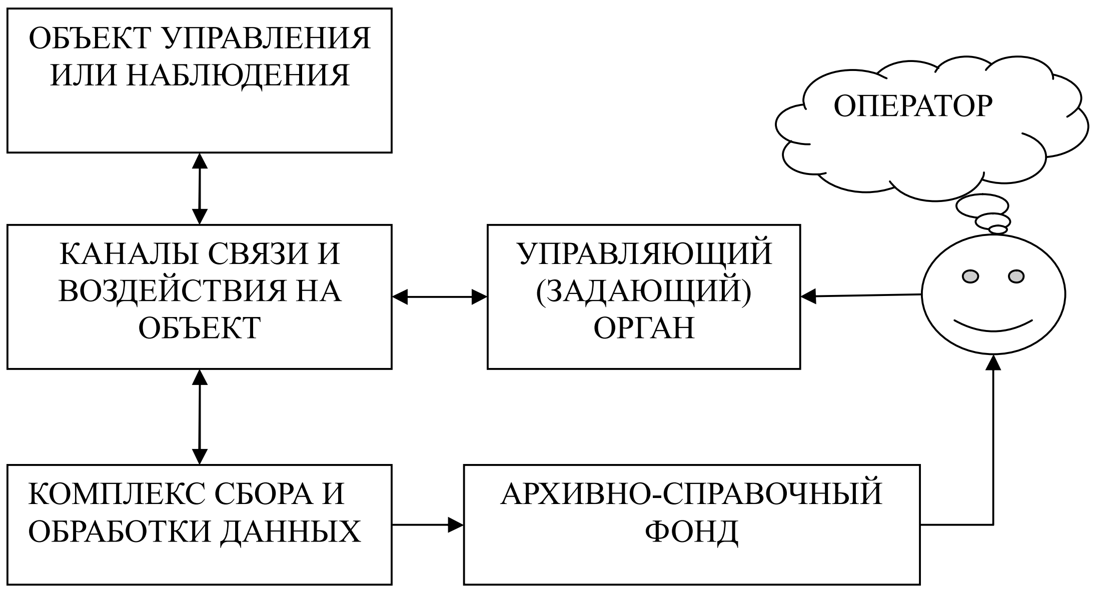
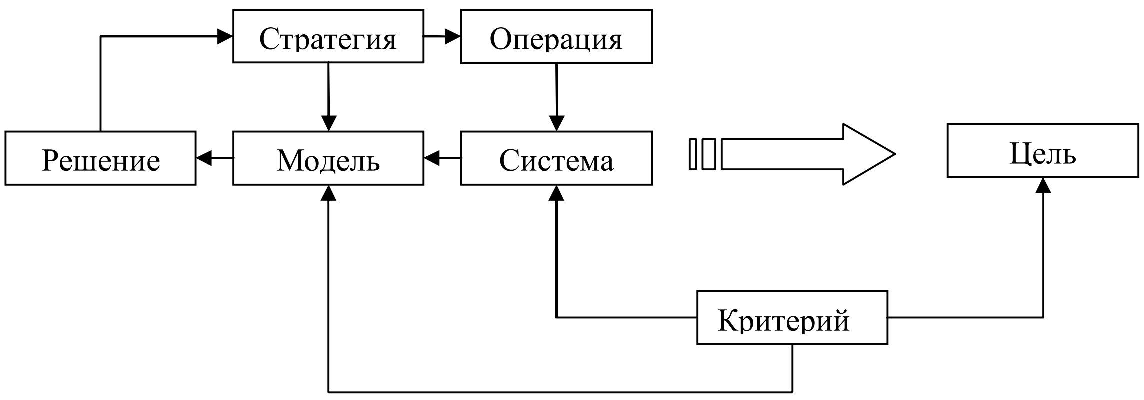
ЛЕКЦИЯ № 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

ПЛАН

1. Проблемы, решаемые в ходе исследования операций.
2. Основные понятия и определения, основная задача исследования операций.
3. Виды и классы моделей используемых в дисциплине исследование операций.
4. Практические ситуации, разрешимые методами исследования операций.


ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ ИЛИ НАБЛЮДЕНИЯ
ОПЕРАТОР
КАНАЛЫ СВЯЗИ И ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОБЪЕКТ
УПРАВЛЯЮЩИЙ (ЗАДАЮЩИЙ) ОРГАН
КОМПЛЕКС СБОРА И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ
АРХИВНО-СПРАВОЧНЫЙ ФОНД


Стратегия
Операция
Решение
Модель
Система
Цель
Критерий

Операция - последовательность действий, направленных на достижение какой либо цели.

Критерий эффективности - показатель совпадения (соответствия) цели операции и состояния системы.

Стратегия – способ расстановки сил и средств при проведении операции.

Математическая модель операции – это формальные соотношения, устанавливающие связь ***критерия*** и ***стратегии***.

Решение – множество параметров стратегии, полученных на основании математической модели.

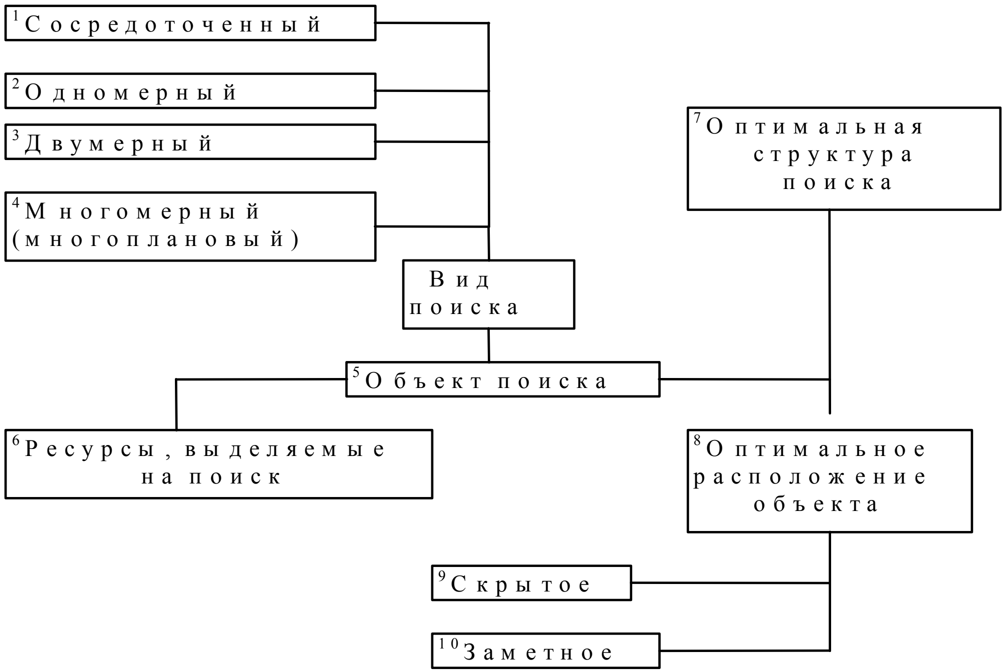
Основная задача исследования операций: нахождение для выбранной ***математической модели*** решения, при котором критерий эффективности достигает экстремума (min или max).

ПРИЗНАКИ ОПЕРАЦИОННОГО ПОДХОДА

1. Ориентацию на принятие решения.
2. Оценку на основе критериев эффективности.
3. Доверие к математической модели.
4*. Необходимость использования ЭВМ

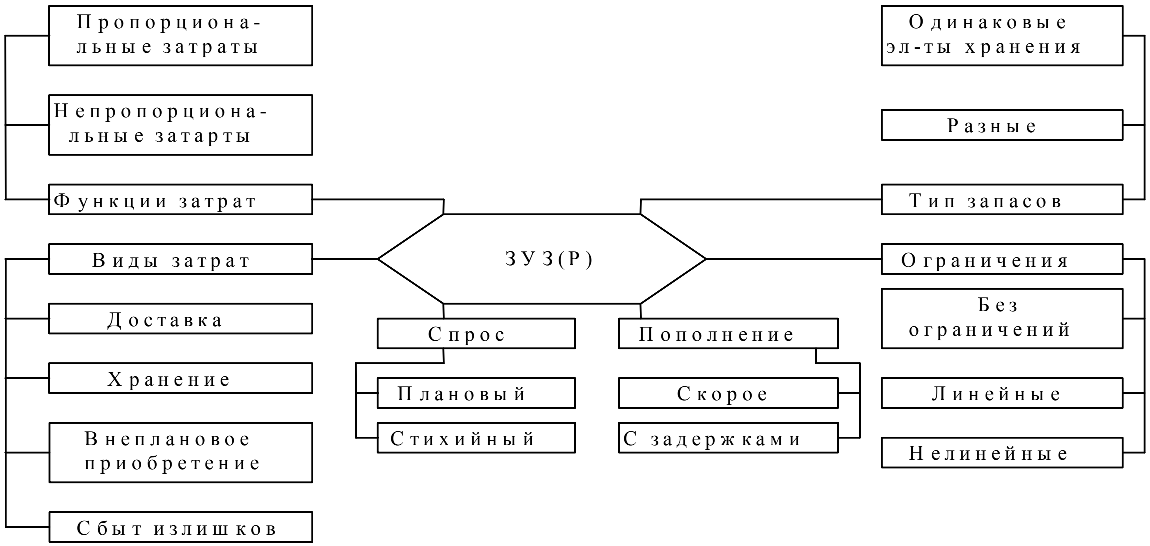
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

1. Детерминированные модели операций.
2. Вероятностные модели (статистические, стохастические):
3. Игровые модели:
5. Эвристические модели.
6. Имитационные модели.

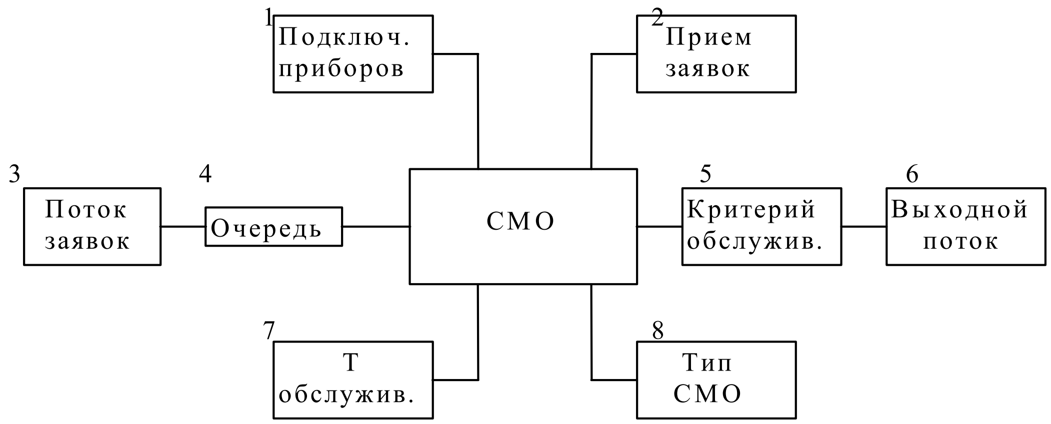


Задачи поиска

Задачи распределения

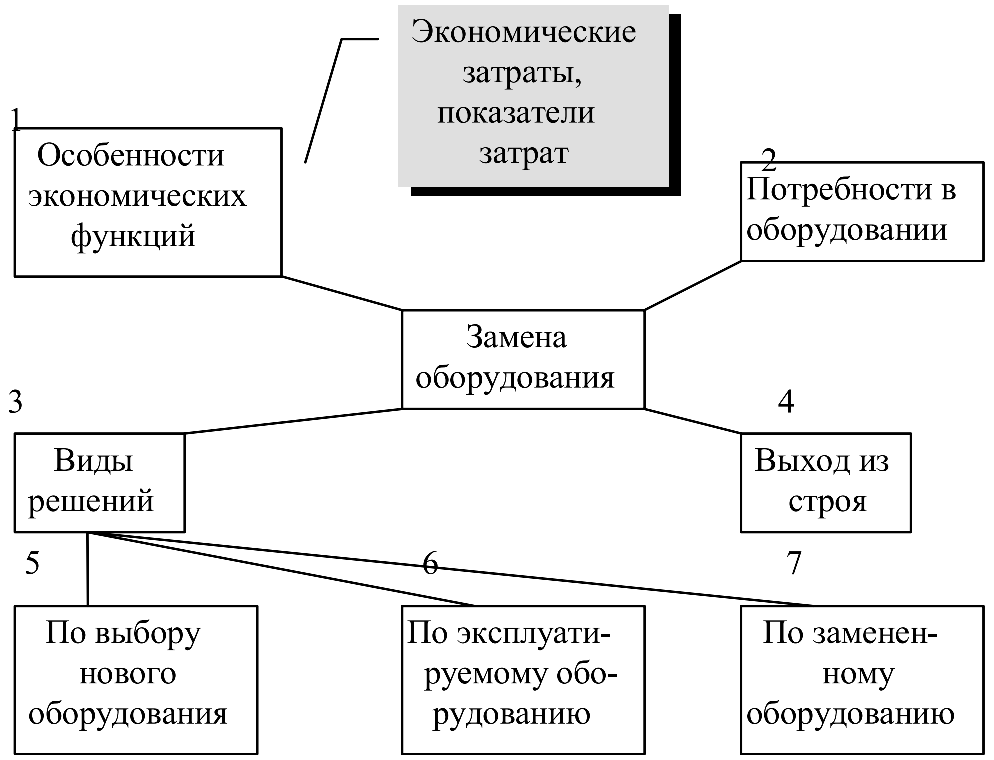


Задача управления запасами (ресурсами)



Задачи СМО

Задачи теории игр



Задачи о замене оборудования

ЛЕКЦИЯ № 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Общая характеристика задач математического и линейного программирования (ЗЛП).
2. Основные этапы построения математических моделей для применения ЗЛП.
3. Решение ЗЛП графическим методом.

