \in \mathcal{L}^p(E)$ con $p \in \mathbb{N}$ se risulta:

$$\int_E |f(x)|^p dx < \infty$$

In particolare, per $p = 2$ si dice che la funzione è a quadrato sommabile.

Disuguaglianza di Schwarz per funzioni

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema di Lebesgue

Sia $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni sommabili su un insieme misurabile E che converge quasi ovunque ad una funzione $f(x)$. Se esiste una $\varphi(x)$ sommabile su E tale che $\forall n$ risulti $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, allora:

1. $f(x)$ è sommabile su E .
2. Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

Proprietà della distanza euclidea

La distanza è un'applicazione del tipo $d(x, y): A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$; Disuguaglianza triangolare

Proprietà della norma

La norma è un'applicazione del tipo $\|x\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

Proprietà del prodotto scalare

Il prodotto scalare è un'applicazione del tipo $\langle x, y \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$;
2. $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = o$;
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda^* y \rangle$;
4. $\langle (x + y), z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

Disuguaglianza di Schwarz per segnali

$$|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \langle x_1, x_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle x_2, x_2 \rangle^{\frac{1}{2}}$$

UTILITIES

CAPITOLO 2

Prodotto scalare tra segnali

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt$$

Se $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, s_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) dt$$

Se $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$ i due segnali si dicono **ortogonali**.

Norma di un segnale

$$||s|| = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}$$

Due segnali ortogonali aventi entrambi norma unitaria si dicono **ortonormali**.

Distanza tra segnali

$$d(s_1, s_2) = ||s_1 - s_2|| = \sqrt{\langle s_1 - s_2, s_1 - s_2 \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt}$$

UTILITIES

CAPITOLO 3

Potenza specifica di un segnale periodico

$$P = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Serie di Fourier in forma esponenziale

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt$$

Serie di Fourier in forma trigonometrica

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) + B_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) dt$$

Proprietà della serie di Fourier

Proprietà	Segnale	Coefficiente ennesimo dello sviluppo in serie di Fourier
Linearità	$\sum_{i=1}^k a_i s_i(t)$	$\sum_{i=1}^k a_i S_{in}$
Inversione nel dominio del tempo	$s(-t)$	S_{-n}
Segnale coniugato	$s^*(t)$	S_{-n}^*
Coefficienti coniugati	$s^*(-t)$	S_n^*
Traslazione nel dominio del tempo	$s(t - t_0)$	$e^{-j2\pi n f_0 t} S_n$
Traslazione nel dominio della frequenza	$e^{-j2\pi p f_0 t} s(t)$	S_{n+p}
Convoluzione nel dominio del tempo	$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t - \tau) s_2(\tau) d\tau$	$S_{1n} \cdot S_{2n}$
Convoluzione nel dominio della frequenza	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{1m} S_{2(n-m)}$

UTILITIES

CAPITOLO 4

Trasformata e antitrasformata di Fourier

$$\mathfrak{F}[s(t)] = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\mathfrak{F}^{-1}[S(f)] = s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Poiché generalmente la trasformata di una funzione risulta complessa, essa si può scrivere anche come segue:

$$S(f) = S_R(f) + j S_I(f) = |S(f)| \cdot e^{j\theta(f)}$$

Con $S_R(f)$ e $S_I(f)$ funzioni reali.

Trasformata di Fourier di segnali reali

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \boxed{\text{Si applicano le formule di Eulero}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt \end{aligned}$$

Dove:

$$S_R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt$$

$$S_I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi ft) dt$$

La parte reale $S_R(f)$ è pari $\Rightarrow S_R(-f) = S_R(f)$.

La parte immaginaria $S_I(f)$ è dispari $\Rightarrow S_I(-f) = -S_I(f)$.

Dunque:

$$S(-f) = S_R(-f) + j S_I(-f) = S_R(f) - j S_I(f) = (S_R(f) + j S_I(f))^* = S^*(f)$$

Ovvero la trasformata di Fourier di un segnale reale presenta una simmetria di tipo hermitiano:

$$S(-f) = S^*(f)$$

Trasformata di Fourier di un segnale a simmetria pari

Se $s(t)$ è a simmetria pari, ovvero $s(-t) = s(t)$, risulta:

$$S_R(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi f t) dt$$

$$S_I(f) = 0$$

Quindi la trasformata $S(f)$ di $s(t)$ è:

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cdot \cos(2\pi f t) dt$$

Quindi la trasformata di Fourier di una funzione pari è pari.

Trasformata di Fourier di un segnale a simmetria dispari

Se $s(t)$ è a simmetria dispari, ovvero $s(-t) = -s(t)$, risulta:

$$S_R(f) = 0$$

$$S_I(f) = -2 \int_0^{\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi f t) dt$$

Quindi la trasformata $S(f)$ di $s(t)$ è:

$$S(f) = -2j \int_0^{\infty} s(t) \cdot \sin(2\pi f t) dt$$

Quindi la trasformata di Fourier di una funzione dispari è immaginaria dispari.

Proprietà della trasformata di Fourier

Proprietà	Segnale	Trasformata	Note
Linearità	$\sum_{i=1}^k a_i s_i(t)$	$\sum_{i=1}^k a_i S_i(f)$	a_i costanti
Simmetria	$S(f)$	$s(-t)$	
	$S(t)$	$s(-f)$	
Segnale coniugato	$s^*(t)$	$S^*(-f)$	
Trasformata coniugata	$s^*(-t)$	$S^*(f)$	
Traslazione nel dominio del tempo	$s(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0} \cdot S(f)$	$\forall t_0 \in \mathbb{R}$
Traslazione nel dominio della frequenza	$e^{\pm j2\pi f_0 t} \cdot s(t)$	$S(f \pm f_0)$	$\forall f_0 \in \mathbb{R}$
Cambiamento di scala	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$	$a \neq 0$
	$s\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \cdot S(fT)$	
Derivazione nel dominio del tempo	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n \cdot S(f)$	
Derivazione nel dominio della frequenza	$(-j2\pi t)^n \cdot s(t)$	$\frac{d^n S(f)}{df^n}$	
Convoluzione nel dominio del tempo	$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$	
Convoluzione nel dominio della frequenza	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\theta) S_2(f - \theta) d\theta$	

UTILITIES

CAPITOLO 5

Definizione di applicazione lineare

Siano D e C rispettivamente il dominio e il codominio di una funzione $g(\cdot)$, entrambi spazi vettoriali. La funzione $g(\cdot)$ è un'**applicazione lineare** se soddisfa le proprietà di **additività** (1) e **omogeneità** (2):

1. $\forall d_1, d_2 \in D \Rightarrow g(d_1 + d_2) = g(d_1) + g(d_2)$
2. $\forall d \in D, \forall \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow g(\lambda d) = \lambda \cdot g(d)$

Definizione di applicazione continua

Un'applicazione $g(\cdot)$ si dice **continua** se, presa una successione di elementi del dominio convergente a un certo valore, la successione delle immagini converge all'immagine del valore limite.

Definizione di funzioni di prova

Sia D lo spazio lineare detto **insieme delle funzioni di prova**, esso contiene le funzioni $\phi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano le due seguenti condizioni:

1. Sono di tipo c^∞ , ovvero **derivabili infinite volte** (infinitamente regolari).
2. Hanno **supporto limitato**, ovvero sono diverse da zero solo in un intervallo finito del dominio e valgono zero altrove.

Criterio di convergenza in D

Una successione $\{\phi_k\}_{k=0}^\infty$ converge alla funzione $\phi \in D$ se:

1. Esiste un intervallo limitato A contenente il supporto di tutte le funzioni ϕ_k .
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ e qualunque sia l'ordine n di derivazione, la derivata n -esima di $\phi_k(t)$ converge alla derivata n -esima di $\phi(t)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k^{(n)}(t) = \phi^{(n)}(t)$$

Definizione di distribuzione

Si dice distribuzione T ogni applicazione lineare e continua, a valori generalmente complessi, definita dallo spazio D delle funzioni di prova. Il valore assunto da T in corrispondenza di una data funzione di prova può essere indicato in due modi:

1. $T(\phi)$
2. $\langle T, \phi \rangle$ (NON è il prodotto scalare)

Insieme delle distribuzioni

L'insieme D' contenente tutte le distribuzioni in D , anche detto **spazio duale**, è uno spazio vettoriale in cui si definiscono due operazioni:

1. **Somma di distribuzioni:**

$$T = T_1 + T_2 \text{ se } \forall \phi \in D \Rightarrow T(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi)$$

Sommare due distribuzioni equivale a sommare i loro risultati sulle funzioni di prova.

2. **Prodotto per scalare complesso:**

$$\bar{T} = \lambda T \text{ se } \forall \phi \in D \Rightarrow \bar{T}(\phi) = \lambda T(\phi)$$

Il prodotto per scalare agisce direttamente sul risultato che la distribuzione dà sulla funzione di prova.

Distribuzioni regolari e singolari

Una funzione $f(t)$ localmente sommabile in \mathbb{R} , ovvero sommabile in ogni suo sottoinsieme limitato, individua la seguente **distribuzione regolare**:

$$T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(t) dt$$

Qualora una distribuzione non possa essere espressa mediante la precedente, si parla di **distribuzione singolare**.

È bene notare che, qualora due funzioni assumano valori diversi solamente in un insieme di misura nulla, allora esse definiscono la stessa distribuzione.

Esempi di distribuzioni

Gradino unitario

Data la funzione gradino unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Ad essa è associata la seguente distribuzione regolare:

$$u(\phi) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot \phi(t) dt = \int_0^{\infty} \phi(t) dt$$

Delta di Dirac

La delta di Dirac è una distribuzione singolare che associa ad ogni funzione $\phi(t)$ il valore che essa assume all'origine:

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

Pur essendo una distribuzione singolare, si può introdurre una notazione simile a quella riguardante le distribuzioni regolari:

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) dt = \phi(0)$$

In cui $\delta(t)$ rappresenta l'impulso di Dirac.

La delta di Dirac gode di alcune proprietà:

1. Moltiplicando una funzione $s(t)$ per una delta viene campionato il valore di $s(t)$ in corrispondenza del centro della delta:

$$\delta(t)s(t) = s(0) \rightarrow \delta(t - t_0)s(t) = s(t_0)$$

2. Convolvendo una funzione $s(t)$ con una delta si trasla il centro di $s(t)$ in corrispondenza del centro della delta:

$$\delta(t) * s(t) = s(t) \rightarrow \delta(t - t_0) * s(t) = s(t - t_0)$$

Quindi la delta di Dirac è l'elemento neutro della convoluzione.

