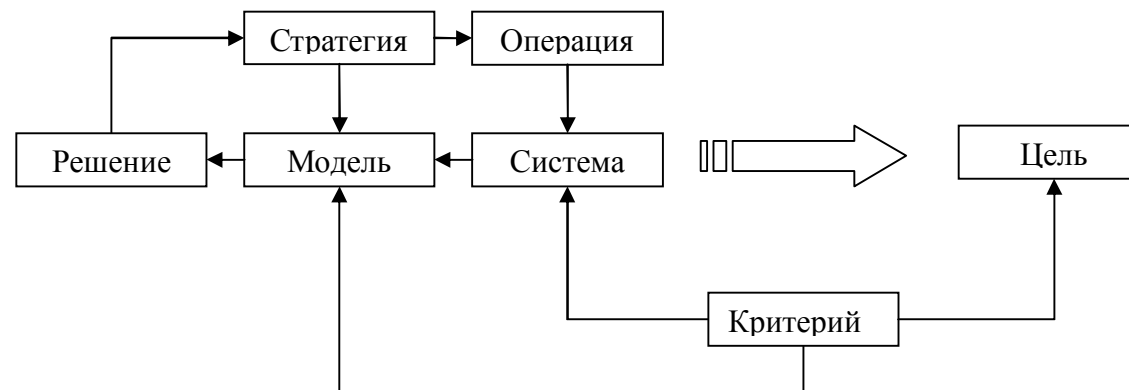
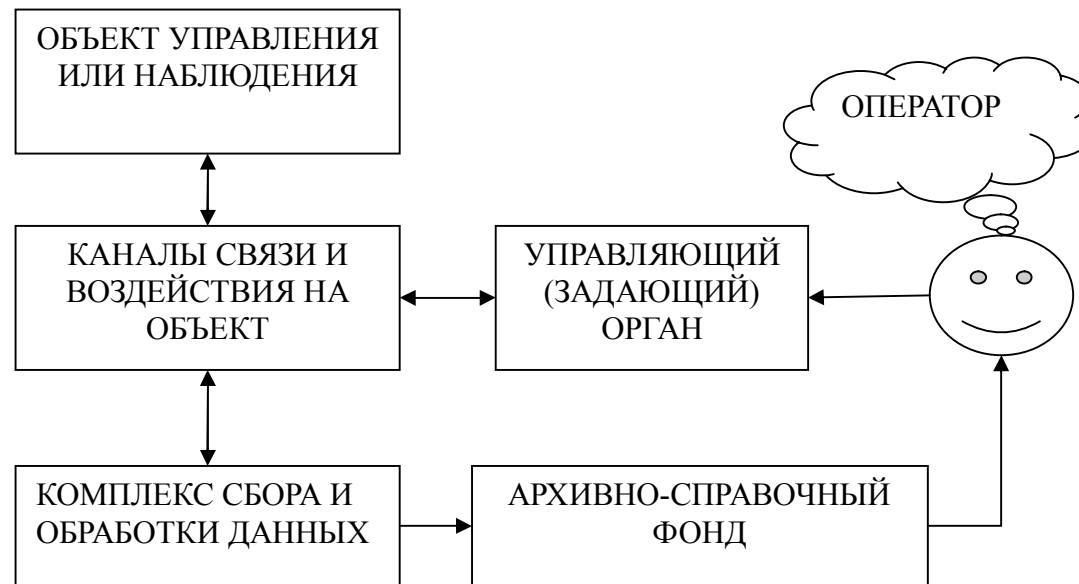


# **ЛЕКЦИЯ № 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ**

## **ПЛАН**

1. Проблемы, решаемые в ходе исследования операций.
2. Основные понятия и определения, основная задача исследования операций.
3. Виды и классы моделей используемых в дисциплине исследование операций.
4. Практические ситуации, разрешимые методами исследования операций.



**Операция** - последовательность действий, направленных на достижение какой либо цели.

**Критерий эффективности** - показатель совпадения (соответствия) цели операции и состояния системы.

**Стратегия** – способ расстановки сил и средств при проведении операции.

**Математическая модель операции** – это формальные соотношения, устанавливающие связь **критерия** и **стратегии**.

**Решение** – множество параметров стратегии, полученных на основании математической модели.

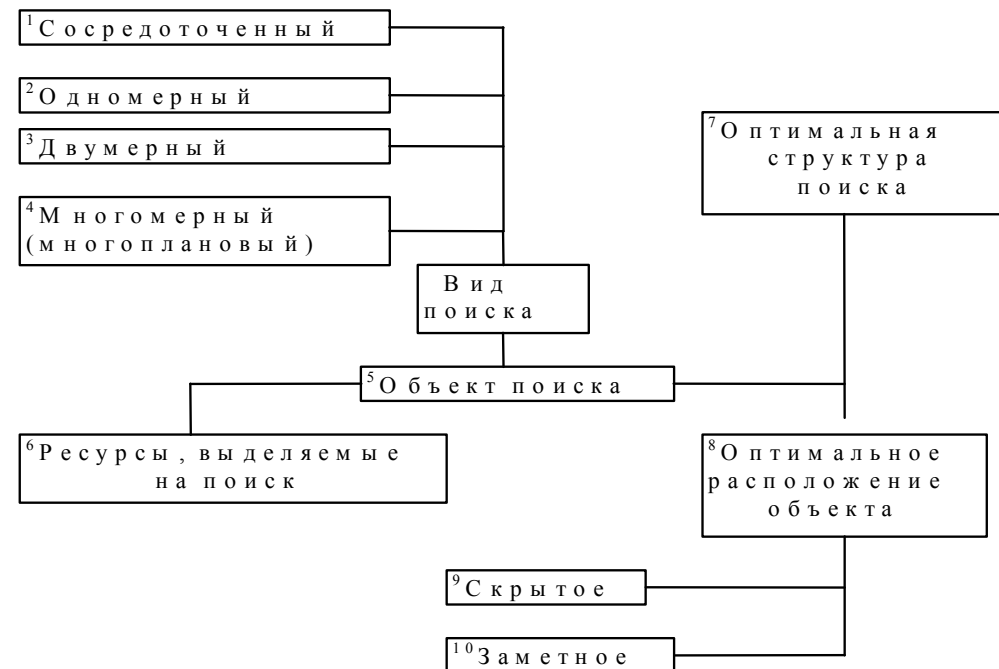
**Основная задача исследования операций:** нахождение для выбранной **математической модели** решения, при котором критерий эффективности достигает экстремума (*min* или *max*).

## ПРИЗНАКИ ОПЕРАЦИОННОГО ПОДХОДА

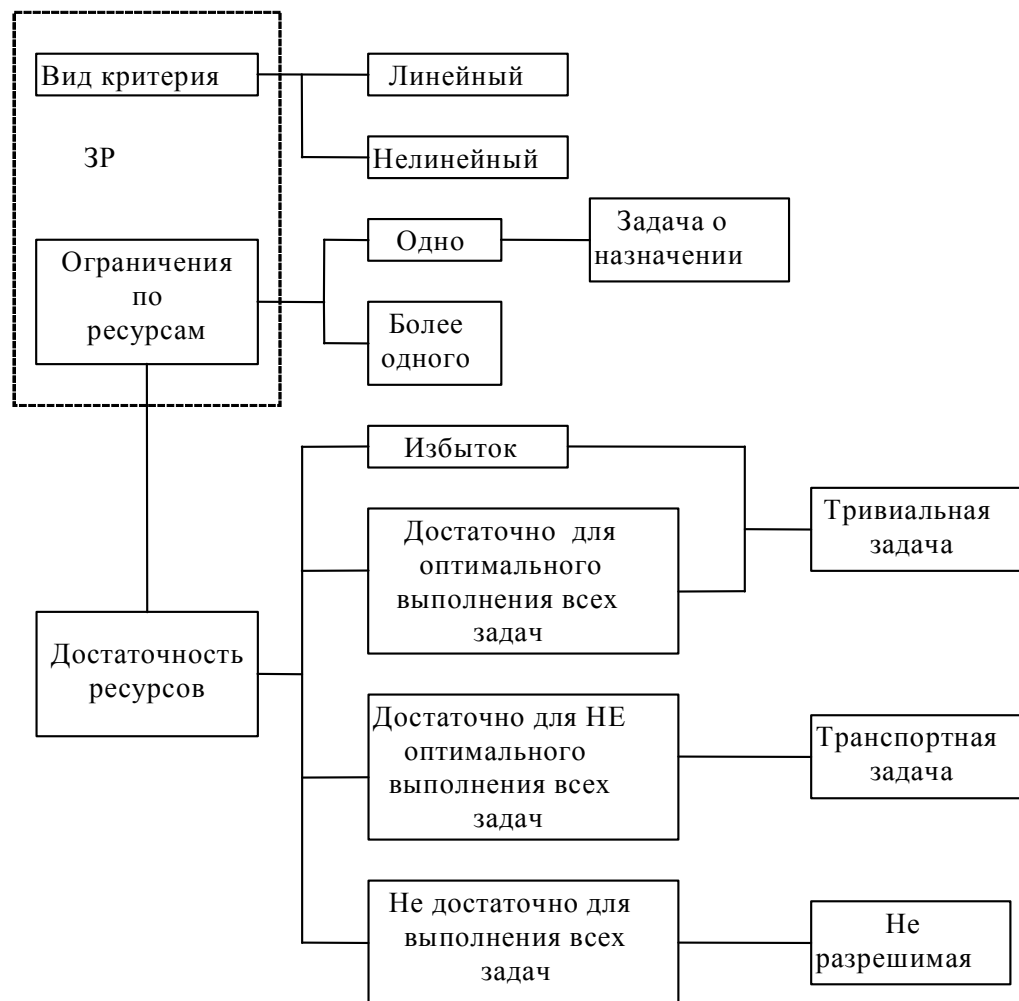
1. Ориентацию на принятие решения.
2. Оценку на основе критериев эффективности.
3. Доверие к математической модели.
- 4\*. Необходимость использования ЭВМ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

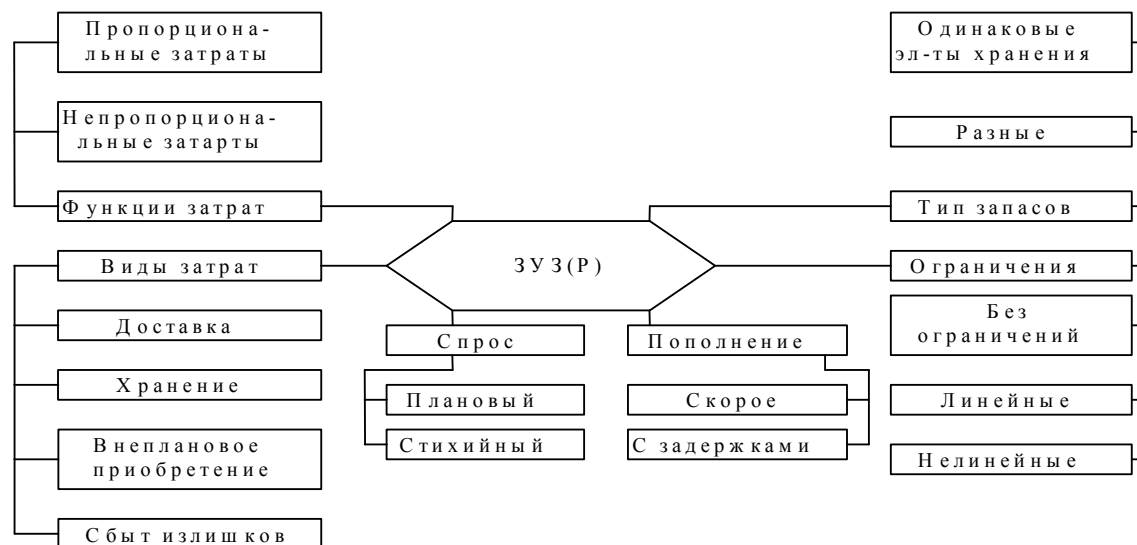
1. Детерминированные модели операций.
2. Вероятностные модели (статистические, стохастические):
3. Игровые модели:
5. Эвристические модели.
6. Имитационные модели.



