BLOCCO TELECOM ENHANCED

Questo blocco propone in forma digitale la lista (grossomodo completa) di esercizi che possono essere richiesti all’esame scritto di Teoria Dei Segnali, approfonditi e curati in ogni passaggio. Laddove necessario, sono proposti degli utili esercizi integrativi.

Marco Marino

LISTA ESERCIZI

2	OK
3	OK
4	OK
5	OK
6	OK
7	Da capire e completare
8	OK
9	OK
10	OK
11	OK
12	OK
13	OK
14	OK
16	OK
17	OK
18	OK
19	OK
20	OK
21	OK
22	OK
23	OK
M 7.2	OK
24	OK
25	OK
26	OK
27	OK
30	OK
31	OK
32	OK
33	OK
34	È facile, da completare
36	OK
38	OK
39	OK
40	OK
41	OK
42	OK

43	OK
44	OK
45	OK
46	OK
47	OK
48	OK
49	OK
50	OK
51	OK
B1	OK
B2	OK
B3	OK
B4	OK
B5	NON CAPITO
B6	OK
B7	OK

ESERCIZIO 2

Calcolare la densità spettrale del segnale aleatorio così definito:

$$s(t,\zeta) = \begin{cases} 1 & con\ prob. = 1/4 \\ e^{-(t-T)}u(t-T) & con\ prob. = 3/4 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Il segnale aleatorio in questione ha due possibili manifestazioni:

1. $s(t) = 1$ ha potenza finita.
2. $s(t) = e^{-(t-T)}u(t-T)$ ha energia finita.

Usando il teorema di Wiener-Khinchine:

$$W_s(f) = \mathfrak{F}_\tau[< R_s(t,t+\tau) >]$$

Dove:

$$R_s(t,t+\tau) = \overline{s^*(t)s(t+\tau)} = \overline{s(t)s(t+\tau)}$$

La funzione di autocorrelazione corrisponde alla media pesata del prodotto tra $s(t)$ e $s(t+\tau)$, usando le probabilità associate alle manifestazioni:

1. $s(t) = 1 \Rightarrow s(t)s(t+\tau) = 1 \cdot 1 = 1$
2. $s(t) = e^{-(t-T)}u(t-T) \Rightarrow$
   $\Rightarrow s(t)s(t+\tau) = e^{-(t-T)}u(t-T) \cdot e^{-(t+\tau-T)}u(t+\tau-T)$

$$\Rightarrow \overline{s(t)s(t+\tau)} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot e^{-(t-T)}u(t-T) \cdot e^{-(t+\tau-T)}u(t+\tau-T) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot e^{-(2t+\tau-2T)}u(t-T)u(t+\tau-T)$$

Dunque:

$$< R_s(t,t+\tau) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{s(t)s(t+\tau)}\ dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot e^{-(2t+\tau-2T)}u(t-T)u(t+\tau-T)\, dt = \frac{1}{4}$$

$$W_s(f) = \mathfrak{F}_\tau[< R_s(t, t+\tau) >] = \mathfrak{F}_\tau\left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}\delta(f)$$

La densità spettrale di potenza corrisponde alla media (pesata con le relative probabilità) tra le densità spettrali di potenza delle due manifestazioni:

$$\frac{1}{4} \cdot \delta(f) + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}\delta(f)$$

ESERCIZIO 3

Calcolare la densità di probabilità del primo e secondo ordine del segnale aleatorio così definito:

$$s(t,\zeta) = \begin{cases} 1/4 & con\ prob. = 1/4 \\ cos(2\pi f_0 t) & con\ prob. = 2/4 \\ sin(2\pi f_0 t) & con\ prob. = 1/4 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \leq x) =$$

$$= \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \delta\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{4} \cdot \delta\big(x - cos(2\pi f_0 t)\big) + \frac{1}{4} \cdot \delta\big(x - sin(2\pi f_0 t)\big)$$

La densità di probabilità del secondo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t_1)s(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= \sum_i Pr\{s(t_1) = x_{1,i}\,, s(t_2) = x_{2,i}\} \cdot \delta(x_1 - x_{1,i}) \cdot \delta(x_2 - x_{2,i}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \delta\left(x_1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \delta\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{2}{4} \cdot \delta\big(x_1 - cos(2\pi f_0 t_1)\big) \cdot \delta\big(x_2 - cos(2\pi f_0 t_2)\big) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \delta\big(x_1 - sin(2\pi f_0 t_1)\big) \cdot \delta\big(x_2 - sin(2\pi f_0 t_2)\big)$$

ESERCIZIO 4

Calcolare la densità di probabilità del primo e secondo ordine del segnale aleatorio così definito:

$$s(t,\zeta) = \begin{cases} 1/4 & con\ prob. = 1/3 \\ cos(2\pi f_0 t) & con\ prob. = 1/3 \\ sin(2\pi f_0 t) & con\ prob. = 1/3 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \leq x) =$$

$$= \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \delta\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \cdot \delta\big(x - cos(2\pi f_0 t)\big) + \frac{1}{3} \cdot \delta\big(x - sin(2\pi f_0 t)\big)$$

La densità di probabilità del secondo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t_1)s(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 P_{s_1 s_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= \sum_i Pr\{s(t_1) = x_{1,i}\ , s(t_2) = x_{2,i}\} \cdot \delta(x_1 - x_{1,i}) \cdot \delta(x_2 - x_{2,i}) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \delta\left(x_1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \delta\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \delta\big(x_1 - cos(2\pi f_0 t_1)\big) \cdot \delta\big(x_2 - cos(2\pi f_0 t_2)\big) +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \delta\big(x_1 - sin(2\pi f_0 t_1)\big) \cdot \delta\big(x_2 - sin(2\pi f_0 t_2)\big)$$

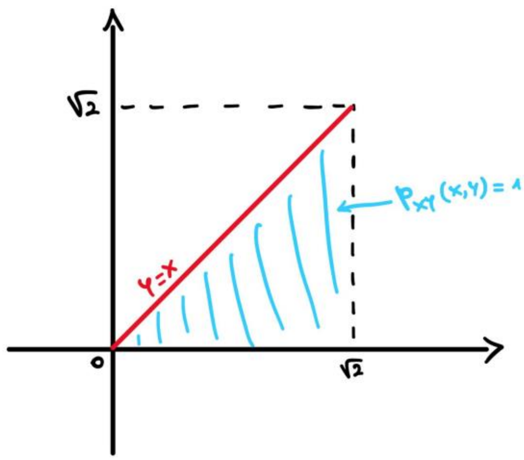
ESERCIZIO 5

Due variabili aleatorie X e Y possiedono la seguente densità di probabilità incrociata:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le x \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Verificare se esse sono statisticamente indipendenti.

SOLUZIONE:



Due variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti se:

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Ricaviamo $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ per marginalizzazione:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dy = \int_0^x dy = \begin{cases} x & x \in [0, \sqrt{2}] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dx = \int_y^{\sqrt{2}} dx = \begin{cases} \sqrt{2} - y & y \in [0, \sqrt{2}] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$p_X(x) \cdot p_Y(y) = \begin{cases} x\left(\sqrt{2} - y\right) & x \in [0, \sqrt{2}], y \in [0, \sqrt{2}] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Dato che $p_{XY}(x,y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$, si conclude che le due variabili aleatorie non sono statisticamente indipendenti. Se volessimo verificare la correttezza di quanto fatto, dovremmo cercare di ottenere la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1 \;\; OK$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2} - y\,dy = \sqrt{2} \cdot [y]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 = 1 \;\; OK$$

ESERCIZIO 6

Un segnale $s(t)$ reale stazionario con valor medio nullo e funzione di autocorrelazione:

$$R_s(\tau) = \cos\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$$

Viene stimato secondo la regola $\hat{s}(t) = ks(t+T)$. Valutare il parametro k che rende minimo il valore quadratico medio dell'errore $e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$.

SOLUZIONE:

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t) = s(t) - ks(t+T)$$

$$\overline{e^2(t)} = \overline{[s(t) - ks(t+T)]^2} = \overline{s^2(t)} + k^2 \cdot \overline{s^2(t+T)} - 2k \cdot \overline{s(t)s(t+T)}$$

Si noti che, essendo il segnale stazionario, $\overline{s^2(t)} = R_s(0) = \overline{s^2(t+T)}$:

$$\overline{e^2(t)} = R_s(0) + k^2 R_s(0) - 2k \cdot \overline{s(t)s(t+T)}$$

Inoltre, $\overline{s(t)s(t+T)} = R_s(T)$, dunque:

$$\overline{e^2(t)} = R_s(0) + k^2 R_s(0) - 2kR_s(T) =$$

$$= 1 + k^2 + 2k =$$

$$= (k+1)^2$$

L'errore quadratico medio si minimizza dunque per $k = -1$.

ESERCIZIO 7

Un rumore gaussiano $n(t, \zeta)$ a valor medio nullo e densità spettrale di potenza costante pari a η è proiettato in un sottospazio lineare a due dimensioni caratterizzato dalle seguenti funzioni di base:

$$u_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & t \in [0, T] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & t \in [0, T] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Calcolare le densità di probabilità del primo ordine delle componenti di $n(t)$ lungo le due dimensioni individuate dai vettori u_1 e u_2.

SOLUZIONE:

Si cercano le componenti del rumore:

$$n_i(t, \zeta) = \langle n(t_i), u_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} n(t_i) \cdot u_i(t)\, dt = \int_0^T n(t_i) \cdot u_i(t)\, dt \qquad i = 1 \dots 2$$

Dato che $n(t, \zeta)$ è un processo gaussiano, le componenti del rumore $n_i(t, \zeta)$ risultano essere a loro volta variabili aleatorie gaussiane. Si cerca la matrice delle covarianze:

$$\sigma_{ij} = \overline{n_i n_j} = \overline{\frac{2}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_1}{T}\right) dt_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} n(t_2) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t_2}{T}\right) dt_2} =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{n(t_1) n(t_2)} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_1}{T}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t_2}{T}\right)\, dt_1 dt_2 =$$

Dove $\overline{n(t_1) n(t_2)}$ è la correlazione del rumore bianco e vale, per definizione, $\eta\delta(t_2 - t_1)$:

$$= \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta\delta(t_2 - t_1) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_1}{T}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t_2}{T}\right)\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{2}{T}\eta \int_{-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t_1}{T}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t_1}{T}\right)\, dt_1 = 0$$

NON COMPLETATO

ESERCIZIO 8

Dimostrare che l'insieme di funzioni:

$$u_k(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{T}} \cdot \cos\left(2\pi k \dfrac{t}{T}\right) & t \in \left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Con k naturale da 0 a ∞, è un insieme ortonormale e individuare la classe di segnali rispetto alla quale l'insieme è completo.

SOLUZIONE:

Per dimostrare l'ortonormalità dell'insieme di funzioni dato, dobbiamo dimostrare che:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Procediamo con il prodotto scalare:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt =$$

Utilizzando la formula di Werner $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$:

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n+m)\right) + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n+m)\right) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right) dt =$$

Il primo integrale va a zero perché i contributi positivo e negativo del coseno si bilanciano nell'intervallo simmetrico (la media di un coseno è nulla):

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right) dt = \begin{cases} 1 & se\ n = m \\ 0 & se\ n \neq m \end{cases}$$

Dunque, l’insieme dei segnali dato è un insieme ortonormale.

Un insieme ortonormale è completo in uno spazio se ogni funzione dello spazio può essere rappresentata come combinazione lineare (o serie) di questi elementi. Supponiamo ora che $s(t)$ sia un segnale reale, pari e a supporto limitato nell’intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Un segnale può essere sviluppato in serie di Fourier (forma trigonometrica) come segue:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + B_n \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

E dato che $s(t)$ è supposto reale e a simmetria pari a supporto limitato in $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$:

$$S_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\ dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\ dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\ dt = 0$$

Il prodotto tra $s(t)$ (pari) e la funzione Seno (dispari) è una funzione a simmetria dispari, che integrata in un intervallo simmetrico fa zero

Allora:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) =$$

$$= S_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{2}} u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \sqrt{\frac{T}{2}} u_n$$

ESERCIZIO 9

Calcolare la funzione di mutua correlazione tra i seguenti segnali:

$s_1(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$s_2(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$

SOLUZIONE:

In questo caso non conviene derivare e, poiché i segnali sono periodici (e dunque a potenza finita), utilizziamo la seguente definizione:

$$\gamma_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t+\tau) \cdot s_2^*(t)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\big(2\pi f_0 (t+\tau)\big) \cdot \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right) dt =$$

Si utilizza la formula di Werner $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$:

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\cos\left(2\pi f_0(2t+\tau) + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right)\right] dt =$$

Il primo integrale va a zero perché i contributi positivo e negativo del coseno si bilanciano nell'intervallo simmetrico (la media di un coseno è nulla):

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right) dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right) \cdot T =$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right)$$

ESERCIZIO 10

Calcolare la funzione di autocorrelazione del seguente segnale:

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

SOLUZIONE:

Si noti che è possibile utilizzare la formula di Prostaferesi:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

In questo caso non conviene né utilizzare Prostaferesi né derivare e, poiché il segnale è periodico (e dunque a potenza finita), utilizziamo la seguente definizione:

$$\gamma(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t+\tau)\cdot s^*(t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\cos\big(2\pi f_0(t+\tau)\big) + \cos\left(2\pi f_0(t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\left[\cos(2\pi f_0 t) + \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[\cos\big(2\pi f_0(t+\tau)\big)\cos(2\pi f_0 t) + \cos\big(2\pi f_0(t+\tau)\big)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+\cos\left(2\pi f_0(t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right)\cos(2\pi f_0 t) + \cos\left(2\pi f_0(t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}\right)\Big]dt =$$

Si utilizza la formula di Werner $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$:

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{1}{2}\Big[\cos\big(2\pi f_0(2t+\tau)\big) + \cos(2\pi f_0\tau) + \cos\left(2\pi f_0(2t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0\tau - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+\cos\left(2\pi f_0(2t+\tau)+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0\tau + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0(2t+\tau)+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\cos(2\pi f_0\tau)\Big]\,dt =$$

Si azzerano gli integrali dei coseni la cui media fa zero:

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\cos(2\pi f_0\tau) + \cos\left(2\pi f_0\tau - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0\tau + \frac{\pi}{4}\right) + \cos(2\pi f_0\tau)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \left[2\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0 \tau + \frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot T =$$

$$= \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(2\pi f_0 \tau - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi f_0 \tau + \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

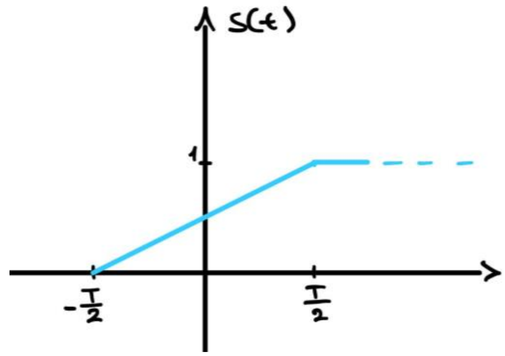
Si utilizza la formula di Werner $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$:

$$= \cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ESERCIZIO 11

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

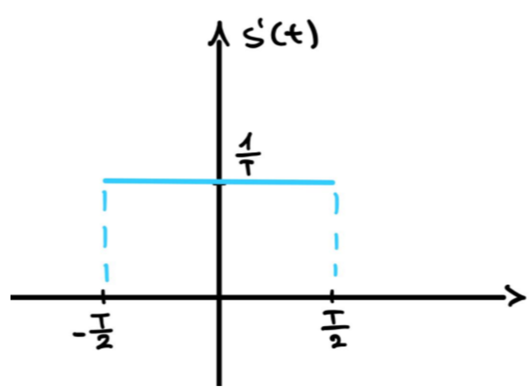
Si ricava l'equazione del segnale, calcolando in primis il coefficiente angolare della retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{T}$$

$$s(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right) + u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Deriviamo il segnale:

$$s'(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t}{T}\right)$$



Essendo $s(t)$ a supporto non limitato:

$$\mathfrak{F}[s(t)] = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} + \frac{s(-\infty) + s(+\infty)}{2} \cdot \delta(f)$$

Calcoliamo la trasformata della derivata del segnale:

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = \frac{1}{T} \cdot Tsinc(fT) = sinc(fT)$$

Risulta inoltre che:

$$s(-\infty) = 0$$

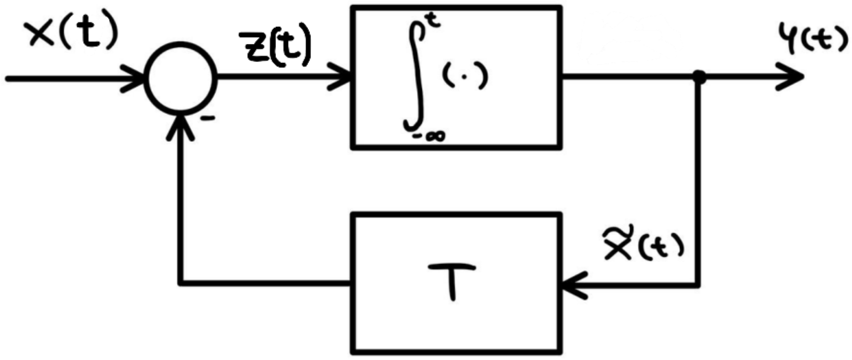
$$s(+\infty) = 1$$

Dunque:

$$\mathfrak{F}[s(t)] = \frac{sinc(fT)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

ESERCIZIO 12

Si consideri il seguente sistema:



Se ne determini la risposta in frequenza.

SOLUZIONE:

$$y(t) = \tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) - y(\tau - T)\, d\tau =$$

Si moltiplica l'argomento dell'integrale per un gradino che vale 1 per $\tau \leq t$ e 0 altrove al fine di espandere l'intervallo di integrazione:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) - y(\tau - T)]u(t - \tau)\, d\tau =$$

La quale altro non è che la definizione di convoluzione:

$$= \underbrace{[x(t) - y(t - T)]}_{z(t)} * u(t)$$

Noi dobbiamo calcolare la risposta in frequenza $H(f)$, che lega le trasformate $X(f)$ e $Y(f)$ rispettivamente dell'entrata e dell'uscita secondo la seguente relazione:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

Calcoliamo la trasformata dell'uscita:

$$Y(f) = \mathfrak{F}\big[[x(t) - y(t - T)]\big] \cdot \mathfrak{F}[u(t)] =$$

$$= \left[X(f) - Y(f) \cdot e^{-j2\pi fT}\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right]$$

Da cui:

$$Y(f) = \frac{1}{2}X(f)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f} - \frac{1}{2}Y(f)\delta(f)e^{-j2\pi fT} - \frac{Y(f)}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}$$

Raccogliamo i termini in $Y(f)$ e $X(f)$:

$$Y(f) \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\delta(f)e^{-j2\pi fT} + \frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}\right] = X(f) \cdot \left[\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\right]$$

$$\Rightarrow Y(f) = X(f) \cdot \frac{\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}}{1 + \frac{1}{2}\delta(f)e^{-j2\pi fT} + \frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}}$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}}{1 + \frac{1}{2}\delta(f)e^{-j2\pi fT} + \frac{1}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}} = \frac{\mathfrak{F}[u(t)]}{1 + e^{-j2\pi fT} \cdot \mathfrak{F}[u(t)]}$$

ESERCIZIO 13

Dimostrare che l'insieme di funzioni:

$$u_k(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Con k naturale da 0 a ∞, è un insieme ortonormale e individuare la classe di segnali rispetto alla quale l'insieme è completo.