Математическое программирование – дисциплина, которая занимается изучением экстремальных задач и поисками методов их решения.

Формулировка: требуется найти минимум или максимум функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при заданных ограничениях $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) * b_i$, $i = \overline{1, n}$, * – ограничение ≥, ≤ или =.

В зависимости от вида функций f и g_i задача математического программирования бывает следующих видов.

1. Задача линейного программирования (ЗЛП), если f и g_i линейны.
2. Задача нелинейного программирования (ЗНП или НП-задача), если хотя бы одна из функций нелинейная.

Задачи делятся на классы.

1. Задача целочисленного программирования (ЦП), когда вектор переменных $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ целочисленен.
2. Задача параметрического программирования, если f и g_i зависят от параметров.
3. Если f – дробно-линейная функция, а ограничения g_i – линейны, то имеем задачу дробно-линейного программирования.
4. Стохастическое программирование, если среди компонентов функций f или g_i присутствуют случайные величины.
5. Динамическое программирование – многоэтапный процесс нахождения решения, при этом функции f и g_i зависит от времени или состояния (номера шага или этапа).

Линейное программирование – решение экстремальных задач математического программирования с линейной зависимостью между переменными

Методы решения задач линейного программирования (ЗЛП).

1. Графический метод.
2. Прямой симплекс-метод (метод симплекс-таблиц).
3. Метод искусственного базиса.
4. Модифицированный симплекс-метод.
5. Двойственный симплекс-метод.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Необходимо:

1. Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.
2. Сформулировать цель решение и составить целевую функцию.
3. Составить ограничения задачи.

Свойства моделей:

1) пропорциональность;

2) аддитивность.

АЛГОРИТМ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

1. Построить допустимое множество решений.

2. Построить нормаль к целевой функции и изобразить её проекцию на плоскости решений. Направление нормали указывают направление возрастания целевой функции.

3. Перемещать перпендикуляр к нормали до тех пор, пока он не достигнет крайней точки множества допустимых стратегий.

4. Определить значения координат крайней точки допустимого множества либо непосредственно по графику, либо по уравнениям ограничивающих прямых, пересекающихся в крайней точке.

5. Вычислить значение целевой функции, соответствующее оптимуму.

Направление движение определяется видом оптимизации:

- при решении задачи минимизации – от точки с координатами (c_1, c_2) к началу координат;
- при решении задачи максимизации – от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2).

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

1. Линия, ограничивающая область в направлении оптимизации, перпендикулярна нормали.
2. Область незамкнута в направлении оптимизации.
3. Несовместная система условий.
4. Невыпуклая области.

ЛЕКЦИЯ №3. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Теоремы, на которых основывается решение ЗЛП.
2. Обоснование принципов алгоритма решение ЗЛП прямым (табличным) симплекс-методом.
3. Искусственные переменные в моделях ЗЛП.
4. Решение ЗЛП методом искусственного базиса.
5. Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом.

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЛП

- Развёрнутая

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max, \quad \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1}, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \end{array}\right\}.$$

- Матричная

$$Z = C^T X \to \max,$$
$$AX \le B = A_0.$$

- Векторное представление системы ограничений

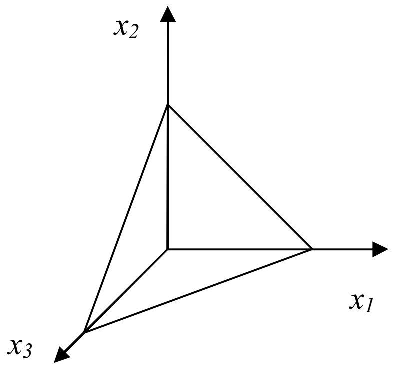
$$\left.\begin{array}{l} A_1x_1 + A_2x_2 + ...A_nx_n \le B, \ \text{где} \\ A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix}, ..., A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}, A_0 \equiv B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix} \end{array}\right\}$$

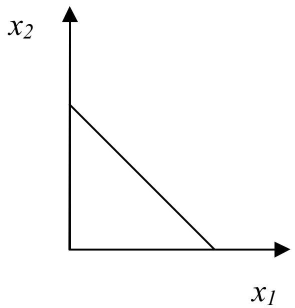
- Каноническая модель ЗЛП

  Целевая функция

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\} \equiv AX + EX_{ДОП} = B.$$





Определения

Допустимые решения – это совокупность чисел (x_1, x_2, … , x_n), удовлетворяющих ограничениям исходной задачи.

Оптимальное решение – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции.

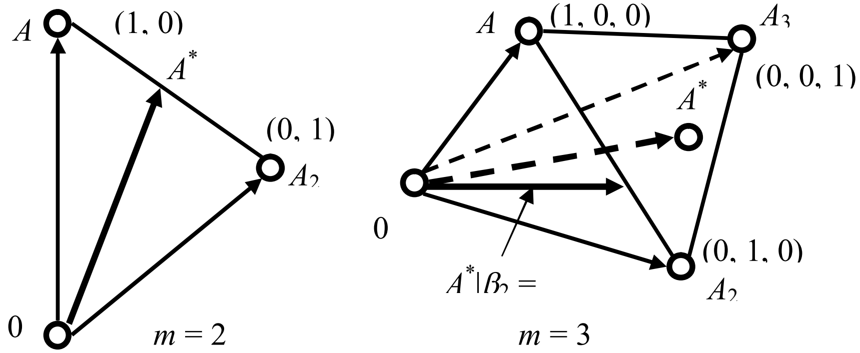
Опорный (базисный) план – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов A_j, соответствующих переменным x_j.

Теорема 1. Если целевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение в некоторой точке допустимого множества решений R_1, то она принимает это значение в крайней точке R_1. Если целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Линейной комбинация векторов: $A^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot A_i;\ \beta_i \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$

Для $m = 2$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 + (1 - \beta_1) A_2$.

Для $m = 3$ – $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3$.



Теорема 2. Если существует такое независимое множество m-мерных векторов $A_1, A_2,..., A_k, k \le m$, что $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_kx_k = A_0$, то n-мерный вектор

$$X^T = [x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\leftarrow n-k \rightarrow}]$$ есть крайняя точка допустимого множества R_1.

Теорема 3. Если X_0^T – крайняя точка допустимых решений множества R_1, то решение X_0^T – допустимое базисное решение (ДБР) системы ограничений.

Следствия из теорем

1. При отыскании оптимума достаточно рассмотреть только крайние точки допустимого множества решений.
2. Для отыскания оптимума достаточно перебрать допустимые базисные решения.

ПРЯМОЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Исходная задача

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to opt$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_{m1}, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

1. Приведение модели к канонической форме

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + ... + 0x_{n+m} \to opt,$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} = b_2, \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{aligned}\right\}$$

2. Посторенние смплекс-таблицы

		c_j	c_1	.....	c_n	0	......	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	0	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	0	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	0	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ	δ_0	δ_1	...	δ_n	δ_{n+1}	...	δ_{n+m}

3. Расчёт симплекс-разностей

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,o}, \ \delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{i,Б} \times a_{i,j} - c_j, \quad j = 1, n+m..$$

4. Принятие решения об остановке вычислений

$$\max : \forall_j \delta_j \geq 0, \min : \forall_j \delta_j \leq 0 .$$

5. Признаки неразрешимости

$$\max : \exists_k \delta_k < 0 \ \& \ \forall a_{i,k} \leq 0, \min : \exists_k \delta_k > 0 \ \& \ \forall a_{i,k} \leq 0.$$

6. Определение направляющего столбца

$$\max : \arg\min_j \delta_j < 0 \to j^*, \ \textit{или} \ \min : \arg\max_j \delta_j > 0 \to j^*.$$

7. Определение направляющей строки

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \to i^*$$

8. Пересчёт симплекс-таблицы, после чего – возврат к пункту 3.

Пояснение, почему правила определения направляющих строки и столбца таковы

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = A_0 \qquad (a)$$

$$A_1 x_{1,j} + A_2 x_{2,j} + \ldots + A_m x_{m,j} = A_j \qquad (b)$$

$$A_1 \theta x_{1,j} + A_2 \theta x_{2,j} + \ldots + A_m \theta x_{m,j} = A_j \,\theta \qquad (c)$$

$$A_1 (x_1 - \theta x_{1,j}) + A_2 (x_2 - \theta x_{2,j}) + \ldots + A_m (x_m - \theta x_{m,j}) + A_j \,\theta = A_0 \,. \qquad (d)$$

$$X^{\mathrm{T}} = \{\; x_1 - \theta x_{1,j},\;\; x_2 - \theta x_{2,j},\;\; \ldots,\;\; x_m - \theta x_{m,j},\;\; \theta,\;\; 0, \ldots 0 \;\}$$

$$\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; m \;-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

$$\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; m + 1 \;-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

$$\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; m + n \;-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow$$

$$0 < \theta \le \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{i,j}} \right\}$$

Целевая функция для случая (a)

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \, .$$

Для случая (d)

$$F(A_j)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_{i,j} = c_1(x_1-\theta x_{1,j})+c_2(x_2-\theta x_{2,j})+\ldots+c_j\theta =$$
$$=F(X)-\theta(c_1x_{1,j}+c_2x_{2,j}+\ldots-c_j) \, .$$

Измененение при смене базиса составит:

$$F(A_j)-F(X)=-\theta(c_1x_{1,j}+c_2x_{2,j}+\ldots-c_j)=-\theta\cdot\delta_j \, .$$

МЕТОД ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

$Z = C^T \cdot X \to \max(\min)$

$AX \otimes B$,

где $\otimes$ – знаки отношений $\otimes \subseteq (\geq, =) \cup (\leq)$

$$AX - EX_{ДОП} = B \equiv A_0 \Leftrightarrow -EX_{ДОП} = A_0$$

$$AX - EX_{ДОП} + EX_{ИСК} = A_0 \Leftrightarrow -EX_{ИСК} = A_0$$

После канонизации

$$f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \pm \mu x_{n+m+1} \dots \pm \mu x_{n+2m},$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} + 1x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} \dots + 0x_{n+2m} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} - 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 1x_{n+m+2} \dots + 0x_{n+2m} = b_2, \\
\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots - 1x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} \dots + 1x_{n+2m} = b_{m1}.
\end{array}\right\}$$

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Основная таблица

$\longleftarrow A_x^{-1} \longrightarrow$

Базис	$C_Б$	e_0	e_1	e_2	...	e_m	A^*	Θ
A_{n+1}	*0*	b_1	1	0	...	0		
A_{n+2}	*0*	b_2	0	1	...	0		
...	...	...	...	…	...	...		
A_{n+m}	*0*	b_m	0	0	...	1		
	Λ	λ_0	λ_1	λ_2	...	λ_m		

Вспомогательная таблица

		c_j	c_1	.....	c_n	*0*	......	*0*
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	.....	A_n	A_{n+1}	......	A_{n+m}
A_{n+1}	*0*	b_1	a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0
A_{n+2}	*0*	b_2	a_{22}	...	a_{2n}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_{n+m}	*0*	b_m	a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1
	δ^0	δ^0_0	δ^0_1	...	δ^0_n	δ^0_{n+1}	...	δ^0_{n+m}
	...							
	δ^r	δ^r_0	δ^r_1	...	δ^r_n	δ^r_{n+1}	δ^r_0	δ^r_1

ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТОВ

$$e_0 = A_x^{-1} \times A_0,$$

$$\Lambda^T = C_Б^T \times A_x^{-1},$$

$$\lambda_0 = C_Б^T \times e_0$$

$$\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j$$

$$A^* = A_x^{-1} \times A_{j^*}.$$

$$\Theta_i = \frac{e_{i,0} \geq 0}{a_i^* > 0}$$

ЛЕКЦИЯ №4. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПЛАН

1. Двойственность в ЗЛП.
2. Теоремы двойственности.
3. Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом.

СВЯЗЬ ПРЯМОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧ

<table>
<tr><th>Прямая задача</th><th>Двойственная задача</th></tr>
<tr><td colspan="2">Развёрнутая форма представления</td></tr>
<tr><td>$\max \sum_{j=1}^{n} c_i x_i,$

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i \le b_i, \quad i = 1,\overline{m},$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,\overline{n}.$</td><td>$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\overline{n},$

$y_i \ge 0, \quad i = 1,\overline{m}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Матричная форма представления</td></tr>
<tr><td>$C^T X \to \max,$

$AX \le B.$</td><td>$B^T Y \to \min,$

$A^T Y \ge C.$</td></tr>
</table>

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Теорема 1. Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач соответственно (при этом выполняется неравенство $AX_0 \leq B$ и $A^T Y_0 \geq C$), то значение целевой функции прямой задачи не превышает значения целевой функции двойственной

$$\boldsymbol{C^T X_0 \leq B^T Y_0}.$$

Теорема 2 (Основная). Если X_0 и Y_0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если $C^T X_0 = B^T Y_0$, то X_0 и Y_0 – оптимальные решения пары двойственных задач.

