1 RESULTADOS

Se tuvieron las siguientes observaciones como parte del armado del sistema experimental:

- La longitud de la cuerda (sin tensarla) era de $(331.5 \pm 0.05)cm$
- La masa de la cuerda era de $(3.6 \pm 0.05)g$
- La densidad de masa de la cuerda resultó entonces de (véase apéndice)

$$\mu = (0.0108 \pm 0.0001)\,\frac{g}{cm} = (0.00108 \pm 0.00001)\frac{kg}{m}$$

- La longitud de la cuerda tensada (desde el generador de ondas hasta el punto de unión con la polea) fue de $(267 \pm 0.05)cm$

Luego, para obtener la medición de la longitud de la onda estacionaria producida por el generador, con dos valores de masa distintos pero con el mismo armónico ($n = 4$), se obtuvieron los siguientes resultados

Table 1: Resultados obtenidos de las mediciones.

Dato Experimental	Experimento 1	Experimento 2
Masa del portapesas	$0.005kg$	$0.005kg$
Masa agregada m	$0.150kg$	$0.200kg$
Masa total M	$0.155kg$	$0.205kg$
Tensión en la cuerda T	$1.52055Nw$	$2.0110Nw$
Valor de la frecuencia f	$(29 \pm 0.05)Hz$	$(33.7 \pm 0.05)Hz$
Longitud de onda λ	$(134 \pm 0.05)cm$	$(131 \pm 0.05)cm$

Para los cálculos de la velocidad con las fórmulas (1) y (2) de la práctica, los resultados fueron los siguientes

Table 2: Cálculo de la velocidad de onda.

Experi-mento	λ (cm) $\pm 0.05cm$	f (Hz) $\pm 0.05Hz$	$v_a = \lambda \cdot f$ $(\frac{cm}{s})$	T (Nw)	$\mu(\frac{kg}{m})$ $\pm 0.00001\frac{kg}{m}$	$v_b = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $(\frac{cm}{s})$	Diferencia $\lvert v_a - v_b\rvert(\frac{cm}{s})$
1	134	29	3886 ± 8.15	1.52055	0.00108	3741.889 ± 26.26753	144.111
2	131	33.7	4414.7 ± 8.235	2.0110	0.00108	4303.303 ± 34.74093	111.397

Luego, para una masa fija de $155g$, se obtuvo que la frecuencia del armónico fundamental ($n = 1$) era de

$$f_1 = (7 \pm 0.05)Hz$$

Tomando este valor como *teórico* (sin la incertidumbre) y empleando la fórmula ($f_n = nf_1$ no sé que #), los resultados fueron los siguientes

Table 3: Frecuencia en los modos de oscilación.

Armónico n	f teórica en Hz	f observada en Hz $\pm 0.05Hz$	Error relativo
2	14	15	7.1428%
3	21	22	4.7619%
4	28	29	3.5714%

Para la siguiente parte del experimento, se optó por dejar una frecuencia fija de $f = (22 \pm 0.05)Hz$, y haciendo variar la masa del portapesas para obtener distintos armónicos, los resultados para la tensión en la cuerda son los siguientes

Luego, se realizaron las gráficas de T vs. n y T vs. $1/n^2$, donde n representa el número de armónico. Tales gráficas se muestran a continuación.

Table 4: Tensión en la cuerda para distintas masas con misma frecuencia.

Armónico n	Masa m (kg)	Tensión T (Nw)
3	0.155	1.52055
4	0.105	1.03005
5	0.055	0.53955
6	0.025	0.24525