SOLUZIONE:

Per dimostrare l'ortonormalità dell'insieme di funzioni dato, dobbiamo dimostrare che:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Procediamo con il prodotto scalare:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \cdot \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt =$$

Utilizzando la formula di Werner $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$:

$$= \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right) - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n+m)\right)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right) dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n+m)\right) dt =$$

Il secondo integrale va a zero perché i contributi positivo e negativo del coseno si bilanciano nell'intervallo simmetrico (la media di un coseno è nulla):

$$= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}(n-m)\right) dt = \begin{cases} 1 & se\ n = m \\ 0 & se\ n \neq m \end{cases}$$

Dunque, l'insieme dei segnali dato è un insieme ortonormale.

Un insieme ortonormale è completo in uno spazio se ogni funzione dello spazio può essere rappresentata come combinazione lineare (o serie) di questi elementi. Supponiamo ora che $s(t)$ sia un segnale reale, dispari e a supporto limitato nell'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Un segnale può essere sviluppato in serie di Fourier (forma trigonometrica) come segue:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + B_n \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

E dato che $s(t)$ è supposto reale e a simmetria dispari a supporto limitato in $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$:

$$S_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\ dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\ dt = 0$$

Il prodotto tra $s(t)$ (dispari) e la funzione Coseno (pari) è una funzione a simmetria dispari, che integrata in un intervallo simmetrico fa zero

$$B_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)\ dt$$

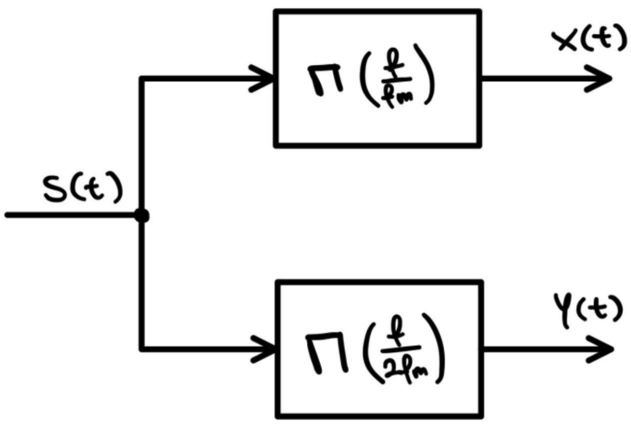
Allora:

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) =$$

$$= S_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{2}} u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \cdot \sqrt{\frac{T}{2}} u_n$$

ESERCIZIO 14

Valutare la mutua correlazione tra $x(t)$ e $y(t)$ nell'ipotesi che $s(t)$ sia bianco con densità spettrale η:



SOLUZIONE:

Poiché il sistema è LTI, sappiamo per definizione che:

$x(t) = s(t) * h_1(t)$

$y(t) = s(t) * h_2(t)$

Avendo la risposta nel dominio della frequenza dei due filtri, possiamo ricavare quella nel dominio del tempo antitrasformando:

$$h_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right)\right] = f_m sinc(f_m t)$$

$$h_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right] = 2f_m sinc(2f_m t)$$

Dunque:

$$x(t) = s(t) * h_1(t) = s(t) * f_m sinc(f_m t) = f_m \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) sinc\big(f_m(t-\tau)\big)\, d\tau$$

$$y(t) = s(t) * h_2(t) = s(t) * 2f_m sinc(2f_m t) = 2f_m \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) sinc\big(2f_m(t-\tau)\big)\, d\tau$$

Per definizione un rumore bianco è un segnale stazionario, dunque risulta che la mutua correlazione è pari a:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\overline{x^*(t_1)y(t_2)}=\overline{x(t_1)y(t_2)}=$$

$$=\overline{2f_m^2\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau_1)sinc\big(f_m(t_1-\tau_1)\big)\,d\tau_1\int_{-\infty}^{\infty}s(\tau_2)sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)d\tau_2}=$$

$$=2f_m^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s(\tau_1)s(\tau_2)}\,sinc\big(f_m(t_1-\tau_1)\big)sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)\,d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=2f_m^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\delta(\tau_2-\tau_1)\,sinc\big(f_m(t_1-\tau_1)\big)sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)\,d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau_2-\tau_1)sinc\big(f_m(t_1-\tau_1)\big)\,d\tau_1 d\tau_2=$$

La $delta$ è pari

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau_1-\tau_2)sinc\big(f_m(t_1-\tau_1)\big)\,d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc\big(2f_m(t_2-\tau_2)\big)\,sinc\big(f_m(t_1-\tau_2)\big)\,d\tau_2=$$

$t_2-\tau_2=\tau$

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc(2f_m\tau)\,sinc\big(f_m(t_1-t_2+\tau)\big)\,d\tau=$$

La $sinc$ è pari

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc(2f_m\tau)\,sinc\big(f_m(t_2-t_1-\tau)\big)\,d\tau=$$

$t_2-t_1=t$

$$=2f_m^2\eta\int_{-\infty}^{\infty}sinc(2f_m\tau)\,sinc\big(f_m(t-\tau)\big)\,d\tau=$$

$$=2f_m^2\eta\cdot[sinc(2f_mt)*sinc(f_mt)]=$$

$$=2f_m^2\eta\cdot\mathfrak{F}^{-1}\big[\mathfrak{F}[sinc(2f_mt)*sinc(f_mt)]\big]=$$

$$=2f_m^2\eta\cdot\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{2f_m}\sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)\cdot\frac{1}{f_m}\sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right)\right]=$$

Ricordando che il prodotto tra due funzioni $rect$ corrisponde a un'altra $rect$ la cui durata corrisponde all'intersezione dei supporti delle due $rect$:

$$=2f_m^2\eta\cdot\mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{2f_m^2}\sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right)\right]=$$

$$=\eta f_m sinc(f_mt)$$

ESERCIZIO 16

Un sistema lineare è individuato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = x(t-T) + x'(t) + x(t+T)$$

Determinare la risposta in frequenza del sistema e la potenza media in uscita, nell'ipotesi che $x(t)$ sia un segnale con densità spettrale $W_x(f) = \sqcap(fT)$.

SOLUZIONE:

L'ingresso e l'uscita di un sistema lineare sono messi in relazione dalla risposta in frequenza come segue:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

Calcoliamo la trasformata di $y(t)$:

$$Y(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi fT} + j2\pi f \cdot X(f) + X(f) \cdot e^{j2\pi fT} =$$

$$= \underbrace{\left(e^{-j2\pi fT} + j2\pi f + e^{j2\pi fT}\right)}_{H(f)} \cdot X(f)$$

Quindi, utilizzando le formule di Eulero:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}}{2}}$$

$$H(f) = e^{-j2\pi fT} + j2\pi f + e^{j2\pi fT} =$$

$$= 2\cos(2\pi fT) + j2\pi f =$$

$$= 2 \cdot [\cos(2\pi fT) + j\pi f]$$

Poiché il sistema è lineare e tempo invariante (facilmente verificabile), supponendo che il segnale in ingresso sia stazionario, vale la seguente relazione:

$$W_y(f) = W_x(f) \cdot |H(f)|^2 =$$

$$= \sqcap(fT) \cdot 4 \cdot [\cos^2(2\pi fT) + (\pi f)^2]$$

La potenza media in uscita è data da:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqcap(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} \\ \sqcap(fT) = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & altrove \end{cases} \end{array}}$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f)\, df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(fT) \cdot 4 \cdot [\cos^2(2\pi fT) + (\pi f)^2]\, df =$$

$$= 4 \cdot \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} [\cos^2(2\pi f T) + (\pi f)^2]\, df =$$

Formula di Werner:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\Rightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{\cos(2\alpha) + 1}{2}$$

$$= 4 \cdot \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left[\frac{\cos(4\pi f T)}{2} + \frac{1}{2} + (\pi f)^2\right] df =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \cos(4\pi f T)\, df + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} 1\, df + \pi^2 \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} f^2\, df\right] =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot [\sin(4\pi f T)]_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} + \frac{1}{2} \cdot [f]_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} + \pi^2 \cdot \left[\frac{f^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}}\right] =$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot [\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{T}\right] + \pi^2 \cdot \left[\frac{1}{24T^3} + \frac{1}{24T^3}\right]\right] =$$

$$= 4 \cdot \left[0 + \frac{1}{2T} + \frac{\pi^2}{12T^3}\right] =$$

$$= \frac{2}{T} + \frac{\pi^2}{3T^3}$$

ESERCIZIO 17

Calcolare la convoluzione in frequenza di due segnali le cui trasformate di Fourier valgono:

$S_1(f) = sinc(fT_1)$

$S_2(f) = sinc(fT_2)$

Considerando che $T_1 = 2T_2$.

SOLUZIONE:

Per la proprietà della trasformata di Fourier, la convoluzione tra $S_1(f)$ e $S_2(f)$ è pari a:

$$S_1(f) * S_2(f) = \mathfrak{F}[s_1(t) \cdot s_2(t)]$$

Ricaviamo $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ antitrasformando:

$$s_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S_1(f)] = \frac{1}{T_1} rect\left(\frac{t}{T_1}\right) = \frac{1}{2T_2} rect\left(\frac{t}{2T_2}\right)$$

$$s_2(t) = \mathfrak{F}^{-1}[S_1(f)] = \frac{1}{T_2} rect\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Ricordando che il prodotto tra due funzioni $rect$ corrisponde a un'altra $rect$ la cui durata corrisponde all'intersezione dei supporti delle due $rect$:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) = \frac{1}{2T_2^2} rect\left(\frac{t}{T_2}\right)$$

Da cui:

$$S_1(f) * S_2(f) = \mathfrak{F}[s_1(t) \cdot s_2(t)] = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2T_2^2} rect\left(\frac{t}{T_2}\right)\right] = \frac{1}{2T_2} sinc(fT_2)$$

ESERCIZIO 18 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie uniformemente distribuite in $[-1,1] \times [-1,1]$, calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{X|Y>\frac{1}{3}}(x)$.

SOLUZIONE:

Poiché X e Y sono uniformemente distribuite in $[-1,1] \times [-1,1]$:

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y - \frac{a_y + b_y}{2}}{b_y - a_y}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_{X|Y>\frac{1}{3}}(x) = \frac{d}{dx} P_X\left(x \mid Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{d}{dx} \Pr\left(X \leq x \mid Y > \frac{1}{3}\right) =$$

$$\boxed{\text{Formula di Bayes}}$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr\left(X \leq x \cap Y > \frac{1}{3}\right)}{\Pr\left(Y > \frac{1}{3}\right)}$$

In cui:

$$\Pr\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \int_{\frac{1}{3}}^{1} dy\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\Pr\left(X \leq x \cap Y > \frac{1}{3}\right) = \int_{-\infty}^{x} \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{x} \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{4}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{x} \int_{\frac{1}{3}}^{1} dy\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{x} \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{6} \cdot \int_{-1}^{x} dx$$

Dunque:

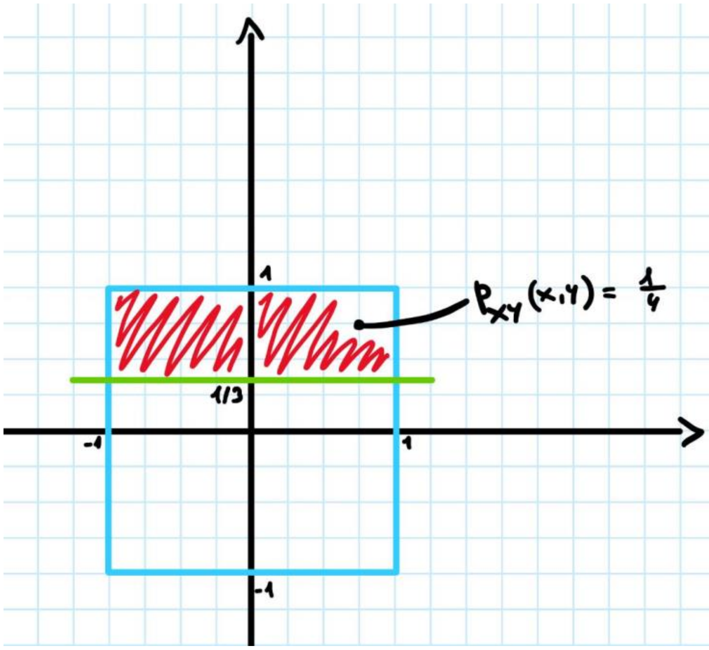
$$P_{X|Y>\frac{1}{3}}(x) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\int_{-1}^{x} dx}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{x} dx = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Infatti, nel primo caso, ricordando che $X \in [-1,1]$, se $x \leq -1$ allora nessun valore X può essere inferiore o uguale a x. Nel secondo caso si calcola semplicemente l'integrale con risultato dipendente da x. Nel terzo caso, $X \leq x$ è sempre vera per tutti i valori di $X \in [-1,1]$. Da ciò deriva che:

$$p_{X|Y>\frac{1}{3}}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{X|Y>\frac{1}{3}}(x)\right) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 18 (RISOLUZIONE GRAFICA)

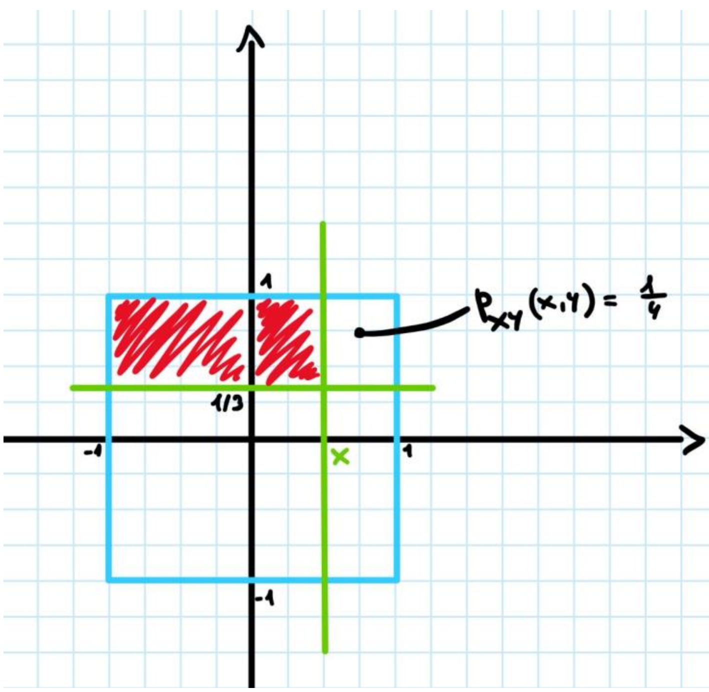
Disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(Y > \frac{1}{3}\right)$:



$$\Pr\left(Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il rettangolo di base 2 e altezza $1 - \frac{1}{3} = 2/3$.

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(X \leq x \cap Y > \frac{1}{3}\right)$:



$$\Pr\left(X \leq x \cap Y > \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left[(1 + x) \cdot \frac{2}{3}\right] =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot (1 + x)$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il rettangolo di base $(1 + x)$ e altezza $1 - \frac{1}{3} = 2/3$.

ESERCIZIO 19 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie uniformemente distribuite in $[-1,1] \times [-1,1]$, calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{Y|X<\frac{1}{2}}(y)$.

SOLUZIONE:

Poiché X e Y sono uniformemente distribuite in $[-1,1] \times [-1,1]$:

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y - \frac{a_y + b_y}{2}}{b_y - a_y}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \Pi\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_{Y|X<\frac{1}{2}}(x) = \frac{d}{dy} P_Y\left(y \mid X < \frac{1}{2}\right) = \frac{d}{dy} \Pr\left(Y \leq y \mid X < \frac{1}{2}\right) =$$

$\boxed{\text{Formula di Bayes}}$

$$= \frac{d}{dy} \frac{\Pr\left(Y \leq y \cap X < \frac{1}{2}\right)}{\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right)}$$

In cui:

$$\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} dx\, dy = \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\, dy = \frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3}{4}$$

Proseguendo:

$$\Pr\left(Y \leq y \cap X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-1}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{y} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{y} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} dx\, dy = \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^{y} \frac{3}{2} dy = \frac{3}{8} \cdot \int_{-1}^{y} dy$$

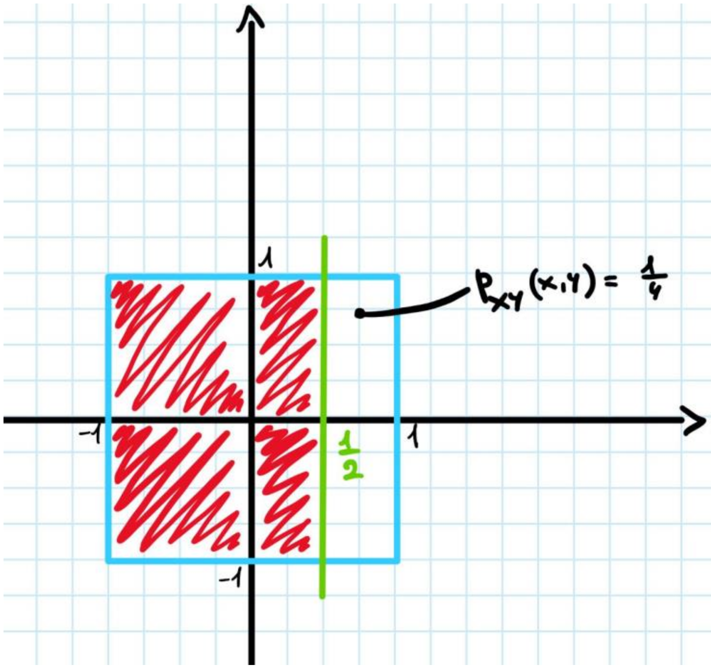
Dunque:

$$P_{Y|X<\frac{1}{2}}(y) = \frac{\frac{3}{8}\cdot\int_{-1}^{y} dy}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{y} dy = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \frac{1}{2}(y+1) & -1 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$p_{Y|X<\frac{1}{2}}(y) = \frac{d}{dy}\left(P_{Y|X<\frac{1}{2}}(y)\right) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < y < 1 \\ 0 & y \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 19 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right)$:

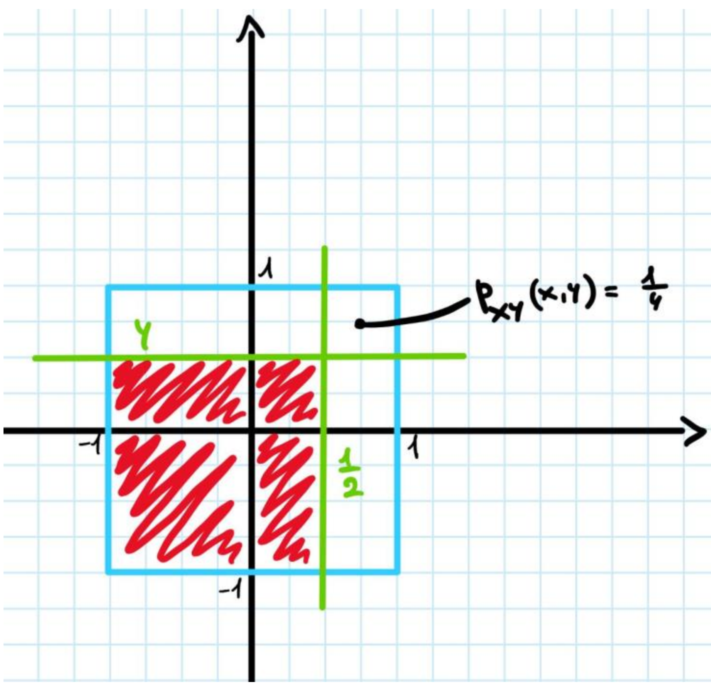


$$\Pr\left(X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 2\right) = \frac{3}{4}$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il rettangolo di base $\frac{3}{2}$ e altezza 2.

