

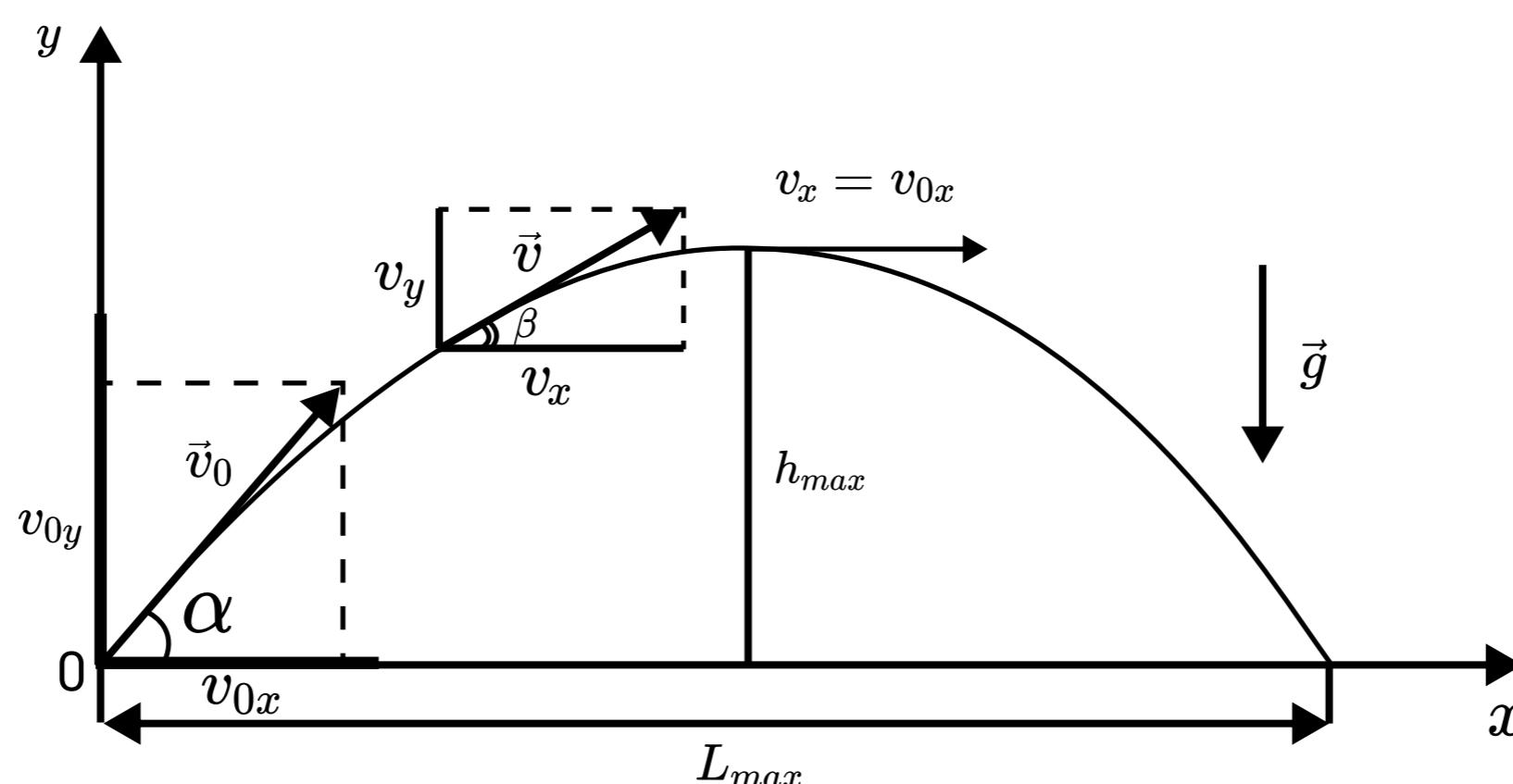
ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно рассматривать как результат сложения двух прямолинейных движений:

- 1) равномерного движения по горизонтали (оси Ox);
- 2) равноускоренного движения по вертикали (оси Oy) с ускорением свободного падения \vec{g} .

Траектория движения — парабола.