3. Derivare una convoluzione tra due segnali significa convolvere la derivata del primo segnale con il secondo segnale o, analogamente, convolvere il primo segnale con la derivata del secondo segnale:

$$\begin{aligned}(s_1(t) * s_2(t))' &= (s_1(t) * s_2(t)) * \delta'(t) = s_1(t) * s_2(t) * \delta'(t) = \\ &= s_1(t) * (s_2(t) * \delta'(t)) = s_1(t) * s_2'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s_1(t) * s_2(t))' &= (s_1(t) * s_2(t)) * \delta'(t) = s_1(t) * \delta'(t) * s_2(t) = \\ &= (s_1(t) * \delta'(t)) * s_2(t) = s_1'(t) * s_2(t)\end{aligned}$$

Pseudo funzione t^{-1}

La funzione t^{-1} non è localmente sommabile su intervalli che contengono l'origine, ciò significa che l'integrale per distribuzioni regolari non ha senso nel modo classico in quanto diverge. Non potendo integrare in modo classico vicino a zero, si introduce una definizione alternativa di integrale, detta **valore principale di Cauchy (VP)**, che ci permette di aggirare il problema e integrare in modo simmetrico rispetto a zero:

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} \cdot \phi(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} t^{-1} \cdot \phi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1} \cdot \phi(t) dt \right)$$

La precedente è una forma lineare e continua su D . In questo modo si esclude un piccolo intervallo centrato in zero e poi si fa il limite quando questo si restringe.

Alla funzione t^{-1} è associata la distribuzione detta **pseudo-funzione**:

$$\begin{aligned}\langle Pf(t^{-1}), \phi \rangle &= VP \int_{-\infty}^{\infty} t^{-1} \cdot \phi(t) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} t^{-1} \cdot \phi(t) dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1} \cdot \phi(t) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1} \cdot (\phi(t) - \phi(-t)) dt = \end{aligned}$$

$\phi(t) - \phi(-t) \approx 0$ vicino all'origine

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} t^{-1} \cdot (\phi(t) - \phi(-t)) dt$$

Quest'ultima è detta **definizione operativa**.

Proprietà delle distribuzioni

Uguaglianza

Due distribuzioni U e V si dicono uguali quando sono uguali i valori da esse assunti in corrispondenza ad ogni elemento di D :

$$U = V \text{ se } \forall \phi \in D \Rightarrow U(\phi) = V(\phi)$$

Somma

La somma $U + V$ di due distribuzioni è la distribuzione che associa ad ogni elemento di D la somma dei valori che le distribuzioni U e V , prese singolarmente, associano alla generica funzione di prova ϕ :

$$T = U + V \text{ se } \forall \phi \in D \Rightarrow T(\phi) = U(\phi) + V(\phi)$$

Traslazione

Per le distribuzioni regolari:

$$\begin{aligned} \langle f(t - t_0), \phi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \cdot \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(t + t_0) dt = \\ &= \langle f(t), \phi(t + t_0) \rangle \end{aligned}$$

Generalizzando alle distribuzioni singolari:

$$\langle T_{t_0}, \phi(t) \rangle = \langle T, \phi(t + t_0) \rangle$$

Derivata (TEOREMA 14)

Prodotto per una funzione

Data una funzione $\alpha(t) \in E$, dunque continua e derivabile infinite volte, se $f(t)$ è una distribuzione regolare si ha:

$$\langle \alpha f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(t)f(t)] \cdot \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot [\alpha(t)\phi(t)] dt = \langle f, \alpha\phi \rangle$$

Generalizzando alle distribuzioni singolari:

$$\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha\phi \rangle$$

Convoluzione

Siano U e V due distribuzioni, la loro convoluzione è, se esiste, una distribuzione $T = U * V$ definita come segue:

$$\langle T, \phi \rangle = \langle U * V, \phi \rangle = \langle U_{\tau}, \langle V_{\theta}, \phi(\tau + \theta) \rangle \rangle = \langle V_{\theta}, \langle U_{\tau}, \phi(\tau + \theta) \rangle \rangle$$

Dove i pedici indicano la variabile da cui dipende la funzione di prova a cui la distribuzione è applicata.

La convoluzione tra due distribuzioni ha certamente senso quando:

1. Almeno una delle due distribuzioni ha supporto limitato.
2. Entrambe le distribuzioni hanno supporto limitato inferiormente.
3. Entrambe le distribuzioni hanno supporto limitato superiormente.

Trasformata di Fourier di un segnale a supporto limitato

Se $s(t)$ è a supporto limitato, la sua trasformata (e antitrasformata) di Fourier è continua e derivabile infinite volte, ovvero $S(f) \in C^{\infty}$.

Trasformata di Fourier di un segnale a supporto non limitato

Se $s(t)$ è a supporto non limitato e ammette finito il limite per $|t| \rightarrow +\infty$, sia esso derivabile in senso generalizzato con $s'(t)$ che individua una funzione a supporto limitato o temperata, allora la sua trasformata è pari a:

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} + \frac{s(-\infty) + s(+\infty)}{2} \cdot \delta(f)$$

Trasformate di Fourier notevoli

Trasformata di una costante

$$\mathfrak{F}[1] = \delta(f)$$

Trasformata della delta di Dirac

$$\mathfrak{F}[\delta(t)] = 1$$

Trasformata della delta di Dirac traslata nel tempo

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[\delta(t \pm t_0)] &= e^{\pm j2\pi f t_0} \\ \Rightarrow \mathfrak{F}[e^{\pm j2\pi f t_0}] &= \delta(t \mp t_0)\end{aligned}$$

Trasformata della funzione esponenziale

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[e^{\pm j2\pi f_0 t}] &= \delta(f \mp f_0) \\ \Rightarrow \mathfrak{F}^{-1}[\delta(f \pm f_0)] &= e^{\mp j2\pi f_0 t}\end{aligned}$$

Trasformata della rect

$$\mathfrak{F}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \text{sinc}(fT)$$

Trasformata della tri

$$\mathfrak{F}\left[\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)\right] = T \text{sinc}^2(fT)$$

Trasformata del gradino unitario

$$\mathfrak{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi} Pf\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

Trasformata della funzione gaussiana

$$\mathfrak{F}[e^{-\pi t^2}] = e^{-\pi f^2}$$

Trasformata della funzione esponenziale unilatera

$$\mathfrak{F}\left[e^{-\frac{t}{T}} \cdot u(t)\right] = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

Trasformata del coseno

$$\mathfrak{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Trasformata del seno

$$\mathfrak{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Trasformata di un segnale periodico

$$\mathfrak{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Trasformata della funzione segno

$$sgm(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ -1; & t < 0 \end{cases}$$

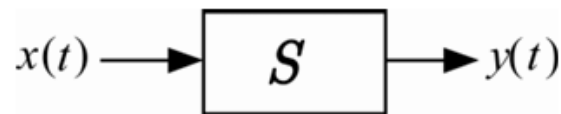
$$\mathfrak{F}[sgm(t)] = \frac{1}{j\pi} Pf\left(\frac{1}{f}\right)$$

UTILITIES

CAPITOLO 6

Trasformazione di segnali

Dato uno o più segnali in ingresso, il compito di un sistema di elaborazione di segnali è quello di effettuare su di essi un insieme di trasformazioni. Un tale dispositivo è rappresentabile mediante il seguente schema a blocchi:



La trasformazione S operata dal blocco è descritta dalla seguente relazione:

$$y(t) = S\{x(\tau); t\} = S\{x(\tau)\}; \quad t, \tau \in I$$

- Se I è un insieme continuo (limitato o non), si parla di **trasformazione analogica**.
- Se I è un insieme discreto (finito o numerabile), si parla di **trasformazione numerica (digitale)**.
- Se $y(t)$ dipende solo dal valore assunto dall'ingresso $x(\tau)$ per $\tau = t$ (stesso istante), si parla di **trasformazione priva di memoria**.
- Se $y(t)$ dipende dal valore assunto dall'ingresso $x(\tau)$ per $\tau \leq t$ (stesso o precedente istante), si parla di **trasformazione non anticipativa (causale)**.
- Se $y(t)$ dipende dal valore assunto dall'ingresso $x(\tau)$ per $\tau > t$ (istante successivo), si parla di **trasformazione anticipativa**.

Principio di causalità

Se la trasformazione S rappresentasse un sistema fisico, la risposta non potrebbe esistere prima che la sollecitazione sia applicata all'ingresso. Questa condizione potrebbe essere apparentemente violata qualora l'elaborazione del segnale avvenisse in tempo virtuale (post-processing).

Trasformazioni lineari

Una trasformazione si dice **lineare** se soddisfa due proprietà:

1. Omogeneità:

$$S\{kx(\tau)\} = k \cdot S\{x(\tau)\}; \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Additività:

$$S\{x_1(\tau) + x_2(\tau)\} = S\{x_1(\tau)\} + S\{x_2(\tau)\}$$

Uscita di trasformazioni lineari

$$\begin{aligned} y(t) = S\{x(\tau); t\} &= S\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot \delta(\tau - \theta) d\theta; t\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot S\{\delta(\tau - \theta); t\} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot h(t, \theta) d\theta \end{aligned}$$

Dove $h(t, \theta) = S\{\delta(\tau - \theta); t\}$ è il **nucleo** della trasformazione e in questo caso corrisponde alla risposta del sistema, osservata all'istante t , ad un impulso di Dirac applicato all'istante θ (risposta tempo-variante all'impulso del sistema).

Trasformazioni lineari nel dominio della frequenza

$$\begin{aligned} Y(f) = \mathfrak{F}[y(t)] &= \mathfrak{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot h(t, \theta) d\theta\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \cdot e^{j2\pi\varphi\theta} d\varphi\right) \cdot h(t, \theta) d\theta\right] \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \theta) \cdot e^{-j2\pi(f t - \varphi\theta)} dt d\theta\right] d\varphi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \cdot \tilde{H}(f, -\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Dove $H(f, -\varphi)$ è la **trasformata bidimensionale** di $h(t, \theta)$. Il risultato ottenuto prende il nome di **trasformazione duale**.