Теорема 3. Если в оптимальном решении прямой задачи i-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю, то есть $A_i \cdot X^* < b_i \Rightarrow y^*_i = 0$, где A_i – i-ая строка матрицы.

Теорема 4. Если в оптимальном решении двойственной задачи *j*-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю, то есть $A^T_j \cdot Y^* - c_j < 0 \Rightarrow x^*_j = 0$, где где A_j – *j*-ая строка матрицы.

Следствие:

$$\delta_{n+i}^{ПрямойЗадачи} = y^*_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad \delta_{m+j}^{ДвойственнойЗадачи} = x^*_j,\ j = \overline{1,n},$$

где n и m – число переменных и ограничений прямой задачи.

Определения

Сопряжённый базис (базис двойственной задачи) – система m независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой Y удовлетворяет ограничениям двойственной задачи: $A_j^T Y > c_j$.

Псевдоплан прямой задачи – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса. Иными словами, псевдоплан есть разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.

АЛГОРИТМ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

- Приведение системы ограничений к одинаковым знакам отношений
- Приведение систему ограничений в каноническую форму.
- Построение двойственной задачи для канонической формы.
- Подбор сопряжённого базиса
- Расчёт псевдоплана

$$A_j = M \times \widetilde{A}_j$$

где A_j – разлагаемый вектор, M – матрица составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис, $\widetilde{A}_j$ – искомое разложение вектора.

- т.н. “БОЛЬШАЯ ИТЕРАЦИЯ”
- Заполнение таблицы и расчёт симплекс-разностей
- Проверка неразрешимости $\exists_i\, a_{i,0} < 0 \;\&\; \forall_j\, a_{i,j} \geq 0$,
- Определение направляющей строки: $\arg\min\limits_i a_{i,0} < 0 \Rightarrow i^*$,
- Определение направляющего столбца:

$$\arg\min_j \left\{ \frac{-\delta_j \geq 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

- Пересчёт таблицы, после чего – к началу итерации

ЛЕКЦИЯ №5. ЗАДАЧИ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Постоптимальный анализ
2. Параметрическое программирование.

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА ОГРАНИЧЕНИЙ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i + \delta_{b_i}$$

$$X_{\max} = A^{-1} \times B$$

$$B' = B + \delta_{b_i}\vec{\mathbf{e}}_i$$

$$X'_{\max} = \underbrace{A^{-1} \times B}_{X\,\max} + \delta_{b_i} A^{-1} \times \vec{\mathbf{e}}_i\,,$$

$$a^*_{r,0} + \delta_{b_i} a_{r,n+i} \ge 0, \quad r = \overline{1,m},$$

$$\max_{a_{r,n+i}>0}\left\{\frac{-a^*_{r,0}}{a_{r,n+i}}\right\} \le \delta_{b_i} \le \min_{a_{r,n+i}<0}\left\{\frac{-a^*_{r,0}}{a_{r,n+i}}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} b_i^{НГ} &= b_i + \max_{a_{r,n+i}>0}\left\{\frac{-a^*_{r,0}}{a_{r,n+i}}\right\}, \\ b_i^{ВГ} &= b_i + \min_{a_{r,n+i}<0}\left\{\frac{-a^*_{r,0}}{a_{r,n+i}}\right\} \end{aligned}\right\}. \qquad (*)$$

Случай 1. Пусть дополнительная переменная x_{n+i}, соответствующая i-му ограничению, для правой части которого отыскивается диапазон изменения b_i, ***не входит*** в базисное решение.

Случай 2. Пусть дополнительная переменная x_{n+i}, соответствующая ограничению с приращением δ_{b_i}, ***является базисной***.

При "≤": $-a^*_{r,0} \le \delta_{b_i} \le \infty$, при "≥": $-\infty \le \delta_{b_i} \le a^*_{r,0}$ (A.8)

Случай 3. Пусть элементы вектора свободных членов изменяются произвольно и одновременно для нескольких (а, возможно, и для всех) ограничений.

$$a_{i,0}^{*}+\sum_{j=1}^{m}a_{i,n+j}\delta_{b_j}\geq 0,\qquad i=\overline{1,m}.$$

- Дефицитные и недефицитные, значимые и незначимые ресурсы

$$F_{opt}^{ДЗ}=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m=b_1\delta_{n+1}+b_2\delta_{n+2}+\ldots+b_m\delta_{n+m}$$

$$\delta_{b_q}y_q^{*}=\delta_{b_s}y_s^{*}\Rightarrow\delta_{b_q}=\frac{\delta_{n+s}^{*}}{\delta_{n+q}^{*}}\cdot\delta_{b_s}\equiv\delta_{b_s}=\frac{\delta_{n+q}^{*}}{\delta_{n+s}^{*}}\cdot\delta_{b_q}$$

ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$$F^{\nabla}(X) = C^T X + \delta_{c_r} \overrightarrow{\mathbf{e}}_r^{\,T} X$$

Случай 1. Переменная с номером *r* входит в базис оптимального решения.

$$\forall j \delta_j^{\nabla} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_j + \delta_{c_r} \cdot a_{r,j} \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m},$$

$$\max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \leq \delta_{c_r} \leq \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \Rightarrow c_r^{НГ} = c_r + \max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}, c_r^{ВГ} = c_r + \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}$$

Случай 2. Пусть переменная x_r в базис не вошла.

$$\delta_r^{\nabla} = \delta_r + \delta_{c_r} \Rightarrow -\infty < \delta_{c_r} \leq \delta_r$$

Случай 3. Комбинация 1 и 2.

$$\delta_j + \sum_{r=1}^{m} a_{r,j} \cdot \delta_{c_r} \geq 0$$

ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ

- Для небазисных переменных

$$A_k^{\nabla} = A_k + \delta_{a_{r,k}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_k$$

$$\delta_k^{\nabla} = \delta_k + c_k \cdot \delta_{a_{r,k}}$$

$$\delta_{a_{r,k}} \geq -\frac{\delta_k}{c_k}$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

- Случай 1: параметрические изменения вектора ограничений

$$b_i^{\nabla} = b_i + tp_i,\ i = \overline{i,m}, \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 + tp_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 + tp_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m + tp_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

$$X^* = A^{-1} \times B$$

$$X^{\nabla *} = A^{-1} \cdot B^{\nabla} = A^{-1} \cdot B + t_0 A^{-1} \cdot P = \widetilde{B} + t_0 \cdot \widetilde{P}; \widetilde{B} = A^{-1} \cdot B; \widetilde{P} = A^{-1} \cdot P$$

$$\tilde{b}_i + t \cdot \tilde{p}_i \geq 0,\ \ i = \overline{i,m}, \qquad t \in [\alpha, \beta]; t = t_0 \geq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}; t = t_0 \leq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max\limits_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \exists i : \tilde{p}_i \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения

1. Зафиксировав значение параметра $t = t_0$, решить ЗЛП симплекс-методом.

2. Определить границы изменения параметра $[\alpha_r, \beta_r]$

3. Окончание, если верхняя граница β_r интервала выйдет за пределы или окажется равной верхней границе изменения параметра.

4. В противном случае, необходимо отыскать направляющую строку и выполнить большую итерацию двойственного симплекс-метода.

$$\min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} \Rightarrow i^*$$

5. Вернуться к п.2 настоящего алгоритма.

- Случай 2. Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции

$$c_i^{\nabla} = c_i + tp_i,\ i = \overline{i,n}, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

$$\max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \ldots + (c_n + tp_n)x_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

$$\delta_j^{\nabla} = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

$$t = t_0 \ge -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_j > 0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}; t = t_0 \le -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_j < 0}\left\{-\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\},$$

Алгоритм решения

1. Зафиксировать $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ и решить задачу параметрического программирования как обычную ЗЛП.

2. Исследовать полученное решение с помощью системы неравенств допустимости, в ходе которого будут определены нижняя и верхняя границы параметра.

3. Если окажется, что $\beta_0 \to \infty$, то найдено оптимальное решение

4. В противном случае, руководствуясь , необходимо определить направляющий столбец:

$$\min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} \Rightarrow j^*,$$

затем перейти к п. 2.

5. Решение представляется набором интервалов $[\alpha, \beta_1]$, $[\beta_1, \beta_2]$, … , $[\beta_{r-1}, \beta]$, на каждом из которых будет свой оптимальный план и своё выражение для расчёта целевой функции.

ЛЕКЦИЯ № 6. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Дискретное и целочисленное программирование. Общие подходы к решению задач целочисленного программирования.
2. Линейное целочисленное программирование (ЛЦП).
3. Решение задач ЛЦП методом отсекающих плоскостей (Гомори).
4. Решение задач ЛЦП методом Ветвей и границ.
5. Стохастическое программирование: модели, подходы и методы решения.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

$$
f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\
g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\
\ldots \\
g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\
X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D,
\end{array}\right\}
$$

где D – конечное или счётное множество.

Если X ограничено множеством целых чисел, то задачу назначают задачей ***линейного целочисленного программирования (ЛЦП)***.

КЛАССЫ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- Задачи с неделимостями (задачи о рюкзаке), обусловлены физическими свойствами объектов. Задача размещение массивов информации на внешних устройствах ЭВМ при ограничениях на объём, скорость вращения, стоимостные рамки и др. относится к этому классу.
- Экстремальные комбинаторные задачи (о назначениях, коммивояжёра, о покрытиях).
- Задачи на несвязных и невыпуклых областях.
- Задачи с разрывной целевой функцией.
- Транспортная задача при целочисленных значениях массивов поставок, потребления и стоимостей.
- Методы:
  1. Метод отсечений, отсекающих плоскостей (ГОмори или ГомОри).
  2. Метод ветвей и границ.
  3. Методы, учитывающие особенности задачи.
  4. Методы случайного поиска (эвристические).

- Метод Гомори

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j = p \qquad \text{(a)}$$

$[d]$ есть целая часть d(округление по недостатку).

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j \le p$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j \le [p]$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j\right] \cdot x_j + y = [p] \qquad (b)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{-d_j\right\} \cdot x_j + y = \left\{-p\right\}. \qquad (c)$$

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОТСЕЧЕНИЯ ГОМОРИ

1. Для выбранного канонизированного уравнения (*a*) сформировать желаемую целочисленную форму вида (*b*).

2. Из целочисленной формы (*b*) вычесть исходное уравнение (*a*), получится уравнение отсекающей плоскости (*c*).

Дадим и нотацию этого алгоритма в виде формулы:

$$(c) = (b) - (a)$$

Алгоритм решения задачи ЛЦП методом Гомори

Процедура получения решения структурно состоит из

- предварительного этапа,
- проверки условия окончания и
- так называемой “большой итерации”, которая включает операцию формирования отсечения и несколько шагов итеративной части двойственного симплекс-метода.

1. **Предварительный этап**. Получить оптимальное решение ЗЛП без учёта целочисленности.

2. **Условие окончания расчётов**. Если в текущем решении все компоненты базисного столбца A_0, соответствующего основным переменным, являются целыми числами, то найдено оптимальное решение задачи ЛЦП.

3. **Большая итерация**.

3.1. Отсечение Гомори формируется для тех строк симплекс-таблицы, в которых компоненты $a_{i,0}$, соответствующие основным переменным задачи, дробные числа.

3.2. В базисное решение вводится дополнительная переменная x_{r+t}, соответствующая канонизированному уравнению отсекающей плоскости, одновременно симплекс-таблица пополняется строкой и столбцом-ортом A_{r+t}.

3.3. Выполняется итерационная часть двойственного симплекс-метода.

3.4. Если вектор A_{r+t}, ранее выведенный из базиса, в ходе расчётом снова в него вводится в процессе итераций, то строку и столбец симплекс-таблицы, соответствующие переменной x_{r+t} после пересчёта по методу Жордана-Гаусса вычёркивают (удаляют) из неё.

На этом циклическая часть алгоритма завершена, а цикл возобновляется с п. 2.

ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ ГОМОРИ

1. Сходимость вычислений обеспечивается за конечное число итераций.

2. Метод особенно эффективен, когда ***большинство*** переменных имеют целочисленные значения.

4. После выполнения нескольких больших итераций на шаге отсечения Гомори появляются многочисленные альтернативы. Это ведёт к зацикливанию, именуемому Г. Вагнером “сплошной вырожденностью.

5. Затруднена сходимость при решении задач, в которых значения $a_{i,j}$ и b_i велики.

6. Иногда, для достижения успеха, требуется видоизменить постановку задачи в сторону усиления, например, введя ограничения $x_1 \leq 6$ и $x_2 \leq 6$ в дополнение к уже существующему ограничению $x_1 + x_2 \leq 6$.

- Метод ветвей и границ

$$L_j \le x_j \le U_j,$$

где L_j – нижний предел, а U_j – верхний предел (граница), которые определяются границами области допустимых решений задачи.

$$L_j \le I \le U_j - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_j \le I, \\ x_j \ge I + 1 \end{array}\right\}$$

Алгоритм метода ветвей и границ

1. Исходная задача решается любым удобным методом до отыскания нецелочисленного оптимального решения.

2. Если X_0 – нецелочисленное решение, то, используя неравенства, получаем множество из двух задач G_1 и G_2 (ветвей).

3 Для решения возникающих задач ветвейьзуют двойственный симплекс-метод, который, как нам известно, допускает ввод новых ограничений по ходу решения.