Движение по оси Ox - равномерное:	Движение по оси Ox - равномерное:
Ускорение: нет	Ускорение: $gx = -g = \text{const}$
Скорость: $v_x = v_0 \cos\alpha$	Скорость: $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$
Скорость тела в любой момент времени: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	
В верхней точке траектории вектор скорости направлен горизонтально, поэтому:	
$v_x = v_0 \cos\alpha \quad v_y = 0$	
Дальность полёта:	Максимальная высота подъёма:
$L = v_{0x}t = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

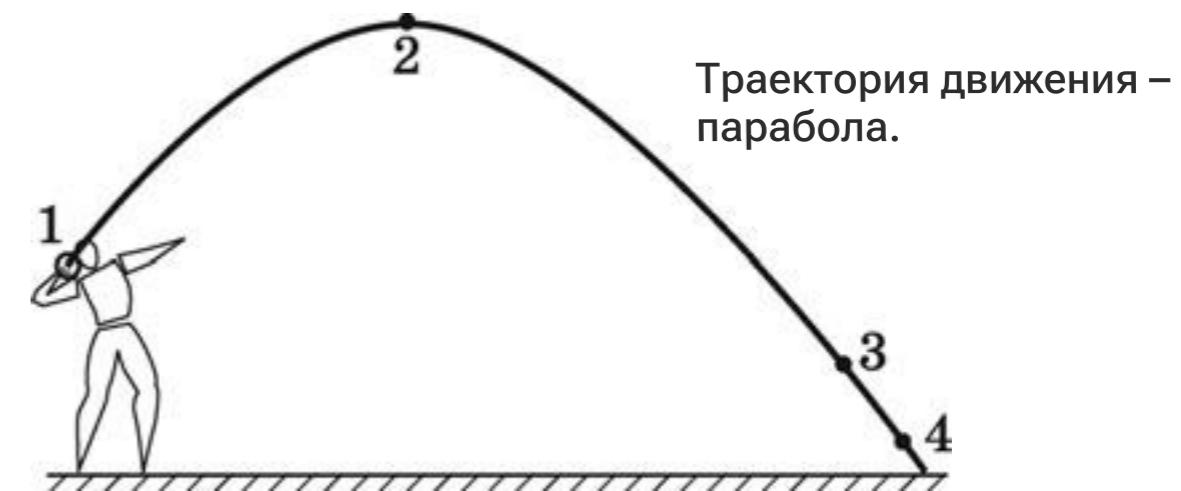


При падении на тот же уровень, с которого тело начало движение

$$t_{\text{подъема}} = t_{\text{падения}}$$

ТЕОРИЯ № 7. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, представляет собой ещё более сложный вид движения, поскольку горизонтальный бросок, который мы рассматривали на прошлом занятии не предполагает в начальный момент времени угла между вектором скорости и горизонтом (осью Ox). Теперь же мы будем анализировать броски с углом $\alpha > 0$.

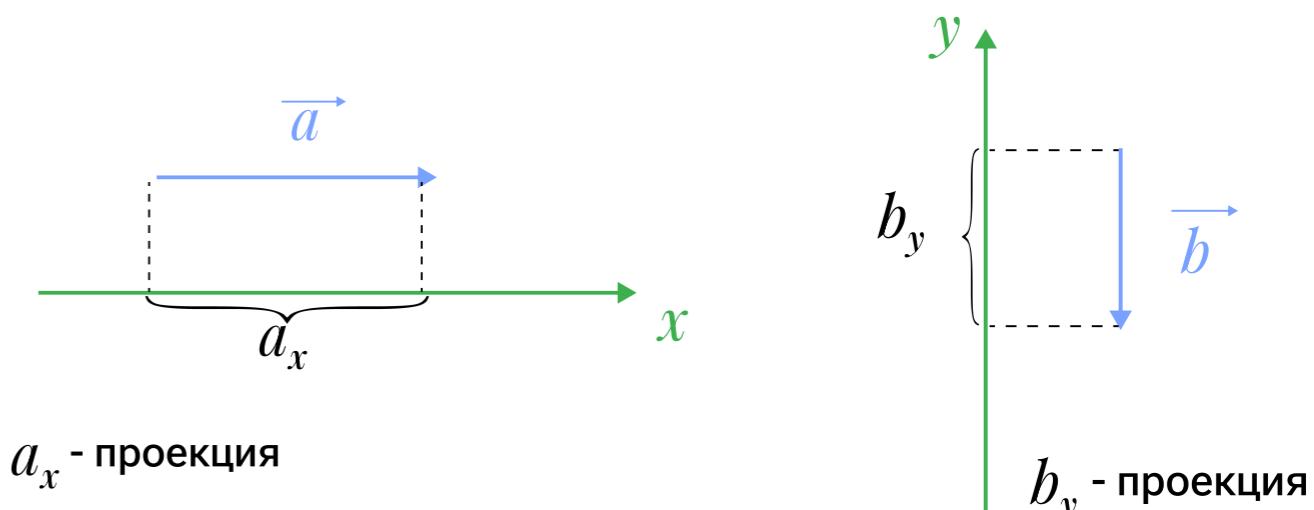


Все закономерности, выявленные при горизонтальном броске, работают аналогичным образом и в бросках под углом. Однако, решение задач на нахождение кинематических характеристик усложняется математическим аппаратом. Здесь необходимы навык работы с проекциями векторов под углом.

