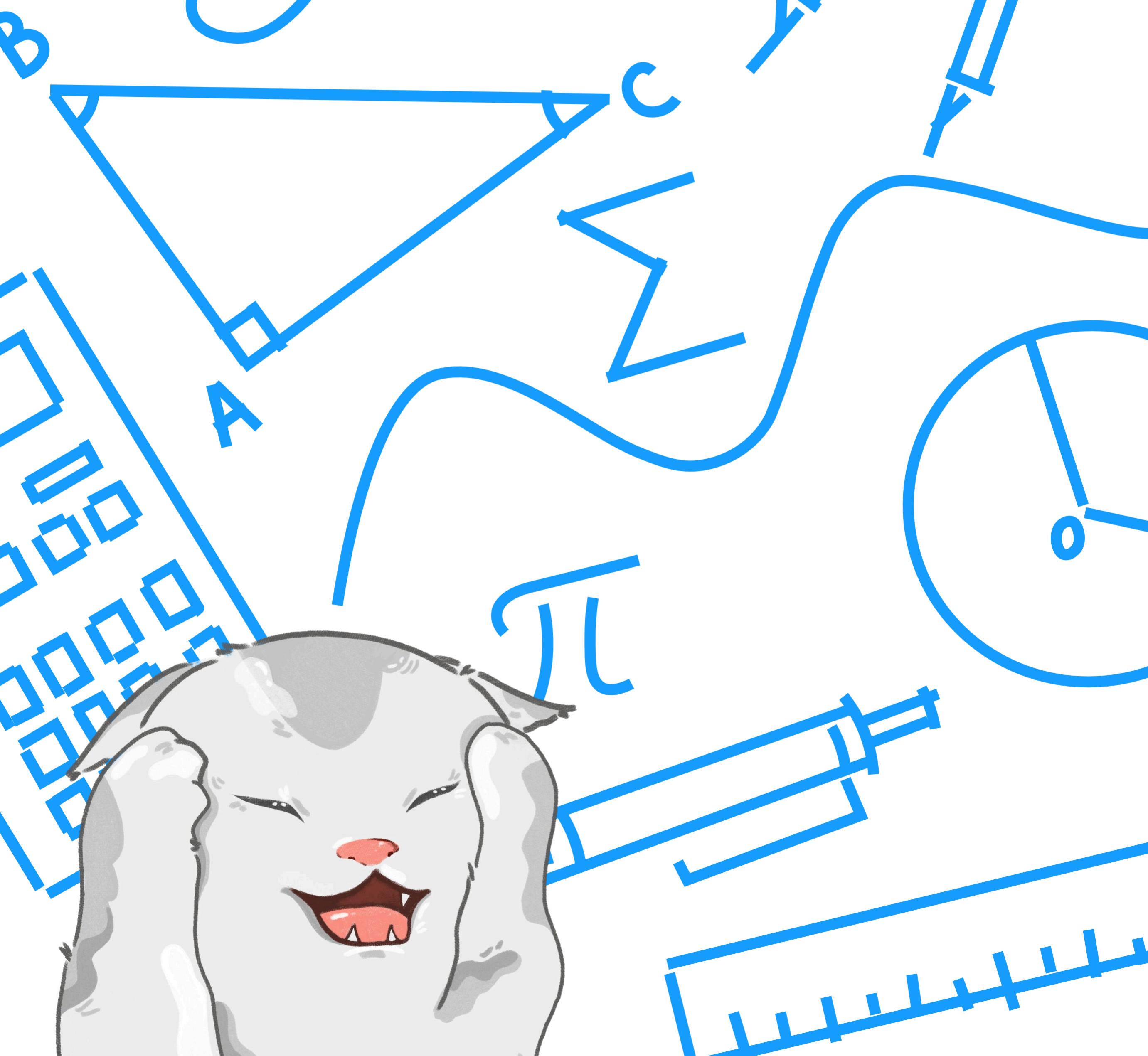


# ТЕОРИЯ.

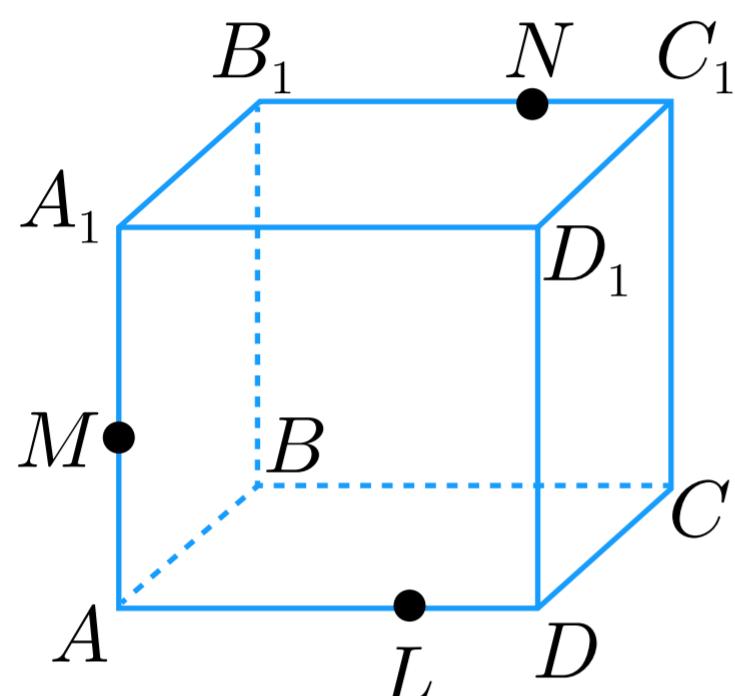
## МНОГОГРАННИКИ И ИХ СЕЧЕНИЯ



## Правила построения сечений многогранников

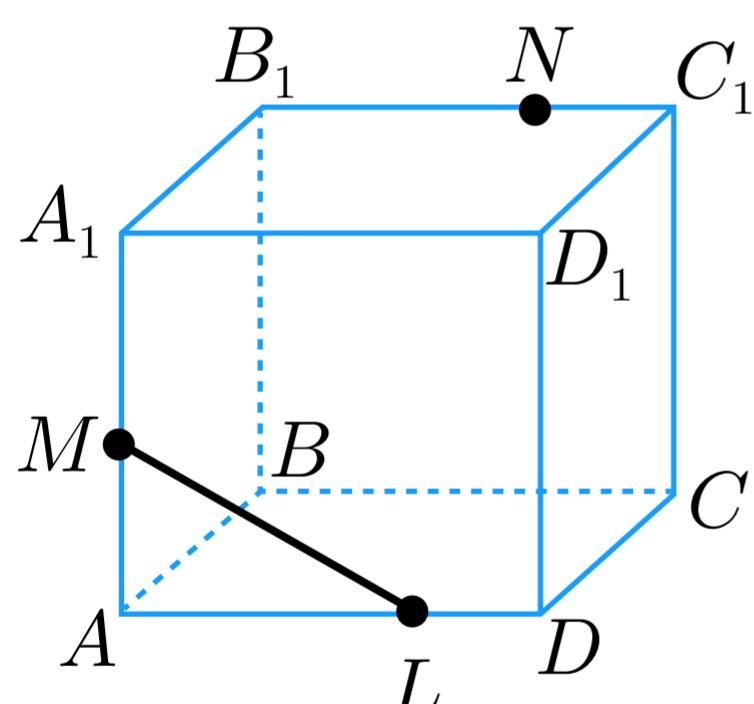
- 1) проводим прямые через точки, лежащие в одной плоскости;
- 2) ищем прямые пересечения плоскости сечения с гранями многогранника, для этого.
  - a) ищем точки пересечения прямой принадлежащей плоскости сечения с прямой, принадлежащей одной из граней (лежащие в одной плоскости);
  - б) параллельные грани плоскость сечения пересекает по параллельным прямым.