Trasformazioni tempo invarianti

Una trasformazione si dice **tempo invariante** se ad un ritardo nel segnale d'ingresso corrisponde un identico ritardo nel segnale di uscita:

$$S\{x(\tau - t_0); t\} = S\{x(\tau); t - t_0\}$$

Uscita di trasformazioni LTI

Per una trasformazione lineare e tempo-invariante (LTI) risulta che il nucleo è pari a:

$$h(t, \theta) = S\{\delta(\tau - \theta); t\} = S\{\delta(\tau); t - \theta\} = h(t - \theta)$$

L'uscita è pari a:

$$y(t) = S\{x(\tau); t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) d\theta = x(t) * h(t)$$

Dove $h(t)$ è detta **risposta all'impulso** del sistema.

Risposta in frequenza di trasformazioni LTI

$$Y(f) = \mathfrak{F}[S\{x(\tau); t\}] = H(f) \cdot X(f)$$

Dove $Y(f)$ e $X(f)$ sono rispettivamente le trasformate di Fourier dell'uscita e dell'ingresso, mentre $H(f)$ è la **risposta in frequenza** del sistema che lega le due trasformate.

$$H(f) = \mathfrak{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

Uscita di trasformazioni lineari prive di memoria

Se la risposta impulsiva del sistema è del tipo:

$$h(t, \theta) = \phi(t) \cdot \delta(t - \theta)$$

L'uscita del sistema sarà data da:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot \phi(t) \delta(t - \theta) d\theta = \phi(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot \delta(t - \theta) d\theta = \phi(t) \cdot x(t)$$

Uscita di trasformazioni LTI prive di memoria

Se la risposta impulsiva del sistema è del tipo:

$$h(t) = k \cdot \delta(t)$$

L'uscita del sistema sarà data da:

$$y(t) = S\{x(\tau); t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot k\delta(t - \theta) d\theta = k \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \cdot \delta(t - \theta) d\theta = kx(t)$$

Trasformazioni causali

Una trasformazione si dice causale se $y(t)$ dipende dal valore assunto dall'ingresso $x(\tau)$ per $\tau \leq t$:

$$S\{x(\tau); t\} = S\{x(\tau)u(t - \tau); t\}$$

Uscita di trasformazioni LTI causali

$$y(t) = S\{x(\tau); t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)u(t - \theta) \cdot h(t - \theta) d\theta$$

Da cui risulta che la risposta all'impulso è pari a:

$$h(t) = h(t)u(t)$$

Trasmissione senza distorsione

Una trasmissione si dice senza distorsione quando il segnale di uscita è proporzionale a quello di ingresso, seppur ritardato di una certa quantità T :

$$y(t) = h_0 x(t - T)$$

h_0 è detto **guadagno** se $h_0 > 1$, altrimenti è detto **attenuazione** se $0 < h_0 < 1$.

Valutando in frequenza:

$$Y(f) = h_0 \cdot X(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$$

Da cui si deduce che la risposta in frequenza è pari a:

$$H(f) = h_0 \cdot e^{-j2\pi fT}$$

In un sistema di questo tipo l'ampiezza di $H(f)$ è costante mentre l'argomento è proporzionale alla frequenza.

Filtri ideali

Un filtro ideale è un tipo di sistema che non introduce distorsioni entro una certa banda (finita) di frequenza, ma che non permette, al di fuori di essa, la trasmissione del segnale. La banda corrisponde alla misura del supporto della risposta in frequenza del sistema limitata alle sole frequenze positive e, a seconda della sua dislocazione, i filtri ideali si distinguono in **filtri passa-basso** e **filtri passa-banda**.

Per un filtro passa-basso di banda f_m con ritardo T e attenuazione h_0 , risulta:

$$H(f) = h_0 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right) \cdot e^{-j2\pi fT}$$

$$|H(f)| = h_0 \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)$$

$$\angle H(f) = -2\pi fT$$

$$h(t) = 2h_0 f_m \text{sinc}[2f_m(t - T)]$$

Per un filtro passa-banda di banda B centrato alla frequenza f_c con ritardo T e attenuazione h_0 , risulta:

$$H(f) = h_0 \cdot \left(\Pi\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_c}{B}\right) \right) \cdot e^{-j2\pi fT}$$

$$|H(f)| = h_0 \cdot \left(\Pi\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_c}{B}\right) \right)$$

$$\angle H(f) = -2\pi fT$$

$$h(t) = 2h_0 B \text{sinc}[B(t - T)] \cdot \cos[2\pi f_c(t - T)]$$

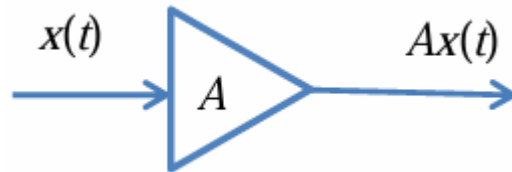
Un filtro si dice **non distortente** se la sua risposta in ampiezza è costante nella banda passante e la sua risposta in fase è lineare nella banda passante.

Un filtro la cui fase non è lineare con la frequenza introduce un ritardo dipendente dalla frequenza detto **ritardo di gruppo**:

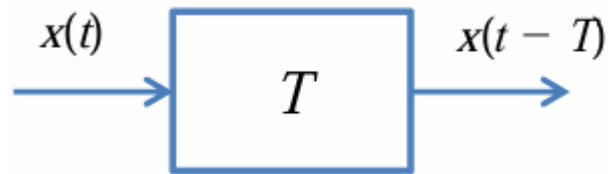
$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} \angle H(f)$$

Blocchi notevoli lineari e tempo invarianti

Amplificatori/attenuatori ideali

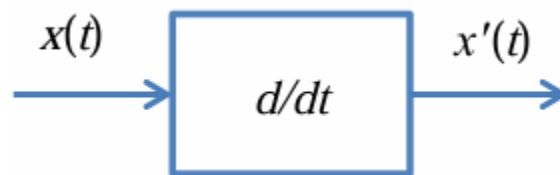


Linea di ritardo ideale



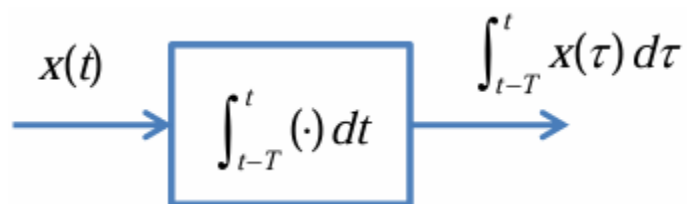
$$H(f) = e^{-j2\pi fT}$$

Derivatore



$$H(f) = j2\pi f$$

Integratore a finestra mobile



$$H(f) = T \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi fT}$$

Filtro passa-basso ideale



$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Filtro passa-banda ideale



$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)$$

Filtro passa-alto ideale



$$H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

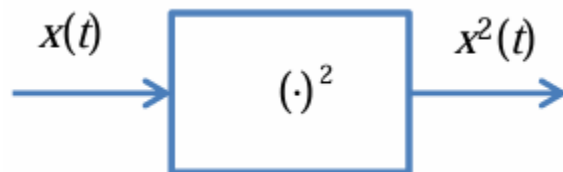
Filtro elimina-banda (“notch”) ideale



$$H(f) = 1 - \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{f + f_c}{B}\right)$$

Blocchi notevoli non lineari e tempo invarianti

Quadratore

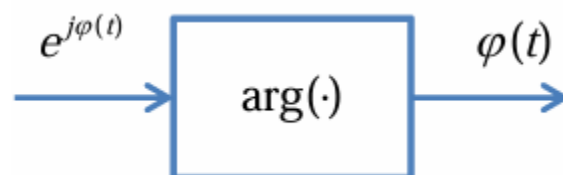


Limitatore di dinamica

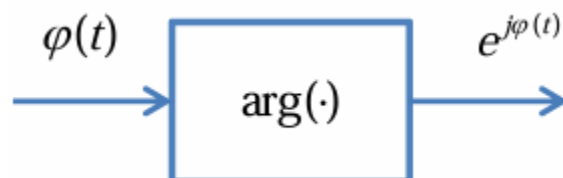


$$y(t) = \begin{cases} V_{\max} & x(t) > V_{\max} \\ x(t) & V_{\min} \leq x(t) \leq V_{\max} \\ V_{\min} & x(t) < V_{\min} \end{cases}$$

Rivelatore di fase

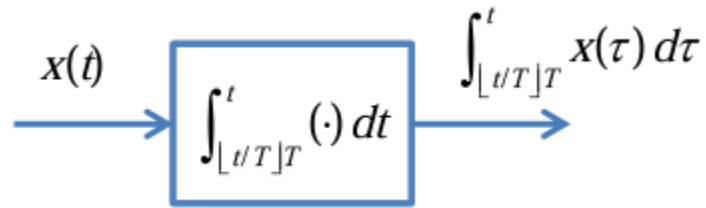


Modulatore di fase

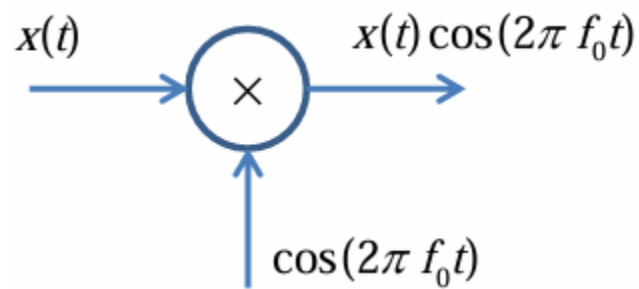


Blocchi notevoli lineari e non tempo invarianti

Integratore con reset



Modulatore di ampiezza su portante sinusoidale



UTILITIES

CAPITOLO 7

Densità spettrale di energia di un segnale

$$W(f) = |S(f)|^2 \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(f) df = E$$

Nel caso di segnali reali, dalla condizione di simmetria hermitiana $S(-f) = S^*(f)$ risulta:

$$W(-f) = W(f)$$

Energie specifiche incrociate (mutue)

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = \langle s_1, s_2 \rangle$$

$$E_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1^*(t) dt = \langle s_2, s_1 \rangle$$

Per segnali reali vale quindi:

$$E_{12} = E_{21}$$

Se $E_{12} = E_{21} = 0$, s_1 ed s_2 sono ortogonali.