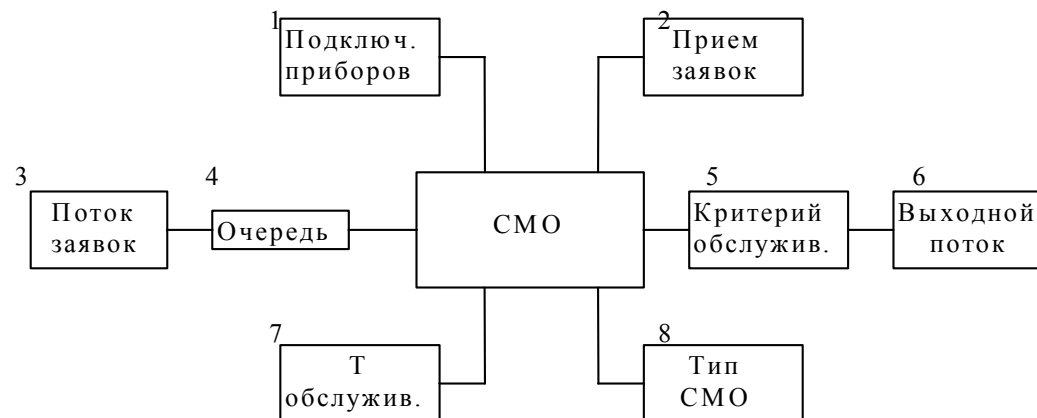
Задачи поиска



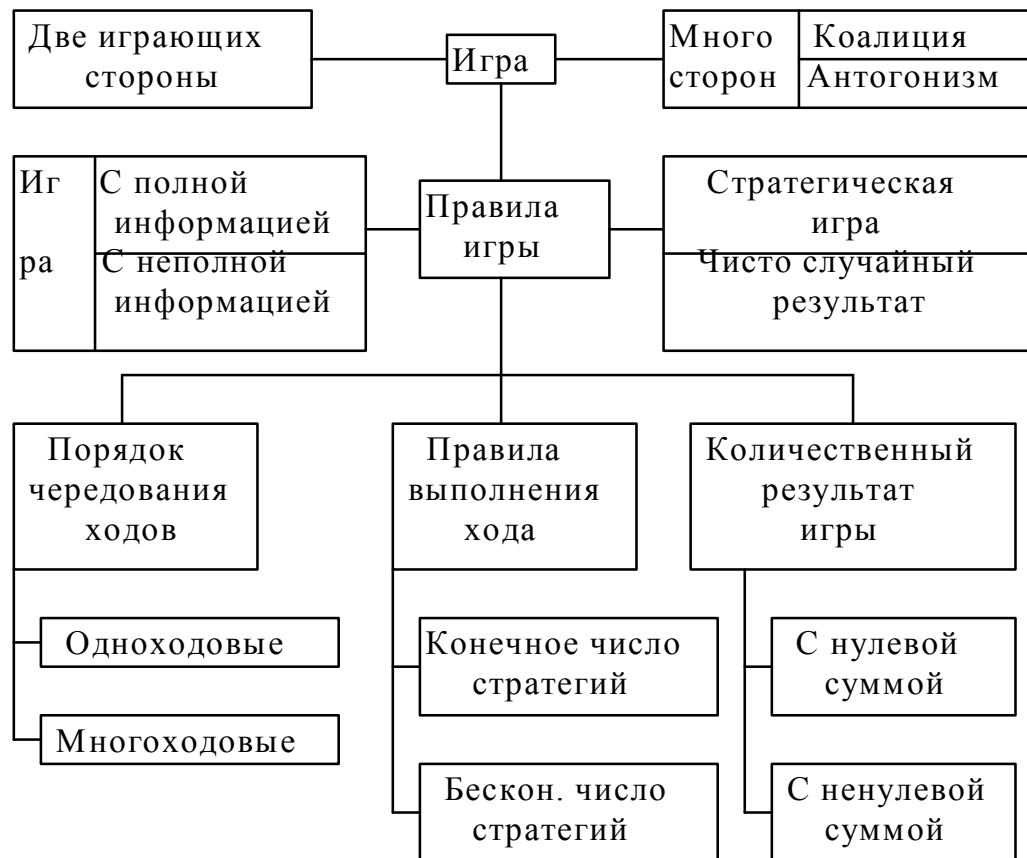
## Задачи распределения



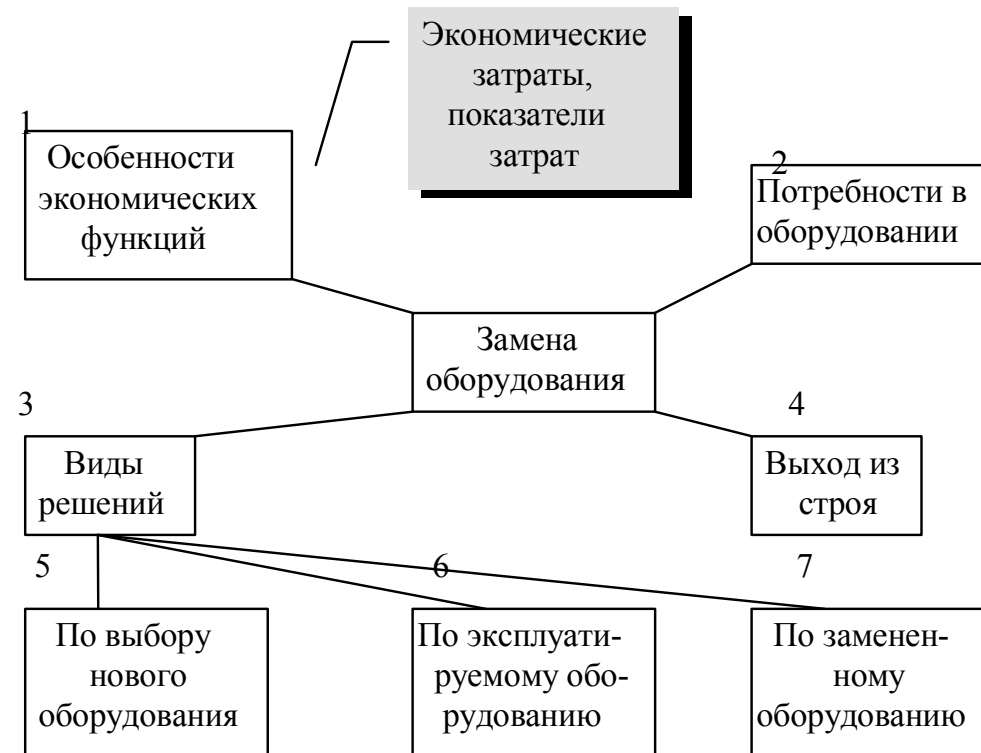
### Задача управления запасами (ресурсами)



### Задачи СМО



## Задачи теории игр



## Задачи о замене оборудования



# **ЛЕКЦИЯ № 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

## **ПЛАН**

1. Общая характеристика задач математического и линейного программирования (ЗЛП).
2. Основные этапы построения математических моделей для применения ЗЛП.
3. Решение ЗЛП графическим методом.

**Математическое программирование** – дисциплина, которая занимается изучением экстремальных задач и поисками методов их решения.

Формулировка: требуется найти минимум или максимум функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при заданных ограничениях  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) * b_i, i = \overline{1, n}, *$  – ограничение  $\geq, \leq$  или  $=$ .

В зависимости от вида функций  $f$  и  $g_i$  задача математического программирования бывает следующих видов.

1. Задача линейного программирования (ЗЛП), если  $f$  и  $g_i$  линейны.
2. Задача нелинейного программирования (ЗНП или НП-задача), если хотя бы одна из функций нелинейная.

Задачи делятся на классы.

1. Задача целочисленного программирования (ЦП), когда вектор переменных  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  целочисленен.
2. Задача параметрического программирования, если  $f$  и  $g_i$  зависят от параметров.
3. Если  $f$  – дробно-линейная функция, а ограничения  $g_i$  – линейны, то имеем задачу дробно-линейного программирования.
4. Стохастическое программирование, если среди компонентов функций  $f$  или  $g_i$  присутствуют случайные величины.
5. Динамическое программирование – многоэтапный процесс нахождения решения, при этом функции  $f$  и  $g_i$  зависят от времени или состояния (номера шага или этапа).

**Линейное программирование** — решение экстремальных задач математического программирования с линейной зависимостью между переменными

Методы решения задач линейного программирования (ЗЛП).

1. Графический метод.
2. Прямой симплекс-метод (метод симплекс-таблиц).
3. Метод искусственного базиса.
4. Модифицированный симплекс-метод.
5. Двойственный симплекс-метод.

## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Необходимо:

1. Определить переменные, для которых будет составлена целевая функция и ограничения на нее.
2. Сформулировать цель решение и составить целевую функцию.
3. Составить ограничения задачи.

Свойства моделей:

- 1) пропорциональность;
- 2) аддитивность.

## АЛГОРИТМ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

1. Построить допустимое множество решений.
2. Построить нормаль к целевой функции и изобразить её проекцию на плоскости решений. Направление нормали указывает направление возрастания целевой функции.
3. Перемещать перпендикуляр к нормали до тех пор, пока он не достигнет крайней точки множества допустимых стратегий.
4. Определить значения координат крайней точки допустимого множества либо непосредственно по графику, либо по уравнениям ограничивающих прямых, пересекающихся в крайней точке.
5. Вычислить значение целевой функции, соответствующее оптимуму.

Направление движение определяется видом оптимизации:

- при решении задачи минимизации — от точки с координатами  $(c_1, c_2)$  к началу координат;
- при решении задачи максимизации — от начала координат к точке с координатами  $(c_1, c_2)$ .

## ОСОБЫЕ СЛУЧАИ

1. Линия, ограничивающая область в направлении оптимизации, перпендикулярна нормали.
2. Область незамкнута в направлении оптимизации.
3. Несовместная система условий.
4. Невыпуклая области.

# ЛЕКЦИЯ №3. ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## ПЛАН

1. Теоремы, на которых основывается решение ЗЛП.
2. Обоснование принципов алгоритма решение ЗЛП прямым (табличным) симплекс-методом.
3. Искусственные переменные в моделях ЗЛП.
4. Решение ЗЛП методом искусственного базиса.
5. Решение ЗЛП модифицированным симплекс-методом.

## ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ЛП

- Развёрнутая

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_{m1}, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right\}.$$

- Матричная

$$Z = C^T X \rightarrow \max,$$

$$AX \leq B = A_0.$$

- Векторное представление системы ограничений

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n \leq B, \text{ где}$$

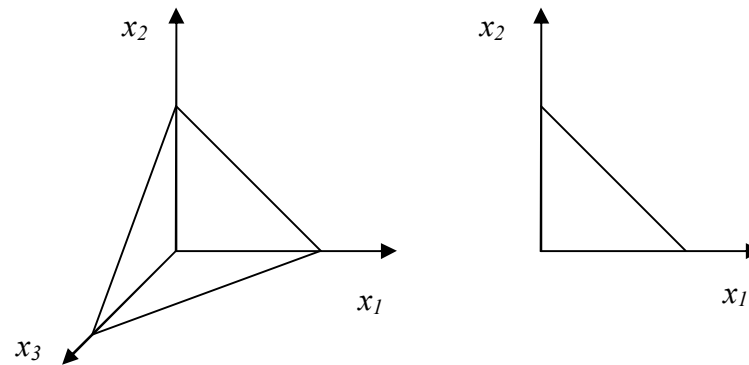
$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, A_0 \equiv B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}} \right\}$$

- Каноническая модель ЗЛП

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m},$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 1x_{n+m} &= b_{m1}. \end{aligned} \right\} \equiv AX + EX_{\text{доп}} = B.$$





## Определения

**Допустимые решения** – это совокупность чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих ограничениям исходной задачи.