## Примеры построения сечений

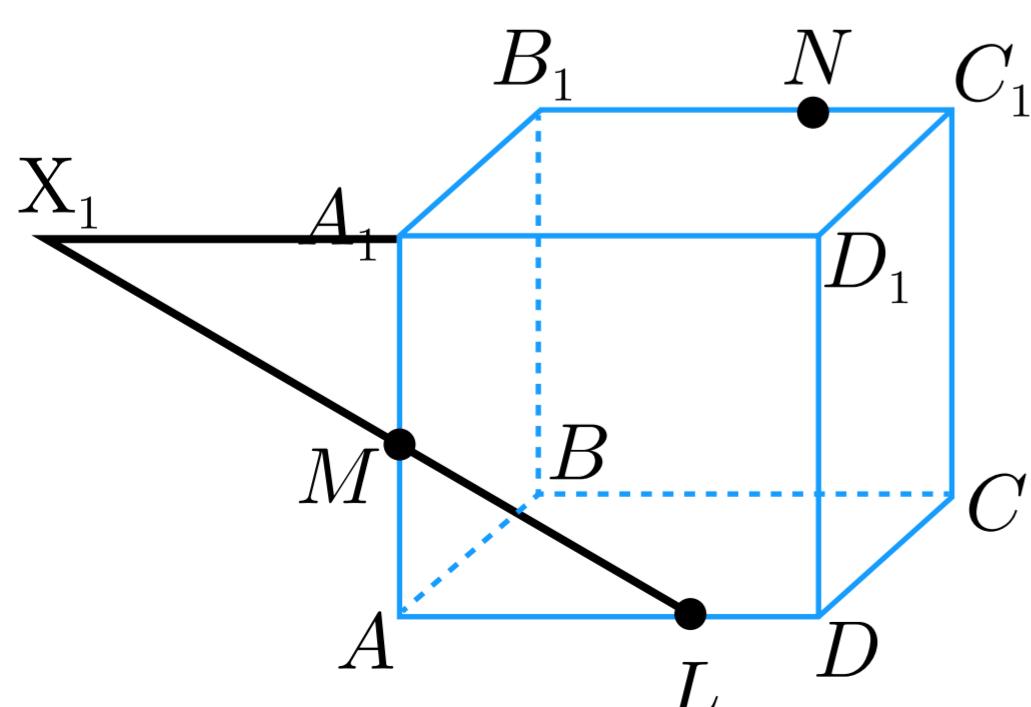


### Пример 1.

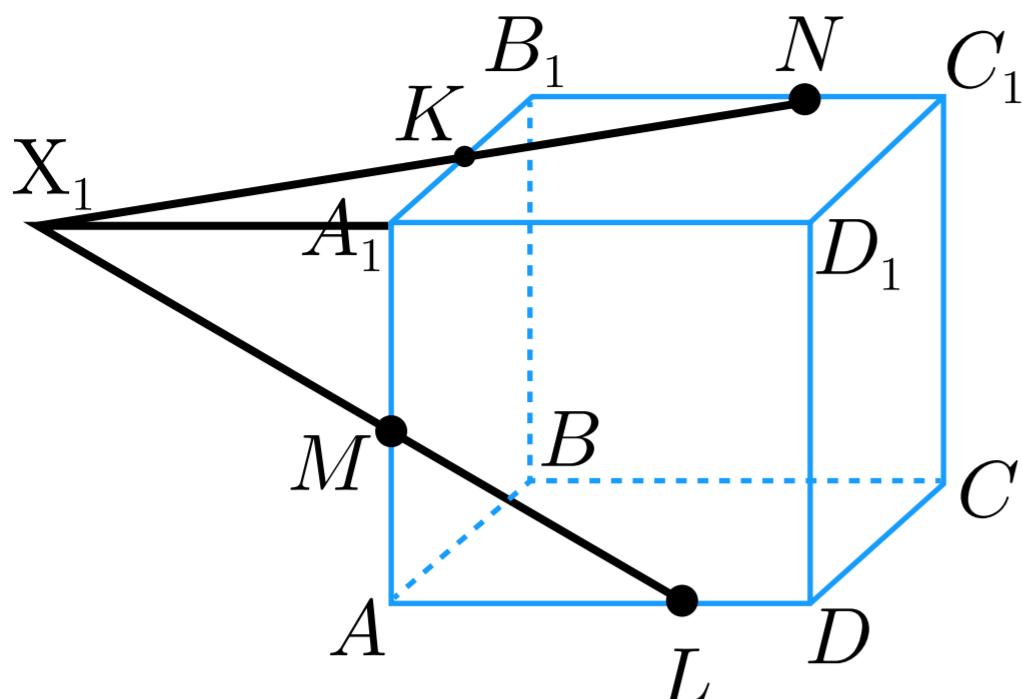
Рассмотрим прямоугольный параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Построим сечение, проходящее через точки  $M, N, L$ .



