ESERCIZIARIO DI TDS ENHANCED

Questo blocco propone in forma digitale una vasta varietà di esercizi che possono essere richiesti all’esame scritto e/o orale di Teoria Dei Segnali, approfonditi e curati in ogni passaggio.

Marco Marino

LISTA ESERCIZI

1	Mutua correlazione	OK
2	Convoluzione	OK
3	Densità spettrale di energia	OK
4	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	OK
5	Trasformata di Fourier	OK
6	Ortogonalità tra segnali	OK
7	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	OK
8	Densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio	OK
9	Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	OK
10	Calcolo dell'uscita di un sistema di elaborazione	OK
11	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	OK
12	Distribuzione binomiale: ricezione di bit	OK
13	Gioco del terno al lotto	OK
14	Densità di probabilità condizionata	OK
15	Convoluzione	OK
16	Mutua correlazione	
17	Densità spettrale di energia	OK
18	Mutua correlazione	
19	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	OK
20	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	OK
21	Formula di Bayes e probabilità composte	OK
22	Densità di probabilità marginali	OK
23	Formula di Bayes e probabilità composte	OK
24	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	Disegno sbagliato?
25	Variabili aleatorie statisticamente indipendenti	OK
26	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
27	Trasformata di Fourier	OK
28	Densità spettrale di energia	
29	Convoluzione	INIZIATO
30	Funzione caratteristica di una variabile aleatoria	OK
31	Convoluzione	IPAD
32	Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	OK

33	Valore quadratico medio dell'uscita di un sistema di elaborazione	OK
34	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	OK
35	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	*
36	Ortogonalità tra segnali	OK
37	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
38	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	OK
39	Convoluzione	
40	Trasformata di Fourier	OK
41	Trasformata di Fourier	OK
42	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
43	Trasformata di Fourier	OK
44	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	DISCUSSO
45	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
46	Densità di probabilità di una variabile aleatoria	*
47	Trasformata di Fourier	OK
48	Convoluzione	
49	Convoluzione	
50	Trasformata di Fourier	OK
51	Trasformata di Fourier	OK
52	Trasformata di Fourier	OK
53	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
54	Distribuzione binomiale: ricezione di bit	OK
55	Trasformata di Fourier	OK
56	Probabilità di una variabile aleatoria Y nota $p_X(x)$	DISCUSSO
57	Probabilità di una variabile aleatoria Y nota $p_X(x)$	DISCUSSO
58	Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	
59	Densità di probabilità di $Y = f(X)$ nota $p_X(x)$	*
60	Formula di Bayes e probabilità condizionata	DISCUSSO
61	Sviluppo in serie di Fourier	OK
62	Mutua correlazione	
63	Convoluzione	
64	Convoluzione	
B1	Trasformata di Fourier	OK

PAG 94, 95, 96,102

ORTOGONALITÀ TRA SEGNALI E ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

ESERCIZIO 6

Calcolare per quali valori di T i due seguenti segnali sono ortogonali:

$$\begin{cases} s_1(t) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ s_2(t) = \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \end{cases}$$

SOLUZIONE:

Affinchè i due segnali dati siano ortogonali, il loro prodotto scalare deve essere pari a zero:

$$\langle s_1(t), s_2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \cdot \sqcap\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi f_0 t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\, dt =$$

Applicando la formula di Werner $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(4\pi f_0 t) - \sin(0)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(4\pi f_0 t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot [-\cos(4\pi f_0 t)]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= -\cos(2\pi f_0 T) + \cos(-2\pi f_0 t) =$$

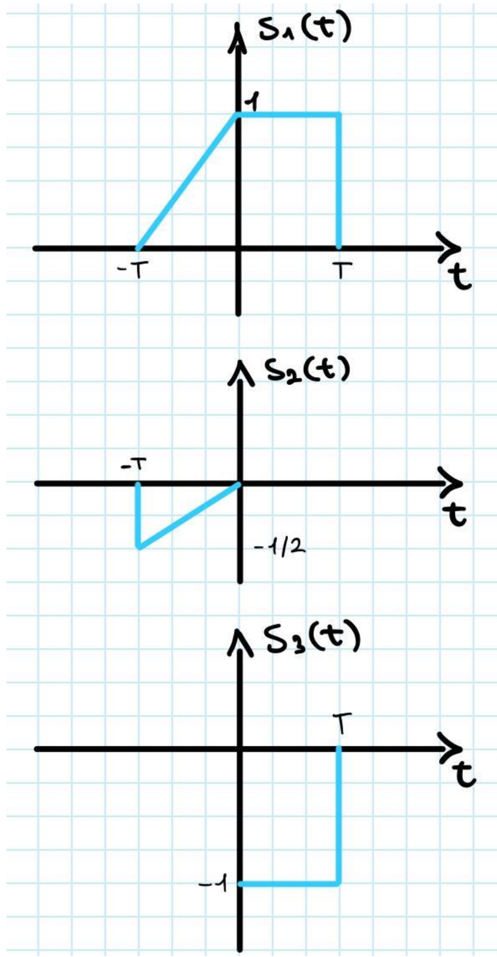
Il coseno è una funzione pari

$$= -\cos(2\pi f_0 T) + \cos(2\pi f_0 T) = 0$$

Dunque, $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono ortogonali qualsiasi sia il valore di T.

ESERCIZIO 9

Costruire una base ortonormale per i seguenti segnali:



SOLUZIONE:

Scriviamo le espressioni analitiche dei segnali:

$$s_1(t) = \left(1 + \frac{1}{T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$s_2(t) = \left(\frac{1}{2T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

$$s_3(t) = -rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Non riuscendo a percepire "ad occhio" una lineare dipendenza tra i tre segnali, procediamo direttamente con l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

PASSO 1

Prendiamo come primo il segnale più semplice:

$e_1 = s_3$

$u_1 = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{s_3}{||s_3||}$

$||s_3|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_3(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^T (-1)^2 \, dt} = \sqrt{T}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{s_3}{||s_3||} = -\frac{1}{\sqrt{T}} \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$

$S_1 = \{u_1\}$

PASSO 2

$e_2 = s_2 - \langle s_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = s_2 - \langle s_2, \frac{s_3}{||s_3||} \rangle \cdot \frac{s_3}{||s_3||} = s_2 - \frac{\langle s_2, s_3 \rangle}{\langle s_3, s_3 \rangle} \cdot s_3$

$\langle s_3, s_3 \rangle = T$

$\langle s_2, s_3 \rangle = 0$ $\boxed{s_2 \text{ ed } s_3 \text{ hanno supporti disgiunti}}$

$\Rightarrow e_2 = s_2$

$\Rightarrow u_2 = \frac{e_2}{||e_2||} = \frac{s_2}{||s_2||}$

$||s_2|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_2(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\int_{-T}^{0} \left(\frac{1}{2T} t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4T^2} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T}^{0}} = \sqrt{\frac{1}{4T^2} \cdot \frac{T^3}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{T}{12}}$

$\Rightarrow u_2 = \frac{s_2}{||s_2||} = \sqrt{\frac{12}{T}} \cdot \left(\frac{1}{2T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) =$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{T}} \cdot \left(\frac{1}{2T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) = \frac{\sqrt{3}}{T\sqrt{T}} t \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

$S_2 = \{u_1, u_2\}$

PASSO 3

$$e_3 = s_1 - \langle s_1, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle s_1, u_2 \rangle \cdot u_2 =$$

$$= s_1 - \langle s_1, \frac{s_3}{||s_3||} \rangle \cdot \frac{s_3}{||s_3||} - \langle s_1, \frac{s_2}{||s_2||} \rangle \cdot \frac{s_2}{||s_2||} =$$

$$= s_1 - \frac{\langle s_1, s_3 \rangle}{\langle s_3, s_3 \rangle} \cdot s_3 - \frac{\langle s_1, s_2 \rangle}{\langle s_2, s_2 \rangle} \cdot s_2$$

$$\langle s_3, s_3 \rangle = T$$

$$\langle s_2, s_2 \rangle = \frac{T}{12}$$

$$\langle s_1, s_3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_3^*(t) dt = \int_0^T 1 \cdot (-1)\, dt = -T$$

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt = \int_{-T}^{0} \left(1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot \left(\frac{1}{2T} t\right)\, dt =$$

$$= \int_{-T}^{0} \frac{1}{2T} t + \frac{1}{2T^2} t^2\, dt = \frac{1}{2T} \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-T}^{0} + \frac{1}{2T^2} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T}^{0} =$$

$$= -\frac{T}{4} + \frac{T}{6} = -\frac{T}{12}$$

$$\Rightarrow e_3 = s_1 - \frac{-T}{T} \cdot s_3 - \frac{-\frac{T}{12}}{\frac{T}{12}} \cdot s_2 = s_1 + s_3 + s_2 =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \left(\frac{1}{2T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + \left(\frac{1}{2T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{T}t + \frac{1}{2T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) = \frac{3}{2T}t \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{e_3}{||e_3||}$$

$$||e_3|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_3(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\int_{-T}^{0} \left(\frac{3}{2T}t\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{9}{4T^2} \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T}^{0}} =$$

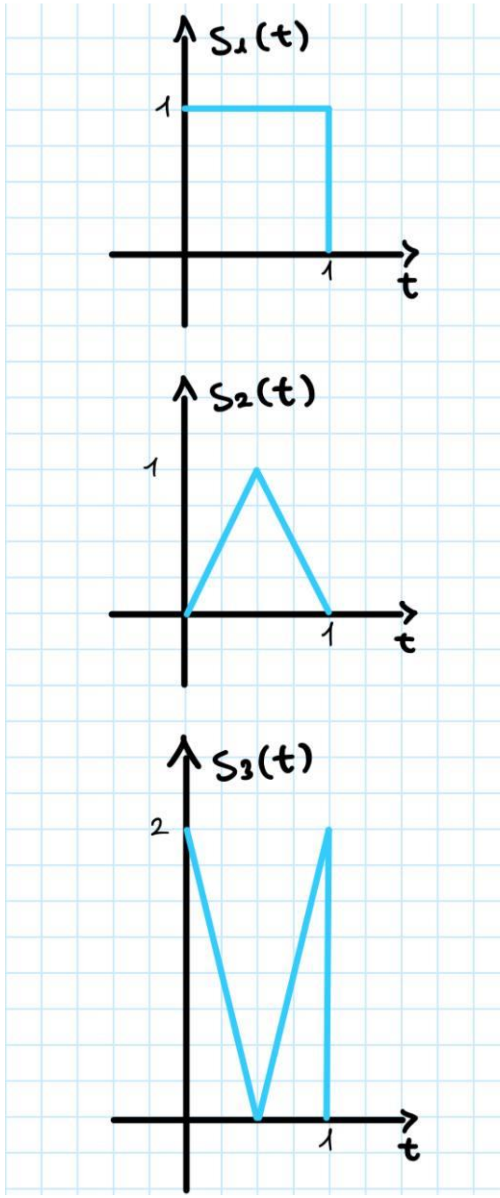
$$= \sqrt{\frac{9}{4T^2} \cdot \left(\frac{T^3}{3}\right)} = \sqrt{\frac{3T}{4}}$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{e_3}{||e_3||} = \frac{2}{\sqrt{3T}} \cdot \frac{3}{2T}t \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) = \frac{3}{T\sqrt{3T}}t \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

$$S_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$$

ESERCIZIO 32

Verificare se i seguenti segnali sono linearmente indipendenti e costruire una base ortonormale:



SOLUZIONE:

Scriviamo le espressioni analitiche dei segnali:

$$s_1(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$s_2(t) = tri\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)$$

$$s_3(t) = -2tri\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right) + 2rect\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

"Ad occhio" si osserva una lineare dipendenza tra i tre segnali:

$$s_3(t) = 2s_1(t) - 2s_2(t)$$

Scartiamo il segnale più complesso e procediamo con l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

PASSO 1

Prendiamo come primo il segnale più semplice:

$$e_1 = s_1$$

$$u_1 = \frac{e_1}{||e_1||} = \frac{s_1}{||s_1||}$$

$$||s_1|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^1 1^2 \, dt} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{s_1}{||s_1||} = rect\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Dunque, s_1 era già normalizzato.

$$S_1 = \{u_1\}$$

PASSO 2

$$e_2 = s_2 - \langle s_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = s_2 - \langle s_2, \frac{s_1}{||s_1||} \rangle \cdot \frac{s_1}{||s_1||} = s_2 - \frac{\langle s_2, s_1 \rangle}{\langle s_1, s_1 \rangle} \cdot s_1$$

$$\langle s_1, s_1 \rangle = 1$$

$$\langle s_2, s_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) \cdot s_1^*(t) \, dt = \int_0^1 s_2(t) \cdot s_1^*(t) \, dt = \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Per il calcolo del precedente prodotto scalare si è utilizzata la proprietà secondo cui il prodotto scalare tra una rect e un qualsiasi altro segnale è pari all'area della parte selezionata dalla rect, moltiplicata per l'ampiezza della rect stessa.

$$\Rightarrow e_2 = s_2 - \frac{1}{2}s_1 = tri\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}rect\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

Conviene scriverci le equazioni delle due rette che compongono la tri:

$$y_1 = mt = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = \frac{1-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot t = 2t$$

$$y_2 = 2 + mt = 2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 2 + \frac{0-1}{1-\frac{1}{2}} \cdot t = 2 - 2t$$

Sommando i tratti in comune e scrivendo la tri come somma di due rette moltiplicate per le rispettive rect:

$$e_2 = 2t \cdot rect\left(\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right) + (2-2t) \cdot rect\left(\frac{t-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}rect\left(t-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(2t - \frac{1}{2}\right) \cdot rect\left(\frac{t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{3}{2} - 2t\right) \cdot rect\left(\frac{t-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$$

Disegnando e_2 i passaggi precedenti saranno molto chiari.

$$\Rightarrow u_2 = \frac{e_2}{||e_2||}$$

$$||e_2|| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |e_2(t)|^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{3}{2} - 2t\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\int_0^{\frac{1}{2}} 4t^2 - 2t + \frac{1}{4} dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4t^2 - 6t + \frac{9}{4} dt} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) + \frac{9}{8} - 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{9}{8} - 3 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{e_2}{||e_2||} = 2\sqrt{3} \cdot \left[\left(2t - \frac{1}{2}\right) \cdot rect\left(\frac{t - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{3}{2} - 2t\right) \cdot rect\left(\frac{t - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)\right] =$$

$S_2 = \{u_1, u_2\}$

ESERCIZIO 58

A

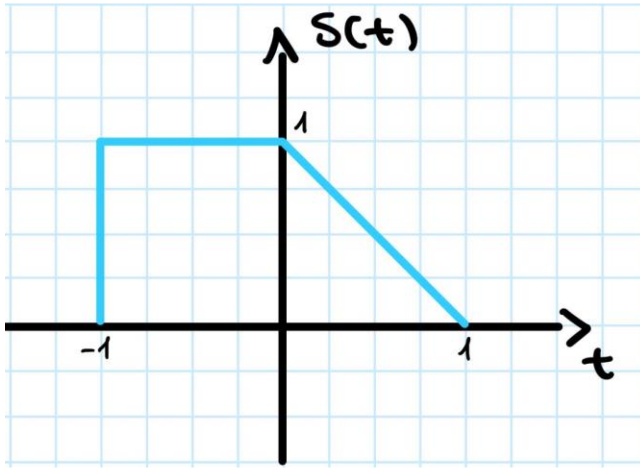
SOLUZIONE:

A

TRASFORMATA E SERIE DI FOURIER

ESERCIZIO 5

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



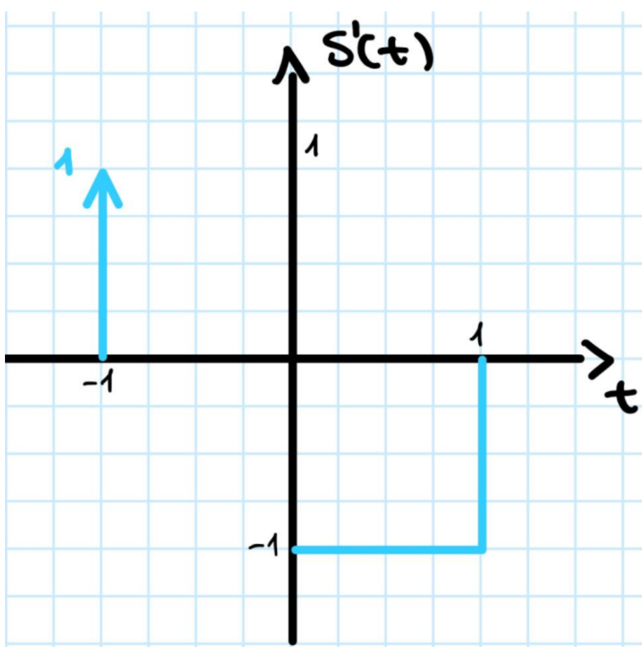
SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$y = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{0 - 1}{1 - 0} \cdot t = 1 - t$$

$$\Rightarrow s(t) = rect(t + 1/2) + (1 - t) \cdot rect(t - 1/2)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto limitato (a energia finita). Per farlo, deriviamo dapprima $s(t)$:



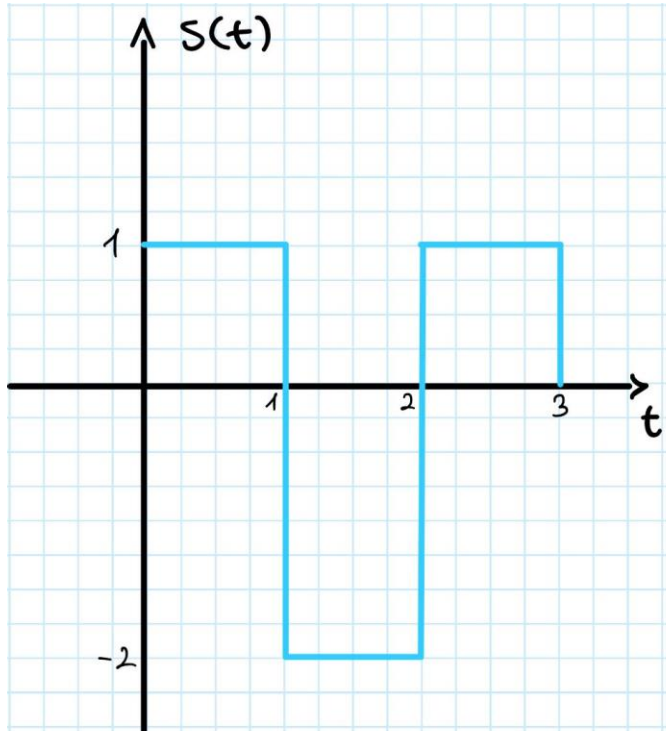
$$s'(t) = \delta(t+1) - rect(t - 1/2)$$

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = e^{j2\pi f} - sinc(f) \cdot e^{-j2\pi f\frac{1}{2}} = e^{j2\pi f} - sinc(f) \cdot e^{-j\pi f}$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} = \frac{e^{j2\pi f} - sinc(f) \cdot e^{-j\pi f}}{j2\pi f}$$

ESERCIZIO 27

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

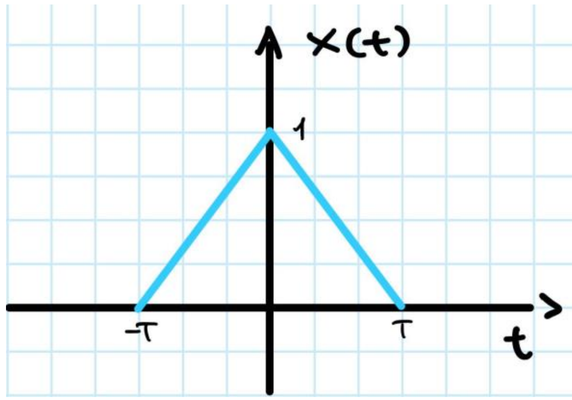
$$s(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2rect\left(t - \frac{3}{2}\right) + rect\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

$$S(f) = sinc(f) \cdot e^{-j\pi f} - 2sinc(f) \cdot e^{-j3\pi f} + sinc(f) \cdot e^{-j5\pi f} =$$

$$= sinc(f) \cdot \left(e^{-j\pi f} + e^{-j5\pi f} - 2e^{-j3\pi f}\right)$$

ESERCIZIO 40

Sia $s(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, dove $x(t)$ è il seguente segnale:



Calcolare la trasformata di Fourier di $s(t)$.

SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica di $x(t)$:

$$y_1 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{1-0}{0-(-T)} \cdot t = 1 + \frac{1}{T} t$$

$$y_2 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{0-1}{T-0} \cdot t = 1 - \frac{1}{T} t$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + \left(1 - \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Se $s(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, allora $S(f) = X(f) * \mathfrak{F}[\cos(2\pi f_0 t)]$. Calcoliamo dapprima $X(f)$, derivando una volta il segnale $x(t)$:

$$x'(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$\mathfrak{F}[x'(t)] = sinc(fT) \cdot e^{j\pi f T} - sinc(fT) \cdot e^{-j\pi f T} =$$

$$= sinc(fT) \cdot \left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)$$

$$X(f) = \frac{\mathfrak{F}[x'(t)]}{j2\pi f} = \frac{sinc(fT) \cdot \left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right)}{j2\pi f} =$$

$$= sinc(fT) \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} =$$

$$= sinc(fT) \cdot T\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} =$$

$$= T sinc^2(fT)$$

Quindi:

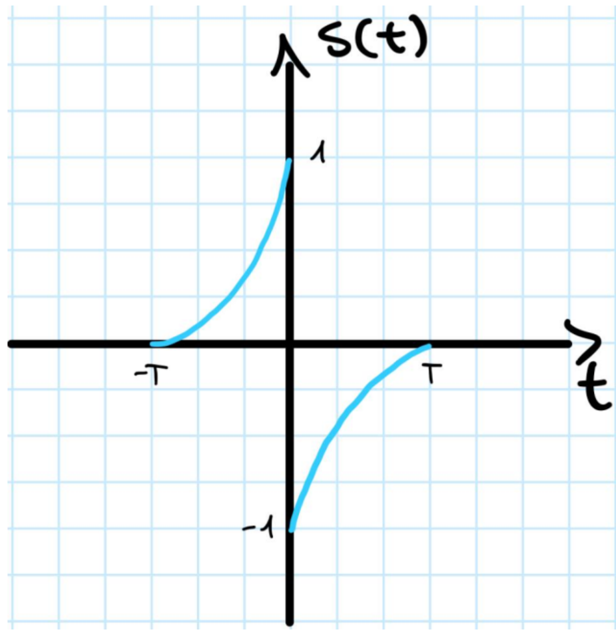
$$S(f) = X(f) * \mathfrak{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = X(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] =$$

$$= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[sinc^2\big((f - f_0)T\big) + sinc^2\big((f + f_0)T\big)\right]$$

ESERCIZIO 41

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione del primo arco di parabola:

$$y_1 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$$

$$y_1 - 0 = a \cdot (x + T)^2$$

$$y_1 = a \cdot (x + T)^2$$

Imponiamo il passaggio per (0,1):

$$1 = aT^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{T^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{(t + T)^2}{T^2}$$

Scriviamo l'espressione del secondo arco di parabola:

$$y_2 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$$

$$y_2 - 0 = a \cdot (x - T)^2$$

$y_2 = a \cdot (x - T)^2$

Imponiamo il passaggio per $(0, -1)$:

$-1 = aT^2$

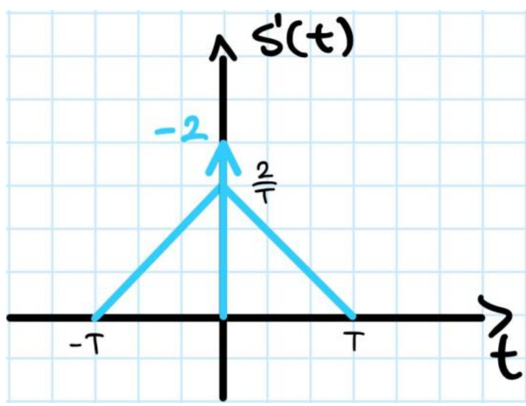
$\Rightarrow a = -\frac{1}{T^2}$

$\Rightarrow y_2 = -\frac{(t-T)^2}{T^2}$

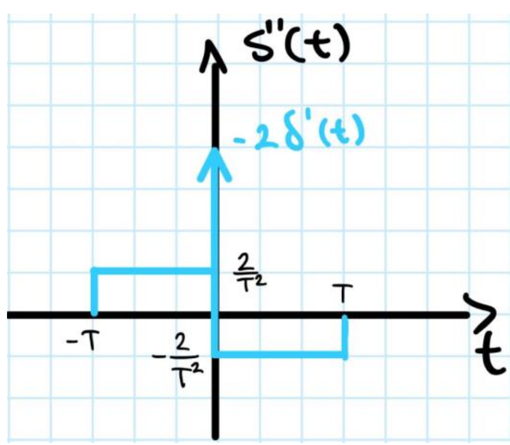
Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t) = \frac{(t+T)^2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - \frac{(t-T)^2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto limitato (a energia finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$ due volte:



$$s'(t) = \left(\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right) \cdot rect\left(\frac{t+T/2}{T}\right) - 2\delta(t) - \left(\frac{2t}{T^2} - \frac{2}{T}\right) \cdot rect\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$



$$s''(t) = \frac{2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - 2\delta'(t) - \frac{2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

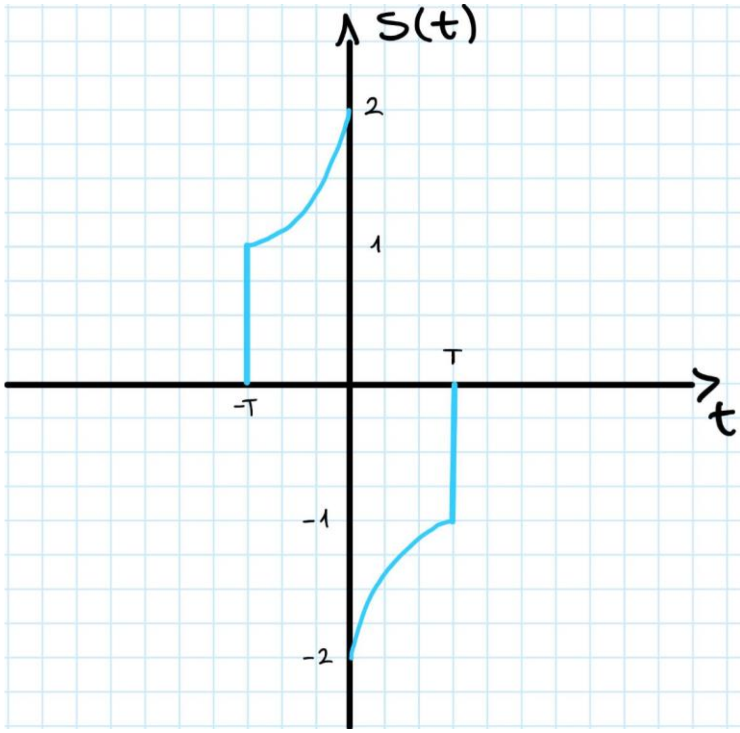
$$\mathfrak{F}[s''(t)] = \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - 2 \cdot j2\pi f - \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} =$$

$$= \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot \left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) - j4\pi f$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s''(t)]}{(j2\pi f)^2} = \frac{\frac{2}{T} sinc(fT) \cdot \left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) - j4\pi f}{-4\pi^2 f^2}$$

ESERCIZIO 43

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione del primo arco di parabola:

$$y_1 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$$

$$y_1 - 1 = a \cdot (x + T)^2$$

$$y_1 = a \cdot (x + T)^2 + 1$$

Imponiamo il passaggio per $(0,2)$:

$$2 = aT^2 + 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{T^2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{(t + T)^2}{T^2} + 1$$

Scriviamo l'espressione del secondo arco di parabola:

$y_2 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

$y_2 + 1 = a \cdot (x - T)^2$

$y_2 = a \cdot (x - T)^2 - 1$

Imponiamo il passaggio per $(0, -2)$:

$-2 = aT^2 - 1$

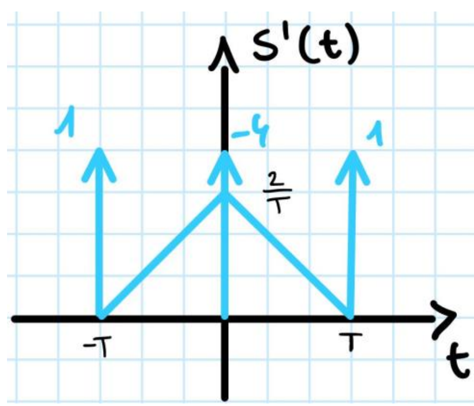
$\Rightarrow a = -\frac{1}{T^2}$

$\Rightarrow y_2 = -\frac{(t - T)^2}{T^2} - 1$

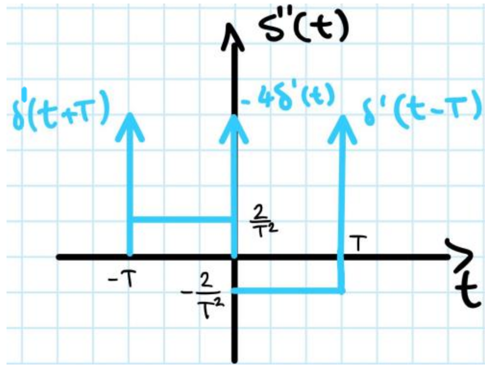
Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t) = \left[\frac{(t + T)^2}{T^2} + 1\right] \cdot rect\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - \left[\frac{(t - T)^2}{T^2} + 1\right] \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto limitato (a energia finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$ due volte:



$$s'(t) = \delta(t + T) + \left(\frac{2t}{T^2} + \frac{2}{T}\right) \cdot rect\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - 4\delta(t) - \left(\frac{2t}{T^2} - \frac{2}{T}\right) \cdot rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) + \delta(t - T)$$



$$s''(t) = \delta'(t+T) + \frac{2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - 4\delta'(t) - \frac{2}{T^2} \cdot rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) + \delta'(t-T)$$

$$\mathfrak{F}[s''(t)] = j2\pi f \cdot e^{j2\pi fT} + \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - j8\pi f - \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} + j2\pi f \cdot e^{-j2\pi fT} =$$

$$= j2\pi f \cdot \left(e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}\right) + \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot \left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) - j8\pi f =$$

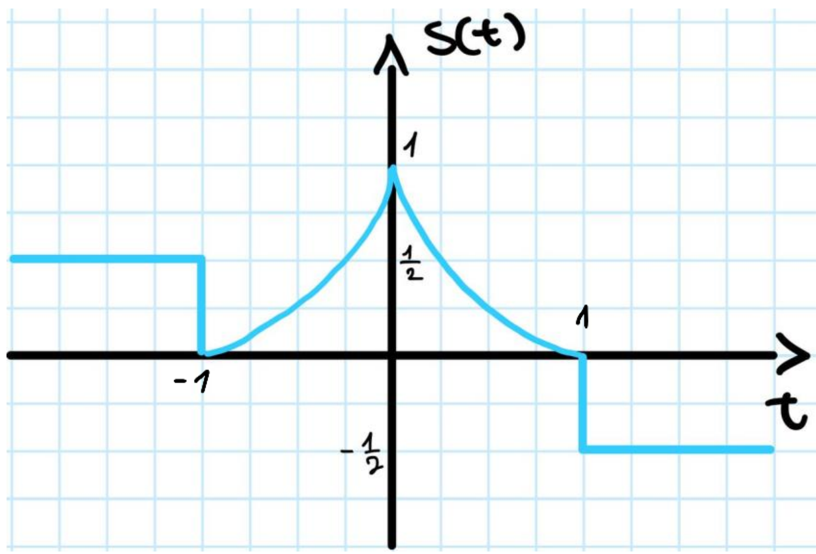
$$= j4\pi f \cdot \cos(2\pi fT) + \frac{2}{T} sinc(fT) \cdot 2j \sin(\pi fT) - j8\pi f =$$

$$= j4\pi f \cdot [\cos(2\pi fT) - 2] + \frac{4j}{T} sinc(fT) \cdot \sin(\pi fT)$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s''(t)]}{(j2\pi f)^2} = \frac{j4\pi f \cdot [\cos(2\pi fT) - 2] + \frac{4j}{T} sinc(fT) \cdot \sin(\pi fT)}{-4\pi^2 f^2}$$

ESERCIZIO 47

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione del primo arco di parabola:

$y_1 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

$y_1 - 0 = a \cdot (x + 1)^2$

$y_1 = a \cdot (x + 1)^2$

Imponiamo il passaggio per $(0,1)$:

$1 = a$

$\Rightarrow y_1 = (t + 1)^2$

Scriviamo l'espressione del secondo arco di parabola:

$y_2 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

$y_2 - 0 = a \cdot (x - 1)^2$

$y_2 = a \cdot (x - 1)^2$

Imponiamo il passaggio per $(0,1)$:

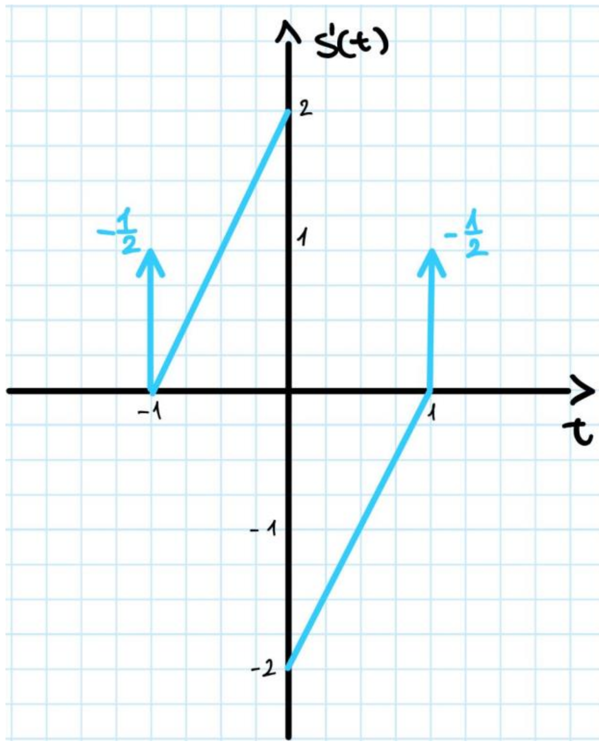
$1 = a$

$\Rightarrow y_2 = (t-1)^2$

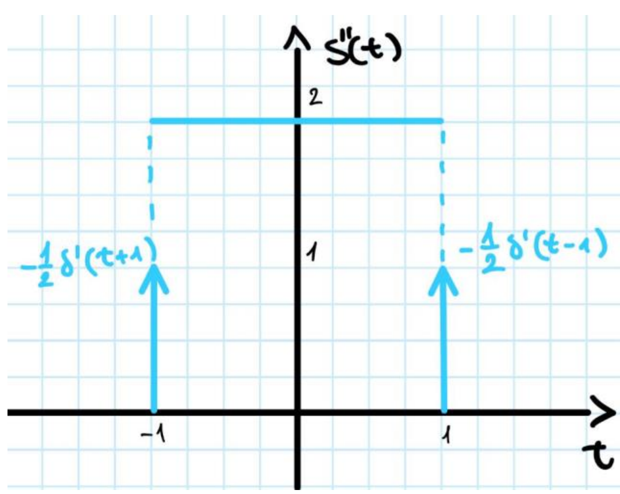
Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}u(-t-1) + (t+1)^2 \cdot rect\left(t+\frac{1}{2}\right) + (t-1)^2 \cdot rect\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}u(t-1)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto non limitato (a potenza finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$ due volte:



$$s'(t) = -\frac{1}{2}\delta(t+1) + (2t+2) \cdot rect\left(t+\frac{1}{2}\right) + (2t-2) \cdot rect\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta(t-1)$$



$$s''(t) = -\frac{1}{2}\delta'(t+1) + 2\cdot rect\left(t+\frac{1}{2}\right) + 2\cdot rect\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\delta'(t-1)$$

$$\mathfrak{F}[s''(t)] = -\frac{j2\pi f}{2}\cdot e^{j2\pi f} + 2sinc(f)\cdot e^{j\pi f} + 2sinc(f)\cdot e^{-j\pi f} - \frac{j2\pi f}{2}\cdot e^{-j2\pi f} =$$

$$= -\frac{j2\pi f}{2}\cdot\left(e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}\right) + 2sinc(f)\cdot\left(e^{j\pi f} + e^{-j\pi f}\right) =$$

$$= -\frac{j2\pi f}{2}\cdot 2\cos(2\pi f) + 2sinc(f)\cdot 2\cos(\pi f) =$$

$$= -j2\pi f\cos(2\pi f) + 4sinc(f)\cos(\pi f)$$

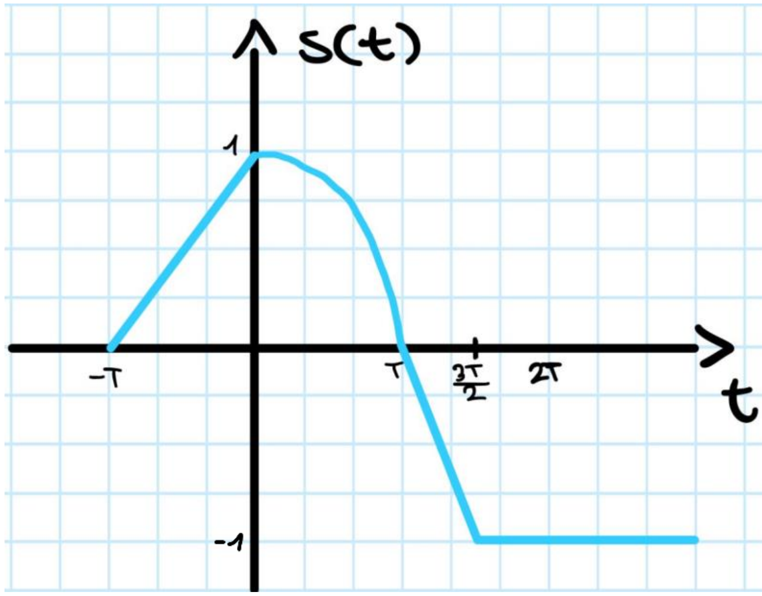
$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s''(t)]}{(j2\pi f)^2} + \frac{s(-\infty)+s(+\infty)}{2}\cdot\delta(f) =$$

$$= \frac{-j2\pi f\cos(2\pi f) + 4sinc(f)\cos(\pi f)}{(j2\pi f)^2} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2}\cdot\delta(f) =$$

$$= \frac{-j2\pi f\cos(2\pi f) + 4sinc(f)\cos(\pi f)}{(j2\pi f)^2}$$

ESERCIZIO 50

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione dell'arco di parabola:

$y_1 - y_V = a \cdot (x - x_V)^2$

$y_1 - 1 = a \cdot (x - 0)^2$

$y_1 = ax^2 + 1$

Imponiamo il passaggio per $(T, 0)$:

$0 = aT^2 + 1$

$a = -\frac{1}{T^2}$

$\Rightarrow y_1 = -\frac{t^2}{T^2}$

Scriviamo l'espressione della prima retta:

$y_2 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{1 - 0}{0 - (-T)} \cdot t = 1 + \frac{1}{T} t$

