

ШПАРГАЛКА: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ



ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1 Метод подстановки

Используем, когда легко выразить одну переменную через другую.

Алгоритм:

1. Выразить одну переменную из любого уравнения
2. Подставить полученное выражение в другое уравнение
3. Решить получившееся уравнение с одной переменной
4. Найти вторую переменную
5. Записать ответ: $(x; y)$

Пример:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

1) Из первого: $y = 5 - x$

2) Подставляем во второе: $2x - (5 - x) = 1$

3) Решаем: $2x - 5 + x = 1 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

4) Находим y : $y = 5 - 2 = 3$

Ответ: $(2; 3)$



2 Метод сложения

Используем, когда коэффициенты при одной переменной одинаковы или противоположны

Алгоритм:

1. Уравнять коэффициенты при одной переменной
2. Сложить или вычесть уравнения
3. Решить уравнение с одной переменной
4. Найти вторую переменную
5. Записать ответ

Пример:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Коэффициенты при y : $+2$ и -2 (уже противоположны)

Складываем уравнения: $(3x + 2y) + (x - 2y) = 8 + 0$

$$4x = 8 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Подставляем: } 2 - 2y = 0 \rightarrow y = 1$$

Ответ: $(2; 1)$

3 Метод замены переменных

Используем, когда система содержит сложные выражения

Алгоритм:

1. Ввести новые переменные для сложных выражений
2. Решить полученную систему относительно новых переменных
3. Вернуться к исходным переменным
4. Решить полученные уравнения

Пример:

$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = 5 \\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y-2} = 0 \end{cases}$$

Пусть $a = \frac{1}{x+1}$, $b = \frac{1}{y-2}$

Тогда: $\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ a - b = 0. \end{cases}$

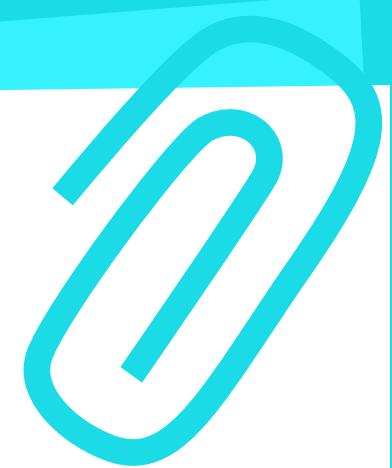
Решаем $\rightarrow a = b = 1$

Возвращаемся: $\frac{1}{x+1} = 1 \Rightarrow x = 0$
 $\frac{1}{y-2} = 1 \Rightarrow y = 3$

Ответ: $(0; 3)$.

4 Графический метод

Используем для наглядности и приближенных решений



Алгоритм:

1. Построить графики обоих уравнений
2. Найти точки пересечения
3. Координаты точек пересечения — решение системы

Пример:

$$\begin{cases} y = x + 1 \text{ (прямая)} \\ y = x^2 - 1 \text{ (парабола)} \end{cases}$$

Строим графики → точки пересечения: (-1; 0) и (2; 3)

Специальные приемы

Прием 1: Почленное сложение/вычитание

Иногда полезно не просто складывать уравнения, а их комбинации

Пример:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

Сложим: $x^2 + 2xy + y^2 = 9 \rightarrow (x + y)^2 = 9$

Вычтем: $x^2 - y^2 = 3 \rightarrow (x - y)(x + y) = 3$

Прием 2: Выделение полных квадратов

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Можно: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 25 + 24 = 49 \rightarrow x + y = \pm 7$

Прием 3: Однородные уравнения

Уравнение однородно, если все слагаемые одной степени

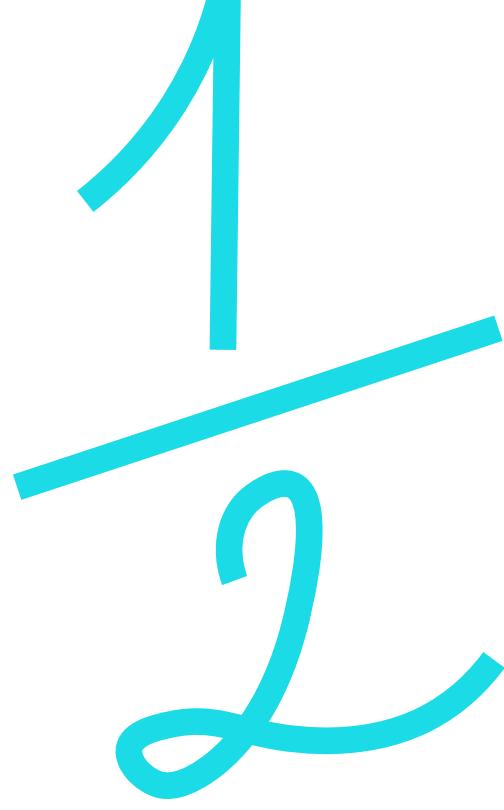
Пример:

$$\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ y^2 - xy = 1 \end{cases}$$

Делим первое на второе: $\frac{(x^2 - xy)}{(y^2 - xy)} = \frac{2}{1}$

$$\frac{x(x - y)}{[y(y - x)]} = 2 \rightarrow \frac{-x}{y} = 2 \rightarrow x = -2y$$

АЛГОРИТМ ВЫБОРА МЕТОДА



Дана система

Линейная? → Да → Метод сложения или подстановки

Нет

Можно легко выразить одну переменную? → Да → Подстановка

Нет

Однородная? → Да → Деление уравнений

Нет

Симметрична? → Да → Замена $x + y = a$, $xy = b$

Нет

Содержит дроби? → Да → Замена переменных

Нет

Графический метод или комбинация методов

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$$1) \begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases} \Rightarrow$$

Решение: квадратное уравнение
 $t^2 - at + b = 0$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b \end{cases} \Rightarrow$$

Замена: $x + y = u, \quad , \quad u^2 - 2v = a, \quad v = b$
 $xy = v$

$$3) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \Rightarrow$$

Замена: $t = \frac{x}{y} \quad t + \frac{1}{t} = a$

ЧЕК-ЛИСТ РЕШЕНИЯ

- Определи тип системы
- Выбери оптимальный метод
- Выполни преобразования аккуратно
- Найди все возможные решения
- Сделай проверку (подставь в исходную систему)
- Запиши ответ в нужной форме