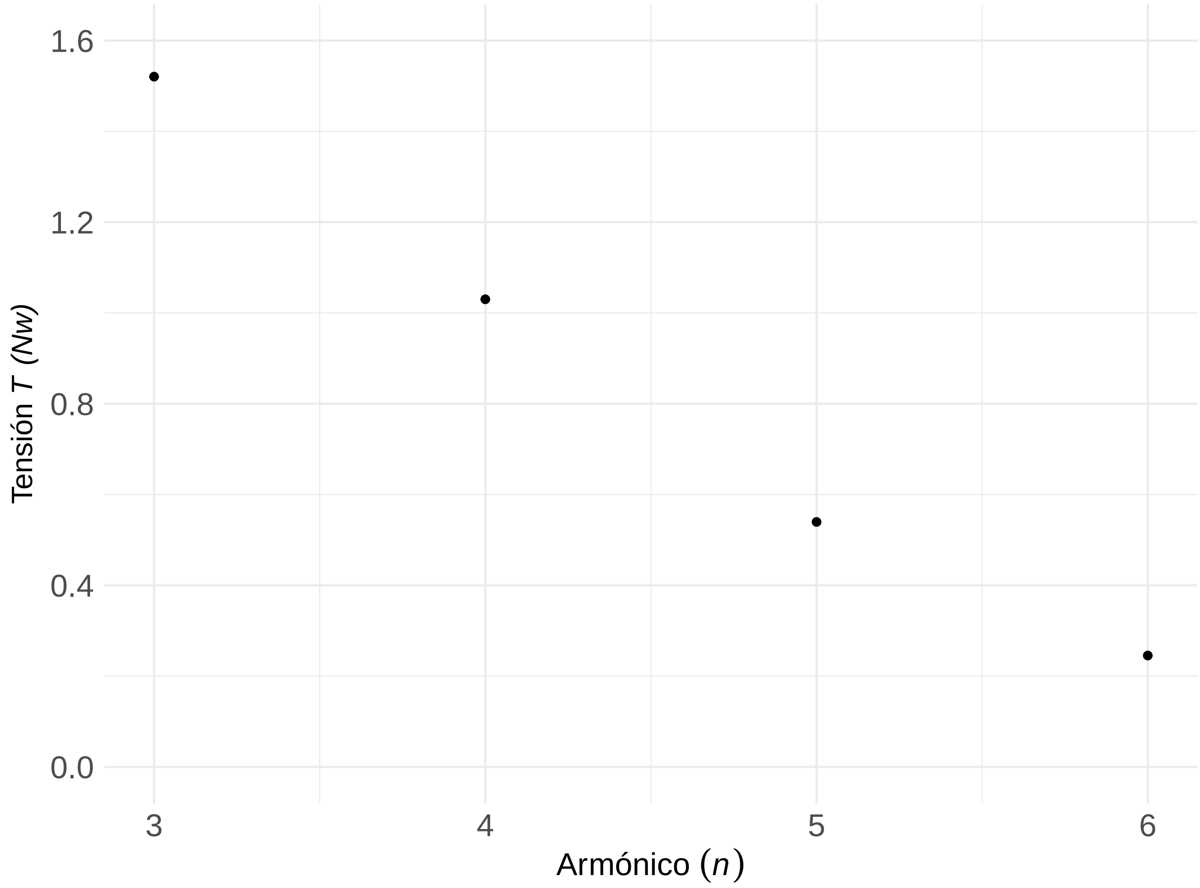

Figure 1: T vs. n.

A partir de esta última relación, se obtuvo la estimación de la recta por mínimos cuadrados que se aproximara a estas observaciones, resultando que

$$T = [(14.90009 \pm 2.29002)Nw]\left(\frac{1}{n^2}\right) - (0.06533 \pm 0.15625)Nw$$