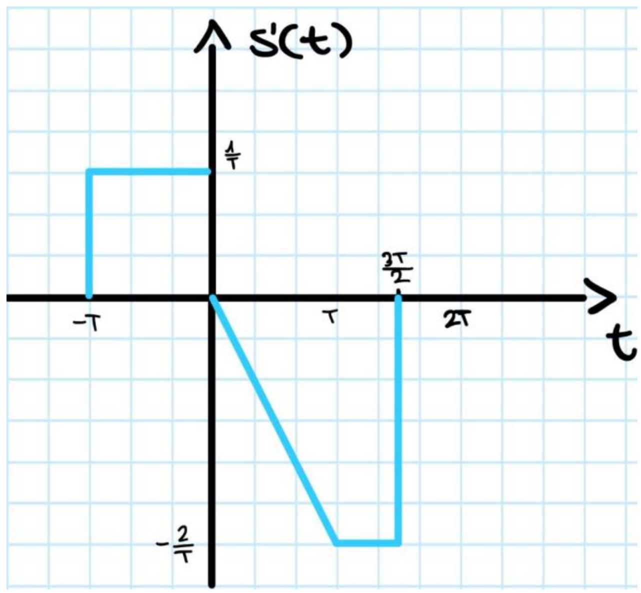
Scriviamo l'espressione della seconda retta:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-T}{\frac{3T}{2}-T}\Rightarrow -y=\frac{x-T}{\frac{T}{2}}\Rightarrow y_3=-\frac{2t}{T}+2$$

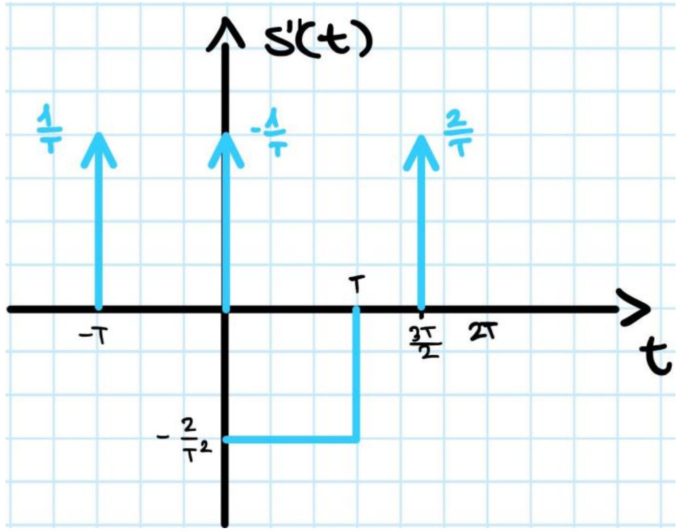
Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t)=\left(1+\frac{1}{T}t\right)\cdot rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)-\frac{t^2}{T^2}\cdot rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)-\left(\frac{2t}{T}-2\right)\cdot rect\left(\frac{t-\frac{5T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)-u\left(t-\frac{3T}{2}\right)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto non limitato (a potenza finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$ due volte:



$$s'(t)=\frac{1}{T}\cdot rect\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)-\frac{2t}{T^2}\cdot rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)-\frac{2}{T}\cdot rect\left(\frac{t-\frac{5T}{4}}{\frac{T}{2}}\right)$$



$$s''(t) = \frac{1}{T}\delta(t+T) - \frac{1}{T}\delta(t) - \frac{2}{T^2}\cdot rect\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) + \frac{2}{T}\delta\left(t-\frac{3T}{2}\right)$$

$$\mathfrak{F}[s''(t)] = \frac{1}{T}\cdot e^{j2\pi fT} - \frac{1}{T} - \frac{2}{T}sinc(fT)\cdot e^{-j\pi fT} + \frac{2}{T}\cdot e^{-j3\pi fT}$$

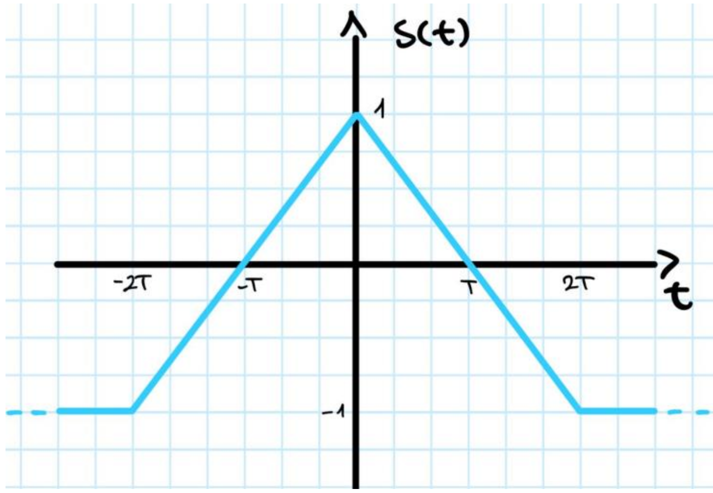
$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s''(t)]}{(j2\pi f)^2} + \frac{s(-\infty)+s(+\infty)}{2}\cdot\delta(f) =$$

$$= \frac{\frac{1}{T}\cdot e^{j2\pi fT} - \frac{1}{T} - \frac{2}{T}sinc(fT)\cdot e^{-j\pi fT} + \frac{2}{T}\cdot e^{-j3\pi fT}}{(j2\pi f)^2} + \frac{0-1}{2}\cdot\delta(f) =$$

$$= \frac{\frac{1}{T}\cdot e^{j2\pi fT} - \frac{1}{T} - \frac{2}{T}sinc(fT)\cdot e^{-j\pi fT} + \frac{2}{T}\cdot e^{-j3\pi fT}}{(j2\pi f)^2} - \frac{1}{2}\delta(f)$$

ESERCIZIO 51

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione della prima retta:

$$y_1 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{1-(-1)}{0-(-2T)} \cdot t = 1 + \frac{1}{T}t$$

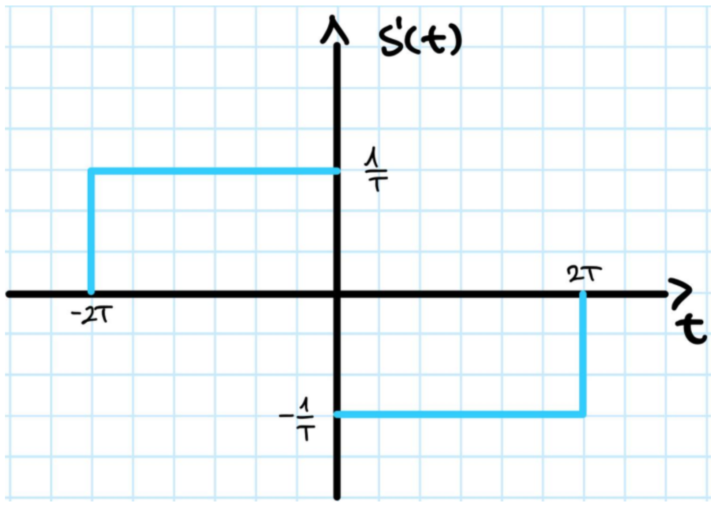
Scriviamo l'espressione della seconda retta:

$$y_1 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{-1-1}{2T-0} \cdot t = 1 - \frac{1}{T}t$$

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t) = -u(-t-2T) + \left(1 + \frac{1}{T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t+T}{2T}\right) + \left(1 - \frac{1}{T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t-T}{2T}\right) - u(t-2T)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto non limitato (a potenza finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$:



$$s'(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t+T}{2T}\right) - \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t-T}{2T}\right)$$

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = 2sinc(2fT) \cdot e^{j2\pi fT} - 2sinc(2fT) \cdot e^{-j2\pi fT} =$$

$$= 2sinc(2fT) \cdot (e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT})$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} + \frac{s(-\infty) + s(+\infty)}{2} \cdot \delta(f) =$$

$$= \frac{2sinc(2fT) \cdot (e^{j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT})}{j2\pi f} + \frac{-1-1}{2} \cdot \delta(f) =$$

$$= 2sinc(2fT) \cdot \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f} - \delta(f) =$$

$$= 2sinc(2fT) \cdot 2T\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} - \delta(f) =$$

$$= 2sinc(2fT) \cdot 2Tsinc(2fT) - \delta(f) =$$

$$= 4Tsinc^2(2fT) - \delta(f)$$

ESERCIZIO 52

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $s(t) = 4\cos(2\pi f_0 t) \cdot rect(6f_0 t)$.

SOLUZIONE:

$$\mathfrak{F}[s(t)] = \mathfrak{F}[4\cos(2\pi f_0 t) \cdot rect(6f_0 t)] = \mathfrak{F}[4\cos(2\pi f_0 t)] * \mathfrak{F}[rect(6f_0 t)] =$$

$$= 2[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * \mathfrak{F}\left[rect\left(\frac{t}{\frac{1}{6f_0}}\right)\right] =$$

$$= 2[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * \frac{1}{6f_0} sinc\left(\frac{f}{6f_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] * \frac{1}{f_0} sinc\left(\frac{f}{6f_0}\right) =$$

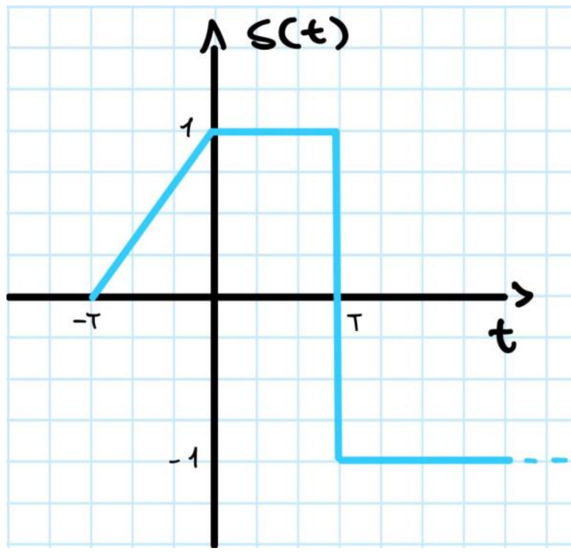
$$= \frac{1}{3}\delta(f - f_0) * \frac{1}{f_0} sinc\left(\frac{f}{6f_0}\right) + \frac{1}{3}\delta(f + f_0) * \frac{1}{f_0} sinc\left(\frac{f}{6f_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{3f_0} \cdot sinc\left(\frac{f - f_0}{6f_0}\right) + \frac{1}{3f_0} \cdot sinc\left(\frac{f + f_0}{6f_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{3f_0} \cdot \left[sinc\left(\frac{f - f_0}{6f_0}\right) + sinc\left(\frac{f + f_0}{6f_0}\right)\right]$$

ESERCIZIO 55

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

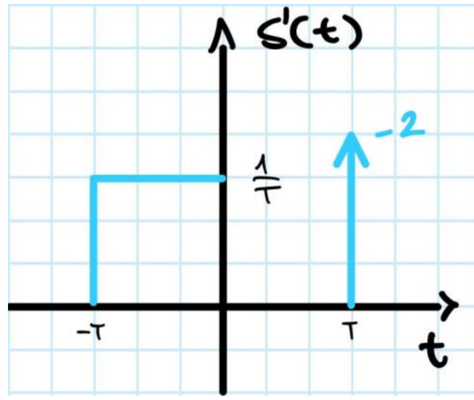
Scriviamo l'equazione della retta:

$$y = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{1 - 0}{0 - (-T)} \cdot t = 1 + \frac{1}{T}t$$

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$\Rightarrow s(t) = \left(1 + \frac{1}{T}t\right) \cdot rect\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) + rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) - u(t - T)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto non limitato (a potenza finita). Per farlo, deriviamo $s(t)$:



$$s'(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t + \frac{T}{2}}{T}\right) - 2\delta(t - T)$$

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - 2e^{-j2\pi fT}$$

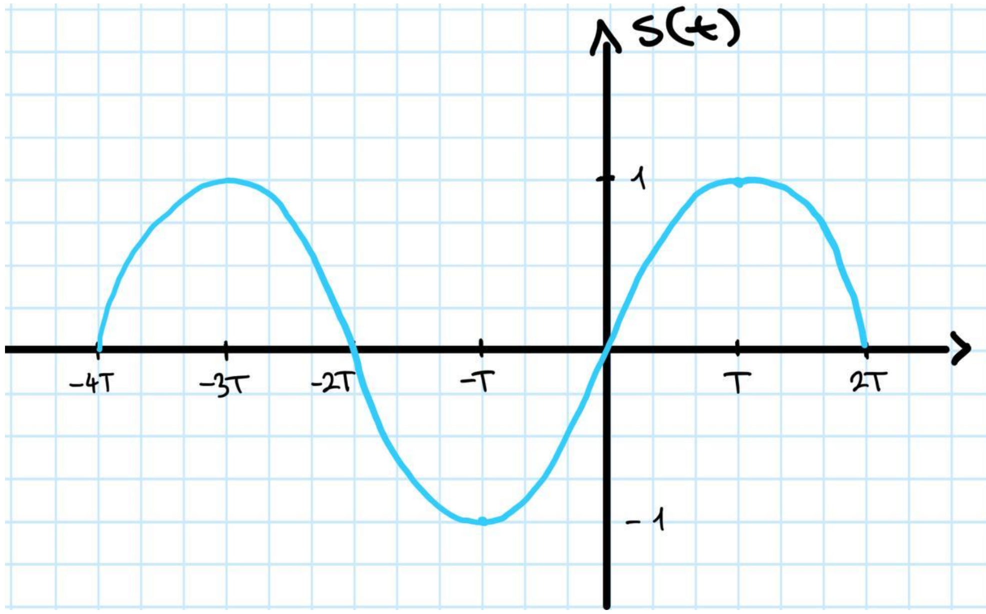
$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} + \frac{s(-\infty) + s(+\infty)}{2} \cdot \delta(f) =$$

$$= \frac{sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - 2e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f} + \frac{0 - 1}{2} \cdot \delta(f) =$$

$$= \frac{sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - 2e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f} - \frac{1}{2}\delta(f)$$

ESERCIZIO BONUS 1

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$s(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{4T}(t-T)\right) \cdot rect\left(\frac{t+T}{6T}\right)$$

$$\mathfrak{F}[s(t)] = \mathfrak{F}\left[\cos\left(2\pi \frac{1}{4T}(t-T)\right) \cdot rect\left(\frac{t+T}{6T}\right)\right] =$$

$$= \mathfrak{F}\left[\cos\left(2\pi \frac{1}{4T}(t-T)\right)\right] * \mathfrak{F}\left[rect\left(\frac{t+T}{6T}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{4T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{4T}\right)\right] \cdot e^{-j2\pi fT}\right] * \left[6T sinc(6Tf) \cdot e^{j2\pi fT}\right] =$$

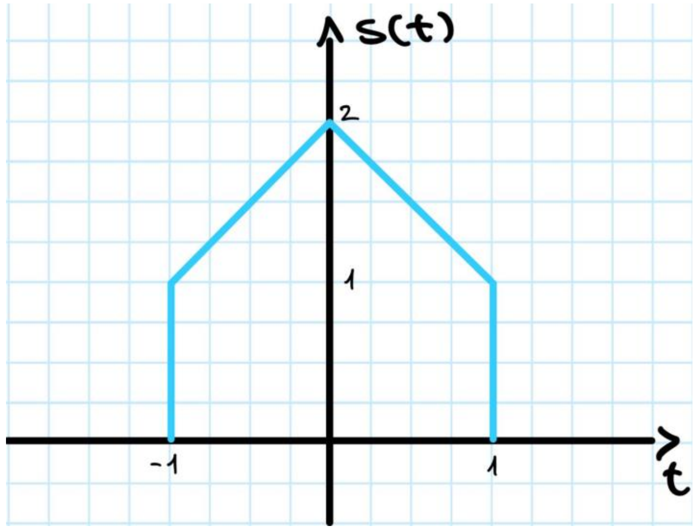
$e^{-j2\pi fT} \cdot e^{j2\pi fT} = 1$, quindi:

$$= \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{4T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{4T}\right)\right] * [6T sinc(6Tf)] =$$

$$= 3T\left[sinc\left(6T\left(f-\frac{1}{4T}\right)\right) + sinc\left(6T\left(f+\frac{1}{4T}\right)\right)\right]$$

ESERCIZIO 61

Sviluppare il seguente segnale in serie di Fourier:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$s(t) = tri(t) + rect\left(\frac{t}{2}\right) = \big(rect(t) * rect(t)\big) + rect\left(\frac{t}{2}\right)$$

Sviluppare $s(t)$ in serie di Fourier significa scriverlo nella forma:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}}$$

Dove:

$$S_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\, e^{-j2\pi n\frac{t}{T}} dt$$

Il periodo di $s(t)$ è pari a $T = 1 - (-1) = 2$. Notiamo che l'espressione di S_n è simile a quella della trasformata di Fourier $S(f)$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

Quindi:

$$S_n = \frac{1}{T} \cdot \mathfrak{F}\left[s(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right]\Big|_{f=\frac{n}{T}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{F}\left[s(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)\right]\Big|_{f=\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{F}[s(t)]|_{f=\frac{n}{2}}$$

$$S(f) = \mathfrak{F}\left[\big(rect(t) * rect(t)\big) + rect\left(\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= \mathfrak{F}\big[\big(rect(t) * rect(t)\big)\big] + \mathfrak{F}\left[rect\left(\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= \mathfrak{F}[rect(t)] \cdot \mathfrak{F}[rect(t)] + \mathfrak{F}\left[rect\left(\frac{t}{2}\right)\right] =$$

$$= sinc(f) \cdot sinc(f) + 2sinc(2f) =$$

$$= sinc^2(f) + 2sinc(2f)$$

$$S\left(f = \frac{n}{2}\right) = sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) + 2sinc(n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} \cdot S\left(f = \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) + sinc(n)$$

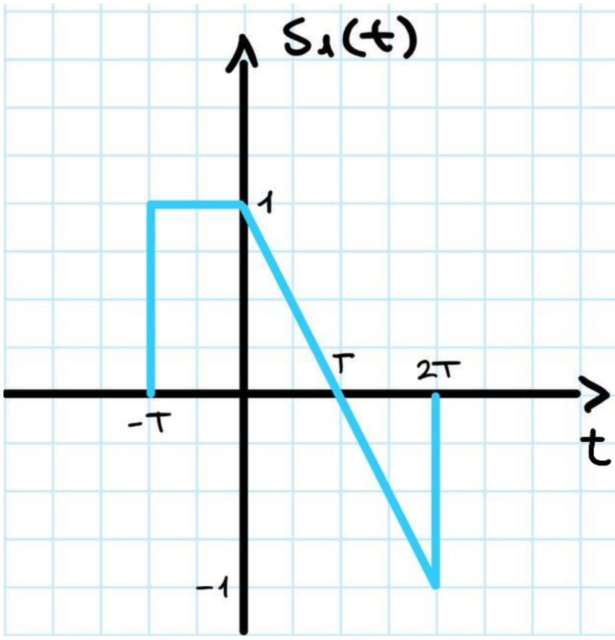
Dunque, lo sviluppo in serie di Fourier di $s(t)$ è il seguente:

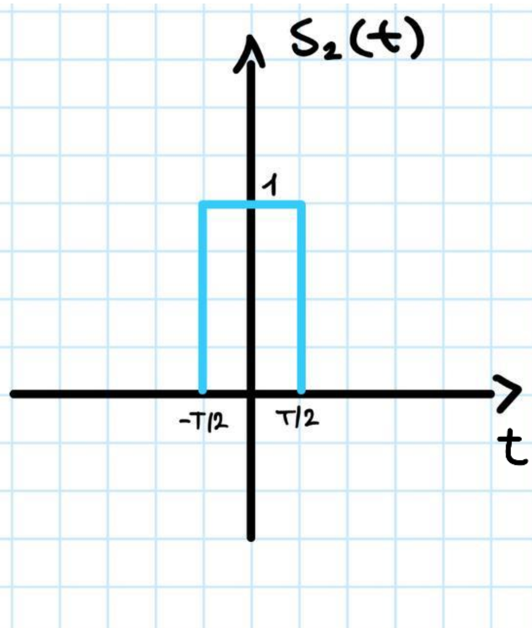
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) + sinc(n)\right] e^{j\pi nt}$$

