ЛЕКЦИЯ №4. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЛАН

1. Двойственность в ЗЛП.
2. Теоремы двойственности.
3. Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом.

СВЯЗЬ ПРЯМОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧ

Прямая задача	Двойственная задача
Развёрнутая форма представления	
$\max \sum_{j=1}^{n} c_i x_i,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i \leq b_i, \quad i = 1, \overline{m},$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, \overline{n}.$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$ $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \overline{n},$ $y_i \geq 0, \quad i = 1, \overline{m}.$
Матричная форма представления	
$C^T X \to \max,$ $AX \leq B.$	$B^T Y \to \min,$ $A^T Y \geq C.$

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Теорема 1. Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач соответственно (при этом выполняется неравенство $AX_0 \le B$ и $A^T Y_0 \ge C$), то значение целевой функции прямой задачи не превышает значения целевой функции двойственной

$$\boldsymbol{C^T X_0 \le B^T Y_0}.$$

Теорема 2 (Основная). Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если $C^T X_0 = B^T Y_0$, то X_0 и Y_0 – оптимальные решения пары двойственных задач.

Теорема 3. Если в оптимальном решении прямой задачи i-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю, то есть $A_i \cdot X^* < b_i \Rightarrow y^*_i = 0$, где A_i – i-ая строка матрицы.

Теорема 4. Если в оптимальном решении двойственной задачи j-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю, то есть $A^T_j \cdot Y^* - c_j < 0 \Rightarrow x^*_j = 0$, где где A_j – j-ая строка матрицы.

Следствие:

$$\delta_{n+i}^{ПрямойЗадачи} = y_i^*,\ i = 1,\overline{m}, \qquad \delta_{m+j}^{ДвойственнойЗадачи} = x_j^*,\ j = 1,\overline{n},$$

где n и m – число переменных и ограничений прямой задачи.

Определения

Сопряжённый базис (базис двойственной задачи) – система m независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой Y удовлетворяет ограничениям двойственной задачи: $A_j^T Y > c_j$.

Псевдоплан прямой задачи – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса. Иными словами, псевдоплан есть разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.

АЛГОРИТМ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

- Приведение системы ограничений к одинаковым знакам отношений
- Приведение систему ограничений в каноническую форму.
- Построение двойственной задачи для канонической формы.
- Подбор сопряжённого базиса
- Расчёт псевдоплана

$$A_j = M \times \widetilde{A}_j$$

где A_j – разлагаемый вектор, M – матрица составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис, $\widetilde{A}_j$ – искомое разложение вектора.

- т.н. “БОЛЬШАЯ ИТЕРАЦИЯ”
- Заполнение таблицы и расчёт симплекс-разностей
- Проверка неразрешимости $\exists_i \, a_{i,0} < 0 \;\&\; \forall_j \, a_{i,j} \geq 0$,
- Определение направляющей строки: $\arg\min\limits_i a_{i,0} < 0 \Rightarrow i^*$,
- Определение направляющего столбца:

$$\arg\min_j \left\{ \frac{-\delta_j \geq 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

- Пересчёт таблицы, после чего – к началу итерации