La gráfica entonces queda de la siguiente forma

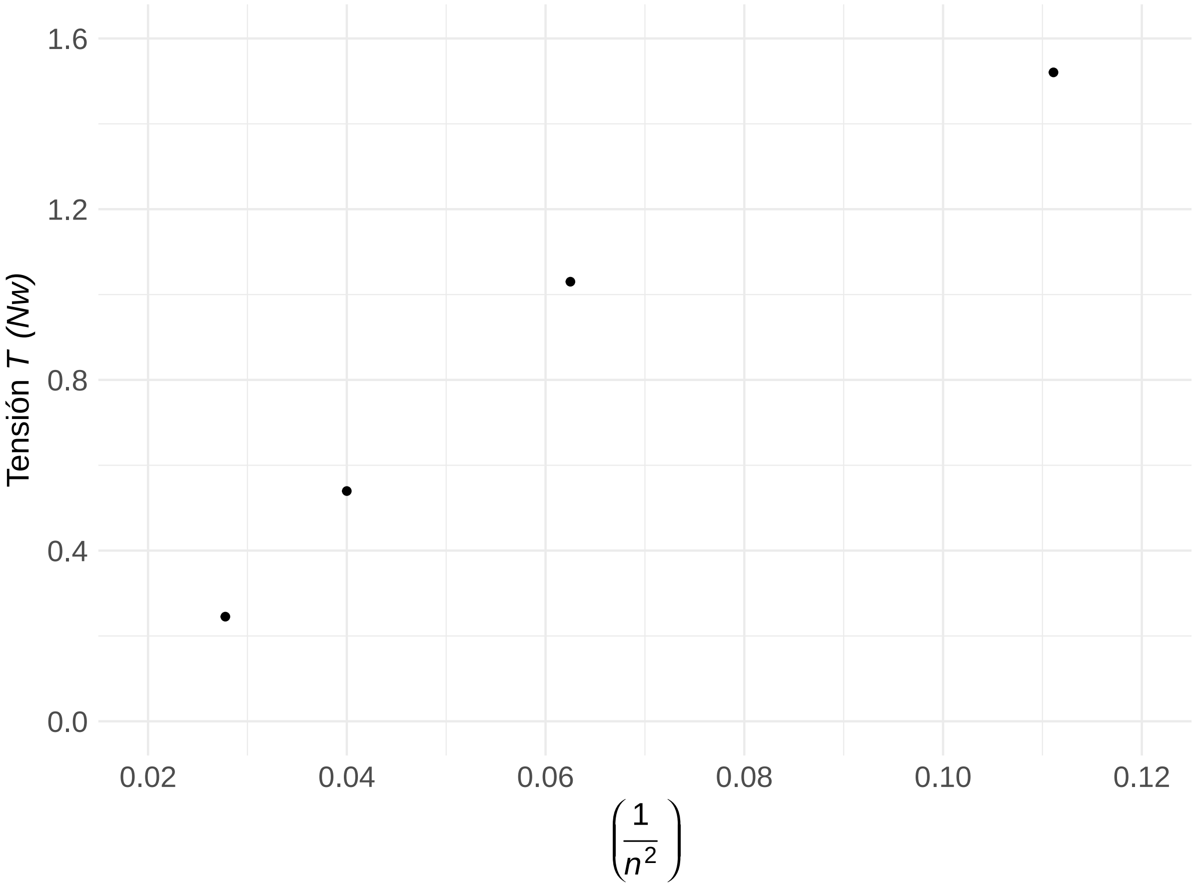

Figure 2: T vs. $\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Luego, a partir del valor de la estimación de la pendiente, así como de la fórmula

$$T = \left(4\mu f^2 L^2\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

se puede hacer una estimación para la densidad de masa lineal de la cuerda empleada. Haciendo la estimación de μ a partir de esto (véase el apéndice para los cálculos), se obtuvo que

$$\mu = (0.00107 \pm 0.0001)\frac{kg}{m}$$

Comparando este valor con el obtenido al inicio de los resultados, se tiene tan solo una diferencia de

