Практическое занятие 3. Таблицы истинности и логические формулы

Способы вычисления истинностных значений основных логических функций можно записать таблицами истинности:

A	**B**	**¬A**	**A & B**	**A V B**	**A → B**	**A ↔ B**
Л	Л	И	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И	И	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	И

Пример

Составим таблицу истинности для формулы $\bar{A}\& B \vee \overline{A \vee B} \vee A$, которая содержит две переменные *A* и *B*. В первых двух столбцах таблицы запишем четыре возможных пары значений этих переменных, в последующих столбцах — значения промежуточных формул и в последнем столбце — значение формулы. В результате получим таблицу:

Переменные		Промежуточные логические формулы					Формула
A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}\& B$	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}\& B \vee \overline{A \vee B}$	$\bar{A}\& B \vee \overline{A \vee B} \vee A$
Л	Л	И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
И	И	Л	Л	И	Л	Л	И

Из таблицы видно, что при всех наборах значений переменных *A* и *B* формула $\bar{A}\& B \vee \overline{A \vee B} \vee A$ принимает значение И, то есть является **тождественно истинной**.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить **логической формулой**.

В алгебре логики выполняются основные законы, позволяющие производить тождественные преобразования логических выражений.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$A \vee B = B \vee A$	$A \,\&\, B = B \,\&\, A$
Сочетательный	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$
Распределительный	$A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$	$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
Правила де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$	$\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
Идемпотенции	$A \vee A = A$	$A \,\&\, A = A$
Поглощения	$A \vee (A \,\&\, B) = A$	$A \,\&\, (A \vee B) = A$
Склеивания	$(A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, B) = B$	$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B) = B$
Операция переменной с ее инверсией	$A \vee \overline{A} = И$	$A \,\&\, \overline{A} = Л$
Операция с константами	$A \vee Л = A;\ A \vee И = И$	$A \,\&\, Л = Л;\ A \,\&\, И = A$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	

Равносильные преобразования логических формул имеют то же назначение, что и преобразования формул в обычной алгебре. Они служат для упрощения формул или приведения их к определённому виду путем использования основных законов алгебры логики.

Под упрощением формулы, не содержащей операций импликации и эквиваленции, понимают **равносильное преобразование**, приводящее к формуле, которая либо содержит по сравнению с исходной меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции и не содержит отрицаний неэлементарных формул, либо содержит меньшее число вхождений переменных.

Некоторые преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.).

При упрощении логических формул применяются некоторые приемы и способы:

1) $\overline{A \vee B} \& (A \& \overline{B}) = \overline{A} \& \overline{B} \& (A \& \overline{B}) = \overline{A} \& A \& \overline{B} \& \overline{B} = Л \& \overline{B} \& \overline{B} = Л \& \overline{B} = Л$

(законы алгебры логики применяются в следующей последовательности: правило де Моргана, сочетательный закон, правило операций переменной с её инверсией и правило операций с константами);

2) $\overline{A} \& B \vee \overline{A \vee B} \vee A = \overline{A} \& B \vee \overline{A} \& \overline{B} \vee A = \overline{A} \& (B \vee \overline{B}) \vee A = \overline{A} \vee A = И$

(применяется правило де Моргана, выносится за скобки общий множитель, используется правило операций переменной с её инверсией);

3) $(A \vee B) \& (\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B}) = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B}) = B \& \overline{A}$

(повторяется второй сомножитель, что разрешено законом идемпотенции; затем комбинируются два первых и два последних сомножителя и используется закон склеивания);

4)

$$A \& \overline{B} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& C = A \& \overline{B} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& C \& (B \vee \overline{B}) =$$
$$= A \& \overline{B} \vee \overline{A} \& B \& C \vee A \& B \& C \vee A \& \overline{B} \& C = (A \& \overline{B} \vee A \& \overline{B} \& C) \vee (\overline{A} \& B \& C \vee A \& B \& C) =$$
$$= A \& \overline{B} \vee B \& C$$

(вводится вспомогательный логический сомножитель $(B \vee \overline{B})$; затем комбинируются два крайних и два средних логических слагаемых и используется закон поглощения);