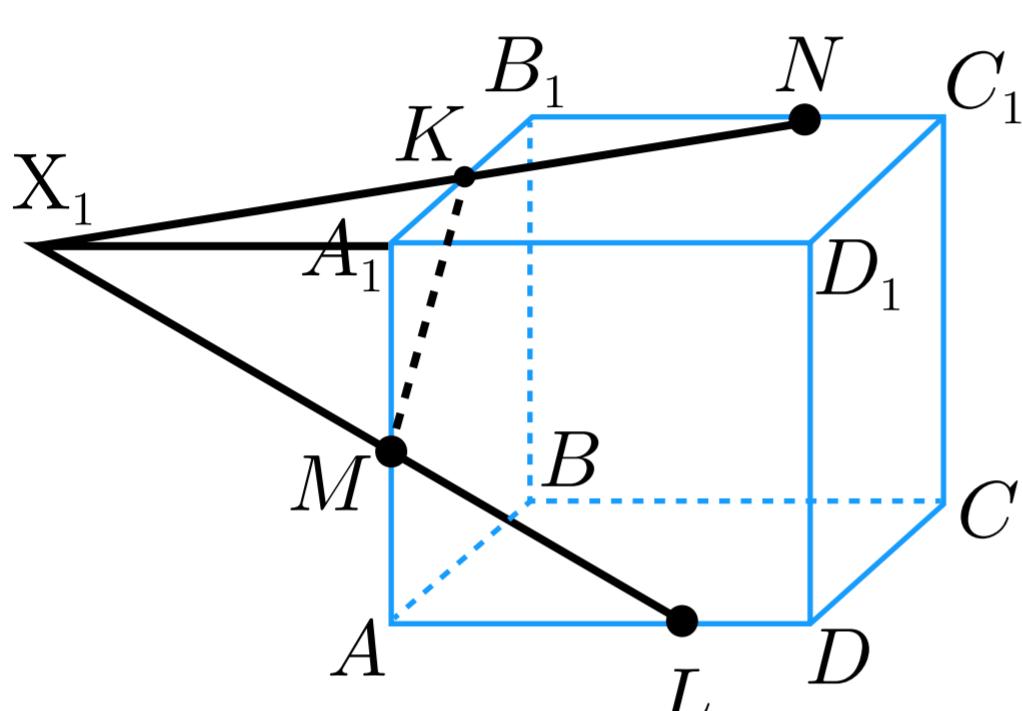
Соединим точки  $M$  и  $L$ , лежащие в плоскости  $AA_1D_1D$ .



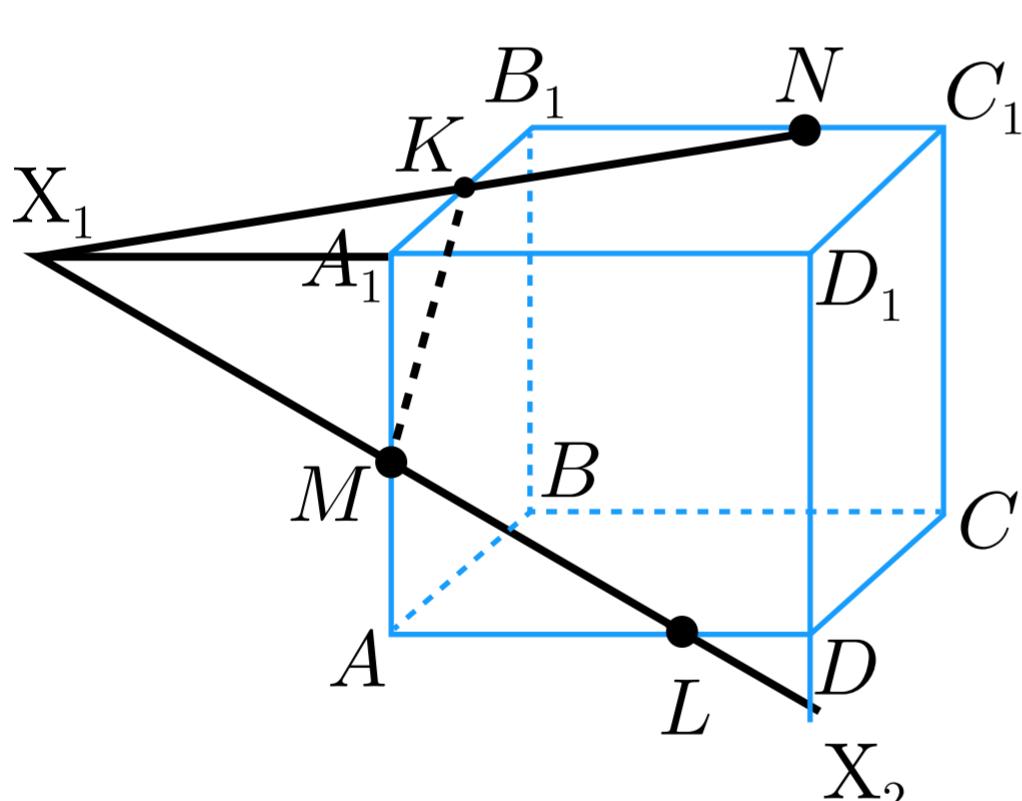
Пересечем прямую  $ML$  (принадлежащую сечению) с ребром  $A_1D_1$ , они лежат в одной плоскости  $AA_1D_1D$ . Получим точку  $X_1$ .



