ЛЕКЦИЯ № 7. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Задачи и модели нелинейного программирования (ЗНП).
2. Общий случай ЗНП. Теорема Куна - Таккера.
3. Седловая точка
4. Задачи квадратичного программирования и её решение сведением к ЗЛП.

Постановка НП-задачи

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0. \end{cases}$$

где функции $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = 1, m$, в общем случае, нелинейные.

НП-ЗАДАЧИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА “РАВЕНСТВО” (МЕТОД ЛАГРАНЖА)

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ h_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ h_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Функции *f(X)* и $h_i(X)$, $i = \overline{1, m}$ нелинейные и имеют непрерывные частные производные.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned}\right\}$$

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0$$

Теорема. Пусть существует точка X^*, в которой достигается экстремум функции $f(X)$ при ограничениях $h_i(X) = 0,\ i = 1,m$. Если ранг матрицы $I = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right], i = 1,\overline{m};\ j = 1,\overline{n}$ в точке X^* равен m, то существует m вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, ***не все из которых равны нулю одновременно***, при которых выполняется условие

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0.$$

Алгоритм метода Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа $L(X, \Lambda)$.
2. Найти частные производные функции Лагранжа (2.76).
3. Решить систему уравнений для определения X^* и Λ^*.
4. Исследовать полученные точки на максимум или минимум.

Пример практического применения метода Лагранжа

Содержательная постановка.

Цикл эксплуатации блока датчиков информационного зонда включает следующие фазы: $\tau_П$ – подготовки к применению; $\tau_Г$ – готовности к применению, $\tau_Р$ – работы (применения). Требование к надёжности формулируется в виде показателя безотказной работы R. Каковы должны быть требования по надёжности к каждой фазе эксплуатации, если известны потери от отказа на каждой фазе, задаваемые неотрицательными величинами $C_i > 0,\ i = П, Г, Р$?

Время эксплуатации изделия в целом есть

$$\tau_\Sigma = \tau_П + \tau_Г + \tau_Р,$$

а надёжность характеризуется показателем

$$R = P_П\, P_Г\, P_Р,$$

где $P_i,\ i = П, Г, Р$ – вероятность безотказной работы на соответствующей фазе.

Если последствия отказов равнозначны, то задача имеет тривиальное решение:

$$P_i = \sqrt[3]{R}\ ,\ i = П, Г, Р.$$

Необходимо рассчитать вероятностные характеристики таким образом, чтобы общие потери были минимальные. Функция цели или функция потерь имеет вид

$$C_{\Sigma} = C_{\Pi}(1\text{-}P_{\Pi})P_{\Gamma}P_{P} + C_{\Gamma}P_{\Pi}(1\text{-}P_{\Gamma})P_{p} + C_{p}P_{\Pi}P_{\Gamma}(1\text{-}P_{p}),$$

при ограничении

$$R = P_{\Pi}\, P_{\Gamma}\, P_{P}\,.$$

Функция Лагранжа получается такова

$$L = C_{\Sigma} + \lambda[P_{\Pi}\, P_{\Gamma}\, P_{P} - R]$$

В ходе применения метода, λ из первого, например, уравнения для частных производных $\frac{\partial L}{\partial P_i}$, подставляется в остальные.

$$\begin{cases} C_{\Gamma}\cdot P_{\Pi} - C_{\Pi}\cdot P_{\Gamma} = 0, \\ C_{\Gamma}\cdot P_{P} - C_{P}\cdot C_{\Gamma} = 0, \\ R = P_{\Pi}\cdot P_{\Gamma}\cdot P_{P}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{P} = \dfrac{C_{\Pi}\cdot R}{C_{\Gamma}\cdot P_{\Pi}^{2}}, \\ P_{\Pi} = \dfrac{C_{P}\cdot R}{C_{\Gamma}\cdot P_{P}^{2}}. \end{cases}$$

Окончательно имеем оптимум

$$P_П^* = \sqrt[3]{\frac{C_П^2 R}{C_Г C_Р}},\ P_Г^* = \sqrt[3]{\frac{C_Г^2 R}{C_П C_Р}},\ P_Р^* = \sqrt[3]{\frac{C_Р^2 R}{C_П C_Г}}.$$