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(Y \leq y \cap X < \frac{1}{2}\right)$:



$$\Pr\left(Y \leq y \cap X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (1 + y)\right] =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot (1 + y)$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il rettangolo di base $\frac{3}{2}$ e altezza $1 + y$.

ESERCIZIO 20

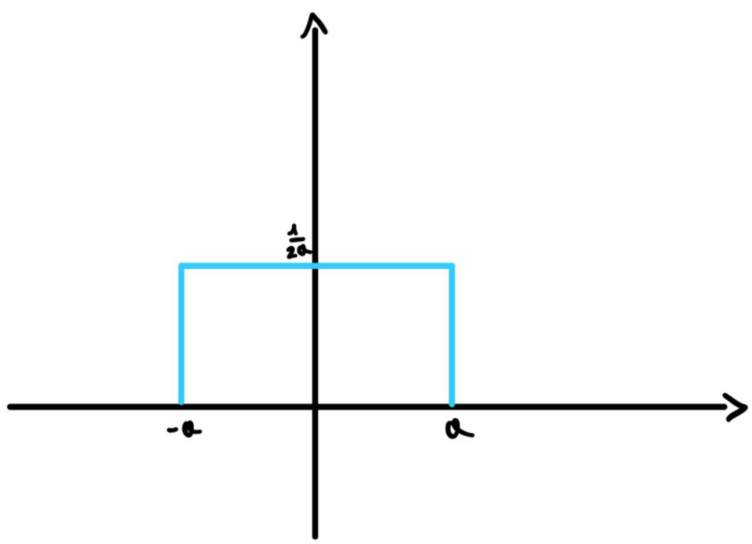
Sia X una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[-a, a]$, calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{X|X<0}(x)$.

SOLUZIONE:

Poiché X è uniformemente distribuita in $[-a, a]$:

$$p_X(x) = \frac{1}{(b_x - a_x)} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \frac{1}{2a} \cdot \Pi\left(\frac{x}{2a}\right)$$

Disegniamo il grafico:



Per definizione:

$$p_{X|X<0}(x) = \frac{d}{dx} P_X(x \mid X < 0) = \frac{d}{dx} \Pr(X \le x \mid X < 0) =$$

Formula di Bayes

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \le x \cap X < 0)}{\Pr(X < 0)}$$

In cui:

$$\Pr(X < 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = \int_{-a}^{0} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{0} dx = \frac{1}{2a} \cdot a = \frac{1}{2}$$

Proseguendo, notiamo che:

$$\Pr(X \leq x \cap X < 0) = \Pr(X \leq min(x,0)) = 1 - \Pr(X > \min(x,0))$$

In cui:

$$\Pr(X > \min(x,0)) = \int_{\min(x,0)}^{a} p_X(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{\min(x,0)}^{a} dx$$

Nel caso in cui $x \leq -a \Rightarrow \min(x,0) = x$ ma $x < -a$ è fuori dal supporto, dunque:

$$\Pr(X > \min(x,0)) = \Pr(X > -a) = 1$$

Nel caso in cui $-a < x < 0 \Rightarrow \min(x,0) = x$ e:

$$\Pr(X > \min(x,0)) = \frac{1}{2a}\int_{x}^{a} dx = \frac{a-x}{2a}$$

Nel caso in cui $x \geq 0 \Rightarrow \min(x,0) = 0$ e:

$$\Pr(X > \min(x,0)) = \Pr(X > 0) = \frac{1}{2a}\int_{0}^{a} dx = \frac{1}{2}$$

Ricapitolando:

$$\Pr(X > \min(x,0)) = \begin{cases} 1 & x \leq -a \\ \dfrac{a-x}{2a} & -a < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$\Pr(X \leq min(x,0)) = 1 - \Pr(X > \min(x,0)) = \begin{cases} 0 & x \leq -a \\ 1 - \dfrac{a-x}{2a} & -a < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$P_{X|X<0}(x) = \frac{\Pr(X \le x \cap X < 0)}{\Pr(X < 0)} = \begin{cases} 0 & x \le -a \\ 2 - \dfrac{a-x}{a} & -a < x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$$

E, infine:

$$p_{X|X<0}(x) = \frac{d}{dx}\frac{\Pr(X \le x \cap X < 0)}{\Pr(X < 0)} = \begin{cases} 0 & x \le -a \\ \dfrac{1}{a} & -a < x < 0 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 21

Sia:

$$s(a,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT)$$

Con $p(t) = u(t)e^{-\frac{t}{T}}$, un segnale aleatorio dove $\{a_n\}$ è una sequenza casuale di elementi contenuti in $\{-1,1\}$, indipendenti ed equiprobabili. Calcolare il valore quadratico medio di $s(a,t)$.

SOLUZIONE:

Nel nostro caso:

$$\overline{s(a,t)^2} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m p(t - mT)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_n a_m} p(t - nT) p(t - mT)$$

Se consideriamo che a_n è di Bernoulli e che i suoi elementi sono equiprobabili, allora:

$$\overline{a_n} = \frac{(-1) + 1}{2} = 0$$

$$\overline{a_n^2} = \frac{(-1)^2 + 1^2}{2} = 1$$

$$\overline{a_n a_m} = \begin{cases} \overline{a_n^2} & n = m \\ \overline{a_n} \cdot \overline{a_m} & n \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$\overline{s(a,t)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p^2(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t - nT) e^{-\frac{2(t-nT)}{T}} =$$

Ma $u(t - nT) = \begin{cases} 1 & t \geq nT \\ 0 & altrove \end{cases}$, quindi $t \geq nT \Rightarrow n \leq \frac{t}{T}$:

$$= e^{-\frac{2t}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\frac{t}{T}} e^{2n} = e^{-\frac{2t}{T}} \cdot \sum_{n=-\frac{t}{T}}^{\infty} e^{-2n} =$$

Ponendo $k = n + \frac{t}{T}$:

$$= e^{-\frac{2t}{T}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\left(k-\frac{t}{T}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k} =$$

Che è una serie geometrica che si risolve con la formula:

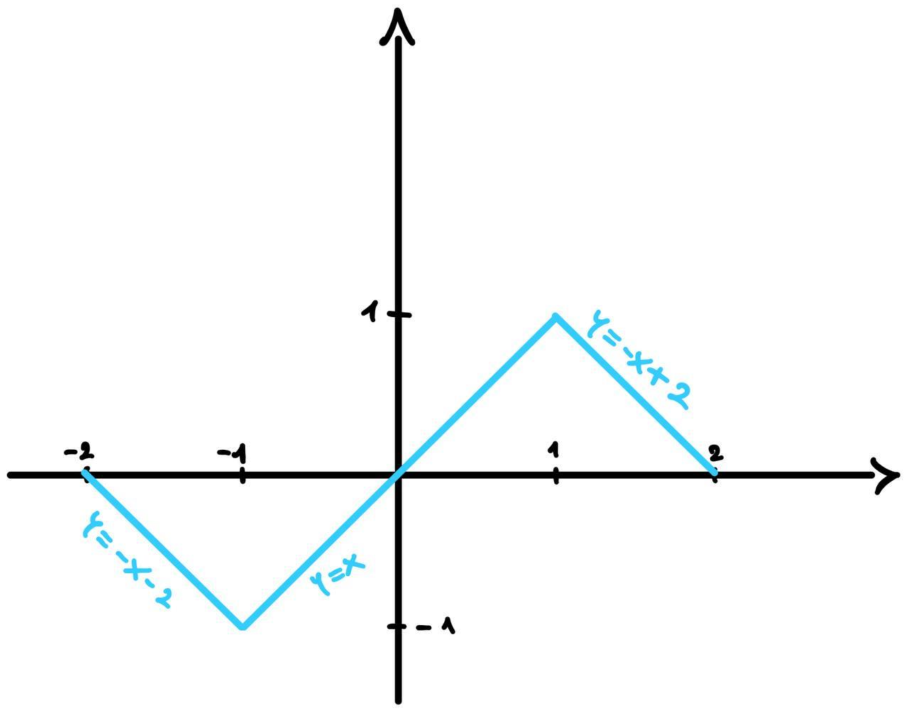
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Dunque:

$$\overline{s(a,t)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k} = \frac{1}{1-e^{-2}}$$

ESERCIZIO 22

Un segnale stazionario con densità di probabilità del primo ordine uniforme in $[-2,2]$ attraversa un sistema lineare la cui caratteristica ingresso-uscita è riportata di seguito:



Determinare il valore quadratico medio del segnale d'uscita.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \frac{1}{4} \cdot \Pi\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y(x) = tri(x-1) - tri(x+1)$$

$$y^2(x) = [tri(x-1)]^2 + [tri(x+1)]^2 - 2tri(x-1)tri(x+1) =$$

$$= [tri(x-1)]^2 + [tri(x+1)]^2 - 0$$

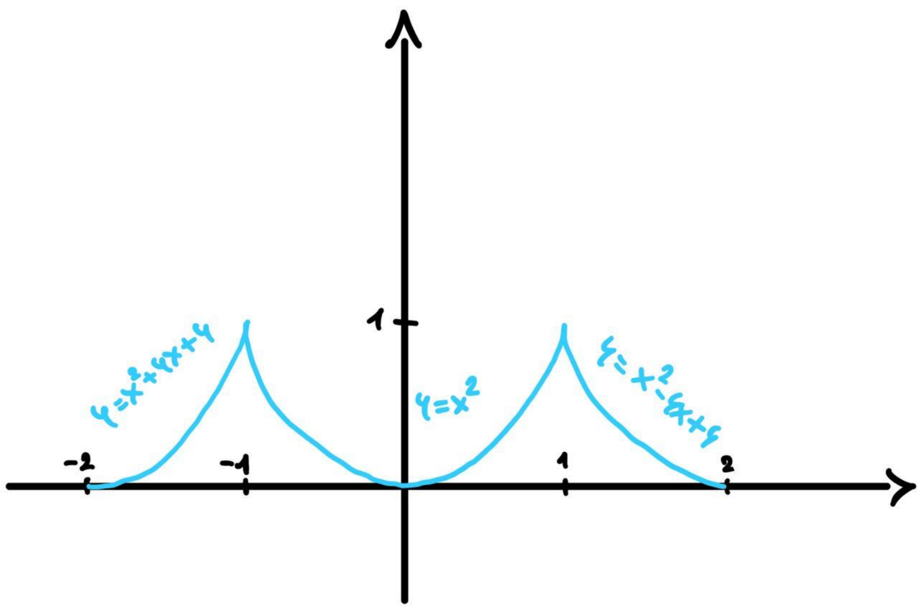
Infatti, le tri hanno supporti disgiunti, quindi il loro prodotto fa zero.

$$\overline{y^2(x)} = \overline{[tri(x-1)]^2 + [tri(x+1)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(x) \cdot p_X(x)\ dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \frac{1}{4} tri(x+1)^2 \, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{4} tri(x-1)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\int_{-2}^{0} tri(x+1)^2 \, dx + \int_{0}^{2} tri(x-1)^2 \, dx \right)$$

Disegniamo i segnali $tri(x+1)^2$ e $tri(x-1)^2$:



Tramite il teorema di Archimede ricaviamo l'area sottesa da un arco di parabola che ha concavità verso l'alto:

$$A = \frac{BH}{3} = \frac{1 \cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$$

E poiché gli archi di parabola sono quattro:

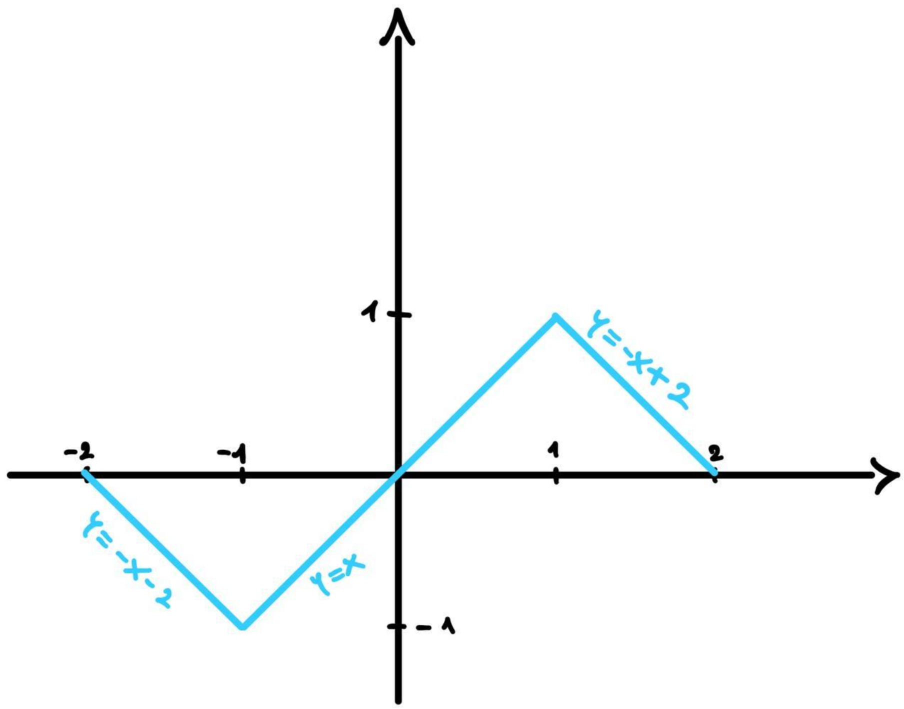
$$A_{TOT} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Dunque:

$$\overline{y^2(t)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 23

Un segnale stazionario con densità di probabilità del primo ordine uniforme in $[-2,2]$ attraversa un sistema lineare la cui caratteristica ingresso-uscita è riportata di seguito:



Determinare la densità di probabilità del primo ordine del segnale d'uscita.

SOLUZIONE:

La funzione non presenta tratti costanti, dunque:

$$p_Y(y) = \sum_{x_i:f(x_i)=y, f'(x_i)\neq 0} \frac{p_X(x_i(y))}{|f'(x_i(y))|}$$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -1 \vee y > 1 \\ \{-2\} \cup \{0\} \cup \{2\} & y = 0 \\ \{-2-y, y\} & -1 \leq y < 0 \\ \{2-y, y\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta:

$$x(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} -y-2 & y = -x-2 \\ y & y = x \\ 2-y & y = -x+2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & y = -x-2 \\ 1 & y = x \\ -1 & y = -x+2 \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X\big(x_1(y)\big)}{\big|f'\big(x_1(y)\big)\big|} + \frac{p_X\big(x_2(y)\big)}{\big|f'\big(x_2(y)\big)\big|} + \frac{p_X\big(x_3(y)\big)}{\big|f'\big(x_3(y)\big)\big|} =$$

$$= \frac{p_X(-y-2)}{|f'(-y-2)|} + \frac{p_X(y)}{|f'(y)|} + \frac{p_X(2-y)}{|f'(2-y)|} =$$

$$= \frac{p_X(-y-2)}{|-1|} + \frac{p_X(y)}{|1|} + \frac{p_X(2-y)}{|-1|} =$$

$$= p_X(-y-2) + p_X(y) + p_X(2-y)$$

Noi sappiamo che $p_X(x)$ è uniforme in $[-2,2]$:

$$p_X(x) = \frac{1}{4} \cdot rect\left(\frac{x}{4}\right)$$

Il che significa che $p_X(x)$ ha altezza $\frac{1}{4}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = p_X(-y-2) + p_X(y) + p_X(2-y) =$$

$$= \frac{1}{4} rect\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{4} rect\left(y - \frac{1}{2}\right) =$$

Considera le rect rispetto all'asse y

$$= \frac{1}{2} rect\left(\frac{y}{2}\right)$$

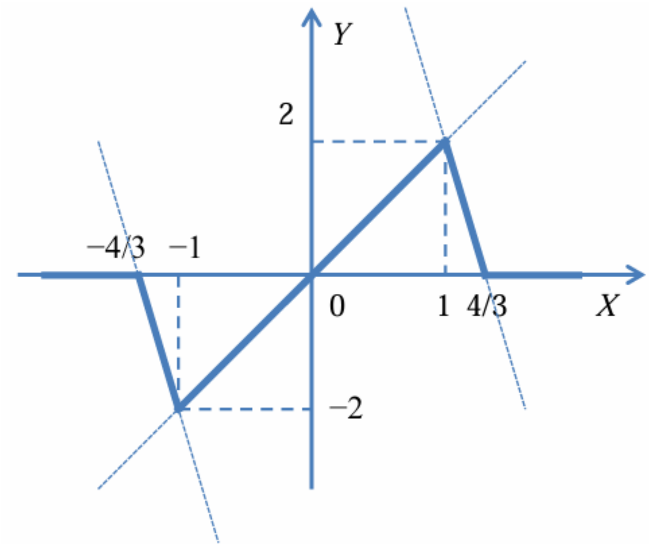
Si sommano i tratti in comune delle rect

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} rect\left(\frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \, dy = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \ \ OK$$

ESERCIZIO 7.2 MANGIONE

La variabile aleatoria X, uniforme in $[-2,2]$, viene trasformata con la legge rappresentata in figura:



Determinare la densità di probabilità di Y.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{4} \cdot rect\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y, f'(x_i)\neq 0} \frac{p_X(x_i(y))}{|f'(x_i(y))|} + \sum_{y_i: f'(f^{-1}(y_i))=0} \Pr\left(X \in f^{-1}(y_i)\right) \cdot \delta(y - y_i)$$

O analogamente:

$$p_Y(y) = \sum_i \frac{p_X(x_i)}{\left|\frac{dy}{dx}(x_i)\right|} + \sum_j \delta(y - y_j) \cdot \Pr\,(y = y_j)$$

x_i sono le soluzioni dell'equazione $y(x) = y$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -2 \vee y > 2 \\ (-\infty, -4/3] \cup \{0\} \cup [4/3, +\infty) & y = 0 \\ \left\{\frac{y}{2}, \frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right\} & -1 \leq y < 0 \\ \left\{\frac{y}{2}, -\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta:

$$x(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{y}{6} & y = -6x - 8 \\ \frac{y}{2} & y = 2x \\ -\frac{4}{3} - \frac{y}{6} & y = -6x + 8 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -6 & y = -6x - 8 \\ 2 & y = 2x \\ -6 & y = -6x + 8 \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X\big(x_1(y)\big)}{\big|f'\big(x_1(y)\big)\big|} + \frac{p_X\big(x_2(y)\big)}{\big|f'\big(x_2(y)\big)\big|} + \frac{p_X\big(x_3(y)\big)}{\big|f'\big(x_3(y)\big)\big|} + \Pr(X < -4/3)\,\delta(y) + \Pr(X > 4/3)\,\delta(y) =$$

$$= \frac{p_X\left(\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)}{\left|f'\left(\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)\right|} + \frac{p_X\left(\frac{y}{2}\right)}{\left|f'\left(\frac{y}{2}\right)\right|} + \frac{p_X\left(-\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)}{\left|f'\left(-\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)\right|} + \left[\Pr\left(X < -\frac{4}{3}\right) + \Pr\left(X > \frac{4}{3}\right)\right] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{p_X\left(\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)}{|-6|} + \frac{p_X\left(\frac{y}{2}\right)}{|2|} + \frac{p_X\left(-\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right)}{|-6|} + \left[\int_{-2}^{-4/3} \frac{1}{4}\,dx + \int_{4/3}^{2} \frac{1}{4}\,dx\right] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{1}{6} p_X\left(\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right) + \frac{1}{2} p_X\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{6} p_X\left(-\frac{4}{3} - \frac{y}{6}\right) + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] \cdot \delta(y)$$