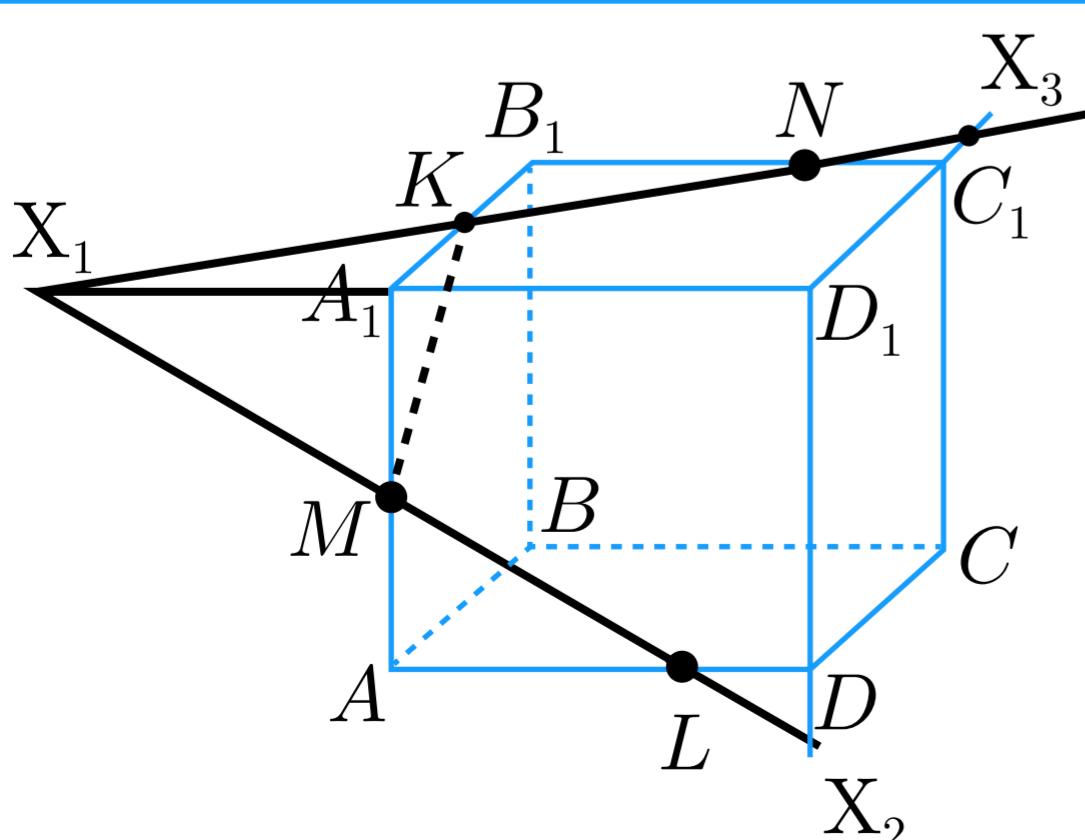
Точка  $X_1$  лежит на ребре  $A_1D_1$ , а значит и плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ , соединим ее с точкой  $N$ , лежащей в этой же плоскости.  
 $X_1N$  пересекается с ребром  $A_1B_1$  в точке  $K$ .



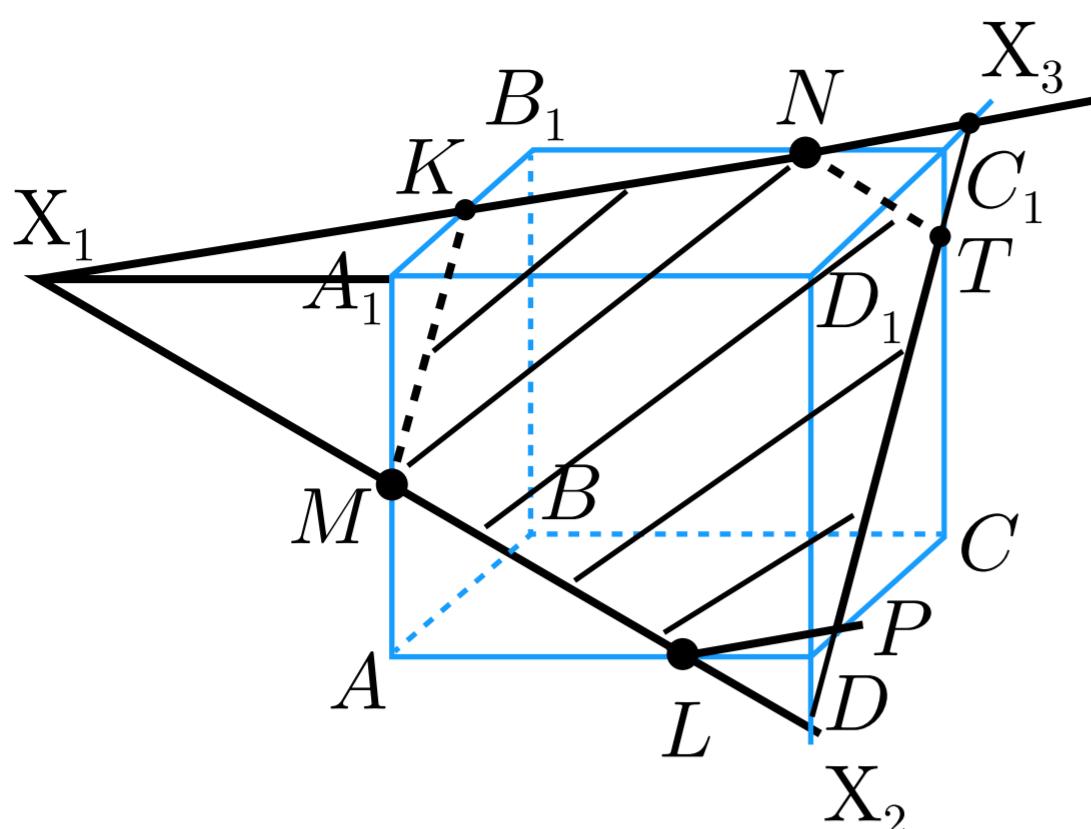
Соединим точки  $K$  и  $M$ , лежащие в одной плоскости  $AA_1B_1B$ .