Essendo E_{12} e E_{21} quantità generalmente complesse vale:

$$E_{12} = E_{21}^*$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|E_{12}| \leq \sqrt{E_1} \cdot \sqrt{E_2}$$

$$|E_{21}| \leq \sqrt{E_1} \cdot \sqrt{E_2}$$

$$\Rightarrow E_{12}E_{21} \leq E_1E_2$$

Densità spettrali di energia incrociate (mutue)

Per il teorema di Parseval le energie incrociate si possono scrivere come segue:

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2^*(f) df = \langle s_1, s_2 \rangle$$

$$E_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(f) \cdot S_1^*(f) df = \langle s_2, s_1 \rangle$$

In cui si individuano le densità spettrali di energia incrociate:

$$W_{12}(f) = S_1(f) \cdot S_2^*(f)$$

$$W_{21}(f) = S_2(f) \cdot S_1^*(f)$$

Quindi:

$$E_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(f) df$$

$$E_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}(f) df$$

Essendo $W_{12}(f)$ e $W_{21}(f)$ quantità generalmente complesse vale:

$$W_{12}(f) = W_{21}^*(f)$$

Per segnali reali vale:

$$W_{12}(f) = W_{21}(-f)$$

Funzione di autocorrelazione di un segnale ad energia finita

La funzione di autocorrelazione di un segnale fornisce importanti informazioni riguardanti l'andamento del segnale nel dominio del tempo.

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt$$

Come si può facilmente verificare, per la funzione di autocorrelazione valgono le seguenti osservazioni:

1. La funzione valutata nell'origine eguaglia l'energia di un segnale:

$$\gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E$$

2. Essendo $\gamma(\tau)$ una funzione a valori generalmente complessi, vale la simmetria hermitiana:

$$\gamma(-\tau) = \gamma^*(\tau)$$

3. Se il segnale è reale, la funzione di autocorrelazione ad esso associata ha simmetria pari:

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$$

4. La funzione di autocorrelazione di un segnale ha massimo in zero; infatti, applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0) = E$$

5. Vale il teorema di Wiener-Khinchine:

$$\mathfrak{F}[\gamma(\tau)] = W(f)$$

Funzioni di mutua correlazione di segnali ad energia finita

$$\gamma_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t + \tau) \cdot s_2^*(t) dt$$

$$\gamma_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t + \tau) \cdot s_1^*(t) dt$$

Per le funzioni di mutua correlazione valgono le seguenti osservazioni:

1. $\gamma_{12}(\tau)$ e $\gamma_{21}(\tau)$ soddisfano la seguente relazione:

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}^*(-\tau)$$

2. Se i segnali sono reali vale:

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(-\tau)$$

3. Le funzioni di mutua correlazione valutate nell'origine eguagliano le corrispondenti energie incrociate:

$$\gamma_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = E_{12}$$

$$\gamma_{21}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1^*(t) dt = E_{21}$$

4. Applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 \leq \gamma_{12}(0) \cdot \gamma_{12}(0) = E_1 \cdot E_2$$

$$|\gamma_{21}(\tau)|^2 \leq \gamma_{21}(0) \cdot \gamma_{21}(0) = E_1 \cdot E_2$$

5. Se risulta $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(\tau) = 0$ i segnali s_1 ed s_2 si dicono incorrelati. Due segnali incorrelati sono anche ortogonali, il viceversa generalmente non vale.

6. Anche per le funzioni di mutua correlazione vale il teorema di Wiener-Khinchine:

$$\mathfrak{F}[\gamma_{12}(\tau)] = W_{12}(f)$$

$$\mathfrak{F}[\gamma_{21}(\tau)] = W_{21}(f)$$

Densità spettrale di potenza di un segnale

$$W(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(f) df = P$$

Nel caso di segnali reali, dalla condizione di simmetria hermitiana $S(-f) = S^*(f)$ risulta:

$$W(-f) = W(f)$$

Potenze specifiche incrociate (mutue)

$$P_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt$$

$$P_{21} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t) \cdot s_1^*(t) dt$$

Per segnali reali vale quindi:

$$P_{12} = P_{21}$$

Se $P_{12} = P_{21} = 0$, s_1 ed s_2 sono ortogonali.

Essendo P_{12} e P_{21} quantità generalmente complesse vale:

$$P_{12} = P_{21}^*$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|P_{12}| \leq \sqrt{P_1} \cdot \sqrt{P_2}$$

$$|P_{21}| \leq \sqrt{P_1} \cdot \sqrt{P_2}$$

$$\Rightarrow P_{12}P_{21} \leq P_1P_2$$

Densità spettrali di potenza incrociate (mutue)

Siano $s_{1T}(t)$ ed $s_{2T}(t)$ i segnali troncati associati ai segnali s_1 ed s_2 , per il teorema di Parseval le potenze incrociate si possono scrivere come segue:

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}(f) \cdot S_{2T}^*(f)}{T} df$$

$$P_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{2T}(f) \cdot S_{1T}^*(f)}{T} df$$

In cui si individuano le densità spettrali di potenza incrociate:

$$W_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}(f) \cdot S_{2T}^*(f)}{T}$$

$$W_{21}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{2T}(f) \cdot S_{1T}^*(f)}{T}$$

Quindi:

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(f) df$$

$$P_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}(f) df$$

Essendo $W_{12}(f)$ e $W_{21}(f)$ quantità generalmente complesse vale:

$$W_{12}(f) = W_{21}^*(f)$$

Per segnali reali vale:

$$W_{12}(f) = W_{21}(-f)$$

Funzione di autocorrelazione di un segnale a potenza finita

La funzione di autocorrelazione di un segnale fornisce importanti informazioni riguardanti l'andamento del segnale nel dominio del tempo.

$$\gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t + \tau) \cdot s^*(t) dt$$

Come si può facilmente verificare, per la funzione di autocorrelazione valgono le seguenti osservazioni:

1. La funzione valutata nell'origine eguaglia la potenza di un segnale:

$$\gamma(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot s^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = P$$

2. Essendo $\gamma(\tau)$ una funzione a valori generalmente complessi, vale la simmetria hermitiana:

$$\gamma(-\tau) = \gamma^*(\tau)$$

3. Se il segnale è reale, la funzione di autocorrelazione ad esso associata ha simmetria pari:

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$$

4. La funzione di autocorrelazione di un segnale a potenza finita ha massimo in zero; infatti, applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma(0) = P$$

5. Vale il teorema di Wiener-Khinchine:

$$\mathfrak{F}[\gamma(\tau)] = W(f)$$

Funzioni di mutua correlazione di segnali a potenza finita

$$\gamma_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t + \tau) \cdot s_2^*(t) dt$$

$$\gamma_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t + \tau) \cdot s_1^*(t) dt$$

Per le funzioni di mutua correlazione valgono le seguenti osservazioni:

1. $\gamma_{12}(\tau)$ e $\gamma_{21}(\tau)$ soddisfano la seguente relazione:

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}^*(-\tau)$$

2. Se i segnali sono reali vale:

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(-\tau)$$

3. Le funzioni di mutua correlazione valutate nell'origine eguagliano le corrispondenti potenze incrociate:

$$\gamma_{12}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = P_{12}$$

$$\gamma_{21}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t) \cdot s_1^*(t) dt = P_{21}$$

4. Applicando la disuguaglianza di Schwarz risulta:

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 \leq \gamma_{12}(0) \cdot \gamma_{12}(0) = P_1 \cdot P_2$$
$$|\gamma_{21}(\tau)|^2 \leq \gamma_{21}(0) \cdot \gamma_{21}(0) = P_1 \cdot P_2$$

5. Se risulta $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(\tau) = 0$ i segnali s_1 ed s_2 si dicono incorrelati. Due segnali incorrelati sono anche ortogonali, il viceversa generalmente non vale.

6. Anche per le funzioni di mutua correlazione vale il teorema di Wiener-Khinchine:

$$\mathfrak{F}[\gamma_{12}(\tau)] = W_{12}(f)$$

$$\mathfrak{F}[\gamma_{21}(\tau)] = W_{21}(f)$$

UTILITIES

CAPITOLO 9

Il segnale

$$s(t) = 2B \text{sinc}^2(2Bt)$$

viene campionato alla frequenza $f_c = 2B$.
Valutare l'errore commesso in presenza ed
in assenza di filtro anti-aliasing.

L'errore relativo di ricostruzione è:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f) - \tilde{S}(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df} = \frac{B/6}{4B/3} = \frac{1}{8} \cong -9\text{dB}$$

In presenza del filtro anti-aliasing, il
segnale campionato è

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= s(t) * F^{-1}[\text{rect}(fT_c)] = \\ &= s(t) * 2B \text{sinc}(2Bt) \end{aligned}$$

In frequenza:

$$\tilde{S}(f) = \left(1 - \frac{|f|}{2B}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

L'energia dell'errore di ricostruzione risulta
quindi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f) - \tilde{S}(f)|^2 df &= 2 \int_0^{\infty} \left| \left(1 - \frac{|f|}{2B}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right) - \left(1 - \frac{|f|}{2B}\right) \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \right|^2 df = \\ &= 2 \int_B^{2B} \left| 1 - \frac{f}{2B} \right|^2 df = \frac{B}{6} \end{aligned}$$

UTILITIES

CAPITOLO 13

Permutazioni semplici

Dato un insieme A di n elementi, si definisce permutazione uno dei possibili modi di ordinare gli elementi di A o, più formalmente, un possibile raggruppamento di classe k degli elementi di A che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Contiene tutti gli n elementi di A .
2. Differisce dagli altri raggruppamenti per l'ordine in cui gli elementi si susseguono al suo interno.

Per ottenere il numero di permutazioni possibili per un generico insieme costituito da n elementi, tutti distinti, si utilizza il fattoriale:

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

Si ricordi che $0! = 1$.

Disposizioni semplici

Dato un insieme A di n elementi, si definisce disposizione una sequenza ordinata di $k \leq n$ elementi presi da A o, più formalmente, un possibile raggruppamento degli elementi di A che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Contiene k elementi.
2. Differisce dagli altri raggruppamenti per almeno un elemento oppure per l'ordine con cui gli elementi si susseguono.

Per ottenere il numero di disposizioni di classe k possibili per un generico insieme costituito da n elementi, tutti distinti, si utilizza il seguente rapporto tra fattoriali:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Combinazioni semplici

Dato un insieme A di n elementi, si definisce combinazione un raggruppamento di $k \leq n$ elementi, presi in qualsiasi ordine dall'insieme A , che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Contiene k elementi.
2. Differisce dagli altri raggruppamenti per almeno un elemento ma non per l'ordine con cui gli elementi si susseguono.

Per ottenere il numero di combinazioni di classe k possibili per un generico insieme costituito da n elementi, tutti distinti, si utilizza il coefficiente binomiale n su k :

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Spazio di probabilità

Lo spazio di probabilità è così costituito:

$$\mathbb{S} = \{\Omega, \mathcal{E}, \text{Pr}\}$$

Dove:

- Ω è lo spazio dei risultati e contiene tutti i possibili esiti ζ di un esperimento casuale.
- \mathcal{E} è la classe degli eventi E ed è un insieme di sottoinsiemi di Ω , chiuso rispetto a unione e complemento.
- Pr è la funzione di probabilità che associa ad ogni evento un numero reale compreso tra 0 e 1.

