ЛЕКЦИЯ № 6. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Дискретное и целочисленное программирование. Общие подходы к решению задач целочисленного программирования.
2. Линейное целочисленное программирование (ЛЦП).
3. Решение задач ЛЦП методом отсекающих плоскостей (Гомори).
4. Решение задач ЛЦП методом Ветвей и границ.
5. Стохастическое программирование: модели, подходы и методы решения.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$$

$$\left.\begin{aligned} & g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\ & g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\ & ... \\ & g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\ & X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D, \end{aligned}\right\}$$

где D – конечное или счётное множество.

Если X ограничено множеством целых чисел, то задачу назначают задачей ***линейного целочисленного программирования (ЛЦП)***.

КЛАССЫ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- Задачи с неделимостями (задачи о рюкзаке), обусловлены физическими свойствами объектов. Задача размещение массивов информации на внешних устройствах ЭВМ при ограничениях на объём, скорость вращения, стоимостные рамки и др. относится к этому классу.
- Экстремальные комбинаторные задачи (о назначениях, коммивояжёра, о покрытиях).
- Задачи на несвязных и невыпуклых областях.
- Задачи с разрывной целевой функцией.
- Транспортная задача при целочисленных значениях массивов поставок, потребления и стоимостей.
- Методы:
  1. Метод отсечений, отсекающих плоскостей (ГОмори или ГомОри).
  2. Метод ветвей и границ.
  3. Методы, учитывающие особенности задачи.
  4. Методы случайного поиска (эвристические).

- Метод Гомори

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j = p \qquad \text{(a)}$$

$[d]$ есть целая часть d(округление по недостатку).

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j \le p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j \le [p]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j + y = [p] \qquad (b)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{-d_j\right\} \cdot x_j + y = \left\{-p\right\}. \qquad (c)$$

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОТСЕЧЕНИЯ ГОМОРИ

1. Для выбранного канонизированного уравнения (*a*) сформировать желаемую целочисленную форму вида (*b*).

2. Из целочисленной формы (*b*) вычесть исходное уравнение (*a*), получится уравнение отсекающей плоскости (*c*).

Дадим и нотацию этого алгоритма в виде формулы:

$$(c) = (b) - (a)$$

Алгоритм решения задачи ЛЦП методом Гомори

Процедура получения решения структурно состоит из

- предварительного этапа,
- проверки условия окончания и
- так называемой “большой итерации”, которая включает операцию формирования отсечения и несколько шагов итеративной части двойственного симплекс-метода.

1. **Предварительный этап**. Получить оптимальное решение ЗЛП без учёта целочисленности.

2. **Условие окончания расчётов**. Если в текущем решении все компоненты базисного столбца A_0, соответствующего основным переменным, являются целыми числами, то найдено оптимальное решение задачи ЛЦП.

3. **Большая итерация**.

3.1. Отсечение Гомори формируется для тех строк симплекс-таблицы, в которых компоненты $a_{i,0}$, соответствующие основным переменным задачи, дробные числа.

3.2. В базисное решение вводится дополнительная переменная x_{r+t}, соответствующая канонизированному уравнению отсекающей плоскости, одновременно симплекс-таблица пополняется строкой и столбцом-ортом A_{r+t}.

3.3. Выполняется итерационная часть двойственного симплекс-метода.

3.4. Если вектор A_{r+t}, ранее выведенный из базиса, в ходе расчётом снова в него вводится в процессе итераций, то строку и столбец симплекс-таблицы, соответствующие переменной x_{r+t} после пересчёта по методу Жордана-Гаусса вычёркивают (удаляют) из неё.

На этом циклическая часть алгоритма завершена, а цикл возобновляется с п. 2.

ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ ГОМОРИ

1. Сходимость вычислений обеспечивается за конечное число итераций.

2. Метод особенно эффективен, когда ***большинство*** переменных имеют целочисленные значения.

