

Esame di: **Controlli Automatici**

Consegna: **31 gennaio 2024**

Gruppo: **CA23-15**

Studenti: **Marino Marco, 0731906** (corrispondente)

Girgenti Simone, 0731084

Lucchese Gaspare, 0738070

Maniscalco Vincenzo, 0731189

Tuiu Iulian, 0730761

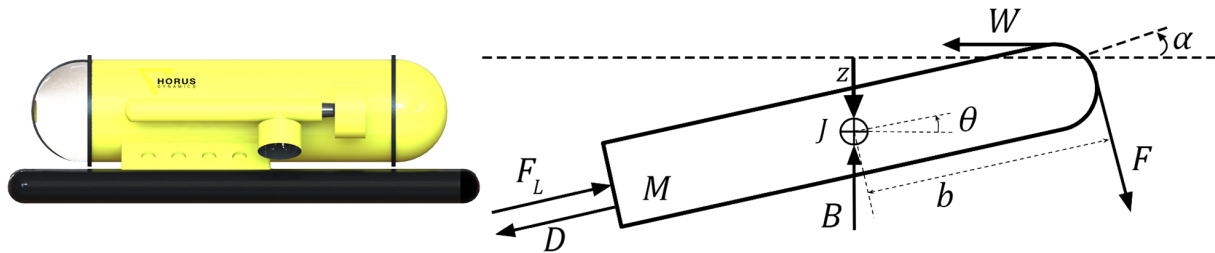
Risultato:

(a cura del docente)

Commenti generali alla soluzione *(a cura del docente):*

Tema *Submarine – remotely operated vehicle (ROV)*

Un sottomarino telecomandato da remoto (ROV) è soggetto alla spinta di galleggiamento, alla spinta longitudinale dei motori di poppa e a quella dei motori di prua e ad una resistenza idrodinamica proporzionale alla sua velocità. Poiché può muoversi anche sul pelo d'acqua, esso è anche soggetto all'azione del vento sulla sua superficie esposta. La navigazione del veicolo richiede di stabilizzare la posizione della prua attraverso la misura della stessa.



$$\begin{aligned}
 M\ddot{z} &= F \cos(\theta) - k_z \dot{z} \cos(\theta) - F_L \sin^2(\theta) - B - D\dot{z} - W \sin^2(\alpha) \\
 J\ddot{\theta} &= -k_r \dot{\theta} - k_\theta \sin(\theta) - Fb - D\dot{\theta} - Wd \cos(\alpha) \\
 y &= z - b \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

Tabella 1 - Variabili e altre funzioni

Variab.	Descrizione
z	profondità del centro di massa dal pelo d'acqua [m]
θ	angolo di beccheggio [rad]
F	(ingresso) propulsione dei motori di prua [N]

Tabella 2 - Parametri

Param.	Descrizione	Valore
M	massa del sottomarino [kg]	1000
J	inerzia laterale del sottomarino [Nms^2]	500
B	spinta di galleggiamento [N]	1500
F_L	spinta di propulsione longitudinale [N]	—
b	distanza centro di massa – prua [m]	2
k_z, k_r	coefficienti degli attriti viscosi [Ns/m], [Nms]	35 e 15
k_θ	costante di leva [Nm]	30
D	resistenza idrodinamica dell'acqua [Ns/m]	100
W	azione del vento sulla superficie esposta del ROV [N]	200
α	angolo tra la direzione del vento e l'asse longitudinale del ROV [rad]	$\pi/6$
d	distanza laterale del centro di massa dalla linea di azione del vento [m]	1

Tabella 3 - Condizioni di equilibrio e Requisiti

Equilibrio (H1)	Angolo di beccheggio $\bar{\theta} = \pi/4$ [rad] e spinta di galleggiamento $B = \bar{B}$; \bar{z} , \bar{F} e \bar{F}_L da determinare.
Requisito (R1)	Inseguimento perfetto di riferimenti costanti per la variazione dell'uscita, con un tempo di risposta non superiore a 7 s ed eventuali oscillazioni entro il 5% dal valore di regime.

1 Parte Simbolica

Si risponda ai seguenti quesiti in modo simbolico:

- (a) Usando le condizioni (H1) nella Tabella 3, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.

Soluzione:

Con l'obiettivo di determinare le configurazioni di equilibrio del modello proposto, imponiamo le condizioni operative:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \\ B = \bar{B} \end{cases}$$

alle equazioni dinamiche interessate:

$$\begin{aligned} M\ddot{z} &= F \cos(\theta) - k_z \dot{z} \cos(\theta) - F_L \sin^2(\theta) - B - D\dot{z} - W \sin^2(\alpha) \\ J\ddot{\theta} &= -k_r \dot{\theta} - k_\theta \sin(\theta) - Fb - D\dot{\theta} - Wd \cos(\alpha) \end{aligned}$$

All'equilibrio (il sistema non si muove) risulta che:

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta} = \frac{\pi}{4} \\ z = \bar{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = \dot{z} = 0 \end{cases}$$

$$0 = \frac{\bar{F}}{M} \cos(\bar{\theta}) - \frac{k_z}{M} \cdot 0 \cdot \cos(\bar{\theta}) - \frac{\bar{F}_L}{M} \sin^2(\bar{\theta}) - \frac{\bar{B}}{M} - D \cdot 0 - \frac{W \sin^2(\alpha)}{M} \quad (1)$$

$$0 = -\frac{k_r}{J} \cdot 0 - \frac{k_\theta}{J} \sin(\bar{\theta}) - \frac{\bar{F}}{J} b - D \cdot 0 - \frac{Wd \cos(\alpha)}{J} \quad (2)$$

Dalla (2) esplicitiamo \bar{F} sostituendo le condizioni di equilibrio imposte:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= -\frac{Wd \cos(\alpha)}{b} - \frac{k_\theta}{b} \sin(\bar{\theta}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{F} &= -\frac{Wd \cos(\alpha)}{b} - \frac{k_\theta \sqrt{2}}{2b} \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{F} &= -\frac{2Wd \cos(\alpha) + k_\theta \sqrt{2}}{2b} \end{aligned}$$

Per trovare \bar{F}_L sostituiamo il valore di \bar{F} nella (1):

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(-\frac{2Wd \cos(\alpha) + k_\theta \sqrt{2}}{2b} \right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\bar{F}_L}{M} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\bar{B}}{M} - \frac{W \sin^2(\alpha)}{M} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 0 &= -\frac{2Wd \cos(\alpha) + k_\theta \sqrt{2}}{2bM} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\bar{F}_L}{M} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\bar{B}}{M} - \frac{W \sin^2(\alpha)}{M} \Rightarrow \\
 \Rightarrow 0 &= -\frac{\sqrt{2}Wd \cos(\alpha) + k_\theta}{2b} - \frac{\bar{F}_L}{2} - \bar{B} - W \sin^2(\alpha) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \bar{F}_L &= -2\bar{B} - 2W \sin^2(\alpha) - \frac{\sqrt{2}Wd \cos(\alpha) + k_\theta}{b}
 \end{aligned}$$

Da ciò si evince che la quota z non compare; dunque, poniamo una z arbitraria come configurazione di equilibrio. Le configurazioni di equilibrio delle variabili \bar{F} , \bar{F}_L e \bar{z} sono:

$$\begin{cases} \bar{F} = -\frac{2Wd \cos(\alpha) + k_\theta \sqrt{2}}{2b} \\ \bar{F}_L = -2\bar{B} - 2W \sin^2(\alpha) - \frac{\sqrt{2}Wd \cos(\alpha) + k_\theta}{b} \\ \bar{z} = \text{arbitraria} \end{cases}$$

Correzione (a cura del docente):

- (b) Assumendo piccoli spostamenti dello stato del sistema dagli equilibri trovati sopra, determinare il modello linearizzato per le variabili traslate.

Soluzione:

Trovati gli equilibri, procediamo a definire le variabili traslate:

$$\begin{cases} \delta F = F - \bar{F} \\ \delta \theta = \theta - \bar{\theta} \\ \delta z = z - \bar{z} \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni dinamiche rispetto alle variabili non traslate del modello iniziale e operando con lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine, procediamo alla linearizzazione delle equazioni del modello.

Partendo dalla prima equazione dinamica:

$$M\delta\ddot{z} = (\delta F + \bar{F}) \cos(\delta\theta + \bar{\theta}) - k_z \delta\dot{z} \cos(\delta\theta + \bar{\theta}) - \bar{F}_L \sin^2(\delta\theta + \bar{\theta}) - B - D\delta\dot{z} - W \sin^2(\alpha)$$

Operando gli sviluppi di seno e coseno con Taylor attorno a $\bar{\theta}$ e troncandoli al primo ordine si ottiene:

$$\begin{aligned}\cos(\delta\theta + \bar{\theta}) &\approx \cos(\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta}) \delta\theta \\ \sin^2(\delta\theta + \bar{\theta}) &\approx \sin^2(\bar{\theta}) + 2 \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta}) \delta\theta\end{aligned}$$

Sostituendo gli sviluppi nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned}M\delta\ddot{z} &= (\delta F + \bar{F})(\cos(\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\delta\theta) - k_z\delta\dot{z}(\cos(\bar{\theta}) - \sin(\bar{\theta})\delta\theta) - \\ &\quad - \bar{F}_L \cdot (\sin^2(\bar{\theta}) + 2 \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})\delta\theta) - B - D\delta\dot{z} - W \sin^2(\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow M\delta\ddot{z} &= \delta F \cos(\bar{\theta}) - \delta F \sin(\bar{\theta})\delta\theta + \bar{F} \cos(\bar{\theta}) - \bar{F} \sin(\bar{\theta})\delta\theta - k_z\delta\dot{z} \cos(\bar{\theta}) + k_z\delta\dot{z} \sin(\bar{\theta})\delta\theta - \\ &\quad - \bar{F}_L \sin^2(\bar{\theta}) - 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})\delta\theta - B - D\delta\dot{z} - W \sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

Possiamo adesso attuare le dovute semplificazioni, ad esempio tralasciando tutti quei termini costanti (che non ci danno informazioni utili) o che presentano prodotti tra variabili in delta; infatti, moltiplicando variabili "piccole" per altre variabili "piccole" si ottiene una variabile "ancora più piccola" di ordine due che, in virtù del fatto che stiamo approssimando al primo ordine, possono considerarsi infinitesimi di ordine superiore (e quindi una notazione o-piccolo trascurabile).