**Оптимальное решение** – допустимое решение, на котором достигается экстремум (оптимум, максимум или минимум) целевой функции.

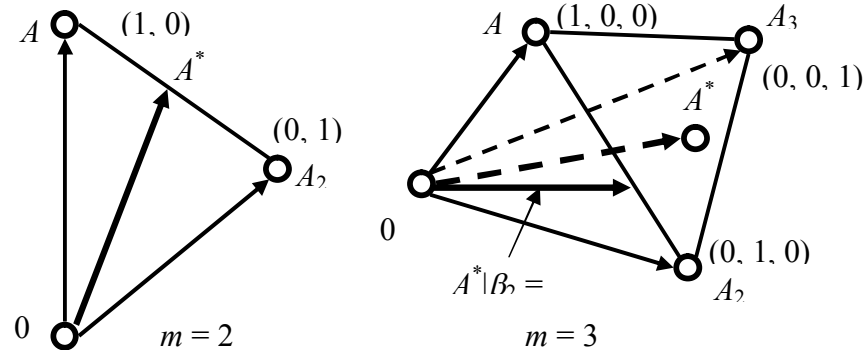
**Опорный (базисный) план** – допустимое решение канонической задачи, в которое входит система линейно независимых векторов  $A_j$ , соответствующих переменным  $x_j$ .

**Теорема 1.** Если целевая функция принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение в некоторой точке допустимого множества решений  $R_1$ , то она принимает это значение в крайней точке  $R_1$ . Если целевая функция принимает экстремальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.

Линейной комбинация векторов:  $A^* = \sum_{i=1}^m \beta_i \cdot A_i; \beta_i \geq 0, i = \overline{1, m}; \sum_{i=1}^m \beta_i = 1.$

Для  $m = 2$  –  $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 \Rightarrow \beta_1 A_1 + (1 - \beta_1) A_2.$

Для  $m = 3$  –  $A^* = \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3.$



**Теорема 2.** Если существует такое независимое множество  $m$ -мерных векторов  $A_1, A_2, \dots, A_k, k \leq m$ , что  $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k = A_0$ , то  $n$ -мерный вектор  $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, 0, 0, \dots, 0]$  ←  $n-k$  → есть крайняя точка допустимого множества  $R_1$ .

**Теорема 3.** Если  $X_0^T$  – крайняя точка допустимых решений множества  $R_1$ , то решение  $X_0^T$  – допустимое базисное решение (ДБР) системы ограничений.

**Следствия из теорем**

1. При отыскании оптимума достаточно рассмотреть только крайние точки допустимого множества решений.
2. Для отыскания оптимума достаточно перебрать допустимые базисные решения.

## ПРЯМОЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{opt}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_{m1}, \end{aligned} \right\}$$

Исходная задача ...

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

### 1. Приведение модели к канонической форме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \rightarrow \text{opt},$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} &= b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 1x_{n+m} &= b_{m1}. \end{aligned} \right\}$$

### 2. Посторенние симплекс-таблицы

		$c_j$	$c_1$	.....	$c_n$	0	.....	0
<i>Базис</i>	$C_B$	$A_0$	$A_1$	.....	$A_n$	$A_{n+1}$	.....	$A_{n+m}$
$A_{n+1}$	0	$b_1$	$a_{11}$	...	$a_{1n}$	1	...	0
$A_{n+2}$	0	$b_2$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$A_{n+m}$	0	$b_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mn}$	0	...	1
	$\delta$	$\delta_0$	$\delta_1$	...	$\delta_n$	$\delta_{n+1}$	...	$\delta_{n+m}$

### 3. Расчёт симплекс-разностей

$$\delta_0 = \sum_{i=1}^m C_{i,B} \times a_{i,0}, \delta_j = \sum_{i=1}^m C_{i,B} \times a_{i,j} - c_j, \quad j=1, n+m..$$

### 4. Принятие решения об остановке вычислений

$$\max : \forall_j \delta_j \geq 0, \min : \forall_j \delta_j \leq 0.$$

### 5. Признаки неразрешимости

$$\max : \exists_k \delta_k < 0 \ \& \ \forall a_{i,k} \leq 0, \min : \exists_k \delta_k > 0 \ \& \ \forall a_{i,k} \leq 0.$$

### 6. Определение направляющего столбца

$$\max : \arg \min_j \delta_j < 0 \rightarrow j^*, \text{ или } \min : \arg \max_j \delta_j > 0 \rightarrow j^*.$$

### 7. Определение направляющей строки

$$\Theta = \min_i \left\{ \frac{a_{i,0} \geq 0}{a_{i,j^*} \geq 0} \right\} \rightarrow i^*$$

### 8. Пересчёт симплекс-таблицы, после чего – возврат к пункту 3.

Пояснение, почему правила определения направляющих строки и столбца таковы

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_m x_m = A_0 \quad (a)$$

$$A_1 x_{1,j} + A_2 x_{2,j} + \dots + A_m x_{m,j} = A_j \quad (b)$$

$$A_1 \theta x_{1,j} + A_2 \theta x_{2,j} + \dots + A_m \theta x_{m,j} = A_j \theta \quad (c)$$

$$A_1 (x_1 - \theta x_{1,j}) + A_2 (x_2 - \theta x_{2,j}) + \dots + A_m (x_m - \theta x_{m,j}) + A_j \theta = A_0. \quad (d)$$

$$X^T = \{ \quad x_1 - \theta x_{1,j}, \quad x_2 - \theta x_{2,j}, \quad \dots, \quad x_m - \theta x_{m,j}, \quad \theta, \quad 0, \dots 0 \quad \}$$

$\xleftarrow{\hspace{10em} m \hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}}$   
 $\xleftarrow{\hspace{10em} m+1 \hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}}$   
 $\xleftarrow{\hspace{10em} m+n \hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}}$

$$0 < \theta \leq \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{i,j}} \right\}$$

Целевая функция для случая (a)

$$F(X) = \sum_{i=1}^m c_i x_i .$$

Для случая (d)

$$\begin{aligned} F(A_j) &= \sum_{i=1}^m c_i x_{i,j} = c_1(x_1 - \theta x_{1,j}) + c_2(x_2 - \theta x_{2,j}) + \dots + c_j \theta = \\ &= F(X) - \theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \dots - c_j) . \end{aligned}$$

Изменение при смене базиса составит:

$$F(A_j) - F(X) = -\theta(c_1 x_{1,j} + c_2 x_{2,j} + \dots - c_j) = -\theta \cdot \delta_j .$$

## МЕТОД ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

$$Z = C^T \cdot X \rightarrow \max(\min)$$

$$AX \otimes B,$$

где  $\otimes$  – знаки отношений  $\otimes \subseteq (\geq, =) \cup (\leq)$

$$AX - EX_{\text{доп}} = B \equiv A_0 \Leftrightarrow -EX_{\text{доп}} = A_0$$

$$AX - EX_{\text{доп}} + EX_{\text{иск}} = A_0 \Leftrightarrow -EX_{\text{иск}} = A_0$$

После канонизации

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + 0x_{n+1} + \dots + 0x_{n+m} \pm \mu x_{n+m+1} \dots \pm \mu x_{n+2m}, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} + 1x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} \dots + 0x_{n+2m} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} - 1x_{n+2} + \dots + 0x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 1x_{n+m+2} \dots + 0x_{n+2m} &= b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \dots - 1x_{n+m} + 0x_{n+m+1} + 0x_{n+m+2} \dots + 1x_{n+2m} &= b_{m1}. \end{aligned} \right\}$$

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

## Основная таблица

$$\longleftrightarrow A_x^{-1} \longrightarrow$$

Базис	$C_B$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	...	$e_m$	$A^*$	$\Theta$
$A_{n+1}$	0	$b_1$	1	0	...	0		
$A_{n+2}$	0	$b_2$	0	1	...	0		
...	...	...	...	...	...	...		
$A_{n+m}$	0	$b_m$	0	0	...	1		
	$\Lambda$	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	...	$\lambda_m$		

## Вспомогательная таблица

		$c_j$	$c_1$	.....	$c_n$	0	.....	0
Базис	$C_B$	$A_0$	$A_1$	.....	$A_n$	$A_{n+1}$	.....	$A_{n+m}$
$A_{n+1}$	0	$b_1$	$a_{11}$	...	$a_{1n}$	1	...	0
$A_{n+2}$	0	$b_2$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$A_{n+m}$	0	$b_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mn}$	0	...	1
	$\delta^0$	$\delta_0^0$	$\delta_1^0$	...	$\delta_n^0$	$\delta_{n+1}^0$	...	$\delta_{n+m}^0$
	...							
	$\delta^r$	$\delta_0^r$	$\delta_1^r$	...	$\delta_n^r$	$\delta_{n+1}^r$	$\delta_0^r$	$\delta_1^r$



## ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТОВ

$$e_0 = A_x^{-1} \times A_0,$$

$$\Lambda^T = C_B^T \times A_x^{-1},$$

$$\lambda_0 = C_B^T \times e_0$$

$$\delta_j = \Lambda^T \times A_j - c_j$$

$$A^* = A_x^{-1} \times A_j^*.$$

$$\Theta_i = \frac{e_{i,0} \geq 0}{a_i^* > 0}$$

# **ЛЕКЦИЯ №4. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

## **ПЛАН**

1. Двойственность в ЗЛП.
2. Теоремы двойственности.
3. Решение ЗЛП двойственным симплекс-методом.

## СВЯЗЬ ПРЯМОЙ И ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧ

Прямая задача	Двойственная задача
Развёрнутая форма представления	
$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j,$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \overline{m},$ $x_j \geq 0, \quad j = 1, \overline{n}.$	$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i,$ $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \overline{n},$ $y_i \geq 0, \quad i = 1, \overline{m}.$
Матричная форма представления	
$C^T X \rightarrow \max,$ $AX \leq B.$	$B^T Y \rightarrow \min,$ $A^T Y \geq C.$

## ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

**Теорема 1.** Если  $X_0$  и  $Y_0$  суть допустимые решения прямой и двойственной задач соответственно (при этом выполняется неравенство  $AX_0 \leq B$  и  $A^T Y_0 \geq C$ ), то значение целевой функции прямой задачи не превышает значения целевой функции двойственной

$$C^T X_0 \leq B^T Y_0.$$

**Теорема 2 (Основная).** Если  $X_0$  и  $Y_0$  суть допустимые решения прямой и двойственной задач и если  $C^T X_0 = B^T Y_0$ , то  $X_0$  и  $Y_0$  – оптимальные решения пары двойственных задач.

**Теорема 3.** Если в оптимальном решении прямой задачи  $i$ -ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю, то есть  $A_i \cdot X^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$ , где  $A_i$  –  $i$ -ая строка матрицы.

**Теорема 4.** Если в оптимальном решении двойственной задачи  $j$ -ое ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю, то есть  $A_j^T \cdot Y^* - c_j < 0 \Rightarrow x_j^* = 0$ , где  $A_j$  –  $j$ -ая строка матрицы.

**Следствие:**

$$\delta_{n+i}^{\text{ПрямойЗадачи}} = y_i^*, \quad i = 1, \overline{m}, \quad \delta_{m+j}^{\text{ДвойственнойЗадачи}} = x_j^*, \quad j = 1, \overline{n},$$

где  $n$  и  $m$  – число переменных и ограничений прямой задачи.

**Определения**

**Сопряжённый базис** (базис двойственной задачи) – система  $m$  независимых векторов, составленная из матрицы ограничений прямой задачи, базисное решение которой  $Y$  удовлетворяет ограничениям двойственной задачи:  $A_j^T Y > c_j$ .