CONVOLUZIONE DI SEGNALI

ESERCIZIO 2

Calcolare la convoluzione tra i seguenti segnali:



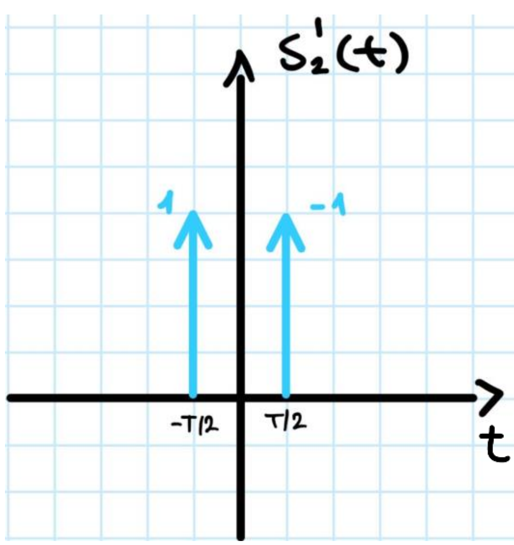


SOLUZIONE:

Sfruttiamo la proprietà di derivazione della convoluzione:

$$\phi'(t) = [s_1(t) * s_2(t)]' = s_1'(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2'(t)$$

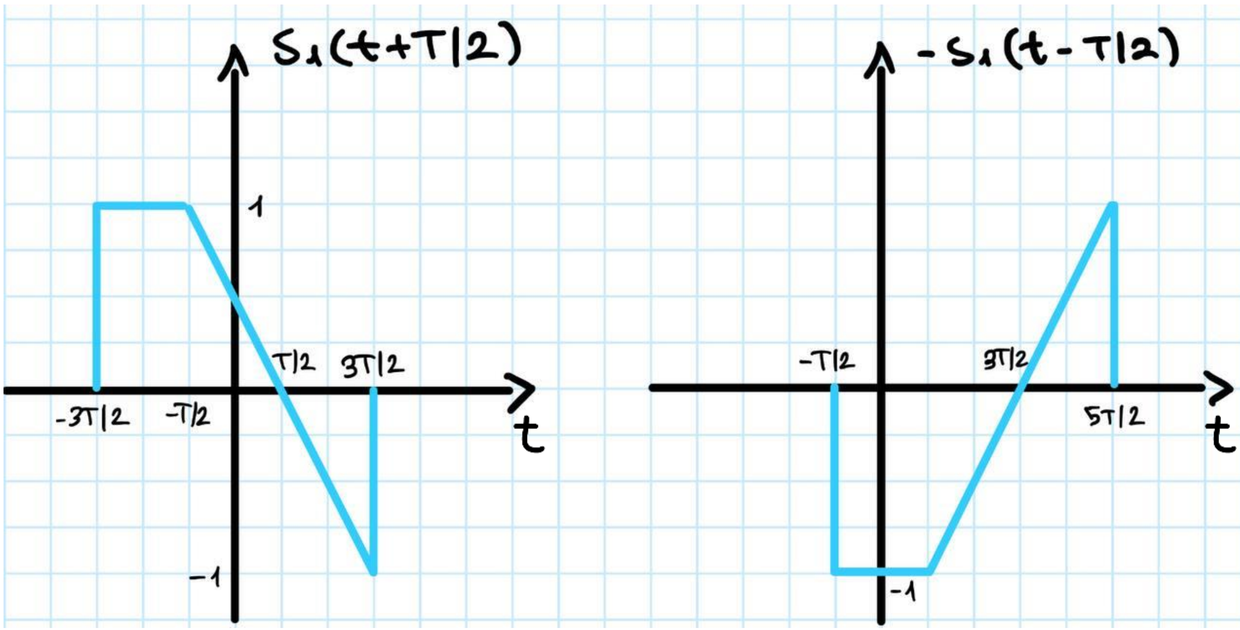
Deriviamo il segnale più semplice, ovvero $s_2(t)$:



$$s_2'(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\phi'(t) = s_1(t) * s_2'(t) = s_1(t) * \left[\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] =$$

$$= s_1\left(t + \frac{T}{2}\right) - s_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



Sommiamo i tratti in comune dei due segnali in $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$:

$$y = \frac{1}{2} + mt = \frac{1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = \frac{1}{2} + \frac{0 - 1}{\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)} \cdot t = \frac{1}{2} - \frac{1}{T}t$$

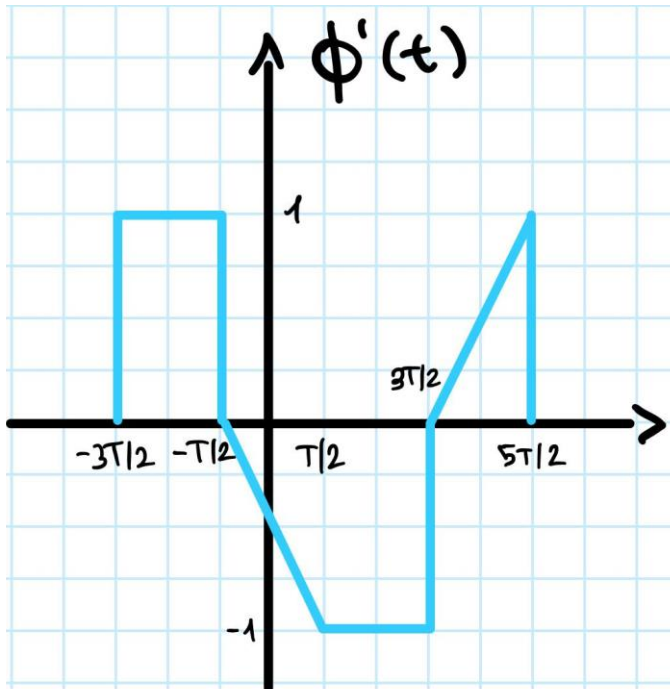
La loro somma è $\frac{1}{2} - \frac{1}{T}t + (-1) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{T}t$.

Sommiamo i tratti in comune dei due segnali in $\left[\frac{T}{2}, \frac{3T}{2}\right]$:

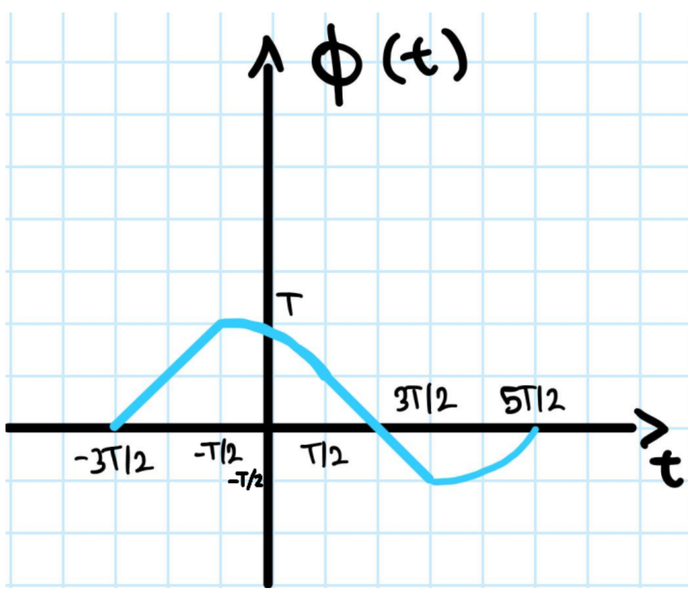
$$y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{T}t$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{y - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{t - \frac{T}{2}}{\frac{3T}{2} - \frac{T}{2}} \Rightarrow y + 1 = \frac{t}{T} - \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{T}t$$

La loro somma è $\frac{1}{2} - \frac{1}{T}t + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{T}t\right) = -1$.

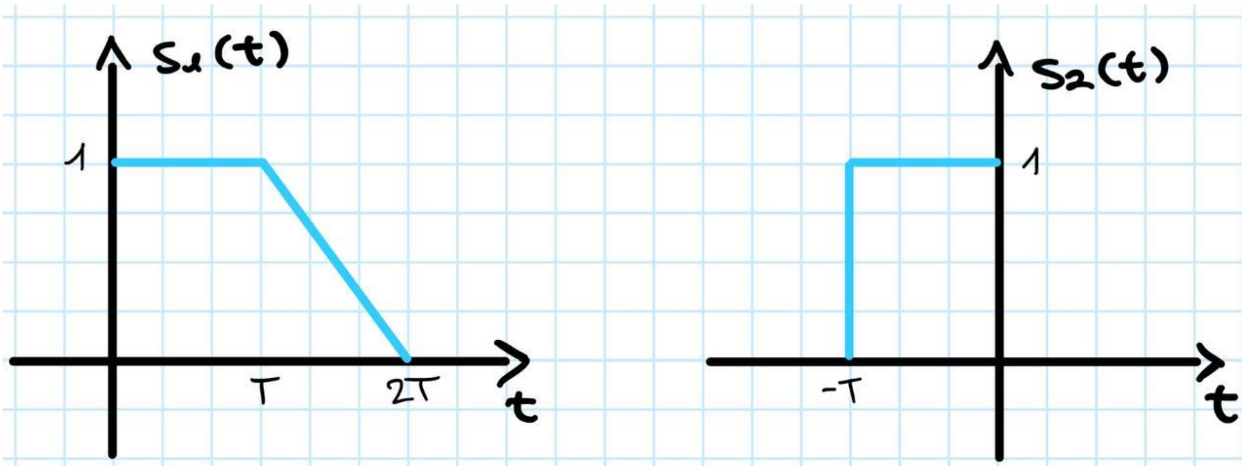


Per ottenere $\phi(t)$ dobbiamo integrare graficamente il precedente:



ESERCIZIO 15

Calcolare la convoluzione tra i seguenti segnali:

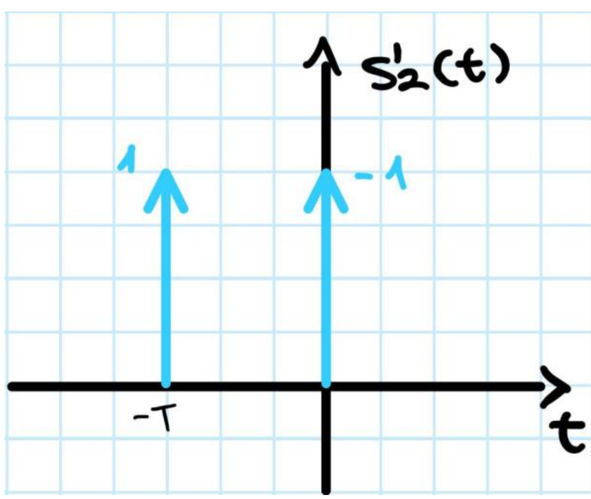


SOLUZIONE:

Sfruttiamo la proprietà di derivazione della convoluzione:

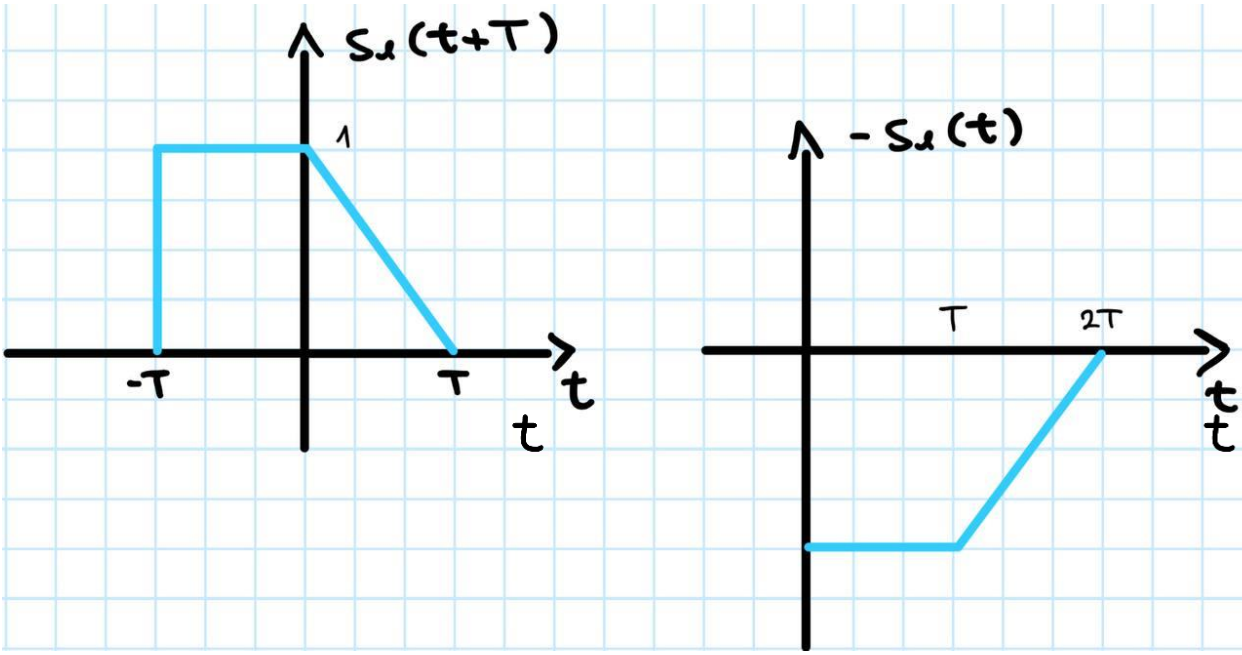
$\phi'(t) = [s_1(t) * s_2(t)]' = s_1'(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2'(t)$

Deriviamo il segnale più semplice, ovvero $s_2(t)$:



$s_2'(t) = \delta(t+T) - \delta(t)$

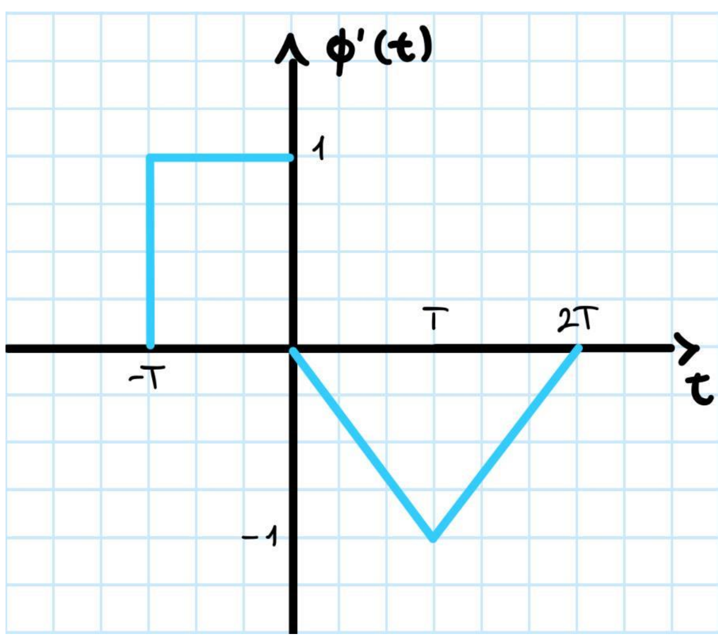
$\phi'(t) = s_1(t) * s_2'(t) = s_1(t) * [\delta(t+T) - \delta(t)] = s_1(t+T) - s_1(t)$



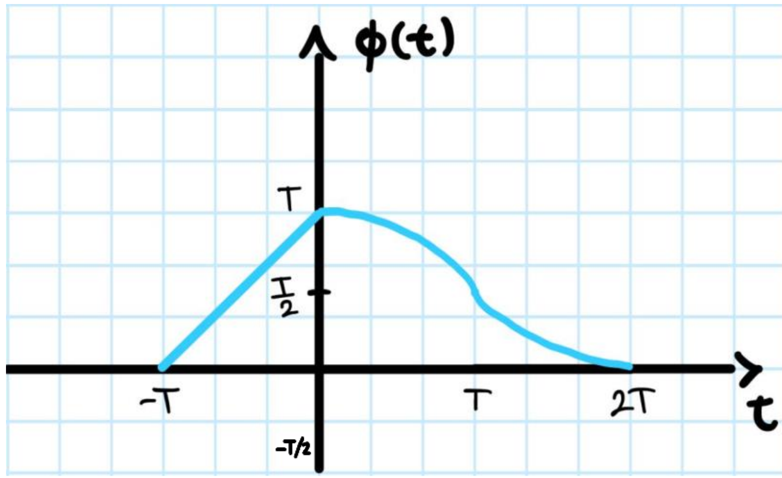
Sommiamo i tratti in comune dei due segnali in $[0, T]$:

$$y = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{0 - 1}{T - 0} \cdot t = 1 - \frac{1}{T} t$$

La loro somma è $1 - \frac{1}{T} t + (-1) = -\frac{1}{T} t$.