$$|0.00108 - 0.00107|\frac{kg}{m} = 0.00001\frac{kg}{m}$$

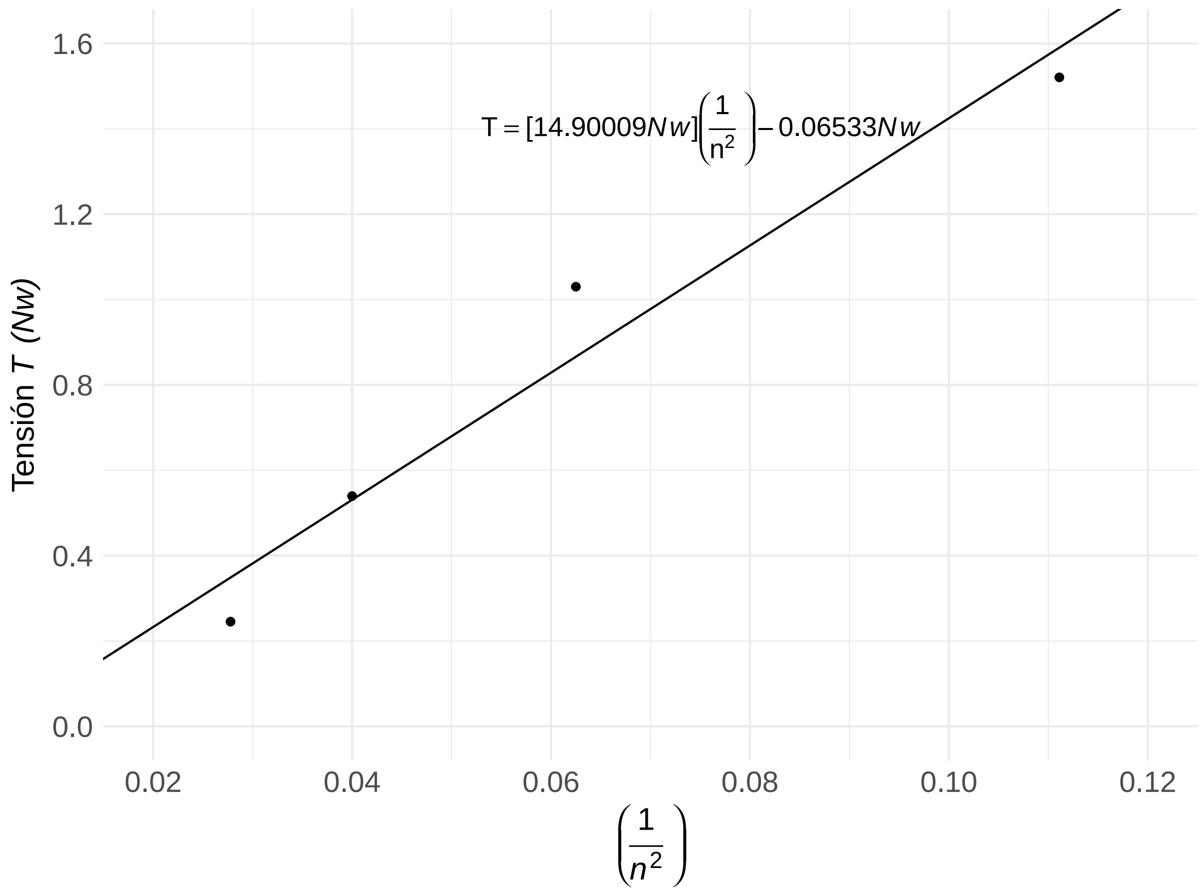

Figure 3: Estimación por mínimos cuadrados.

2 APÉNDICE.

2.1 — Propagación de la Incertidumbre —

La propagación de la incertidumbre para la suma, el producto y un cociente están dadas (respectivamente) por

$$(x \pm \delta x) \pm (y \pm \delta y) = (x \pm y) \pm (\delta x + \delta y)$$

$$(x \pm \delta x)(y \pm \delta y) = x \cdot y \pm (|y|\delta x + |x|\delta y)$$

$$\frac{x \pm \delta x}{y \pm \delta y} = \frac{x}{y} \pm \left(\frac{\delta x}{|y|} + |x| \frac{\delta y}{|y|^2} \right)$$

2.2 — Incertidumbre en $\sqrt{\cdot}$ —

Consúltese [] para la deducción de la ecuación (1). Si f es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ en la cual se le pueden medir sus variables (cada una asociada con su respectiva incertidumbre)

$$f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n)$$

entonces (si la función es derivable) la propagación de la incertidumbre está dada por

$$\Delta f = \pm \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \cdot \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right| \right) \tag{1}$$

