Universidad de San Carlos de Guatemala
Laboratorio de Reducción de Datos
Catedrático: Jorge Alejandro Rodríguez

Alumno: Mario Armando Urbina Silva
Carné: 201906054

Tarea 01

Problema 01.

Utilizando la ecuación (1), sean u y v cantidades medidas, y A y B constantes: Demuestre:

- Sea $x = Au$, entonces $\Delta x = B\Delta u$:

Dado que $x := f(u)$, entonces se tiene que

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[A \cdot u] \Longrightarrow x_u = A \cdot \frac{\partial u}{\partial u} \longrightarrow x_u = A$$

Por tanto, de la ecuación (1):

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial u_i}\Delta u_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial x}{\partial u_i}\Delta u_i\right]$$

$$\Rightarrow \Delta x \leq \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u \rightarrow \Delta x = x_u \Delta u$$

Al sustituir x_u, se tiene que

$$\Delta x = A\Delta u \quad \blacksquare$$

- Sea $x = Au + Bv$, entonces $\Delta x = A\Delta u + B\Delta v$

se tiene que $x := f(u,v)$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} x_u = A \\ x_v = B \end{array}\right\} \quad \Delta x = \sum_i x_\square \Delta \square \qquad \text{con } \square = u \text{ ó } \square = v$$

$$\therefore \Delta x = x_u \Delta u + x_v \Delta v$$

con ello se tiene que Δx está dado por

$$\Delta x = A\Delta u + B\Delta v \quad \blacksquare$$

- Sea $x = uv$, entonces $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$

se tiene que $x := f(u,v)$, por tanto

$$\left.\begin{array}{l} x_u = v \\ x_v = u \end{array}\right\} \quad \Delta x = \sum_i x_\square \Delta \square \qquad \text{con } \square = u, v$$

$$\therefore \Delta x = x_u \Delta u + x_v \Delta v$$

al sustituir las derivadas parciales x_u y x_v se tiene

$$\Delta x = v\Delta u + u\Delta v \longrightarrow (\Delta x = v\Delta u + u\Delta v)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{v\Delta u}{x} + \frac{u\Delta v}{x} \longrightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{v\Delta u}{uv} + \frac{u\Delta v}{uv} \Longrightarrow \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} \quad \blacksquare$$

- Sea $x = \frac{u}{v}$, entonces $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v}$

se tiene que $x := f(u,v)$, Por lo tanto

$$\left.\begin{array}{l} x_u = \frac{1}{v} \\ x_v = -\frac{u}{v^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \therefore \Delta x = x_u \Delta u + x_v \Delta v \\ \rightarrow \Delta x = \frac{\Delta u}{v} - \frac{u \Delta v}{v^2} \end{array}$$

dividiendo la expresión dentro x

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{x}\frac{\Delta u}{v} - \frac{1}{x}\frac{u\Delta v}{v^2} \longrightarrow \frac{\Delta x}{x} = \left(\frac{v}{u}\right)\frac{\Delta u}{v} - \left(\frac{v}{u}\right)\frac{u\Delta v}{v^2}$$

$$\therefore \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v}$$

Problema 2:

Utilizar las ecuaciones (1) y (2) para demostrar que para $x = f(u,v)$ la varianza está dada por:

$$\sigma_x^2 = \sigma_u^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\sigma_{uv}^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

Donde:

$$\sigma_{uv}^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})\right]$$

Dado que $x = f(u,v)$ se tiene que sus derivadas parciales se definen como

$$x_u = f_u(u,v) \qquad x_v = f_v(u,v)$$

Por tanto, se tiene que Δx para una función de dos variables está dada por

$$\Delta x = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v$$

si se tienen varias mediciones de x, se tiene que $\Delta \square_i = (\square_i - \bar{\square})$, por lo tanto, se suman todos los valores $\square_i$ que hallan

$$\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u_i + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v_i\right]$$

elevando al cuadrado ambos términos de la ecuación

$$\left(\sum \Delta x_i\right)^2 = \left(\sum\left[x_u \Delta u_i + x_v \Delta v_i\right]\right)^2$$

$$\sum(\Delta x_i)^2 = \sum(x_u \Delta u_i + x_v \Delta v_i)^2$$

$$\sum(\Delta x_i)^2 = \sum(x_u^2 \Delta u_i^2 + x_v^2 \Delta v_i^2 + 2x_u x_v \Delta u_i \Delta v_i)$$

