ЛЕКЦИЯ №8. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НП-ЗАДАЧ

ПЛАН

1. Аналитические методы определения экстремумов.
2. Математические обоснования: теоремы нелинейного программирования.
3. Использование матрицы Гёссе
4. Поиск экстремумов для сепарабельных дифференцируемых функций

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0. \end{cases}$$

Теорема 1 (о существовании экстремума). Если функция многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и определена на замкнутом множестве $\mathfrak{R}$, то она достигает на этом множестве, ***по крайней мере, один раз*** своего минимального и максимального значений.

Теорема 2 (о местоположении экстремума). Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией нескольких переменных, определённой на допустимой области $\mathfrak{R}$, то экстремальное значение f (если оно существует) достигается в одной или нескольких точках, принадлежащих:

- множеству стационарных точек $S(X)$;
- множеству точек границы $G(X)$;
- множеству точек, в которых (где) функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не дифференцируема.

Определения

Множество точек $S(X)$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется множеством стационарных точек, если его элементы удовлетворяю условию

$$\nabla f(X) = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_j}, j = 1, \overline{n} \right\} = 0,$$

а вектор $\nabla f(X)$ – называют градиентом функции.

Относительный (локальный) максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^0 с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для всех точек, лежащих в малой окрестности точки X^0, имеет место неравенство $f(X^0) \geq f(X^0 + H)$, где $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

Абсолютный (глобальный) максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^* с координатами $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, если для всех точек, принадлежащих множеству ограничений $\Re$ справедливо неравенство $f(X^*) \geq f(X)$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Re$.

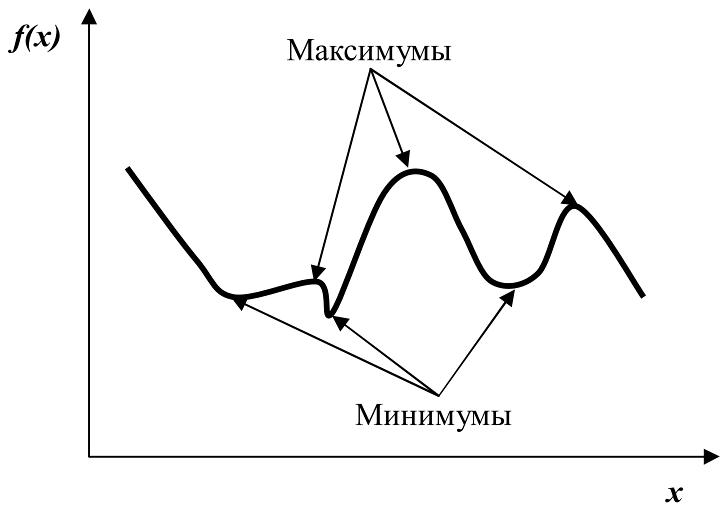

Рисунок 1 – Локальные и глобальные экстремумы

Пусть $\Re$ – выпуклое множество точек n-мерного пространства.

Если для произвольного множителя $k \in [0, 1]$ и некоторого приращения ΔX выполняется неравенство

$$f(X + k\Delta X) \geq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется ***вогнутой*** (обращена выпуклостью вверх), а если

$$f(X + k\Delta X) \leq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется ***выпуклой***.

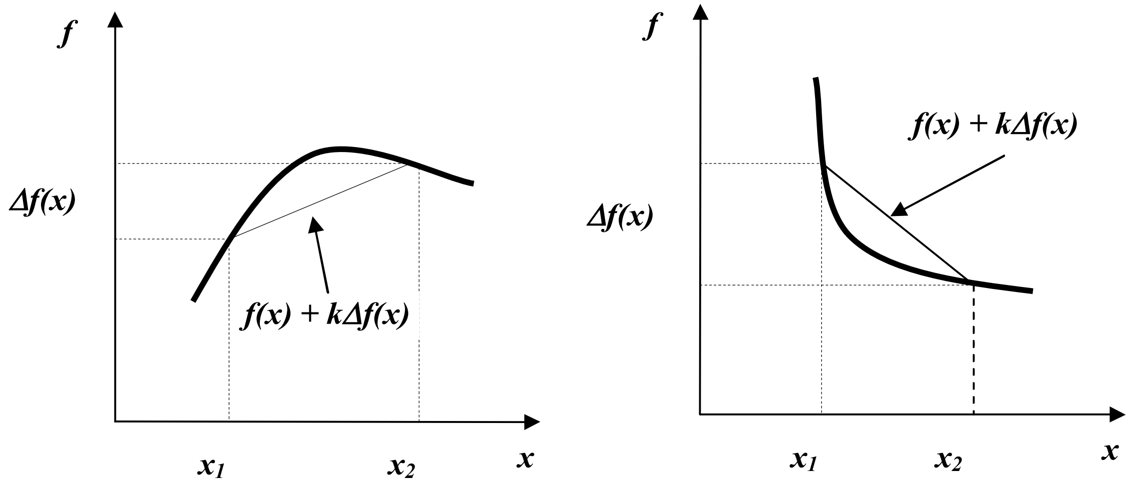

Рисунок 2 – Вогнутости и выпуклости функций

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦА ГЕССЕ

$$h_{i,j} = \left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=x_0}, i = 1,\overline{n},\ j = 1,\overline{m}.$$

Матрица Гёссе ($\nabla^2 f(X)$ или $H(X)$) называется ***положительно определённой***, если её главные угловые миноры ***положительны***, и ***отрицательно определённой***, если её главные угловые миноры имеют знак $(–1)^k$, k – номер углового минора.

Главные угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h_{2,2} & h_{23} \\ h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix} = h_{2,2} \cdot h_{3,3} - h_{3,2} \cdot h_{2,3}.$$

Теорема 3. Для того, чтобы в точке *X_0* достигался внутренний относительный максимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой вогнутости*** функции в окрестностях *X_0*.

Теорема 4. Для того, чтобы в точке *X_0* достигался внутренний относительный минимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой выпуклости*** функции в окрестностях *X_0*.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 .$$

Градиент этой функции есть

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \{1 - 2x_1; x_3 - 2x_2; 2 + x_2 - 2x_3\}.$$

Стационарная точка

$$X_0 = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$$

Матрица Гёссе:

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \mu_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \mu_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Вывод. Миноры положительны, следовательно, матрица Гессе положительно определена, функция выпукла, и в точке X_0 с координатами $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$ достигается минимум.

ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ограничение $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ является функцией с ***разделяемыми переменными (сепарабельной)***, если его можно представить в виде

$$x_i = \varphi_i(\{x_j\}),\ i \neq j, \quad j = 1,\overline{n}.$$

Общий алгоритм решения

- Отыскивается множество всех стационарных точек S функции $f(X)$ внутри допустимого множества $\mathfrak{R}$ и выбираются координаты точки, в наибольшей степени отвечающие направлению оптимизации задачи.
- Исследуется множество точек границы G. Для этого выполняют разделение переменных по каждому из ограничений, с последующей подстановкой выражений переменных в функцию цели $f(X)$. Полученные функции исследуются. Выбираются координаты интересующего нас оптимума.
- Определяется и подвергается исследованию множество точек, принадлежащих $\mathfrak{R}$, где функция не дифференцируема.
- Из результатов предыдущих шагов выбирается наилучшее решение.