Иногда стоимость потерь при отказах удобно выражать в относительных единицах:

$$a_1 = \frac{C_Г}{C_П}, \qquad a_2 = \frac{C_П}{C_Р}, \qquad a_3 = \frac{C_Р}{C_Г}, \text{ причём } a_1 a_2 a_3 = 1.$$

Тогда решение примет вид

$$P_П^* = \sqrt[3]{\frac{Ra_2}{a_1}}, \quad P_Г^* = \sqrt[3]{\frac{Ra_1}{a_3}}, \quad P_Р^* = \sqrt[3]{\frac{Ra_3}{a_2}}.$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НП-ЗАДАЧИ

Задачи выпуклого программирования

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

f(X) и все $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ выпуклы (в смысле НП)

Задачи вогнутого программирования

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

f(X) и все $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ вогнуты (выпуклы вверх)

Введём функцию max $U(X)$ = min $[-U(X)]$.

Обозначив

$$\hat{f}(X) = -f(X),$$
$$\hat{g}_i(X) = -g_i(X), \qquad i = 1,\overline{n}.$$

получим выпуклую задачу

$$\hat{f}(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min,$$
$$\begin{cases} \hat{g}_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \hat{g}_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \ldots \\ \hat{g}_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\overline{n}. \end{cases}$$

Общий случай задачи НП-программирования:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = 1,\overline{n}. \end{cases}$$

Определение

Если в точке минимума X^* неравенство $g_i(X)$ выполняется как ***равенство***, то оно называется ***активным***.

По теореме Лагранжа

$$\nabla f(X^*) + \sum_I \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0, \quad I = \{i : g_i(X^*) = 0\}$$

Теорема Куна-Таккера. Пусть функции $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = \overline{1, n}$ обладают частными производными на некоторой области $\mathfrak{R}$, содержащей X^*. Точка X^* будет являться точкой минимума функции $f(X)$ при ограничениях $g_i(X) \le 0$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условиям регулярности в виде линейной независимости, если существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0; \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*) = 0; \\ \lambda_i \ge 0, \qquad i = 1, \overline{m}. \end{cases}$$

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА В НП-ЗАДАЧАХ

Определение. Пара векторов X^* и Λ^* называется ***седловой точкой*** функции $L(X, \Lambda)$ на области $\mathfrak{R}$, если для всех $\lambda \geq 0$ и $X \in \mathfrak{R}$ выполняется условие

$$L(X^*, \Lambda) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X, \Lambda^*), \tag{*}$$

называемое ***неравенством седловой точки***.

В седловой точке: $\max\limits_{\lambda_i \geq 0} \min\limits_{X \in \mathfrak{R}} L(X, \Lambda) = \min\limits_{X \in \mathfrak{R}} \max\limits_{\lambda_i \geq 0} L(X, \Lambda),\ i = \overline{1, n}.$

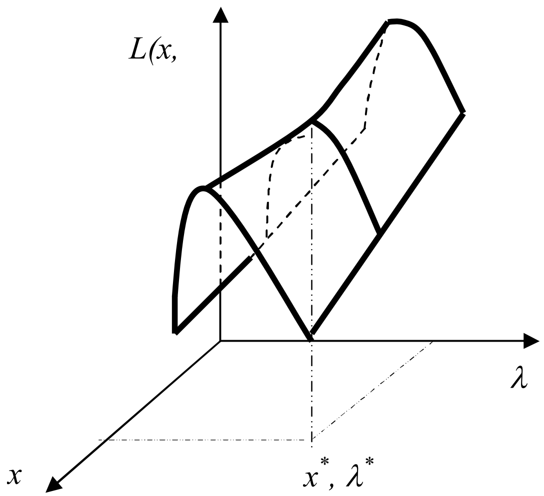

Рисунок 1 – Седло нелинейной функции

Теорема о седловой точке. Пусть $f(X)$ и все $g_i(X)$, $i = \overline{1, m}$ выпуклы, а функции $g_i(X)$ удовлетворяют условиям ***регулярности Слейтера*** (вида $\exists_X \forall_i g_i(X) < 0$). Вектор X^* является решением задачи нелинейного программирования

$$\min f(X),$$
$$g_i(X) \le 0, \qquad i = 1, \overline{m}.$$

тогда и только тогда, когда существует такой вектор Λ с неотрицательными компонентами, что выполняются неравенство ***седловой точки*** (*) и ***условие линейной независимости***

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*) = 0.$$

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КУНА-ТАККЕРА.

