

# ТЕОРИЯ.

## БОЛЬШОЙ КОНСПЕКТ ПО ВСЕЙ ТРИГОНОМЕТРИИ



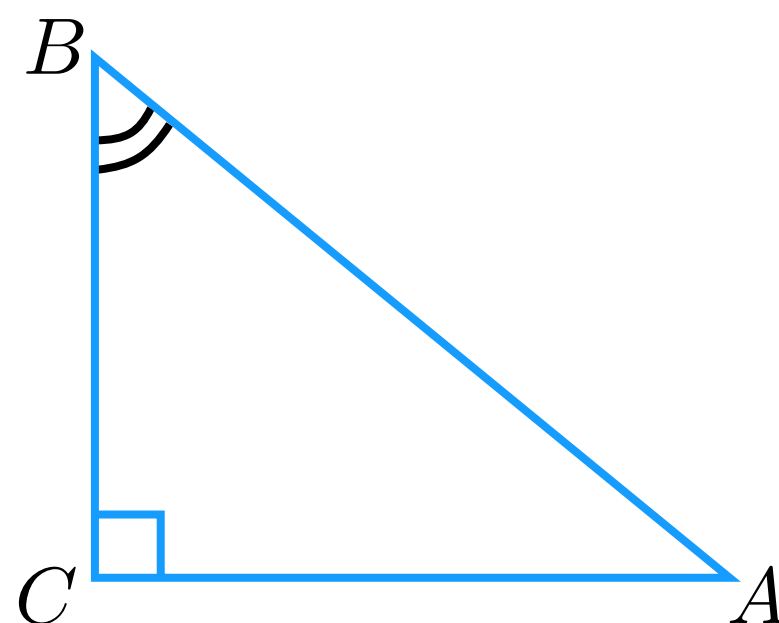
### Тригонометрические определения

$$\sin B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$



### Перевод градусов в радианы и наоборот

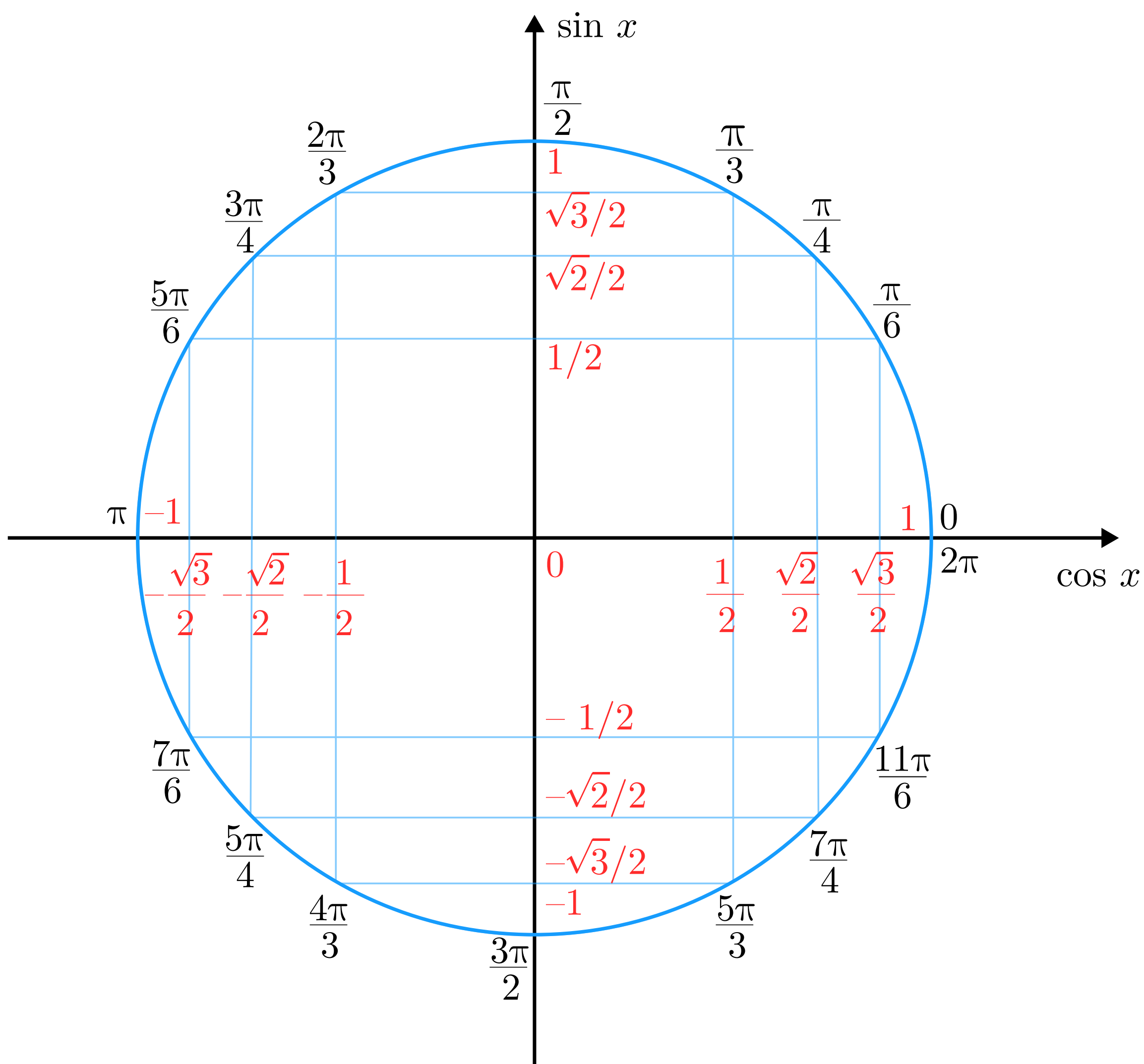
В тригонометрии углы можно измерять в **градусах (°)** и **радианах (rad)**.  
Основное соответствие