Noi sappiamo che $p_X(x)$ è uniforme in $[-2,2]$, il che significa che $p_X(x)$ ha altezza $\frac{1}{4}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = \frac{1}{24} rect\left(\frac{y+1}{2}\right) + \frac{1}{8} rect\left(\frac{y}{4}\right) + \frac{1}{24} rect\left(\frac{y-1}{2}\right) + \frac{1}{3}\delta(y) =$$

Considera le rect rispetto all'asse y

$$= \frac{1}{6} rect\left(\frac{y}{4}\right) + \frac{1}{3}\delta(y)$$

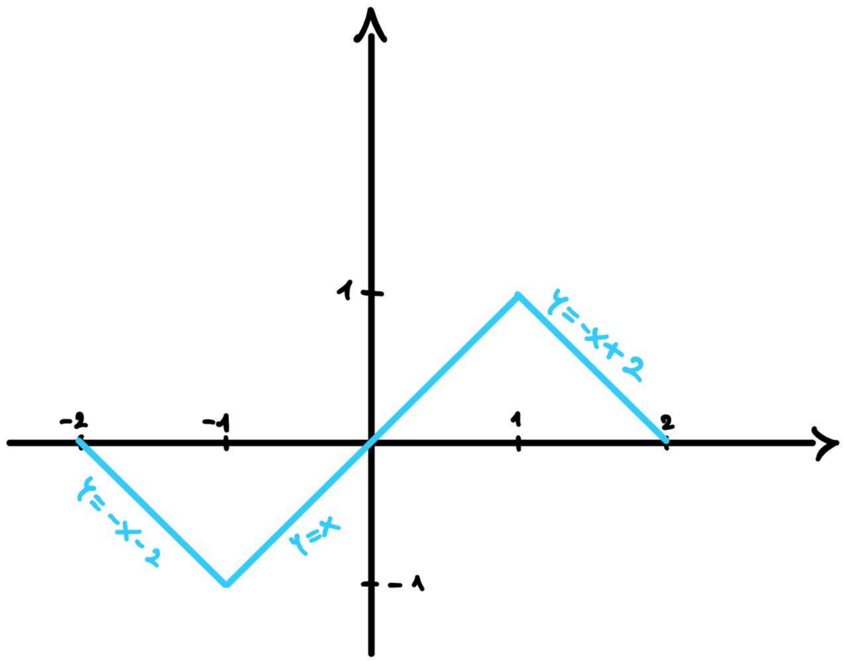
Si sommano i tratti delle rect

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} rect\left(\frac{y}{4}\right) + \frac{1}{3}\delta(y)\,dy = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} 1\,dy + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\,dy = \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \;\; OK$$

ESERCIZIO 24

Un segnale stazionario con densità di probabilità del primo ordine uniforme in $[-2,2]$ attraversa un sistema lineare la cui caratteristica ingresso-uscita è riportata di seguito:



Determinare il valore medio del segnale d'uscita.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \sqcap\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sqcap\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$y(x) = tri(x-1) - tri(x+1)$$

$$\overline{y(x)} = \overline{tri(x-1) + tri(x+1)} = \int_{-2}^{2} y(x) \cdot p_X(x)\, dx = 0$$

Infatti, la funzione integranda è simmetrica nell'intervallo $[-2,2]$, dunque l'integrale fa zero. Se avessimo voluto svolgere i conti avremmo dovuto spezzare le due tri in tre segmenti di retta ognuno con il suo supporto:

$$\overline{y(x)} = \int_{-2}^{2} y(x) p_X(x)\, dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1} -x - 2\, dx + \int_{-1}^{1} x\, dx + \int_{1}^{2} -x + 2\, dx\right] = 0$$

ESERCIZIO 25 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Due variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti e hanno densità di probabilità distribuita uniformemente in [0,1]. Determinare la densità di probabilità condizionata $p_{X|Y>2X}(x)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_{X|Y>2X}(x) = \frac{d}{dx} P_X(x \mid Y > 2X) = \frac{d}{dx} \Pr(X \leq x \mid Y > 2X) = \quad \boxed{\text{Formula di Bayes}}$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \leq x \cap Y > 2X)}{\Pr(Y > 2X)}$$

In cui:

$$\Pr(Y > 2X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2x}^{1} dy\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - 2x\, dx = [x]_0^{1/2} - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

Proseguendo:

$$\Pr(X \leq x \cap Y > 2X) = \int_{-\infty}^{x} \int_{2x}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^{x} \int_{2x}^{1} 1\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^x 1 - 2x \, dx$$

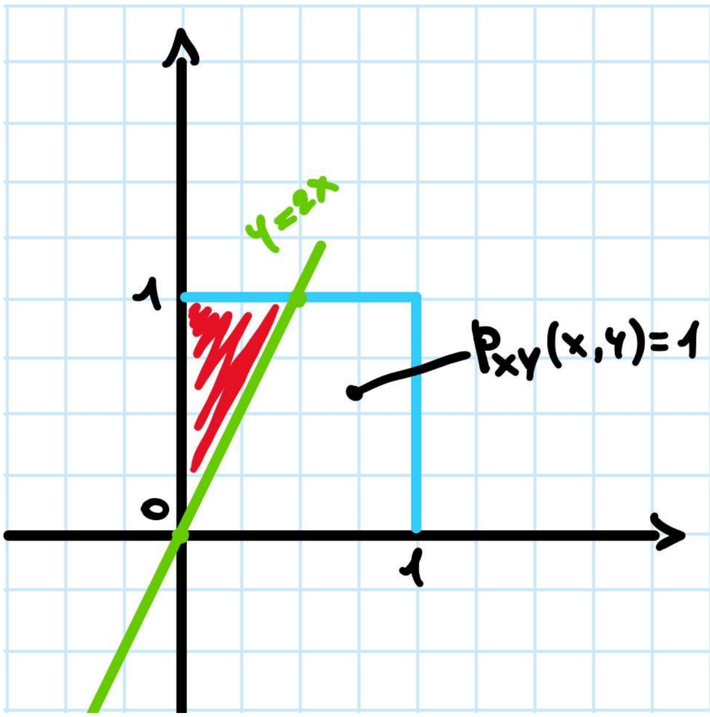
Dunque:

$$P_{X|Y>2X}(x) = \frac{\int_0^x 1 - 2x \, dx}{\frac{1}{4}} = 4\int_0^x 1 - 2x \, dx = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 4(x - x^2) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p_{X|Y>2X}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{X|Y>2X}(x)\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 4(1 - 2x) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 25 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(Y > 2X)$:

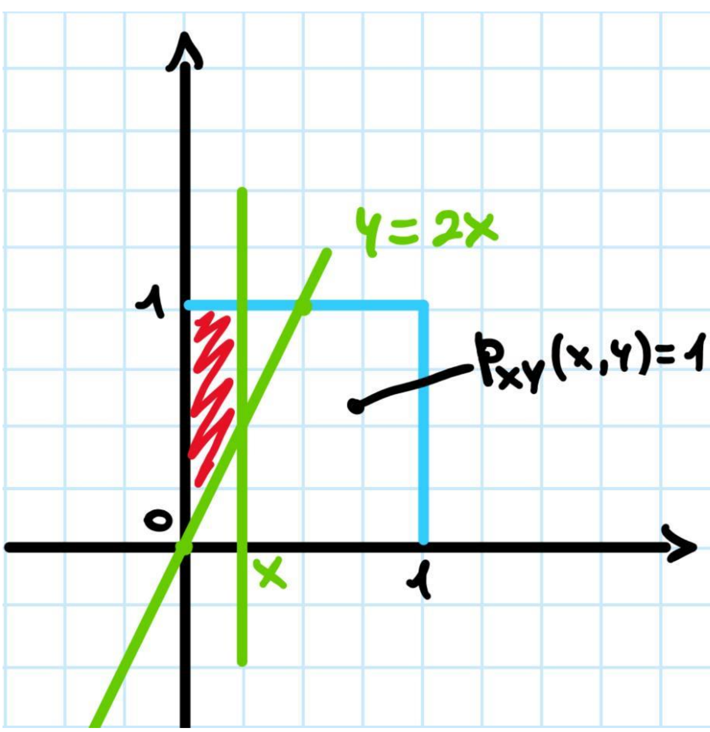


$$\Pr(Y > 2X) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il triangolo di base $\frac{1}{2}$ e altezza 1.

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X \leq x \cap Y > 2X)$:



$$\Pr(X \leq x \cap Y > 2X) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left[\frac{1 + 1 - 2x}{2} \cdot x\right] =$$

$$= (x - x^2)$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà il trapezio di base maggiore 1, base minore $1 - 2x$ e altezza x.

In questo esercizio non era semplice individuare la base minore del trapezio. Si può trovare considerando:

$$d[(x, 2x), (x, 1)] = \sqrt{(x - x)^2 + (1 - 2x)^2}$$

ESERCIZIO 26

Due variabili aleatorie P e Θ sono caratterizzate dalla densità di probabilità congiunta $p_{\mathrm{P}\Theta}(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\cdot\Pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\cdot\Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$. Si determini il valore quadratico medio delle variabili aleatorie X e Y così definite:

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$\overline{(X+Y)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)^2\cdot p_{\mathrm{P}\Theta}(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\rho\cos(\theta)+\rho\sin(\theta))^2\cdot p_{\mathrm{P}\Theta}(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho^2\cdot(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta))\cdot p_{\mathrm{P}\Theta}(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho^2\cdot(1+2\cos(\theta)\sin(\theta))\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\Pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\cdot\Pi\left(\frac{\theta}{\pi}\right)d\rho\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1}\rho^2\cdot(1+2\cos(\theta)\sin(\theta))\,d\rho\,d\theta=$$

Formula di duplicazione del seno

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1}\rho^2\cdot(1+\sin(2\theta))\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\sin(2\theta)\int_{0}^{1}\rho^2\,d\rho\,d\theta=$$

La funzione seno è dispari, integrata in un intervallo simmetrico fa zero

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}d\theta=\frac{1}{3\pi}\cdot\pi=\frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 27

Sia dato il segnale aleatorio:

$$s(t,\zeta) = a(t,\zeta) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Dove $a(t,\zeta)$ è a sua volta un segnale aleatorio stazionario e con autocorrelazione nota. Si determini la densità spettrale di potenza di $s(t,\zeta)$.

SOLUZIONE:

Usando il teorema di Wiener-Khinchine:

$$W_s(f) = \mathfrak{F}_\tau[< R_s(t,t+\tau) >]$$

Dove:

$$R_s(t,t+\tau) = \overline{s^*(t)s(t+\tau)} = \overline{s(t)s(t+\tau)} =$$

$$= \overline{a(t)a(t+\tau)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau-mT) = \boxed{\text{Formula di Poisson}}$$

$$= R_a(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi n\frac{t}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi m\frac{t+\tau}{T}} =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{(n+m)t+m\tau}{T}}$$

Quindi:

$$< R_s(t,t+\tau) > = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \overline{s(t)s(t+\tau)}\, dt =$$

$$= \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{(n+m)t+m\tau}{T}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi(n+m)\frac{t}{T}} \, dt =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \cdot \left[\frac{e^{j2\pi(n+m)\frac{t}{T}}}{j2\pi \frac{(n+m)}{T}} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{T_0 \to \infty} \frac{e^{j\pi(n+m)\frac{T_0}{T}} - e^{-j\pi(n+m)\frac{T_0}{T}}}{j2\pi(n+m)\frac{T_0}{T}} =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{T_0 \to \infty} \frac{\sin\left(\pi(n+m)\frac{T_0}{T}\right)}{\pi(n+m)\frac{T_0}{T}} =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lim_{T_0 \to \infty} sinc\left((n+m)\frac{T_0}{T}\right) =$$

Il limite $T_0 \to \infty$ della funzione $sinc$ tende a zero qualsiasi sia il valore di $(n+m)$, tranne che per $(n+m) = 0$, in corrispondenza del quale vale uno:

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_{n+m} =$$

Dato che $(n+m) = 0$ solo quando $n = -m$:

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_{(-m)+m} =$$

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j2\pi m \frac{\tau}{T}} =$$

Formula di Poisson

$$= \frac{1}{T^2} R_a(\tau) \cdot T \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) =$$

$$= \frac{1}{T} R_a(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

Dunque:

$W_s(f) = \mathfrak{F}_\tau[< R_s(t, t+\tau) >] =$

$$= \mathfrak{F}_\tau \left[\frac{1}{T} R_a(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \mathfrak{F}_\tau \left[R_a(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left[\mathfrak{F}_\tau[R_a(\tau)] * \mathfrak{F}_\tau \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \left[W_a(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_a\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

In cui si è indicata con $W_a(f)$ la densità spettrale di potenza del processo $a(t, \zeta)$.

ESERCIZIO 30

Sia dato il segnale aleatorio:

$$y(t,\zeta) = \begin{cases} 1 & x(t,\zeta) \leq \alpha \\ 0 & x(t,\zeta) > \alpha \end{cases}$$

Dove $x(t,\zeta)$ è a sua volta un segnale aleatorio uniformemente distribuito in $[-1,1]$. Si calcoli il valor medio di $y(t,\zeta)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \sqcap\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqcap\left(\frac{x}{2}\right)$$

Possiamo scrivere $y(t,\zeta)$ come gradino:

$$y(t,\zeta) = u(-x+\alpha)$$

Il teorema della media afferma che:

$$m_y = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\, dx$$

Quindi:

$$\overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(-x+\alpha) \cdot p_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\min(\alpha,1)} 1\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}[\min(\alpha,1) + 1] = \begin{cases} 0 & \alpha \leq -1 \\ \frac{\alpha+1}{2} & -1 < \alpha < 1 \\ 1 & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases} \\ u(-x+\alpha) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ 0 & altrove \end{cases} \end{array}}$$

ESERCIZIO 31

Sia dato il segnale aleatorio:

$$y(t,\zeta) = \begin{cases} 1 & x(t,\zeta) \le \alpha \\ 0 & x(t,\zeta) > \alpha \end{cases}$$

Dove $x(t,\zeta)$ è a sua volta un segnale aleatorio che presenta densità di probabilità del secondo ordine $p_{x(t_1)x(t_2)}(x_1,x_2) = u(x_1)u(x_2)e^{-(x_1+x_2)}$.

Si calcoli l'autocorrelazione di $y(t,\zeta)$.

SOLUZIONE:

Possiamo scrivere $y(t,\zeta)$ come gradino:

$$y(t,\zeta) = u(-x+\alpha)$$

Per definizione, la funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio è pari a:

$$R_s(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdot p_{x(t_1)x(t_2)}(x_1,x_2)\; dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(-x_1+\alpha)\cdot u(-x_2+\alpha)\cdot u(x_1)u(x_2)e^{-(x_1+x_2)}\; dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(-x_1+\alpha)\cdot u(-x_2+\alpha)\cdot u(x_1)u(x_2)e^{-x_1}e^{-x_2}\, dx_1 dx_2 =$$

In questo caso la funzione integranda $f(x_1,x_2)$ è separabile in $f(x_1)\cdot f(x_2)$, in quanto non compaiono termini misti ma ognuno di essi dipende solo da x_1 o da x_2:

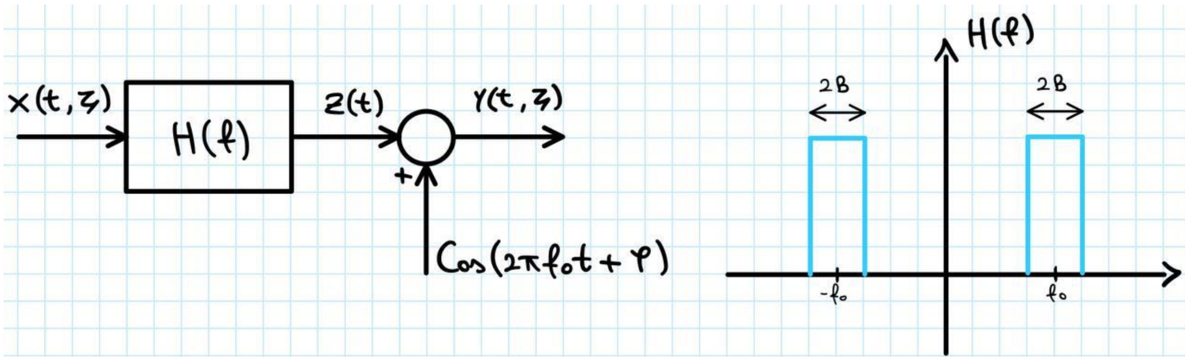
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(-x_1+\alpha)u(x_1)e^{-x_1}\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} u(-x_2+\alpha)\cdot u(x_2)e^{-x_2}\, dx_2 =$$

$$= \int_{0}^{\infty} u(-x_1+\alpha)e^{-x_1}\, dx_1 \int_{0}^{\infty} u(-x_2+\alpha)e^{-x_2}\, dx_2 =$$

$$= \int_{0}^{\alpha} e^{-x_1}\, dx_1 \int_{0}^{\alpha} e^{-x_2}\, dx_2 =$$

$$= \left[\int_{0}^{\alpha} e^{-x}\, dx\right]^2 = \begin{cases} (1-e^{-\alpha})^2 & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha \le 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 32



Calcolare la densità spettrale di potenza del segnale $y(t)$ nell'ipotesi che:

1. La risposta in frequenza $H(f)$ del filtro sia quella in figura.
2. Il segnale $x(t)$ sia bianco con densità spettrale η.
3. La fase φ sia uniformemente distribuita in $[0,2\pi]$ e indipendente da $x(t)$.