КАК ДЕЛАТЬ ПРОЕКЦИИ?

Проекция — перенос вектора на координатную ось.

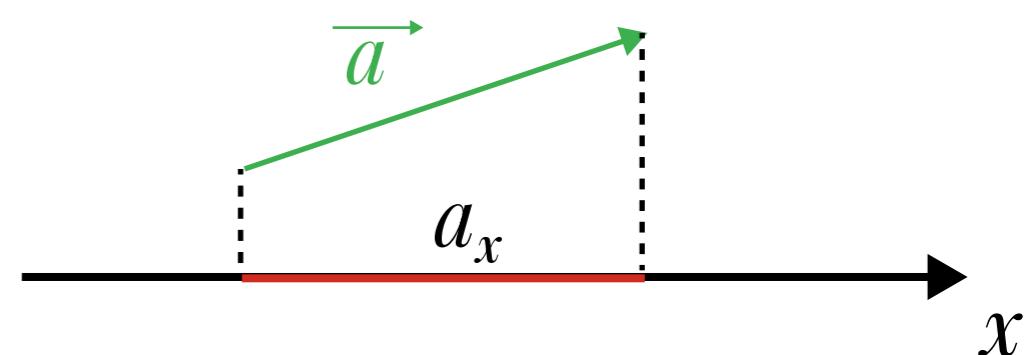
Чтобы сделать проекцию необходимо из начала вектора и из конца вектора опустить перпендикуляр на ось.



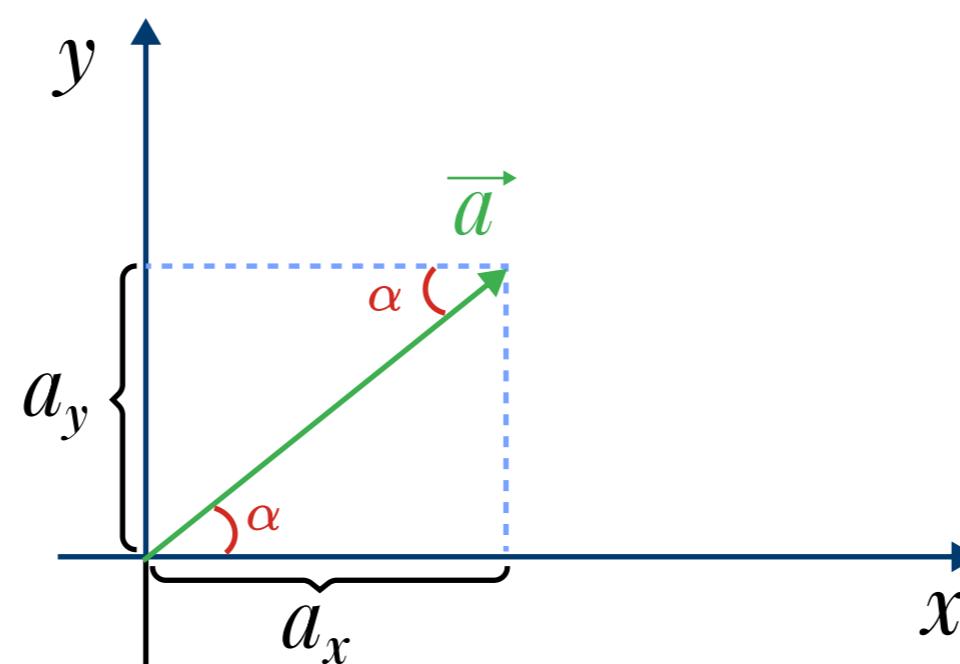
- проекция вектора $a_x > 0$ будет положительной, так как вектор сонаправлен оси x
- проекция вектора $b_y < 0$ будет отрицательной, так как вектор направлен против оси y

Если вектор направлен под некоторым углом к координатной оси, то алгоритм построения проекции остаётся прежним — опустить перпендикуляры на ось.

Пусть вектор лежит под углом α к горизонту. Сделаем проекцию вектора \vec{a} на горизонтальную (Ox) и вертикальную (Oy) оси и найдём их числовое значение.