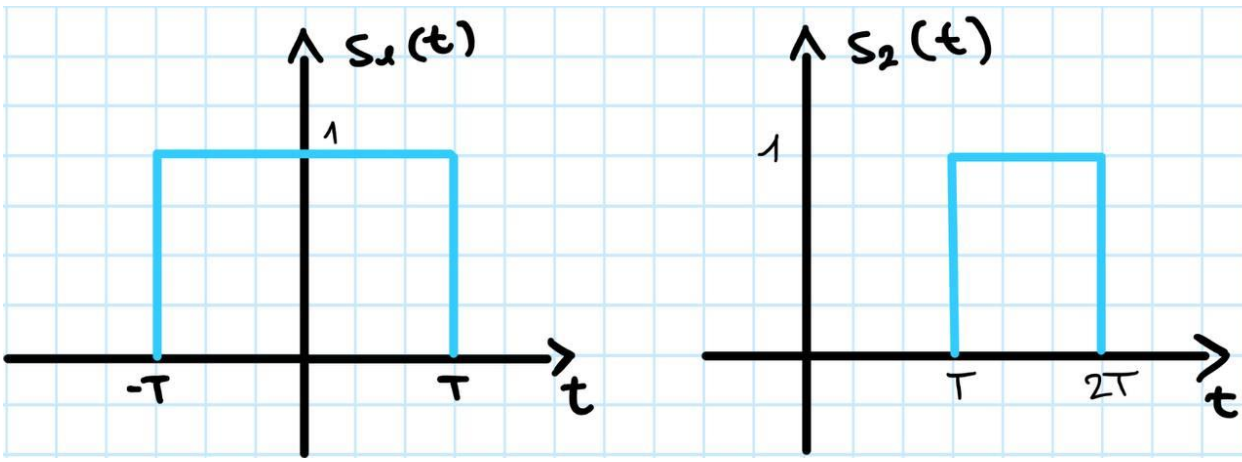
Per ottenere $\phi(t)$ dobbiamo integrare graficamente il precedente:



φ(t)
T
T/2
-T/2
-T
T
2T
t

ESERCIZIO 29

Calcolare la convoluzione tra i seguenti segnali:

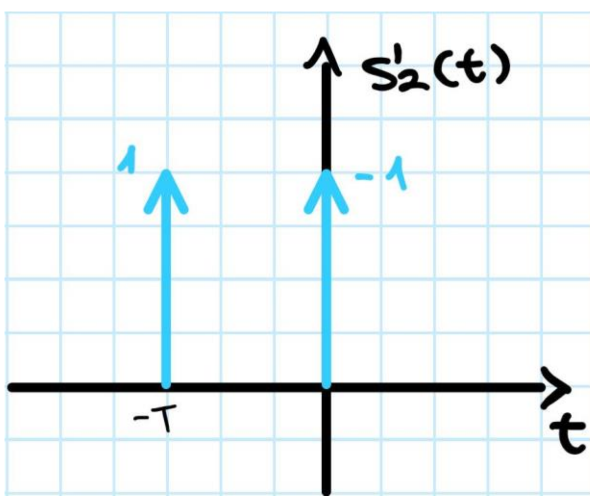


SOLUZIONE:

Sfruttiamo la proprietà di derivazione della convoluzione:

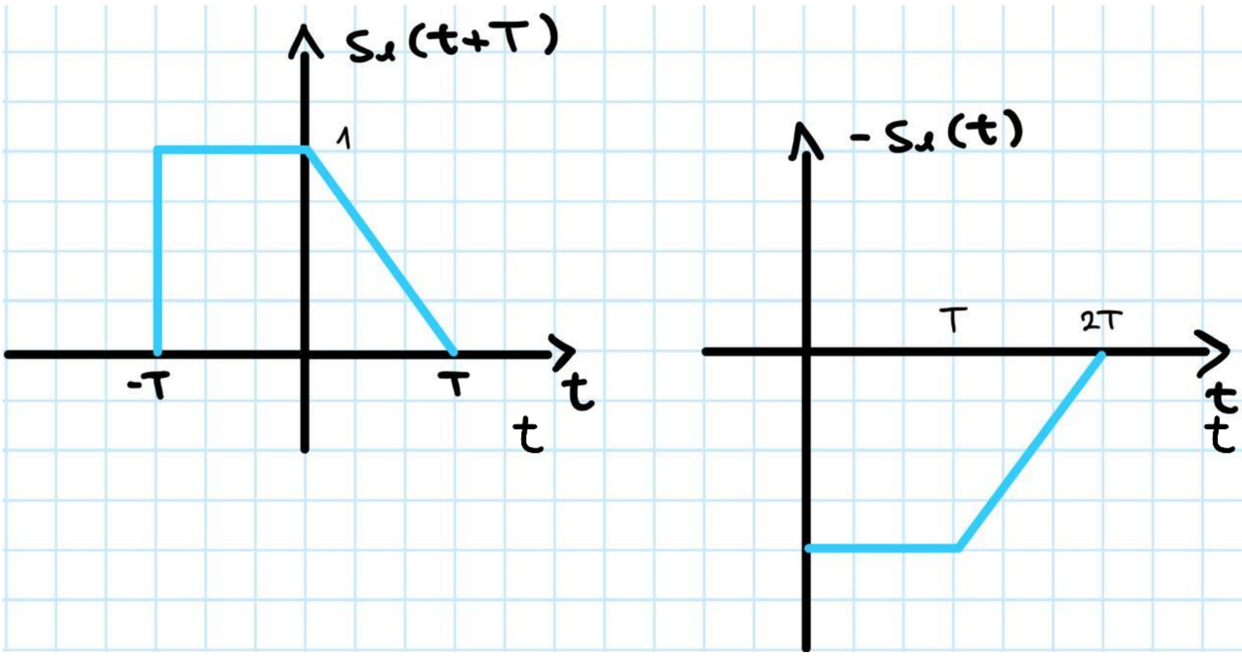
$\phi'(t) = [s_1(t) * s_2(t)]' = s_1'(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2'(t)$

Deriviamo il segnale più semplice, ovvero $s_2(t)$:



$s_2'(t) = \delta(t + T) - \delta(t)$

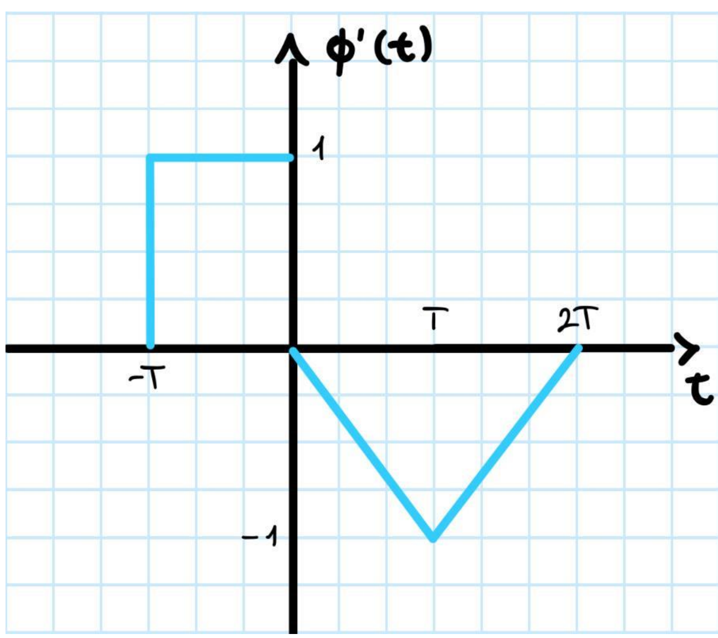
$\phi'(t) = s_1(t) * s_2'(t) = s_1(t) * [\delta(t + T) - \delta(t)] = s_1(t + T) - s_1(t)$



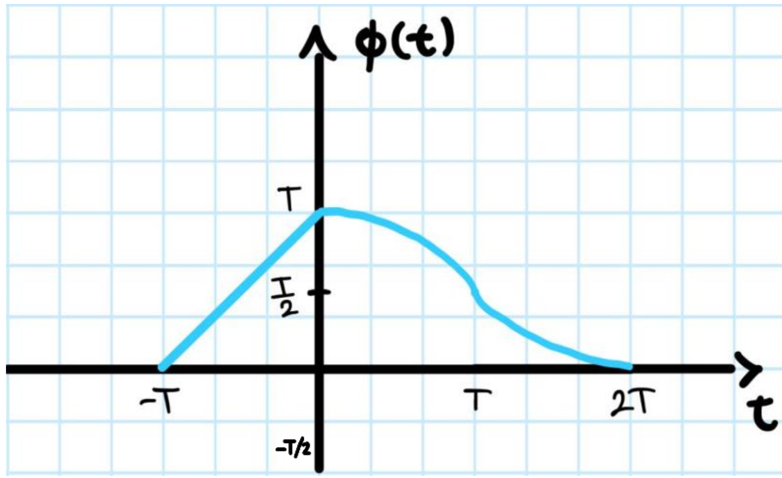
Sommiamo i tratti in comune dei due segnali in $[0, T]$:

$$y = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{0 - 1}{T - 0} \cdot t = 1 - \frac{1}{T} t$$

La loro somma è $1 - \frac{1}{T} t + (-1) = -\frac{1}{T} t$.



Per ottenere $\phi(t)$ dobbiamo integrare graficamente il precedente:



φ(t)
T
T/2
-T
T
2T
t
-T/2

ESERCIZIO 31

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 39

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 48

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 49

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 63

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 64

A

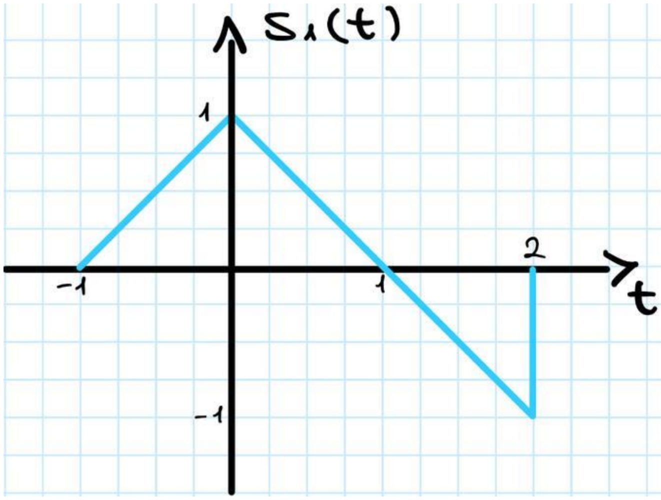
SOLUZIONE:

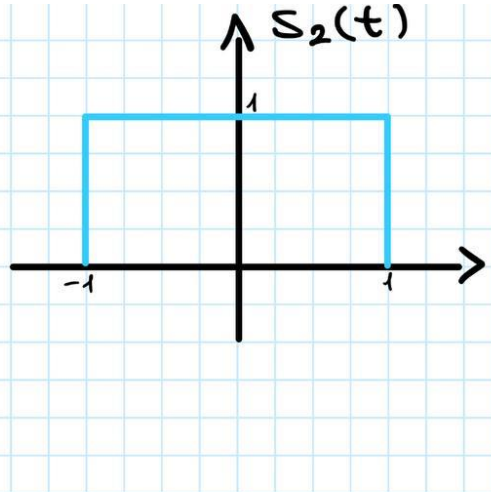
A

MUTUA CORRELAZIONE

ESERCIZIO 1

Calcolare la mutua correlazione tra i seguenti segnali:





SOLUZIONE:

Per il teorema di Wiener-Khinchine:

$$\mathfrak{F}[\gamma_{12}(\tau)] = W_{12}(f) = S_1(f) \cdot S_2^*(f)$$

Per ottenere la funzione di mutua correlazione $\gamma_{12}(\tau)$ dobbiamo antitrasformare ambo i membri:

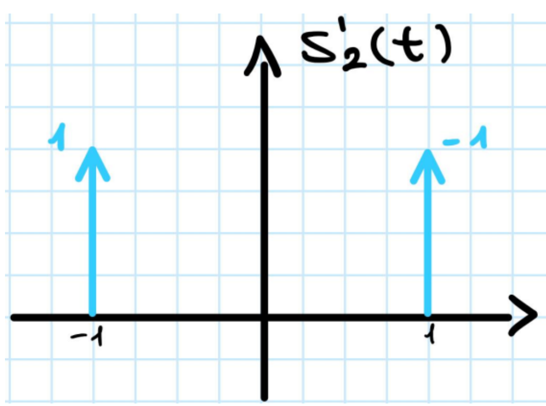
$$\gamma_{12}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}[S_1(f) \cdot S_2^*(f)] = s_1(t) * s_2^*(-t) = s_1(t) * s_2(-t) =$$ $\boxed{s_2(t) \text{ è un segnale reale}}$

$$= s_1(t) * s_2(t)$$ $\boxed{s_2(t) \text{ è un segnale pari}}$

Sfruttiamo la proprietà di derivazione della convoluzione:

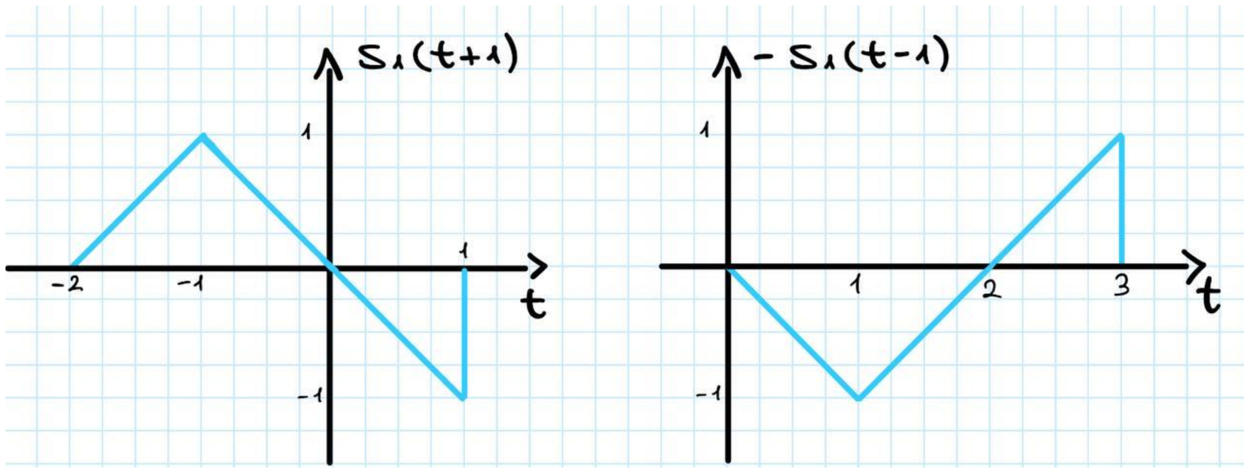
$$\gamma_{12}'(\tau) = [s_1(t) * s_2(t)]' = s_1'(t) * s_2(t) = s_1(t) * s_2'(t)$$

Deriviamo il segnale più semplice, ovvero $s_2(t)$:



$s_2'(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

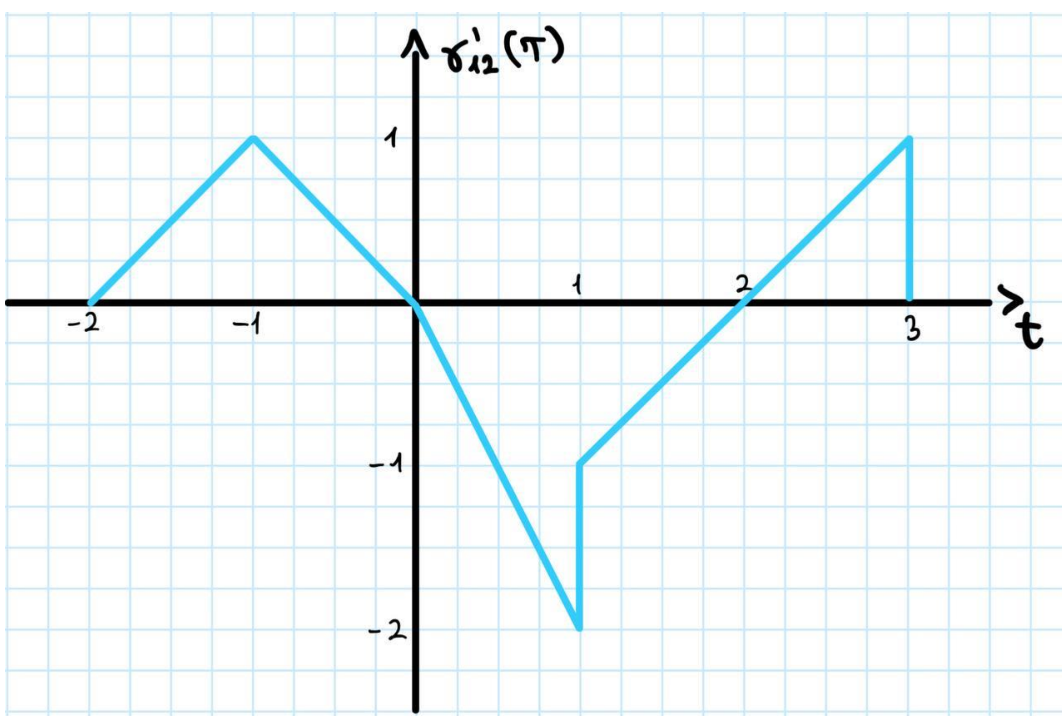
$\gamma_{12}'(\tau) = s_1(t) * s_2'(t) = s_1(t) * [\delta(t+1) - \delta(t-1)] = s_1(t+1) - s_1(t-1)$



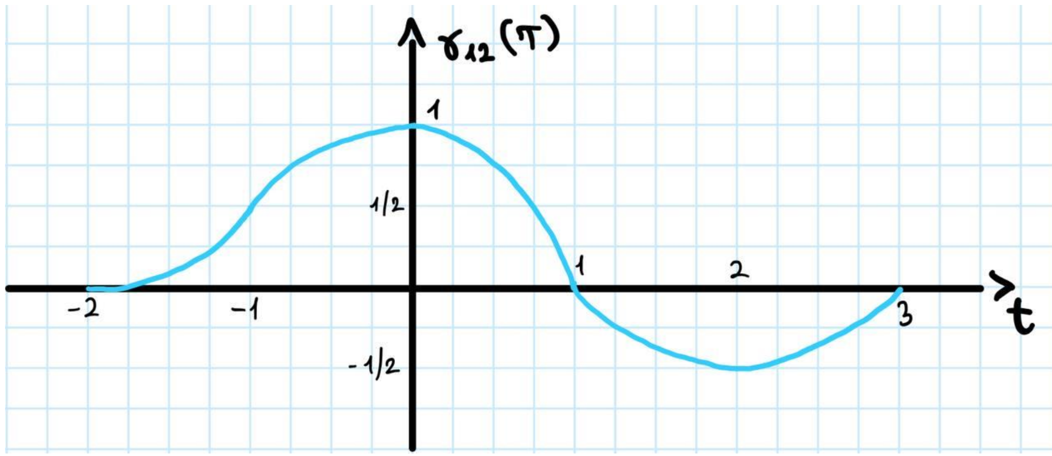
Sommiamo i tratti in comune dei due segnali, in questo caso le rette in [0,1] aventi medesima equazione:

$$y = 0 + mt = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = \frac{-1-0}{1-0} \cdot t = -t$$

La loro somma è $-t + (-t) = -2t$.