Assiomi della probabilità

$$1. \text{Pr}(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N}{N}$$

Dove N è il numero di ripetizioni dell'esperimento casuale e ΔN è il numero di volte in cui l'evento E si è verificato.

2. $0 \leq \text{Pr}(E) \leq 1$
3. $\text{Pr}(\Omega) = 1$
4. $\text{Pr}(\emptyset) = 0$

$$5. \Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$$

Questa è vera solo se E_1 ed E_2 sono mutuamente esclusivi, ovvero risulta $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il che significa che, se due eventi non possono verificarsi contemporaneamente, la probabilità che accada l'uno o l'altro è pari alla somma delle loro probabilità.

6. Nel caso di infiniti eventi, la precedente si può scrivere nel seguente modo:

$$E_l \cap E_k = \emptyset \forall l \neq k \Rightarrow \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(E_i)$$

$$7. \Pr(E^c) = 1 - \Pr(E)$$

$$8. \Pr(E^c \cup E) = 1$$

$$9. \Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$$

Questa è una generalizzazione della (5) al caso di eventi non disgiunti.

Probabilità condizionata

Posto che $\Pr(E_2) > 0$:

$$\Pr(E_1|E_2) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_2)}$$

Questa è la probabilità che si verifichi l'evento E_1 sapendo che si è verificato E_2 .

Vale analogamente:

$$\Pr(E_2|E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)}$$

Vale quindi la seguente proprietà:

$$\Pr(E|\Omega) = \frac{\Pr(E \cap \Omega)}{\Pr(\Omega)} = \frac{\Pr(E)}{1} = \Pr(E)$$

Formula di Bayes

Date le espressioni delle probabilità condizionate:

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1|E_2) \cdot \Pr(E_2)$$

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_2|E_1) \cdot \Pr(E_1)$$

Eguagliando i secondi membri si ottiene la formula di Bayes:

$$\Pr(E_1|E_2) = \frac{\Pr(E_2|E_1) \cdot \Pr(E_1)}{\Pr(E_2)}$$

Eventi statisticamente indipendenti

Nel caso in cui risulti:

$$\Pr(E_1|E_2) = \Pr(E_1)$$

Oppure:

$$\Pr(E_2|E_1) = \Pr(E_2)$$

Cioè, se la probabilità con cui si manifesta E_1 (E_2) è indipendente dalla circostanza che E_2 (E_1) sia verificato, i due eventi si dicono statisticamente indipendenti e risulta:

$$\Pr(E_1 \cap E_2) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2)$$

Teorema della probabilità totale o delle probabilità composte

Se si considera una partizione dello spazio dei risultati tale che gli eventi E_i coprano tutto lo spazio Ω :

$$\bigcup_i E_i = \Omega$$

E se gli eventi sono a due a due disgiunti (mutuamente esclusivi):

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Allora vale il cosiddetto teorema della probabilità totale o delle probabilità composte, che serve a calcolare la probabilità di un evento E considerando tutti i casi possibili E_i :

$$\Pr(E) = \sum_i \Pr(E|E_i) \cdot \Pr(E_i)$$

UTILITIES

CAPITOLO 14

Variabili aleatorie

È dato un esperimento casuale caratterizzato da uno spazio di probabilità:

$$\mathbb{S} = \{\Omega, \mathcal{E}, Pr\}$$

Sia $X(\cdot)$ un'applicazione che fa corrispondere ad ogni risultato $\zeta \in \Omega$ un numero reale:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Si consideri il sottoinsieme:

$$E_x = X^{-1}([-\infty, x]) = \{\zeta \in \Omega \mid X(\zeta) \leq x\}$$

Ovvero il sottoinsieme di tutti i risultati ζ tali che, applicando X , si ottiene un valore non superiore a x . Se $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $E_x \in \mathcal{E}$, allora X è detta **variabile aleatoria** associata all'esperimento casuale.

Definire una variabile aleatoria significa costruire un nuovo esperimento casuale che ha come spazio dei risultati Ω l'insieme dei reali \mathbb{R} , mentre come classe degli eventi \mathcal{E} ha la **classe di Borel**, ovvero la classe formata da tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R} (insiemi di Borel) che siano misurabili secondo Lebesgue.

Se B è un qualunque insieme di Borel (ovvero un evento in \mathbb{R}), la sua probabilità è pari a quella della sua controimmagine $X^{-1}(B)$:

$$Pr\{B \subseteq \mathbb{R}\} = Pr\{X^{-1}(B)\}$$

Funzione di distribuzione di probabilità

Si definisce funzione di distribuzione di probabilità associata alla variabile aleatoria X un'applicazione che ha \mathbb{R} per dominio e $[0,1]$ come codominio:

$$P_X(x) = Pr(E_x)$$

Nota la funzione di distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X , di seguito si elencano le probabilità associate ad alcuni sottoinsiemi di \mathbb{R} :

1. *Intervallo semiaperto a sinistra*: $B =]a, b] \Rightarrow \Pr(B) = P_X(b) - P_X(a)$
2. *Semiretta d'origine destra aperta*: $B =]-\infty, a[\Rightarrow \Pr(B) = P_X(a^-)$
3. *Intervallo chiuso*: $B = [a, b] \Rightarrow \Pr(B) = P_X(b) - P_X(a^-)$
4. *Punto isolato*: $B = \{x_0\} \Rightarrow \Pr(B) = P_X(x_0) - P_X(x_0^-)$
5. *Intervallo aperto*: $B =]a, b[\Rightarrow \Pr(B) = P_X(b^-) - P_X(a)$
6. *Intervallo semiaperto a destra*: $B = [a, b[\Rightarrow \Pr(B) = P_X(b^-) - P_X(a^-)$

La funzione di distribuzione di probabilità gode di alcune importanti proprietà:

1. *Valori limite*:

Indipendentemente dalla variabile aleatoria considerata, valgono due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P_X(x) = \Pr(\emptyset) = 0$$

Infatti, per $x \rightarrow -\infty$ l'insieme $] -\infty, x]$ coincide con l'insieme vuoto, che ha sé stesso come controimmagine in Ω .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_X(x) = \Pr(\mathbb{R}) = 1$$

Infatti, per $x \rightarrow \infty$ l'insieme $] -\infty, x]$ coincide con \mathbb{R} , la cui controimmagine secondo X è Ω .

2. *Monotonia e limitatezza*:

Dati x_1, x_2 con $x_1 < x_2$, la probabilità dell'evento $]x_1, x_2]$ secondo X non può essere negativa:

$$0 \leq \Pr\{X^{-1}(]x_1, x_2])\} = P_X(x_2) - P_X(x_1)$$

Da cui deriva che:

$$P_X(x_2) \geq P_X(x_1)$$

Dunque, $P_X(x)$ non può diminuire all'aumentare di x e risulta che la funzione di distribuzione di probabilità è monotona non decrescente.

Inoltre, poiché:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_X(x) = \Pr(\mathbb{R}) = 1$$

Allora:

$$P_X(x) \leq P_X(\infty) = 1$$

Dunque, la funzione di distribuzione di probabilità è anche limitata.

3. *Continuità a destra:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} P_X(x) \equiv P_X(x_0^+) = P_X(x_0)$$

4. *Limiti da sinistra:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} P_X(x) \equiv P_X(x_0^-) = P_X(x_0) - \Pr\{X^{-1}(\{x_0\})\}$$

Questo vuol dire che solo se $\Pr\{X^{-1}(\{x_0\})\} = 0$ la $P_X(x)$ è continua a sinistra in x_0 .

5. *Numero di discontinuità:*

L'insieme dei punti di discontinuità di una funzione di distribuzione di probabilità è al più numerabile. Il numero di salti di ampiezza $\left] \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right]$ che si possono avere è $k < 2^n$.

Esistono tre tipi di variabili aleatorie che possono essere associate alla funzione di distribuzione di probabilità:

- Variabile aleatoria di tipo *continuo* se la $P_X(x)$ è continua in \mathbb{R} .
- Variabile aleatoria di tipo *discreto* se la $P_X(x)$ è costante a tratti.
- Variabile aleatoria di tipo *misto*.
- AGGIUNGI DISCORSO SU DISTRIBUZIONE DI MASSA

Densità di probabilità di una variabile aleatoria continua

Si defi

UTILITIES
CAPITOLO 15

UTILITIES

CAPITOLO 16

Valore medio statistico di una funzione di variabile aleatoria

$$E\{f(X)\} = \overline{f(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$$

Valore medio statistico di una funzione di N variabili aleatorie

$$\begin{aligned} E\{f(X_1, X_2, \dots, X_N)\} &= \overline{f(X_1, X_2, \dots, X_N)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, x_2, \dots, x_N) \cdot p_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \end{aligned}$$

Momenti

Se $f(X) = (X - \alpha)^n$, con $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, dalla formula del valore medio statistico di una funzione di variabile aleatoria si ottiene l'espressione del **momento** $\mu_{\alpha,n}$:

$$\mu_{\alpha,n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^n \cdot p_X(x) dx$$

Se si pone $\alpha = 0$ si ottiene il **momento n -esimo** m_n :

$$m_n \triangleq \mu_{0,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p_X(x) dx$$

Se si pone $\alpha = 0, n = 0$ si ottiene l'espressione della condizione di normalizzazione:

$$m_0 \triangleq \mu_{0,0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = P_X(\infty) - P_X(-\infty) = 1$$

Se si pone $\alpha = 0, n = 1$ si ottiene il **valore medio** della variabile aleatoria:

$$\bar{X} \triangleq m_1 \triangleq m \triangleq \mu_{0,1} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx$$

Se si pone $\alpha = 0, n = 2$ si ottiene il **valore quadratico medio** della variabile aleatoria:

$$\overline{X^2} \triangleq m_2 \triangleq \mu_{0,2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x) dx$$

Se si pone $\alpha = m$, al variare degli n si ottengono i **momenti centrali n -esimi** della variabile aleatoria:

$$\mu_{m,n} \triangleq \overline{(X - m)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n \cdot p_X(x) dx$$

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

Se consideriamo la precedente per $n = 2$, si ottiene la **varianza** della variabile aleatoria, che può essere definita come la differenza tra il valor quadratico medio e il valor medio al quadrato della variabile aleatoria:

$$\mu_{m,2} \triangleq \overline{(X - m)^2} \triangleq \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \cdot p_X(x) dx = m_2 - m^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