1. Опустим перпендикуляры на оси и построим проекции.



2. На рисунке видим два прямоугольных треугольника. Углы α являются накрестлежащими, а значит равны. Гипотенуза этих треугольников — сам вектор \vec{a} . Прилежащий катет a_x — проекция вектора на ось Ox . Противолежащий катет a_y — проекция вектора на ось Oy .

Косинусом угла называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{a_x}{a}$$

Синусом угла называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

$$\sin \alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{a_y}{a}$$

3. Выразим значение проекций:

!
 $a_x = a \cos \alpha$
 $a_y = a \sin \alpha$

Вывод

- Прилежащие проекции всегда находим умножением вектора на косинус угла наклона.
- Противолежащие проекции всегда находим умножением вектора на синус угла наклона.

ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

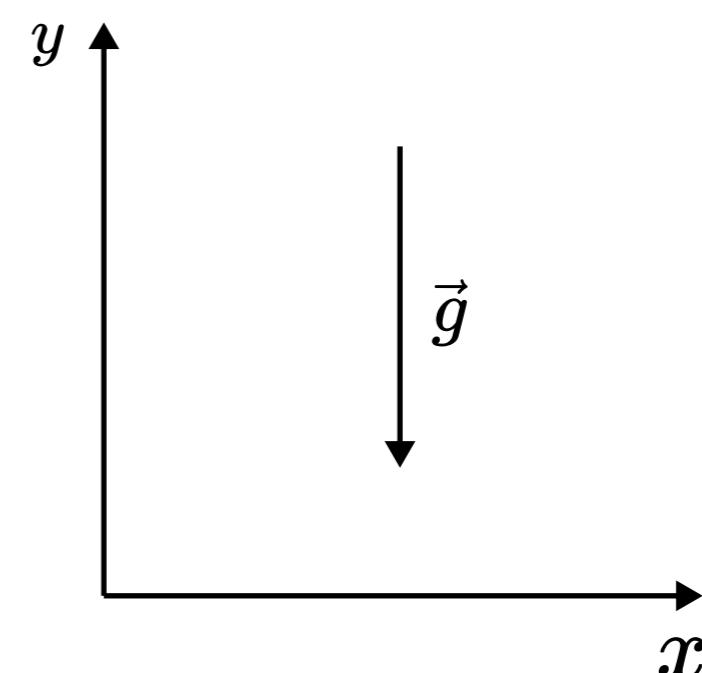
Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно рассматривать как результат сложения двух прямолинейных движений:

- 1) равномерного движения по горизонтали (оси Ox);
- 2) равноускоренного движения по вертикали (оси Oy) с ускорением свободного падения \vec{g} .

Такое представление возможно вследствие того, что вектор ускорения свободного падения \vec{g} направлен вертикально вниз и не имеет проекции на ось Ox .