**Псевдоплан прямой задачи** – допустимое базисное решение относительно сопряжённого базиса. Иными словами, псевдоплан есть разложение векторов прямой задачи, не вошедших в сопряжённый базис, по векторам сопряжённого базиса.

## АЛГОРИТМ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА

- Приведение системы ограничений к одинаковым знакам отношений
- Приведение систему ограничений в каноническую форму.
- Построение двойственной задачи для канонической формы.
- Подбор сопряжённого базиса
- Расчёт псевдоплана

$$A_j = M \times \tilde{A}_j$$

где  $A_j$  – разлагаемый вектор,  $M$  – матрица составленная из векторов прямой задачи, образующих сопряжённый базис,  $\tilde{A}_j$  – искомое разложение вектора.

- т.н. “БОЛЬШАЯ ИТЕРАЦИЯ”
- Заполнение таблицы и расчёт симплекс-разностей
- Проверка неразрешимости  $\exists_i a_{i,0} < 0 \ \& \ \forall_j a_{i,j} \geq 0$ ,
- Определение направляющей строки:  $\arg \min_i a_{i,0} < 0 \Rightarrow i^*$ ,
- Определение направляющего столбца:

$$\arg \min_j \left\{ \frac{-\delta_j \geq 0}{a_{i^*,j} < 0} \right\} \Rightarrow j^*.$$

- Пересчёт таблицы, после чего – к началу итерации

# **ЛЕКЦИЯ №5. ЗАДАЧИ ПОСТОПТИМАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

## **ПЛАН**

1. Постоптимальный анализ
2. Параметрическое программирование.

# ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРА ОГРАНИЧЕНИЙ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i + \delta_{b_i}$$

$$X_{\max} = A^{-1} \times B$$

$$B' = B + \delta_{b_i} \vec{\mathbf{e}}_i$$

$$X'_{\max} = \underbrace{A^{-1} \times B}_{X_{\max}} + \delta_{b_i} A^{-1} \times \vec{\mathbf{e}}_i,$$

$$a_{r,0}^* + \delta_{b_i} a_{r,n+i} \geq 0, \quad r = \overline{1, m},$$



$$\begin{aligned}
\max_{a_{r,n+i} > 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\} &\leq \delta_{b_i} \leq \min_{a_{r,n+i} < 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\} \\
b_i^{HF} &= b_i + \max_{a_{r,n+i} > 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\}, \\
b_i^{BG} &= b_i + \min_{a_{r,n+i} < 0} \left\{ \frac{-a_{r,0}^*}{a_{r,n+i}} \right\}.
\end{aligned} \tag{*}$$

**Случай 1.** Пусть дополнительная переменная  $x_{n+i}$ , соответствующая  $i$ -му ограничению, для правой части которого отыскивается диапазон изменения  $b_i$ , **не входит** в базисное решение.

**Случай 2.** Пусть дополнительная переменная  $x_{n+i}$ , соответствующая ограничению с приращением  $\delta_{b_i}$ , **является базисной**.

$$\text{При “}\leq\text{”}: -a_{r,0}^* \leq \delta_{b_i} \leq \infty, \text{ при “}\geq\text{”}: -\infty \leq \delta_{b_i} \leq a_{r,0}^* \tag{A.8}$$

**Случай 3.** Пусть элементы вектора свободных членов изменяются произвольно и одновременно для нескольких (а, возможно, и для всех) ограничений.

$$a_{i,0}^* + \sum_{j=1}^m a_{i,n+j} \delta_{b_j} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

- Дефицитные и недефицитные, значимые и незначимые ресурсы

$$F_{opt}^{ДЗ} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m = b_1 \delta_{n+1} + b_2 \delta_{n+2} + \dots + b_m \delta_{n+m}$$

$$\delta_{b_q} y_q^* = \delta_{b_s} y_s^* \Rightarrow \delta_{b_q} = \frac{\delta_{n+s}^*}{\delta_{n+q}^*} \cdot \delta_{b_s} \equiv \delta_{b_s} = \frac{\delta_{n+q}^*}{\delta_{n+s}^*} \cdot \delta_{b_q}$$

## ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$$F^\nabla(X) = C^T X + \delta_{c_r} \vec{e}_r^T X$$

**Случай 1.** Переменная с номером  $r$  входит в базис оптимального решения.

$$\forall j \delta_j^\nabla \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_j + \delta_{c_r} \cdot a_{r,j} \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m},$$

$$\max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \leq \delta_{c_r} \leq \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\} \Rightarrow c_r^{HG} = c_r + \max_{a_{r,j}>0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}, c_r^{BG} = c_r + \min_{a_{r,j}<0} \left\{ \frac{-\delta_j}{a_{r,j}} \right\}$$

**Случай 2.** Пусть переменная  $x_r$  в базис не вошла.

$$\delta_r^\nabla = \delta_r + \delta_{c_r} \Rightarrow -\infty < \delta_{c_r} \leq \delta_r$$

**Случай 3.** Комбинация 1 и 2.

$$\delta_j + \sum_{r=1}^m a_{r,j} \cdot \delta_{c_r} \geq 0$$

## ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЙ

- Для небазисных переменных

$$A_k^\nabla = A_k + \delta_{a_{r,k}} \cdot \vec{e}_k$$

$$\delta_k^\nabla = \delta_k + c_k \cdot \delta_{a_{r,k}}$$

$$\delta_{a_{r,k}} \geq -\frac{\delta_k}{c_k}$$

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

- Случай 1: параметрические изменения вектора ограничений

$$b_i^\nabla = b_i + tp_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$\begin{aligned} \max F &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 + tp_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2 + tp_2, \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m + tp_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$X^* = A^{-1} \times B$$

$$X^{\nabla*} = A^{-1} \cdot B^\nabla = A^{-1} \cdot B + t_0 A^{-1} \cdot P = \tilde{B} + t_0 \cdot \tilde{P}; \tilde{B} = A^{-1} \cdot B; \tilde{P} = A^{-1} \cdot P$$

$$\tilde{b}_i + t \cdot \tilde{p}_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [\alpha, \beta]; t = t_0 \geq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}; t = t_0 \leq -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}$$

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i > 0, \\ -\infty, & \forall i : \tilde{p}_i \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_0 = \begin{cases} \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, & \exists i : \tilde{p}_i < 0, \\ \infty, & \exists i : \tilde{p}_i \geq 0. \end{cases}$$

## Алгоритм решения

1. Зафиксировав значение параметра  $t = t_0$ , решить ЗЛП симплекс-методом.
2. Определить границы изменения параметра  $[\alpha_r, \beta_r]$
3. Окончание, если верхняя граница  $\beta_r$  интервала выйдет за пределы или окажется равной верхней границе изменения параметра.
4. В противном случае, необходимо отыскать направляющую строку и выполнить большую итерацию двойственного симплекс-метода.

$$\min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\} \Rightarrow i^*$$

5. Вернуться к п.2 настоящего алгоритма.

- Случай 2. Решение задачи линейного программирования при вариации коэффициентов целевой функции

$$c_i^\nabla = c_i + tp_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$\max F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + \dots + (c_n + tp_n)x_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

$$\delta_j^\nabla = \tilde{\delta}_j + t_0 \cdot \tilde{p}_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$t = t_0 \geq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \alpha_0 = \max_{\tilde{p}_j > 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\}; t = t_0 \leq -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow \beta_0 = \min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\},$$



## Алгоритм решения

1. Зафиксировать  $t = t_0 \in [\alpha, \beta]$  и решить задачу параметрического программирования как обычную ЗЛП.
2. Исследовать полученное решение с помощью системы неравенств допустимости, в ходе которого будут определены нижняя и верхняя границы параметра.
3. Если окажется, что  $\beta_0 \rightarrow \infty$ , то найдено оптимальное решение
4. В противном случае, руководствуясь , необходимо определить направляющий столбец:

$$\min_{\tilde{p}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\delta}_j}{\tilde{p}_j} \right\} \Rightarrow j^*,$$

затем перейти к п. 2.

5. Решение представляется набором интервалов  $[\alpha, \beta_1], [\beta_1, \beta_2], \dots, [\beta_{r-1}, \beta]$ , на каждом из которых будет свой оптимальный план и своё выражение для расчёта целевой функции.

# ЛЕКЦИЯ № 6. ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## ПЛАН

1. Дискретное и целочисленное программирование. Общие подходы к решению задач целочисленного программирования.
2. Линейное целочисленное программирование (ЛЦП).
3. Решение задач ЛЦП методом отсекающих плоскостей (Гомори).
4. Решение задач ЛЦП методом Ветвей и границ.
5. Стохастическое программирование: модели, подходы и методы решения.

## ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m, \\ X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq D, \end{array} \right\}$$

где  $D$  — конечное или счётное множество.

Если  $X$  ограничено множеством целых чисел, то задачу назначают задачей *линейного целочисленного программирования (ЛЦП)*.

## КЛАССЫ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

- Задачи с неделимостями (задачи о рюкзаке), обусловлены физическими свойствами объектов. Задача размещение массивов информации на внешних устройствах ЭВМ при ограничениях на объём, скорость вращения, стоимостные рамки и др. относится к этому классу.
- Экстремальные комбинаторные задачи (о назначениях, коммивояжёра, о покрытиях).
- Задачи на несвязных и невыпуклых областях.
- Задачи с разрывной целевой функцией.
- Транспортная задача при целочисленных значениях массивов поставок, потребления и стоимостей.
- Методы:
  1. Метод отсечений, отсекающих плоскостей (ГОмори или ГомОри).
  2. Метод ветвей и границ.
  3. Методы, учитывающие особенности задачи.
  4. Методы случайного поиска (эвристические).

- Метод Гомори

$$\sum_{j=1}^n d_j \cdot x_j = p \quad (a)$$

$[d]$  есть целая часть  $d$  (округление по недостатку).

$$\sum_{j=1}^n [d_j] \cdot x_j \leq p$$

$$\sum_{j=1}^n [d_j] \cdot x_j \leq [p]$$

$$\sum_{j=1}^n [d_j] \cdot x_j + y = [p] \quad (b)$$

$$\sum_{j=1}^n \{-d_j\} \cdot x_j + y = \{-p\}. \quad (c)$$

## АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОТСЕЧЕНИЯ ГОМОРИ

1. Для выбранного канонизированного уравнения  $(a)$  сформировать желаемую целочисленную форму вида  $(b)$ .

2. Из целочисленной формы  $(b)$  вычесть исходное уравнение  $(a)$ , получится уравнение отсекающей плоскости  $(c)$ .

Дадим и нотацию этого алгоритма в виде формулы:

$$(c) = (b) - (a)$$

### Алгоритм решения задачи ЛЦП методом Гомори

Процедура получения решения структурно состоит из

- предварительного этапа,
- проверки условия окончания и
- так называемой “большой итерации”, которая включает операцию формирования отсечения и несколько шагов итеративной части двойственного симплекс-метода.

**1. Предварительный этап.** Получить оптимальное решение ЗЛП без учёта целочисленности.

**2. Условие окончания расчётов.** Если в текущем решении все компоненты базисного столбца  $A_0$ , соответствующего основным переменным, являются целыми числами, то найдено оптимальное решение задачи ЛЦП.

**3. Большая итерация.**

3.1. Отсечение Гомори формируется для тех строк симплекс-таблицы, в которых компоненты  $a_{i,0}$ , соответствующие основным переменным задачи, дробные числа.

3.2. В базисное решение вводится дополнительная переменная  $x_{r+t}$ , соответствующая канонизированному уравнению отсекающей плоскости, одновременно симплекс-таблица пополняется строкой и столбцом-ортом  $A_{r+t}$ .

3.3. Выполняется итерационная часть двойственного симплекс-метода.

3.4. Если вектор  $A_{r+t}$ , ранее выведенный из базиса, в ходе расчётом снова в него вводится в процессе итераций, то строку и столбец симплекс-таблицы, соответствующие переменной  $x_{r+t}$  после пересчёта по методу Жордана-Гаусса вычёркивают (удаляют) из неё.