$$M\delta\ddot{z} = \delta F \cos(\bar{\theta}) - \bar{F} \sin(\bar{\theta})\delta\theta - k_z\delta\dot{z} \cos(\bar{\theta}) - 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})\delta\theta - D\delta\dot{z}$$

Raggruppiamo secondo i termini comuni:

$$M\delta\ddot{z} = -(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta}))\delta\theta + \cos(\bar{\theta})\delta F - (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)\delta\dot{z}$$

Otterremo la prima equazione dinamica del modello linearizzato (1):

$$\delta\ddot{z} = -\frac{1}{M}(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta}))\delta\theta - \frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{\theta}) + D)\delta\dot{z} + \frac{1}{M} \cos(\bar{\theta})\delta F$$

Effettuiamo un procedimento analogo utilizzando la seconda equazione dinamica:

$$J\delta\ddot{\theta} = -k_r\delta\dot{\theta} - k_\theta \sin(\delta\theta + \bar{\theta}) - (\delta F + \bar{F})b - D\delta\dot{\theta} - W_d \cos(\alpha)$$

Sviluppiamo il seno secondo Taylor arrestandoci sempre al primo ordine:

$$\sin(\delta\theta + \bar{\theta}) = \sin(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})\delta\theta$$

Sostituendo lo sviluppo nell'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned}J\delta\ddot{\theta} &= -k_r\delta\dot{\theta} - k_\theta(\sin(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})\delta\theta) - (\delta F + \bar{F})b - D\delta\dot{\theta} - W_d \cos(\alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow J\delta\ddot{\theta} &= -k_r\delta\dot{\theta} - k_\theta \sin(\bar{\theta}) - k_\theta \cos(\bar{\theta})\delta\theta - \delta F b - \bar{F} b - D\delta\dot{\theta} - W_d \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Anche in questo caso tralasciamo i termini costanti e di ordine superiore al primo:

$$J\delta\ddot{\theta} = -k_r\delta\dot{\theta} - k_\theta \cos(\bar{\theta})\delta\theta - \delta F b - D\delta\dot{\theta}$$

Raggruppiamo secondo i termini comuni:

$$J\delta\ddot{\theta} = -(k_r + D)\delta\dot{\theta} - k_\theta \cos(\bar{\theta})\delta\theta - b\delta F$$

Otterremo la seconda equazione dinamica del modello linearizzato (2):

$$\delta\ddot{\theta} = -\frac{1}{J}(k_r + D)\delta\dot{\theta} - \frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{\theta})\delta\theta - \frac{1}{J}b\delta F$$

Indicando con x il vettore di stato e con u il vettore degli ingressi:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \delta z \\ \delta\theta \\ \delta\dot{z} \\ \delta\dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad u \triangleq \delta F$$

Deriviamo le componenti del vettore di stato:

$$x = \begin{cases} x_1 = \delta z \\ x_2 = \delta\theta \\ x_3 = \delta\dot{z} \\ x_4 = \delta\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \delta\ddot{z} \\ \dot{x}_4 = \delta\ddot{\theta} \end{cases}$$

Effettuiamo le dovute sostituzioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -\frac{1}{M}(\bar{u} \sin(\bar{x}_2) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2)) x_2 - \frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) x_3 + \frac{1}{M} \cos(\bar{x}_2) u \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{J}(k_r + D) x_4 - \frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) x_2 - \frac{1}{J}bu \end{cases}$$

Scriviamo ora il sistema in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \Rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M}(\bar{u} \sin(\bar{x}_2) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2)) & -\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) & 0 & -\frac{1}{J}(k_r + D) \end{bmatrix} x + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{M} \cos(\bar{x}_2) \\ -\frac{1}{J}b \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

Considerando poi la variabile di uscita:

$$y = z - b \sin(\theta)$$

Possiamo procedere alla scrittura dell'equazione di uscita linearizzata approssimata (tenendo conto della variabile traslata di uscita) come:

$$\begin{aligned}\delta y &= y - \bar{y} \\ \delta y &= (\delta z + \dot{z}) - b \sin(\delta\theta + \bar{\theta}) - \bar{y}\end{aligned}$$

Sviluppiamo con Taylor arrendandoci al primo ordine:

$$\sin(\delta\theta + \bar{\theta}) = \sin(\bar{\theta}) + \cos(\bar{\theta})\delta\theta$$

Sostituendo nell'equazione di uscita:

$$\delta y = (\delta z + \bar{z}) - b \sin(\bar{\theta}) - b \cos(\bar{\theta})\delta\theta - \bar{z} + b \sin(\bar{\theta})$$

Semplificando:

$$\delta y = \delta z - b \cos(\bar{\theta})\delta\theta$$

Utilizzando le variabili di stato precedentemente definite e ponendo $y \triangleq \delta y$, otterremo:

$$y = x_1 - b \cos(\bar{x}_2)x_2$$

Scriviamo anche l'uscita in forma matriciale:

$$y = Cx + Du \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & -b \cos(\bar{x}_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x + 0 \cdot u$$

Correzione (a cura del docente):

- (c) Indicando con x_0 il generico stato iniziale, determinare l'evoluzione libera del modello ed esprimerla come $M(A, x_0)m(t)$, con $m(t)$ il vettore dei modi.

Soluzione:

Al fine di scrivere la soluzione libera del sistema in notazione $x(t) = e^{At}x_0$, dove x_0 è il vettore delle condizioni iniziali ed e^{At} è la matrice di transizione calcolata a partire dalla matrice dinamica A trovata nella soluzione 1b, dobbiamo ricavare gli autovalori associati ad A, ovvero trovare le soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\pi(\lambda) = \det(A - \lambda Id_4) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{M}(\bar{u} \sin(\bar{x}_2) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2)) & -\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) & 0 & -\frac{1}{J}(k_r + D) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Procediamo al calcolo del determinante usando il metodo di Laplace sulla prima colonna (poiché quella con maggior numero di termini nulli):

$$\det(A - \lambda Id_4) = -1^{1+1} \cdot (-\lambda).$$

$$\cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M}(\bar{u} \sin(\bar{x}_2) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2)) & -\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) & 0 & -\frac{1}{J}(k_r + D) - \lambda \end{pmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \lambda^2 \cdot \left(-\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda \right) \cdot \left(-\frac{1}{J}(k_r + D) - \lambda \right) + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda \right) \cdot \left(-\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) \right) = 0$$

$$\stackrel{\text{Sarrus}}{=} \lambda^2 \cdot \left(-\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda \right) \cdot \left(-\frac{1}{J}(k_r + D) - \lambda \right) + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) - \lambda \right) \cdot \left(-\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) \right) = 0$$

Autovalori:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{D + k_z \cos(\bar{x}_2)}{M}$$

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\left(D + k_r \pm \sqrt{k_r^2 + 2Dk_r + D^2 - 4Jk_\theta \cos(\bar{x}_2)} \right)}{2J}$$

Risalta subito all'occhio il fatto che, in base al valore del radicando (Δ) di $\lambda_{3,4}$, possiamo studiare tre casi diversi:

CASO 1: $\Delta > 0$, $\lambda_{3,4}$ sono reali e distinti.

CASO 2: $\Delta = 0$, $\lambda_{3,4}$ sono reali e coincidenti.

CASO 3: $\Delta < 0$, $\lambda_{3,4}$ sono complessi coniugati.

Il tipo di scrittura del vettore dei modi è influenzato proprio dal radicando, infatti:

CASO 1:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}$$

CASO 2:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \\ t e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

CASO 3:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Per capire in quale dei tre casi rientra il nostro calcolo, dobbiamo semplicemente sostituire il valore dei parametri del radicando. Poichè otteniamo un valore negativo, sappiamo di trovarci nel terzo caso:

$$\Rightarrow \lambda_{3,4} = -\frac{D + k_r \pm i \cdot \sqrt{k_r^2 + 2Dk_r + D^2 - 4Jk_\theta \cos(\bar{x}_2)}}{2J}$$

Avremo 4 autovalori distinti con molteplicità algebrica uguale alla geometrica, di conseguenza la matrice A sarà diagonalizzabile.

Tornando al calcolo della soluzione libera, per poterla scrivere dobbiamo prima calcolare e^{At} trovando gli autovettori associati agli autovalori imponendo il sistema $(A - \lambda_i I)v_i = 0$. Prima di procedere, al fine di semplificare visivamente i calcoli a venire, sostituiamo i valori della matrice dinamica A e dei suoi autovalori in questo modo:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{M}(\bar{u} \sin \bar{x}_2) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2) \\ b = -\frac{1}{M}(k_z \cos(\bar{x}_2) + D) \\ c = -\frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{x}_2) \\ d = -\frac{1}{J}(k_r + D) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{d - \sqrt{(4c+d^2)}}{2} \\ \frac{d + \sqrt{(4c+d^2)}}{2} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'autovettore associato a λ_1 :

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_1 = 0 &\Rightarrow (A - 0I)v_1 = 0 \Rightarrow Av_1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{v_1} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Calcoliamo l'autovettore associato a λ_2 :

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0 \Rightarrow (A - bI)v_2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{z}{b} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_{v_2} = \left\{ z \begin{pmatrix} \frac{1}{b} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo l'autovettore associato a λ_3 :

$$(A - \lambda_3 I)v_3 = 0 \Rightarrow \left(A - \left(\frac{d - \sqrt{(4c+d^2)}}{2} \right) I \right) v_3 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2a}{2bc+c\sqrt{(4c+d^2)}+d^2\sqrt{(4c+d^2)}-bd\sqrt{(4c+d^2)}-d^3+bd^2-3cd} \\ -\frac{2}{(4c+d^2)-d} \\ \frac{2a}{2c+b\sqrt{(4c+d^2)}-d\sqrt{(4c+d^2)}+d^2-bd} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricordando che siamo nel “CASO 3” e quindi $\lambda_{3,4}$ sono complessi e coniugati, avremo che $v_4 = v_3^*$. Sapendo che A è diagonalizzabile vale la relazione:

$$ATE = T\Lambda E \Rightarrow A \underbrace{TE}_Q = \underbrace{TE}_Q \underbrace{E^{-1}\Lambda E}_{\Lambda^*} \Rightarrow A = Q\Lambda^*Q^{-1}$$

Scriviamo la matrice T degli autovettori e calcoliamone l'inversa:

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \xrightarrow{v_4=v_3^*} \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_3^* \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \\ T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & v_{31} & v_{31}^* \\ 0 & 0 & v_{32} & v_{32}^* \\ 0 & 1 & v_{33} & v_{33}^* \\ 0 & 0 & v_{34} & v_{34}^* \end{pmatrix}$$

Se $\det(T) \neq 0 \Rightarrow T$ invertibile:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-b \cdot v_{31}^* \cdot v_{34} + v_{33}^* \cdot v_{34} + b \cdot v_{31} \cdot v_{34}^* - v_{33} \cdot v_{34}^*}{b \cdot v_{32}^* \cdot v_{34} - b \cdot v_{32} \cdot v_{34}^*} & -\frac{1}{b} & \frac{b \cdot v_{31}^* \cdot v_{32} - b \cdot v_{31} \cdot v_{32}^* + v_{32}^* \cdot v_{33} - v_{32} \cdot v_{33}^*}{b \cdot v_{32}^* \cdot v_{34} - b \cdot v_{32} \cdot v_{34}^*} \\ 0 & \frac{-v_{33}^* \cdot v_{34} + v_{33} \cdot v_{34}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} & 1 & \frac{-v_{32}^* \cdot v_{33} + v_{32} \cdot v_{33}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} \\ 0 & \frac{-v_{33}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} & 0 & \frac{v_{32}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} \\ 0 & \frac{v_{33}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} & 0 & \frac{-v_{32}^*}{v_{32}^* \cdot v_{34} - v_{32} \cdot v_{34}^*} \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice Q :

$$TE = Q = (Re\{v_1\}, Re\{v_2\}, Re\{v_3\}, Im\{v_3\}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & Re\{v_{31}\} & Im\{v_{31}\} \\ 0 & 0 & Re\{v_{32}\} & Im\{v_{32}\} \\ 0 & 1 & Re\{v_{33}\} & Im\{v_{33}\} \\ 0 & 0 & Re\{v_{34}\} & Im\{v_{34}\} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{v_{31}+v_{31}^*}{2} & -\frac{v_{31}-v_{31}^*}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{v_{32}+v_{32}^*}{2} & -\frac{v_{32}-v_{32}^*}{2}i \\ 0 & 1 & \frac{v_{33}+v_{33}^*}{2} & -\frac{v_{33}-v_{33}^*}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{v_{34}+v_{34}^*}{2} & -\frac{v_{34}-v_{34}^*}{2}i \end{pmatrix}$$

Ricaviamo la matrice complessa E :

$$E = QT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

Se $\det(E) \neq 0 \Rightarrow E$ invertibile:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}$$

Al fine di semplificare nuovamente i calcoli poniamo:

$$\begin{cases} v_{31} = l \\ v_{32} = m \\ v_{33} = n \\ v_{34} = o \\ v_{31}^* = p \\ v_{32}^* = q \\ v_{33}^* = r \\ v_{34}^* = s \end{cases}$$

Quindi T diventerà:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & l & p \\ 0 & 0 & m & q \\ 0 & 1 & n & r \\ 0 & 0 & o & s \end{pmatrix}$$

Q diventerà:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{l+p}{2} & \frac{p-l}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{m+q}{2} & \frac{q-m}{2}i \\ 0 & 1 & \frac{n+r}{2} & \frac{r-n}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{o+s}{2} & \frac{s-o}{2}i \end{pmatrix}$$

Se $\det(Q) \neq 0 \Rightarrow Q$ invertibile:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-bop+or+bls-ns}{boq-bms} & -\frac{1}{b} & \frac{bmp-blq+nq-mr}{boq-bms} \\ 0 & \frac{-or+ns}{oq-ms} & 1 & \frac{-nq+mr}{oq-ms} \\ 0 & \frac{o-s}{oq-ms} & 0 & \frac{-m+q}{oq-ms} \\ 0 & \frac{-io-is}{oq-ms} & 0 & \frac{im+iq}{oq-ms} \end{pmatrix}$$

Ricaviamo la matrice diagonalizzata Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d-\sqrt{4c+d^2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d+\sqrt{4c+d^2}}{2} \end{pmatrix}$$

Con $0, b$ autovalori reali e $\frac{d-\sqrt{4c+d^2}}{2}, \frac{d+\sqrt{4c+d^2}}{2}$ autovalori complessi coniugati.

Indicando con $\sigma = \frac{d}{2}$ la parte reale e con $\omega = \frac{\sqrt{4c+d^2}}{2}$ la parte immaginaria dei complessi coniugati avremo:

$$\Lambda^* = E^{-1}\Lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & \frac{\sqrt{4c+d^2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{4c+d^2}}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

E quindi:

$$e^{\Lambda^*t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma t} \cos(\omega t) & e^{\sigma t} \sin(\omega t) \\ 0 & 0 & -e^{\sigma t} \sin(\omega t) & e^{\sigma t} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Scriviamo (finalmente) la soluzione libera del sistema:

$$x(t) = e^{At}x_0 = Qe^{\Lambda^*t}Q^{-1}x_0 = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \frac{boqx_{01}-bmsx_{01}-bopx_{02}+orx_{02}+blsx_{02}-nsx_{02}-oqx_{03}+msx_{03}+bmpx_{04}-blqx_{04}+nqx_{04}-mrx_{04}}{boq-bms} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \frac{-orx_{02}+nsx_{02}+oqx_{03}-msx_{03}-nqx_{04}+mrx_{04}}{boq-bms} \\ 0 \\ \frac{-orx_{02}+nsx_{02}+oqx_{03}-msx_{03}-nqx_{04}+mrx_{04}}{oq-ms} \\ 0 \end{pmatrix} + \\
& + e^{\sigma t} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} \frac{bopx_{02}-blsx_{02}-bmpx_{04}+blqx_{04}}{boq-bms} \\ \frac{oqx_{02}-msx_{02}}{oq-ms} \\ \frac{-orx_{02}+nsx_{02}+oqx_{03}-msx_{03}-nqx_{04}+mrx_{04}}{oq-ms} \\ \frac{oqx_{04}-msx_{04}}{oq-ms} \end{pmatrix} + \\
& + e^{\sigma t} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \frac{ibopx_{02}-iblsx_{02}+ibmpx_{04}+iblx_{04}}{boq-bms} \\ \frac{-ioqx_{02}-imsx_{02}}{oq-ms} \\ \frac{-iorx_{02}-insx_{02}+inqx_{04}+imrx_{04}}{oq-ms} \\ \frac{-2iosx_{02}+ioqx_{04}+imsx_{04}}{oq-ms} \end{pmatrix} = \\
& = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ 0 & 0 & M_{23} & M_{24} \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix}}_{M(A, x_0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}}_{m(t)}
\end{aligned}$$

Correzione (a cura del docente):

- (d) Usando le condizioni di equilibrio (H1), discutere l'andamento asintotico dei modi e la stabilità del sistema.

Soluzione:

La stabilità del sistema dipende dagli autovalori della matrice dinamica A trovati al punto 1c. Come detto in precedenza, la matrice dinamica A possiede 4 autovalori distinti con molteplicità algebrica pari a quella geometrica e con $Re\{\lambda_i\} = 0$ per $i = 1$ e $Re\{\lambda_i\} < 0$ per $i = 2, 3, 4$. Dato che almeno uno degli autovalori ha parte reale pari a 0, il sistema si dirà **MARGINALMENTE STABILE**.

Passando all'analisi modale, considerando il vettore dei modi:

$$m(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\sigma t} \cos(\omega t) \\ e^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

- Per $\lambda = \lambda_1$ il modo m_1 risulta costante.
- Per $\lambda = \lambda_2$ abbiamo invece un modo m_2 convergente a zero.
- Per $\lambda = \lambda_3, \lambda = \lambda_4$ abbiamo due modi m_3, m_4 oscillanti e convergenti a zero.

Inoltre, alla luce del fatto che il sistema è marginalmente stabile, possiamo affermare che esso risulta anche **NON ATTRATTIVO**.

Correzione (a cura del docente):

- (e) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra la variazione dell'ingresso e la variazione dell'uscita e determinare, se possibile, le posizioni dei rispettivi poli ed eventuali zeri

Soluzione:

La funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$$

che lega la variazione dell'uscita rispetto alla variazione dell'ingresso, fornisce una misura della sensibilità del sistema alle perturbazioni. Servendoci della definizione operativa di funzione di trasferimento, poniamo:

$$\begin{cases} \Delta Y(s) = \mathcal{L}[\delta y] \\ \Delta F(s) = \mathcal{L}[\delta F] \\ \Delta Z(s) = \mathcal{L}[\delta z] \\ \Delta \Theta(s) = \mathcal{L}[\delta \theta] \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni del modello linearizzato:

$$\begin{aligned} \delta y &= \delta z - b \cos(\bar{\theta}) \delta \theta \xrightarrow{\mathcal{L}} \Delta Y(s) \\ \Rightarrow \Delta Y(s) &= \Delta Z(s) - b \cos(\bar{\theta}) \Delta \Theta(s) \\ \delta \ddot{\theta} &= -\frac{1}{J}(k_r + D) \delta \dot{\theta} - \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \delta \theta - \frac{1}{J} b \delta F \xrightarrow{\mathcal{L}} \Delta \Theta(s) \end{aligned}$$

Poiché noi abbiamo posto $\Delta\Theta(s) = \mathcal{L}[\delta\theta]$, per trovare $\mathcal{L}[\delta\ddot{\theta}]$ dobbiamo sfruttare la proprietà di derivazione della trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta\dot{\theta}] &= s\Delta\Theta(s) \\ \mathcal{L}[\delta\ddot{\theta}] &= s^2\Delta\Theta(s) \\ \Rightarrow s^2\Delta\Theta(s) &= -\frac{1}{J}(k_r + D)s\Delta\Theta(s) - \frac{1}{J}k_\theta \cos(\bar{\theta})\Delta\Theta(s) - \frac{1}{J}b\Delta F(s)\end{aligned}$$

Per esprimere $\Delta\Theta(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$ portiamo dapprima i termini in $\Delta\Theta(s)$ a primo membro e raccogliamo:

$$\begin{aligned}s^2\Delta\Theta(s) + \frac{1}{J}(k_r + D)s\Delta\Theta(s) + \frac{1}{J}(k_\theta + D)\cos(\bar{\theta})\Delta\Theta(s) &= -\frac{1}{J}b\Delta F(s) \\ \left(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J}(k_\theta + D)\cos(\bar{\theta})\right)(\Delta\Theta(s)) &= -\frac{1}{J}b\Delta F(s)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Delta\Theta(s) = -\frac{\frac{1}{J}b}{\left(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J}(k_\theta + D)\cos(\bar{\theta})\right)}\Delta F(s)$$