Por tanto, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{M}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[x_u^2(u_i-\bar{u})^2\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[x_v^2(v_i-\bar{v})^2\right] + 2\sum_{i=1}^{N}\left[x_u x_v(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})\right]$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = x_u^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2 + x_v^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v_i-\bar{v})^2 + 2x_u x_v\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})\right]$$

Aplicando límites a ambos lados de la ecuación

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2\right] = \lim_{N\to\infty}\left[x_u^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u_i-\bar{u})^2 + x_v^2\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v_i-\bar{v})^2 + 2x_u x_v\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})\right]\right]$$

Recordando la de definición de varianza, se tiene que

$$\sigma_x^2 = x_u^2\sigma_u^2 + x_v^2\sigma_v^2 + 2x_u x_v\cdot\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})\right]\right\}$$

y de la definición de σ_{uv}^2 se tiene que

$$\sigma_x^2 = x_u^2\sigma_u^2 + x_v^2\sigma_v^2 + x_u x_v\,\sigma_{uv}^2$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\sigma_u^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\sigma_v^2 + 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\sigma_{uv}^2$$

Problema 3.

Se realiza un experimento de laboratorio para calcular la velocidad media $v = \frac{d}{t}$ de un carito a control remoto desplazándose en línea recta. Los estudiantes realizaron las mediciones de tiempo y distancia correspondientes:

t	6,29	6,37	6,35	6,62	6,23	6,39	6,4	6,29
d	10,06	10,02	10,09	10,05	9,78	9,99	9,69	9,85

Calcular los valores de $\bar{t} \pm s_t$, $\bar{d} \pm s_d$ y $\bar{v} \pm s_v$.

- se procede a determinar los valores promedio de t y d

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \rightarrow \bar{t} = \frac{1}{8}\left[6,29+6,37+6,35+6,62+6,23+6,39+6,4+6,29\right]$$

$$\Rightarrow \bar{t} = 6,36750\ldots \rightarrow \bar{t} \cong 6,37$$

$$\bar{d} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i \rightarrow \bar{d} = \frac{1}{8}\left[10,06+10,02+10,09+10,05+9,78+9,99+9,69+9,85\right]$$

$$\Rightarrow \bar{d} = 9,94125\ldots \rightarrow \bar{d} \cong 9,94$$

1) se determinan las velocidades v_i a partir de la ecuación $v_i = d_i/t_i$

v	~1,60	~1,57	~1,59	~1,52	~1,57	~1,56	~1,51	~1,57

y se procede a determinar la velocidad promedio $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i \rightarrow \bar{v} = \frac{1}{8}\left[1,60+\ldots+1,57\right]$$

$$\Rightarrow \bar{v} = 1,56598\ldots \rightarrow \bar{v} \cong 1,57$$

• Determinando la varianza de d, t y v, donde $N=8$

$$* S_d^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(d_i-\bar{d})^2$$

$$S_d^2 = \frac{1}{7}\left[(10{,}06-9{,}94)^2+\dots+(9{,}85-9{,}94)^2\right]$$

$$S_d^2 = 0{,}022012\dots \longrightarrow S_d^2 \simeq 0{,}02 \rightarrow S_d \simeq 0{,}148\dots \rightarrow S_d \simeq 0{,}2$$