На этом циклическая часть алгоритма завершена, а цикл возобновляется с п. 2.

## ЗАМЕЧАНИЯ К МЕТОДУ ГОМОРИ

1. Сходимость вычислений обеспечивается за конечное число итераций.
2. Метод особенно эффективен, когда **большинство** переменных имеют целочисленные значения.
4. После выполнения нескольких больших итераций на шаге отсечения Гомори появляются многочисленные альтернативы. Это ведёт к заикливанию, именуемому Г. Вагнером “сплошной вырожденностью”.
5. Затруднена сходимость при решении задач, в которых значения  $a_{i,j}$  и  $b_i$  велики.
6. Иногда, для достижения успеха, требуется видоизменить постановку задачи в сторону усиления, например, введя ограничения  $x_1 \leq 6$  и  $x_2 \leq 6$  в дополнение к уже существующему ограничению  $x_1 + x_2 \leq 6$ .



- Метод ветвей и границ

$$L_j \leq x_j \leq U_j,$$

где  $L_j$  — нижний предел, а  $U_j$  — верхний предел (граница), которые определяются границами области допустимых решений задачи.

$$L_j \leq I \leq U_j - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x_j \leq I, \\ x_j \geq I + 1 \end{array} \right\}$$

## Алгоритм метода ветвей и границ

1. Исходная задача решается любым удобным методом до отыскания нецелочисленного оптимального решения.

2. Если  $X_0$  – нецелочисленное решение, то, используя неравенства, получаем множество из двух задач  $G_1$  и  $G_2$  (ветвей).

3 Для решения возникающих задач ветвейзуют двойственный симплекс-метод, который, как нам известно, допускает ввод новых ограничений по ходу решения.

- Одна из задач формируется по ограничению  $x_j \leq I$ , где  $I$  – целая часть  $[x_j]$ , в виде строки  $A_{r+t}$  в симплекс-таблице, соответствующей канонической форме уравнения  $I = x_j + x_{r+t}$  в таблице и вектору  $A_{r+t}$  в базисе. Одновременно в симплекс-таблицу помещается выводимая строка, обозначаемая как  $\tilde{A}_{r+t}$  и формируемая вычитанием из строк:  $A_{r+t} - A_j$ . При этом переменная  $x_j$  введённого ограничения сохраняется в базисе.
- Вторая задача формируется по ограничению  $-x_j \leq -(I+1)$ , которому соответствует строка, обозначаемая  $A'_{r+t}$ , которая строится по канонической форме этого ограничения и записывается в форме  $-(I+1) = -x_j + x'_{r+t}$ , Одновременно формируется и выводимая строка  $\tilde{A}'_{r+t}$ , равная  $A'_{r+t} + A_j$ .

4. Процесс заканчивается перерешиванием всех возникающих задач.

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задача: найти управляющие переменные  $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  с учётом влияния случайных факторов  $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ , не поддающихся управлению.

$$\begin{aligned} f(X, \omega) &\rightarrow \text{opt}, \\ g_i(X, \omega) &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ X &\geq 0, \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

где  $\Omega$  – пространство событий  $\omega$ .

Разновидности задач стохастического программирования:

1. Стохастические коэффициенты функции цели при детерминированных ограничениях.
2. Детерминированные коэффициенты целевой функции при стохастических свободных членах и коэффициентах системы ограничений.
3. Стохастические коэффициенты целевой функции, свободные члены и коэффициенты системы ограничений.

- Классы моделей.

1. *M*-модели.

Задача максимизации математического ожидания того или иного показателя (прибыли, рентабельности и т.д.).

2. *V*-модели.

Минимизация дисперсии какого-либо показателя при условии ограничения на определённом (желаемом) уровне его средней величины.

3. *P*-модели.

Определение вероятности превышения (или не превышения) экономическим показателем определённого уровня или порога.

Прямые и не прямые методы.

- $N$ -этапные задачи (модели) стохастического программирования:

$$\begin{aligned} f[X(\omega)] &\rightarrow \text{opt}, \\ g_i[X(\omega)] &\leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ X(\omega) &\geq 0. \end{aligned}$$

$N$ -этапную стратегическую модель стохастического программирования:

“Решение”  $\rightarrow$  “Наблюдение”  $\rightarrow$  “Решение”  $\dots \rightarrow$  “Наблюдение”  $\rightarrow \dots$

$N$ -этапную задачу тактического стохастического программирования

“Наблюдение”  $\rightarrow$  “Решение”  $\dots \rightarrow$  “Наблюдение”  $\rightarrow$  “Решение”  $\rightarrow \dots$

# ЛЕКЦИЯ № 7. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## ПЛАН

1. Задачи и модели нелинейного программирования (ЗНП).
2. Общий случай ЗНП. Теорема Куна - Таккера.
3. Седловая точка
4. Задачи квадратичного программирования и её решение сведением к ЗЛП.

## Постановка НП-задачи

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \end{cases}$$

где функции  $f(X)$  и  $g_i(X)$ ,  $i = 1, m$ , в общем случае, нелинейные.

## НП-ЗАДАЧИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТИПА “РАВЕНСТВО” (МЕТОД ЛАГРАНЖА)

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \\ h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Функции  $f(X)$  и  $h_i(X)$ ,  $i = 1, m$  нелинейные и имеют непрерывные частные производные.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} &= 0, j = 1, \overline{n}, \\ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} &= 0, i = 1, \overline{m}. \end{aligned} \right\}$$



$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0$$

**Теорема.** Пусть существует точка  $X^*$ , в которой достигается экстремум функции  $f(X)$  при ограничениях  $h_i(X) = 0, i = 1, m$ . Если ранг матрицы  $I = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right], i = 1, \overline{m}; j = 1, \overline{n}$  в точке  $X^*$  равен  $m$ , то существует  $m$  вещественных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , **не все из которых равны нулю одновременно**, при которых выполняется условие

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(X^*) = 0.$$

### Алгоритм метода Лагранжа

1. Составить функцию Лагранжа  $L(X, \Lambda)$ .
2. Найти частные производные функции Лагранжа (2.76).
3. Решить систему уравнений для определения  $X^*$  и  $\Lambda^*$ .
4. Исследовать полученные точки на максимум или минимум.

## Пример практического применения метода Лагранжа

### Содержательная постановка.

Цикл эксплуатации блока датчиков информационного зонда включает следующие фазы:  $\tau_{\Pi}$  – подготовки к применению;  $\tau_{\Gamma}$  – готовности к применению,  $\tau_P$  – работы (применения). Требование к надёжности формулируется в виде показателя безотказной работы  $R$ . Каковы должны быть требования по надёжности к каждой фазе эксплуатации, если известны потери от отказа на каждой фазе, задаваемые неотрицательными величинами  $C_i > 0$ ,  $i = \Pi, \Gamma, P$ ?

Время эксплуатации изделия в целом есть

$$\tau_{\Sigma} = \tau_{\Pi} + \tau_{\Gamma} + \tau_P,$$

а надёжность характеризуется показателем

$$R = P_{\Pi} P_{\Gamma} P_P,$$

где  $P_i$ ,  $i = \Pi, \Gamma, P$  – вероятность безотказной работы на соответствующей фазе.

Если последствия отказов равнозначны, то задача имеет тривиальное решение:

$$P_i = \sqrt[3]{R}, i = \Pi, \Gamma, P.$$

Необходимо рассчитать вероятностные характеристики таким образом, чтобы общие потери были минимальные. Функция цели или функция потерь имеет вид

$$C_{\Sigma} = C_{\Pi}(1-P_{\Pi})P_{\Gamma}P_P + C_{\Gamma}P_{\Pi}(1-P_{\Gamma})P_p + C_pP_{\Pi}P_{\Gamma}(1-P_p),$$

при ограничении

$$R = P_{\Pi} P_{\Gamma} P_P .$$

Функция Лагранжа получается такова

$$L = C_{\Sigma} + \lambda[P_{\Pi} P_{\Gamma} P_P - R]$$

В ходе применения метода,  $\lambda$  из первого, например, уравнения для частных производных  $\frac{\partial L}{\partial P_i}$ , подставляется в остальные.

$$\begin{cases} C_{\Gamma} \cdot P_{\Pi} - C_{\Pi} \cdot P_{\Gamma} = 0, \\ C_{\Gamma} \cdot P_P - C_P \cdot C_{\Gamma} = 0, \\ R = P_{\Pi} \cdot P_{\Gamma} \cdot P_P. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_P = \frac{C_{\Pi} \cdot R}{C_{\Gamma} \cdot P_{\Pi}^2}, \\ P_{\Pi} = \frac{C_P \cdot R}{C_{\Gamma} \cdot P_P^2}. \end{cases}$$

Окончательно имеем оптимум

$$P_{\Pi}^* = \sqrt[3]{\frac{C_{\Pi}^2 R}{C_{\Gamma} C_P}}, \quad P_{\Gamma}^* = \sqrt[3]{\frac{C_{\Gamma}^2 R}{C_{\Pi} C_P}}, \quad P_P^* = \sqrt[3]{\frac{C_P^2 R}{C_{\Pi} C_{\Gamma}}}.$$

Иногда стоимость потерь при отказах удобно выражать в относительных единицах:

$$a_1 = \frac{C_{\Gamma}}{C_{\Pi}}, \quad a_2 = \frac{C_{\Pi}}{C_P}, \quad a_3 = \frac{C_P}{C_{\Gamma}}, \text{ причём } a_1 a_2 a_3 = 1.$$

Тогда решение примет вид

$$P_{\Pi}^* = \sqrt[3]{\frac{R a_2}{a_1}}, \quad P_{\Gamma}^* = \sqrt[3]{\frac{R a_1}{a_3}}, \quad P_P^* = \sqrt[3]{\frac{R a_3}{a_2}}.$$

## ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НП-ЗАДАЧИ

Задачи выпуклого программирования

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}. \end{cases}$$

$f(X)$  и все  $g_i(X)$ ,  $i = 1, m$  выпуклы (в смысле НП)

Задачи вогнутого программирования

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}. \end{cases}$$

$f(X)$  и все  $g_i(X)$ ,  $i = 1, m$  вогнуты (выпуклы вверх)

Введём функцию  $\max U(X) = \min [-U(X)]$ .

Обозначив

$$\hat{f}(X) = -f(X),$$

$$\hat{g}_i(X) = -g_i(X), \quad i = 1, \bar{n}. \quad \text{получим выпуклую задачу}$$

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ \hat{g}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ \dots \\ \hat{g}_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}. \end{array} \right.$$

Общий случай задачи НП-программирования:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}. \end{array} \right.$$

## Определение

Если в точке минимума  $X^*$  неравенство  $g_i(X)$  выполняется как *равенство*, то оно называется *активным*.

По теореме Лагранжа

$$\nabla f(X^*) + \sum_I \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0, \quad I = \{i : g_i(X^*) = 0\}$$

**Теорема Куна-Таккера.** Пусть функции  $f(X)$  и  $g_i(X)$ ,  $i = 1, n$  обладают частными производными на некоторой области  $\mathcal{R}$ , содержащей  $X^*$ . Точка  $X^*$  будет являться точкой минимума функции  $f(X)$  при ограничениях  $g_i(X) \leq 0$ ,  $i = 1, n$ , удовлетворяющих условиям регулярности в виде линейной независимости, если существуют такие неотрицательные множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , что

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0; \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X^*) = 0; \\ \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \overline{m}. \end{array} \right.$$

## СЕДЛОВАЯ ТОЧКА В НП-ЗАДАЧАХ

**Определение.** Пара векторов  $X^*$  и  $\Lambda^*$  называется *седловой точкой* функции  $L(X, \Lambda)$  на области  $\mathcal{R}$ , если для всех  $\lambda \geq 0$  и  $X \in \mathcal{R}$  выполняется условие

$$L(X^*, \Lambda) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X, \Lambda^*), \quad (*)$$

называемое *неравенством седловой точки*.