Para el caso de la función $\sqrt{\cdot}$, se tiene que

$$\sqrt{x \pm \Delta x} = \sqrt{x} \pm \left(\Delta x \cdot \left| \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx} \right| \right) =$$

$$= \sqrt{x} \pm \left(\Delta x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

Por lo que

$$\sqrt{x \pm \Delta x} = \sqrt{x} \pm \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \tag{2}$$

2.3 — Densidad de Masa Lineal μ —

Para el cálculo de la densidad de masa lineal, se tiene

$$\frac{(3.6 \pm 0.05)g}{(331.5 \pm 0.05)cm} = \left[\frac{3.6}{331.5} \pm \left(\frac{0.05}{331.5} + 3.6 \cdot \frac{0.05}{331.5^2} \right) \right] \frac{g}{cm} =$$

$$= (0.0108 \pm 0.0001)\, \frac{g}{cm} =$$

$$= \left[(0.0108 \pm 0.0001)\, \frac{g}{cm} \right] \cdot \left(\frac{1kg}{1000g} \right) \cdot \left(\frac{100cm}{1m} \right) =$$

$$= (0.00108 \pm 0.00001) \frac{kg}{m}$$

2.4 — Cálculo de la Tensión y Velocida —

Para el cálculo de la tensión en la cuerda a partir de la masa agregada en el portapesas, del diagrama de cuerpo libre (ver figura no sé), se tiene que

$$T - w = 0 \Longrightarrow T = w = m \cdot g$$

Para el primer sistema, la masa total fue de $155g = 0.155kg$. Por ende, la tensión en la cuerda era de

$$T_1 = (0.155kg) \cdot \left(9.81 \frac{m}{s^2} \right) = 1.5205 Nw$$

Con este valor, y con los datos experimentales obtenidos, se obtuvo lo siguiente

$$\begin{aligned} v_a = \lambda \cdot f &= [(134 \pm 0.05)cm] \cdot [(29 \pm 0.05)Hz] = \\ &= [(134 \cdot 29) \pm (134 \cdot 0.05 + 29 \cdot 0.05)] \left(\frac{cm}{s} \right) = \\ &= (3886 \pm 8.15) \frac{cm}{s} \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\frac{T_1}{\mu} = \frac{1.52055Nw}{(0.00108 \pm 0.00001)\dfrac{kg}{m}} =$$

$$= \left[\frac{1.52055}{0.00108} \pm \left(1.52055 \cdot \frac{0.00001}{0.00108^2}\right)\right] \left(\frac{\dfrac{kg \cdot m}{s^2}}{\dfrac{kg}{m}}\right) =$$

$$= (1400.173 \pm 19.65804)\frac{m^2}{s^2}$$

Haciendo uso de (2), resulta que

$$v_b = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{(1400.173 \pm 19.65804)\frac{m^2}{s^2}}$$

$$= \left(\sqrt{1400.173} \pm \frac{19.65804}{2 \cdot \sqrt{1400.173}}\right)\frac{m}{s} =$$

$$= (37.41889 \pm 0.26267)\frac{m}{s} =$$

$$= (3741.889 \pm 26.26753)\frac{cm}{s}$$

Así pues

$$v_a = (3886 \pm 8.15)\frac{cm}{s} \qquad\qquad v_b = (3741.889 \pm 26.26753)\frac{cm}{s}$$

$$\therefore |v_a - v_b| = |3886 - 3741.889|\frac{cm}{s} = 144.111\frac{cm}{s}$$

Similarmente, para el segundo sistema, la masa total fue de $205g = 0.205kg$, por lo que la tensión de la cuerda resulta de

