Matemáticas Avanzadas de la Física
Semanal 4

Semana de Entrega: 4

1. Una sucesión (x_n) en un espacio métrico (X, d) ———- o es ————- a $x \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

donde al punto x se le llama el límite de la sucesión (x_n)

   a) Converge o es divergente
   b) Converge o es convergente
   c) Diverge o es convergente
   d) Diverge o es divergente

   Respuesta buena: ¡Muy bien! esa es la definición de convergencia
   Respuesta erronea: ¡error! cuidado con los juegos de palabras.

2. La sucesión $1/n$ (si, hasta el cansancio) es un buen ejemplo de una sucesión divergente, sin embargo existe el límite: su límite es 0. ¿Qué condición necesita para ser convergente?

   a) La sucesión no converge en X, por lo tanto su límite está en X
   b) Para que la sucesión sea convergente en X, se necesita que el límite esté en X
   c) La sucesión simplemente diverge
   d) La sucesión es convergente

   Respuesta buena: ¡Muy bien! si el límite está en el espacio, la sucesión es convergente
   Respuesta erronea: Cuidado, podemos hacer que esta sucesión sea convergente, necesitamos que su límite esté en el espacio métrico.

3. Sea X un espacio vectorial sobre el campo. Una norma es una función $||.|| : X \to [0, \infty)$ si y sólo si

$$||x|| \geq 0 \quad \text{y} \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

a esta propiedad se le conoce

   a) La norma de un subespacio
   b) La norma es definida positiva
   c) Homogeneidad del valor absoluto
   d) Desigualdad del triángulo

   Respuesta buena: ¡Muy bien! la norma por definición debe ser positiva
   Respuesta erronea: ¡error! recuerda las tres propiedades de un espacio normado.

4. Sea X un espacio vectorial sobre el campo. Una norma es una función $||.|| : X \to [0, \infty)$ si y sólo si

$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \text{y} \quad x \in X$$

a esta propiedad se le conoce

a) La norma de un subespacio
b) La norma es definida positiva
c) Homogeneidad del valor absoluto
d) Desigualdad del triángulo

Respuesta buena: ¡Muy bien! esta es la homogeneidad del valor absoluto
Respuesta erronea: ¡error! recuerda las tres propiedades de un espacio normado.

5. Sea X un espacio vectorial sobre el campo. Una norma es una función $||.|| : X \to [0, \infty)$ si y sólo si

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in X$$

a esta propiedad se le conoce

a) La norma de un subespacio
b) La norma es definida positiva
c) Homogeneidad del valor absoluto
d) Desigualdad del triángulo

Respuesta buena: ¡Muy bien! esta es la desigualdad del triángulo para normas
Respuesta erronea: ¡error! recuerda las tres propiedades de un espacio normado.

6. Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. La norma da la noción de "——" a cada vector del espacio vectorial e induce una métrica d sobre X, dada por

$$d_{||\cdot||}(x, y) = ||x - y||$$

a) Longitud
b) Distancia
c) Espacio
d) Continuidad

Respuesta buena: ¡Muy bien! la norma da la noción de longitud, así como la métrica da la noción de distancia
Respuesta erronea: ¡error! si la métrica da noción de distancia ¿qué nos dice la norma?

7. Si el espacio normado $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach ¿cuáles son las condiciones para que esto suceda?

a) Que el espacio tenga estructura de espacio vectorial y que sea completo (Toda sucesión de elementos del espacio es de Cauchy)
b) Que el espacio sea métrico y topológico
c) Que el espacio sea vectorial y defina una métrica
d) Que toda sucesión de Cauchy sea convergente en el espacio.

Respuesta buena: ¡Muy bien! Es de Banach.
Respuesta erronea: ¡error! Piensa en la completez de espacios normados.

8. la suma y el producto de normas, pueden escribirse como una generalización de la desigualdad del triñgulo, para el caso del producto

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n} |y_m|^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

con $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
y la suma

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sqrt{\sum_{m=1}^{n} |y_m|^p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $p \geq 1$. Son conocidas como:

a) Desigualdad del triángulo generalizada
b) Desigualdades l^p
c) Desigualdad de Hölder y Minkowsky
d) Desigualdad de Cauchy y Minkowsky

Respuesta buena: ¡Muy bien! Son las desigualdades de Hölder y Minkowsky
Respuesta erronea: ¡error! La prueba está en la tarea.

9. Completa: Del teorema: "Cada subespacio de dimensión ——— y de un espacio normado X es completo. En partícular, cada espacio normado de dimensión ——— es completo."

    a) Dimensión finita
    b) Dimensión infinita
    c) Dimensión infinita y finita
    d) Dimensión finita e infinita.

    Respuesta buena: ¡Muy bien! Un espacio normado de dimensión finita es completo Respuesta erronea: ¡error! lee con cuidado.

10. Sea una sucesión infinita de términos $a_1, a_2, \ldots$. Se define su suma parcial como

$$S_i = \sum_{n=1}^{i} a_n$$

Si la suma parcial converge a cierto límite finito cuando $i \to \infty$, la serie infinita se dice

a) Convergente y debe cumplir el critero de Cauchy
b) Convergente y esta condición es suficiente
c) Divergente y necesita cumplir el critero de Cauchy
d) No dice nada

Respuesta buena: ¡Muy bien! La serie tiende a cierto límite pero debe de cumplir el criterio de convergencia de Cauchy (condición necesaria y suficiente)
Respuesta erronea: ¡error! la suma infinita debe ser de Cauchy y tener límite en el espacio.