Consideriamo adesso l'altra equazione del modello linearizzato e svolgiamo lo stesso procedimento:

$$\delta\ddot{z} = -\frac{1}{M}(\bar{F}\sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L\sin(\bar{\theta})\cos(\bar{\theta}))\delta\theta - \frac{1}{M}(k_z\cos(\bar{\theta}) + D)\delta\dot{z} + \frac{1}{M}\cos(\bar{\theta})\delta F$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta\dot{z}] &= s\Delta Z(s) \\ \mathcal{L}[\delta\ddot{z}] &= s^2\Delta Z(s)\end{aligned}$$

$$s^2\Delta Z(s) = -\frac{(\bar{F}\sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L\sin(\bar{\theta})\cos(\bar{\theta}))}{M}\Delta\Theta(s) - \frac{(k_z\cos(\bar{\theta}) + D)}{M}s\Delta Z(s) + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M}\Delta F(s)$$

Anche in questo caso esprimiamo $\Delta Z(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$ sostituendo $\Delta\Theta(s)$:

$$\begin{aligned}s^2\Delta Z(s) &= -\frac{\bar{F}\sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L\sin(\bar{\theta})\cos(\bar{\theta})}{M}\left(-\frac{\left(\frac{1}{J}b\right)}{s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J}k_\theta\cos(\bar{\theta})}\right)\Delta F(s) - \\ &\quad - \frac{k_z\cos(\bar{\theta}) + D}{M}s\Delta Z(s) + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M}\Delta F(s)\end{aligned}$$

$$s^2\Delta Z(s) = \frac{(\bar{F}\sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L\sin(\bar{\theta})\cos(\bar{\theta}))\frac{1}{J}b}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J}k_\theta\cos(\bar{\theta}))}\Delta F(s) - \frac{k_z\cos(\bar{\theta}) + D}{M}s\Delta Z(s) + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M}\Delta F(s)$$

Raccogliamo i termini in $\Delta F(s)$ e portiamo il termine $\Delta Z(s)$ a primo membro:

$$s^2 \Delta Z(s) + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} s \Delta Z(s) = \left(\frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M} \right) \Delta F(s)$$

Raccogliamo i termini in $\Delta Z(s)$:

$$(s^2 + \frac{(k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s}{M}) \Delta Z(s) = \left(\frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M} \right) \Delta F(s)$$

$$\Delta Z(s) = \frac{\left(\frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} + \frac{\cos(\bar{\theta})}{M} \right)}{\left(s^2 + \frac{(k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s}{M} \right)} \Delta F(s)$$

$$\Delta Z(s) = \frac{\left(\frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta})}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} \right)}{\left(\frac{Ms^2 + (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s}{M} \right)} \Delta F(s)$$

$$\Delta Z(s) = \frac{\left(\frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta})}{M(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} \right)}{\left(\frac{Ms^2 + (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s}{M} \right)} \Delta F(s)$$

$$\Delta Z(s) = \frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta})}{(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) (Ms^2 + (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s)}$$

Sostituiamo all'espressione della $\Delta Y(s)$ le equazioni di $\Delta \Theta(s)$ e $\Delta Z(s)$ in funzione di $\Delta F(s)$, avremo:

$$\Delta Y(s) = \Delta Z(s) - b \cos(\bar{\theta}) \Delta \Theta(s) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta Y(s) &= \frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta})}{(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) (Ms^2 + (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s)} \Delta F(s) + \\ &\quad + b \cos(\bar{\theta}) \frac{\frac{1}{J} b}{(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} \Delta F(s) \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta F(s)} &= \frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta})}{(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) (Ms^2 + (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)s)} + \frac{\frac{b^2 \cos(\bar{\theta})}{J}}{(s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}))} = \\ &= \frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta})}{J} s M \left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)}{s M (s^2 + \frac{1}{J}(k_r + D)s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})) \left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)} = \end{aligned}$$

Effettuiamo le moltiplicazioni e i raccoglimenti opportuni:

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + s^2 \cos(\bar{\theta}) + \frac{1}{J} (k_r + D) s \cos(\bar{\theta}) + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) s^2 M}{J} + \frac{s b^2 \cos(\bar{\theta}) (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)}{J}}{s M \left(s^2 + \frac{1}{J} (k_r + D) s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \right) \left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)} = \\
&= \frac{(\cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) M}{J}) s^2 + \left(\frac{(k_r + D)}{J} \cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)}{J} \right) s + (\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})}{s M \left(s^2 + \frac{1}{J} (k_r + D) s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \right) \left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)} =
\end{aligned}$$

Semplifichiamo $G(s)$ ponendo:

$$\begin{cases} \mu = (\cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) M}{J}) \\ \beta = \left(\frac{(k_r + D)}{J} \cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)}{J} \right) \\ \gamma = (\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + \frac{1}{J} k_\theta \cos^2(\bar{\theta}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\mu s^2 + \beta s + \gamma}{s M \left(s^2 + \frac{1}{J} (k_r + D) s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \right) \left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)}$$

Al fine di determinare poli, zeri e guadagno statico di anello, dobbiamo innanzitutto portare la $G(s)$ appena trovata in forma zero-pole-gain (zpk), ovvero:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = K_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_i)}$$

Lavoriamo dapprima sul numeratore per ricavare gli zeri:

$$\begin{aligned} &\mu s^2 + \beta s + \gamma \\ \Delta_1 &= b^2 - 4ac = \beta^2 - 4\mu\gamma \\ z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\mu\gamma}}{2\mu} \\ \Rightarrow \mu s^2 + \beta s + \gamma &= (s - z_1) \cdot (s - z_2) \end{aligned}$$

Passiamo al denominatore per determinare i poli:

$$\underbrace{s}_{(1)} M \underbrace{\left(s^2 + \frac{1}{J} (k_r + D) s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \right)}_{(2)} \underbrace{\left(s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)}_{(3)}$$

1.

$$s = s - 0 \Rightarrow p_1 = 0$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left(\frac{k_r + D}{J} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) \\ \Rightarrow p_{2,3} &= \frac{-\left(\frac{k_r + D}{J} \right) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2} = -\left(\frac{k_r + D}{2J} \right) \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{k_r + D}{J} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta})}}{2} \\ \Rightarrow s^2 + \frac{1}{J} (k_r + D) s + \frac{1}{J} k_\theta \cos(\bar{\theta}) &= (s - p_2) \cdot (s - p_3) \end{aligned}$$

3.

$$s + \frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} = s - \left(- \left(\frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right) \right) = (s - p_4)$$

$$\Rightarrow p_4 = - \left(\frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M} \right)$$

Considerando $K_0 = \frac{\mu}{M}$ possiamo riscrivere $G(s)$ in forma zpk come:

$$G(s) = K_0 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{s \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_4)}$$

Correzione (a cura del docente):

- (f) Passando all'uso dei valori numerici indicati in Tabella 2, valutare $G(s)$, discuterne la posizione e la molteplicità dei poli e degli eventuali zeri, e verificarne la stabilità.

Soluzione:

Valutiamo zeri, poli e guadagno statico di anello mediante l'utilizzo dei parametri indicati in Tabella 2:

$$\mu = \left(\cos(\bar{\theta}) + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) M}{J} \right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 1000}{500} \right) = 6,36396$$

$$K_0 = \frac{\mu}{M} = \frac{6,36396}{1000} = 0,00636396$$

$$\beta = \left(\frac{(k_r + D) \cos(\bar{\theta})}{J} + \frac{b^2 \cos(\bar{\theta}) (k_z \cos(\bar{\theta}) + D)}{J} \right) =$$

$$= \left(\frac{(15 + 100) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{500} + \frac{2^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (35 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 100)}{500} \right) = 0,86832$$

$$\bar{F} = - \frac{2Wd \cos(\alpha) + k_\theta \sqrt{2}}{2b} = - \frac{2 \cdot 200 \cdot 1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 30\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = -97,20914$$

$$\overline{F_L} = -2\bar{B} - 2W \sin^2(\alpha) - \frac{\sqrt{2}Wd \cos(\alpha) + k_\theta}{b} =$$

$$= -2 \cdot 1500 - 2 \cdot 200 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2} \cdot 200 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 30}{2} = -3237,47449$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= (\bar{F} \sin(\bar{\theta}) + 2\bar{F}_L \sin(\bar{\theta}) \cos(\bar{\theta})) \frac{1}{J} b + \frac{1}{J} k_{\theta} \cos^2(\bar{\theta}) = \\
&= \left(-97,20914 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot (-3237,47449) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot \frac{1}{500} \cdot 2 + \\
&+ \frac{1}{500} \cdot 30 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -13,19485
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\mu\gamma}}{2\mu} = \\
&= \frac{-0,86832 + \sqrt{(0,86832)^2 - 4 \cdot 6,36396 \cdot (-13,19485)}}{2 \cdot 6,36396} = 1,37331
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= -\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\mu\gamma}}{2\mu} = \\
&= \frac{-0,86832 - \sqrt{(0,86832)^2 - 4 \cdot 6,36396 \cdot (-13,19485)}}{2 \cdot 6,36396} = -1,50976
\end{aligned}$$

$$p_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= -\left(\frac{k_r + D}{2J}\right) + \frac{\sqrt{\left(\frac{k_r + D}{J}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{J} k_{\theta} \cos(\bar{\theta})}}{2} = \\
&= -\left(\frac{15 + 100}{2 \cdot 500}\right) + \frac{\sqrt{\left(\frac{15+100}{500}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{500} \cdot 30 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \\
&= -0,115 + \sqrt{\frac{-0,116806}{2}} = -0,115 + \sqrt{\frac{i^2 \cdot 0,116806}{2}} = \\
&= -0,115 + i\sqrt{\frac{0,116806}{2}} = -0,115 + 0,170884i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= -\left(\frac{k_r + D}{2J}\right) - \frac{\sqrt{\left(\frac{k_r + D}{J}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{J} k_{\theta} \cos(\bar{\theta})}}{2} = \\
&= -\left(\frac{15 + 100}{2 \cdot 500}\right) - \frac{\sqrt{\left(\frac{15+100}{500}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{500} \cdot 30 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \\
&= -0,115 - \sqrt{\frac{-0,116806}{2}} = -0,115 + \sqrt{\frac{i^2 \cdot 0,116806}{2}} = \\
&= -0,115 - i\sqrt{\frac{0,116806}{2}} = -0,115 - 0,170884i
\end{aligned}$$

$$p_4 = -\left(\frac{k_z \cos(\bar{\theta}) + D}{M}\right) = -\left(\frac{35 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 100}{1000}\right) = -0,124749$$