La radice quadrata della varianza è definita come **scarto quadratico medio** o **deviazione standard**:

$$\sigma = \sqrt{m_2 - m^2} = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2}$$

Se $f(X) = |X - \alpha|^n$, con $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si possono anche definire i **momenti assoluti di ordine n** riferiti a un qualsiasi reale α :

$$\overline{|X - \alpha|^n} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \alpha|^n \cdot p_X(x) dx$$

Anche in questo caso, ponendo $\alpha = 0$, si ottengono i **momenti assoluti**:

$$\rho_n \triangleq \overline{|X|^n} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \cdot p_X(x) dx$$

E ponendo $\alpha = m$ si ottengono i **momenti assoluti centrali**:

$$\overline{|X - m|^n} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m|^n \cdot p_X(x) dx$$

Nel caso di due variabili aleatorie definite su uno stesso esperimento casuale, se $f(X, Y) = X^p Y^q$ si ottiene un **momento congiunto** $(p + q)$ -esimo:

$$m_{pq} = \overline{X^p Y^q} = E\{X^p Y^q\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q \cdot p_{XY}(x, y) dx dy$$

Se $p = q = 0$ si ottiene l'espressione della condizione di normalizzazione:

$$m_{00} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

Si definiscono **momenti centrali** $(p + q)$ -esimi del secondo ordine:

$$\begin{aligned} \mu_{pq} &= E\{(X - m_X)^p \cdot (Y - m_Y)^q\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^p \cdot (y - m_Y)^q \cdot p_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Dove si sono denotati con m_X ed m_Y i rispettivi valori medi delle variabili X e Y . In particolare, se $p = q = 1$, si definisce la **covarianza**:

$$\sigma_{XY} = \overline{(X - m_X) \cdot (Y - m_Y)} = \overline{XY} - \bar{X}m_Y - \bar{Y}m_X + m_X m_Y = \overline{XY} - m_X m_Y$$

Se X e Y sono statisticamente indipendenti, risulta:

$$E\{X^p Y^p\} = E\{X^p\} \cdot E\{Y^p\}$$

Osservazioni sul valor medio

A prescindere dal fatto che le variabili aleatorie componenti siano statisticamente indipendenti, risulta che il valor medio di una combinazione lineare di variabili aleatorie è la combinazione lineare dei valori medi:

$$Z = \sum_{k=1}^N \lambda_k X_k \Rightarrow \bar{Z} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \bar{X}_k$$

Osservazioni sulla varianza

Nell'ipotesi in cui le variabili aleatorie siano a due a due statisticamente indipendenti, risulta che la varianza di una combinazione lineare di variabili aleatorie è la combinazione lineare dei quadrati dei coefficienti moltiplicati per le varianze:

$$Z = \sum_{k=1}^N \lambda_k X_k \Rightarrow \sigma_Z^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \cdot \sigma_X^2$$

Osservazioni sulla stima del valor medio

Se:

$$Z = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N X_k$$

Allora:

$$\sigma_Z^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N^2} \cdot \sigma_X^2 = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{k=1}^N \sigma_X^2 = \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot \sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sigma_X^2$$

Ciò significa che Z è solo una stima del valor medio atteso \bar{X} della variabile aleatoria X . In pratica, se non conosciamo \bar{X} , possiamo stimarlo effettuando più esperimenti e calcolando la media dei risultati osservati. Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, si osserva un'interessante peculiarità:

$$\Pr\{|Z - \bar{X}| \geq \varepsilon\} = \Pr\left\{\left|\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N X_k - \bar{X}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma_Z^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

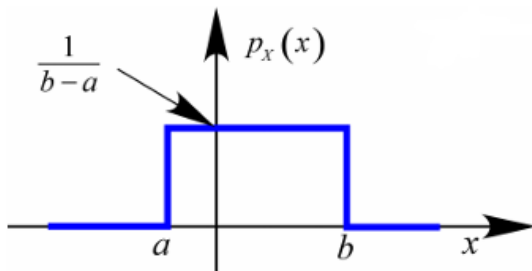
La disuguaglianza ci fornisce un limite superiore alla probabilità che la stima Z si discosti di almeno ε dal valor medio reale \bar{X} . Poiché il membro destro dell'uguaglianza contiene $\frac{1}{N}$, si osserva che, maggiore è N , minore è il limite superiore della probabilità dell'errore. Quindi la probabilità che la stima sia largamente sbagliata diminuisce all'aumentare di N (ovvero il numero degli esperimenti compiuti).

UTILITIES

CAPITOLO 17

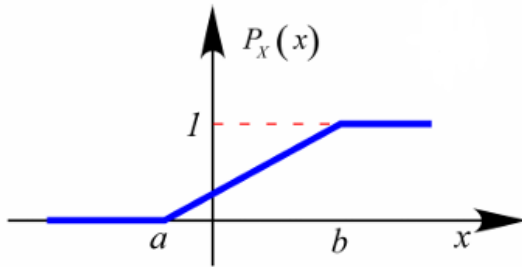
Distribuzione uniforme

Una variabile aleatoria si dice uniformemente distribuita in un intervallo (a, b) se la sua densità di probabilità $p_X(x)$ si mantiene costante in tale intervallo ed è nulla altrove.



$$p_X(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right)$$

La corrispondente distribuzione di probabilità vale:



$$P_X(x) = \Pi\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a}\right) \cdot \frac{x-a}{b-a} \cdot u(x-b)$$

Il valore medio di una variabile uniformemente distribuita vale:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Il valore quadratico medio di una variabile uniformemente distribuita vale:

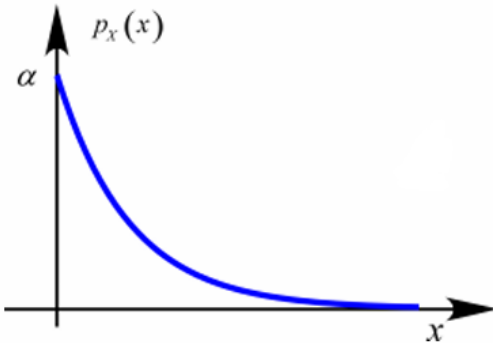
$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

La varianza di una variabile uniformemente distribuita vale:

$$\sigma = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

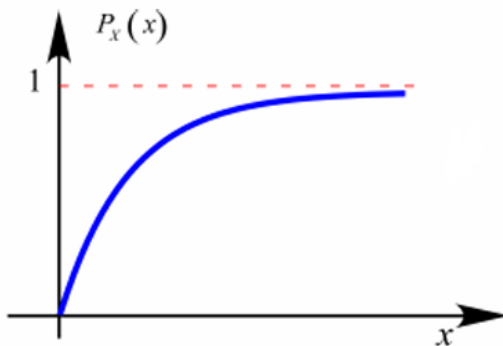
Distribuzione esponenziale

Una variabile aleatoria si dice a distribuzione esponenziale se la sua densità di probabilità $p_X(x)$ è del tipo:



$$p_X(x) = \alpha e^{-\alpha x} \cdot u(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

La corrispondente distribuzione di probabilità vale:



$$P_X(x) = (1 - e^{-\alpha x}) \cdot u(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Il valore medio di una variabile a distribuzione esponenziale vale:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

Il precedente integrale si risolve per parti.

Il valore quadratico medio di una variabile a distribuzione esponenziale vale:

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2}$$

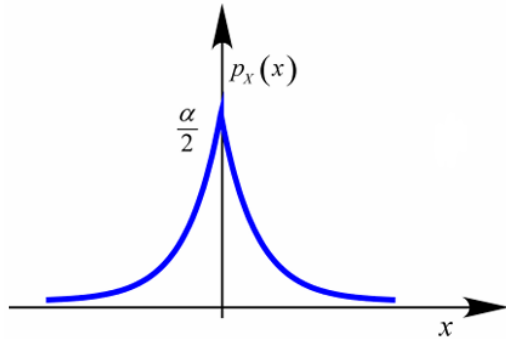
Il precedente integrale si risolve per parti.

La varianza di una variabile a distribuzione esponenziale vale:

$$\sigma = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

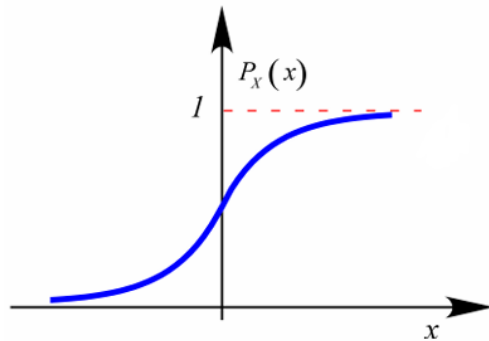
Distribuzione di Laplace

Una variabile aleatoria si dice a distribuzione di Laplace se la sua densità di probabilità $p_X(x)$ è del tipo:



$$p_X(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

La corrispondente distribuzione di probabilità vale:



$$P_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(x) \cdot (1 - e^{-\alpha|x|}) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Il valore medio di una variabile a distribuzione di Laplace, per motivi di simmetria, vale:

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx = 0$$

Il valore quadratico medio di una variabile a distribuzione di Laplace vale:

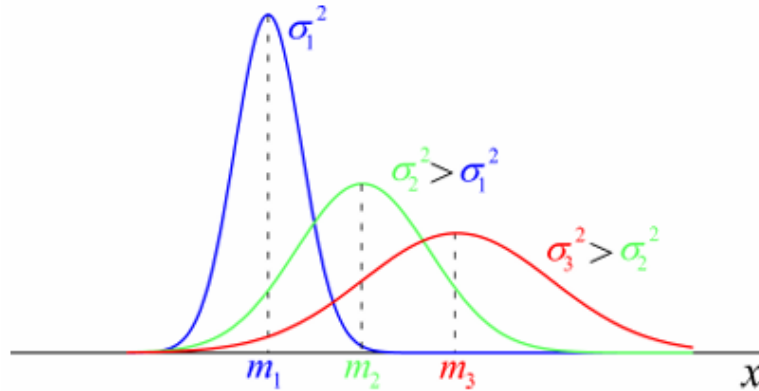
$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} x^2 e^{-\alpha|x|} dx = \frac{4}{\alpha^2}$$

La varianza di una variabile a distribuzione di Laplace è pari al suo valore quadratico medio:

$$\sigma = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = \frac{4}{\alpha^2}$$

Distribuzione normale o gaussiana

Una variabile aleatoria si dice normale o gaussiana se la sua densità di probabilità $p_X(x)$ è del tipo:



$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall m \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

La corrispondente distribuzione di probabilità vale:

$$P_X(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \right]$$

Dove $\operatorname{erf}(x)$, ovvero la funzione errore, vale:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-u^2} du$$

Oppure:

$$P_X(x) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x-m}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)$$

Dove $\operatorname{erfc}(x)$, ovvero la funzione complementare d'errore, vale:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^\infty e^{-u^2} du$$

Trovate valore medio e varianza della variabile aleatoria gaussiana nel blocco teoremi.