$$g_x = 0$$

$$g_y = -g = \text{const}$$



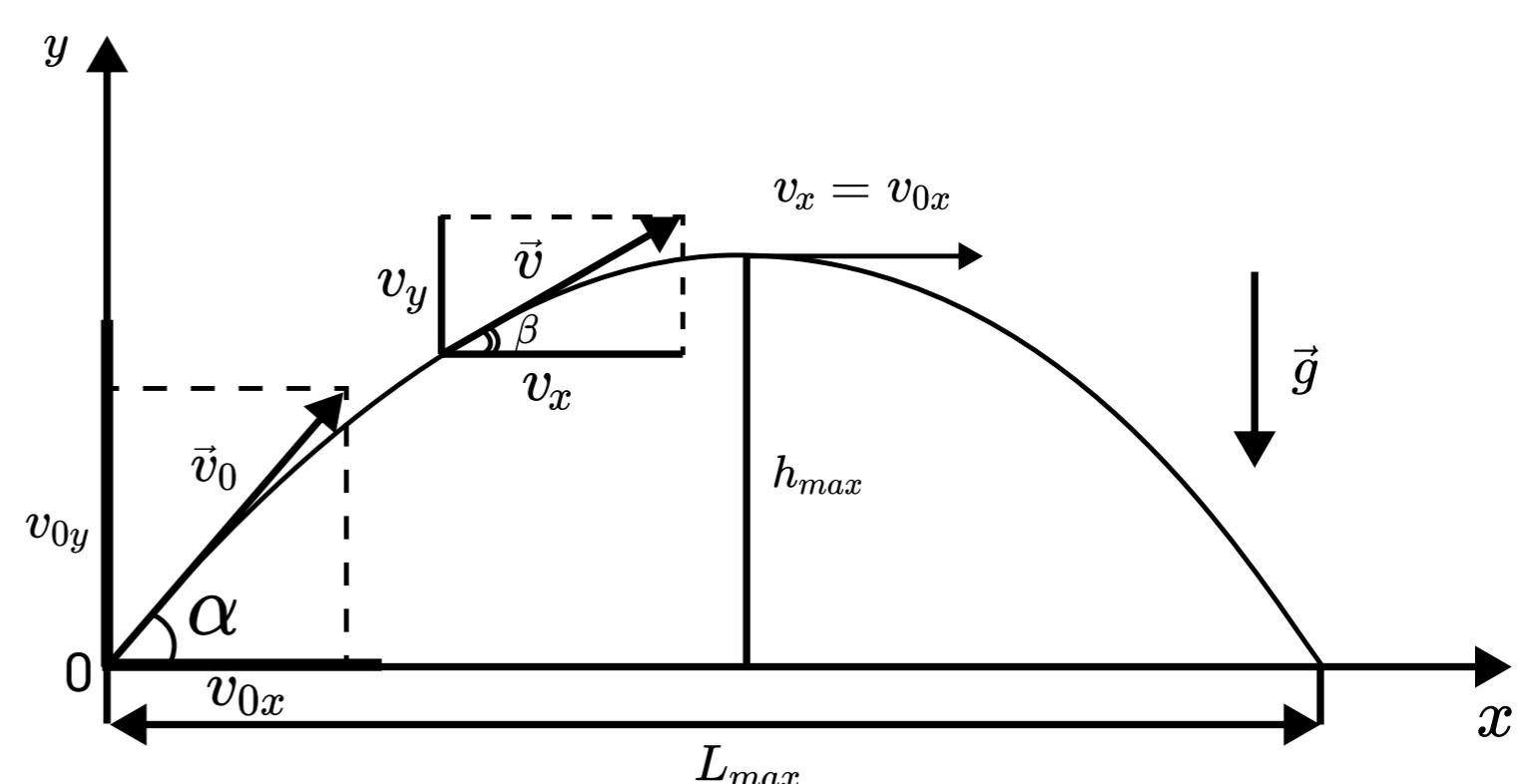
СКОРОСТЬ ТЕЛА

Рассмотрим движение тела, при котором точка броска и падения находятся на одной горизонтальной линии.

Обозначения на рисунке: h_{max} — максимальная высота подъёма; L_{max} — дальность полёта.

Вектор начальной скорости направлен под углом и имеет проекции на оси O_x и O_y :

!
 $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$
 $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$



При движении тела проекция вектора скорости на ось Ox не изменяется (так как проекция ускорения на ось Ox равна нулю, движение равномерное). Проекция скорости на ось Oy изменяется по закону для равноускоренного движения (свободного падения). При движении вверх она уменьшается, в верхней точке траектории обращается в ноль, при движении вниз увеличивается.

Уравнения проекции скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt \end{aligned}$$

В верхней точке траектории вектор скорости направлен горизонтально, поэтому:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha \\ v_y &= 0 \end{aligned}$$

Скорость v_0 , с которой тело брошено с Земли, будет равна скорости, с которой оно упадёт на Землю. Угол, под которым тело брошено, будет равен углу, под которым оно упадёт.

Скорость тела в любой момент времени:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Угол между вектором скорости и осью Ox в любой момент времени:

$$\tan \beta = \frac{v_y}{v_x}$$

УРАВНЕНИЯ КООРДИНАТЫ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТЕЛА

Уравнения координаты:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y &= y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

ВЫВОД ФОРМУЛ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА И МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ ПОДЪЕМА

Определим время движения из уравнения для координаты y , приняв $y = 0$; $y_0 = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ \frac{gt^2}{2} &= v_0 \sin \alpha \cdot t \end{aligned}$$

Общее время движения:

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Время подъёма на максимальную высоту равно времени падения с максимальной высоты:

!

$$t_{\text{подъёма}} = t_{\text{падения}} = \frac{t}{2} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Максимальная высота подъёма:

$$h_{\max} = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g}$$

Учтем, что в высшей точке подъема $v_y = 0$

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

!

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Поскольку движение по горизонтали равномерное, найдём дальность полёта как путь при равномерном прямолинейном движении.

Дальность полета:

$$L = v_{0x} t$$

Раскроем проекцию начальной скорости на ось x как: $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$

t – общее время полёта, поэтому используем ранее полученную формулу $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

$$L = v_0 \cos \alpha t = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

!

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$