Имеем выпуклую НП-задачу

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} g_i(X) \le 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \ge 0, & j = 1, \overline{n}. \end{cases}$$

Введём $x_j = -h_j(x_j)$, $j = 1, n$, $\Rightarrow h_j(x_j) \le 0$, $j = 1, n$.
Функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda, U) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^{n} u_j h_j(x_j),$$

к которой применим теорему Куна-Таккера $\nabla L(X, \Lambda, U)$. Это эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X, \Lambda, U)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} - u_j = 0, & j = 1, \overline{n}; \\ u_j x_j = 0, \quad j = 1, \overline{n}; \\ \lambda_i g_i(X) = 0, \quad i = 1, \overline{m} \\ \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, \overline{m}. \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial x_j} \geq 0, & j = 1, \overline{n}; \\[2ex]
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial x_j} \cdot x^{\circ}_{j} = 0, & j = 1, \overline{n};
\end{array}
\right\} \\[6ex]
\left.
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial \lambda_i} = g_i(X^{\circ}) \leq 0, & i = 1, \overline{m}; \\[2ex]
\lambda_i g_i(X^{\circ}) = 0, \quad i = 1, \overline{m}. &
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right.
$$

Для вогнутого программирования, благодаря симметрии задач.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial x_j} \leq 0, & j = 1, \overline{n}; \\[2ex]
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial x_j} \cdot x^{\circ}_{j} = 0, & j = 1, \overline{n};
\end{array}
\right\} \\[6ex]
\left.
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial \lambda_i} = g_i(X^{\circ}) \geq 0, & i = 1, \overline{m}; \\[2ex]
\dfrac{\partial L(X^{\circ}, \Lambda^{\circ})}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda^{\circ}_{j} = 0,, \quad i = 1, \overline{m}. &
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right.
$$

ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель:

$$\max f(X) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X,$$

$$\begin{cases} A \cdot X \le A_0, \\ x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

Функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X + \Lambda^T (A_0 - A \cdot X).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X} = b + C \cdot X - A^T \Lambda \le 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda} = A_0 - A \cdot X \ge 0. \end{cases}$$

Теорема квадратичного программирования. Вектор $X_0 \geq 0$ является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и только тогда, когда существуют такие m-мерные векторы $\Lambda > 0$ и $W \geq 0$ и n-мерный вектор $V \geq 0$, что выполняются следующие условия

$$\begin{cases} b + C \cdot X - A^T \Lambda + V = 0, \\ A_0 - A \cdot X - W = 0, \\ V^T \cdot X = 0, \\ W^T \cdot \Lambda = 0. \end{cases}$$

Эквивалентная ЗЛП:

$$T = \sum_{i=1}^{m} \mu y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu z_j \to \min,$$

$$\begin{cases} b + CX - A^T \Lambda + V + Z = 0, \\ AX + W + Y = A_0, \\ V^T X = 0, \\ W^T \Lambda = 0. \end{cases}$$

Решить $F_{\max} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} X + \frac{1}{2} X^T \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$ при ограничениях $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

В развёрнутой форме

$F_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 x_2$ – целевая функция;

$\begin{cases} x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$ – система ограничений

Функция Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 x_2 + \lambda_1 (x_2 - 3) + \lambda_2 (x_1 + x_2 - 7) .$$

Частные производные:

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1} = 3 - 2x_1 + 3x_2 + \lambda_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 + 3x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_1} = x_2 - 3 \ge 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 - 7 \ge 0.$$

Эквивалентная ЗЛП будет иметь вид

$$T = \mu y_1 + \mu y_2 + \mu z_1 + \mu z_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + \lambda_2 + v_1 + y_1 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + v_1 + y_2 = -2, \\ x_2 - w_1 + z_1 = 3, \\ x_1 + x_2 - w_2 + z_2 = 7. \end{cases}$$