Задачи для самостоятельного решения

1. Подставьте в приведённые ниже высказывательные формы вместо логических переменных a, b, c, d такие высказывания, чтобы полученные таким образом составные высказывания имели смысл в повседневной жизни:
    1. если (a или (b и c)), то d;
    2. если (не a и не b), то (c или d);
    3. (a или b) тогда и только тогда, когда (c и не d).
2. Формализуйте предостережение, которое одна жительница древних Афин сделала своему сыну, собиравшемуся заняться политической деятельностью: "*Если ты будешь говорить правду, то тебя возненавидят люди. Если ты будешь лгать, то тебя возненавидят боги. Но ты должен говорить правду или лгать. Значит, тебя возненавидят люди или возненавидят боги*".

    Формализуйте также ответ сына: "*Если я буду говорить правду, то боги будут любить меня. Если я буду лгать, то люди будут любить меня. Но я* *должен говорить правду или лгать. Значит, меня будут любить боги или меня будут любить люди*".

3. Определите с помощью таблиц истинности, какие из следующих формул являются тождественно истинными или тождественно ложными:
    1. $\overline{\overline{A} \,\&\, A} \vee B \,\&\, (A \,\&\, B \vee B)$
    2. $A \,\&\, (B \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B}))$
    3. $((A \vee \overline{B}) \to B) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$
    4. $\overline{(\overline{A} \vee B) \,\&\, (\overline{B} \vee C)} \vee \overline{A} \vee C$
    5. $\overline{A \,\&\, B} \leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B})$
    6. $\overline{(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})}$
    7. $A \,\&\, B \,\&\, (C \vee \overline{E} \vee D) \,\&\, \overline{B}$
4. Упростите следующие формулы, используя законы склеивания:
    1. $A \,\&\, B \,\&\, C \vee \overline{A} \,\&\, B \,\&\, C$
    2. $A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, \overline{B \,\&\, C}$
    3. $(A \vee B \vee C) \,\&\, (A \vee \overline{B} \vee C)$
    4. $(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}) \,\&\, (\overline{A} \vee B \vee C)$
5. Упростите следующие формулы, используя законы поглощения:
    1. $A \vee A \,\&\, B \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, D \,\&\, F$
    2. $A \,\&\, B \vee A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, D$
    3. $A \,\&\, (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
    4. $A \,\&\, B \,\&\, (A \,\&\, C \vee A \,\&\, B)$
6. Постройте таблицы истинности для логических формул и упростите формулы, используя законы алгебры логики:
    1. $A \,\&\, \overline{C} \vee C \,\&\, (B \vee \overline{C}) \vee (A \vee \overline{B}) \,\&\, C$
    2. $\overline{A \,\&\, (B \vee \overline{C}) \vee \overline{A} \,\&\, B}$
    3. $(\overline{A} \vee C) \,\&\, \overline{A \,\&\, C} \,\&\, (B \vee \overline{C}) \,\&\, \overline{B \,\&\, C}$
    4. $A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, \overline{B} \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} \,\&\, D$
    5. $A \vee B \vee \overline{B} \,\&\, C \,\&\, D \vee \overline{B} \,\&\, \overline{C} \,\&\, \overline{D} \vee \overline{B} \,\&\, \overline{C} \,\&\, D$
    6. $A \vee D \vee \overline{A} \,\&\, B \,\&\, C \vee \overline{A} \,\&\, \overline{B} \,\&\, C \vee \overline{A} \,\&\, \overline{B} \,\&\, \overline{C}$
    7. $\overline{A \vee B \vee C} \vee \overline{B} \vee (\overline{A \vee \overline{B} \vee C} \,\&\, \overline{\overline{A} \vee B \vee C}) \vee \overline{A} \,\&\, \overline{B}$
    8. $A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} \vee A \,\&\, \overline{B} \,\&\, C \,\&\, D \vee A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, \overline{D} \vee A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D$
    9. $A \,\&\, D \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{C} \,\&\, B \vee D) \vee A \,\&\, \overline{C} \vee \overline{A} \,\&\, B \,\&\, \overline{C}$