Per ottenere $\gamma_{12}(\tau)$ dobbiamo integrare graficamente il precedente:



$r_{12}(\tau)$
1
1/2
-1/2
-2
-1
1
2
3
t

ESERCIZIO 16

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 18

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 62

A

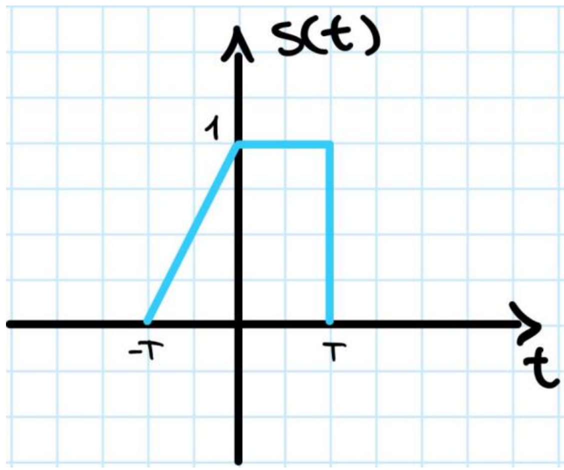
SOLUZIONE:

A

DENSITÀ SPETTRALE DI ENERGIA

ESERCIZIO 3

Calcolare la densità spettrale di energia del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

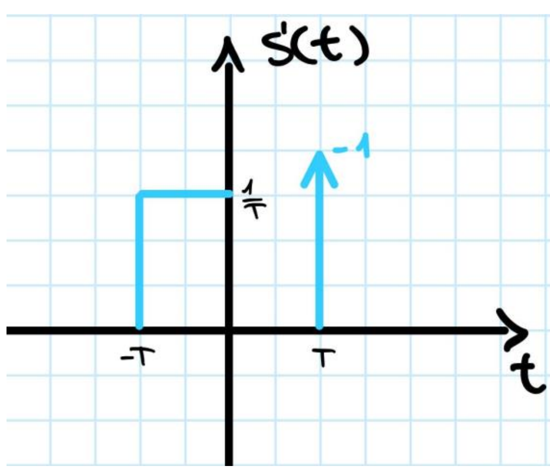
$$y = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{1 - 0}{0 - (-T)} \cdot t = 1 + \frac{1}{T} t$$

$$\Rightarrow s(t) = \left(1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

La densità spettrale di energia è così definita:

$$W(f) = |S(f)|^2 = S(f) \cdot S^*(f)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto limitato (a energia finita). Per farlo, deriviamo dapprima $s(t)$:



$$s'(t) = \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) - \delta(t - T)$$

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = \frac{1}{T} \cdot Tsinc(fT) \cdot e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{-j2\pi fT} =$$

$$= sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - e^{-j2\pi fT}$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} = \frac{sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

$$S^*(f) = \frac{sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} - e^{j2\pi fT}}{-j2\pi f}$$

$$W(f) = S(f) \cdot S^*(f) =$$

$$= \left[\frac{sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}\right] \cdot \left[\frac{sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} - e^{j2\pi fT}}{-j2\pi f}\right] =$$

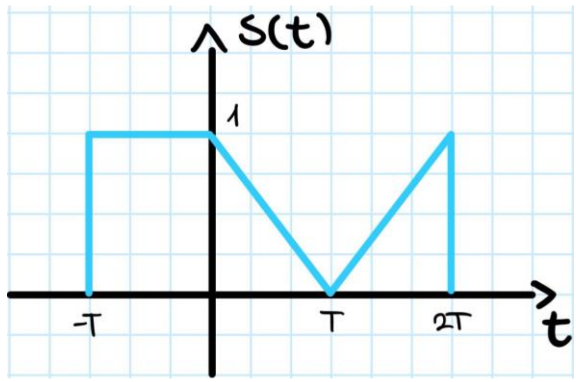
$$= \frac{\left[sinc(fT) \cdot e^{j\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right] \cdot \left[sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} - e^{j2\pi fT}\right]}{4\pi^2 f^2} =$$

$$= \frac{sinc^2(fT) \cdot e^{j(\pi fT - \pi fT)} - sinc(fT) \cdot e^{j(\pi fT + 2\pi fT)} - sinc(fT) \cdot e^{j(\pi fT - \pi fT)} + e^{j(2\pi fT - 2\pi fT)}}{4\pi^2 f^2} =$$

$$= \frac{sinc^2(fT) - sinc(fT) \cdot e^{j3\pi fT} - sinc(fT) + 1}{4\pi^2 f^2}$$

ESERCIZIO 17

Calcolare la densità spettrale di energia del seguente segnale:



SOLUZIONE:

Scriviamo l'espressione analitica del segnale:

$$y_1 = 1 + mt = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = 1 + \frac{0 - 1}{T - 0} \cdot t = 1 - \frac{1}{T} t$$

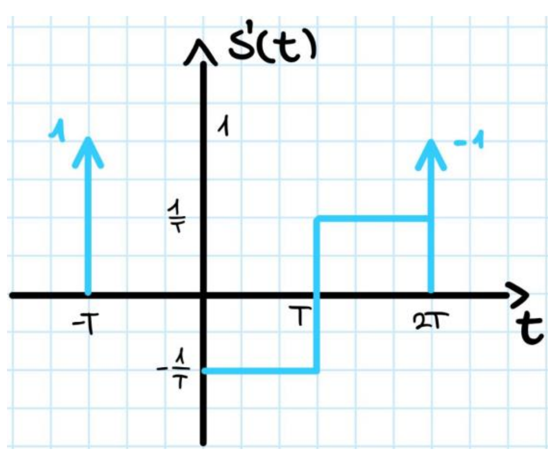
$$y_2 = -1 + mt = -1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot t = -1 + \frac{1 - 0}{2T - T} \cdot t = -1 + \frac{1}{T} t$$

$$\Rightarrow s(t) = rect\left(\frac{t + T/2}{T}\right) + \left(1 - \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \left(-1 + \frac{1}{T} t\right) \cdot rect\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$$

La densità spettrale di energia è così definita:

$$W(f) = |S(f)|^2 = S(f) \cdot S^*(f)$$

Dobbiamo calcolare $S(f)$ considerando che $s(t)$ è a supporto limitato (a energia finita). Per farlo, deriviamo dapprima $s(t)$:



$$s'(t) = \delta(t+T) - \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \frac{1}{T} \cdot rect\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right) - \delta(t - 2T)$$

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = e^{j2\pi fT} - \frac{1}{T} \cdot Tsinc(fT) \cdot e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \cdot Tsinc(fT) \cdot e^{-j2\pi f\frac{3T}{2}} - e^{-j2\pi f2T} =$$

$$= e^{j2\pi fT} - sinc(fT) \cdot e^{-j\pi fT} + sinc(fT) \cdot e^{-j3\pi fT} - e^{-j4\pi fT} =$$

$$= e^{j2\pi fT} - e^{-j4\pi fT} - sinc(fT) \cdot (e^{-j\pi fT} - e^{-j3\pi fT})$$

$$S(f) = \frac{\mathfrak{F}[s'(t)]}{j2\pi f} = \frac{e^{j2\pi fT} - e^{-j4\pi fT} - sinc(fT) \cdot (e^{-j\pi fT} - e^{-j3\pi fT})}{j2\pi f}$$

$$S^*(f) = \frac{e^{-j2\pi fT} - e^{j4\pi fT} - sinc(fT) \cdot (e^{j\pi fT} - e^{j3\pi fT})}{-j2\pi f}$$

$$W(f) = S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2 =$$

$$= \left|\frac{e^{j2\pi fT} - e^{-j4\pi fT} - sinc(fT) \cdot \left(e^{-j\pi fT} - e^{-j3\pi fT}\right)}{j2\pi f}\right|^2$$

Semplificare in questo caso è superfluo (oltre ad essere inutilmente dispendioso in termini di tempo e calcoli).

ESERCIZIO 28

A

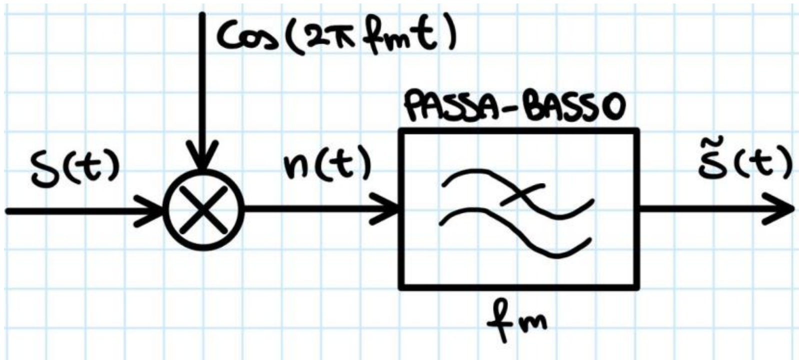
SOLUZIONE:

A

SISTEMI DI ELABORAZIONE

ESERCIZIO 10

Si determini il segnale in uscita del seguente sistema di elaborazione:



SOLUZIONE:

$n(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_m t)$

$$N(f) = \mathfrak{F}[n(t)] = S(f) * \frac{1}{2}[\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)] =$$

$$= \frac{1}{2}S(f) * \delta(f - f_m) + \frac{1}{2}S(f) * \delta(f + f_m) =$$

$$= \frac{1}{2}S(f - f_m) + \frac{1}{2}S(f + f_m)$$

$$\tilde{S}(f) = N(f) \cdot \sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right) = \left[\frac{1}{2}S(f - f_m) + \frac{1}{2}S(f + f_m)\right] \cdot \sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)$$

$$\tilde{s}(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\tilde{S}(f)] = \mathfrak{F}^{-1}\left[\left[\frac{1}{2}S(f - f_m) + \frac{1}{2}S(f + f_m)\right] \cdot \sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right] =$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}S(f - f_m) + \frac{1}{2}S(f + f_m)\right] * \mathfrak{F}^{-1}\left[\sqcap\left(\frac{f}{2f_m}\right)\right] =$$

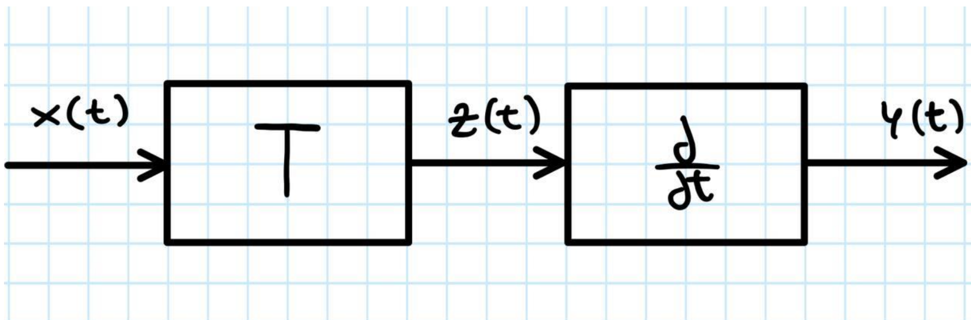
$$= \frac{1}{2}s(t) \cdot \left(e^{-j2\pi f_m t} + e^{j2\pi f_m t}\right) * 2f_m sinc(2f_m t) =$$

$$= s(t) \cdot \cos(2\pi f_m t) * 2f_m sinc(2f_m t) = n(t) * h(t)$$

Dato che l'uscita è pari alla convoluzione tra l'ingresso del filtro passa basso e la risposta all'impulso del sistema, possiamo affermare che esso è LTI.

ESERCIZIO 33

Sia $x(t)$ un segnale passabasso con frequenza di banda f_m e densità spettrale costante. Determinare il valore quadratico medio dell'uscita $y(t)$ del seguente sistema di elaborazione:



SOLUZIONE:

$$z(t) = x(t-T)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} x(t-T)$$

Lavoriamo nel dominio della frequenza:

$$Z(f) = \mathfrak{F}[x(t-T)] = X(f)e^{-j2\pi fT}$$

Ma $x(t)$ è supposto passabasso, dunque sappiamo che:

$$X(f) = X(f) \cdot \sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right)$$

$$\Rightarrow Z(f) = X(f) \cdot \sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right) e^{-j2\pi fT}$$

Allora:

$$Y(f) = \mathfrak{F}\left[\frac{d}{dt} x(t-T)\right] = j2\pi f \cdot X(f) \cdot \sqcap\left(\frac{f}{f_m}\right) e^{-j2\pi fT}$$

Essendo il sistema LTI:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = j2\pi f \cdot \prod\left(\frac{f}{f_m}\right) e^{-j2\pi fT}$$

Inoltre:

$$W_y(f) = |H(f)|^2 \cdot W_x(f) =$$

$$= 4\pi^2 f^2 \cdot \prod\left(\frac{f}{f_m}\right) \cdot W_x(f)$$

Ma $W_x(f)$ è costante per ipotesi:

$$\Rightarrow W_y(f) = 4\pi^2 f^2 \cdot \prod\left(\frac{f}{f_m}\right) \cdot \alpha$$

Dunque:

$$\overline{y^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f)\, df = \int_{-\frac{f_m}{2}}^{\frac{f_m}{2}} 4\pi^2 f^2 \alpha\, df = 4\pi^2 \alpha \int_{-\frac{f_m}{2}}^{\frac{f_m}{2}} f^2\, df =$$

$$= 4\pi^2 \alpha \cdot \left[\frac{f^3}{3}\right]_{-\frac{f_m}{2}}^{\frac{f_m}{2}} = 4\pi^2 \alpha \cdot \left[\frac{f_m^3}{24} + \frac{f_m^3}{24}\right] = 4\pi^2 \alpha \cdot \frac{f_m^3}{12} = \frac{\alpha}{3} \pi^2 f_m^3$$

PROBABILITÀ

ESERCIZIO 12

Un ricevitore riceve 7 bit e la probabilità che lo riceva errato è pari a 10^{-3}. Qual è la probabilità di ricevere non più di 5 bit errati?

SOLUZIONE:

Ricevere non più di 5 bit errati significa:

- Riceverli tutti correttamente.
- Riceverne solo 1 errato.
- Riceverne 2 errati.
- Riceverne 3 errati.
- Riceverne 4 errati.
- Riceverne 5 errati.

I quali sono eventi disgiunti le cui probabilità devono essere sommate. In questo caso conviene procedere con la probabilità complementare, ovvero la probabilità di ricevere non meno di 6 bit errati. Ricevere non meno di 6 bit errati significa:

- Riceverli tutti errati.
- Riceverne 6 errati (1 corretto).

I quali anch'essi sono eventi disgiunti le cui probabilità devono essere sommate (conviene infatti calcolare due probabilità piuttosto che sei). Se la probabilità di ricevere un bit errato è pari a 10^{-3}, allora quella di riceverne uno corretto sarà pari a:

$$\Pr(BE) = 10^{-3} \Rightarrow \Pr(BC) = 1 - 10^{-3}$$

La formula che dobbiamo applicare per la risoluzione del quesito è quella della distribuzione binomiale:

$$\Pr(BE = k) = \binom{n}{k} \cdot \Pr(BE)^k \Pr(BC)^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \Pr(BE)^k \Pr(BC)^{n-k}$$

Dove k sono i bit errati ed n il numero di bit ricevuti.

La probabilità di ricevere non meno di 6 bit errati è quindi pari a:

$$\Pr(BE \geq 6) = \Pr(BE = 6) + \Pr(BE = 7) =$$

$$= \binom{7}{6} \cdot \Pr(BE)^6 \Pr(BC)^1 + \binom{7}{7} \cdot \Pr(BE)^7 \Pr(BC)^0 =$$

$$= \frac{7!}{6! \cdot (7-6)!} \cdot \Pr(BE)^6 \Pr(BC)^1 + \frac{7!}{7! \cdot (7-7)!} \cdot \Pr(BE)^7 \Pr(BC)^0 =$$

$$= \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1!} \cdot \Pr(BE)^6 \Pr(BC)^1 + \frac{7!}{7! \cdot 1} \cdot \Pr(BE)^7 \Pr(BC)^0 =$$

$$= 7 \cdot \Pr(BE)^6 \cdot \Pr(BC)^1 + \Pr(BE)^7 =$$

$$= 7 \cdot 10^{-18} \cdot (1 - 10^{-3}) + 10^{-21}$$

Dunque, la probabilità di ricevere non più di 5 bit errati è pari a:

$$\Pr(BE \leq 5) = 1 - [7 \cdot 10^{-18} \cdot (1 - 10^{-3}) + 10^{-21}]$$

Più in generale per calcolare la probabilità di un evento in questo tipo di esercizi si utilizza la formula:

$$\Pr(E) = \binom{n}{k} \cdot \Pr(S)^k \Pr(INS)^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \Pr(S)^k \Pr(INS)^{n-k}$$

Dove n è il numero dei tentativi, k è il numero di successi, $\Pr(S)$ è la probabilità del successo e $\Pr(INS)$ è la probabilità dell'insuccesso.

ESERCIZIO 13

Qual è la probabilità di ottenere un terno secco al lotto? (Unica ruota)

SOLUZIONE:

Un terno è una combinazione di tre numeri giocati. Per vincere il terno secco, tutti e tre i numeri devono uscire tra i cinque estratti su una singola ruota. La probabilità di ottenere un terno secco si ottiene tramite la seguente formula:

$$\Pr(terno\ secco) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

I casi possibili sono tutte le possibili cinquine, ovvero tutte le possibili combinazioni di 90 numeri presi a cinque a cinque:

$$casi\ possibili = \binom{90}{5}$$

I casi favorevoli sono tutte le possibili cinquine, considerate fissando tre numeri e con gli altri due variabili. Dopo aver fissato tre numeri, bisogna combinare gli altri 87 a due a due:

$$casi\ favorevoli = \binom{87}{2}$$

Dunque:

$$\Pr(terno\ secco) = \frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{87!}{2! \cdot (87-2)!}}{\frac{90!}{5! \cdot (90-5)!}} = \frac{\frac{87 \cdot 86 \cdot 85!}{2! \cdot 85!}}{\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{5! \cdot 85!}} =$$

$$= \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{11748}$$

Nel gioco del lotto l’ordine di uscita dei numeri non conta.

ESERCIZIO 21

Un ricevitore si connette casualmente ad una di tre sorgenti di segnale s_1, s_2 ed s_3 che emettono due messaggi A e B secondo il seguente schema:

$$s_1 = \begin{cases} A \quad \Pr(A) = \dfrac{7}{10} \\ B \quad \Pr(B) = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

$$s_2 = \begin{cases} A \quad \Pr(A) = \dfrac{1}{2} \\ B \quad \Pr(B) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$s_3 = \begin{cases} A \quad \Pr(A) = \dfrac{3}{5} \\ B \quad \Pr(B) = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Supposto che il ricevitore riceva il messaggio A, qual è la probabilità che questo provenga dalla sorgente s_3?

SOLUZIONE:

Quella cercata è la probabilità che il messaggio ricevuto provenga da s_3 condizionata al fatto che il messaggio sia A:

$$\Pr(E_{s_3}|E_A) = \frac{\Pr(E_A|E_{s_3}) \cdot \Pr(E_{s_3})}{\Pr(E_A)}$$

La probabilità di ricevere un qualsiasi messaggio dalle tre sorgenti è la stessa:

$$\Pr\left(E_{s_1}\right) + \Pr\left(E_{s_2}\right) + \Pr\left(E_{s_3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \Pr(E_{s_1}) = \Pr(E_{s_2}) = \Pr(E_{s_3}) = \frac{1}{3}$$

La probabilità di ricevere il messaggio A si ricava tramite il teorema della probabilità totale:

$$\Pr(E_A) = \sum_{i=1}^{3} \Pr\left(E_A \middle| E_{s_i}\right) \cdot \Pr\left(E_{s_i}\right) =$$

$$= \Pr\left(E_A \middle| E_{s_1}\right) \cdot \Pr\left(E_{s_1}\right) + \Pr\left(E_A \middle| E_{s_2}\right) \cdot \Pr\left(E_{s_2}\right) + \Pr\left(E_A \middle| E_{s_3}\right) \cdot \Pr\left(E_{s_3}\right) =$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

La probabilità di ricevere il messaggio A condizionata al fatto che provenga dalla terza sorgente è pari a:

$$\Pr(E_A|E_{s_3}) = \frac{3}{5}$$

Dunque:

$$\Pr(E_{s_3}|E_A) = \frac{\Pr(E_A|E_{s_3}) \cdot \Pr(E_{s_3})}{\Pr(E_A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$$

ESERCIZIO 23

In una scatola A sono riposti 16 pezzi difettosi e 4 funzionanti, mentre in una scatola B sono riposti 8 pezzi difettosi e 5 funzionanti. Supponiamo di lanciare un dado: se esce 1 o 2 prendiamo un pezzo dalla scatola A, altrimenti dalla scatola B. Qual è la probabilità di estrarre un pezzo difettoso?

SOLUZIONE:

La probabilità di pescare un pezzo dalla scatola A o B dipende dal risultato del lancio del dado:

$$\Pr(S_A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(S_B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

La probabilità di pescare un pezzo difettoso condizionata al fatto che provenga dalla scatola A è pari a:

$$\Pr(P_D|S_A) = \frac{16}{20}$$

La probabilità di pescare un pezzo difettoso condizionata al fatto che provenga dalla scatola B è pari a:

$$\Pr(P_D|S_A) = \frac{8}{13}$$

La probabilità di estrarre un pezzo difettoso si ricava tramite il teorema della probabilità totale:

$$\Pr(P_D) = \sum_{i=1}^{2} \Pr(P_D|S_i) \cdot \Pr(S_i) =$$

$$= \Pr(P_D|S_A) \cdot \Pr(S_A) + \Pr(P_D|S_B) \cdot \Pr(S_B) =$$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{13} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{60} + \frac{16}{39} = \frac{4}{15} + \frac{16}{39} = \frac{44}{65} \approx 68\%$$

ESERCIZIO 54

Un ricevitore riceve 5 bit e la probabilità che lo riceva errato è pari a $\frac{1}{10}$. Qual è la probabilità di ricevere non più di 2 bit errati?

SOLUZIONE:

Ricevere non più di 2 bit errati significa:

- Riceverli tutti correttamente.
- Riceverne solo 1 errato.
- Riceverne 2 errati.