Найдем прямую пересечения плоскости сечения с плоскостью  $DD_1C_1C$ :  
пересечем прямую  $ML$  (принадлежащую сечению) с ребром  $DD_1$ , они лежат в одной плоскости  $AA_1D_1D$ , получим точку  $X_2$ ;

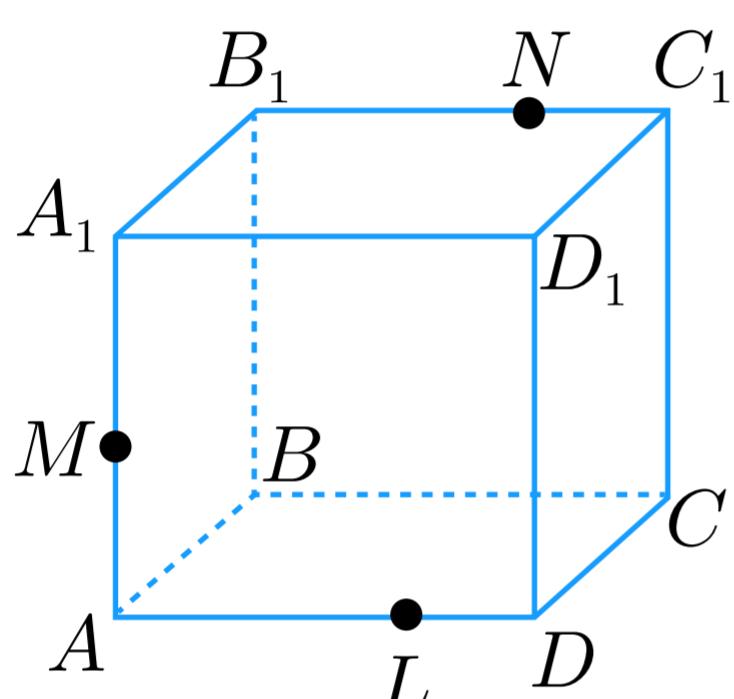


пересечем прямую  $KN$  (принадлежащую сечению) с ребром  $D_1C_1$ , они лежат в одной плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ , получим точку  $X_3$ ;



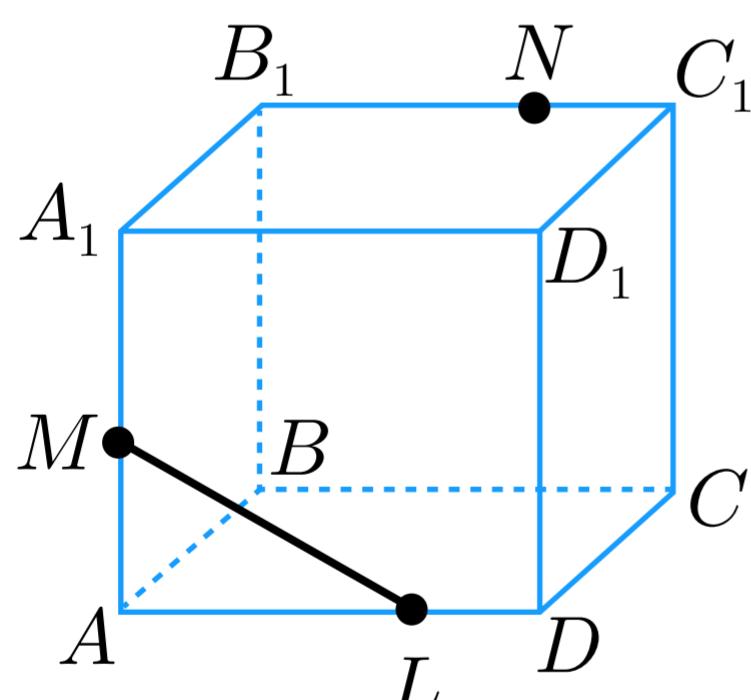
Точки  $X_2$  и  $X_3$  лежат в плоскости  $DD_1C_1C$ . Проведем прямую  $X_2 X_3$ , которая пересечет ребро  $C_1C$  в точке  $T$ , а ребро  $DC$  в точке  $P$ . И соединим точки  $L$  и  $P$ , лежащие в плоскости  $ABCD$ .

$MKNTP$  — искомое сечение.