SOLUZIONE:

La risposta in frequenza è pari a:

$$H(f) = \sqcap\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \sqcap\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)$$

Che corrisponde alla risposta in frequenza di un filtro passa-banda ideale. La fase φ è uniformemente distribuita in $[0,2\pi]$, dunque:

$$p_\varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqcap\left(\frac{\alpha-\pi}{2\pi}\right)$$

Dal sistema si ricava che:

$$z(t) = h(t) * x(t)$$

$$Z(f) = H(f) \cdot X(f) = \left[\sqcap\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \sqcap\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right] \cdot X(f)$$

Un rumore bianco è per definizione stazionario, dunque vale:

$$W_z(f) = W_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \eta \cdot \left|\sqcap\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \sqcap\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right|^2 =$$

$$= \eta \cdot \left[\sqcap\left(\frac{f-f_0}{2B}\right) + \sqcap\left(\frac{f+f_0}{2B}\right)\right]$$

Dal sistema si ricava inoltre che:

$y(t,\zeta) = z(t) + \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$W_y(f) = W_z(f) + W_{cos}(f)$

Verifichiamo che il processo $\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ sia stazionario in senso lato:

$$\overline{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)} = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\alpha = 0$$

Questo poiché l'integrale di un coseno su un periodo è nullo.

$$R_{cos}(t_1, t_1 + \tau) = \overline{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi) \cdot \cos[2\pi f_0 (t_1 + \tau) + \varphi]} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \alpha) \cdot \cos[2\pi f_0 (t_1 + \tau) + \alpha] \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\alpha =$$

Usando la formula di Werner $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(4\pi f_0 t_1 + 2\alpha + 2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 \tau)] \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot 2\pi + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(4\pi f_0 t_1 + 2\alpha + 2\pi f_0 \tau)\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) = R_{cos}(\tau)$$

Per trovare la densità spettrale di potenza $W_{cos}(f)$ ricorriamo al teorema di Wiener-Khinchine per segnali stazionari in senso lato:

$$W_{cos}(f) = \mathfrak{F}_\tau[R_{cos}(\tau)] = \mathfrak{F}_\tau\left[\frac{1}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)\right] = \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{F}_\tau[\cos(2\pi f_0 \tau)] =$$

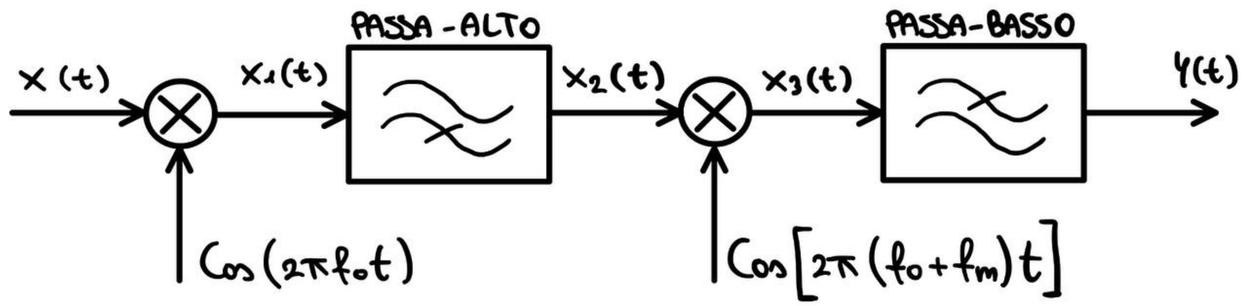
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{4} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Dunque:

$$W_y(f) = \eta \cdot \left[\Pi\left(\frac{f - f_0}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_0}{2B}\right)\right] + \frac{1}{4} \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

ESERCIZIO 33

Si consideri il seguente sistema:



Si determini il segnale in uscita del sistema quando al suo ingresso è applicato un segnale passabasso con frequenza di taglio f_m e si dimostri che il sistema comporta un'inversione dello spettro del segnale.

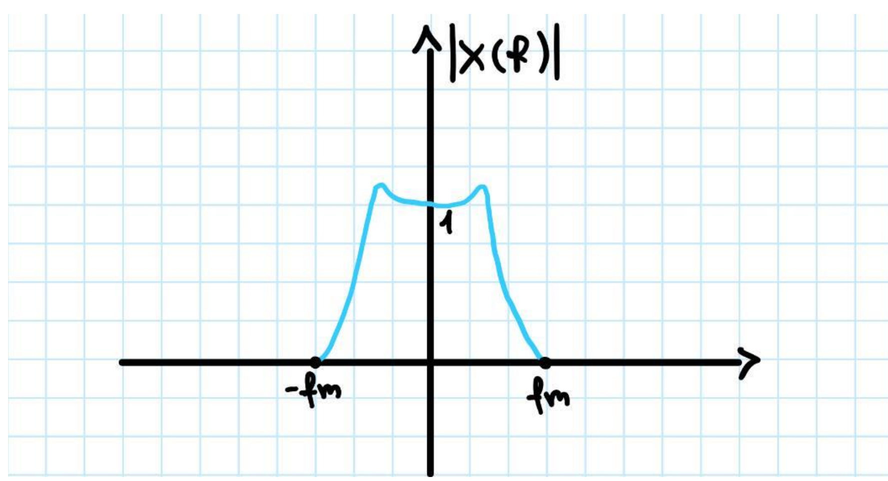
SOLUZIONE:

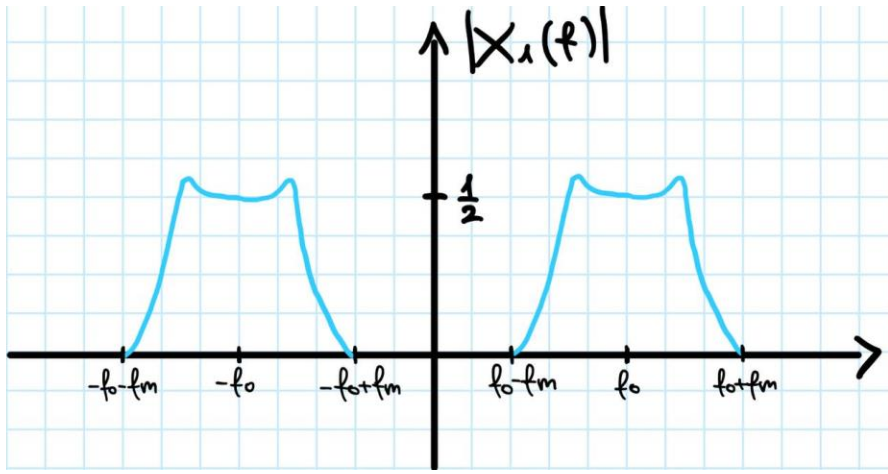
$x_1(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$

$X_1(f) = \mathfrak{F}[x(t)] * \mathfrak{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

Essendo $x(t)$, ovvero il segnale in ingresso, un segnale passabasso con frequenza di taglio f_m, la sua trasformata di Fourier è pari a:

$X(f) = X(f) \cdot \sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)$





$$x_2(t) = x_1(t) * \mathfrak{F}^{-1}\left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right]$$

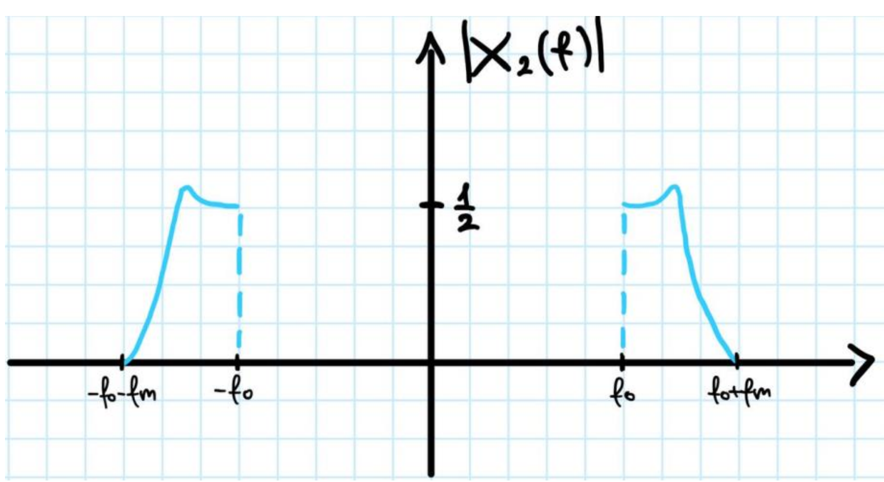
$$X_2(f) = \mathfrak{F}[x_1(t)] \cdot \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}^{-1}\left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right]\right] = X_1(f) \cdot \left[1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right] =$$

$$= X_1(f) - X_1(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)$$

Questo perché, in un sistema, l'uscita e l'ingresso sono messi in relazione dalla risposta in frequenza:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

Infatti, $H(f) = 1 - \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)$ è la risposta in frequenza del filtro passa-alto.

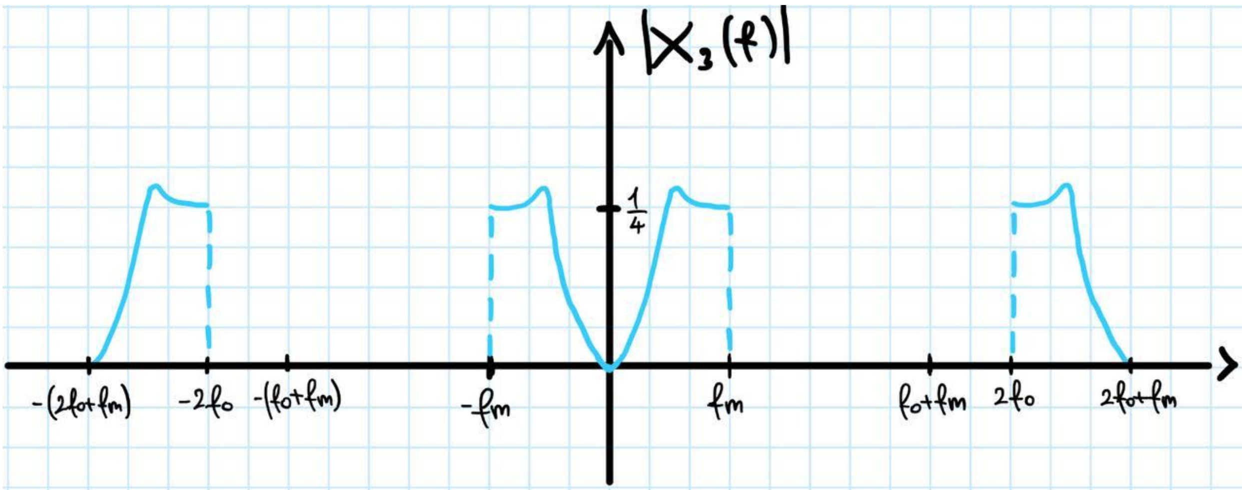


$x_3(t) = x_2(t) \cdot \cos[2\pi(f_0 + f_m)t]$

$X_3(f) = \mathfrak{F}[x_2(t)] * \mathfrak{F}[\cos[2\pi(f_0 + f_m)t]] =$

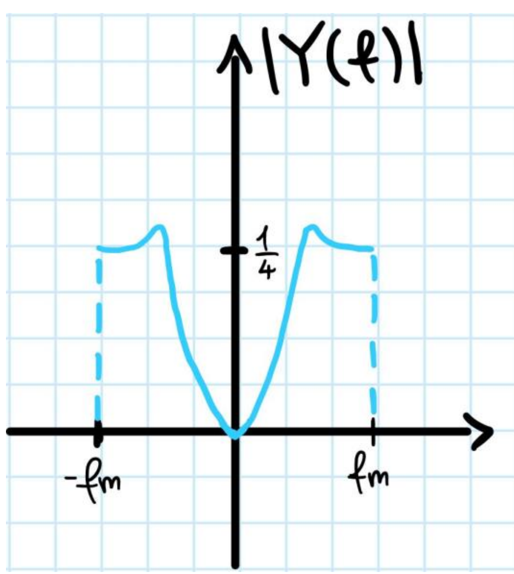
$$= X_2(f) * \left[\frac{1}{2}\left[\delta\big(f - (f_0 + f_m)\big) + \delta\big(f + (f_0 + f_m)\big)\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2} X_2(f) \cdot \left[\delta\big(f - (f_0 + f_m)\big) + \delta\big(f + (f_0 + f_m)\big)\right]$$



$y(t) = x_3(t) * \mathfrak{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right]$

$Y(f) = \mathfrak{F}[x_3(t)] \cdot \mathfrak{F}\left[\mathfrak{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right]\right] = X_3(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2f_m}\right)$



ESERCIZIO 34

Determinare la densità di probabilità del primo ordine della $w(t,\zeta)$ così definita:

DISEGNO

Nell'ipotesi che $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$ siano statisticamente indipendenti e uniformemente distribuiti in $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \prod\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \prod(x)$$

$$p_Y(y) = \prod(y)$$

Dato che $Z = X + Y$:

$$p_Z(z) = p_X * p_Y(z) = \prod(x) * \prod(y)(z) = tri(z)$$

FAI IL DISEGNO DELLA TRI

Poiché $w = z^2$:

FAI IL DISEGNO DELLA TRI AL QUADRATO

POI RISOLVI VEDENDO TRATTI COSTANTI E NON COSTANTI

ESERCIZIO 36 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie uniformemente distribuite nel cerchio di raggio unitario e centro nell'origine. Si determini la densità di probabilità della variabile aleatoria $Z = X^2 + Y^2$.

SOLUZIONE:

L'area del cerchio è pari a:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Noi sappiamo che, per la condizione di normalizzazione:

$$\int \int_A p_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Ovvero:

$$p_{XY}(x, y) \cdot A = 1$$

Dunque, la densità di probabilità congiunta è pari a:

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{A} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per definizione:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} \Pr(X^2 + Y^2 \leq z)$$

La regione dove $X^2 + Y^2 \leq z$ è il cerchio di raggio $\sqrt{z}$. Utilizzando le coordinate polari:

$$\rho = \sqrt{z}$$

$$\Pr(X^2 + Y^2 \leq z) \underset{z>0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) \cdot \rho\, d\theta\, d\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho \cdot 2\pi\, d\rho = 2 \int_0^{\sqrt{z}} \rho\, d\rho = 2 \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} = 2 \cdot \frac{z}{2} = z$$

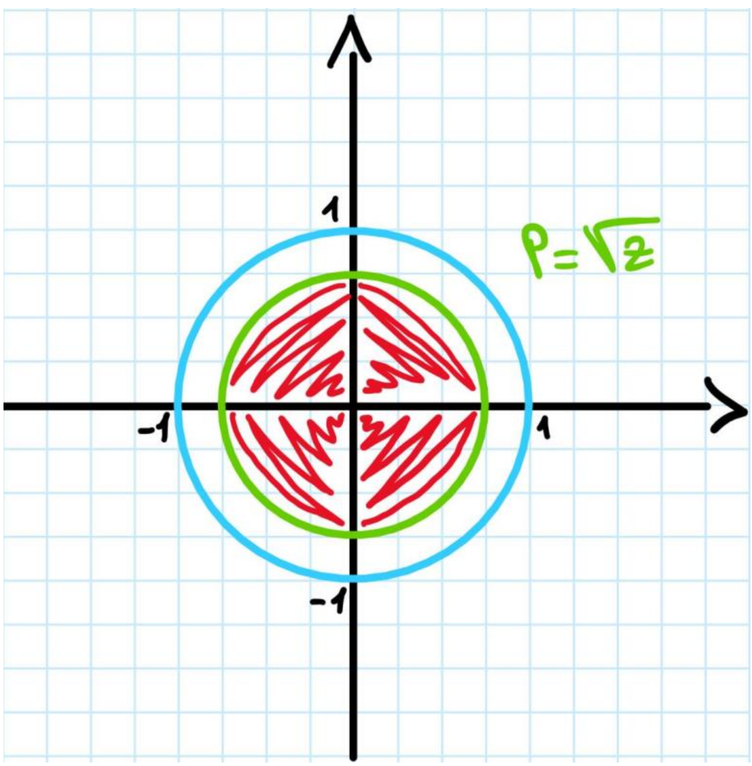
L'integrazione ha senso solo per valori maggiori di z perché solo in quel caso il cerchio $x^2 + y^2$ è non vuoto. Dunque:

$$P_Z(z) = 2\int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho = \begin{cases} z & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 1 & 0 < z < 1 \\ 0 & z \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 36 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X^2 + Y^2 \leq z)$:



$$\Pr(X^2 + Y^2 \leq z) = \frac{1}{\pi} \cdot A = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\pi\left(\sqrt{z}\right)^2\right] = \frac{1}{\pi} \cdot \pi z = z$$

A è l'area del cerchio di raggio $\sqrt{z}$.

ESERCIZIO 38

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare la densità del primo ordine del segnale sapendo che la densità di probabilità della variabile T è pari a $p_T(\alpha) = e^{-\alpha}u(\alpha)$.

SOLUZIONE:

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \leq x) = \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$\Pr(s(t,\zeta) = 1) = \Pr(\alpha < -2|t| \cup \alpha > 2|t|) = 1 - \Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|) =$$

$$= 1 - \Pr(s(t,\zeta) = 0)$$

$$\Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2|t|}^{2|t|} e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha = \quad \boxed{u(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}}$$

$$= \int_0^{2|t|} e^{-\alpha}\, d\alpha = 1 - e^{-2|t|}$$

Dunque:

$$\Pr(s(t,\zeta) = 0) = 1 - e^{-2|t|}$$

$$\Rightarrow \Pr(s(t,\zeta) = 1) = 1 - \left(1 - e^{-2|t|}\right) = e^{-2|t|}$$

$$p_{s(t)}(\alpha) = \left(1 - e^{-2|t|}\right) \cdot \delta(\alpha) + e^{-2|t|} \cdot \delta(\alpha - 1)$$

ESERCIZIO 39

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare il valor medio del segnale sapendo che la densità di probabilità della variabile T è pari a $p_T(\alpha) = e^{-\alpha}u(\alpha)$.

SOLUZIONE:

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il teorema della media afferma che:

$$m_y = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\, dx$$

Quindi:

$$\overline{s(t,T)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot p_T(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2|t|} e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha + \int_{2|t|}^{\infty} e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha =$$

$$\boxed{u(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}}$$

$$= 0 + \int_{\max(0,2|t|)}^{\infty} e^{-\alpha}\, d\alpha =$$

$$\boxed{\max(0,2|t|) = 2|t|}$$

$$= \int_{2|t|}^{\infty} e^{-\alpha}\, d\alpha = \left[-e^{-\alpha}\right]_{2|t|}^{\infty} = 0 + e^{-2|t|} = e^{-2|t|}$$

ESERCIZIO 40

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare il valor medio del segnale sapendo che T è uniformemente distribuita in $[0,1]$.

SOLUZIONE:

$$p_T(\alpha) = \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il teorema della media afferma che:

$$m_y = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\, dx$$

Quindi:

$$\overline{s(t,T)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot p_T(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2|t|} \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\, d\alpha + \int_{2|t|}^{\infty} \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\, d\alpha =$$

$$= 0 + \int_{\max(0,2|t|)}^{1} 1\, d\alpha = \qquad \boxed{\max(0,2|t|) = 2|t|}$$

$$= \int_{2|t|}^{1} 1\, d\alpha = \begin{cases} 1 - 2|t| & 2|t| < 1 \\ 0 & 2|t| \ge 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 41

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare la densità di probabilità del primo ordine del segnale sapendo che T è uniformemente distribuita in [0,1].

SOLUZIONE:

$$p_T(\alpha) = \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \leq x) = \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$\Pr(s(t,\zeta) = 1) = \Pr(\alpha < -2|t| \cup \alpha > 2|t|) = 1 - \Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|)$$
$$= 1 - \Pr(s(t,\zeta) = 0)$$

$$\Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2|t|}^{2|t|} \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) d\alpha =$$

$$= \int_0^{\min(2|t|,1)} 1\, d\alpha = \min(2|t|, 1)$$

Dunque:

$$\Pr(s(t,\zeta) = 0) = \min(2|t|, 1)$$

$$\Rightarrow \Pr(s(t,\zeta) = 1) = 1 - \min(2|t|, 1)$$

$$p_{s(t)}(\alpha) = \min(2|t|, 1) \cdot \delta(\alpha) + [1 - \min(2|t|, 1)] \cdot \delta(\alpha - 1) =$$

$$= \begin{cases} 2|t| \cdot \delta(\alpha) + (1 - 2|t|) \cdot \delta(\alpha - 1) & 2|t| < 1 \\ \delta(\alpha) & 2|t| \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 42

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare il valore quadratico medio del segnale sapendo che T è uniformemente distribuita in [0,1].