Se la probabilità di ricevere un bit errato è pari a $\frac{1}{10}$, allora quella di riceverne uno corretto sarà pari a:

$$\Pr(BE) = \frac{1}{10} \Rightarrow \Pr(BC) = 1 - \frac{1}{10}$$

La formula che dobbiamo applicare per la risoluzione del quesito è quella della distribuzione binomiale:

$$\Pr(E) = \binom{n}{k} \cdot \Pr(S)^k \Pr(INS)^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \Pr(S)^k \Pr(INS)^{n-k}$$

Dove n è il numero dei tentativi, k è il numero di successi, $\Pr(S)$ è la probabilità del successo e $\Pr(INS)$ è la probabilità dell'insuccesso. La probabilità di ricevere non più di 2 bit errati è quindi pari a:

$$\Pr(BE \leq 2) = \Pr(BE = 0) + \Pr(BE = 1) + \Pr(BE = 2) =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot \Pr(BE)^0 \Pr(BC)^5 + \binom{5}{1} \cdot \Pr(BE)^1 \Pr(BC)^4 + \binom{5}{2} \cdot \Pr(BE)^2 \Pr(BC)^3 =$$

$$= \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} \cdot \Pr(BE)^0 \Pr(BC)^5 + \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} \cdot \Pr(BE)^1 \Pr(BC)^4 + \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \Pr(BE)^2 \Pr(BC)^3 =$$

$$= \frac{5!}{1 \cdot 5!} \cdot \Pr(BE)^0 \Pr(BC)^5 + \frac{5 \cdot 4!}{1 \cdot 4!} \cdot \Pr(BE)^1 \Pr(BC)^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} \cdot \Pr(BE)^2 \Pr(BC)^3 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^3$$

ESERCIZIO 60

A

SOLUZIONE:

A

DENSITÀ DI PROBABILITÀ

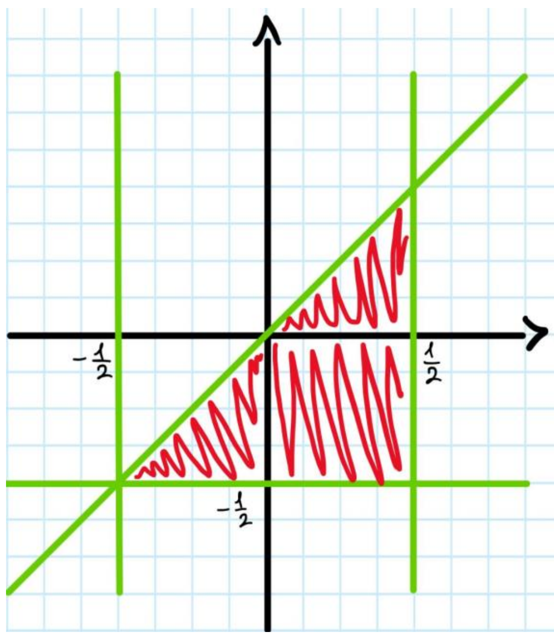
ESERCIZIO 22

Siano X e Y due variabili aleatorie caratterizzate dalla seguente densità di probabilità congiunta:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq x \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Ricavare le densità di probabilità marginali e verificare la condizione di normalizzazione.

SOLUZIONE:



Ricaviamo $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ per marginalizzazione:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} 2\,dy = \begin{cases} 2x+1 & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dx = \int_{y}^{\frac{1}{2}} 2\,dx = \begin{cases} 1-2y & y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Se volessimo verificare la correttezza di quanto fatto, dovremmo cercare di ottenere la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dx = 2\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 + 1 = 1 \quad OK$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_Y(y)\,dy = -2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y\,dy + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dy = -2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 + 1 = 1 \quad OK$$

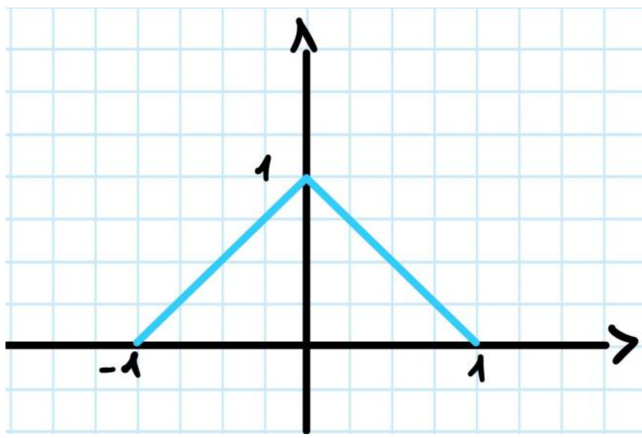
ESERCIZIO 25

Siano X e Y due variabili aleatorie caratterizzate dalla medesima statistica del primo ordine. Sapendo che la densità di probabilità di $Z = X + Y$ è la seguente:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & |z| \geq 1 \\ 1 - |z| & |z| < 1 \end{cases}$$

Si determinino le densità di probabilità $p_X(x)$ e $p_Y(y)$.

SOLUZIONE:



Date le due variabili aleatorie X e Y, statisticamente indipendenti, allora sappiamo che la densità di probabilità di $Z = X + Y$ è pari a:

$$p_Z(z) = p_X * p_Y(z)$$

Inoltre:

$$p_X(x) = p_Y(x)$$

Trasformiamo:

$$\mathfrak{F}[p_Z(z)] = \mathfrak{F}[p_X(x)]^2$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}[p_X(x)] = \sqrt{\mathfrak{F}[p_Z(z)]}$$

$$\mathfrak{F}[p_Z(z)] = \frac{\mathfrak{F}[p_Z'(z)]}{j2\pi f}$$

$$p_Z(z) = (1 + z) \cdot \Pi\left(z + \frac{1}{2}\right) + (1 - z) \cdot \Pi\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$p'_Z(z) = \Pi\left(z + \frac{1}{2}\right) - \Pi\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathfrak{F}[p'_Z(z)] = sinc(f) \cdot e^{j\pi f} - sinc(f) \cdot e^{-j\pi f} =$$

$$= sinc(f) \cdot (e^{j\pi f} - e^{-j\pi f})$$

$$\mathfrak{F}[p_Z(z)] = \frac{\mathfrak{F}[p'_Z(z)]}{j2\pi f} = \frac{sinc(f) \cdot \left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right)}{j2\pi f} = sinc(f) \cdot \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} =$$

$$= sinc^2(f)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}[p_X(x)] = \sqrt{\mathfrak{F}[p_Z(z)]} = sinc(f)$$

$$\Rightarrow p_X(x) = \mathfrak{F}^{-1}[sinc(f)] = rect(x)$$

$$\Rightarrow p_Y(y) = rect(y)$$

Alternativamente, si poteva osservare che una tri è un caso particolare di convoluzione tra rect aventi lo stesso supporto. La tri risultante avrà supporto doppio rispetto alle rect.

ESERCIZIO 7

Calcolare la densità di probabilità di $Z = \max(X, 3Y)$ sapendo che X e Y sono uniformemente distribuite in $[0,1] \times [0,1]$.

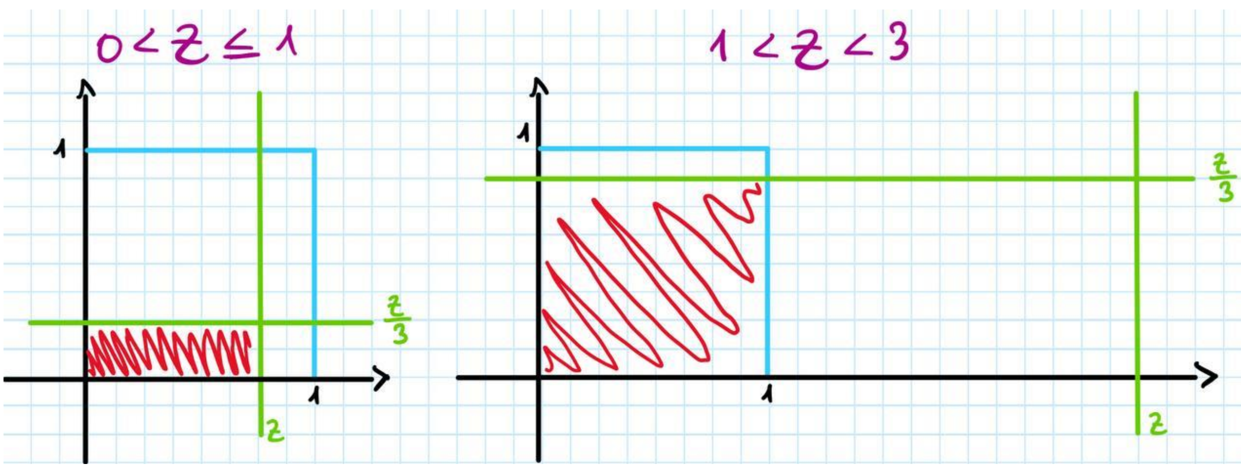
SOLUZIONE:

$$p_{XY}(x, y) = \Pi\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \Pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz}\Pr(\max(X, 3Y) \leq z) = \frac{d}{dz}\Pr(X \leq z \cap 3Y \leq z) =$$

$$= \frac{d}{dz}\Pr\left(X \leq z \cap Y \leq \frac{z}{3}\right)$$



$$P_Z(z) = \Pr\left(X \leq z \cap Y \leq \frac{z}{3}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \dfrac{z^2}{3} & 0 < z \leq 1 \\ \dfrac{z}{3} & 1 < z < 3 \\ 1 & z \geq 3 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz}P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ \dfrac{2z}{3} & 0 < z \leq 1 \\ \dfrac{1}{3} & 1 < z < 3 \\ 0 & z \geq 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 11

Calcolare la densità di probabilità di $Z = \min(X, 2Y)$ sapendo che X e Y sono uniformemente distribuite in $[0,1] \times [0,1]$.

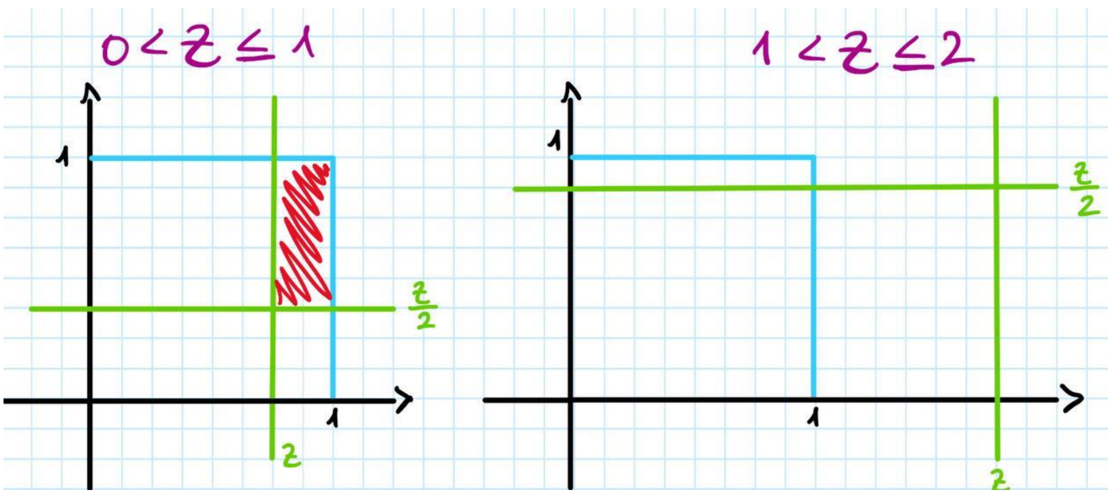
SOLUZIONE:

$$p_{XY}(x, y) = \sqcap\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sqcap\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Per definizione:

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz}\Pr(\min(X, 2Y) \le z) = \frac{d}{dz}\Pr(X \le z \cup 2Y \le z) =$$

$$= \frac{d}{dz}\Pr\left(X \le z \cup Y \le \frac{z}{2}\right) = \frac{d}{dz}\left(1 - \Pr\left(X > z \cap Y > \frac{z}{2}\right)\right)$$



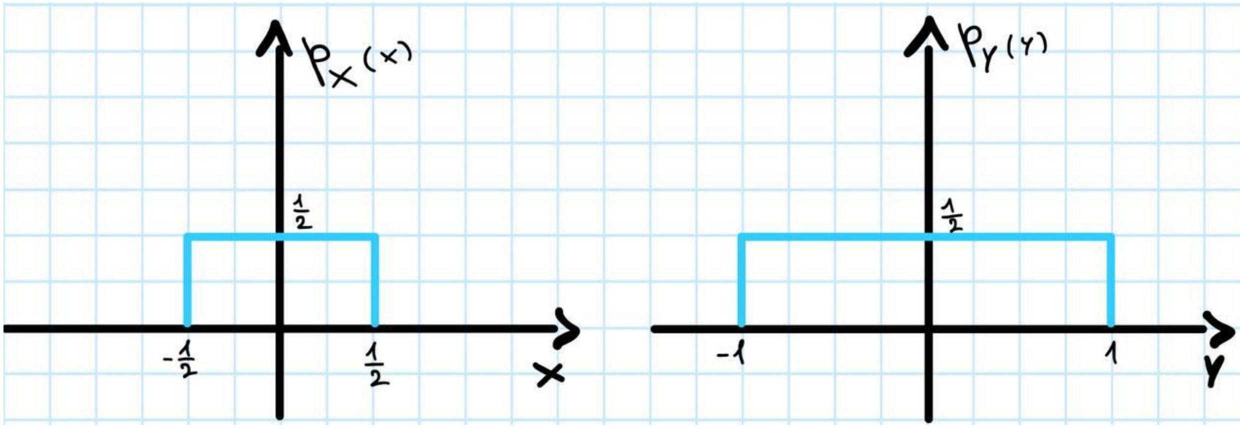
$$P_Z(z) = 1 - \Pr\left(X > z \cap Y > \frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 1 - 1 & z \le 0 \\ 1 - (1 - z) \cdot \left(1 - \frac{z}{2}\right) & 0 < z \le 1 \\ 1 - 0 & z > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{3z}{2} - \dfrac{z^2}{2} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \frac{d}{dz} P_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \frac{3}{2} - z & 0 < z \le 1 \\ 0 & z > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 24

Calcolare la densità di probabilità di $Z = \max(X, 3Y)$, sapendo che le densità di probabilità $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ sono le seguenti:



SOLUZIONE:

Si suppone che X e Y siano statisticamente indipendenti:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) = \frac{1}{2}\Pi(x) \cdot \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{y}{2}\right)$$

ESERCIZIO 35

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 44

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 46

A

SOLUZIONE:

A

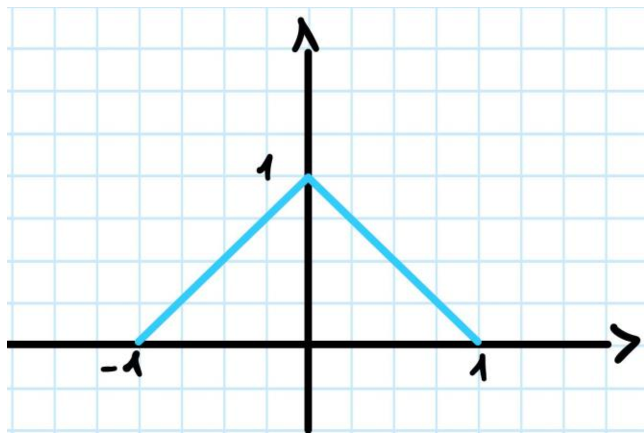
ESERCIZIO 14

Sia X una variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 - |x| & |x| < 1 \end{cases}$$

Calcolare la densità di probabilità condizionata $p_{X|X>0}(x)$.

SOLUZIONE:



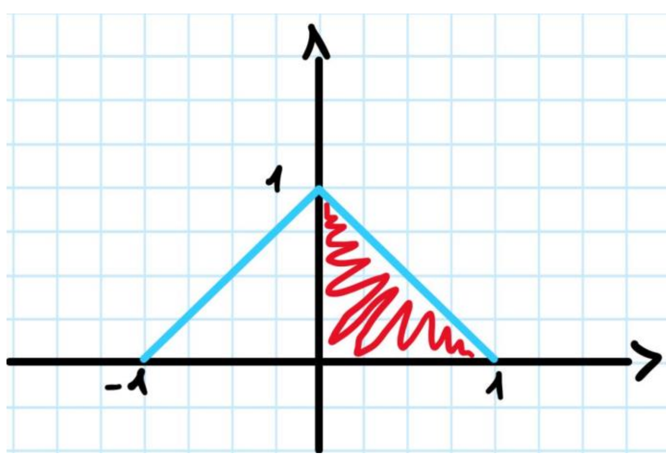
Per definizione:

$$p_{X|X>0}(x) = \frac{d}{dx} P_X(x \mid X > 0) = \frac{d}{dx} \Pr(X \leq x \mid X > 0) =$$

Formula di Bayes

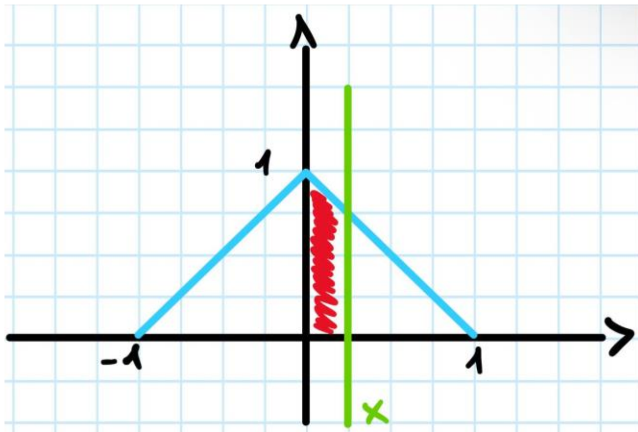
$$= \frac{d}{dx} \frac{\Pr(X \leq x \cap X > 0)}{\Pr(X > 0)}$$

Calcoliamo $\Pr(X > 0)$:



$$\Pr(X > 0) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo $\Pr(X \le x \cap X > 0)$:



$$\Pr(X \le x \cap X > 0) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{(1-x)+1}{2} \cdot x & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & x \ge 1 \end{cases} =$$

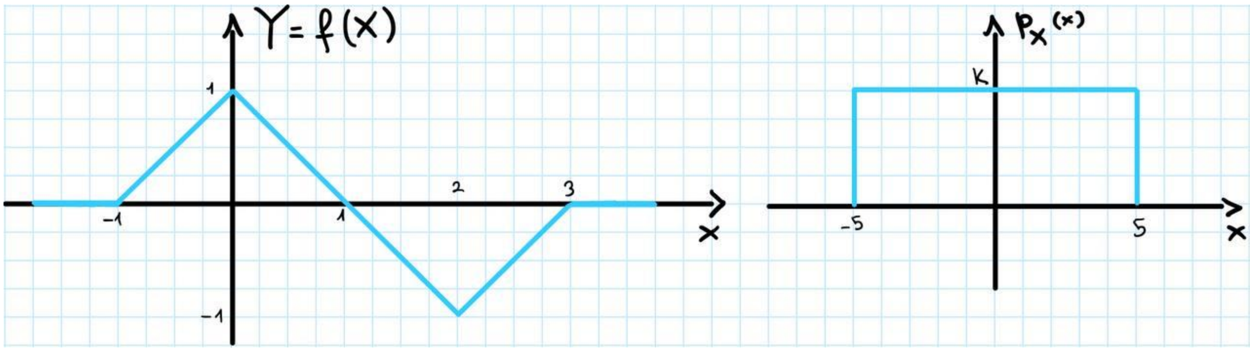
$$= \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x - \dfrac{x^2}{2} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & x \ge 1 \end{cases}$$

$$P_{X|X>0}(x) = \frac{\Pr(X \le x \cap X > 0)}{\Pr(X > 0)} = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2x - x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$p_{X|X>0}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_{X|X>0}(x)\right) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2 - 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Calcolare la densità di probabilità $p_Y(y)$ di $Y = f(X)$ nota la $p_X(x)$:



SOLUZIONE:

$$p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{1}{b_x - a_x} \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{1}{5-(-5)} \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{1}{10} \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right)$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i : f(x_i)=y, f'(x_i)\neq 0} \frac{p_X(x_i(y))}{|f'(x_i(y))|} + \sum_{y_i : f'(f^{-1}(y_i))=0} \Pr(X \in f^{-1}(y_i)) \cdot \delta(y - y_i)$$

$$y_1 = 1 + mx = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x = 1 + \frac{1-0}{0-(-1)} \cdot x = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + mx = 1 + \frac{-1-1}{2-0} \cdot x = 1 - x$$

$$y_3 = -3 + mx = -3 + \frac{0-(-1)}{3-2} \cdot x = -3 + x$$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -1 \vee y > 1 \\ (-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [3, \infty) & y = 0 \\ \{1 - y, y + 3\} & -1 \leq y < 0 \\ \{y - 1, 1 - y\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta:

$$x(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1 & y = 1 + x \\ 1 - y & y = 1 - x \\ y + 3 & y = -3 + x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & y = 1 + x \\ -1 & y = 1 - x \\ 1 & y = -3 + x \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1(y))}{|f'(x_1(y))|} + \frac{p_X(x_2(y))}{|f'(x_2(y))|} + \frac{p_X(x_3(y))}{|f'(x_3(y))|} + \Pr(X < -1)\,\delta(y) + \Pr(X > 3)\,\delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(y-1)}{|f'(y-1)|} + \frac{p_X(1-y)}{|f'(1-y)|} + \frac{p_X(y+3)}{|f'(y+3)|} + [\Pr(X < -1) + \Pr(X > 3)] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(y-1)}{|1|} + \frac{p_X(1-y)}{|-1|} + \frac{p_X(y+3)}{|1|} + \left[\int_{-5}^{-1} \frac{1}{10}\, dx + \int_{3}^{5} \frac{1}{10}\, dx\right] \cdot \delta(y) =$$

$$= p_X(y-1) + p_X(1-y) + p_X(y+3) + \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right] \cdot \delta(y)$$

Noi sappiamo che $p_X(x)$ è uniforme in $[-5,5]$, il che significa che $p_X(x)$ ha altezza $\frac{1}{10}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = \frac{1}{10} rect\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{10} rect\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{5}\delta(y) =$$

Considera le rect rispetto all'asse y

$$= \frac{1}{5} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{3}{5}\delta(y)$$

Si sommano i tratti in comune delle rect

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{3}{5}\delta(y)\, dy = \frac{1}{5}\int_{-1}^{1} 1\, dy + \frac{3}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, dy = \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 1 = 1 \;\; OK$$

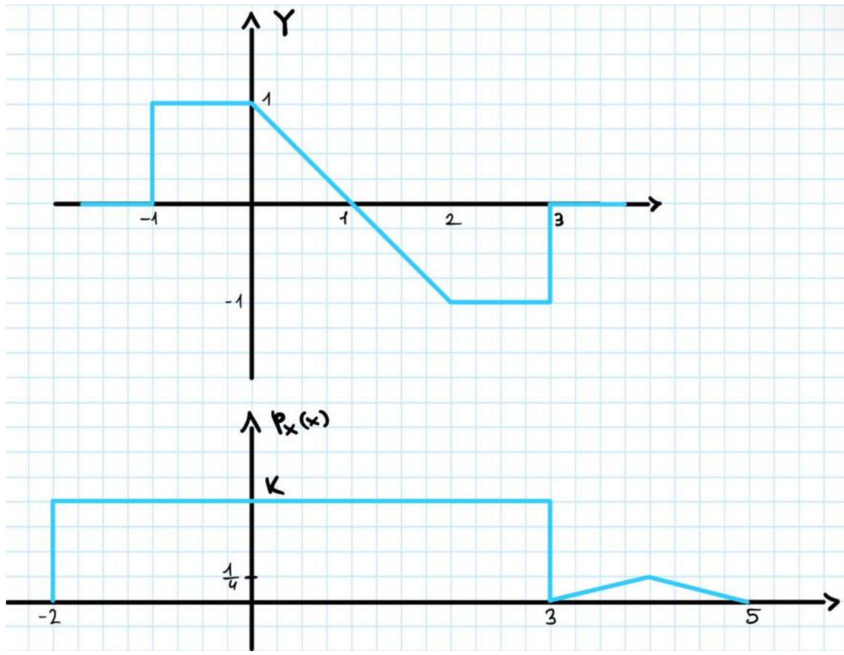
ESERCIZIO 19

UGUALE ALL'ESERCIZIO 4

SOLUZIONE:

ESERCIZIO 20

Calcolare la densità di probabilità $p_Y(y)$ di $Y = f(X)$ nota la $p_X(x)$:



SOLUZIONE:

$$p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{5}\right) + \frac{1}{4} tri(x-4)$$

Ricaviamo k tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot rect\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{5}\right) + \frac{1}{4} tri(x-4) dx =$$

$$= k\int_{-2}^{3} 1\,dx + \int_{3}^{5} \frac{1}{4} tri(x-4)\,dx = \quad \boxed{\text{Area del rettangolo + Area del triangolo}}$$

$$= 5k + \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{2} = 5k + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i : f(x_i) = y, f'(x_i) \neq 0} \frac{p_X(x_i(y))}{|f'(x_i(y))|} + \sum_{y_i : f'(f^{-1}(y_i)) = 0} \Pr(X \in f^{-1}(y_i)) \cdot \delta(y - y_i)$$

$$y_1 = 1 + mx = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x = 1 + \frac{-1-1}{2-0} \cdot x = 1 - x$$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -1 \vee y > 1 \\ (-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [3, \infty) & y = 0 \\ \{-1, 1-y\} & -1 \leq y < 0 \\ \{1-y, 1\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta:

$$x(y) = f^{-1}(y) = \{1 - y \qquad y = 1 - x$$

$$f'(x) = \{-1 \qquad y = 1 - x$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1(y))}{|f'(x_1(y))|} + [\Pr(X < -1) + \Pr(X > 3)] \cdot \delta(y) + [\Pr(-1 \leq X \leq 0)] \cdot \delta(y-1) +$$

$$+[\Pr(2 \leq X \leq 3)] \cdot \delta(y+1) =$$

$$= \frac{p_X(1-y)}{|f'(1-y)|} + \left[\int_{-2}^{-1} \frac{3}{20}\, dx + \int_3^5 \frac{1}{4} tri(x-4)\, dx\right] \cdot \delta(y) + \left[\int_{-1}^{0} \frac{3}{20}\, dx\right] \cdot \delta(y-1) +$$

$$+\left[\int_2^3 \frac{3}{20}\, dx\right] \cdot \delta(y+1) =$$

$$= \frac{p_X(1-y)}{|-1|} + \left[\frac{3}{20} + \frac{1}{4}\right] \cdot \delta(y) + \left[\frac{3}{20}\right] \cdot \delta(y-1) + \left[\frac{3}{20}\right] \cdot \delta(y+1) =$$

$$= p_X(1-y) + \frac{2}{5}\delta(y) + \frac{3}{20}\delta(y-1) + \frac{3}{20}\delta(y+1)$$

Noi sappiamo che $p_X(x)$ è uniforme in $[-2,5]$, il che significa che $p_X(x)$ ha altezza $\frac{3}{20}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = \frac{3}{20} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{2}{5}\delta(y) + \frac{3}{20}\delta(y-1) + \frac{3}{20}\delta(y+1)$$

Considera le rect rispetto all'asse y

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{20} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{2}{5}\delta(y) + \frac{3}{20}\delta(y-1) + \frac{3}{20}\delta(y+1) =$$

$$= \frac{3}{20}\int_{-1}^{1} 1\, dy + \frac{2}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy + \frac{3}{20}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-1) dy + \frac{3}{20}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y+1)\, dy =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = 1 \;\; OK$$

ESERCIZIO 26

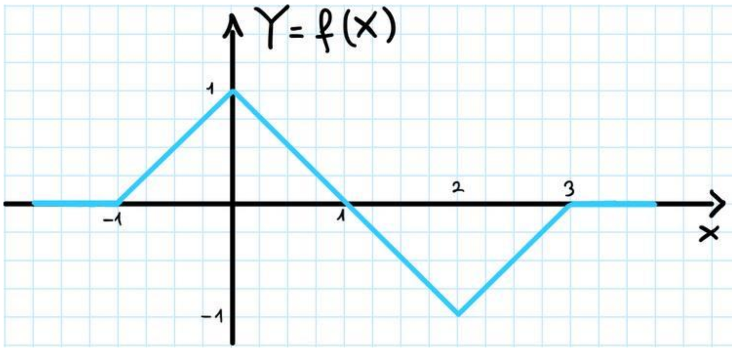
A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 34

Calcolare la densità di probabilità $p_Y(y)$ di $Y = f(X)$:



È data la $p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) + \frac{1}{4}\delta(x-3)$

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) + \frac{1}{4}\delta(x-3)$$

Troviamo k con la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot rect\left(\frac{x}{10}\right) + \frac{1}{4}\delta(x-3)dx =$$

$$= k\int_{-5}^{5} 1\,dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-3)\,dx =$$

$$= 10k + \frac{1}{4}\cdot 1 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{40}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i: f(x_i)=y, f'(x_i)\neq 0} \frac{p_X(x_i(y))}{|f'(x_i(y))|} + \sum_{y_i: f'(f^{-1}(y_i))=0} \Pr(X \in f^{-1}(y_i)) \cdot \delta(y-y_i)$$

$$y_1 = 1 + mx = 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot x = 1 + \frac{1-0}{0-(-1)}\cdot x = 1 + x$$

$$y_2 = 1 + mx = 1 + \frac{-1-1}{2-0}\cdot x = 1 - x$$

$$y_3 = -3 + mx = -3 + \frac{0-(-1)}{3-2}\cdot x = -3 + x$$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -1 \vee y > 1 \\ (-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [3, \infty) & y = 0 \\ \{1 - y, y + 3\} & -1 \leq y < 0 \\ \{y - 1, 1 - y\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta:

$$x(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1 & y = 1 + x \\ 1 - y & y = 1 - x \\ y + 3 & y = -3 + x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & y = 1 + x \\ -1 & y = 1 - x \\ 1 & y = -3 + x \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1(y))}{|f'(x_1(y))|} + \frac{p_X(x_2(y))}{|f'(x_2(y))|} + \frac{p_X(x_3(y))}{|f'(x_3(y))|} + \Pr(X < -1)\,\delta(y) + \Pr(X > 3)\,\delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(y-1)}{|f'(y-1)|} + \frac{p_X(1-y)}{|f'(1-y)|} + \frac{p_X(y+3)}{|f'(y+3)|} + [\Pr(X < -1) + \Pr(X > 3)] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(y-1)}{|1|} + \frac{p_X(1-y)}{|-1|} + \frac{p_X(y+3)}{|1|} + \left[\int_{-5}^{-1} \frac{3}{40}\, dx + \int_3^5 \frac{3}{40} + \frac{1}{4}\delta(x-3)\, dx\right] \cdot \delta(y) =$$

$$= p_X(y-1) + p_X(1-y) + p_X(y+3) + \left[\frac{3}{40} \cdot 4 + \frac{3}{40} \cdot 2 + \frac{1}{4}\right] \cdot \delta(y)$$

$p_X(x)$ ha altezza $\frac{3}{40}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = \frac{3}{40} rect\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{40} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{3}{40} rect\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{10}\delta(y) =$$

Considera le rect rispetto all'asse y

$$= \frac{3}{20} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{7}{10}\delta(y)$$

Si sommano i tratti in comune delle rect

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{20} rect\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{7}{10}\delta(y)\, dy = \frac{3}{20}\int_{-1}^{1} 1\, dy + \frac{7}{10}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, dy = \frac{3}{20} \cdot 2 + \frac{7}{10} \cdot 1 = 1 \;\; OK$$

ESERCIZIO 37

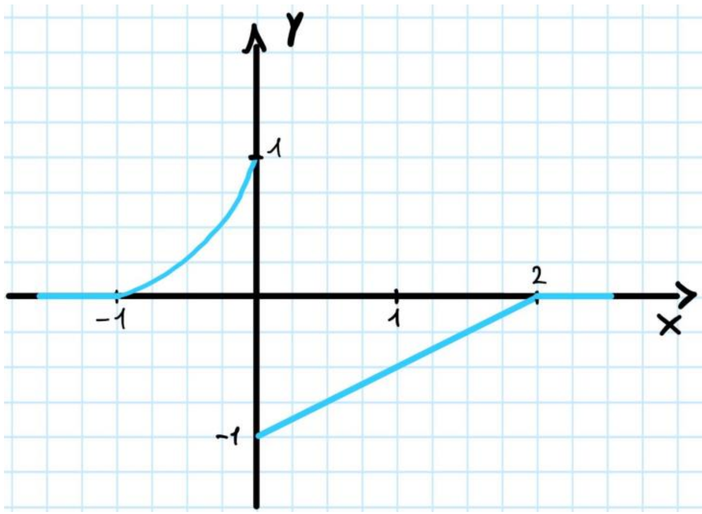
A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 38

Calcolare la densità di probabilità $p_Y(y)$ di $Y = f(X)$:



È data la $p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{5}\delta(x-5)$

SOLUZIONE:

$$p_X(x) = k \cdot rect\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{5}\delta(x-5)$$

Troviamo k con la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot rect\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{5}\delta(x-5)\,dx =$$

$$= k\int_{-2}^{2} 1\,dx + \frac{1}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-5)\,dx =$$

$$= 4k + \frac{1}{5} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$p_Y(y) = \sum_{x_i : f(x_i) = y, f'(x_i) \neq 0} \frac{p_X\big(x_i(y)\big)}{\big|f'\big(x_i(y)\big)\big|} + \sum_{y_i : f'\left(f^{-1}(y_i)\right) = 0} \Pr\big(X \in f^{-1}(y_i)\big) \cdot \delta(y - y_i)$$

Troviamo l'equazione della parabola:

$$y_1 - 0 = a \cdot (x+1)^2$$

$$1 = a \cdot (1)^2$$

$a = 1$

$y_1 = (x+1)^2$

$y_2 = -1 + mx = -1 + \frac{0-(-1)}{2-0} \cdot x = -1 + \frac{1}{2}x$

Si discutono le soluzioni di $f(x) = y$ al variare di y:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & y < -1 \vee y > 1 \\ (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [2, \infty) & y = 0 \\ \{2y+2\} & -1 \leq y < 0 \\ \{-1+\sqrt{y}\} & 0 < y \leq 1 \end{cases}$$

$x^2 + 2x + 1 - y = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (1-y) = 4 - 4 + 4y = 4y$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4y}}{2} = \begin{cases} -1+\sqrt{y} & OK \\ -1-\sqrt{y} & NO \end{cases}$$

Analogamente, si potevano discutere le soluzioni segmento di retta per segmento di retta (o di parabola):

$$x(y) = f^{-1}(y) = \begin{cases} -1+\sqrt{y} & y = (x+1)^2 \\ 2y+2 & y = -1 + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & y = (x+1)^2 \\ \frac{1}{2} & y = -1 + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x_1(y))}{|f'(x_1(y))|} + \frac{p_X(x_2(y))}{|f'(x_2(y))|} + \Pr(X < -1)\,\delta(y) + \Pr(X > 2)\,\delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(-1+\sqrt{y})}{|f'(-1+\sqrt{y})|} + \frac{p_X(2y+2)}{|f'(2y+2)|} + [\Pr(X < -1) + \Pr(X > 2)] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{p_X(-1+\sqrt{y})}{|2\sqrt{y}|} + \frac{p_X(2y+2)}{\left|\frac{1}{2}\right|} + \left[\int_{-2}^{-1} \frac{1}{5}\,dx + \int_{2}^{2} \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\delta(x-5)\,dx\right] \cdot \delta(y) =$$

$$= \frac{p_X\left(-1 + \sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} + 2p_X(2y + 2) + \left[\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5}\right] \cdot \delta(y)$$

$p_X(x)$ ha altezza $\frac{1}{5}$ dove non è nulla, dunque:

$$p_Y(y) = \frac{1}{10\sqrt{y}} rect\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} rect\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\delta(y)$$

Considera le rect rispetto all'asse y

Verifichiamo la correttezza di quanto abbiamo fatto tramite la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{10\sqrt{y}} rect\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} rect\left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\delta(y) =$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy + \frac{2}{5}\int_{-1}^0 1\, dy + \frac{2}{5}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \left[2\sqrt{y}\right]_0^1 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1 \quad OK$$

ESERCIZIO 42

UGUALE ALL'ESERCIZIO 38

SOLUZIONE:

ESERCIZIO 45

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 53

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 59

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 56

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 57

A

SOLUZIONE:

A

ESERCIZIO 8

Calcolare la densità di probabilità del primo ordine del segnale aleatorio:

$s(t, \zeta) = rect(t - \zeta)$

Considerando che ζ è uniformemente distribuita in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

SOLUZIONE:

$$p_Z(\zeta) = \sqcap(\zeta) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < \zeta < \frac{1}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$s(t, \zeta) = rect(t - \zeta) = rect(\zeta - t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} + t < \zeta < \frac{1}{2} + t \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La rect ha simmetria pari

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è così definita:

$$p_{s(t)}(x) = \frac{\partial P_{s(t)}(x)}{\partial x} = \frac{d}{dx} \Pr(s(t) \leq x) = \sum_i Pr\{s(t) = x_i\} \cdot \delta(x - x_i)$$

$$\Pr(s(t, \zeta) = 1) = \Pr\left(-\frac{1}{2} + t < \zeta < \frac{1}{2} + t\right) =$$

$$= 1 - \Pr\left(\zeta < -\frac{1}{2} + t \cap \zeta > \frac{1}{2} + t\right) = 1 - \Pr(s(t, \zeta) = 0)$$

$$\Pr\left(-\frac{1}{2} + t < \zeta < \frac{1}{2} + t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Z(\zeta)\, d\zeta = \int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}+t} \sqcap(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}} 1\, d\zeta = 1 - t$$

$$\Pr\left(\zeta < -\frac{1}{2} + t \cap \zeta > \frac{1}{2} + t\right) = 1 - (1 - t) = t$$

Dunque:

$$p_{s(t)}(\zeta) = t \cdot \delta(\zeta) + (1 - t) \cdot \delta(\zeta - 1)$$

FUNZIONE CARATTERISTICA

ESERCIZIO 30

Ricavare la funzione caratteristica della seguente variabile aleatoria:

$$A = \begin{cases} 0 & \Pr(0) = \dfrac{1}{4} \\ 1 & \Pr(1) = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

SOLUZIONE:

$$p_A(a) = \frac{1}{4} \cdot \delta(a) + \frac{3}{4} \cdot \delta(a-1)$$

La funzione caratteristica della variabile aleatoria è così definita:

$$F_A(u) = \overline{e^{jua}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jua} \cdot p_A(a)\, da =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jua} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \delta(a) + \frac{3}{4} \cdot \delta(a-1)\right] da =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jua}\delta(a)\, da + \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{jua}\delta(a-1)\, da =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{0} + \frac{3}{4} \cdot e^{ju} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{ju}$$

Analogamente, potevamo procedere osservando che $F_A(2\pi u) = \mathfrak{F}^*[p_A(a)]$:

$$\mathfrak{F}[p_A(a)] = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{4} \cdot \delta(a) + \frac{3}{4} \cdot \delta(a-1)\right] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-j2\pi u}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}^*[p_A(a)] = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{j2\pi u} = F_A(2\pi u)$$

$$\Rightarrow F_A(u) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{ju}$$

Verifichiamo che $F_A(0) = 1$ e che $F_A^*(u) = F_A(-u)$:

$$F_A(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{j0} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \quad OK$$

$$F_A^*(u) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-ju} = F_A(-u) \quad OK$$