Sostituiamo i valori appena trovati nella nostra $G(s)$ in forma zpk:

$$G(s) = K_0 \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2)}{s \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \cdot (s - p_4)} =$$

$$= \frac{0,00636396 \cdot (s - 1,37331) \cdot (s + 1,50976)}{s \cdot (s + 0,115 - 0,170884i) \cdot (s + 0,115 + 0,170884i) \cdot (s + 0,124749)}$$

Se si disdegna invece l'utilizzo dei numeri complessi, basta effettuare un prodotto tra i due termini più interni del denominatore per avere una f.d.t. del tipo:

$$G(s) = \frac{0,00636396 \cdot (s - 1,37331) \cdot (s + 1,50976)}{s \cdot (s^2 + 0,23s + 0,042426341) \cdot (s + 0,124749)}$$

Cruciale per lo studio della stabilità del sistema è proprio la posizione dei poli della funzione di trasferimento. Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità di un sistema è che tutti i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema siano negativi (se reali) o che abbiano parte reale negativa (se complessi coniugati). Come è evidenziato in Figura 1, la nostra f.d.t ha due zeri reali (uno a parte reale negativa e l'altro a parte reale positiva, tutti e due con molteplicità uno) e quattro poli (uno situato nell'origine, uno reale a parte reale negativa e due complessi coniugati a parte reale negativa, tutti con molteplicità uno). La presenza di un polo in zero ci garantisce un'ulteriore conferma sulla marginale stabilità del sistema.

Correzione (a cura del docente):

2 Parte Numerica

Al fine di progettare il controllore, si suggerisce di procedere secondo la metodologia vista durante il corso come segue:

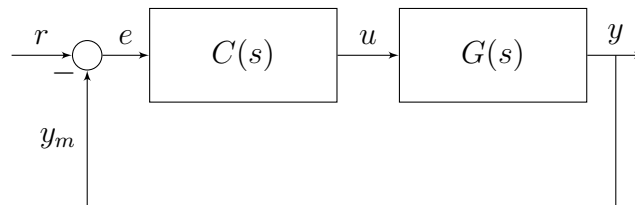
- (a) Tradurre i requisiti della Tabella 3 nelle corrispondenti specifiche statiche e dinamiche del sistema controllato, e indicare l'approssimazione $G_c(s)$ della f.d.t. del sistema complessivo risultante in anello chiuso.

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema complessivo in anello chiuso $G_c(s)$ è:

$$G_c(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}$$

Il sistema può essere sintetizzato tramite il seguente diagramma a blocchi:



In cui:

- u ed y rappresentano rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema.
- $G(s)$ è la f.d.t tra la variazione dell'ingresso e la variazione dell'uscita.
- y_m rappresenta le uscite misurate, ovvero quelle grandezze fisiche o variabili che vengono effettivamente misurate o monitorate nel sistema reale.
- r è il riferimento diretto (*desiderata*) che guida il comportamento del sistema controllato.
- $e = r - y_m$ rappresenta l'errore, essenziale nel feedback del sistema di controllo, che è utilizzato per regolare le azioni di controllo al fine di mantenere il sistema il più vicino possibile al *desiderata*.
- $C(s)$ indica la f.d.t. del controllore in catena diretta, il cui progetto è oggetto del nostro studio.

Poichè i requisiti richiedono che le eventuali oscillazioni si attestino entro il 5% dal valore di regime, è possibile approssimare il sistema in anello chiuso ad un sistema del primo ordine:

$$G_c(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)} \approx \frac{1}{\tau s + 1}$$

dove $\tau = \frac{1}{\omega_T}$ rappresenta la costante di tempo del sistema. Poiché il sistema in anello chiuso è approssimabile come un sistema ad un polo dominante, una specifica del tipo $T_a \leq 7s$ impone che il valore di τ del polo dominante sia sufficientemente piccolo, quindi che valga per la pulsazione di taglio $\omega_T > \frac{3}{T_a} \Rightarrow \omega_T > \frac{3}{7} = 0,4285714286$ rad/s $\approx 24,56$ deg/s.

La tecnica di progetto dei controllori per sistemi stabili in anello aperto che utilizzeremo si basa su una struttura del controllore del tipo:

$$C(s) = \frac{K_C}{s^t} C_0(s)$$

dove $C_0(s)$ ha guadagno statico almeno unitario ($C_0(0) \geq 1$), il numero t di poli nell'origine del controllore è detto il suo **TIPO** e il valore di K_C è il suo **GUADAGNO**.

Il problema del controllo sarà dunque quello di progettare un altro sistema (il controllore) capace di usare le informazioni contenute nelle uscite misurate per determinare un ingresso di controllo opportuno e tale che il sistema risultante dalla interconnessione verifichi le specifiche.

Nella fattispecie il controllore rispetterà, tra le **specifiche statiche**: **inseguimento perfetto per riferimenti costanti**, in modo tale che il sistema sia in grado di riprodurre esattamente il comportamento desiderato in risposta all'input di riferimento. Poiché il nostro sistema ha un polo zero, la sua funzione di trasferimento contiene un termine proporzionale a s nel denominatore. Questo termine contribuisce a un guadagno crescente all'aumentare della frequenza. Di conseguenza, il sistema risponde più velocemente ai segnali ad alta frequenza. Sempre per lo stesso motivo assumeremo un controllore di tipo $t = 0$.

Rispetterà invece, tra le **specifiche dinamiche**:

tempo di risposta inferiore a 7 s. Tale requisito può essere rispettato facendo in modo che il diagramma dell'ampiezza della risposta armonica $C(j\omega)G(j\omega)$ abbia una pulsazione di taglio $\omega_T > \frac{3}{T_a}$. Inoltre dovremmo ottenere un margine di fase $M_f > 0^\circ$, tenendo a mente che più alto è il valore del margine di fase, maggiore sarà la robustezza del nostro modello.

Correzione (a cura del docente):

- (b) Se la f.d.t. $G(s)$ del modello in anello aperto non è stabile, progettare un anello di retroazione interno, caratterizzato da un controllore $C_i(s)$ e da una f.d.t. risultante $G_i(s)$; in tal caso, nell'elaborato devono essere forniti (1) la descrizione della procedura seguita per ottenere $C_i(s)$, e (2) le espressioni di $C_i(s)$ e $G_i(s)$ con le posizioni e molteplicità dei rispettivi poli e degli eventuali zeri.

Soluzione:

Come riportato nei punti precedentemente svolti, la funzione di trasferimento del sistema proposto è stabile. Pertanto, possiamo passare direttamente allo svolgimento della richiesta 2c.

Correzione (a cura del docente):

- (c) Se invece $G(s)$ è già stabile o se si è ottenuta una $G_i(s)$ stabile dal punto precedente, verificare il soddisfacimento o meno delle specifiche statiche e dinamiche; a tal fine, riportare $G(s)$ o $G_i(s)$ in forma di Bode, indicando il guadagno di Bode, le costanti di tempo di eventuali singolarità reali, e i coefficienti di smorzamento e le pulsazioni naturali di eventuali singolarità coniugate.

Soluzione:

Per tracciare i diagrammi di ampiezza e fase è conveniente porre la nostra funzione di trasferimento nella cosiddetta forma di Bode:

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau'_i s)}{s^h \cdot \prod_{i=1}^{n-h} (1 + \tau_i s)}$$

In cui $\tau'_i = -\frac{1}{z_i}$ e $\tau_i = -\frac{1}{p_i} \forall p_i, z_i \neq 0$ e:

$$K = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n-h} (-p_i)}$$

h è il numero di poli nell'origine del sistema, nel nostro caso quindi il sistema è di tipo $h = 1$. Poiché il nostro sistema ha due poli complessi coniugati $p_2 = p_3^H$, si ha anche che $\tau_2 = \tau_3^H$. Si denoti quindi con $\omega_n = \frac{1}{|\tau_2|} = \frac{1}{|\tau_3|}$ il modulo della pulsazione naturale dei poli in questione e con $\delta = \frac{-\operatorname{Re}\{p_2\}}{\omega_n} = \frac{-\operatorname{Re}\{p_3\}}{\omega_n}$ il loro coefficiente di smorzamento. Utilizzando questa notazione si può riscrivere il contributo dei poli complessi coniugati nella forma:

$$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n}s + 1}$$

Di qui in avanti si sceglierà di non arrotondare i valori calcolati (a meno di valori inutilmente lunghi) per rendere il più preciso possibile il confronto con i valori restituiti dalle funzioni in MATLAB. Calcoliamo τ'_i e $\tau_i \forall p_i, z_i \neq 0$:

$$\begin{cases} \tau'_1 = -\frac{1}{z_1} = -\frac{1}{1,37331} = -0,728168 \\ \tau'_2 = -\frac{1}{z_2} = -\frac{1}{1,50976} = 0,662357 \\ \tau'_3 = -\frac{1}{p_2} = -\left(\frac{1}{-0,115+0,170884i}\right) \\ \tau'_4 = -\frac{1}{p_4} = \frac{1}{0,124749} = 8,0161 \end{cases}$$

Calcoliamo adesso pulsazione naturale ω_n e coefficiente di smorzamento δ dei poli complessi coniugati p_2, p_3 :

$$\begin{cases} \omega_n = \frac{1}{|\tau_2|} = |p_2| = 0,205976555 \\ \delta = -\frac{\text{Re}\{p_2\}}{\omega_n} = -\frac{0,115}{0,205976555} = 0,558316 \end{cases}$$

La forma di Bode risulterà quindi:

$$\begin{aligned} G(s) &= K \cdot \frac{(1 + \tau'_1 s)(1 + \tau'_2 s)}{s \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n} s + 1\right) \cdot (1 + \tau_4 s)} = \\ &= K \cdot \frac{(1 - 0.728168s)(1 + 0.662357s)}{s \cdot \left(\frac{s^2}{0.04242634121} + 5.4211606753s + 1\right) \cdot (1 + 8.0161s)} \end{aligned}$$