- Одна из задач формируется по ограничению $x_j \le I$, где I – целая часть $[x_j]$, в виде строки A_{r+t} в симплекс-таблице, соответствующей канонической форме уравнения $I = x_j + x_{r+t}$ в таблице и вектору A_{r+t} в базисе. Одновременно в симплекс-таблицу помещается выводимая строка, обозначаемая как $\widetilde{A}_{r+t}$ и формируемая вычитанием из строк: A_{r+t} - A_j. При этом переменная x_j введённого ограничения сохраняется в базисе.
- Вторая задача формируется по ограничению $-x_j \le -(I+1)$, которому соответствует строка, обозначаемая A'_{r+t}, которая строится по канонической форме этого ограничения и записывается в форме $-(I+1) = -x_j + x'_{r+t}$, Одновременно формируется и выводимая строка $\widetilde{A}'_{r+t}$, равная $A'_{r+t} + A_j$.

4. Процесс заканчивается перерешиванием всех возникающих задач.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задача: найти управляющие переменные $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ с учётом влияния случайных факторов $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, не поддающихся управлению.

$$f(X, \omega) \to \text{opt},$$
$$g_i(X, \omega) \le 0,\ i = \overline{1, m},$$
$$X \ge 0,\ \omega \in \Omega,$$

где Ω – пространство событий ω.

Разновидности задач стохастического программирования:

1. Стохастические коэффициенты функции цели при детерминированных ограничениях.

2. Детерминированные коэффициенты целевой функции при стохастических свободных членам и коэффициентах системы ограничений.

3. Стохастические коэффициенты целевой функции, свободные члены и коэффициенты системы ограничений.

- Классы моделей.

1. *M*-модели.

Задача максимизации математического ожидания того или иного показателя (прибыли, рентабельности et c).

2. *V*-модели.

Минимизация дисперсии какого-либо показателя при условии ограничения на определённом (желаемом) уровне его средней величины.

3. *P*-модели.

Определение вероятности превышения (или не превышения) экономическим показателем определённого уровня или порога.

Прямые и непрямые методы.

- N-этапные задачи (модели) стохастического программирования:

$$
\begin{aligned}
& f[X(\omega)] \to \text{opt}, \\
& g_i[X(\omega)] \le 0,\ i = \overline{1,m}, \\
& X(\omega) \ge 0.
\end{aligned}
$$

N-этапную стратегическую модель стохастического программирования:

"Решение" $\to$ "Наблюдение" $\to$ "Решение" … $\to$ "Наблюдение" $\to$ …

N-этапную задачу тактического стохастического программирования

"Наблюдение" $\to$ "Решение" … $\to$ "Наблюдение" $\to$ "Решение" $\to$ …

ЛЕКЦИЯ № 7. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Задачи и модели нелинейного программирования (ЗНП).
2. Общий случай ЗНП. Теорема Куна - Таккера.
3. Седловая точка
4. Задачи квадратичного программирования и её решение сведением к ЗЛП.

Постановка НП-задачи

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0. \end{cases}$$

где функции $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = 1, m$, в общем случае, нелинейные.

НП-ЗАДАЧИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА “РАВЕНСТВО” (МЕТОД ЛАГРАНЖА)

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ h_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ h_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Функции $f(X)$ и $h_i(X)$, $i = \overline{1, m}$ нелинейные и имеют непрерывные частные производные.

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} &= 0,\ j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} &= 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0$$

Теорема. Пусть существует точка X^*, в которой достигается экстремум функции $f(X)$ при ограничениях $h_i(X) = 0$, $i = 1,m$. Если ранг матрицы $I = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right], i = 1,\overline{m}; j = 1,\overline{n}$ в точке X^* равен m, то существует m вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, ***не все из которых равны нулю одновременно***, при которых выполняется условие

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0.$$

Алгоритм метода Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа $L(X, \Lambda)$.
2. Найти частные производные функции Лагранжа (2.76).
3. Решить систему уравнений для определения X^* и Λ^*.
4. Исследовать полученные точки на максимум или минимум.

Пример практического применения метода Лагранжа

Содержательная постановка.

Цикл эксплуатации блока датчиков информационного зонда включает следующие фазы: $\tau_П$ – подготовки к применению; $\tau_Г$ – готовности к применению, $\tau_Р$ – работы (применения). Требование к надёжности формулируется в виде показателя безотказной работы R. Каковы должны быть требования по надёжности к каждой фазе эксплуатации, если известны потери от отказа на каждой фазе, задаваемые неотрицательными величинами $C_i > 0,\ i = П, Г, Р$?

Время эксплуатации изделия в целом есть

$$\tau_\Sigma = \tau_П + \tau_Г + \tau_Р,$$

а надёжность характеризуется показателем

$$R = P_П\, P_Г\, P_Р,$$

где $P_i,\ i = П, Г, Р$ – вероятность безотказной работы на соответствующей фазе.

Если последствия отказов равнозначны, то задача имеет тривиальное решение:

$$P_i = \sqrt[3]{R},\ i = П, Г, Р.$$

Необходимо рассчитать вероятностные характеристики таким образом, чтобы общие потери были минимальные. Функция цели или функция потерь имеет вид

$$C_{\Sigma} = C_{П}(1\text{-}P_{П})P_{Г}P_{Р} + C_{Г}P_{П}(1\text{-}P_{Г})P_{р} + C_{р}P_{П}P_{Г}(1\text{-}P_{р}),$$

при ограничении

$$R = P_{П}\,P_{Г}\,P_{Р}\,.$$

Функция Лагранжа получается такова

$$L = C_{\Sigma} + \lambda[P_{П}\,P_{Г}\,P_{Р} - R]$$

В ходе применения метода, λ из первого, например, уравнения для частных производных $\frac{\partial L}{\partial P_i}$, подставляется в остальные.

$$\begin{cases} C_{Г}\cdot P_{П} - C_{П}\cdot P_{Г} = 0, \\ C_{Г}\cdot P_{Р} - C_{Р}\cdot C_{Г} = 0, \\ R = P_{П}\cdot P_{Г}\cdot P_{Р}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{Р} = \dfrac{C_{П}\cdot R}{C_{Г}\cdot P_{П}^{2}}, \\ P_{П} = \dfrac{C_{Р}\cdot R}{C_{Г}\cdot P_{Р}^{2}}. \end{cases}$$

Окончательно имеем оптимум

$$P_{\Pi}^{*}=\sqrt[3]{\frac{C_{\Pi}^{2}R}{C_{\Gamma}C_{P}}},\ P_{\Gamma}^{*}=\sqrt[3]{\frac{C_{\Gamma}^{2}R}{C_{\Pi}C_{P}}},\ P_{P}^{*}=\sqrt[3]{\frac{C_{P}^{2}R}{C_{\Pi}C_{\Gamma}}}.$$

Иногда стоимость потерь при отказах удобно выражать в относительных единицах:

$$a_1=\frac{C_{\Gamma}}{C_{\Pi}},\qquad a_2=\frac{C_{\Pi}}{C_{P}},\qquad a_3=\frac{C_{P}}{C_{\Gamma}},\ \text{причём}\ \ a_1a_2a_3=1.$$

Тогда решение примет вид

$$P_{\Pi}^{*}=\sqrt[3]{\frac{Ra_2}{a_1}},\quad P_{\Gamma}^{*}=\sqrt[3]{\frac{Ra_1}{a_3}},\quad P_{P}^{*}=\sqrt[3]{\frac{Ra_3}{a_2}}.$$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НП-ЗАДАЧИ

Задачи выпуклого программирования

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

f(X) и все $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ выпуклы (в смысле НП)

Задачи вогнутого программирования

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

f(X) и все $g_i(X)$, $i = \overline{1,m}$ вогнуты (выпуклы вверх)

Введём функцию max $U(X)$ = min $[-U(X)]$.

Обозначив

$$\hat{f}(X) = -f(X),$$
$$\hat{g}_i(X) = -g_i(X), \qquad i = 1,\overline{n}.$$

получим выпуклую задачу

$$\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min,$$
$$\begin{cases} \hat{g}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ \hat{g}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ \ldots \\ \hat{g}_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\overline{n}. \end{cases}$$

Общий случай задачи НП-программирования:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \min,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0, \\ x_j \ge 0, \qquad j = 1,\overline{n}. \end{cases}$$

Определение

Если в точке минимума X^* неравенство $g_i(X)$ выполняется как ***равенство***, то оно называется ***активным***.

По теореме Лагранжа

$$\nabla f(X^*) + \sum_I \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0, \quad I = \{i : g_i(X^*) = 0\}$$

Теорема Куна-Таккера. Пусть функции $f(X)$ и $g_i(X)$, $i = \overline{1, n}$ обладают частными производными на некоторой области $\mathfrak{R}$, содержащей X^*. Точка X^* будет являться точкой минимума функции $f(X)$ при ограничениях $g_i(X) \le 0$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условиям регулярности в виде линейной независимости, если существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\begin{cases} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0; \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*) = 0; \\ \lambda_i \ge 0, \qquad i = 1, \overline{m}. \end{cases}$$

СЕДЛОВАЯ ТОЧКА В НП-ЗАДАЧАХ

Определение. Пара векторов X^* и Λ^* называется ***седловой точкой*** функции $L(X, \Lambda)$ на области $\mathfrak{R}$, если для всех $\lambda \geq 0$ и $X \in \mathfrak{R}$ выполняется условие

$$L(X^*, \Lambda) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X, \Lambda^*), \qquad (*)$$

называемое ***неравенством седловой точки***.

В седловой точке: $\max\limits_{\lambda_i \geq 0} \min\limits_{X \in \mathfrak{R}} L(X, \Lambda) = \min\limits_{X \in \mathfrak{R}} \max\limits_{\lambda_i \geq 0} L(X, \Lambda),\ i = 1, \overline{n}.$

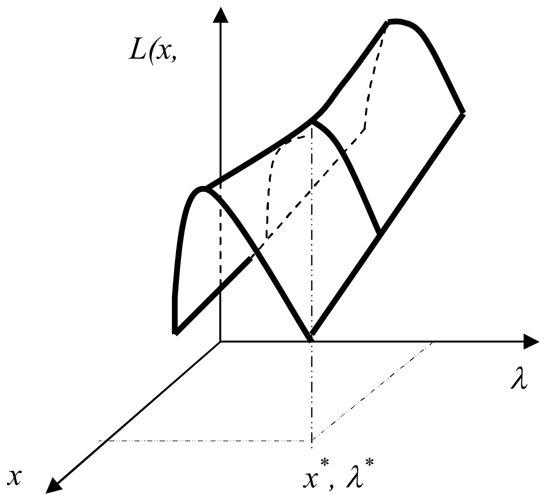


Рисунок 1 – Седло нелинейной функции

Теорема о седловой точке. Пусть $f(X)$ и все $g_i(X)$, $i = 1, m$ выпуклы, а функции $g_i(X)$ удовлетворяют условиям ***регулярности Слейтера*** (вида $\exists_X \forall_i g_i(X) < 0$). Вектор X^* является решением задачи нелинейного программирования

$$\min f(X),$$
$$g_i(X) \le 0, \qquad i = 1, \overline{m}.$$

тогда и только тогда, когда существует такой вектор Λ с неотрицательными компонентами, что выполняются неравенство ***седловой точки*** (*) и ***условие линейной независимости***

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*) = 0.$$

ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КУНА-ТАККЕРА.

Имеем выпуклую НП-задачу

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} g_i(X) \le 0, & i = 1,\overline{m}; \\ x_j \ge 0, & j = 1,\overline{n}. \end{cases}$$

Введём $x_j = -h_j(x_j)$, $j = 1, n$, $\Rightarrow h_j(x_j) \le 0$, $j = 1, n$.

Функция Лагранжа

$$L(X,\Lambda,U) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^{n} u_j h_j(x_j),$$

к которой применим теорему Куна-Таккера $\nabla L(X, \Lambda, U)$. Это эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda,U)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} - u_j = 0, & j = 1,\overline{n}; \\ u_j x_j = 0, & j = 1,\overline{n}; \\ \lambda_i g_i(X) = 0, & i = 1,\overline{m} \\ \lambda_i \ge 0, & i = 1,\overline{m}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \geq 0, \qquad j = 1,\overline{n}; \\ &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \cdot x^\circ_j = 0, \quad j = 1,\overline{n}; \end{aligned}\right\} \\ \left.\begin{aligned} &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} = g_i(X^\circ) \leq 0, \qquad i = 1,\overline{m}; \\ &\lambda_i g_i(X^\circ) = 0, \quad i = 1,\overline{m}. \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Для вогнутого программирования, благодаря симметрии задач.