SOLUZIONE:

$$p_T(\alpha) = \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \le \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per definizione il valore quadratico medio di un segnale aleatorio è pari a:

$$\overline{s(t,T)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot p_{s(t)}(\alpha)\, d\alpha$$

Dobbiamo quindi calcolare dapprima la densità di probabilità del primo ordine $p_{s(t)}(\alpha)$, che è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \le x) = \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$\Pr(s(t,\zeta) = 1) = \Pr(\alpha < -2|t| \cup \alpha > 2|t|) = 1 - \Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|)$$
$$= 1 - \Pr(s(t,\zeta) = 0)$$

$$\Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2|t|}^{2|t|} \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) d\alpha =$$

$$= \int_0^{\min(2|t|,1)} 1\, d\alpha = \min(2|t|, 1)$$

Dunque:

$$\Pr(s(t,\zeta) = 0) = \min(2|t|, 1)$$

$$\Rightarrow \Pr(s(t,\zeta)=1) = 1-\min(2|t|,1)$$

$$p_{s(t)}(\alpha) = \min(2|t|,1)\cdot\delta(\alpha) + [1-\min(2|t|,1)]\cdot\delta(\alpha-1) =$$

$$= \begin{cases} 2|t|\cdot\delta(\alpha) + (1-2|t|)\cdot\delta(\alpha-1) & 2|t|<1 \\ \delta(\alpha) & 2|t|\geq 1 \end{cases}$$

A questo punto:

$$\overline{s(t,T)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot p_{s(t)}(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot [2|t|\cdot\delta(\alpha) + (1-2|t|)\cdot\delta(\alpha-1)]\, d\alpha & 2|t|<1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot \delta(\alpha)\, d\alpha & 2|t|\geq 1 \end{cases}$$

CASO $2|t|<1$:

$$\overline{s(t,T)^2} = 2|t|\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2\delta(\alpha) + (1-2|t|)\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2\delta(\alpha-1) =$$

Per le proprietà della distribuzione delta di Dirac

$$= 2|t|\cdot 0^2 + (1-2|t|)\cdot 1^2 = 1-2|t|$$

CASO $2|t|\geq 1$:

$$\overline{s(t,T)^2} = 0^2 = 0$$

Ovvero, riassumendo:

$$\overline{s(t,T)^2} = \begin{cases} 1-2|t| & 2|t|<1 \\ 0 & 2|t|\geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 43

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare il valore quadratico medio del segnale sapendo che la densità di probabilità della variabile T è pari a $p_T(\alpha) = e^{-\alpha}u(\alpha)$.

SOLUZIONE:

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx}\Pr(s(t) \leq x) = \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$\Pr(s(t,\zeta) = 1) = \Pr(\alpha < -2|t| \cup \alpha > 2|t|) = 1 - \Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|)$$
$$= 1 - \Pr(s(t,\zeta) = 0)$$

$$\Pr(\alpha > -2|t| \cap \alpha < 2|t|) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(\alpha)\, d\alpha = \int_{-2|t|}^{2|t|} e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha = \quad \boxed{u(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}}$$

$$= \int_0^{2|t|} e^{-\alpha}\, d\alpha = 1 - e^{-2|t|}$$

Dunque:

$$\Pr(s(t,\zeta) = 0) = 1 - e^{-2|t|}$$

$$\Rightarrow \Pr(s(t,\zeta) = 1) = 1 - \left(1 - e^{-2|t|}\right) = e^{-2|t|}$$

$$p_{s(t)}(\alpha) = \left(1 - e^{-2|t|}\right) \cdot \delta(\alpha) + e^{-2|t|} \cdot \delta(\alpha - 1)$$

A questo punto:

$$\overline{s(t,T)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot p_{s(t)}(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \cdot \left[\left(1 - e^{-2|t|}\right) \cdot \delta(\alpha) + e^{-2|t|} \cdot \delta(\alpha - 1)\right] d\alpha =$$

$$= \left(1 - e^{-2|t|}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \delta(\alpha)\, d\alpha + e^{-2|t|} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \delta(\alpha - 1)\, d\alpha$$

Per le proprietà della distribuzione delta di Dirac

$$= \left(1 - e^{-2|t|}\right) \cdot 0^2 + e^{-2|t|} \cdot 1^2 =$$

$$= e^{-2|t|}$$

ESERCIZIO 44

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale sapendo che T è uniformemente distribuita in $[0,1]$.

SOLUZIONE:

$$p_T(\alpha) = \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & 0 < \alpha < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per definizione la funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio è pari a:

$$R_s(t_1,t_2) = \overline{s^*(t_1,T)s(t_2,T)}$$

Il teorema della media afferma che:

$$m_y = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\, dx$$

Quindi:

$$\overline{s^*(t_1,T)s(t_2,T)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right) \cdot p_T(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) d\alpha =$$

Gli estremi di integrazione si ottengono dall'intersezione dei supporti di $\sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right)$, $\sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right)$ e $\sqcap\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$:

$$= \int_{\max(2|t_1|,2|t_2|)}^{1} 1\, d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 1 - \max(2|t_1|, 2|t_2|) & \max(2|t_1|, 2|t_2|) < 1 \\ 0 & \max(2|t_1|, 2|t_2|) \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 45

Sia $s(t,T) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right)$ un segnale aleatorio che dipende dalla variabile aleatoria T. Calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale sapendo che la densità di probabilità della variabile T è pari a $p_T(\alpha) = e^{-\alpha}u(\alpha)$.

SOLUZIONE:

$$\sqcap\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \begin{cases} 1 & \left|\frac{t}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{|\alpha|}{2} \\ 0 & altrove \end{cases} = \begin{cases} 1 & |\alpha| > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \alpha < -2|t| \vee \alpha > 2|t| \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per definizione la funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio è pari a:

$$R_s(t_1,t_2) = \overline{s^*(t_1,T)s(t_2,T)}$$

Il teorema della media afferma che:

$$m_y = \overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x)\, dx$$

Quindi:

$$\overline{s^*(t_1,T)s(t_2,T)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right) \cdot p_T(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right) \cdot e^{-\alpha}u(\alpha)\, d\alpha =$$

Gli estremi di integrazione si ottengono dall'intersezione dei supporti di $\sqcap\left(\frac{t_1}{\alpha}\right)$, $\sqcap\left(\frac{t_2}{\alpha}\right)$ e $u(\alpha)$:

$$= \int_{\max(2|t_1|,2|t_2|)}^{\infty} e^{-\alpha}\, d\alpha = e^{-\max(2|t_1|,2|t_2|)}$$

ESERCIZIO 46 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie statisticamente indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$, calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{X|X^2<Y}(x)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \sqcap\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \sqcap\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \sqcap\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \sqcap\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqcap\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_{X|X^2<Y}(x) = \frac{d}{dx} P_X(x \mid X^2 < Y) = \frac{d}{dx} \Pr(X \le x \mid X^2 < Y) = \quad \boxed{\text{Formula di Bayes}}$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \le x \cap X^2 < Y)}{\Pr(X^2 < Y)} = \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \le x \cap Y > X^2)}{\Pr(Y > X^2)}$$

In cui:

$$\Pr(Y > X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^1 dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 1 - x^2\, dx = [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Proseguendo:

$$\Pr(X \le x \cap Y > X^2) = \int_{-\infty}^{x} \int_{x^2}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^x \int_{x^2}^1 1\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^x 1 - x^2\, dx$$

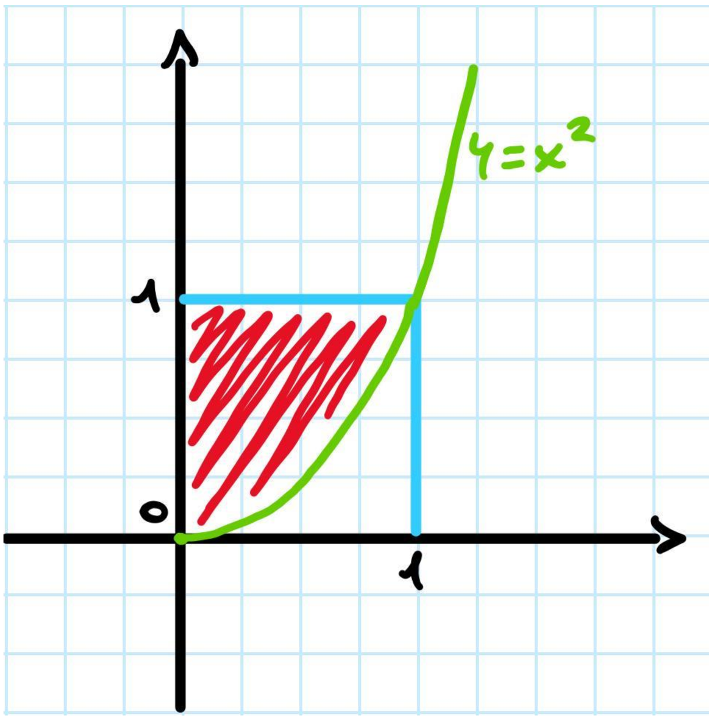
Dunque:

$$P_{X|X^2<Y}(x) = \frac{\int_0^x 1 - x^2\, dx}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\int_0^x 1 - x^2\, dx = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$p_{X|X^2<Y}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{X|X^2<Y}(x)\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 46 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(Y > X^2)$:

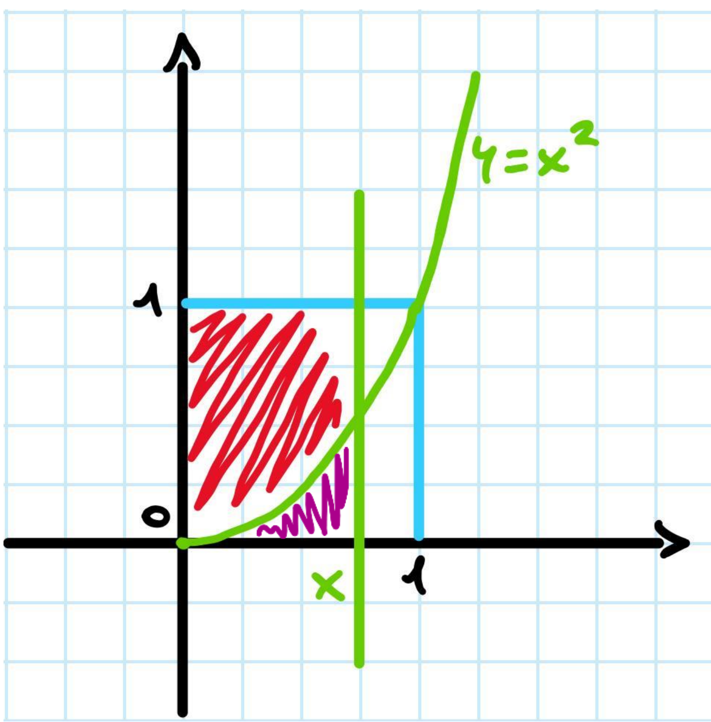


$$\Pr(Y > X^2) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1\right) = \frac{2}{3}$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà calcolata tramite il teorema di Archimede considerando il rettangolo di base 1 e altezza 1.

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X \leq x \cap Y > X^2)$:



$\Pr(X \leq x \cap Y > X^2)$ si calcola considerando la differenza tra l'area del rettangolo di base x e altezza 1 e l'area sottesa dalla curva. L'area sottesa dalla curva si calcola con il teorema di Archimede considerando il rettangolo di base x e altezza x^2:

$$\Pr(X \leq x \cap Y > X^2) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left[x - \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^2\right)\right] = x - \frac{1}{3}x^3$$

ESERCIZIO 47 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie statisticamente indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$, calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{X|Y<1-X^2}(x)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_{X|Y<1-X^2}(x) = \frac{d}{dx} P_X(x \mid Y < 1 - X^2) = \frac{d}{dx} \Pr(X \leq x \mid Y < 1 - X^2) = \boxed{\text{Formula di Bayes}}$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \leq x \cap Y < 1 - X^2)}{\Pr(Y < 1 - X^2)}$$

In cui:

$$\Pr(Y < 1 - X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 1 - x^2\, dx = [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Proseguendo:

$$\Pr(X \leq x \cap Y < 1 - X^2) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{1-x^2} p_{XY}(x,y)\, dy\, dx = \int_0^x \int_0^{1-x^2} 1\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^x 1 - x^2\, dx$$

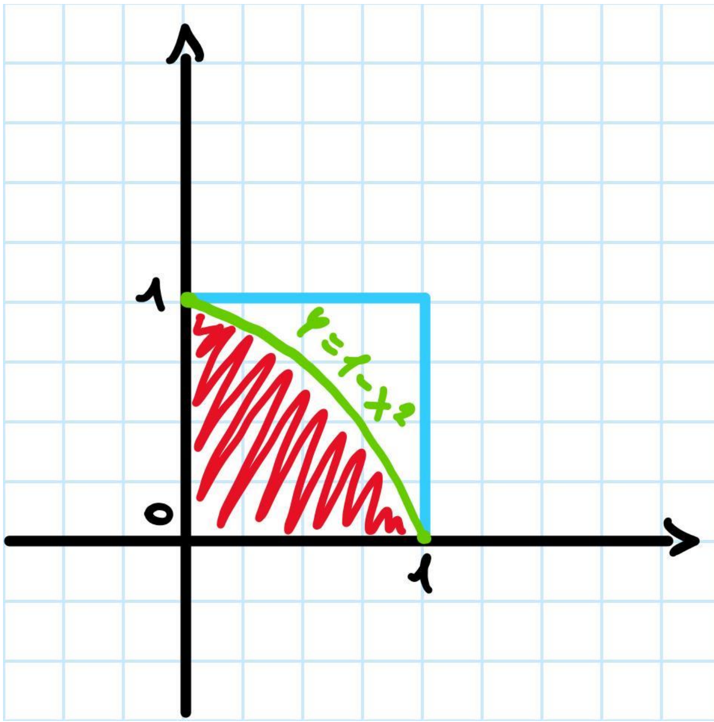
Dunque:

$$P_{X|Y<1-X^2}(x) = \frac{\int_0^x 1 - x^2 \, dx}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\int_0^x 1 - x^2 \, dx = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$p_{X|Y<1-X^2}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{X|Y<1-X^2}(x)\right) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 47 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(Y < 1 - X^2)$:

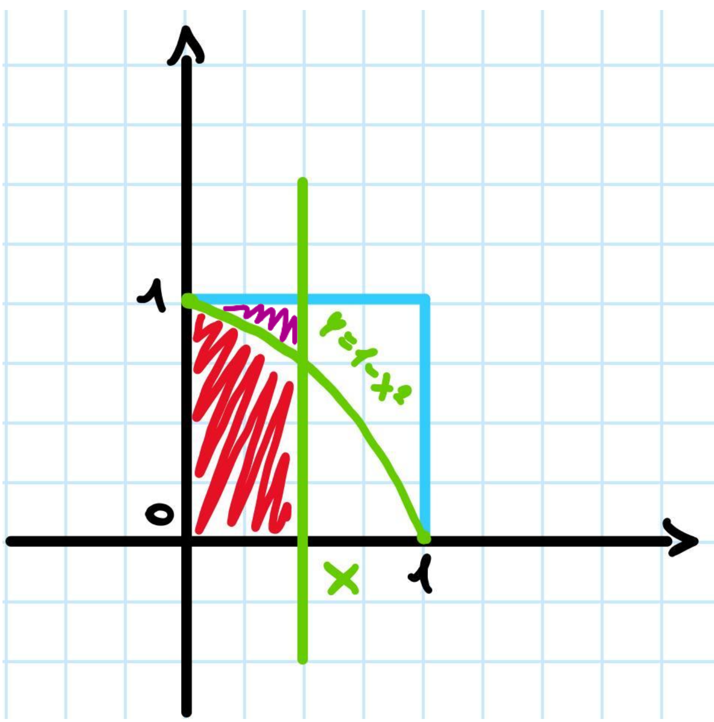


$$\Pr(Y < 1 - X^2) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1\right) = \frac{2}{3}$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso sarà calcolata tramite il teorema di Archimede considerando il rettangolo di base 1 e altezza 1.

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X \leq x \cap Y < 1 - X^2)$:



$\Pr(X \leq x \cap Y < 1 - X^2)$ si calcola considerando la differenza tra l'area del rettangolo di base x e altezza 1 e l'area al di sopra della curva. L'area al di sopra della curva si calcola con il teorema di Archimede considerando il rettangolo di base x e altezza x^2:

$$\Pr(X \leq x \cap Y > X^2) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left[x - \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot x^2\right)\right] = x - \frac{1}{3}x^3$$

ESERCIZIO 48 (RISOLUZIONE ANALITICA)

Siano X e Y due variabili aleatorie statisticamente indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$, calcolare la densità di probabilità di $Z = \max(X, Y)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} \Pr(\max(X, Y) \leq z) = \frac{d}{dz} \Pr(X \leq z \cap Y \leq z)$$

In cui:

$$\Pr(X \leq z \cap Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} p_{XY}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{0}^{z} \int_{0}^{z} 1\, dx\, dy = \int_{0}^{z} z\ dy = z^2$$

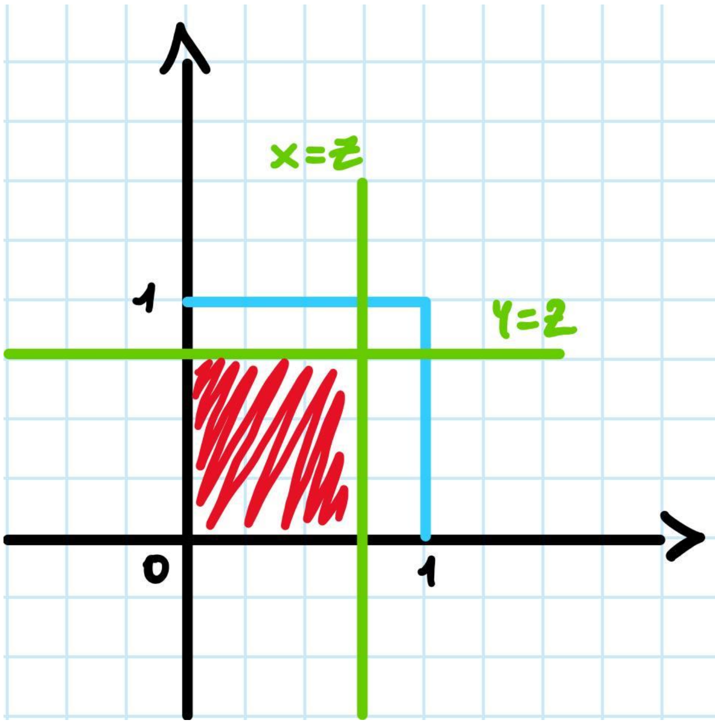
Dunque:

$$P_Z(z) = \int_{0}^{z} z\ dy = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ z^2 & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 2z & 0 < z < 1 \\ 0 & z \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 48 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X \leq z \cap Y \leq z)$:



$$\Pr(X \leq z \cap Y \leq z) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A = 1 \cdot (z \cdot z) = z^2$$

A è l'area del quadrato di base z e altezza z.

ESERCIZIO 49

Siano X e Y due variabili aleatorie statisticamente indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,1]$, calcolare la densità di probabilità di $Z = \min(X, Y)$.