Con:

$$K = K_0 \cdot \frac{(-z_1) \cdot (-z_2)}{(-p_2) \cdot (-p_3) \cdot (-p_4)}$$

e poiché $p_2 = p_3^H$:

$$\begin{aligned} K &= K_0 \cdot \frac{(-z_1) \cdot (-z_2)}{(-|p_2|)^2 \cdot (-p_4)} = \\ &= 0,00636396 \cdot \frac{(-1,37331) \cdot (1,50976)}{(-0,205976555)^2 \cdot (0,124749)} = -2,49305 \end{aligned}$$

Una singolarità in un sistema dinamico è un punto in cui il sistema diventa instabile o la sua risposta diventa indefinita. Le singolarità reali possono verificarsi nei sistemi dinamici lineari quando i poli della funzione di trasferimento attraversano l'asse immaginario nel dominio complesso. Il calcolo delle pulsazioni delle singolarità reali può risultare utile nella descrizione delle oscillazioni o delle variazioni di ampiezza della risposta del sistema associate a queste singolarità reali. Nel nostro caso avremo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{|\tau'_1|} = |z_1| = 1,37331 \text{ rad/s PULSAZIONE DI } z_1 \\ \omega_2 &= \frac{1}{|\tau'_2|} = |z_2| = 1,50976 \text{ rad/s PULSAZIONE DI } z_2 \\ \omega_4 &= \frac{1}{|\tau_4|} = |p_4| = 0,124749 \text{ rad/s PULSAZIONE DI } p_4 \end{aligned}$$

Tramite il seguente codice MATLAB possiamo verificare i risultati a cui siamo pervenuti:

```

sys = ss(A,B,C,D) %crea il sistema con le matrici A,B,C,D
G = tf(sys) %crea la funzione di trasferimento del sistema
    appena creato
[z,p,k] = zpkmdata(sys) %restituisce un vettore che contiene
    i valori di zeri, poli e guadagno statico di anello
G = zpkm(G) %restituisce la fdt in forma zpk
[wn,zeta, p] = damp(G) %restituisce un vettore con le
    pulsazioni naturali, gli smorzamenti e le posizioni dei
    poli del sistema
G.DisplayFormat = 'time constant' %comando che mostra la
    fdt evidenziando le costanti di tempo

```

Correzione (a cura del docente):

- (d) Progettare un controllore $C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s)$ che soddisfi i requisiti della Tabella 3 e ottenga la $G_c(s)$ desiderata; nel documento devono essere riportati (1) la descrizione dettagliata della procedura seguita, (2) le funzioni $C(s)$ e $G_c(s)$, nonché i (3) diagrammi di Bode nelle varie fasi della progettazione (ad esempio, quelli che mostrano le risposte armoniche della catena diretta $C(j\omega) G(j\omega)$ o $C(j\omega) G_i(j\omega)$), e del modello controllato complessivo $G_c(j\omega)$.

Soluzione:

Si vuole adesso progettare il controllore $C(s) = \frac{K_C}{s^t} \cdot C_0(s)$. Per i motivi già discussi nel punto 2A assumeremo un tipo del controllore $t = 0$, dunque:

$$C(s) = \frac{K_C}{s^0} \cdot C_0(s) = K_c \cdot C_0(s)$$

Assumeremo anche $K_C < 0$, parametro che può essere cruciale per garantire la stabilità del sistema. In un sistema retroazionato, se il guadagno del controllore fosse positivo, potrebbe verificarsi un ciclo di feedback positivo che potrebbe portare a oscillazioni indesiderate o all'instabilità del sistema. Un guadagno negativo, d'altra parte, contribuisce a garantire la stabilità del sistema. Detto ciò, poiché la parte statica del sistema è già rispettata, dovremo lavorare sulla parte dinamica $C_0(s)$ del modello.

Descrizione della procedura:

1. Si sceglie un guadagno $K_C < 0$ al fine di compensare il segno positivo del guadagno K_0 della funzione di trasferimento in forma di Bode.
2. Si inserisce una coppia di zeri complessi coniugati $z_{3,4}$ in corrispondenza della coppia di poli complessi coniugati $p_{2,3}$ della f.d.t in modo tale da annullarne l'effetto.

3. Si inserisce uno zero z_5 per annullare l'effetto del polo p_4 e si inserisce un polo p_5 modificando il valore di K_C (sempre < 0) per soddisfare la condizione $\omega_T > \frac{3}{T_a}$ ed avere un margine di fase che garantisca robustezza al modello.
4. Perchè il controllore sia causale, deve avere un grado relativo (differenza tra il numero di poli ed il numero degli zeri) non negativo. Per rispettare $N_p \geq N_z$, si inseriscono due poli $p_{6,7} < 0$ alle alte frequenze cosicché la differenza tra il numero di zeri e poli sia nulla.

Funzioni $C(s)$ e $G_c(s)$:

Utilizziamo il seguente comando MATLAB:

```
sisotool(G) %comando utilizzato per richiamare l'ambiente
            sisotool per la G(s) e modellare il controllore
```

servendoci dei seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} K_C = -0.1912 \\ z_{3,4} = -0.115 \pm 0.170884i \\ z_5 = -0.12624 \\ p_5 = -1.39579 \\ p_6 = -10.5 \\ p_7 = -11 \end{cases}$$

Dovremo esportare il controllore Cs da sisotool e utilizzare, come in precedenza, il seguente comando MATLAB:

```
Cs.DisplayFormat='timeconstant' %comando che mostra la C(s)
evidenziando le costanti di tempo
```

Ottenendo la $C(s)$ desiderata:

$$C(s) = K_C \cdot C_0(s) = -0.1912 \cdot \frac{(1 + 7.9s)(1 + 5.4s + 24.01s^2)}{(1 + 0.72s)(1 + 0.095s)(1 + 0.091s)}$$

Si verifica facilmente che abbiamo rispettato la condizione $C_0(0) \geq 1$.

Dovremo effettuare il medesimo procedimento svolto in precedenza:

```
sisotool(G*Cs) %richiama l'ambiente sisotool per la catena
diretta G*Cs
```

La $G_c(s) = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}$ del sistema complessivo in anello chiuso sarà ricavata tramite il comando MATLAB:

```
feedback(G*Cs, 1) %comando che calcola la fdt ad anello
chiuso di un sistema di controllo retroazionato, dove 1
rappresenta la fdt del blocco di retroazione unitaria
```

Quindi otterremo:

$$G_c(s) = \frac{(1-0.7282s)(1+0.6624s)(1+7.921s)(1+5.423035s+23.571025s^2)}{(1+0.05874s)(1+0.2587s)(1+7.892s)(1+5.423035s+23.571025s^2)(1+1.743962s+0.869743s^2)}$$

Diagrammi di Bode:

I diagrammi di Bode della risposta armonica della catena diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ prima della sintesi del controllore possono essere reperiti in Figura 2, quelli posteriori alla sintesi del controllore sono reperibili in Figura 3 mentre quelli del sistema complessivo in anello chiuso $G_c(j\omega)$ si trovano in Figura 4.

Correzione (a cura del docente):

- (e) Realizzare una prima simulazione in Matlab/Simulink del sistema chiuso $G(s)$ in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3 rispetto ai segnali di riferimento o di disturbo indicati.

Soluzione:

Convertiamo la nostra $C(s)$ (che avevamo esportato in precedenza) in forma di stato tramite il comando MATLAB:

```
CC=ss(Cs)
```

Dopo aver lanciato simulink, inseriamo i dovuti blocchi (State-Space, Step, Scope) importando CC e sys per svolgere la simulazione (Figura 5) e verificare il soddisfacimento dei requisiti progettuali tramite i grafici dello scope (Figura 6).

Considerazioni:

Come stabilito dalla tabella 3, la nostra $G(s)$ raggiunge in un tempo non superiore a 7s il valore di regime con oscillazioni entro il $\pm 5\%$. Oltretutto, come si può constatare in Figura 6, insegue perfettamente un riferimento costante (Gradino), pur mantenendo una sottoelongazione negativa che non oltrepassa il valore di $-0,25$. La causa della rapida discesa iniziale è da attribuire ad i poli alle alte frequenze.

Conclusioni:

Il controllore progettato rispetta ampiamente le specifiche statiche e dinamiche proposte.

Correzione (a cura del docente):

- (f) Realizzare una seconda simulazione in Matlab/Simulink del modello del sistema non lineare, chiuso in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$, operando le opportune traslazioni delle variabili in ingresso e in uscita dal sistema stesso; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3, anche se in modo approssimato, nei confronti dei soli segnali di riferimento.

Soluzione:

Su simulink ci serviremo del blocco MATLAB function, operando una traslazione dell'intero modello.

```
function dState = sistema(u, z)
% Parametri
M = 1000;
J = 500;
B_g = 1500;
b = 2;
k_z = 35;
k_r = 15;
k_theta = 30;
Dr = 100;
W = 200;
alpha = pi/6;
d=1;
theta_sign = pi/4;
F_sign = -((W*d*cos(alpha)+k_theta*sin(theta_sign))/b;
FL_sign = (F_sign*cos(theta_sign)-B_g-W*sin(alpha)^2)/
          (sin(theta_sign)^2);
% stati
x = z(1);           %posizione
v = z(2);           %velocità
theta = z(3);        %angolo
omega = z(4);        %velocità angolare
% Ingressi
f = u;
% Dinamica
dx = v;
dv = (f*cos(theta)-k_z*v*cos(theta)-FL_sign*sin(theta)^2-
      B_g-Dr*v-W*sin(alpha)^2)/(M);
dtheta = omega;
domega = (k_r*omega+k_theta*sin(theta)+f*b+Dr*omega+
          W*d*cos(alpha))/(-J);
dState = [dx; dv; dtheta; domega];
end
```

Dopo aver svolto la simulazione (Figura 7), possiamo verificarne il risultato tramite i grafici dello scope (Figura 8). Purtroppo, è evidente che la simulazione non mostri il soddisfacimento dei requisiti in Tabella 3.