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \leq 0, \qquad j = 1,\overline{n}; \\ &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \cdot x^\circ_j = 0, \quad j = 1,\overline{n}; \end{aligned}\right\} \\ \left.\begin{aligned} &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} = g_i(X^\circ) \geq 0, \qquad i = 1,\overline{m}; \\ &\frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda^\circ_j = 0,, \quad i = 1,\overline{m}. \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель:

$$\max f(X) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X,$$

$$\begin{cases} A \cdot X \le A_0, \\ x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

Функция Лагранжа

$$L(X,\Lambda) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X + \Lambda^T (A_0 - A \cdot X).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial X} = b + C \cdot X - A^T \Lambda \le 0, \\ \dfrac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \Lambda} = A_0 - A \cdot X \ge 0. \end{cases}$$

Теорема квадратичного программирования. Вектор $X_0 \geq 0$ является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и только тогда, когда существуют такие m-мерные векторы $\Lambda > 0$ и $W \geq 0$ и n-мерный вектор $V \geq 0$, что выполняются следующие условия

$$\begin{cases} b + C \cdot X - A^T \Lambda + V = 0, \\ A_0 - A \cdot X - W = 0, \\ V^T \cdot X = 0, \\ W^T \cdot \Lambda = 0. \end{cases}$$

Эквивалентная ЗЛП:

$$T = \sum_{i=1}^{m} \mu y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu z_j \to \min,$$

$$\begin{cases} b + CX - A^T \Lambda + V + Z = 0, \\ AX + W + Y = A_0, \\ V^T X = 0, \\ W^T \Lambda = 0. \end{cases}$$

Решить $F_{\max} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} X + \frac{1}{2} X^T \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$ при ограничениях $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

В развёрнутой форме

$F_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 x_2$ – целевая функция;

$\begin{cases} x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \; x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{cases}$ – система ограничений

Функция Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1 x_2 + \lambda_1 (x_2 - 3) + \lambda_2 (x_1 + x_2 - 7).$$

Частные производные:

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_1} = 3 - 2x_1 + 3x_2 + \lambda_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 + 3x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \le 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_1} = x_2 - 3 \ge 0,$$

$$\frac{\partial L(X,\Lambda)}{\partial \lambda_2} = x_1 + x_2 - 7 \ge 0.$$

Эквивалентная ЗЛП будет иметь вид

$$T = \mu y_1 + \mu y_2 + \mu z_1 + \mu z_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + \lambda_2 + v_1 + y_1 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + v_1 + y_2 = -2, \\ x_2 - w_1 + z_1 = 3, \\ x_1 + x_2 - w_2 + z_2 = 7. \end{cases}$$

ЛЕКЦИЯ №8. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НП-ЗАДАЧ

ПЛАН

1. Аналитические методы определения экстремумов.
2. Математические обоснования: теоремы нелинейного программирования.
3. Использование матрицы Гёссе
4. Поиск экстремумов для сепарабельных дифференцируемых функций

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0. \end{cases}$$

Теорема 1 (о существовании экстремума). Если функция многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и определена на замкнутом множестве $\mathfrak{R}$, то она достигает на этом множестве, ***по крайней мере, один раз*** своего минимального и максимального значений.

Теорема 2 (о местоположении экстремума). Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией нескольких переменных, определённой на допустимой области $\mathfrak{R}$, то экстремальное значение f (если оно существует) достигается в одной или нескольких точках, принадлежащих:

- множеству стационарных точек $S(X)$;
- множеству точек границы $G(X)$;
- множеству точек, в которых (где) функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не дифференцируема.

Определения

Множество точек $S(X)$ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется множеством стационарных точек, если его элементы удовлетворяю условию

$$\nabla f(X) = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_j}, j = 1, \overline{n} \right\} = 0,$$

а вектор $\nabla f(X)$ – называют градиентом функции.

Относительный (локальный) максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^0 с координатами $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если для всех точек, лежащих в малой окрестности точки X^0, имеет место неравенство $f(X^0) \geq f(X^0 + H)$, где $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$.

Абсолютный (глобальный) максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^* с координатами $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, если для всех точек, принадлежащих множеству ограничений $\Re$ справедливо неравенство $f(X^*) \geq f(X)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \Re$.

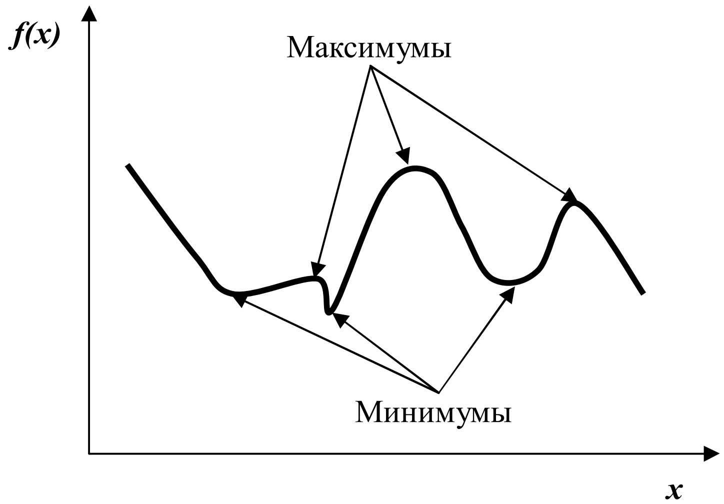


Рисунок 1 – Локальные и глобальные экстремумы

Пусть $\Re$ – выпуклое множество точек n-мерного пространства.

Если для произвольного множителя $k \in [0, 1]$ и некоторого приращения ΔX выполняется неравенство

$$f(X + k\Delta X) \geq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется ***вогнутой*** (обращена выпуклостью вверх), а если

$$f(X + k\Delta X) \leq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется ***выпуклой***.

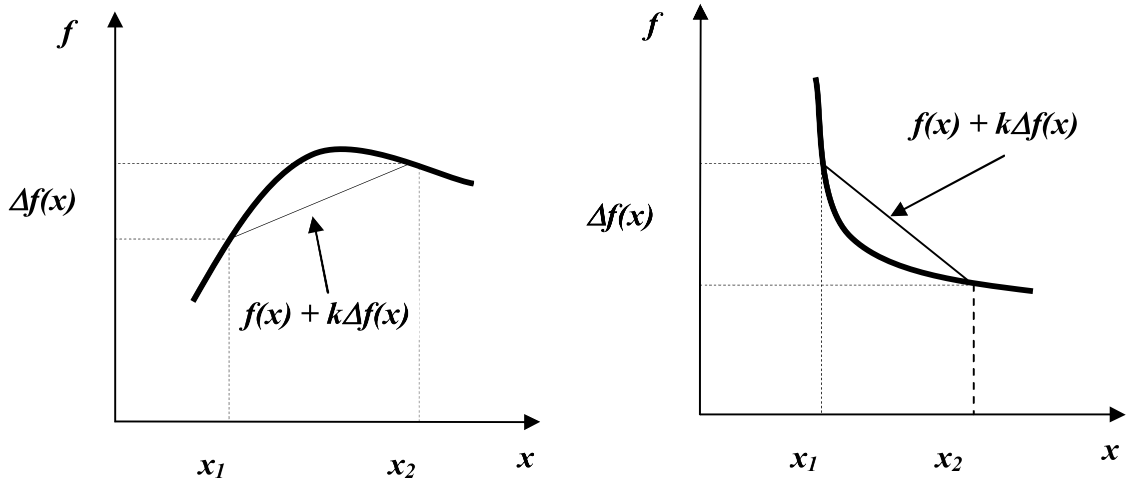


Рисунок 2 – Вогнутости и выпуклости функций

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦА ГЕССЕ

$$h_{i,j} = \left[\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=x_0}, i = 1,\overline{n},\ j = 1,\overline{m}.$$

Матрица Гёссе ($\nabla^2 f(X)$ или $H(X)$) называется ***положительно определённой***, если её главные угловые миноры ***положительны***, и ***отрицательно определённой***, если её главные угловые миноры имеют знак $(-1)^k$, k – номер углового минора.

Главные угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h_{2,2} & h_{23} \\ h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix} = h_{2,2} \cdot h_{3,3} - h_{3,2} \cdot h_{2,3}.$$

Теорема 3. Для того, чтобы в точке X_0 достигался внутренний относительный максимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой вогнутости*** функции в окрестностях X_0.

Теорема 4. Для того, чтобы в точке X_0 достигался внутренний относительный минимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой выпуклости*** функции в окрестностях X_0.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 .$$

Градиент этой функции есть

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \{1 - 2x_1; x_3 - 2x_2; 2 + x_2 - 2x_3\}.$$

Стационарная точка

$$X_0 = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$$

Матрица Гёссе:

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \mu_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \mu_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Вывод. Миноры положительны, следовательно, матрица Гессе положительно определена, функция выпукла, и в точке X_0 с координатами $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$ достигается минимум.

ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ограничение $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ является функцией с ***разделяемыми переменными (сепарабельной)***, если его можно представить в виде

$$x_i = \varphi_i(\{x_j\}),\ i \neq j, \quad j = 1,\overline{n}.$$

Общий алгоритм решения

- Отыскивается множество всех стационарных точек S функции $f(X)$ внутри допустимого множества $\Re$ и выбираются координаты точки, в наибольшей степени отвечающие направлению оптимизации задачи.
- Исследуется множество точек границы G. Для этого выполняют разделение переменных по каждому из ограничений, с последующей подстановкой выражений переменных в функцию цели $f(X)$. Полученные функции исследуются. Выбираются координаты интересующего нас оптимума.
- Определяется и подвергается исследованию множество точек, принадлежащих $\Re$, где функция не дифференцируема.
- Из результатов предыдущих шагов выбирается наилучшее решение.

ЛЕКЦИЯ №9. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НП-ЗАДАЧ

ПЛАН

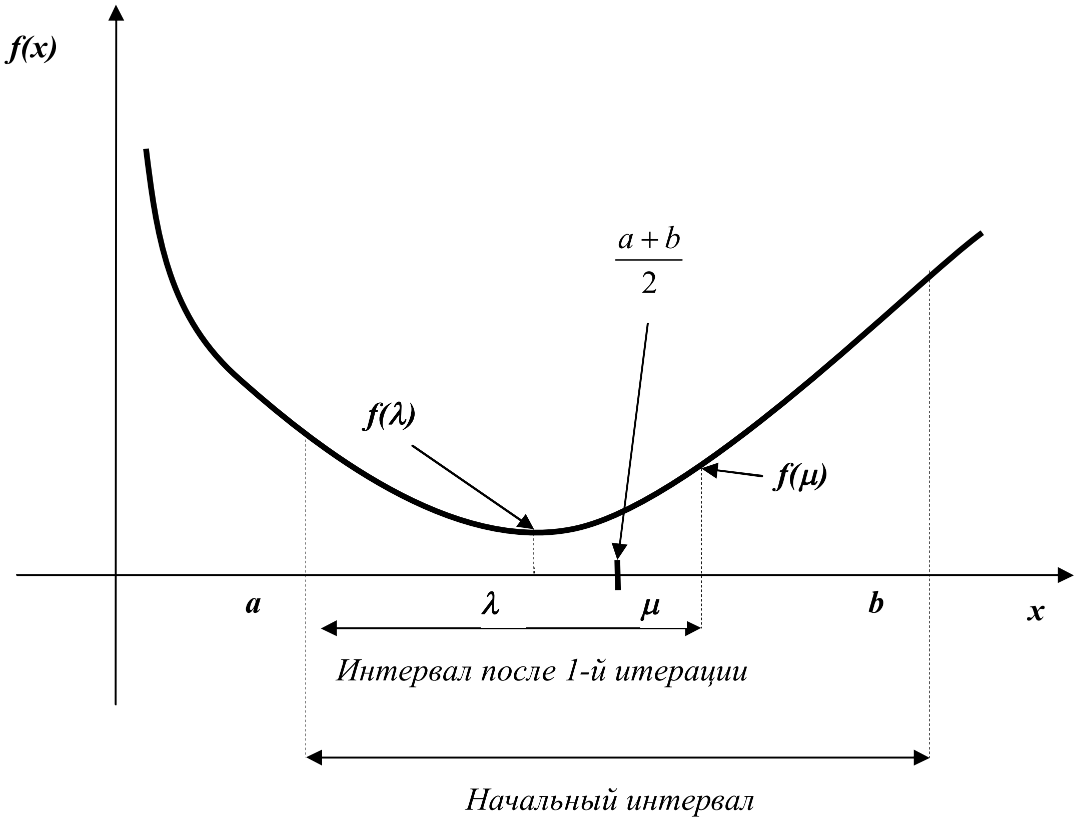
1. Прямые методы поиска экстремумов
2. Градиентные методы поиска экстремумов
3. Методы переменной метрики поиска экстремумов
4. Методы возможных направлений
5. Методы штрафных функций

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА

- **Дихотомический поиск**

Входные данные. Интервал поиска [a, b]; точность расчётов $l > 0$; константа различимости ε.

Условие окончания: $b-a \le l$.