Distribuzione di Bernoulli (Esempio di utilizzo: lancio di una moneta)

Una variabile aleatoria discreta è di Bernoulli se essa può assumere solo due valori x_0 e x_1 con $\Pr\{x_0\} = p$ e $\Pr\{x_1\} = q = 1 - p$.

Distribuzione e densità di probabilità di questa variabile aleatoria valgono rispettivamente:

$$P_X(x) = p \cdot u(x - x_0) + q \cdot u(x - x_1)$$

$$p_X(x) = p \cdot \delta(x - x_0) + q \cdot \delta(x - x_1)$$

Valore medio e valore quadratico medio valgono:

$$\bar{X} = x_0 \cdot p + x_1 \cdot q$$

$$\overline{X^2} = x_0^2 \cdot p + x_1^2 \cdot q$$

Se $p = q = \frac{1}{2}$:

$$\bar{X} = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$\overline{X^2} = \frac{x_0^2 + x_1^2}{2}$$

Ad eccezione del caso in cui $p = 0$ o $q = 0$, il valore medio non coincide con un valore che può essere assunto dalla variabile aleatoria.

Distribuzione binomiale (Esempio di utilizzo: n lanci di una moneta)

Una variabile aleatoria binomiale è una somma di n variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti ed identicamente distribuite, con densità di probabilità pari a:

$$p_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k} \cdot \delta(x - k)$$

Il valore medio è dato dalla somma dei valori medi delle variabili aleatorie:

$$\bar{X} = \overline{\sum_{i=1}^n X_i} = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i = \sum_{i=1}^n (1p + 0q) = np$$

La varianza si calcola considerando che le X_i sono mutuamente statisticamente indipendenti:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 = \sum_{i=1}^n (p - p^2) = npq$$

Il valore quadratico medio vale:

$$\overline{X^2} = \sigma_{\bar{X}}^2 + \bar{X}^2 = npq + n^2 p^2$$

Distribuzione di Poisson

Una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ ha densità di probabilità pari a:

$$p_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \delta(x - k)$$

UTILITIES

CAPITOLO 18

Segnali aleatori e funzioni di probabilità del primo ordine

Dato un esperimento casuale individuato da uno spazio di probabilità $\mathbb{S} = \{\Omega, \mathcal{E}, Pr\}$, si definisce **segnale aleatorio reale** un'applicazione che fa corrispondere a ciascun possibile risultato $\zeta \in \Omega$ dell'esperimento una funzione reale del tempo, tale da identificare una variabile aleatoria $s(t, \zeta)$ per ogni fissato $t \in T$:

$$\forall \zeta \in \Omega \exists s(t, \zeta) \text{ t.c. } T \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se si fissa t il segnale aleatorio individua una variabile aleatoria su Ω , mentre se si fissa ζ si ottiene una funzione $s(t, \zeta)$ della sola variabile t che costituisce una **manifestazione del segnale**. $s(t, \zeta)$ si può indicare anche con $s(t)$ sottintendendo la dipendenza dal risultato dell'esperimento casuale.

Dato l'evento $E_x = \{s(t, \zeta) | s(t, \zeta) \leq x\}$ costituito da tutte le manifestazioni del segnale che, all'istante t , assumono un valore non maggiore di x , la sua probabilità di verificarsi dipende sia dal valore x sia dall'istante t considerato; dunque, essa si può esprimere come segue:

$$Pr\{E_x\} = P_{s(t)}(x)$$

La funzione appena definita costituisce la **distribuzione di probabilità del primo ordine** associata al segnale aleatorio $s(t)$, ed è non decrescente di x . Ad essa si può associare a sua volta la **densità di probabilità del primo ordine** così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x}$$

Qualsiasi sia l'istante t e per tutti i valori di x in cui $P_{s(t)}(x)$ è derivabile in senso ordinario, vale:

$$p_{s(t)}(x) \geq 0$$

Valgono inoltre le condizioni:

$$P_{s(t)}(+\infty) = 1$$

$$P_{s(t)}(-\infty) = 0$$

Che consentono di scrivere:

$$P_{s(t)}(x) = \int_{-\infty}^x p_{s(t)}(y) dy$$

Vale la **condizione di normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{s(t)}(x) dx = 1$$

La probabilità che il segnale, in un assegnato istante t , assuma un valore appartenente all'intervallo $(a, b]$ vale:

$$\Pr\{s(t) \in (a, b]\} = P_{s(t)}(b) - P_{s(t)}(a) = \int_a^b p_{s(t)}(x) dx$$

Funzioni di probabilità del secondo ordine

Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si consideri l'evento $E_{x_1 x_2} = \{s(t) | s_1 \leq x_1 \wedge s_2 \leq x_2\}$ costituito da tutte le manifestazioni del segnale che, all'istante t_1 , assumono un valore non maggiore di x_1 e, all'istante t_2 , assumono un valore non maggiore di x_2 . La sua probabilità di verificarsi dipende sia dai valori x_1, x_2 sia dagli istanti t_1, t_2 considerati; dunque, essa si può esprimere come segue:

$$\Pr\{E_{x_1 x_2}\} = P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$$

La funzione appena definita costituisce la **distribuzione di probabilità del secondo ordine** associata al segnale aleatorio $s(t)$. Ad essa si può associare a sua volta la **densità di probabilità del secondo ordine** così definita:

$$p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Qualsiasi siano gli istanti t_1, t_2 e per tutti i valori di x_1, x_2 in cui $P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ è derivabile in senso ordinario, vale:

$$p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) \geq 0$$

Valgono inoltre le condizioni:

$$P_{s_1 s_2}(\infty, \infty) = 1$$

$$P_{s_1 s_2}(-\infty, -\infty) = 0$$

$$P_{s_1 s_2}(0, -\infty) = 0$$

$$P_{s_1 s_2}(-\infty, 0) = 0$$

Che consentono di scrivere:

$$P_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{s_1 s_2}(x, y) dx dy$$

Vale la **condizione di normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(x, y) dx dy = 1$$

La probabilità che il valore $s(t_1) = s_1$ assunto dalla generica manifestazione del segnale, all'assegnato istante t_1 , sia appartenente all'intervallo $(a_1, b_1]$, e che il valore $s(t_2) = s_2$ assunto dalla stessa manifestazione, all'assegnato istante t_2 , sia appartenente all'intervallo $(a_2, b_2]$, vale:

$$\begin{aligned} \Pr\{s(t)|(s_1, s_2) \in (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\} &= \\ &= P_{s_1 s_2}(a_2, b_2) - P_{s_1 s_2}(a_1, b_2) - P_{s_1 s_2}(a_2, b_1) + P_{s_1 s_2}(a_1, b_1) = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} p_{s_1 s_2}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Funzioni di probabilità condizionate

Si considerino gli eventi:

$$E_2 = \{s(t) | s_2 \leq x_2\}$$

$$E_1 = \left\{s(t) \mid x_1 - \frac{|\Delta x_1|}{2} < s_1 \leq x_1 + \frac{|\Delta x_1|}{2}\right\}$$

Per la formula di Bayes, la probabilità dell'evento E_2 condizionata al manifestarsi dell'evento E_1 (supposto che $\Pr\{E_1\} \neq 0$) vale:

$$\Pr\{E_2|E_1\} = \frac{\Pr\{E_2 \cap E_1\}}{\Pr\{E_1\}} = \frac{\int_{x_1 - \left|\frac{\Delta x_1}{2}\right|}^{x_1 + \left|\frac{\Delta x_1}{2}\right|} \int_{-\infty}^{x_2} p_{s_1 s_2}(x, y) dx dy}{\int_{x_1 - \left|\frac{\Delta x_1}{2}\right|}^{x_1 + \left|\frac{\Delta x_1}{2}\right|} p_{s_1}(x) dx}$$

Facendo tendere Δx_1 a zero, ammesso che la $p_{s_1}(x_1)$ sia continua in x_1 , l'evento E_1 si riduce a $E_1 = \{s(t) | s_1 = x_1\}$, dunque:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \Pr\{E_2|E_1\} = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} p_{s_1 s_2}(x_1, y) dy}{p_{s_1}(x_1)} = P_{s_2|s_1}(x_2, x_1)$$

La precedente funzione è detta **distribuzione di probabilità condizionata** e ad essa corrisponde la **densità di probabilità condizionata**:

$$p_{s_2|s_1}(x_2, x_1) = \frac{\partial P_{s_2|s_1}(x_2, x_1)}{\partial x_2}$$

La densità di probabilità congiunta (densità di probabilità del secondo ordine) è pari al prodotto tra la densità di probabilità del primo ordine (condizionante) e la condizionata associate ad $s(t)$:

$$P_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = p_{s_1}(x_1) \cdot p_{s_2|s_1}(x_2, x_1)$$

In modo analogo:

$$P_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = p_{s_2}(x_2) \cdot p_{s_1|s_2}(x_1, x_2)$$

Poiché una stessa manifestazione del segnale non può assumere due valori distinti nello stesso istante, risulta anche che:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} p_{s_2|s_1}(x_2, x_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} p_{s_1|s_2}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2)$$

Valgono le **condizioni di normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1|s_2}(x_1, x_2) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_2|s_1}(x_2, x_1) dx_2 = 1$$

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è direttamente deducibile da quella del secondo ordine per **marginalizzazione**:

$$p_{s_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_2$$

$$p_{s_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1$$

Risulta infine che:

$$P_{s_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$$

$$P_{s_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$$

Funzioni di probabilità di ordine superiore

Dati $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, si consideri l'evento:

$$E_{x_1 x_2 \dots x_n} = \{s(t) | s_1 \leq x_1, s_2 \leq x_2, \dots, s_n \leq x_n\}$$

Tale evento è costituito da tutte le manifestazioni del segnale che, in corrispondenza degli istanti t_1, t_2, \dots, t_n , assumono rispettivamente valori non superiori a x_1, x_2, \dots, x_n . La sua probabilità di verificarsi dipende sia dai valori x_1, x_2, \dots, x_n sia dagli istanti t_1, t_2, \dots, t_n considerati; dunque, essa si può esprimere come segue:

$$\Pr\{E_{x_1 x_2 \dots x_n}\} = P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