В седловой точке:  $\max_{\lambda_i \geq 0} \min_{X \in \mathcal{R}} L(X, \Lambda) = \min_{X \in \mathcal{R}} \max_{\lambda_i \geq 0} L(X, \Lambda), i = 1, \bar{n}.$

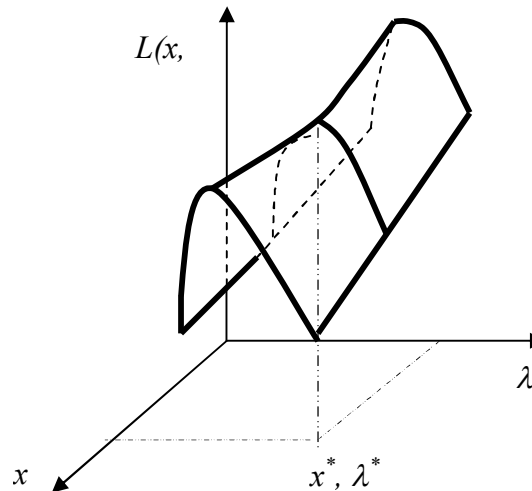


Рисунок 1 – Седло нелинейной функции



**Теорема о седловой точке.** Пусть  $f(X)$  и все  $g_i(X)$ ,  $i = 1, m$  выпуклы, а функции  $g_i(X)$  удовлетворяют условиям **регулярности Слейтера** (вида  $\exists_X \forall_i g_i(X) < 0$ ). Вектор  $X^*$  является решением задачи нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \min f(X), \\ g_i(X) \leq 0, \quad i = 1, \overline{m}. \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда существует такой вектор  $\Lambda$  с неотрицательными компонентами, что выполняются неравенство **седловой точки** (\*) и **условие линейной независимости**

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X^*) = 0.$$

## ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КУНА-ТАККЕРА.

Имеем выпуклую НП-задачу

$$\begin{aligned} \min f(X); \\ \begin{cases} g_i(X) \leq 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \overline{n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Введём  $x_j = -h_j(x_j)$ ,  $j = 1, n$ ,  $\Rightarrow h_j(x_j) \leq 0$ ,  $j = 1, n$ .

Функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda, U) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^n u_j h_j(x_j),$$

к которой применим теорему Куна-Таккера  $\nabla L(X, \Lambda, U)$ . Это эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X, \Lambda, U)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} - u_j = 0, & j = 1, \overline{n}; \\ u_j x_j = 0, & j = 1, \overline{n}; \\ \lambda_i g_i(X) = 0, & i = 1, \overline{m} \\ \lambda_i \geq 0, & i = 1, \overline{m}. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}; \\ \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \cdot x_j^\circ = 0, \quad j = 1, \bar{n}; \\ \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} = g_i(X^\circ) \leq 0, \quad i = 1, \bar{m}; \\ \lambda_i g_i(X^\circ) = 0, \quad i = 1, \bar{m}. \end{array} \right\}$$

Для вогнутого программирования, благодаря симметрии задач.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = 1, \bar{n}; \\ \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial x_j} \cdot x_j^\circ = 0, \quad j = 1, \bar{n}; \\ \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} = g_i(X^\circ) \geq 0, \quad i = 1, \bar{m}; \\ \frac{\partial L(X^\circ, \Lambda^\circ)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^\circ = 0, \quad i = 1, \bar{m}. \end{array} \right\}$$

## ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическая модель:

$$\max f(X) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X,$$

$$\begin{cases} A \cdot X \leq A_0, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \bar{n}, \end{cases}$$

Функция Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = b^T \cdot X + \frac{1}{2} X^T \cdot C \cdot X + \Lambda^T (A_0 - A \cdot X).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial X} = b + C \cdot X - A^T \Lambda \leq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \Lambda} = A_0 - A \cdot X \geq 0. \end{cases}$$

**Теорема квадратичного программирования.** Вектор  $X_0 \geq 0$  является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и только тогда, когда существуют такие  $m$ -мерные векторы  $\Lambda \geq 0$  и  $W \geq 0$  и  $n$ -мерный вектор  $V \geq 0$ , что выполняются следующие условия

$$\begin{cases} b + C \cdot X - A^T \Lambda + V = 0, \\ A_0 - A \cdot X - W = 0, \\ V^T \cdot X = 0, \\ W^T \cdot \Lambda = 0. \end{cases}$$

Эквивалентная ЗЛП:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^m \mu y_i + \sum_{j=1}^n \mu z_j \rightarrow \min, \\ \begin{cases} b + CX - A^T \Lambda + V + Z = 0, \\ AX + W + Y = A_0, \\ V^T X = 0, \\ W^T \Lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Решить  $F_{\max} = [3 \ 2]X + \frac{1}{2}X^T \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$  при ограничениях  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ .

В развёрнутой форме

$F_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2$  — целевая функция;

$\begin{cases} x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7, \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$  — система ограничений

Функция Лагранжа:

$$L(X, \Lambda) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + \lambda_1(x_2 - 3) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 7).$$

Частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_1} &= 3 - 2x_1 + 3x_2 + \lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial x_2} &= 2 - 2x_2 + 3x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_1} &= x_2 - 3 \geq 0, \\ \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_2} &= x_1 + x_2 - 7 \geq 0.\end{aligned}$$

Эквивалентная ЗЛП будет иметь вид

$$\begin{aligned}T &= \mu y_1 + \mu y_2 + \mu z_1 + \mu z_2 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} -2x_1 & +3x_2 & & +\lambda_2 & +v_1 & & & +y_1 & & & = 3, \\ 3x_1 & -2x_2 & +\lambda_1 & +\lambda_2 & & +v_1 & & +y_2 & & & = -2, \\ & x_2 & & & & -w_1 & & & +z_1 & & = 3, \\ x_1 & +x_2 & & & & & -w_2 & & & +z_2 & = 7. \end{cases}\end{aligned}$$

# ЛЕКЦИЯ №8. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НП-ЗАДАЧ

## ПЛАН

1. Аналитические методы определения экстремумов.
2. Математические обоснования: теоремы нелинейного программирования.
3. Использование матрицы Гёссе
4. Поиск экстремумов для сепарабельных дифференцируемых функций



# АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \end{cases}$$

**Теорема 1 (о существовании экстремума).** Если функция многих переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  непрерывна и определена на замкнутом множестве  $\mathcal{R}$ , то она достигает на этом множестве, *по крайней мере, один раз* своего минимального и максимального значений.

**Теорема 2 (о местоположении экстремума).** Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является функцией нескольких переменных, определённой на допустимой области  $\mathcal{R}$ , то экстремальное значение  $f$  (если оно существует) достигается в одной или нескольких точках, принадлежащих:

- множеству стационарных точек  $S(X)$ ;
- множеству точек границы  $G(X)$ ;
- множеству точек, в которых (где) функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  не дифференцируема.

## Определения

Множество точек  $S(X)$  функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется множеством стационарных точек, если его элементы удовлетворяю условию

$$\nabla f(X) = \left\{ \frac{\partial f(X)}{\partial x_j}, j = 1, \bar{n} \right\} = 0,$$

а вектор  $\nabla f(X)$  – называют градиентом функции.

Относительный (локальный) максимум функции  $f(X)$  достигается в точке  $X^0$  с координатами  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , если для всех точек, лежащих в малой окрестности точки  $X^0$ , имеет место неравенство  $f(X^0) \geq f(X^0 + H)$ , где  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ .

Абсолютный (глобальный) максимум функции  $f(X)$  достигается в точке  $X^*$  с координатами  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , если для всех точек, принадлежащих множеству ограничений  $\mathcal{R}$  справедливо неравенство  $f(X^*) \geq f(X)$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{R}$ .

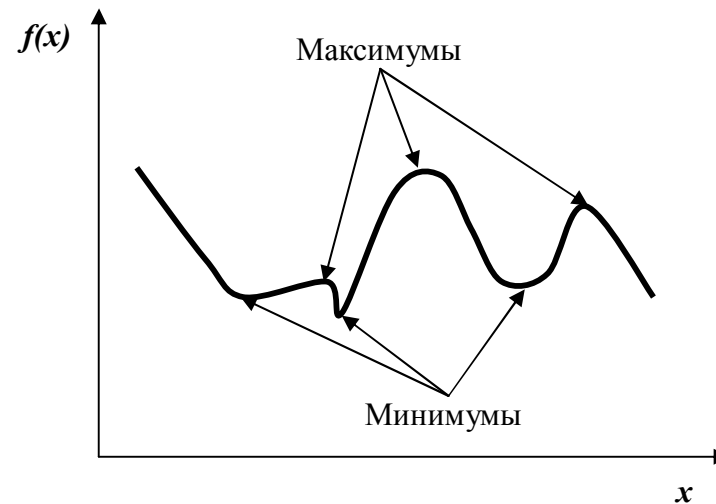


Рисунок 1 – Локальные и глобальные экстремумы

Пусть  $\mathcal{X}$  – выпуклое множество точек  $n$ -мерного пространства.

Если для произвольного множителя  $k \in [0, 1]$  и некоторого приращения  $\Delta X$  выполняется неравенство

$$f(X + k\Delta X) \geq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется **вогнутой** (обращена выпуклостью вверх), а если

$$f(X + k\Delta X) \leq f(X) + k[f(X) - f(X + \Delta X)],$$

то функция называется **выпуклой**.

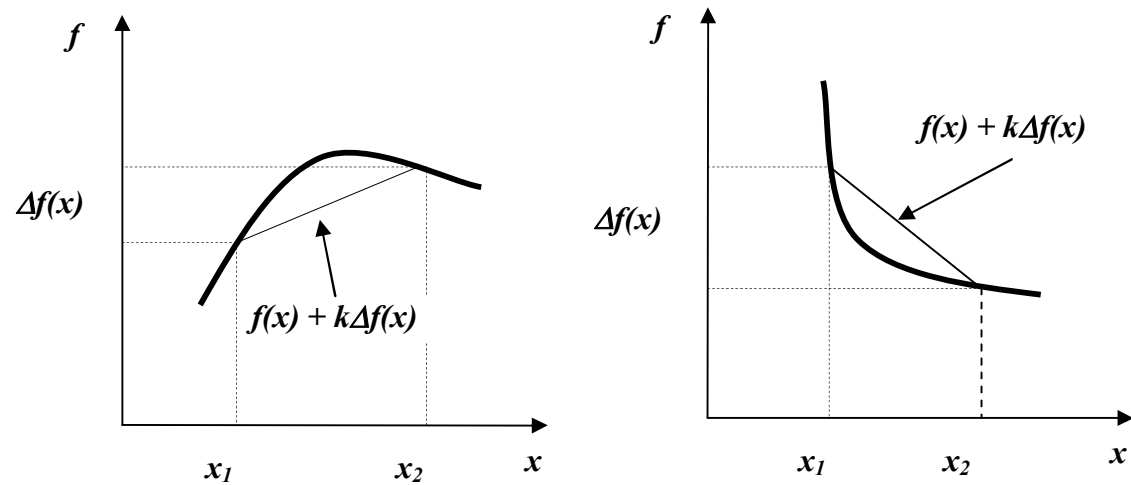


Рисунок 2 – Вогнутости и выпуклости функций

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦА ГЕССЕ

$$h_{i,j} = \left[ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=x_0}, i = 1, \bar{n}, j = 1, \bar{m}.$$

Матрица Гёссе ( $\nabla^2 f(X)$  или  $H(X)$ ) называется **положительно определённой**, если её главные угловые миноры **положительны**, и **отрицательно определённой**, если её главные угловые миноры имеют знак  $(-1)^k$ ,  $k$  – номер углового минора.