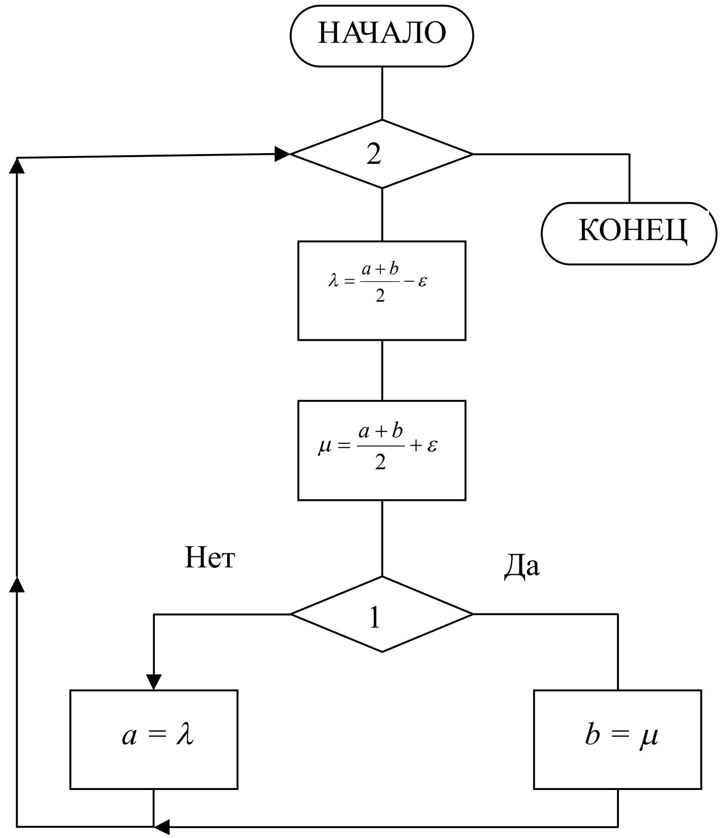
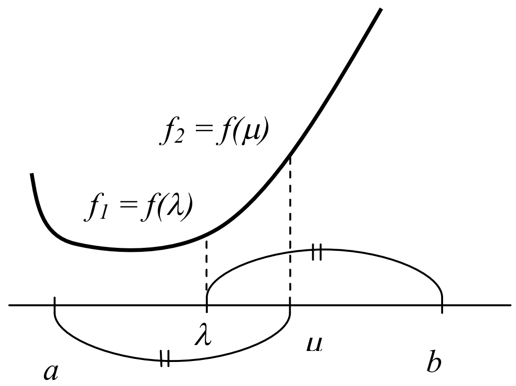


Рисунок 1 – Схема алгоритма дихотомического метода

- **Метод золотого сечения**

- интервал поиска сужается равномерно $b_k - a_k = \alpha^k\,(b - a)$;
- параметры точек сравнения и концов интервала соотносятся следующим образом

$$b - \lambda = \mu - a.$$



$$\lambda = a + (1 - \alpha)\times(b - a)$$
$$\mu = a + \alpha\times(b - a),$$

где $|\alpha| < 1$ (Коэффициент золотого сечения $\alpha = 0{,}618\ldots$)

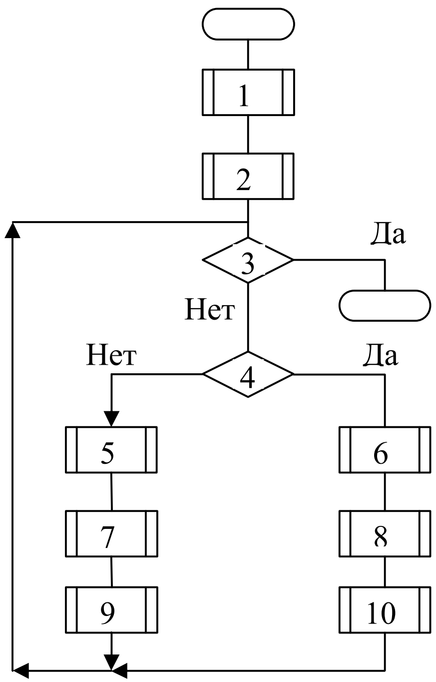


Рисунок 2 – Алгоритм метода золотого сечения

- **Метод Фибоначчи**

- на каждой итерации изменяет коэффициент сжатия интервала и
- выполняется заранее известного числа шагов.

Ряд Фибоначчи

$$F_{n+1} = F_n + F_{n\text{-}1},\ \mathrm{F}_0 = F_1 = 1$$

$$\frac{b-a}{l} < F_n \Rightarrow n$$

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) = b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$$

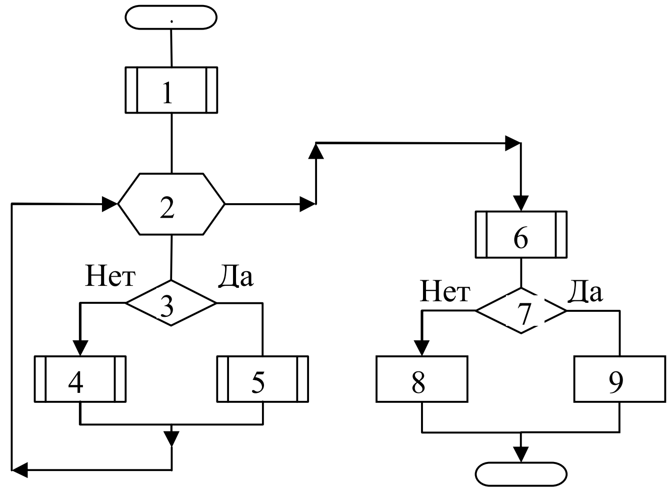


Рисунок 3 – Алгоритм метода Фибоначчи

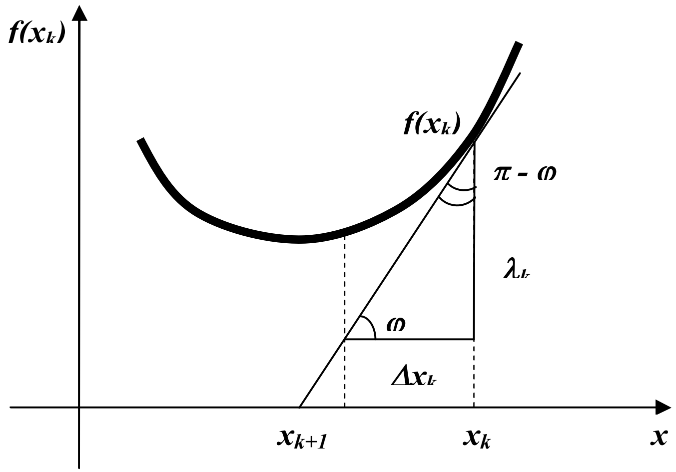
МНОГОМЕРНЫЙ ПОИСК

- **Метод конфигураций**

  Он же метод траекторий или метод Хука и Дживса.
  Идея.
- Направления поиска ориентированы, так сказать, по сторонам света или вдоль осей координат в обе стороны.
- Вокруг текущей точки производится поиск направления, в котором функция убывает.
- Если такое направление найдено, то шаг поиска увеличивается, а поиск продолжается в выбранном направлении – устанавливается так называемый тренд поиска, и осуществляется до тех пор, пока функция в этом направлении убывает.
- Если факта убывания функции не обнаружено, то шаг поиска уменьшается.

Делается попытка найти «овраг» (при минимизации) функции и двигаться вдоль него к точке минимума, а в задачи максимизации ищется «хребет».

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА



$$x_{k+1} = x_k - \Delta x_k$$

Рисунок 4 – Использование градиента

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \times \nabla f(x_k), \qquad (2.61)$$

где $\lambda_k > 0$ – величина шага на k-ой итерации. Все особенности градиентных методов заключаются в приёмах определения λ_k на каждой итерации.

- **Метод наискорейшего спуска (подъёма)**

$$\lambda_k^* \Rightarrow \min_{\lambda>0} f(X_k + \lambda s_k)$$

где $s_k = -\nabla f(X_k)$ определяется градиентом. При этом непосредственно значение λ_k может быть определено из уравнения

$$\frac{\partial f(X_k + \lambda s_k)}{\partial \lambda} = 0$$

аналитически, либо путём численного решения задачи одномерной минимизации.

- **Метод Ньютона (вторых производных)**

$$f(X) \cong f(X_0) + \nabla^T f(X_0)(X - X_0) + \frac{1}{2}(X - X_0)^T \nabla^2 f(X_0)(X - X_0),$$

где $\nabla^T f(X_0)$ – матрица Гёссе, составленная из частных производных второго порядка.

$$\Delta X_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\nabla^2 f(X_k)} \Rightarrow X_{k+1} = X_k - \frac{\nabla f(X_k)}{\nabla^2 f(X_k)}.$$

- **Метод сопряжённого градиента (Флетчера - Ривса)**

Понятие о сопряжённых направлениях

Система линейно-назависимых направлений поиска $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$ называется ***сопряжённой*** по отношению к некоторой положительно определённой матрице Q если

$$S_i^T Q S_j = 0; \quad i \neq j; \quad i = 1, \overline{n-1}, \ j = 1, \overline{n-1}.$$

$$S_n = -\nabla f(x_n)$$

Сопряжённое направление

$$S_{n+1} = -\nabla f(x_{n+1}) + \omega_{n+1} S_n$$

где ω_{n+1} – весовой коэффициент сопряжения.

$$\omega_{n+1} = \frac{\nabla^T f(x_{n+1}) \cdot \nabla f(x_{n+1})}{\nabla^T f(x_n) \cdot \nabla f(x_n)} = \frac{\left\|\nabla f(x_{n+1})\right\|^2}{\left\|\nabla f(x_n)\right\|^2}. \qquad (2.71)$$

- **Методы поиска переменной метрики (квазиНьютоновские)**

Алгоритм движения точки

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n D_n \nabla f(x_n)$$

где D_n - аппроксимирующая матрица, λ_n - стабилизирующий множитель.
Аппроксимирующая матрица D_n строят по правилу:

$$H^{-1}(x_n) \approx D_{n+1} = \omega(D_n + \Delta D_n)$$

ω - нормирующий множитель.

$$\Delta D_n = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{Y^T}{Y} - \frac{D_n \Delta g_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{Z^T}{Z}$$

В алгоритме, предложенном ***Бройденом***, положено: $\omega = 1,\ Y = Z = \Delta x_n - D_n \Delta g_n$.
В алгоритме ***Давидона-Флетчера-Пауэлла*** аналогичные: $\omega = 1,\ Y = \Delta x_n,\ Z = D_n \Delta g_n$.

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta x_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{\Delta x_n^T}{\Delta x} - \frac{D_n \Delta g_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{(D_n \Delta g_n)^T}{D_n \Delta g_n} = D_n + A_n - B_n$$

МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Определение. Вектор с ненулевыми компонентами (ненулевой) S называется ***возможным направлением*** спуска в точке $X \in \mathfrak{R}$, если существует $\delta > 0$, такое, что $X + \lambda S \in \mathfrak{R}$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$ и $f(X + \lambda S) < f(X)$.

- Методы Зойтендейка

- **Случай линейных ограничений**

$$\min f(X)$$

$$\begin{cases} AX \le b, \\ HX = h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 X = b_1, \\ A_2 X < b_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^T = \begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T \end{bmatrix}, \\ b^T = \begin{bmatrix} b_1^T & b_2^T \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Условия:

$$\begin{cases} A_1 S \le 0, \\ HS = 0, \end{cases}$$

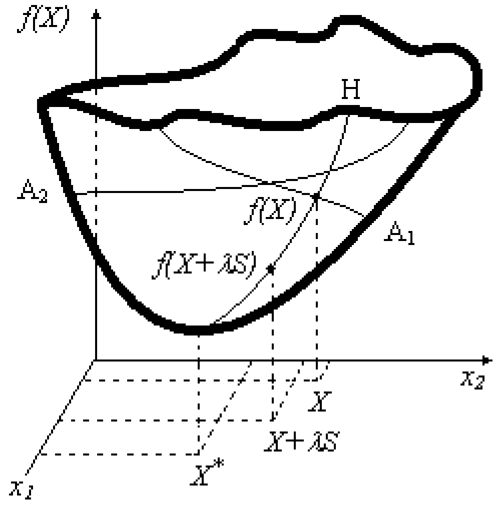


Рисунок 5 – К пояснению выбора направления

Требования нормировки:

- на величину элементов $-1 \le s_i \le 1,\ j = 1,\overline{n}$;
- на модуль вектора возможного направления S $S^T S \le 1, \|S\|^2 \le 1$, это ограничения объединяет условия $-1 \le s_j \le 1, j = 1,\overline{n}$ и $\sum_{j=1}^{n} s_i \le 1,\ \sum_{j=1}^{n} s_i \ge -1$;
- на величину целевой функции ЗЛП $\nabla^T f(X) S \ge -1$.

$$
\min \nabla^T f(X) S \qquad\qquad \min \nabla^T f(X) S \qquad\qquad \min \nabla^T f(X) S
$$

$$
\begin{cases} A_1 S \le 0, \\ HS = 0, \\ s_j \le 1, \\ s_j \ge -1,\quad j = 1, m. \end{cases}
\qquad
\begin{cases} A_1 S \le 0, \\ HS = 0, \\ S^T S \le 1. \end{cases}
\qquad
\begin{cases} A_1 S \le 0, \\ HS = 0, \\ \nabla^T f(X) S \ge -1. \end{cases}
\qquad (2.85)
$$

1) 2) 3)

- **Случай нелинейных ограничений**

Рассмотрим задачу НП-программирования вида

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} g_i(X) \le 0, & i = \overline{1, m}; \\ x_j \ge 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Пусть текущая точка X является допустимой точкой, а $I = \{i : g_i(X) = 0\}$ – множество ограничений, активных в этой точке. Если

$$\begin{cases} \nabla^T f(X) S < 0, \\ \nabla^T g_i(X) S < 0, \ i \in I, \end{cases}$$

то S – вектор возможного направления спуска в этой точке.

1. Найти множество активных ограничений задачи в текущей точке $I = \{i : g_i(X) = 0\}$ и решить ЗЛП вида

$$\min z$$

$$\begin{cases} \nabla^T f(X) S - z \le 0, \\ \nabla^T g_i(X) S - z \le 0, \ i \in I = \{i : g_i(X) = 0\}. \end{cases}$$

улучшенный

$$\min z$$

$$\begin{cases} \nabla^T f(X) S - z \le 0, \\ \nabla^T g_i(X) S - z \le -g_i(X), \ i = 1, m. \end{cases}$$

при любом, оговоренном выше, условии нормировки компонентов вектора возможного направления S.