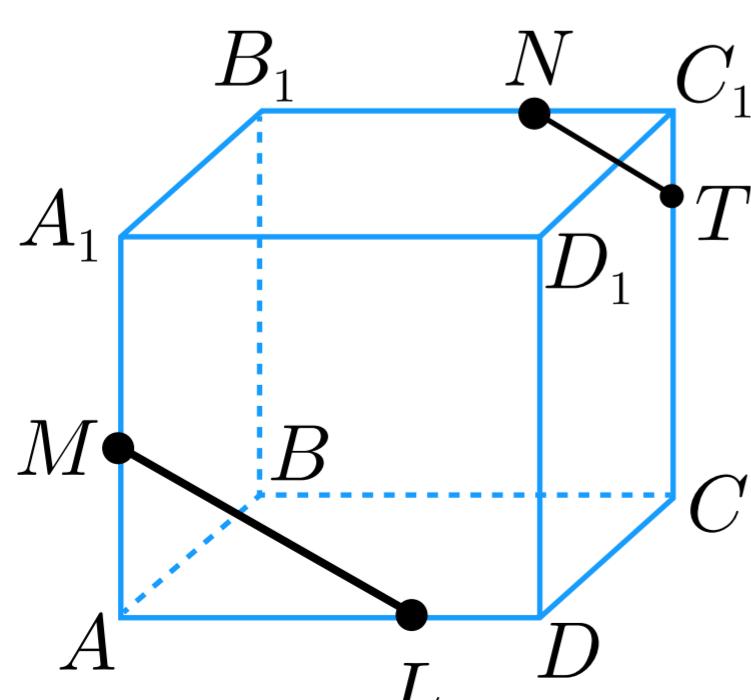


### Пример 2.

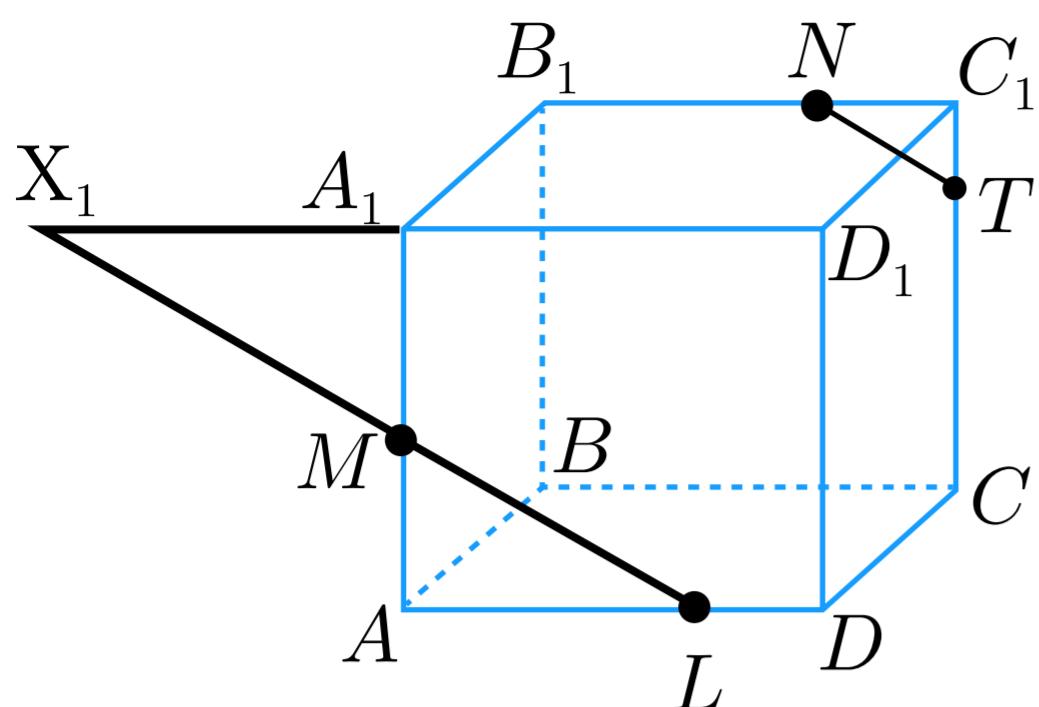
Рассмотрим ту же самую задачу на построение сечения, но воспользуемся свойством параллельных плоскостей. Это облегчит нам построение сечения.



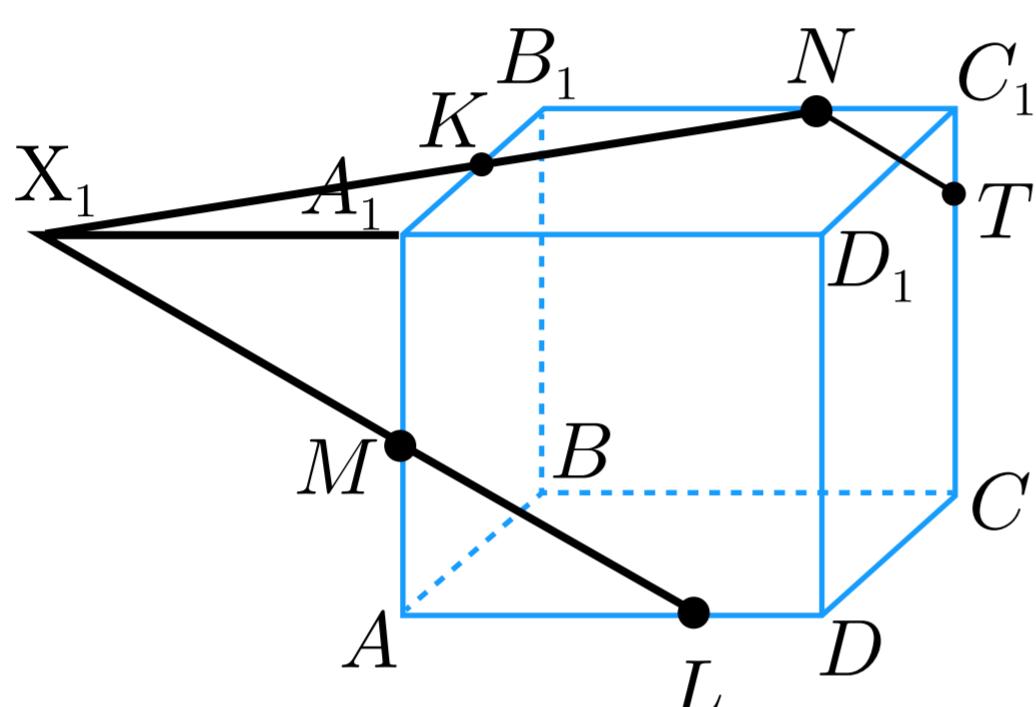
Соединим точки  $M$  и  $L$ , лежащие в плоскости  $AA_1D_1D$ .