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{a_x + b_x}{2}}{b_x - a_x}\right) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} \Pr(\min(X, Y) \leq z) = \frac{d}{dz} \Pr(X \leq z \cup Y \leq z) =$$

$$= \frac{d}{dz}[1 - \Pr(X > z \cap Y > z)]$$

In cui:

$$\Pr(X > z \cap Y > z) = \int_z^1 \int_z^1 p_{XY}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_z^1 \int_z^1 1\, dx\, dy = \int_z^1 1 - z\ dy = (1 - z)^2$$

Dunque:

$$P_Z(z) = 1 - \int_z^1 1 - z\ dy = \begin{cases} 1 - 1 & z \leq 0 \\ 1 - (1 - z)^2 & 0 < z < 1 \\ 1 - 0 & z \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ -z^2 + 2z & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases}$$

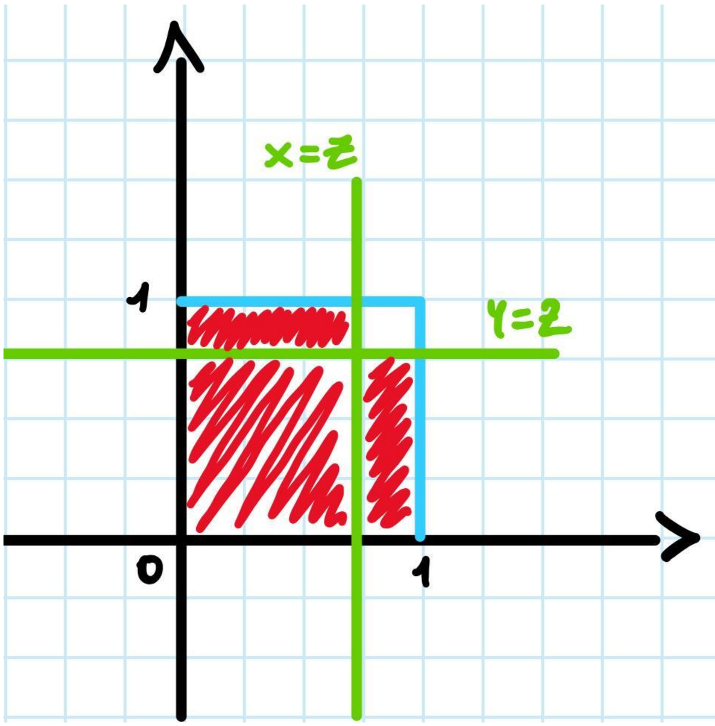
$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 2(1 - z) & 0 < z < 1 \\ 0 & z \geq 1 \end{cases}$$

Dato che le due variabili aleatorie sono statisticamente indipendenti, vale anche:

$$p_Z(z) = p_X(z) P_Y(z) + P_X(z) p_y(z)$$

ESERCIZIO 49 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X \leq z \cup Y \leq z)$:



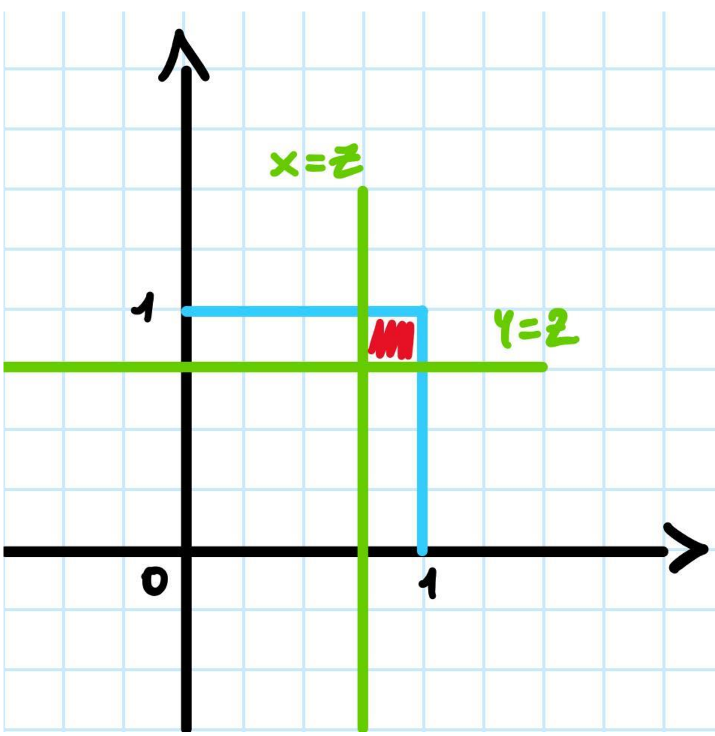
$$\Pr(X \leq z \cup Y \leq z) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot [z \cdot (1 - z) + z \cdot z + (1 - z) \cdot z] =$$

$$= z - z^2 + z^2 + z - z^2 = 2z - z^2$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso è pari alla somma delle aree dei tre rettangoli di cui il primo ha base z e altezza $1 - z$, il secondo ha base z e altezza z e il terzo ha base $1 - z$ e altezza z.

O, analogamente, disegniamo il grafico per trovare $\Pr(X > z \cap Y > z)$:



$$\Pr(X > z \cap Y > z) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot [(1 - z) \cdot (1 - z)] = (1 - z)^2$$

Dove A è l'area della porzione considerata, che in questo caso è al quadrato di base $1 - z$ e altezza $1 - z$.

ESERCIZIO 50

Siano X e Y due variabili aleatorie gaussiane, dimostrare che la loro somma è una variabile gaussiana.

SOLUZIONE:

Dato che X e Y sono gaussiane, risulta:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Supponendo che X e Y siano statisticamente indipendenti:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$\begin{aligned} P_Z(z) &= \Pr(Z \leq z) = \Pr(X + Y \leq z) = \Pr(Y \leq z - X) = \\ &= \Pr(X < \infty \cap Y \leq z - X) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_{XY}(x, y)\, dy\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_X(x) \cdot p_Y(y)\, dy\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot \left[\int_{-\infty}^{z-x} p_Y(y)\, dy\right] dx \end{aligned}$$

Quindi:

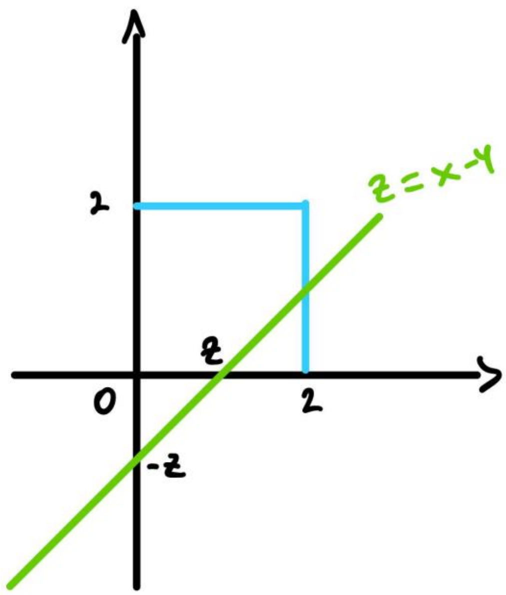
$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \frac{d}{dz} P_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot \frac{d}{dz}\left[\int_{-\infty}^{z-x} p_Y(y)\, dy\right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z - x)\, dx = \\ &= p_X * p_Y(z) \end{aligned}$$

Dato che la convoluzione è una trasformazione lineare e le densità di probabilità convolvende sono gaussiane, si può affermare che la loro convoluzione $p_Z(z)$ è ancora gaussiana.

ESERCIZIO 51

Siano X e Y due variabili aleatorie statisticamente indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,2] \times [0,2]$, calcolare il valore quadratico medio della differenza tra X e Y.

SOLUZIONE:



Per $Z = X + Y$ invece vale:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)\, dx = p_X * p_Y(z)$$

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\sqcap\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{2}\sqcap\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, vale:

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \frac{1}{4}\sqcap\left(\frac{x-1}{2}\right) \cdot \sqcap\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

Calcoliamo il valore quadratico medio:

$$\overline{(X-Y)^2} = \overline{X^2} + \overline{Y^2} - 2\overline{XY} = \overline{X^2} + \overline{Y^2} - 2\bar{X}\bar{Y}$$

Poiché X e Y sono statisticamente indipendenti, il valor medio del loro prodotto è pari al prodotto dei loro valori medi

In cui:

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot p_Y(y)\, dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 y^2\, dy = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y)\, dy = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 y\, dy = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Dunque:

$$\overline{(X-Y)^2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

Analogamente, calcolandolo in modo formale:

$$\begin{aligned}
\overline{(X-Y)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 - 2xy) \cdot p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_{XY}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot p_{XY}(x,y)\, dy\, dx \\
&\quad - 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot p_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 x^2\, dx\, dy + \frac{1}{4}\int_0^2\int_0^2 y^2\, dy\, dx - \frac{1}{2}\int_0^2 y \int_0^2 x\, dx\, dy = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{8}{3}\, dy + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{8}{3}\, dx - \frac{1}{2}\int_0^2 2y\, dy = \\
&= \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 - 1 \cdot 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO BONUS 1 (RISOLUZIONE ANALITICA SCONSIGLIATA)

Siano X e Y due variabili aleatorie uniformemente distribuite in $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, calcolare la densità di probabilità di $Z=\min\left\{\frac{|X|}{2},2|Y|\right\}$.

SOLUZIONE:

DISCLAIMER: Si tenga presente che, poiché l'esercizio è abbastanza complicato, la risoluzione analitica è stata dedotta da quella grafica. Dunque, conviene direttamente risolverlo per via grafica.

$p_X(x)=\prod(x)$

$p_Y(y)=\prod(y)$

$p_{XY}(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)=\prod(x)\cdot\prod(y)$

$$P_Z(z)=\Pr(Z\le z)=\Pr\left(\min\left\{\frac{|X|}{2},2|Y|\right\}\le z\right)=\Pr\left(\frac{|X|}{2}\le z\cup 2|Y|\le z\right)=$$

$$=1-\Pr\left(\frac{|X|}{2}>z\cap 2|Y|>z\right)$$

In cui:

$$\Pr\left(\frac{|X|}{2}>z\cap 2|Y|>z\right)=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{-2z}p_{XY}(x,y)\,dx\,dy+\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{-2z}p_{XY}(x,y)\,dx\,dy+\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}}\int_{2z}^{\frac{1}{2}}p_{XY}(x,y)\,dx\,dy+\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{2z}^{\frac{1}{2}}p_{XY}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}}-2z+\frac{1}{2}\,dy+\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}}-2z+\frac{1}{2}\,dy+\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}}\frac{1}{2}-2z\,dy+\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}-2z\,dy=$$

$$=2\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}}\frac{1}{2}-2z\,dy+2\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}-2z\,dy=$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}} 1\, dy - 2z \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{z}{2}} 1\, dy \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dy - 2z \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dy \right) =$$

$$= \left(-\frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right) - 4z \cdot \left(-\frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2} \right) - 4z \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2} \right) =$$

$$= -\frac{z}{2} + \frac{1}{2} + 2z^2 - 2z + \frac{1}{2} - \frac{z}{2} - 2z + 2z^2 = 4z^2 - 5z + 1$$

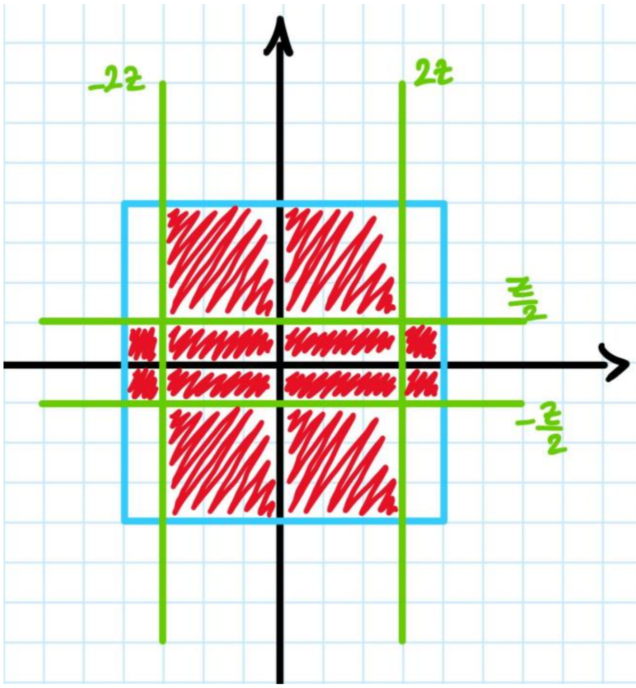
Dunque:

$$P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 - (4z^2 - 5z + 1) & 0 < z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ -4z^2 + 5z & 0 < z < \frac{1}{4} \\ 1 & z \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ -8z + 5 & 0 < z < \frac{1}{4} \\ 0 & z \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

ESERCIZIO BONUS 1 (RISOLUZIONE GRAFICA)

Disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(\frac{|X|}{2} \leq z \cup 2|Y| \leq z\right)$:



$$\Pr\left(\frac{|X|}{2} \leq z \cup 2|Y| \leq z\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

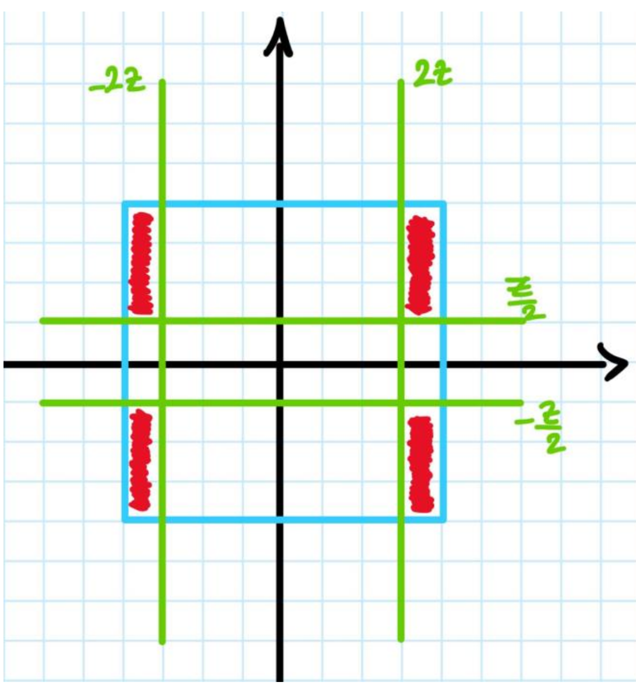
$$= 1 \cdot \left[4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - 2z\right) \cdot \frac{z}{2}\right) + 4 \cdot \left(2z \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\right) + 4 \cdot \left(2z \cdot \frac{z}{2}\right)\right] =$$

$$= z - 4z^2 + 4z - 4z^2 + 4z^2 = -4z^2 + 5z$$

$$\frac{|X|}{2} \leq z \Rightarrow -2z \leq x \leq 2z$$

$$2|Y| \leq z \Rightarrow -\frac{z}{2} \leq y \leq \frac{z}{2}$$

O, analogamente, disegniamo il grafico per trovare $\Pr\left(\frac{|X|}{2} > z \cap 2|Y| > z\right)$:



$$\Pr\left(\frac{|X|}{2} > z \cap 2|Y| > z\right) = \frac{1}{(b_x - a_x)(b_y - a_y)} \cdot A =$$

$$= 1 \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{1}{2} - 2z\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2}\right)\right] = 1 - z - 4z + 4z^2 =$$

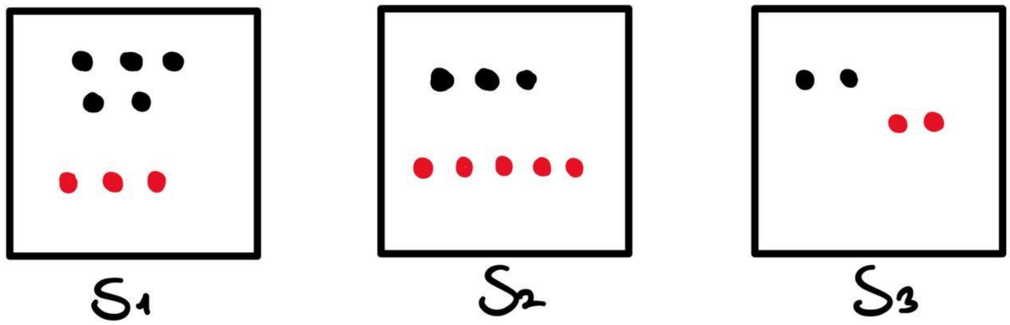
$$= 1 - 5z + 4z^2$$

$$\frac{|X|}{2} > z \Rightarrow x < -2z \wedge x > 2z$$

$$2|Y| > z \Rightarrow y < -\frac{z}{2} \wedge y > \frac{z}{2}$$

ESERCIZIO BONUS 2

Date le tre seguenti scatole di biglie:



Se viene pescata una biglia nera, qual è la probabilità che questa provenga dalla seconda scatola?

SOLUZIONE:

La probabilità di pescare dalle tre scatole è la stessa:

$$\Pr(S_1) + \Pr(S_2) + \Pr(S_3) = 1$$

$$\Rightarrow \Pr(S_1) = \Pr(S_2) = \Pr(S_3) = \frac{1}{3}$$

L'esercizio consiste nel calcolo di una probabilità condizionata attraverso la formula di Bayes:

$$\Pr(E_1|E_2) = \frac{\Pr(E_2|E_1) \cdot \Pr(E_1)}{\Pr(E_2)}$$

Nel nostro caso:

$$\Pr(S_2|N) = \frac{\Pr(N|S_2) \cdot \Pr(S_2)}{\Pr(N)}$$

La probabilità che la biglia sia pescata dalla seconda scatola è pari a:

$$\Pr(S_2) = \frac{1}{3}$$

La probabilità che la biglia pescata sia nera si ricava tramite il teorema della probabilità totale:

$$\Pr(N) = \sum_{i=1}^{3} \Pr(N|S_i) \cdot \Pr(S_i) =$$

$$= \Pr(N|S_1) \cdot \Pr(S_1) + \Pr(N|S_2) \cdot \Pr(S_2) + \Pr(N|S_3) \cdot \Pr(S_3) =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

La probabilità che la biglia pescata sia nera condizionata al fatto che sia pescata dalla seconda scatola è pari a:

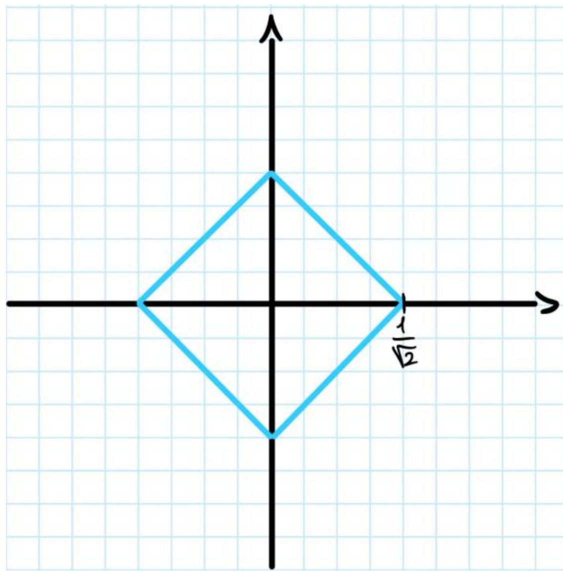
$$\Pr(N|S_2) = \frac{n.\, biglie\ nere\ della\ seconda\ scatola}{n.\, totale\ di\ biglie\ della\ seconda\ scatola} = \frac{3}{8}$$

Dunque:

$$\Pr(S_2|N) = \frac{\Pr(N|S_2) \cdot \Pr(S_2)}{\Pr(N)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{24} \cdot 2 = \frac{3}{12} \cong 25\%$$

ESERCIZIO BONUS 3

Calcolare la densità di probabilità di $Z = \max\{|X|, |Y|\}$.