4. После выполнения нескольких больших итераций на шаге отсечения Гомори появляются многочисленные альтернативы. Это ведёт к зацикливанию, именуемому Г. Вагнером “сплошной вырожденностью.

5. Затруднена сходимость при решении задач, в которых значения $a_{i,j}$ и b_i велики.

6. Иногда, для достижения успеха, требуется видоизменить постановку задачи в сторону усиления, например, введя ограничения $x_1 \leq 6$ и $x_2 \leq 6$ в дополнение к уже существующему ограничению $x_1 + x_2 \leq 6$.

- Метод ветвей и границ

$$L_j \leq x_j \leq U_j,$$

где L_j – нижний предел, а U_j – верхний предел (граница), которые определяются границами области допустимых решений задачи.

$$L_j \leq I \leq U_j - 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_j &\leq I, \\ x_j &\geq I+1 \end{aligned}\right\}$$

Алгоритм метода ветвей и границ

1. Исходная задача решается любым удобным методом до отыскания нецелочисленного оптимального решения.

2. Если X_0 – нецелочисленное решение, то, используя неравенства, получаем множество из двух задач G_1 и G_2 (ветвей).

3 Для решения возникающих задач ветвейьзуют двойственный симплекс-метод, который, как нам известно, допускает ввод новых ограничений по ходу решения.

- Одна из задач формируется по ограничению $x_j \leq I$, где I – целая часть $[x_j]$, в виде строки A_{r+t} в симплекс-таблице, соответствующей канонической форме уравнения $I = x_j + x_{r+t}$ в таблице и вектору A_{r+t} в базисе. Одновременно в симплекс-таблицу помещается выводимая строка, обозначаемая как $\widetilde{A}_{r+t}$ и формируемая вычитанием из строк: A_{r+t} - A_j. При этом переменная x_j введённого ограничения сохраняется в базисе.
- Вторая задача формируется по ограничению $-x_j \leq -(I+1)$, которому соответствует строка, обозначаемая A'_{r+t}, которая строится по канонической форме этого ограничения и записывается в форме $-(I+1) = -x_j + x'_{r+t}$, Одновременно формируется и выводимая строка $\widetilde{A}'_{r+t}$, равная $A'_{r+t} + A_j$.

4. Процесс заканчивается перерешиванием всех возникающих задач.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задача: найти управляющие переменные $X^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ с учётом влияния случайных факторов $\omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$, не поддающихся управлению.

$$
\begin{aligned}
& f(X, \omega) \to \mathrm{opt}, \\
& g_i(X, \omega) \le 0,\ i = \overline{1, m}, \\
& X \ge 0,\ \omega \in \Omega,
\end{aligned}
$$

где Ω – пространство событий ω.

Разновидности задач стохастического программирования:

1. Стохастические коэффициенты функции цели при детерминированных ограничениях.

2. Детерминированные коэффициенты целевой функции при стохастических свободных членам и коэффициентах системы ограничений.

3. Стохастические коэффициенты целевой функции, свободные члены и коэффициенты системы ограничений.

- Классы моделей.

1. *M*-модели.

Задача максимизации математического ожидания того или иного показателя (прибыли, рентабельности et c).

2. *V*-модели.

Минимизация дисперсии какого-либо показателя при условии ограничения на определённом (желаемом) уровне его средней величины.

3. *P*-модели.

Определение вероятности превышения (или не превышения) экономическим показателем определённого уровня или порога.

Прямые и непрямые методы.

- N-этапные задачи (модели) стохастического программирования:

$$f[X(\omega)] \to \text{opt},$$
$$g_i[X(\omega)] \le 0,\ i = \overline{1,m},$$
$$X(\omega) \ge 0.$$

N-этапную стратегическую модель стохастического программирования:

“Решение” $\to$ “Наблюдение” $\to$ “Решение” … $\to$ “Наблюдение” $\to$ …

N-этапную задачу тактического стохастического программирования

“Наблюдение” $\to$ “Решение” … $\to$ “Наблюдение” $\to$ “Решение” $\to$ …