Correzione (a cura del docente):

Figure e diagrammi

Figura 1

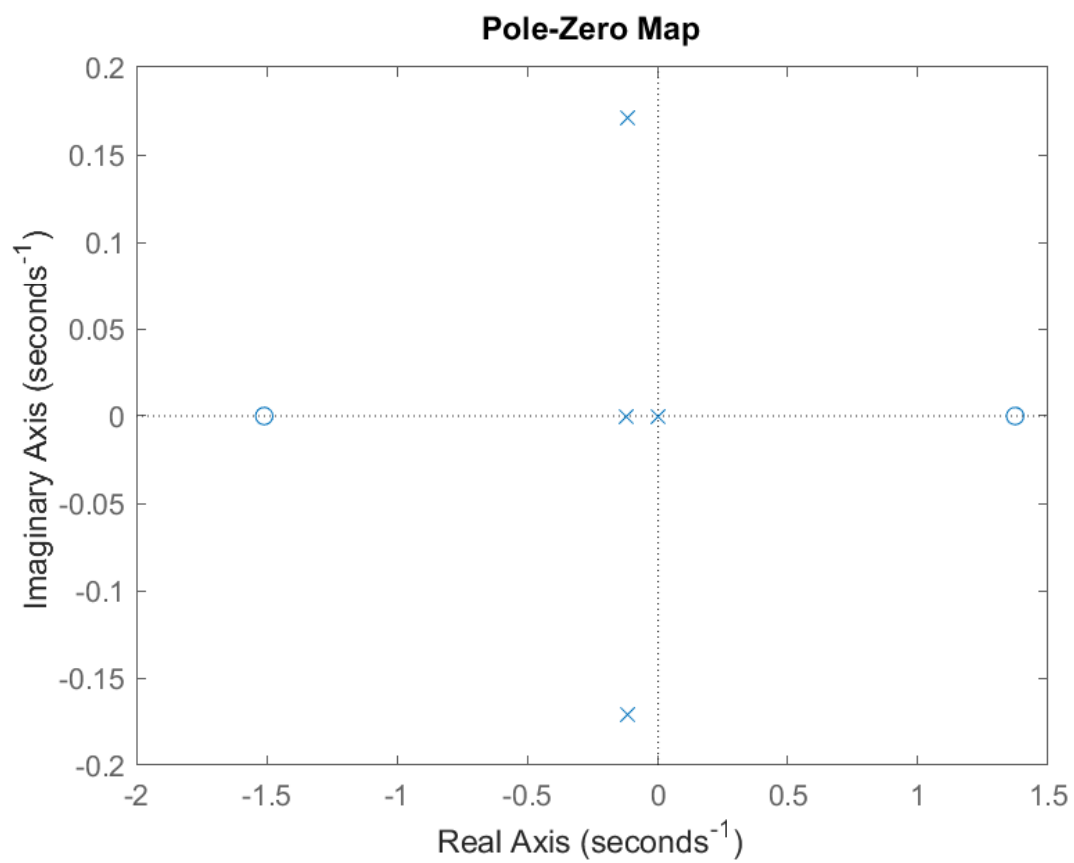


Figura 2

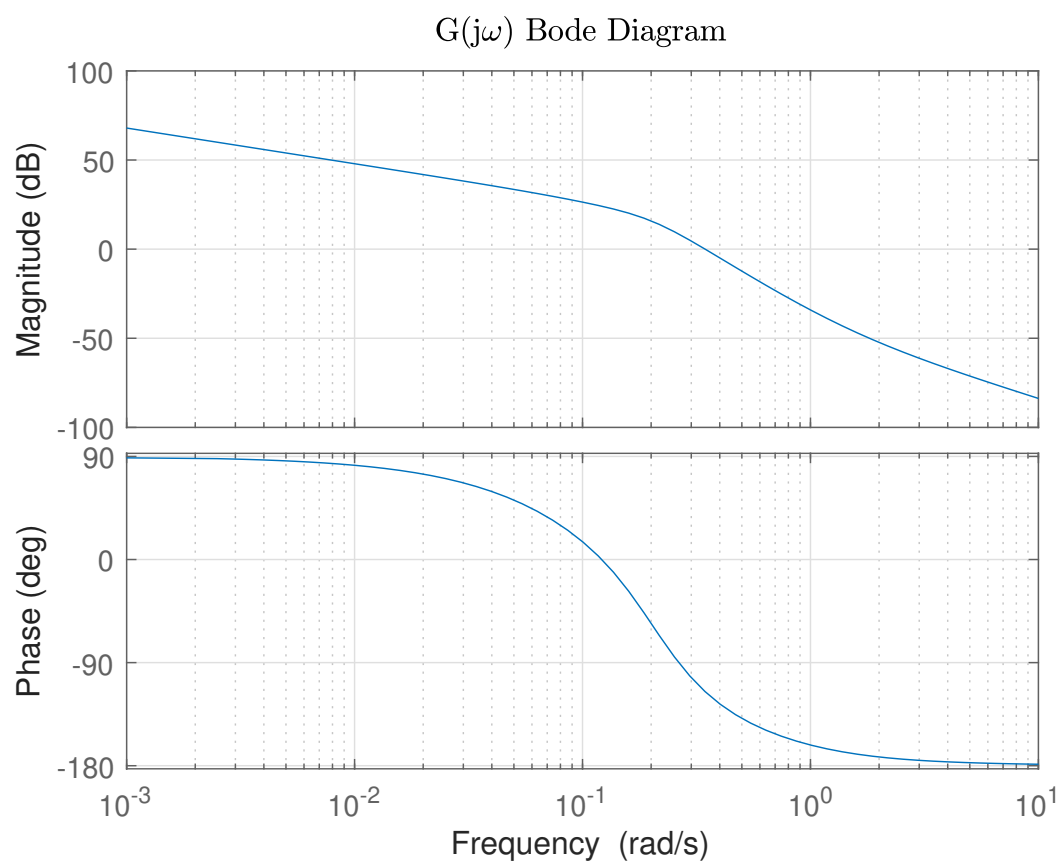


Figura 3

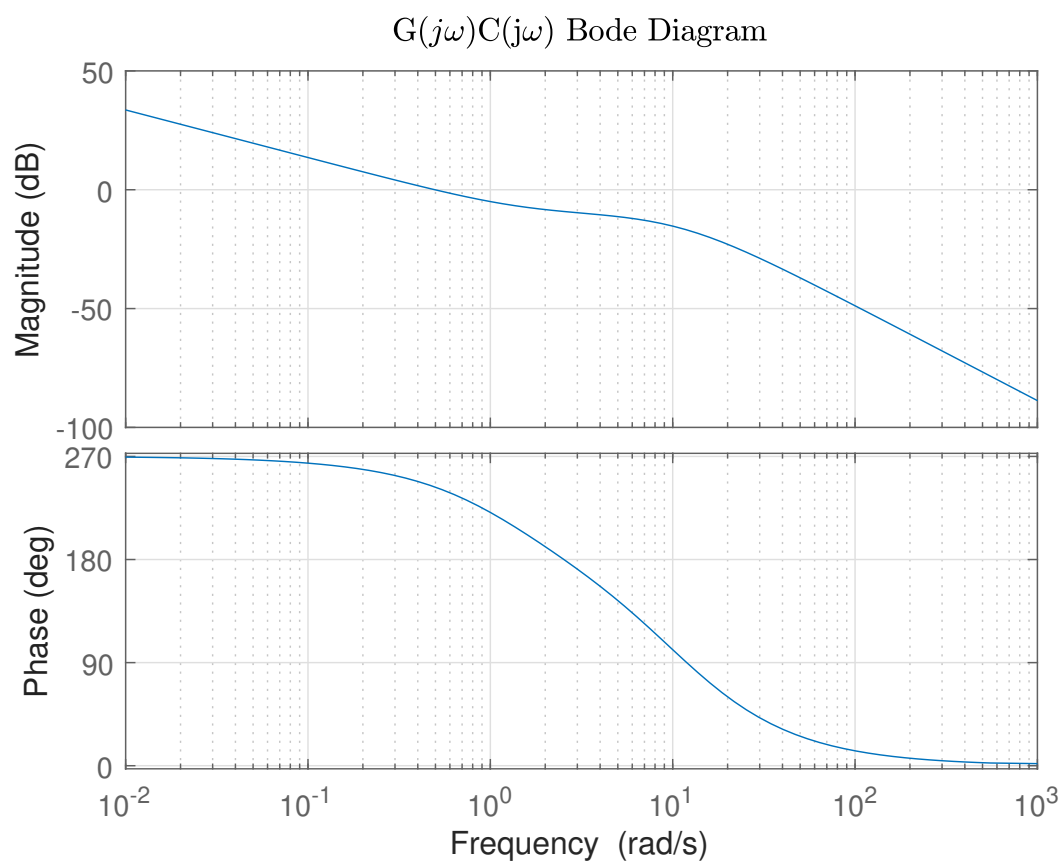


Figura 4

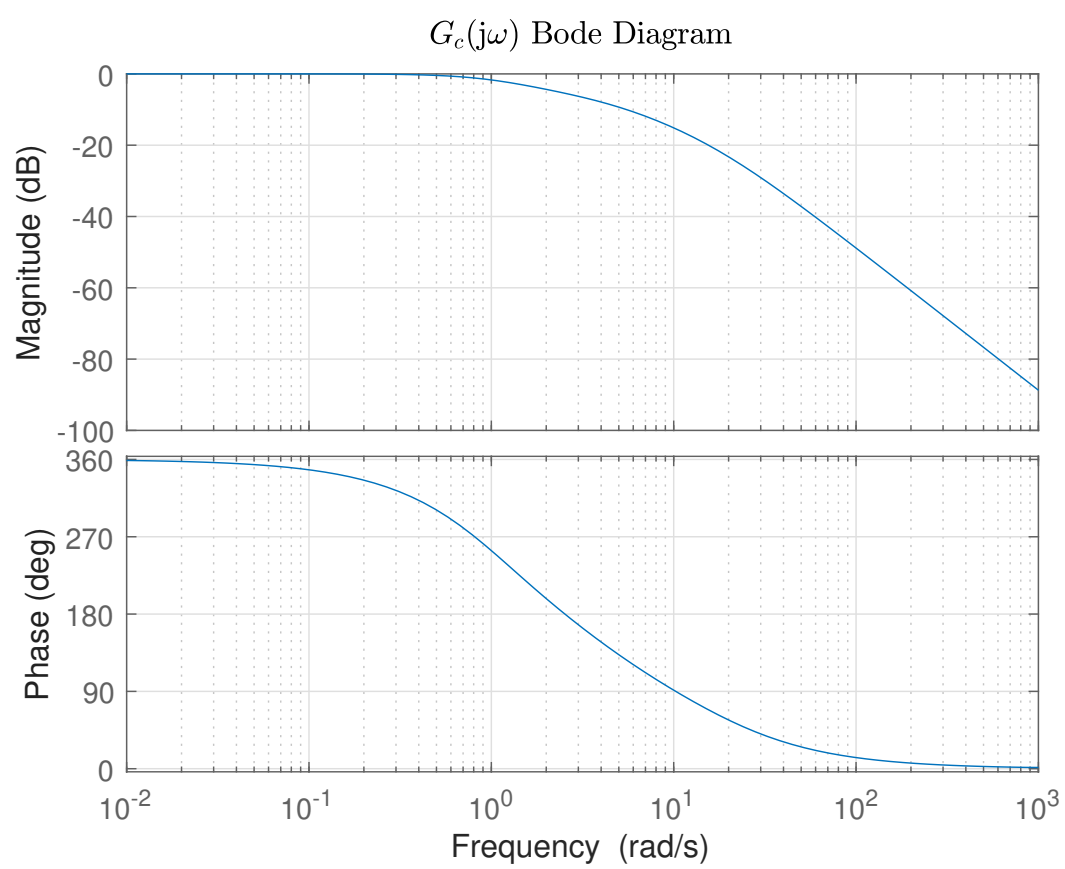


Figura 5

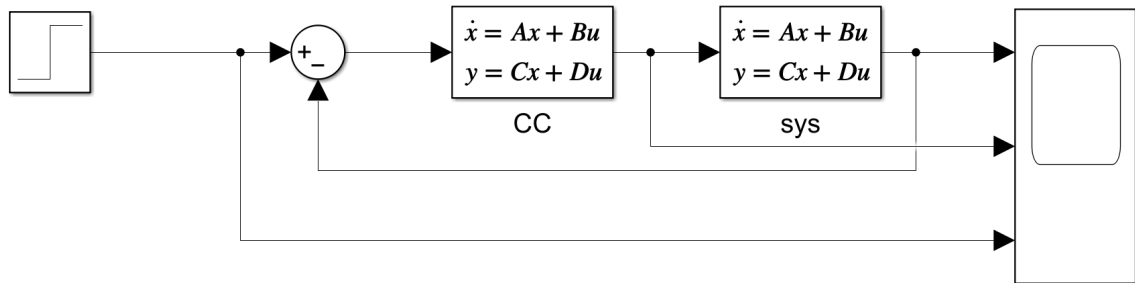


Figura 6

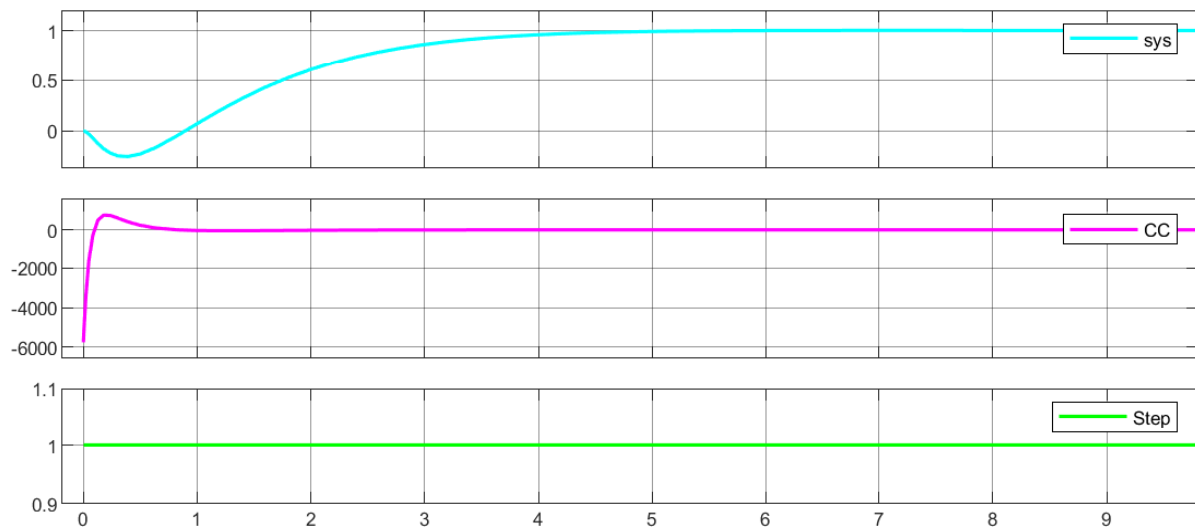


Figura 7

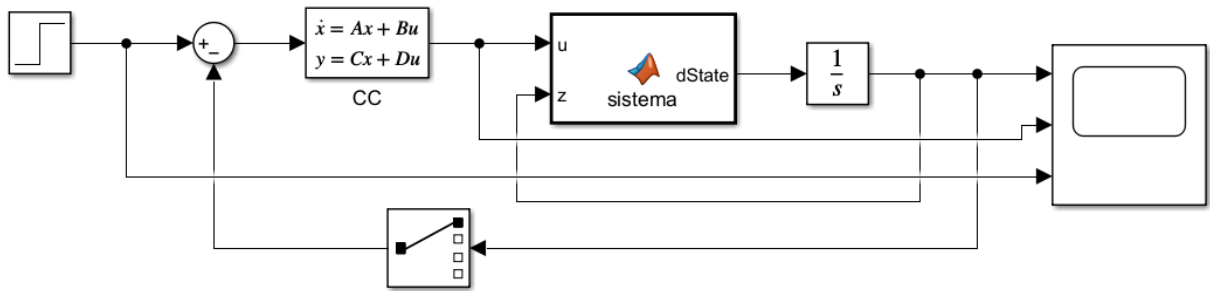
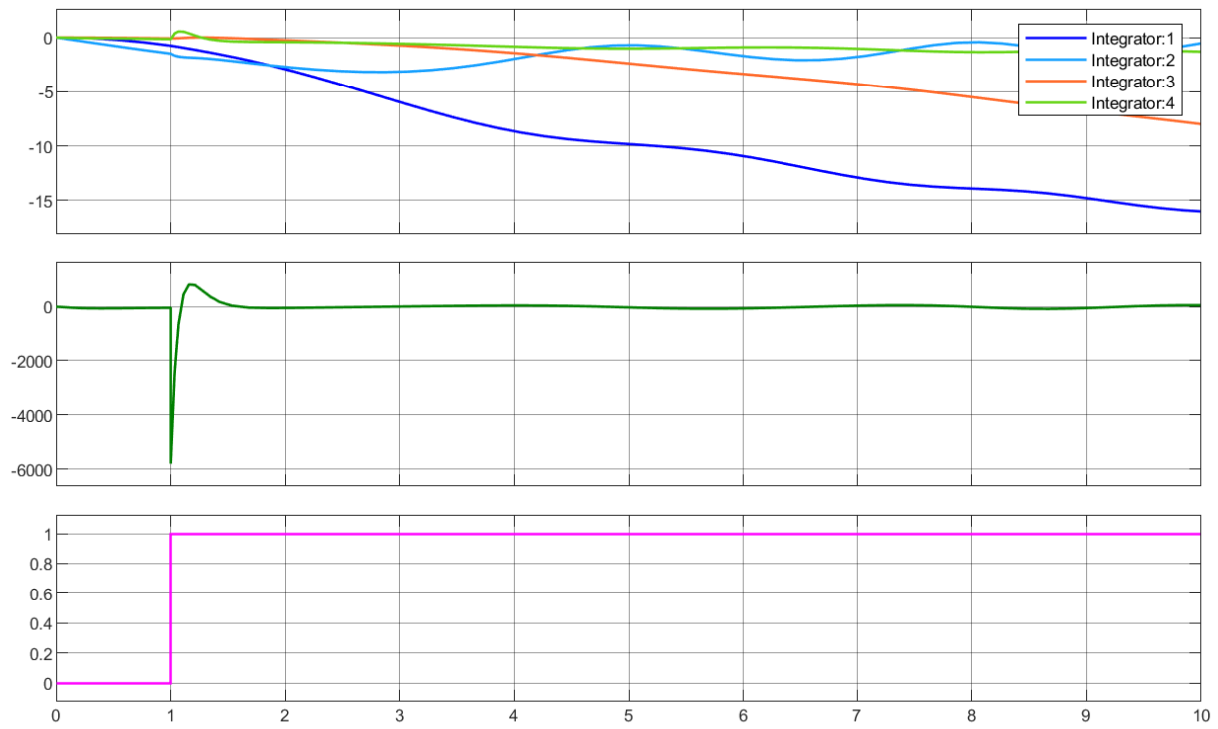


Figura 8



Fine dello svolgimento

Istruzioni per la consegna

Ogni tema progettuale ha lo scopo di far sperimentare allo studente, seppur in modo semplificato, i diversi momenti di analisi e progettazione, sottesi alla soluzione di un problema di controllo; ciò avviene, per ovvie ragioni, attraverso uno studio teorico e solo simulato, come è tipico nei corsi di controlli automatici di base, ma rappresenta comunque un momento fondamentale che precede ogni realizzazione completa e sperimentale. Le Tabelle 1 e 2 indicano il significato delle variabili e dei parametri del modello (a), mentre le prime due righe della Tabella 3 specificano le ipotesi di funzionamento all'equilibrio, e le restanti righe i requisiti di progetto.

La consegna del progetto avviene inviando un'email all'indirizzo di posta elettronica *esame.mirpalab@gmail.com*, con oggetto “[CA23-15] Consegna” e con allegato il PDF generato da questo documento. La consegna può essere fatta solo dal corrispondente del gruppo.

Dal momento della consegna non sarà più possibile modificare il seguente progetto overleaf, il quale dovrà includere almeno i seguenti contenuti:

- i file sorgenti L^AT_EX del PDF (main.tex, theme.tex, 1*.tex, 2*.tex);
- una cartella *img* contenente le immagini e tutti i grafici inseriti nel testo, che devono essere riportati in formato vettoriale e contenere annotazioni adeguate e leggibili;
- una cartella *support* contenente (1) gli script (estensione .m) necessari per inizializzare e lanciare la simulazione, (2) i salvataggi delle sessioni di lavoro in *sisotool*, e (3) i due diagrammi *Simulink* (estensione .slx) dei sistemi approssimato lineare e non lineare, controllati (eventualmente con il doppio anello di retroazione), correttamente funzionanti e tali da riprodurre i risultati riportati nel documento descrittivo.