$$* S_t^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i-\bar{t})^2$$

$$S_t^2 = \frac{1}{7}\left[(6{,}29-6{,}37)^2+\dots+(6{,}29-6{,}37)^2\right]$$

$$S_t^2 = 0{,}01379286 \longrightarrow S_t^2 \simeq 0{,}01 \Rightarrow S_t \simeq 0{,}1174\dots \longrightarrow S_t \simeq 0{,}1$$

$$* S_v^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(v_i-\bar{v})^2$$

$$S_v^2 = \frac{1}{7}\left[(1{,}60-1{,}57)^2+\dots+(1{,}57-1{,}57)^2\right]$$

$$S_v^2 = 0{,}0093503 \longrightarrow S_v \cong 0{,}03057 \Longrightarrow S_v \simeq 0{,}03$$

Por tanto, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ t \cong (6{,}37 \pm 0{,}1)\,[s] \\ \bullet\ d \cong 9{,}94 \pm 0{,}2 \end{array}\right\} \quad v \cong 1{,}57 \pm 0{,}03$$

2) Determinando S_v a partir de $S_{v(d,t)} = \sqrt{S_d^2 (v_d)^2 + S_t^2 (v_t)^2 + 2 S_{dt}^2 (v_d)(v_t)}$

$$S_{dt}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[(d_i-\bar{d})(t_i-\bar{t})\right]$$

$$S_{dt}^2 = \frac{1}{7}\left[(10{,}06-9{,}94)(6{,}29-6{,}37)+\dots+(9{,}85-9{,}94)(6{,}29-6{,}37)\right]$$

$$S_{dt}^2 = 0{,}00543214\dots$$

Por definición de v se tiene que v_d y v_t estan dadas por

$$v = \frac{\bar{d}}{\bar{t}} \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial d} = \dfrac{1}{\bar{t}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\bar{d}}{\bar{t}^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} S_{v(d,t)}^2 = \left(\dfrac{\partial v}{\partial d}\right)^2 S_d^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)^2 S_t^2 + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial d}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) S_{dt}^2 \\ S_{v(d,t)}^2 = \left(\dfrac{1}{\bar{t}}\right)^2 S_d^2 + \left(-\dfrac{\bar{d}}{\bar{t}^2}\right)^2 S_t^2 + 2\left(\dfrac{1}{\bar{t}}\right)\left(-\dfrac{\bar{d}}{\bar{t}^2}\right) S_{dt}^2 \end{array}$$

$$\therefore S_{v(d,t)}^2 = \left(\frac{1}{t}\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{d}{t^2}\right)^2 S_t^2 - 2\left(\frac{d}{t^3}\right) S_{dt}^2$$

$$S_{v(d,t)}^2 = 0{,}000953\dots$$

$$S_{v(d,t)} \cong 0{,}030883183\dots \rightarrow S_v \simeq 0{,}03$$

$$v \cong 1{,}57 \pm 0{,}03$$

3) Determinando s_v excluyendo el término s_{dt}^2 de la expresión

$$s^2_{v(d,t)} = \left(\frac{\partial v}{\partial d}\right)^2 s_d^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 s_t^2$$

$$s^2_{v(d,t)} = \left(\frac{1}{t}\right)^2 s_d^2 + \left(-\frac{d}{t^2}\right)^2 s_t^2$$

$$s^2_{v(d,t)} = 0{,}001372117\ldots$$

$$s_{v(d,t)} = 0{,}037042093\ldots \longrightarrow s_{v(d,t)} \simeq 0{,}04$$

$$\therefore \bar{v} \simeq 1{,}57 \pm 0{,}04$$

- El valor de s_{dt} en el cálculo de s_v genera un aumento en el valor de la desviación estándar de la velocidad de manera significativa, con respecto al valor de la desviación estándar sin el valor de s_{dt}.

- En el caso en que $N \to \infty$ se tendría una disminución del valor de la desviación estandar, de manera que $\sigma_x \to 0$.