$$T_2 = (0.205kg) \cdot \left(9.81\frac{m}{s^2}\right) = 2.01105Nw$$

y con los datos experimentales, se tiene que

$$\begin{aligned} v_a = \lambda \cdot f &= [(131 \pm 0.05)cm] \cdot [(33.7 \pm 0.05)Hz] = \\ &= [(131 \cdot 33.7) \pm (131 \cdot 0.05 + 33.7 \cdot 0.05)]\left(\frac{cm}{s}\right) = \\ &= (4414.7 \pm 8.235)\frac{cm}{s} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{T_2}{\mu} = \frac{2.01105Nw}{(0.00108 \pm 0.00001)\dfrac{kg}{m}} =$$

$$= \left[\frac{2.01105}{0.00108} \pm \left(2.01105 \cdot \frac{0.00001}{0.00108^2}\right)\right] \left(\frac{\dfrac{kg \cdot m}{s^2}}{\dfrac{kg}{m}}\right) =$$

$$= (1851.842 \pm 25.99934)\frac{m^2}{s^2}$$

Nuevamente haciendo uso de (2), se obtiene que

$$v_b = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{(1851.842 \pm 25.99934)\frac{m^2}{s^2}}$$

$$= \left(\sqrt{1851.842} \pm \frac{25.99934}{2 \cdot \sqrt{1851.842}}\right) \frac{m}{s} =$$

$$= (43.03303 \pm 0.34740)\frac{m}{s} =$$

$$= (4303.303 \pm 34.74093)\frac{cm}{s}$$

Entonces

$$v_a = (4414.7 \pm 8.235)\frac{cm}{s} \qquad v_b = (4303.303 \pm 34.74093)\frac{cm}{s}$$

$$\therefore |v_a - v_b| = |4414.7 - 4303.303| \frac{cm}{s} = 111.397\frac{cm}{s}$$

2.5 — Nueva Estimación para μ —

A partir de la relación

$$T = \left(4\mu f^2 L^2\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

se puede decir que

$$\mu = \frac{Tn^2}{4f^2L^2}$$

Luego, de la estimación para la recta por mínimos cuadrados (calculada con el software R), se obtuvo

$$T = [(14.90009 \pm 2.29002)Nw]\left(\frac{1}{n^2}\right) - (0.06533 \pm 0.15625)Nw$$

El valor de la pendiente $a = (14.90009 \pm 2.29002)Nw$ representa el valor de Tn^2, puesto que

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T}{\dfrac{1}{n^2}} = Tn^2$$

y además, de los datos experimentales se tiene que

$f = (22 \pm 0.05)Hz \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f^2 &= (22 \pm 0.05) \cdot (22 \pm 0.05)Hz^2 \\ &= (22^2 \pm 2 \cdot 22 \cdot 0.05)\frac{1}{s^2} = (484 \pm 2.2)\frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$L = (2.67 \pm 0.0005)m \Longrightarrow L^2 = (2.67 \pm 0.0005) \cdot (2.67 \pm 0.0005)m^2 =$
$= (2.67^2 \pm 2 \cdot 2.67 \cdot 0.0005)m^2 = (7.1289 \pm 0.00267)m^2$

Entonces

$$\begin{aligned} 4f^2L^2 &= 4\left[(484 \pm 2.2)\frac{1}{s^2}\right]\left[(7.1289 \pm 0.00267)m^2\right] \\ &= (1936 \pm 8.8)(7.1289 \pm 0.00267)\frac{m^2}{s^2} \\ &= [1936 \cdot 7.1289 \pm (1936 \cdot 0.00267 + 8.8 \cdot 7.1289)]\frac{m^2}{s^2} \\ &= (13801.55 \pm 67.90344)\frac{m^2}{s^2} \end{aligned}$$

Y así

$$\mu = \frac{Tn^2}{4f^2L^2} = \frac{(14.90009 \pm 2.29002)}{(13801.55 \pm 67.90344)}\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}}$$

$$= \left[\frac{14.90009}{13801.55} \pm \left(\frac{2.29002}{13801.55} + 14.90009 \cdot \frac{67.90344}{13801.55^2}\right)\right]\frac{kg}{m}$$

$$= (0.00107 \pm 0.0001)\frac{kg}{m}$$