La funzione appena definita costituisce la **distribuzione di probabilità di ordine n** associata al segnale aleatorio $s(t)$. Ad essa si può associare a sua volta la **densità di probabilità di ordine n** così definita:

$$p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Qualsiasi siano gli istanti t_1, t_2, \dots, t_n e per tutti i valori di x_1, x_2, \dots, x_n in cui $P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è derivabile in senso ordinario, vale:

$$p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

Valgono inoltre le condizioni:

$$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(-\infty, \dots, -\infty) = 0$$

$$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(\infty, \dots, \infty) = 1$$

Che consentono di scrivere:

$$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

Vale la **condizione di normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1 = 1$$

Le densità di probabilità di ordine inferiore di un segnale aleatorio sono direttamente deducibili da quella di ordine n per **marginalizzazione**:

$$p_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n$$

$$p_{s_1 s_2 \dots s_{n-2}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1}$$

⋮

$$p_{s_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_2$$

Se i valori assunti dalla generica manifestazione del segnale agli istanti t_1, t_2, \dots, t_n sono statisticamente indipendenti, ovvero se risulta:

$$p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{s_1}(x_1) \cdot p_{s_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{s_n}(x_n)$$

Allora il segnale si dice **puramente casuale** e si dice che la densità di probabilità contiene tutte le informazioni necessarie alla descrizione statistica del segnale. In questo caso la funzione di distribuzione di probabilità di ordine n vale ovviamente:

$$\begin{aligned} P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p_{s_1}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{x_2} p_{s_2}(x) dx \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{s_n}(x) dx = \prod_{i=1}^n P_{s_i}(x_i) \end{aligned}$$

Segnali aleatori deterministici

Un segnale si dice **deterministico** se l'evoluzione della generica manifestazione per valori $t \geq \tau$ può essere dedotta dalla conoscenza del segnale per $t < \tau$. Un tale segnale è rappresentabile mediante una funzione $s(t, Z)$ dove $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$ è un n -vettore di variabili aleatorie definite su uno stesso esperimento casuale caratterizzato da una distribuzione di probabilità congiunta $P_Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Segnali dipendenti da una variabile aleatoria monodimensionale

Sia $s = s(t, Z)$ un segnale dipendente da una variabile aleatoria monodimensionale Z . La distribuzione di probabilità del primo ordine ad esso associata $P_{s(\hat{t})}(x)$ è pari alla probabilità che il segnale, all'istante \hat{t} , assuma un valore non superiore ad x :

$$P_{s(\hat{t})}(x) = \Pr\{s(\hat{t}, Z) \leq x\}$$

Ma $\Pr\{s(\hat{t}, Z) \leq x\}$ dipende da quali valori di Z producono un valore del segnale non superiore a x . Questi valori sono contenuti nell'insieme:

$$I_{\hat{t}, x} = s^{-1}(\hat{t}, (-\infty, x]) \subseteq \mathbb{R}$$

Ovvero l'insieme dei risultati ζ tali per cui $s(\hat{t}, \zeta) \leq x$.

In definitiva, fissato t , la probabilità che una manifestazione assuma valori non superiori ad x all'istante t equivale alla probabilità che la variabile aleatoria Z assuma valori appartenenti all'insieme composto dagli intervalli controimmagine di un intorno di x :

$$P_{s(\hat{t})}(x) = \Pr\{I_{\hat{t}, x}\} = \Pr\{s^{-1}(\hat{t}, (-\infty, x])\} = \int_{I_{\hat{t}, x}} p_Z(z) dz$$

Un caso particolare si ha quando VEDI ESERCITAZIONE MANGIONE

UTILITIES

CAPITOLO 19

Medie statistiche

La **media statistica** di una qualsiasi funzione misurabile $y = f(s)$ con $s = s(t, \zeta)$ è pari a:

$$E\{f(s)\} = \overline{f(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

Tale media dipende generalmente dall'istante t di osservazione.

Se $f(s) = s^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) si definisce il **momento n-esimo del primo ordine** del segnale $s(t)$:

$$m_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

In particolare, per $n = 0$ si ha la **condizione di normalizzazione**:

$$m_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s(t)}(x) dx = 1$$

Per $n = 1$ si definisce il **valore medio statistico** del segnale:

$$m_1(t) = m(t) = E\{s(t, \zeta)\} = \bar{s} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

Per $n = 2$ si definisce il **valore quadratico medio statistico** del segnale:

$$m_2(t) = E\{s^2(t, \zeta)\} = \overline{s^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

Si definisce il **momento centrale n-esimo del primo ordine** come segue:

$$\mu_n(t) = E\{(s(t, \zeta) - m(t))^n\} = \overline{(s - m(t))^n} = \sigma^n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m(t))^n \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

In particolare, per $n = 2$ si definisce la **varianza** del segnale:

$$\sigma^2(t) = m_2(t) - m^2(t) = \overline{s^2} - \bar{s}^2$$

Nel caso in cui $s = s(t, \mathbf{Z})$ dipenda dal valore assunto dal vettore aleatorio \mathbf{Z} a n dimensioni, la media statistica risulta:

$$\overline{f(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_{s(t)}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(s(t, \mathbf{z})) \cdot p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Dove $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ è la densità di probabilità congiunta associata al vettore aleatorio \mathbf{Z} da cui dipende il segnale.

Nel caso in cui $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n] = [s(t_1, \zeta), s(t_2, \zeta), \dots, s(t_n, \zeta)]$, ovvero fissata una n-upla t_1, t_2, \dots, t_n \mathbf{s} è un vettore di variabili aleatorie definite su uno stesso esperimento casuale, la media statistica risulta:

$$\overline{f(\mathbf{s})} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \cdot p_{s_1 s_2 \dots s_n}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Dove $p_{s_1 s_2 \dots s_n}(\mathbf{x})$ è la densità di probabilità di ordine n del segnale.

In particolare, se $n = 2$:

$$\overline{f(s_1, s_2)} = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \cdot p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Se $f(s_1, s_2) = s_1^p s_2^q$ si definisce il **momento (p+q)-esimo del secondo ordine** del segnale:

$$m_{pq}(t_1, t_2) = \overline{s_1^p s_2^q} = E\{s_1^p s_2^q\} = \int \int_{\mathbb{R}^2} x_1^p x_2^q \cdot p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Se $p = q = 0$ otteniamo la **condizione di normalizzazione**:

$$m_{00}(t_1, t_2) = \int \int_{\mathbb{R}^2} p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

Se $p = q = 1$ otteniamo la **funzione di autocorrelazione** del segnale:

$$R_s(t_1, t_2) = m_{11}(t_1, t_2) = \int \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \cdot p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Si definisce il **momento centrale (p+q)-esimo del secondo ordine** come segue:

$$\mu_{pq}(t_1, t_2) = \overline{(s_1 - m(t_1))^p (s_2 - m(t_2))^q} =$$

$$= \int \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m(t_1))^p (x_2 - m(t_2))^q \cdot p_{s_1 s_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

In particolare, se $p = q = 1$ si definisce l'**autocovarianza** del segnale:

$$\sigma_s(t_1, t_2) = R_s(t_1, t_2) - \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$$

Medie temporali ed ergodicità

Se $s(t)$ denota la generica manifestazione di un segnale aleatorio, si definisce **media temporale** della funzione $f[s(t)]$ associata alla manifestazione del segnale la seguente quantità:

$$\langle f[s(t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T f[s(t)] dt$$

Si definisce **valore medio temporale** la seguente quantità:

$$\langle s(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s(t) dt$$

Si definisce **valore quadratico medio temporale** la seguente quantità:

$$\langle s^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s^2(t) dt$$

Più in generale, vale la seguente:

$$\langle f[s(t_1 + t), \dots, s(t_n + t)] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T f[s(t_1 + t), \dots, s(t_n + t)] dt$$

Dalla quale discende l'espressione della **funzione di autocorrelazione in media temporale per segnali reali**:

$$\gamma_s(\tau) = \langle s(t)s(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s(t) \cdot s(t + \tau) dt$$

È possibile inoltre definire un **valore medio statistico** per le medie temporali:

$$\overline{\langle f[s(t)] \rangle} = \overline{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T f[s(t)] dt} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T \overline{f[s(t)]} dt = \langle \overline{f[s(t)]} \rangle$$

Vale in maniera analoga per $\overline{\langle f[s(t_1 + t), \dots, s(t_n + t)] \rangle}$.

Le medie temporali non permettono di ottenere delle informazioni di natura statistica del segnale. Esiste tuttavia una particolare classe di segnali, ovvero i segnali **ergodici**, per i quali ogni proprietà statistica può essere determinata a partire da una qualsiasi manifestazione. In particolare, un segnale si dice **ergodico in media** se:

$$\langle s(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

Un segnale si dice **ergodico in media quadratica** se:

$$\langle s^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-T}^T s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_{s(t)}(x) dx$$

Un segnale si dice **ergodico in autocorrelazione** se:

$$\gamma_s(\tau) = R_s(\tau)$$

In generale, affinché la condizione di ergodicità sia soddisfatta, è necessario che le medie temporali non dipendano dalla particolare manifestazione sulla quale vengono calcolate, e che le medie statistiche non dipendano dall'origine dei tempi ma soltanto dalla posizione relativa tra gli istanti in cui la media statistica è valutata. Questo significa che una condizione necessaria per l'ergodicità è la stazionarietà in senso stretto.

UTILITIES

CAPITOLO 21

Proprietà della funzione di autocorrelazione per segnali a tempo continuo

Segnali stazionari in senso lato	Segnali non stazionari
$R_s(\tau) = \overline{s^*(t)s(t+\tau)}$	$R_s(t_1, t_2) = \overline{s^*(t_1)s(t_2)}$
$R_s(0) = \overline{ s(t) ^2}$	$R_s(t, t) = \overline{ s(t) ^2}$
$R_s(-\tau) = R_s^*(\tau)$	$R_s(t_1, t_2) = R_s^*(t_2, t_1)$
$ R_s(\tau) \leq R_s(0)$	$ R_s(t_1, t_2) \leq \sqrt{R_s(t_1, t_1)} \cdot \sqrt{R_s(t_2, t_2)}$
$\int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \cdot R_s(y-x) \cdot \phi^*(y) dx dy \geq 0$	$\int \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \cdot R_s(x, y) \cdot \phi^*(y) dx dy \geq 0$