- Метод проекции градиента Розена

$$\min f(X)$$

$$\begin{cases} AX \le b, \\ HX = h, \end{cases}$$

Направление спуска

$$S = -P \times \nabla f(X),$$

где P – матрица проецирования

$$P = I - M^T \times (M \times M^T)^{-1} \times M,$$

где I – единичная матрица, $M^T = [A_1^T H^T]$ – невырождена.

МЕТОДЫ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть условия задачи имеют вид

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} h_i(X) = 0, & i = \overline{1,m}; \\ g_i(X) \geq 0, & i = \overline{m+1,l}. \end{cases}$$

Можно построить следующую фунцию без ограничений:

$$P(X,\rho) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \rho_i H[h_i(X)] + \sum_{i=m+1}^{l} \rho_i G[g_i(X)]$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ

Функционал $H[h_i(X)]$ должен сделать невыгодным любое отклонение аргумента X от поверхности $h_i(X)=0$, то есть

$$\lim_{h_i(X)\to 0} H[h_i(X)]=0, \quad i=1,\overline{m}.$$

Поэтому в качестве функционала выбирают чётную степенную функцию

$$H[y]=y^p,\ p=2,4,\ldots \text{ либо } H[y]=|y|^p,\ p=1,3,\ldots$$

Функционал $G[g_i(X)]$ зависит от местоположения текущей точки в процессе решения.

- **Метод внутренней точки**:

$$\lim_{g_i(X)\to 0^+} G[g_i(X)]=\infty,\ i=m+1,\bar{l} \text{ для } g_i(X)>0.$$

- **Метод внешней точки**:

$$\lim_{g_i(X)\to 0^-} G[g_i(X)]=0,\ i=m+1,\bar{l} \text{ для } g_i(X)<0.$$

- **Комбинированный метод**:

$$G[g_i(X)]>0 \text{ для } g_i(X)<0,\ i=m+1,\bar{l}.$$

$$G[g_i(X)]=0 \text{ для } g_i(X)=0,\ i=m+1,\bar{l}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\rho_{i,k}H[h_i(X_k)]=0,\lim_{k\to\infty}\sum_{i=m+1}^{l}\rho_{i,k}G[g_i(X_k)]=0,\lim_{k\to\infty}\left|P(X_k,\rho_k)-f(X_k)\right|=0\text{,}$$

где k – номер итерации.

- **Метод барьерных поверхностей (МБП)**

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} g_i(X)\ge 0, & i=\overline{1,m}; \\ x_j\ge 0, & j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

$$P(X,r,\Omega)=f(X)+r\cdot\sum_{i=1}^{m}\omega_i G[g_i(X)]$$

$$G[Y]={}^{1}\!/_{Y},G[Y]=-\ln[Y]$$

- **Метод внешней точки**

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} h_i(X) = 0, & i = \overline{1, m}; \\ g_i(X) \ge 0, & i = m + \overline{1, l}. \end{cases}$$

$$P(X, r) = f(X) + rL(X),$$

где r – коэффициент штрафа, а штраф

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} H[h_i(X)] + \sum_{i=m+1}^{l} G[g_i(X)]$$

Используются функционалы:

$G[Y] = [\max \{0; -Y\}]^P$, $P > 0$, целое.
$H[Y] = |Y|^P$, $P > 0$, целое.

ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНУ

ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Построение математических моделей проблемных ситуаций

Чтобы построить математическую модель в терминах исследования операций, необходимо выполнить следующие шаги:

- Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.
- Сформулировать цель решение и составить функцию. ($f(x_1, x_2) = ix_1 + jx_2 \to opt$)
- Составить ограничения задачи.

Важнейшими свойствами линейных моделей являются:

- пропорциональность;
- аддитивность.

По сравнению с исходной, каждое из ограничений задачи пропорционально увеличено в десять раз. Свойство аддитивности означает возможность добавлять новые ограничения, паче такие возникнут.

Пример:

	Поставщики		
Продукция	I	II	Объём производства
Кубики	0,2	0,3	1,8
Дольки	0,2	0,1	1,2
Чипсы	0,2	0,3	2,4
Прибыль	5	6	

$$f = 5x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + 1x_2 \le 12; \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Линейное программирование

Определения и теоремы линейного программирования

Допустимые решения – это совокупность чисел $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, удовлетворяющих ограничениям исходной задачи.

Оптимальное решение – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции

Опорный (базисный) план – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов A_j, соответствующих переменным x_j.

Каноническая форма записи ЗЛП

Каноническая форма ЗЛП – задача линейного программирования вида $ax = b$ где a – матрица коэффициентов, b – вектор ограничений

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \ldots + 0x_{n+m} \to opt,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_{m1}. \end{array}\right\}$$

Каноническая форма ЗЛП совместно с координатами крайней точки помещается в так называемую симплекс-таблицу, общий вид которой представлен ниже.

		c_j	c_1	…	c_n	0	…	0
Базис	$C_Б$	A_0	A_1	…	A_n	A_{n+1}	…	A_{n+m}
A_{n+1}	*0*	b_1	a_{11}	…	a_{1n}	*1*	…	*0*
A_{n+2}	*0*	b_2	a_{22}	…	a_{2n}	*0*	…	*0*
…	…	…	…	…	…	…	…	…
A_{n+m}	*0*	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}	*0*	…	1
	δ	δ_0	δ_1	…	δ_n	δ_{n+1}	…	δ_{n+m}

В последнюю строчку таблицы записываются значения симплекс-разностей

Решение ЗЛП графическим методом

Алгоритм вполне распространим и на многомерный случай. Проблемы заключаются в визуализации всего этого великолепия. Поэтому, областью применения данного метода будут задачи с числом переменных равным двум.

Пересечение областей, соответствующих отдельным ограничениям, определяет область допустимых решений, называемой также областью допустимых стратегий.

Нормаль **перпендикулярна линии пересечения** плоскости целевой функции с координатной плоскостью, а также **проекциям линий равного уровня** целевой функции на координатную плоскость.

Кроме того, вектор нормали **указывает направление возрастания** целевой функции, а антинормаль, вектор, противоположный нормали – направление, в котором функция цели убывает. Поэтому мы должны двигать перпендикуляр (который изображает местоположение равных значений функции) вдоль нормали, пока он не пересечёт границу области допустимых стратегий.

Направление движения определяется видом оптимизации:

- при решении задачи минимизации – от точки с координатами (c_1, c_2) к началу координат;
- при решении задачи максимизации – от начала координат к точке с координатами (c_1, c_2).

Решение ЗЛП прямым симплекс-методом

Прямой симплекс-метод называется еще табличным, хотя использование таблиц присуще всем методам этой группы. Позволяет найти решение за конечное, хотя иногда и значительное, число шагов. Значение целевой функции при этом немонотонно возрастают (при решении задач на максимум) или немонотонно убывают (при решении задач на минимум).

Метод применяется, когда все ограничения системы имеют в записи знаки “ $\leq$ ”.

Операция состоит во введении так называемых дополнительных переменных, преобразующих неравенства в равенства. При ограничениях “$\leq$” указанные переменные введутся со знаком плюс. В результате имеем каноническую форму системы ограничений, и расширенную модель.

Если существуют столбцы с отрицательными симплекс-разностями, и в соответствующих столбцах все элементы неположительные то при решении задачи на максимум мы имеем дело с неограниченной системой неравенств. Аналогичная ситуация при решении задачи на минимум, когда существуют столбцы с положительными симплекс-разностями, а в соответствующих столбцах все элементы неположительные (более точно будет сказать, что область ограничений не замкнута в направлении оптимизации).

Решение ЗЛП методом искусственного базиса

Указанный метод называют ещё методом искусственных переменных. Он предназначен для решения ЗЛП с целевой функцией.

$$Z = C^T X \rightarrow opt$$

Система, в которой присутствуют различные знаки ограничений, называется смешанной.

Если воспользоваться прямым симплекс-методом, то координатами начальной точки решения являются значения дополнительных переменных, удовлетворяющие системе уравнений, но при этом будет нарушаться условие неотрицательности дополнительных переменных. Поэтому появляется потребность во введении фиктивных искусственных переменных, не имеющих содержательного смысла, но обеспечивающих существование корректного допустимого базисного решения (ДБР) на начальном шаге, благодаря чему метод и получил своё наименование.

Метод искусственного базиса применяется в следующих случаях:

- Все знаки отношения в системе ограничений имеют вид “ $\geq$ ”. Имеем чисто искусственный базис.
- Все знаки имеют вид “=”. Также строится чисто искусственный базис.
- Имеется смесь знаков “ $\geq$ ” и “=”. Базис чисто искусственный.
- Имеется смесь знаков “ $\geq$ ”, “=” и “ $\leq$ ”. Базис смешанный.

Для того, чтобы, по мере потери надобности, избавляться от искусственных переменных, которые, как мы помним, не имеют содержательного смысла ни в постановке задачи, ни при её канонизации, в целевую функцию искусственные переменные вводятся с коэффициентами $-\mu$ для задач максимизации и $+\mu$ для решения задач минимизации, где μ – бесконечно большое число.

Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом

Указанный метод называется ещё методом обратной матрицы.

Его особенностью является работа только с базисными векторами, поэтому объём расчётом определяется числом базисных векторов, определяемым размером системы ограничений m. По этой причине наибольшая эффективность алгоритма, по сравнению с прямым симплекс-методом или методом искусственного базиса, проявляется, когда n значительно превосходит m. Экономия памяти под промежуточные результаты и сравнительно меньший объём вычислений обусловил преимущественную реализацию этого метода на ЭВМ.

Для расчётов используются две таблицы. Вспомогательная таблица, содержащая в постоянной части каноническую форму системы ограничений, а в переменной части – заранее не известное число строк симплекс-разностей, пополняемых по мере расчёта при завершении итерации. По необходимости, каноническая форма пополняется искусственными переменными, а таблица – соответствующими им столбцами векторов искусственного базиса.

Основная таблица, в которой производятся расчёты и содержится матрица, обратная матрице, составленной из базисных векторов системы ограничений канонической задачи, из-за чего метод и получил второе своё название.

3. Двойственность

Формальная связь прямой и двойственной задач

- Если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум.
- Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся элементами вектора ограничений двойственной задачи.
- Свободные члены в ограничениях прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции в двойственной задаче.
- Матрица ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы ограничений прямой задачи.
- Знаки ограничений в неравенствах заменяются противоположными знаками.
- Число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных в прямой задаче.

Когда в ограничениях задачи присутствуют только неравенства, пара задач прямой и двойственной и сами задачи называется симметричными. Если i-ая переменная не ограничена в знаке в прямой задаче, то j-ое ограничение в двойственной задаче будет равенством.

Теоремы двойственности

Теорема (Основная). Если X0 и Y0 суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если $C^TX_0 = B^TY_0$, то X_0 и Y_0 – оптимальные решения пары двойственных задач.

Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом

Псевдоплан прямой задачи – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса.

Сопряженный базис – система векторов прямой задачи, взятая из условий задачи, и которая удовлетворяет системе ограничений двойственной задачи, то есть является допустимым базисным решением двойственной задачи

Если среди базисных компонентов псевдоплана нет отрицательных, то псевдоплан оказывается оптимальным решением прямой задачи, а опорный план – оптимальным решением двойственной задачи.

При неразрешенности задачи, в A_0 будут присутствовать отрицательные компоненты, а в соответствующих строках все элементы будут неотрицательными.

4. Постоптимальный анализ

Постоптимальный анализ ещё называется исследованием на чувствительность. Целью проведения такого анализа является изучение влияния изменения отдельных параметров модели на оптимальное решение, получаемое при статических условиях. Очевидно, что такие изменения способны как “улучшать”, так и “ухудшать” оптимальное решение.

В первом случае, целесообразно изменить условия задачи, рекомендовать руководителю, ответственному за организацию производственного процесса, соответствующим образом “подогнать” структуру производства под изменения с целью получения “более оптимального” решения. Подобный подход позволяет адаптировать математическую модель к реальным процессам.

Дополнительным фактором, понуждающим к проведению такого анализа, является наличие погрешностей вычислений, которые обусловлены особенностями представления и обработки чисел в ЭВМ.

В ходе постоптимального анализа, как правило, необходимо рассмотреть влияние на устойчивость модели, которое окажут изменения правых частей системы ограничений и вектора коэффициентов целевой функции.

5. Параметрическое программирование

В общем случае, к задачам параметрического программирования относятся задачи математического программирования, в которых компоненты математических моделей зависят от некого фактора (параметра).

Решение задачи линейного программирования при параметрических изменениях вектора ограничений

Пусть элементы вектора ограничений находятся в линейной зависимости от изменения параметра t, то есть

$$b_i^{\nabla} = b_i + tp_i,\ i = \overline{i,m}, \qquad t \in [\alpha, \beta],$$

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 + tp_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 + tp_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m + tp_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

- b_i – значение i-го элемента вектора ограничений в отсутствии параметра;
- p_i – коэффициент параметрического изменения по i-му ограничению;
- t – параметр.

Если зафиксировать произвольное значение параметра $t = t_0$, то задача сведётся к обычной ЗЛП и может быть решена любым пригодным симплекс-методом.

Таким образом, при фиксированном $t = t_0$, столбец A_0 может быть представлен тремя столбцами B, P и $X^{\nabla *}$, что позволит осуществить “надзор” за преобразованиями величин b_i и p_i в ходе итераций.

Компоненты вектора $X^{\nabla *}$ должны удовлетворять ограничению неотрицательности.

Представляет интерес определение границ изменения параметра t, для которого вектор $X^{\nabla *}$ будет являться оптимальным планом.