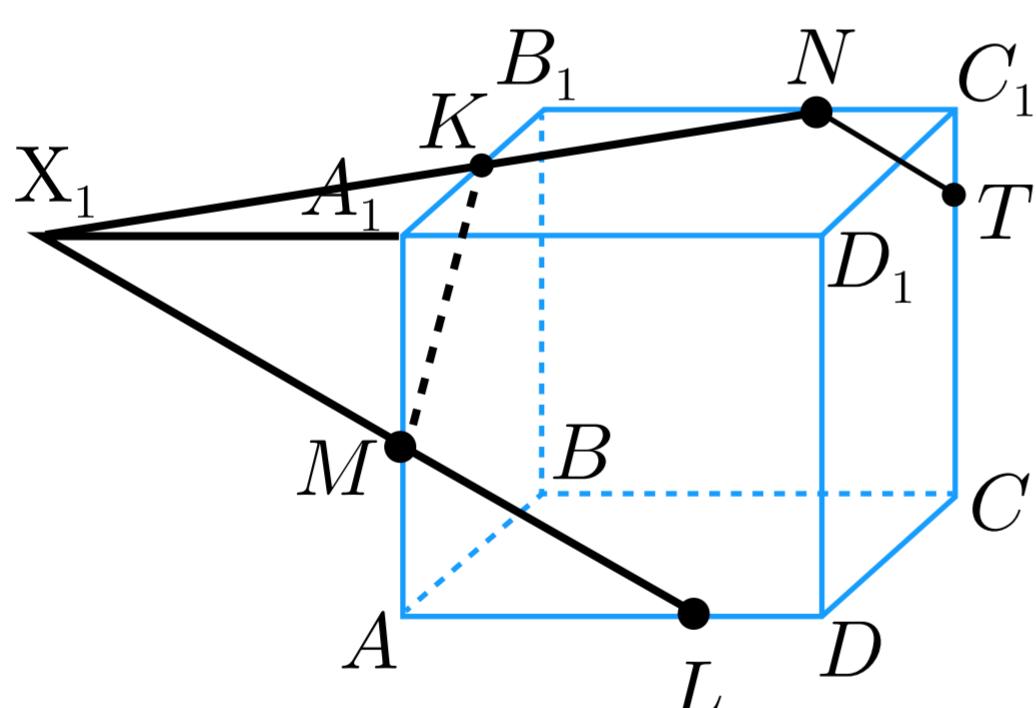
Через точку  $N$ , проведем прямую  $NT$  параллельную прямой  $ML$ . Прямые  $NT$  и  $ML$  лежат в параллельных плоскостях по свойству параллелепипеда.



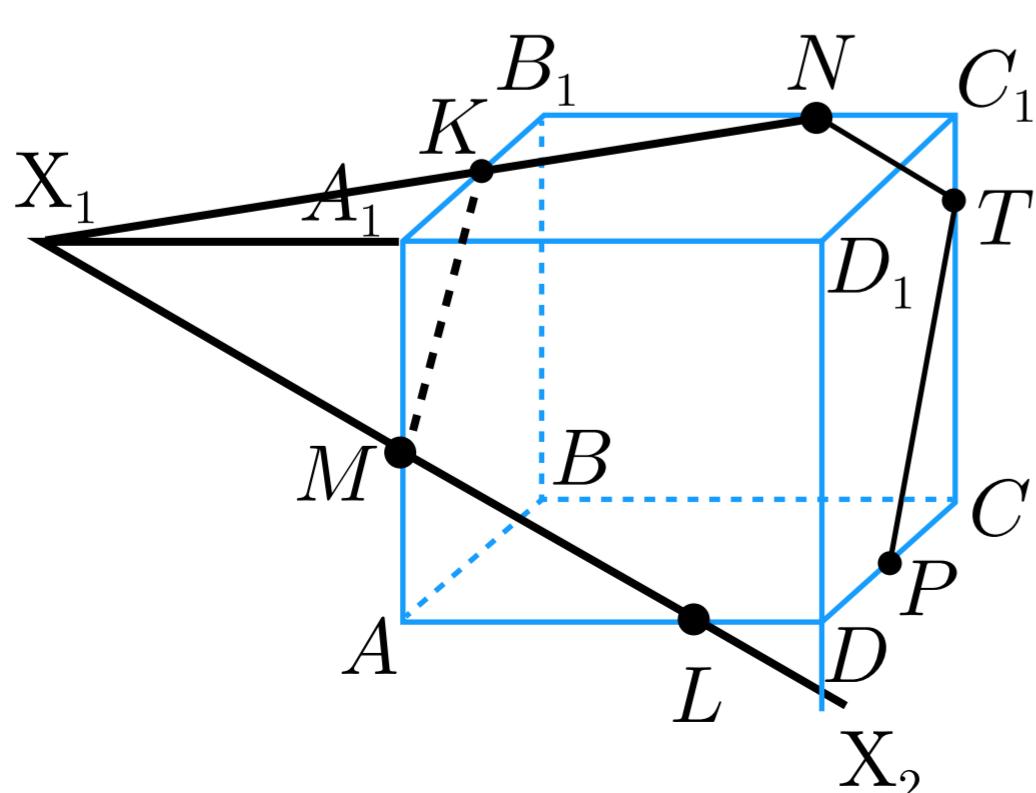
Пересечем прямую  $ML$  (принадлежащую сечению) с ребром  $A_1D_1$ , они лежат в одной плоскости  $AA_1D_1D$ . Получим точку  $X_1$ .