$$180^\circ = \pi \text{ (рад)}$$

Формулы перевода:

- Из градусов в радианы:  $x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180}$
- Из радиан в градусы:  $x \text{ (рад)} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

## Тригонометрическая окружность



Основные углы

$\alpha$	градусы	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Тангенс и котангенс

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

**Основное тригонометрическое тождество**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

**Синус, косинус и тангенс углов  $\alpha$  и  $-\alpha$** 

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

**Формулы суммы/разности**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

### Синус, косинус и тангенс двойного угла

Формулы двойного и тройного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

### Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

### Формулы приведения

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

Любую из формул приведения можно получить, пользуясь правилом:

а) в правой части формулы ставится такой же знак, какой имеет левая часть, если считать, что:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

б) если в левой части формулы угол равен  $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$  или  $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ , то синус заменяется на косинус, а косинус - на синус; если же угол равен  $\pi \pm \alpha$ , то функция не меняет своего названия.

Для любого целого  $n (n \in \mathbb{Z})$  справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha$$

### Уравнение $\cos x = a$

1. Арккосинус числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arccos a$ ) — такое число  $a \in [0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ , т. е.

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \cos(\arccos a) = a.$$

Если  $a \in [0; 1]$ , то  $0 \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$ , если  $a \in [-1; 0)$ , то  $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leq \pi$ .

Если  $|a| > 1$ , то выражение  $\arccos a$  не имеет смысла.

2. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство  $\cos(\arccos a) = a$ .  
 Равенство  $\arccos(\cos a) = a$  является верным только при  $a \in [0; \pi]$ , хотя  $\arccos(\cos a)$  имеет смысл при всех  $a \in R$ . Для любого  $a \in [-1; 1]$  верно равенство  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ .

3. Если  $-1 \leq a \leq 1$ , то все корни уравнения  $\cos x = a$  определяются формулой  $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$ . Если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\cos x = a$  не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения  $\cos x = a$  при  $a = 0, a = 1, a = -1$ :

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

### Уравнение $\sin x = a$

1. Арксинус числа  $a \in [-1; 1]$  (обозначается  $\arcsin a$ ) такое число  $— a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  синус которого равен  $a$ , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \sin(\arcsin a) = a.$$

Если  $a \in [0; 1]$ , то  $0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$ , а если  $a \in [-1; 0)$ , то  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a < 0$ .  
 Если  $|a| > 1$ , то выражение  $\arcsin a$  не имеет смысла.

2. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

**Равенство**

$$\arcsin(\sin a) = a$$

является верным при  $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  хотя выражение в левой части имеет смысл при всех  $a \in R$ . Для любого  $a \in [-1; 1]$  верно равенство  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ .

3. Для любого  $a \in [-1; 1]$  справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$



4. Если  $|a| \leq 1$ , то все корни уравнения  $\sin x = a$  определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\sin x = a$  не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения  $\sin x = a$  при  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$ :

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

### Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

1. Арктангенс числа  $a \in \mathbb{R}$  (обозначается  $\operatorname{arctg} a$ ) — такое число  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , тангенс которого равен  $a$ , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \alpha = a.$$

2. Для любого  $a \in \mathbb{R}$  справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

**Равенство**

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha$$

является верным только при  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Для любого  $a \in \mathbb{R}$  справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

3. Для любого  $a \in \mathbb{R}$  уравнение  $\operatorname{tg} x = a$  имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$