

ЛЕКЦИЯ №5. ЗАДАЧИ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ПЛАН

1. Постоптимальный анализ
2. Параметрическое программирование.

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА ОГРАНИЧЕНИЙ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i + \delta_{b_i}$$

$$X_{\max} = A^{-1} \times B$$

$$B' = B + \delta_{b_i} \vec{e}_i$$

$$X'_{\max} = \underbrace{A^{-1} \times B}_{X \max} + \delta_{b_i} A^{-1} \times \vec{e}_i,$$

$$a_{r,0}^* + \delta_{b_i} a_{r,n+i} \geq 0, \quad r = \overline{1, m},$$

$$\begin{aligned}
& \max_{a_{r,n+i} > 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\} \leq \delta_{b_i} \leq \min_{a_{r,n+i} < 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\} \\
& b_i^{HG} = b_i + \max_{a_{r,n+i} > 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\}, \\
& b_i^{BG} = b_i + \min_{a_{r,n+i} < 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\}. \tag{*}
\end{aligned}$$

Случай 1. Пусть дополнительная переменная x_{n+i} , соответствующая i -му ограничению, для правой части которого отыскивается диапазон изменения b_i , **не входит** в базисное решение.

Случай 2. Пусть дополнительная переменная x_{n+i} , соответствующая ограничению с приращением δ_{b_i} , **является базисной**.

$$\text{При } “\leq”: -a_{r,0}^* \leq \delta_{b_i} \leq \infty, \text{ при } “\geq”: -\infty \leq \delta_{b_i} \leq a_{r,0}^* \tag{A.8}$$

Случай 3. Пусть элементы вектора свободных членов изменяются произвольно и одновременно для нескольких (а, возможно, и для всех) ограничений.

$$a_{i,0}^* + \sum_{j=1}^m a_{i,n+j} \delta_{b_j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

- Дефицитные и недефицитные, значимые и незначимые ресурсы

$$F_{opt}^{D3} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = b_1 \delta_{n+1}^* + b_2 \delta_{n+2}^* + \dots + b_m \delta_{n+m}^*$$

$$\delta_{b_q} y_q^* = \delta_{b_s} y_s^* \Rightarrow \delta_{b_q} = \frac{\delta_{n+s}^*}{\delta_{n+q}^*} \cdot \delta_{b_s} \equiv \delta_{b_s} = \frac{\delta_{n+q}^*}{\delta_{n+s}^*} \cdot \delta_{b_q}$$

ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$$F^\nabla(X) = C^T X + \delta_{c_r} \overrightarrow{\mathbf{e}}_r^T X$$

Случай 1. Переменная с номером r входит в базис оптимального решения.

$$\forall j \delta_j^\nabla \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_j + \delta_{c_r} \cdot a_{r,j} \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m},$$

$$\max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \leq \delta_{c_r} \leq \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \Rightarrow c_r^{HG} = c_r + \max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}, c_r^{BG} = c_r + \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}$$

Случай 2. Пусть переменная x_r в базис не вошла.

$$\delta_r^\nabla = \delta_r + \delta_{c_r} \Rightarrow -\infty < \delta_{c_r} \leq \delta_r$$

Случай 3. Комбинация 1 и 2.

$$\delta_j + \sum_{r=1}^m a_{r,j} \cdot \delta_{c_r} \geq 0$$

ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ

- Для небазисных переменных

$$A_k^\nabla = A_k + \delta_{a_{r,k}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_k$$

$$\delta_k^\nabla = \delta_k + c_k \cdot \delta_{a_{r,k}}$$

$$\delta_{a_{r,k}} \geq -\frac{\delta_k}{c_k}$$

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

- Случай 1: параметрические изменения вектора ограничений

$$b_i^{\nabla} = b_i + tp_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$\begin{aligned} \max F &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \\ &\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 + tp_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 + tp_2, \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m + tp_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$X^* = A^{-1} \times B$$

$$X^{\nabla*} = A^{-1} \cdot B^{\nabla} = A^{-1} \cdot B + t_0 A^{-1} \cdot P = \tilde{B} + t_0 \cdot \tilde{P}; \quad \tilde{B} = A^{-1} \cdot B; \quad \tilde{P} = A^{-1} \cdot P$$

$$\tilde{b}_i + t \cdot \tilde{p}_i \geq 0, \quad i = \overline{i, m}, \quad t \in [\alpha, \beta]; t = t_0 \geq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}; t = t_0 \leq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \exists i : \tilde{p}_i \geq 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения

1. Зафиксировав значение параметра $t = t_0$, решить ЗЛП симплекс-методом.
2. Определить границы изменения параметра $[\alpha_r, \beta_r]$
3. Окончание, если верхняя граница β_r интервала выйдет за пределы или окажется равной верхней границе изменения параметра.
4. В противном случае, необходимо отыскать направляющую строку и выполнить большую итерацию двойственного симплекс-метода.

$$\min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} \Rightarrow i^*$$

5. Вернуться к п.2 настоящего алгоритма.

- Случай 2. Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции

$$c_i^\nabla = c_i + tp_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$\max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \dots + (c_n + tp_n)x_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

$$\delta_j^\nabla = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$t = t_0 \geq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}; t = t_0 \leq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\},$$

Алгоритм решения

1. Зафиксировать $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$ и решить задачу параметрического программирования как обычную ЗЛП.
2. Исследовать полученное решение с помощью системы неравенств допустимости, в ходе которого будут определены нижняя и верхняя границы параметра.
3. Если окажется, что $\beta_0 \rightarrow \infty$, то найдено оптимальное решение
4. В противном случае, руководствуясь , необходимо определить направляющий столбец:

$$\min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} \Rightarrow j^*,$$

затем перейти к п. 2.

5. Решение представляется набором интервалов $[\alpha, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], \dots, [\beta_{r-1}, \beta]$, на каждом из которых будет свой оптимальный план и своё выражение для расчёта целевой функции.