SOLUZIONE:

Per trovare il lato del rombo usiamo il teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Ricordiamo che, per la condizione di normalizzazione:

$$\int \int_D p_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

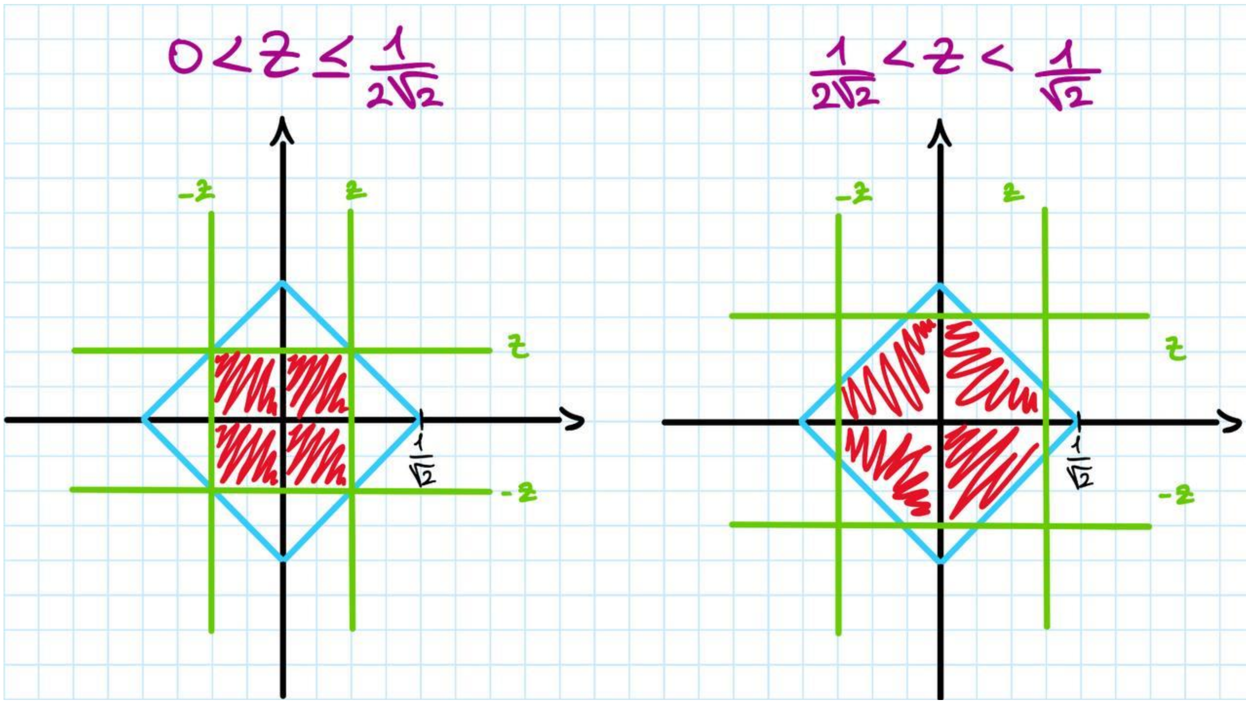
Dato che $p_{XY}(x, y) = c$ è costante nel dominio di integrazione (ovvero l'area del rombo), allora risulta:

$$c \cdot A = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

Dunque:

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| + |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$P_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(\max\{|X|, |Y|\} \leq z) = \Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z)$$



Ragioniamo graficamente.

CASO $z \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Il rombo sarà interamente inscritto nel quadrato, dunque:

$\Pr(|X| \le z \cap |Y| \le z) = 1$

CASO $0 < z \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$ è la metà della diagonale del rombo, il quadrato inscritto nel rombo avrà lato $2z$ e quindi:

$\Pr(|X| \le z \cap |Y| \le z) = p_{XY}(x, y) \cdot A = 1 \cdot 2z \cdot 2z = 4z^2$

CASO $\frac{1}{2\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Non avremo più un quadrato inscritto dentro il rombo, e dovremo calcolare l'area diversamente. In questo caso conviene utilizzare la probabilità complementare, che ci porterà al calcolo dell'area di 4 triangoli di base $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right)$ e altezza $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right)$:

$\Pr(|X| \le z \cap |Y| \le z) = 1 - \Pr(|X| > z \cup |Y| > z) =$

$$= 1 - 1 \cdot 4 \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right) \cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right)}{2}\right] =$$

$$= 1 - 1 \cdot 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - z\right)\right] =$$

$$= 1 - 4 \cdot \left[z^2 - \frac{2z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 1 - 4z^2 + \frac{8z}{\sqrt{2}} - 2 =$$

$$= -4z^2 + \frac{8z}{\sqrt{2}} - 1$$

CASO $\boldsymbol{z \leq 0}$:

$\Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z) = 0$

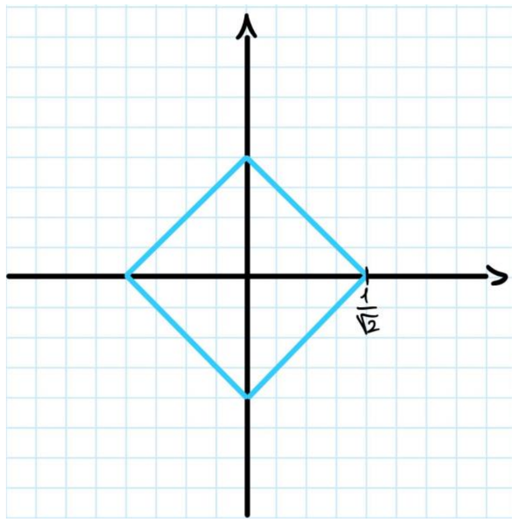
Ricapitolando:

$$\Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z) = \begin{cases} 1 & z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 4z^2 & 0 < z \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -4z^2 + \frac{8z}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 8z & 0 < z \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -8z + \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO BONUS 4

Calcolare la densità di probabilità di $Z = \min\{|X|, |Y|\}$.



SOLUZIONE:

Per trovare il lato del rombo usiamo il teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Ricordiamo che, per la condizione di normalizzazione:

$$\int\int_D p_{XY}(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Dato che $p_{XY}(x, y) = c$ è costante nel dominio di integrazione (ovvero l'area del rombo), allora risulta:

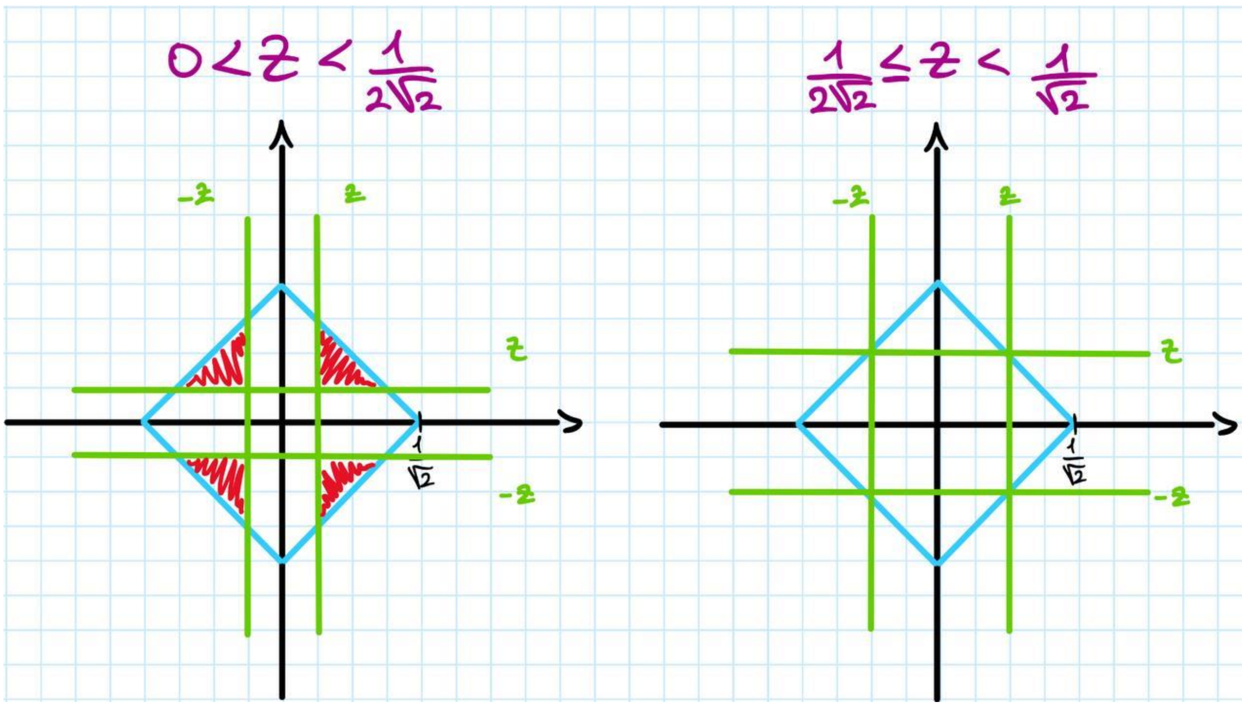
$$c \cdot A = 1 \Rightarrow c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

Dunque:

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| + |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$P_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(\min\{|X|, |Y|\} \leq z) = \Pr(|X| \leq z \cup |Y| \leq z) =$$

$$= 1 - \Pr(|X| > z \cap |Y| > z)$$



Ragioniamo graficamente.

CASO $\boldsymbol{z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$:

$$\Pr(|X| \leq z \cup |Y| \leq z) = 1 - \Pr(|X| > z \cap |Y| > z) = 1 - 0 = 1$$

CASO $\boldsymbol{0 < z < \frac{1}{2\sqrt{2}}}$:

Le aree interessate sono quelle dei quattro triangoli di base e altezza $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2z\right)$:

$$\Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z) = 1 - \Pr(|X| > z \cap |Y| > z) =$$

$$= 1 - 1 \cdot 4 \cdot \left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2z\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2z\right)}{2}\right] =$$

$$= 1 - 4 \cdot \left[\frac{4z^2 - 2\sqrt{2}z + \frac{1}{2}}{2}\right] =$$

$$= 1 - 8z^2 + 4\sqrt{2}z - 1 =$$

$$= -8z^2 + 4\sqrt{2}z$$

CASO $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq z < \frac{1}{\sqrt{2}}}$:

Pari al caso $z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

CASO $\boldsymbol{z \leq 0}$:

$$\Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z) = 1 - \Pr(|X| > z \cap |Y| > z) = 1 - 1 = 0$$

Ricapitolando:

$$\Pr(|X| \leq z \cap |Y| \leq z) = \begin{cases} 1 & z \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -8z^2 + 4\sqrt{2}z & 0 < z < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leq z < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -16z + 4\sqrt{2} & 0 < z < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leq z < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO BONUS 5

Si determini la densità di probabilità di un processo gaussiano con media nulla fino al secondo ordine avente funzione di autocorrelazione:

$$R_s(\tau) = Tsinc(fT)$$

SOLUZIONE:

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = K \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{m})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{m})} = \qquad \boxed{m = 0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x})^T \Sigma^{-1}(\vec{x})}$$

Σ è la matrice delle covarianze e si costruisce a partire dalla funzione di autocorrelazione:

$$\Sigma = R_s(t_i - t_j) = Tsinc\left(f\left(t_i - t_j\right)T\right)$$

NON COMPLETATO

ESERCIZIO BONUS 6

Paradosso del compleanno

Qual è il numero minimo di persone necessario affinché la probabilità che due persone facciano il compleanno lo stesso giorno superi il 50%? Ipotizzare che i giorni di nascita siano uniformemente distribuiti e che non esistano gli anni bisestili.

SOLUZIONE:

Possiamo ragionare in termini di probabilità complementare, calcolando la probabilità che N persone facciano il compleanno in giorni diversi trovando il valore di N in corrispondenza del quale questa probabilità sia inferiore al 50%.

Calcoliamo dapprima la probabilità che due persone facciano il compleanno in giorni diversi. Supponiamo che il primo individuo possa avere il compleanno in uno qualsiasi dei 365 giorni dell'anno (P_1), risulta:

$$\Pr(P_1) = \frac{365}{365} = 1$$

Se la seconda persona non fa il compleanno nello stesso giorno del primo, lo farà in uno degli altri 364 giorni disponibili e, dato che tutti i giorni sono equiprobabili, la probabilità che il secondo faccia il compleanno in un giorno diverso da quello del primo è pari a $\frac{364}{365}$:

$$\Pr(P_2|P_1) = \frac{\Pr(P_1 \cap P_2)}{\Pr(P_1)} = \frac{\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365}}{1} = \frac{364}{365}$$

Se reiteriamo il ragionamento calcolando la probabilità che tre persone facciano il compleanno in giorni diversi, dobbiamo scrivere:

$$\Pr(P_3|P_1 \cap P_2) = \frac{\Pr((P_1 \cap P_2) \cap P_3)}{\Pr(P_3)} = \frac{\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}}{1} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$$

Generalizzando il ragionamento a N persone:

$$\Pr(P_N|N\ giorni\ distinti) = \frac{365 \cdot (365-1) \cdot (365-2) \cdot \ldots \cdot \big(365-(N-1)\big)}{365^N} =$$

$$= \frac{365!}{(365-N)!} \cdot \frac{1}{365^N} = \binom{365}{N} \cdot \frac{N!}{365^N}$$

Il risultato di quest'ultima espressione si può ottenere con una calcolatrice che permetta di calcolare il fattore binomiale (la prima espressione può essere calcolata usando i logaritmi per evitare problemi numerici). Si trova che per $N = 22$ la probabilità che tutti i compleanni siano in giorni distinti è 0.5243, mentre per $N = 23$ risulta 0.4927. Per rispondere alla domanda dell'esercizio, il numero minimo di persone necessario affinché la probabilità che due persone facciano il compleanno lo stesso giorno superi il 50% è pari a $N = 23$, infatti in questo caso la probabilità corrisponde a $1 - 0.4927 = 0{,}5073 = 50{,}73\% > 50\%$.

ESERCIZIO BONUS 7

Si parli dell'integrazione alla Lebesgue.

SOLUZIONE:

Sia data una funzione f appartenente all'insieme delle funzioni limitate definite su un intervallo chiuso e limitato $A = [a, b]$. Per una tale funzione vale:

$$f(A) \subseteq [m, M]$$

Con m ed M rispettivamente estremo inferiore e superiore della funzione considerata.

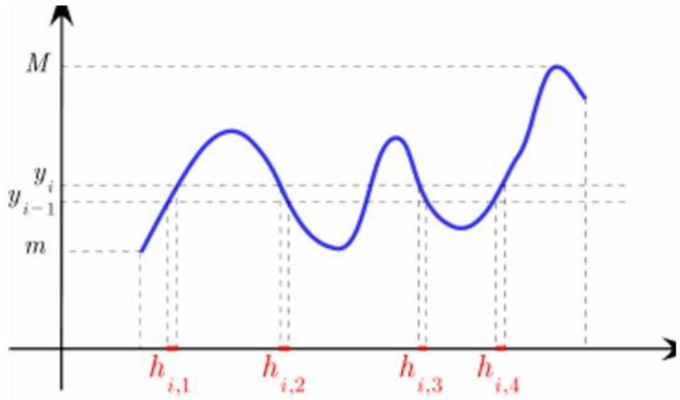
Si consideri, nel medesimo insieme, un sottoinsieme costituito da funzioni a valori non negativi, tali che, comunque scelto un intervallo $I = [\alpha, \beta] \subseteq [m, M]$, l'immagine inversa dell'insieme in questione secondo f, ovvero l'insieme $f^{-1}(I)$ dei punti $x \in A$ per cui risulta $a \leq f(x) \leq \beta$, sia costituito dall'unione di un numero finito di intervalli chiusi a due a due disgiunti.

Per integrare la funzione f secondo Lebesgue, non si scompone l'intervallo $[a, b]$ (come avveniva per Riemann), bensì l'intervallo $[m, M]$ in N intervalli del tipo $I_i =]y_{i-1}, y_i]$. Poiché ovviamente $f^{-1}(I)$ è costituito da un numero finito n_i di intervalli disgiunti contenuti in $[a, b]$, indicando con $h_{i,j}$ la lunghezza del j-esimo di tali intervalli si possono definire le seguenti quantità:

$$s_L = \sum_{i=1}^{N} y_{i-1} \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$$

$$S_L = \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$$

Tali che $m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{N-1} < y_N = M$. Le precedenti sono dette rispettivamente somme inferiori e superiori di Lebesgue.



Al variare della scelta di I_i vengono generate le due classi $\{s_L\}$ e $\{S_L\}$.
Scelto un piccolo $\varepsilon > 0$, si può sempre verificare che:

$$\max\{I_i\} = \max\{y_i - y_{i-1}\} < \varepsilon \quad 1 \leq i \leq N$$

Ovvero che la misura del più ampio degli intervalli I_i sia minore di una piccola quantità positiva scelta arbitrariamente.
Dunque:

$$S_L - s_L = \sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{i-1})\sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = \varepsilon \cdot (b-a)$$

Il che implica che la differenza tra S_L ed s_L può essere resa piccola quanto si vuole.
Poiché $\{s_L\}$ e $\{S_L\}$ sono separate, ovvero ogni elemento della classe $\{S_L\}$ è maggiore o uguale a qualsiasi elemento della classe $\{s_L\}$, la relazione $S_L - s_L < \varepsilon \cdot (b-a)$ implica che le due classi $\{S_L\}$ e $\{s_L\}$ si tocchino, ossia che siano contigue nel limite.
Si definisce quindi l'integrale alla Lebesgue di una funzione come l'**elemento di separazione** di queste due classi. In altre parole, l'integrale è il valore unico che separa le somme superiori dalle somme inferiori quando queste si avvicinano sempre di più.

La classe delle funzioni integrabili alla Lebesgue contiene quella delle funzioni integrabili secondo Riemann <u>in senso proprio</u>. L'insieme delle funzioni integrabili alla Lebesgue può inoltre essere ampliato, considerando che

$$\sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$$

è una somma di lunghezze di intervalli e, in quanto tale, può essere considerata come misura dell'insieme $f^{-1}(I_i)$:

$$\sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = \mu\big(f^{-1}(I_i)\big)$$

μ altro non è che una funzione (o misura) che prende un insieme X e restituisce un numero $\mu(X)$.
Dunque, le somme inferiori e superiori di Lebesgue possono essere così riscritte:

$$s_L = \sum_{i=1}^{N} y_{i-1} \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} y_{i-1} \cdot \mu\big(f^{-1}(I_i)\big)$$

$$S_L = \sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = \sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \mu\big(f^{-1}(I_i)\big)$$

Se si introducesse una misura per una classe di insiemi numerici più vasta di quella fino a ora implicitamente considerata, sarebbe possibile estendere a una classe più ampia di funzioni la tecnica di integrazione alla Lebesgue.