Главные угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,2} & h_{3,3} \end{vmatrix} = h_{2,2} \cdot h_{3,3} - h_{3,2} \cdot h_{2,3}.$$

**Теорема 3.** Для того, чтобы в точке  $X_0$  достигался внутренний относительный максимум, достаточно *равенства нулю всех первых* производных и *строгой вогнутости* функции в окрестностях  $X_0$ .

**Теорема 4.** Для того, чтобы в точке  $X_0$  достигался внутренний относительный минимум, достаточно *равенства нулю всех первых* производных и *строгой выпуклости* функции в окрестностях  $X_0$ .

*Пример.* Исследовать на экстремум функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Градиент этой функции есть

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \{1 - 2x_1; x_3 - 2x_2; 2 + x_2 - 2x_3\}.$$

Стационарная точка

$$X_0 = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\}$$

Матрица Гессе:

$$\nabla^2 f(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \mu_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \mu_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

**Вывод.** Миноры положительны, следовательно, матрица Гессе положительно определена, функция выпукла, и в точке  $X_0$  с координатами  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$  достигается минимум.

## ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ДЛЯ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Ограничение  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  является функцией с *разделяемыми переменными (сепарабельной)*, если его можно представить в виде

$$x_i = \varphi_i(\{x_j\}), \quad i \neq j, \quad j = 1, \overline{n}.$$

### Общий алгоритм решения

- Отыскивается множество всех стационарных точек  $S$  функции  $f(X)$  внутри допустимого множества  $\mathcal{R}$  и выбираются координаты точки, в наибольшей степени отвечающие направлению оптимизации задачи.
- Исследуется множество точек границы  $G$ . Для этого выполняют разделение переменных по каждому из ограничений, с последующей подстановкой выражений переменных в функцию цели  $f(X)$ . Полученные функции исследуются. Выбираются координаты интересующего нас оптимума.
- Определяется и подвергается исследованию множество точек, принадлежащих  $\mathcal{R}$ , где функция не дифференцируема.
- Из результатов предыдущих шагов выбирается наилучшее решение.



# ЛЕКЦИЯ №9. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ НП-ЗАДАЧ

## ПЛАН

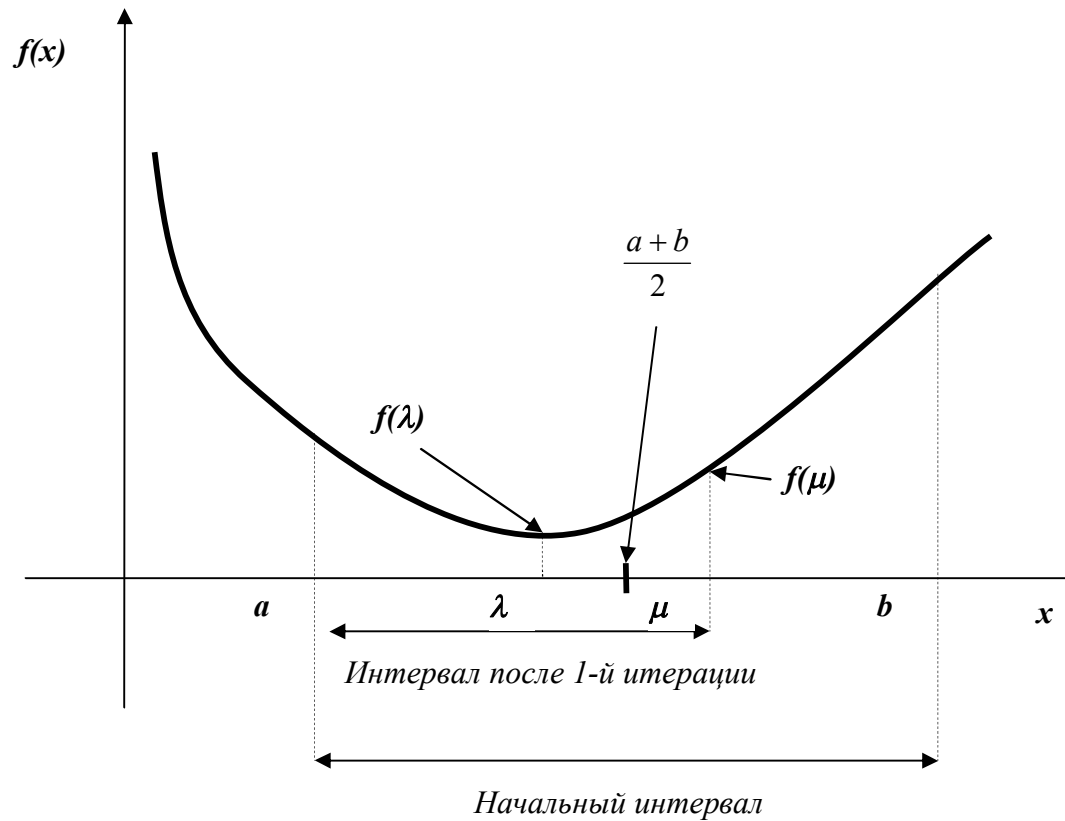
1. Прямые методы поиска экстремумов
2. Градиентные методы поиска экстремумов
3. Методы переменной метрики поиска экстремумов
4. Методы возможных направлений
5. Методы штрафных функций

# ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА

- **Дихотомический поиск**

Входные данные. Интервал поиска  $[a, b]$ ; точность расчётов  $l > 0$ ; константа различимости  $\varepsilon$ .

Условие окончания:  $b - a \leq l$ .



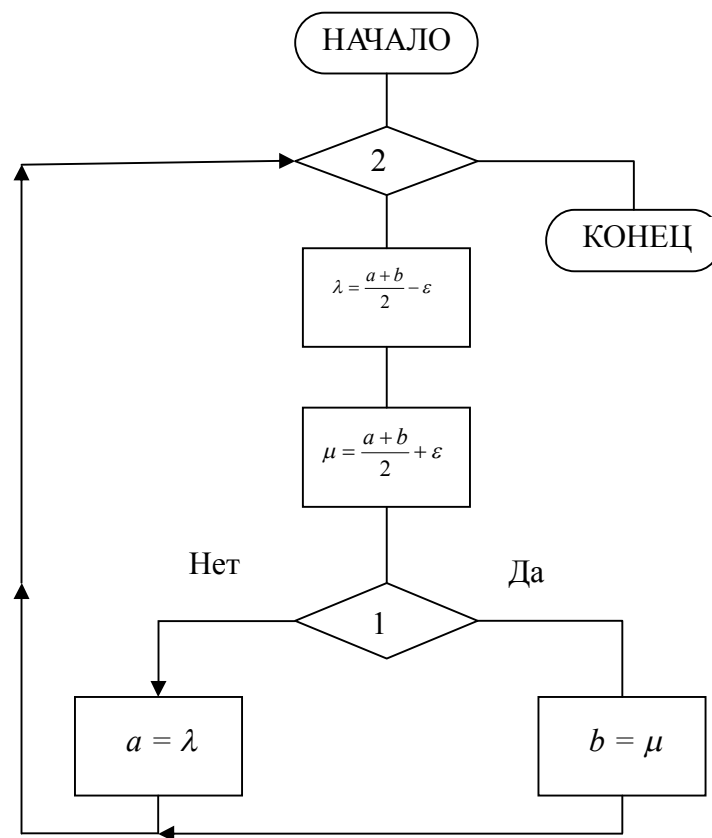
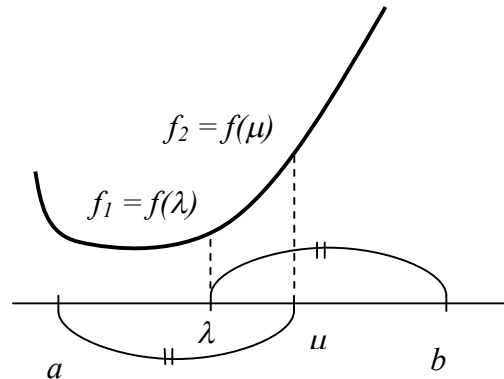


Рисунок 1 – Схема алгоритма дихотомического метода

- **Метод золотого сечения**

- интервал поиска сужается равномерно  $b_k - a_k = \alpha^k (b - a)$ ;
- параметры точек сравнения и концов интервала соотносятся следующим образом

$$b - \lambda = \mu - a.$$



$$\lambda = a + (1 - \alpha) \times (b - a)$$

$$\mu = a + \alpha \times (b - a),$$

где  $|\alpha| < 1$  (Коэффициент золотого сечения  $\alpha = 0,618\dots$ )

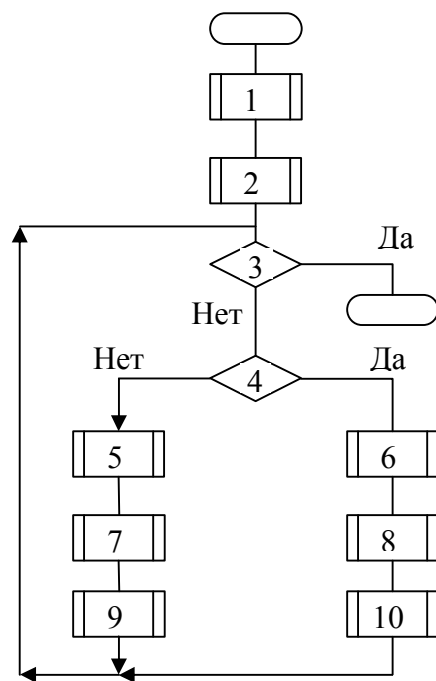


Рисунок 2 – Алгоритм метода золотого сечения

- **Метод Фибоначчи**

- на каждой итерации изменяет коэффициент сжатия интервала и
- выполняется заранее известного числа шагов.

Ряд Фибоначчи

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = F_1 = 1$$

$$\frac{b-a}{l} < F_n \Rightarrow n$$

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k)$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) = b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$$

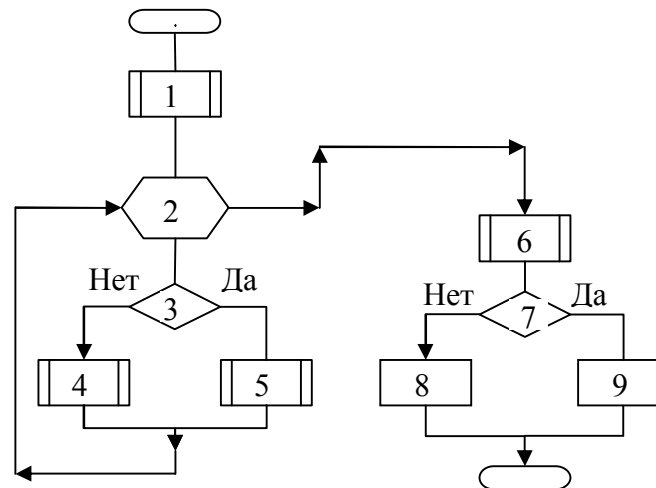


Рисунок 3 – Алгоритм метода Фибоначчи

# МНОГОМЕРНЫЙ ПОИСК

- **Метод конфигураций**

Он же метод траекторий или метод Хука и Дживса.

Идея.

- Направления поиска ориентированы, так сказать, по сторонам света или вдоль осей координат в обе стороны.
- Вокруг текущей точки производится поиск направления, в котором функция убывает.
- Если такое направление найдено, то шаг поиска увеличивается, а поиск продолжается в выбранном направлении – устанавливается так называемый тренд поиска, и осуществляется до тех пор, пока функция в этом направлении убывает.
- Если факта убывания функции не обнаружено, то шаг поиска уменьшается.

Делается попытка найти «овраг» (при минимизации) функции и двигаться вдоль него к точке минимума, а в задачи максимизации ищется «хребет».



## ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА

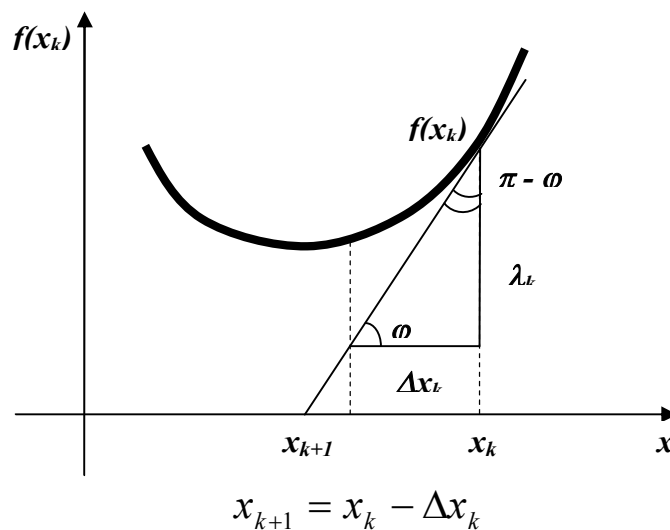


Рисунок 4 – Использование градиента

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \times \nabla f(x_k), \quad (2.61)$$

где  $\lambda_k > 0$  – величина шага на  $k$ -ой итерации. Все особенности градиентных методов заключаются в приёмах определения  $\lambda_k$  на каждой итерации.

- **Метод наискорейшего спуска (подъёма)**

$$\lambda_k^* \Rightarrow \min_{\lambda > 0} f(X_k + \lambda s_k)$$

где  $s_k = -\nabla f(X_k)$  определяется градиентом. При этом непосредственно значение  $\lambda_k$  может быть определено из уравнения

$$\frac{\partial f(X_k + \lambda s_k)}{\partial \lambda} = 0$$

аналитически, либо путём численного решения задачи одномерной минимизации.

- **Метод Ньютона (вторых производных)**

$$f(X) \cong f(X_0) + \nabla^T f(X_0)(X - X_0) + \frac{1}{2}(X - X_0)^T \nabla^2 f(X_0)(X - X_0),$$

где  $\nabla^T f(X_0)$  – матрица Гёссе, составленная из частных производных второго порядка.

$$\Delta X_k = -\frac{\nabla f(X_k)}{\nabla^2 f(X_k)} \Rightarrow X_{k+1} = X_k - \frac{\nabla f(X_k)}{\nabla^2 f(X_k)}.$$

- **Метод сопряжённого градиента (Флетчера - Ривса)**

***Понятие о сопряжённых направлениях***

Система линейно-независимых направлений поиска  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$  называется ***сопряжённой*** по отношению к некоторой положительно определённой матрице  $Q$  если

$$S_i^T Q S_j = 0; \quad i \neq j; \quad i = 1, \overline{n-1}, \quad j = 1, \overline{n-1}.$$

$$S_n = -\nabla f(x_n)$$

Сопряжённое направление

$$S_{n+1} = -\nabla f(x_{n+1}) + \omega_{n+1} S_n$$

где  $\omega_{n+1}$  — весовой коэффициент сопряжения.

$$\omega_{n+1} = \frac{\nabla^T f(x_{n+1}) \cdot \nabla f(x_{n+1})}{\nabla^T f(x_n) \cdot \nabla f(x_n)} = \frac{\|\nabla f(x_{n+1})\|^2}{\|\nabla f(x_n)\|^2}. \quad (2.71)$$

- **Методы поиска переменной метрики (квазиНьютоновские)**

Алгоритм движения точки

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n D_n \nabla f(x_n)$$

где  $D_n$  - аппроксимирующая матрица,  $\lambda_n$  - стабилизирующий множитель.

Аппроксимирующая матрица  $D_n$  строят по правилу:

$$H^{-1}(x_n) \approx D_{n+1} = \omega(D_n + \Delta D_n)$$

$\omega$  - нормирующий множитель.

$$\Delta D_n = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{Y^T}{Y} - \frac{D_n \Delta g_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{Z^T}{Z}$$

В алгоритме, предложенном **Бройденом**, положено:  $\omega = 1$ ,  $Y = Z = \Delta x_n - D_n \Delta g_n$ .

В алгоритме **Давидона-Флетчера-Пауэлла** аналогичные:  $\omega = 1$ ,  $Y = \Delta x_n$ ,  $Z = D_n \Delta g_n$ .

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta x_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{\Delta x_n^T}{\Delta x} - \frac{D_n \Delta g_n}{\Delta g_n^T} \cdot \frac{(D_n \Delta g_n)^T}{D_n \Delta g_n} = D_n + A_n - B_n$$

## МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

**Определение.** Вектор с ненулевыми компонентами (ненулевой)  $S$  называется *возможным направлением* спуска в точке  $X \in \mathcal{X}$ , если существует  $\delta > 0$ , такое, что  $X + \lambda S \in \mathcal{X}$  для всех  $\lambda \in (0, \delta)$  и  $f(X + \lambda S) < f(X)$ .

- Методы Зойтендейка
- **Случай линейных ограничений**

$$\min f(X)$$

$$\begin{cases} AX \leq b, \\ HX = h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 X = b_1, \\ A_2 X < b_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^T = \begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T \end{bmatrix}, \\ b^T = \begin{bmatrix} b_1^T & b_2^T \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Условия:

$$\begin{cases} A_1 S \leq 0, \\ HS = 0, \end{cases}$$

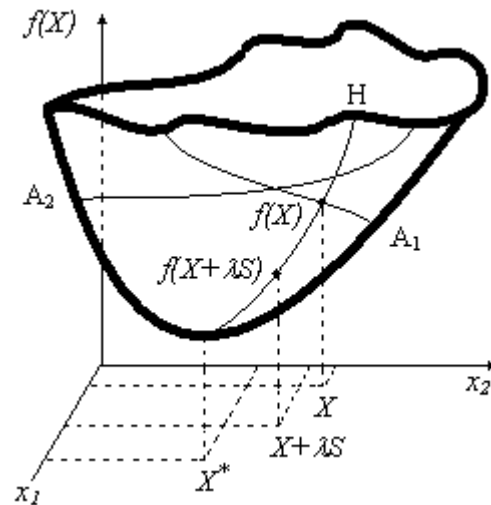


Рисунок 5 – К пояснению выбора направления

Требования нормировки:

- на величину элементов  $-1 \leq s_i \leq 1, j = 1, \bar{n}$ ;
- на модуль вектора возможного направления  $S \quad S^T S \leq 1, \|S\|^2 \leq 1$ , это ограничения объединяет условия  $-1 \leq s_j \leq 1, j = 1, \bar{n}$  и  $\sum_{j=1}^n s_i \leq 1, \sum_{j=1}^n s_i \geq -1$ ;
- на величину целевой функции ЗЛП  $\nabla^T f(X)S \geq -1$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \min \nabla^T f(X)S & \min \nabla^T f(X)S & \min \nabla^T f(X)S \\
 \left\{ \begin{array}{l} A_1 S \leq 0, \\ HS = 0, \\ s_j \leq 1, \\ s_j \geq -1, \quad j = 1, m. \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} A_1 S \leq 0, \\ HS = 0, \\ S^T S \leq 1. \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} A_1 S \leq 0, \\ HS = 0, \\ \nabla^T f(X)S \geq -1. \end{array} \right. \\
 1) & 2) & 3)
 \end{array} \quad (2.85)$$

- **Случай нелинейных ограничений**

Рассмотрим задачу НП-программирования вида

$$\begin{aligned} & \min f(X); \\ & \begin{cases} g_i(X) \leq 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \overline{n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть текущая точка  $X$  является допустимой точкой, а  $I = \{i : g_i(X) = 0\}$  — множество ограничений, активных в этой точке. Если

$$\begin{cases} \nabla^T f(X)S < 0, \\ \nabla^T g_i(X)S < 0, \quad i \in I, \end{cases}$$

то  $S$  — вектор возможного направления спуска в этой точке.

1. Найти множество активных ограничений задачи в текущей точке  $I = \{i : g_i(X) = 0\}$  и решить ЗЛП вида

$$\begin{array}{ll} \min z & \min z \\ \begin{cases} \nabla^T f(X)S - z \leq 0, \\ \nabla^T g_i(X)S - z \leq 0, \quad i \in I = \{i : g_i(X) = 0\}. \end{cases} & \text{улучшенный} \quad \begin{cases} \nabla^T f(X)S - z \leq 0, \\ \nabla^T g_i(X)S - z \leq -g_i(X), \quad i = 1, m. \end{cases} \end{array}$$

при любом, оговоренном выше, условии нормировки компонентов вектора возможного направления  $S$ .



- Метод проекции градиента Розена

$$\min f(X)$$

$$\begin{cases} AX \leq b, \\ HX = h, \end{cases}$$

Направление спуска

$$S = -P \times \nabla f(X),$$

где  $P$  – матрица проецирования

$$P = I - M^T \times (M \times M^T)^{-1} \times M,$$

где  $I$  – единичная матрица,  $M^T = [A_I^T H^T]$  – невырождена.

## МЕТОДЫ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} &\min f(X); \\ &\begin{cases} h_i(X) = 0, & i = 1, \bar{m}; \\ g_i(X) \geq 0, & i = m+1, \bar{l}. \end{cases} \end{aligned}$$

Можно построить следующую функцию без ограничений:

$$P(X, \rho) = f(X) + \sum_{i=1}^m \rho_i H[h_i(X)] + \sum_{i=m+1}^l \rho_i G[g_i(X)]$$

## СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ

Функционал  $H[h_i(X)]$  должен сделать невыгодным любое отклонение аргумента  $X$  от поверхности  $h_i(X) = 0$ , то есть

$$\lim_{h_i(X) \rightarrow 0} H[h_i(X)] = 0, \quad i = 1, \bar{m}.$$

Поэтому в качестве функционала выбирают чётную степенную функцию

$$H[y] = y^p, \quad p = 2, 4, \dots \text{ либо } H[y] = |y|^p, \quad p = 1, 3, \dots$$

Функционал  $G[g_i(X)]$  зависит от местоположения текущей точки в процессе решения.

- **Метод внутренней точки:**

$$\lim_{g_i(X) \rightarrow 0^+} G[g_i(X)] = \infty, \quad i = m+1, \bar{l} \text{ для } g_i(X) > 0.$$

- **Метод внешней точки:**

$$\lim_{g_i(X) \rightarrow 0^-} G[g_i(X)] = 0, \quad i = m+1, \bar{l} \text{ для } g_i(X) < 0.$$

- **Комбинированный метод:**

$$G[g_i(X)] > 0 \text{ для } g_i(X) < 0, \quad i = m+1, \bar{l}.$$

$$G[g_i(X)] = 0 \text{ для } g_i(X) = 0, \quad i = m+1, \bar{l}.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \rho_{i,k} H[h_i(X_k)] = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^l \rho_{i,k} G[g_i(X_k)] = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |P(X_k, \rho_k) - f(X_k)| = 0,$$

где  $k$  – номер итерации.

- **Метод барьерных поверхностей (МБП)**

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} g_i(X) \geq 0, & i = 1, \overline{m}; \\ x_j \geq 0, & j = 1, \overline{n}. \end{cases}$$

$$P(X, r, \Omega) = f(X) + r \cdot \sum_{i=1}^m \omega_i G[g_i(X)]$$

$$G[Y] = 1/Y, G[Y] = -\ln[Y]$$

- **Метод внешней точки**

$$\min f(X);$$

$$\begin{cases} h_i(X) = 0, & i = 1, \overline{m}; \\ g_i(X) \geq 0, & i = m+1, \overline{l}. \end{cases}$$

$$P(X, r) = f(X) + rL(X),$$

где  $r$  — коэффициент штрафа, а штраф

$$L(X) = \sum_{i=1}^m H[h_i(X)] + \sum_{i=m+1}^l G[g_i(X)]$$

Используются функционалы:

$$G[Y] = [\max \{0; -Y\}]^P, P > 0, \text{ целое.}$$

$$H[Y] = |Y|^P, P > 0, \text{ целое.}$$