В оптимуме параметрической задачи обязательно должен будет присутствовать $p_i \ne 0$, иначе параметрическая задача вырождается – пропадает зависимость от параметра.

Сформулируем правила для определения границ интервала изменения параметров, которые есть следствие решения системы неравенств (2.57):
для нижней границы

$$\alpha_{or} = \begin{cases} \max\limits_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \le 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

для верхней границы

$$\beta_{or} = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \forall i : \tilde{p}_i \geq 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Индексы *or* в формулах (2.57) и (2.58) обозначают: о – оптимальное значение, *r* – номер интервала разбиения. В пределах этих границ решение устойчиво, то есть, сохраняется неизменным состав векторов базиса.

Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции

Пусть коэффициенты целевой функции зависят от параметра t следующим образом:

$$c_i^{\nabla} = c_i + tp_i,\ i = \overline{i,n}, \qquad t \in [\alpha, \beta].$$

$$\max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \ldots + (c_n + tp_n)x_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

В ходе решения ЗЛП при фиксированном значении $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$, будет получена таблица оптимального решения, значения строки симплекс-разностей для основных переменных.

Для того, чтобы компоненты строки симплекс-разностей указывали на достижение оптимального решения, необходимо выполнение условия неотрицательности.

$$\delta_j^{\nabla} = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n},$$

Выполнение системы (2.63) находятся в зависимости от знаков величин $\tilde{\delta}_j$ и $\tilde{p}_j$. Если имеются $\tilde{\delta}_j \geq 0$, то нижняя граница параметра

$$\alpha_{or} \geq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_{or} = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad (2.64)$$

$\alpha_{or} \leq \alpha$. Если отсутствуют $\tilde{p}_j > 0$, то есть все $\tilde{p}_j \leq 0$, **отсутствует и нижняя граница**: $\alpha_{or} \to -\infty$.

Когда имеются $\tilde{p}_j < 0$, то можно определить верхнюю границу подынтервала

$$\beta_{or} \leq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_{or} = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}, \quad (2.65)$$

которая получается $\beta \leq \beta_{or}$. При отсутствии $\tilde{p}_j < 0$, то есть, когда все $\tilde{p}_j \geq 0$, **отсутствует верхняя граница интервала** $\beta_0 \to \infty$.

6. Нелинейное программирование

Постановка НП-задачи формулируется как нахождения оптимума целевой функции f(X) при ограничениях и задаётся моделью вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ \ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0. \end{cases}$$

где функции f(X) и $g_i(X)$, i = 1, m, в общем случае, нелинейные.

НП-задачи существенно отличаются от ЗЛП неформализованностью методов их решения. Нелинейность приводит к тому, что:

- область принятия решения может быть невыпуклая;
- область может иметь бесконечное число крайних точек.

Поэтому для решения НП-задач разработаны методы, которые ориентированы на классы задач в их конкретной постановке. Общего подхода, являющегося универсальным во всех случаях, создать не удалось.

Аналитические методы определения экстремумов

Указанные методы основываются на известных методах классического математического анализа, базируясь на ряд теорем:

Теорема 1 (о существовании экстремума). Если функция многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна и определена на замкнутом множестве $\Re$, то она достигает на этом множестве, ***по крайней мере, один раз*** своего минимального и максимального значений.

Теорема 2 (о местоположении экстремума). Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией нескольких переменных, определённой на допустимой области $\Re$, то экстремальное значение f (если оно существует) достигается в одной или нескольких точках, принадлежащих:

- множеству стационарных точек S(X);
- множеству точек границы G(X);
- множеству точек, в которых (где) функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не дифференцируема.

Множество точек $S(X)$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется множеством стационарных точек, если его элементы удовлетворяю условию

$$\nabla f(X) = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_j}, j = \overline{1, n} \right\} = 0. \qquad (2.68)$$

Вектор $\nabla f(X)$ – называют градиентом функции.

Находящий в стационарной точке ***минимум*** или ***максимум*** функции, может быть как ***абсолютным***, так и ***относительным***.

Относительный максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^0 с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если для всех точек, лежащих в малой окрестности точки X^0, имеет место неравенство $f(X^0) \geq f(X^0 + H)$, где $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

Относительный максимум называется ещё ***локальным*** максимумом.

Абсолютный максимум функции $f(X)$ достигается в точке X^* с координатами $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, если для всех точек, принадлежащих множеству ограничений $\Re$ справедливо неравенство $f(X^*) \geq f(X)$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Re$.

Абсолютный максимум называется ещё ***глобальным*** максимумом.

Аналогично, с точностью до знака неравенства, формулируются определения абсолютного и относительного минимумов.

Теорема 3. Для того, чтобы в точке X_0 достигался внутренний относительный максимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой вогнутости*** функции в окрестностях X_0.

Теорема 4. Для того, чтобы в точке X_0 достигался внутренний относительный минимум, достаточно ***равенства нулю всех первых*** производных и ***строгой выпуклости*** функции в окрестностях X_0.

Методы поиска экстремумов в задачах без ограничений или в случае ограничений с разделяющимися переменными

Ограничение $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ является функцией с ***разделяемыми переменными (сепарабельной)***, если его можно представить в виде

$$x_i = \varphi_i(\{x_j\}), \qquad i \neq j, \;\; j = \overline{1, n}.$$

Замечания:

- Метод требует значительных вычислительных затрат и аналитических преобразований.
- Не отвечает должной формализации для использования вычислительной техники.
- Применение ограничивается задачами, область поиска решений которых описывается функциями с сепарабельными переменными.

Поиск экстремумов в задачах нелинейного программирования при ограничениях типа “равенство” (метод Лагранжа)

В основу метода положена идея сведения задачи поиска условного экстремума к поиску безусловного экстремума специальной функции. Пусть математическая модель представлена в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ \ldots \\ h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0. \end{cases}$$

Допустим, что функции f(X) и $h_i(X)$, i = 1, m, входящие в математическую модель, нелинейные и имеют непрерывные частные производные.

Введём набор множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_т$, по числу ограничений в модели, и составим функцию вида

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2.95)$$

Полученная функция называется функцией Лагранжа, а множители λ, i = 1, m, – коэффициентами или множителями Лагранжа.

Очевидно, что экстремум (2.95) будет при таких значениях $X^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ и $\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*\}$, которые будет удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0, i = \overline{1, m}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.96)$$

Алгоритм метода Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа $L(X, \Lambda)$.
2. Найти частные производные функции Лагранжа (2.96).
3. Решить систему уравнений для определения X^* и Λ^*.
4. Исследовать полученные точки на максимум или минимум.

Общий случай задачи нелинейного программирования

Задачи общего вида подразделяются на задачи **выпуклого** и **вогнутого** программирования, но, независимо от их типа, на переменные накладываются условия неотрицательности $x_j \geq 0$, j = 1,n.

Математическая модель для задачи выпуклого программирования имеет вид

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (2.98)$$

когда функции f(X) и все $g_i(X)$, i = 1, m выпуклы (в смысле НП-задач).

Для случая вогнутого программирования характерно

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ ... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

при функциях $f(X)$ и всех $g_i(X)$, $i = 1,m$ вогнутых (выпуклых вверх).

Связь между задачами выпуклого и вогнутого программирования в части целевой функции и системы ограничений определяется множителем (– 1). То есть

$$\max U(X) = \min [-U(X)].$$

Методы возможных направлений

Указанные методы применяются для ***численного*** решения НП-задач.

Определение. Вектор с ненулевыми компонентами (ненулевой) S называется ***возможным направлением*** спуска в точке $X \in \mathfrak{R}$, если существует $\delta > 0$, такое, что $X + \lambda S \in \mathfrak{R}$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$ и $f(X + \lambda S) < f(X)$.

Определение такого направления составляет краеугольный камень, лежащий в основании методов возможных направлений. Типичными представителями таковых являются алгоритмы, предложенные Зойтендейком (есть написание Заутендайка, в оригинале G. Zoutendijk) и Розеном.

Методы штрафных функций

Методы штрафных функций основаны на практике перехода от задачи условной минимизации к задаче безусловной минимизации путём построения специальной штрафной функции.

При использовании параметрических методов, штрафной полином конструируется с использованием выражений, описывающих ограничения, в качестве параметров других функций (функционалов) и весовых коэффициентов.

В непараметрических методах функция рассматривается в качестве дополнительного ограничения, которое постоянно усиливается в процессе решения.

По характеру перемещения точки к оптимуму различают:

- методы внутренней точки;
- методы внешней точки;
- комбинированные методы;

При использовании методов внутренней точки, последовательные приближения к оптимуму производятся внутри области, определяемой ограничениями, благодаря специальной функции штрафа, называемой барьерной.

Когда поиск оптимума осуществляется по методу внешней точки, текущее решение находится за пределами области ограничений, попадая вовнутрь её на последнем шаге итераций.

Комбинированные методы используют, когда большинство ограничений задачи имеют вид равенства, и, в процессе решения, попеременно, одни ограничения выполняются, а другие нет.

Искомое решение получается, при удовлетворении заданных условий, в пределах отведённого допуска.

Задачи квадратичного программирования

Квадратичное программирование – специальный класс НП-задач, в которых f(X) – квадратичная (не выше второй степени переменных) вогнутая (выпуклая вверх) функция, а все ограничения $g_i(X)$, $i = 1,m$ – линейны.

Математическая модель такой задачи выглядит следующим образом [3, 23, 31, 33, 34, 36, 68]

$$\begin{aligned} & f(x) = b^T X + \frac{1}{2} X^T C X \to \max, \\ & AX \le A_0,\ X \ge 0, \end{aligned} \tag{2.110}$$

где C — симметричная отрицательно определённая матрица размерностью $[n \times n]$, b^T — вектор-строка размерностью $[1 \times n]$, A — матрица системы ограничений размерностью $[m \times n]$, A_0 — вектор свободных членов системы ограничений размерностью $[m \times 1]$, n — число переменных, m – число ограничений.

Задача решается путём применения теоремы Куна-Таккера, в результате чего получается система линейных ограничений, которую можно решить симплекс-методом.

Функция Лагранжа, построенная по условиям задачи, имеет вид

$$L(X,\Lambda) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X + \Lambda^T (A_0 - A \cdot X).$$

ДИСКРЕТНОЕ И СТАХОСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

7. Основы Дискретного программирования

Найти максимум (минимум) целевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при заданных условиях

$$\left.\begin{aligned} & g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_1, \\ & g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_2, \\ & \dots \\ & g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_m, \\ & X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq D, \end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

где D – конечное или счётное множество.

В этом случае говорят о дискретном программировании. Если X ограничено множеством целых чисел, то задачу назначают задачей линейного целочисленного программирования (ЛЦП).

Известны следующие классы задач дискретного программирования:

- Задачи с неделимостями (задачи о рюкзаке), обусловлены физическими свойствами объектов. Это задача о размещении массивов информации на внешних устройствах ЭВМ при ограничениях на объём, скорость вращения, стоимостные рамки и др.
- Экстремальные комбинаторные задачи (выбора, о назначениях, коммивояжёра, о покрытиях).
- Задачи на несвязных и невыпуклых областях.
- Задачи с разрывной целевой функцией.
- Транспортная задача. Когда задано ограничение целочисленности, то есть при целых значениях массивов поставок, потребления и стоимостей или

ограничениях на пропускные способности коммуникаций, является задачей линейного целочисленного программирования.

8. Метод отсечения решения целочисленной ЗЛП

Данный метод носит название метода отсекающих плоскостей или метода целочисленных форм, но чаще именуется по имени автора: Гомори.

… отсечение для приведения произвольного уравнения в целочисленную форму. Указанное отсечение представляет собою уравнение, которое, будучи прибавленным к исходному уравнению, делает его целочисленным.

<Отсечение> = <Целочисленная_форма> – <Исходная_строка>. (2.28)

9. Метод ветвей и границ

Этот метод применяется для решения как полностью целочисленных, так и частично целочисленных задач дискретного программирования.

Ограничения, приписываемые к исходной задаче, есть **дополнительные границы**, благодаря чему мы имеем, на каждом шаге постановку пары задач на базе одной нецелочисленной.

Интерпретация хода решения в виде дерева определило второе название метода – **ветвей**.

5. Для решения возникающих задач (2.31) используют двойственный симплекс-метод, который, как нам известно, допускает ввод новых ограничений в псевдоплан по ходу решения.

В противном случае, если X_0 – нецелочисленное решение, то, используя систему неравенств (2.31), получаем множество из двух задач G_{01} и G_{02} (ветвей). Особо подчеркнём, что пара задач ***возникает для одной нецелочисленной переменной одновременно***. Каждая задача решается в отдельности, при этом находят их оценки $\xi(G_{01})$ и $\xi(G_{02})$.

4. Вычислительный процесс осуществляется до “перерешивания” всех возникающих задач или до получения признаков их неразрешимость. Из полученных решений выбирается то, которое является наилучшим (в смысле оптимума) решением исходной задачи (2.29).

10.Динамическое программирование

Динамическое программирование – многоэтапный процесс нахождения решения, при этом функции f и g_i зависит от времени или состояния (номера шага или этапа).

11.Стохастическое программирование

Стохастическое программирование, если среди компонентов функций f или g_i присутствуют случайные величины

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

12.Методы оптимизации дифференцируемых функций

13.Методы оптимизации недифференцируемых функций

14.Методы оптимизации в задачах большой размерности

15.Задачи и методы многокритериальной оптимизации