ЛЕКЦИЯ №3. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Теоремы, на которых основывается решение ЗЛП.
2. Обоснование принципов алгоритма решение ЗЛП прямым (табличным) симплекс-методом.
3. Искусственные переменные в моделях ЗЛП.
4. Решение ЗЛП методом искусственного базиса.
5. Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЛП

- Развёрнутая

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1}, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \end{array}\right\}.$$

- Матричная

$$Z = C^T X \to \max,$$
$$AX \le B = A_0.$$

- Векторное представление системы ограничений

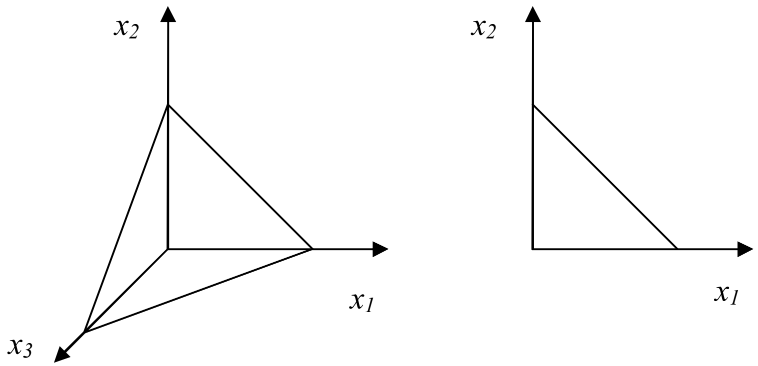
$$\left.\begin{array}{l} A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... A_n x_n \le B, \ \textit{где} \\ A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix}, ..., A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}, A_0 \equiv B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

- Каноническая модель ЗЛП

  Целевая функция

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\} \equiv AX + EX_{ДОП} = B.$$



Определения

Допустимые решения – это совокупность чисел (x_1, x_2, … , x_n), удовлетворяющих ограничениям исходной задачи.

Оптимальное решение – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции.

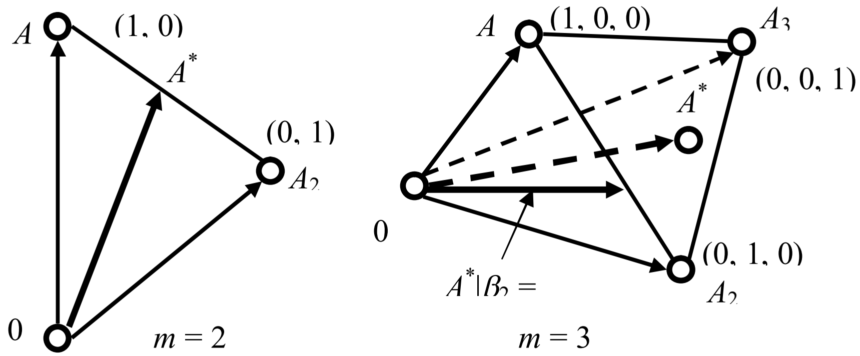
Опорный (базисный) план – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов A_j, соответствующих переменным x_j.

Теорема 1. Если целевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение в некоторой точке допустимого множества решений R_1, то она принимает это значение в крайней точке R_1. Если целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Линейной комбинация векторов: $A^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot A_i;\ \beta_i \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$

Для $m = 2$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 + (1 - \beta_1) A_2$.

Для $m = 3$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$.



Теорема 2. Если существует такое независимое множество m-мерных векторов $A_1, A_2, ..., A_k, k \le m$, что $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = A_0$, то n-мерный вектор

$X^T = [x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\leftarrow n-k \rightarrow}]$ есть крайняя точка допустимого множества R_1.

Теорема 3. Если X_0^T – крайняя точка допустимых решений множества R_1, то решение X_0^T – допустимое базисное решение (ДБР) системы ограничений.

Следствия из теорем

1. При отыскании оптимума достаточно рассмотреть только крайние точки допустимого множества решений.
2. Для отыскания оптимума достаточно перебрать допустимые базисные решения.

ПРЯМОЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to opt$$

Исходная задача
$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1}, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

1. Приведение модели к канонической форме

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \to opt,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

2. Посторенние смплекс-таблицы

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ	δ_0	δ_1	...	δ_n	δ_{n+1}	...	δ_{n+m}

3. Расчёт симплекс-разностей

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}, \; \delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j, \quad j = 1, n + m..$$

4. Принятие решения об остановке вычислений

$$\max : \forall_j \delta_j \geq 0, \min : \forall_j \delta_j \leq 0 .$$

5. Признаки неразрешимости

$$\max : \exists_k \delta_k < 0 \; \& \; \forall a_{i,k} \leq 0, \min : \exists_k \delta_k > 0 \; \& \; \forall a_{i,k} \leq 0.$$

6. Определение направляющего столбца

$$\max : \arg\min_j \delta_j < 0 \rightarrow j^*, \; \textit{или} \; \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \rightarrow j^*.$$

7. Определение направляющей строки

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \rightarrow i^*$$

8. Пересчёт симплекс-таблицы, после чего – возврат к пункту 3.

Пояснение, почему правила определения направляющих строки и столбца таковы

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = A_0 \qquad (a)$$

$$A_1 x_{1,j} + A_2 x_{2,j} + \ldots + A_m x_{m,j} = A_j \qquad (b)$$

$$A_1 \theta x_{1,j} + A_2 \theta x_{2,j} + \ldots + A_m \theta x_{m,j} = A_j \, \theta \qquad (c)$$

$$A_1 (x_1 - \theta x_{1,j}) + A_2 (x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + A_m (x_m - \theta x_{m,j}) + A_j \, \theta = A_0 \, . \qquad (d)$$

$$X^{\mathrm{T}} = \{ \underbrace{\underbrace{\underbrace{x_1 - \theta x_{1,j}, \quad x_2 - \theta x_{2,j}, \quad \ldots, \quad x_m - \theta x_{m,j}}_{m}, \quad \theta}_{m+1}, \quad 0, \ldots 0}_{m+n} \}$$

$$0 < \theta \le \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{i,j}} \right\}$$

Целевая функция для случая (a)

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \, .$$

Для случая (d)

$$F(A_j) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{i,j} = c_1(x_1 - \theta x_{1,j}) + c_2(x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + c_j \theta =$$
$$= F(X) - \theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \ldots - c_j) \, .$$

Измененение при смене базиса составит:

$$F(A_j) - F(X) = -\theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \ldots - c_j) = -\theta \cdot \delta_j \, .$$

МЕТОД ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

$Z = C^T \cdot X \to \max(\min)$

AX⊗B,

где ⊗ – знаки отношений $\otimes \subseteq (\geq, =) \cup (\leq)$

$$AX - EX_{ДОП} = B \equiv A_0 \Leftrightarrow -EX_{ДОП} = A_0$$

$$AX - EX_{ДОП} + EX_{ИСК} = A_0 \Leftrightarrow -EX_{ИСК} = A_0$$

После канонизации

$$f(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m}) = c_1x_1 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \pm \mu x_{n+m+1} ... \pm \mu x_{n+2m},$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 1x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} - 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 1x_{n+m+2} ... + 0x_{n+2m} = b_2, \\
... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... - 1x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} ... + 1x_{n+2m} = b_{m1}.
\end{array}\right\}$$

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Основная таблица

			$\longleftarrow$		A_x^{-1}	$\longrightarrow$		
Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	A^*	Θ
A_{n+1}	0	b_1	1	0	...	0		
A_{n+2}	0	b_2	0	1	...	0		
...	...	...	...	...	...	...		
A_{n+m}	0	b_m	0	0	...	1		
	Λ	λ_0	λ_1	λ_2	...	λ_m		

Вспомогательная таблица

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ^0	δ_0^0	δ_1^0	...	δ_n^0	δ_{n+1}^0	...	δ_{n+m}^0
	...							
	δ^r	δ_0^r	δ_1^r	...	δ_n^r	δ_{n+1}^r	δ_0^r	δ_1^r

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТОВ

$$e_0 = A_x^{-1} \times A_0 ,$$

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1} ,$$

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0$$

$$\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j$$

$$A^* = A_x^{-1} \times A_{j^*} .$$

$$\Theta_i = \frac{e_{i,0} \geq 0}{a_i^* > 0}$$