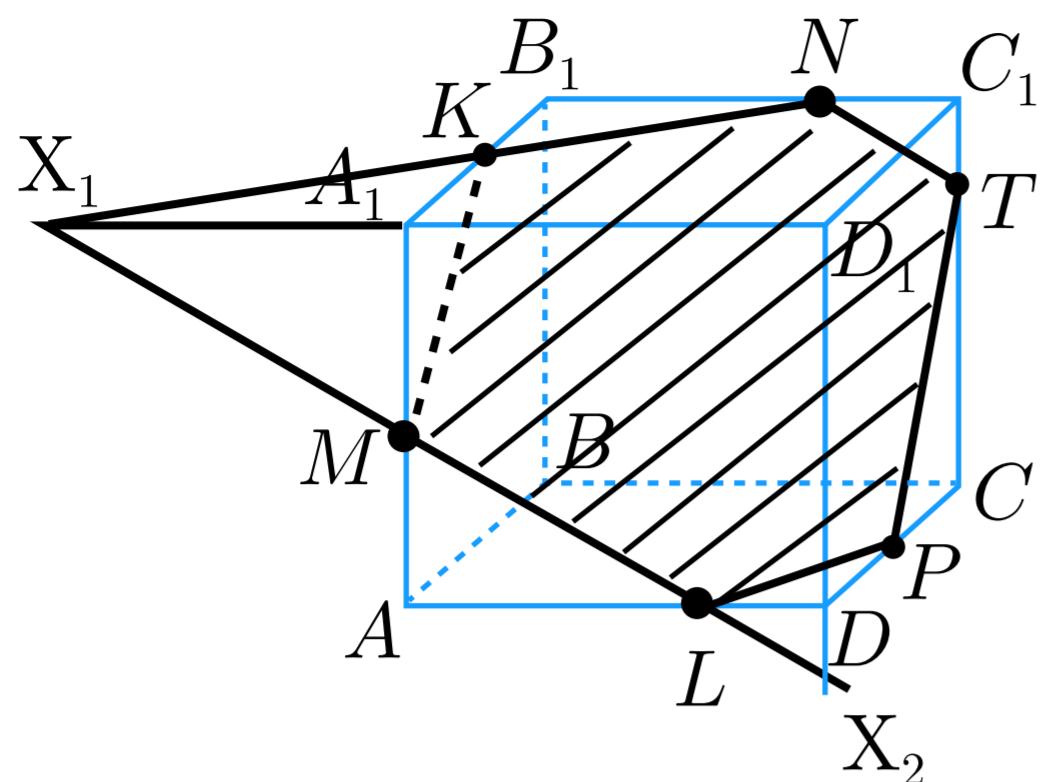
Точка  $X_1$  лежит на ребре  $A_1D_1$ , а значит и в плоскости  $A_1B_1C_1D_1$ , соединим ее с точкой  $N$ , лежащей в этой же плоскости.  $X_1N$  пересекается с ребром  $A_1B_1$  в точке  $K$ .



Соединим точки  $K$  и  $M$ , лежащие в плоскости  $AA_1B_1B$ .



Проведем прямую  $TP$  через точку  $T$ , параллельно прямой  $KM$  (они лежат в параллельных плоскостях).



Соединим точки  $P$  и  $L$  ( они лежат в одной плоскости).

$MKNTPL$  – искомое сечение.

### Методы построения сечений

#### Метод следов

В общем случае плоскость сечения имеет общую прямую с плоскостью каждой грани многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает какую-либо грань, называют следом секущей плоскости.

#### Метод внутреннего проектирования

Этот метод удобен при построении сечений в тех случаях, когда почему-либо неудобно находить след секущей плоскости, например, след получается очень далеко от заданной фигуры.

#### Комбинированный метод

При построении этим методом на каких-то этапах применяются приёмы, изложенные в методе следов или методе внутреннего проектирования, а на других этапах применяются теоремы, изученные в разделе «Параллельность прямых и плоскостей».

## Метод следов

Суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры  $F$ . Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют следом секущей плоскости. Используя след, легко построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры  $F$ .

Пусть  $M, N, K$  - точки секущей плоскости,  $M_1, N_1, K_1$  – их проекции на плоскость основания. При этом для призм и цилиндров  $MM_1 \parallel NN_1, NN_1 \parallel KK_1$ , для конусов и пирамид  $MM_1 \cap NN_1 \cap KK_1 = S$  ( $S$  – вершина). Удобнее обозначать вершины нижнего основания через  $A_1, B_1, C_1, \dots$  верхнего основания –  $A, B, C, \dots$ . Кратко суть метода следов можно записать следующим образом.

1.  $MN \cap M_1N_1 = X$
2.  $MK \cap M_1K_1 = Y$
3.  $XY = S$  – след секущей плоскости
4.  $A_1M_1 \cap S = A_0$  возможно
5.  $A_0M \cap A_1A = A$
6. Пункты 4-5 повторить для вершин  $B_1, C_1, \dots$  нижнего основания фигуры  $F$ ;
7. – искомое сечение.

Строить сечение фигуры  $F$  секущей плоскостью  $\alpha$  методом следов удобно в тех случаях, когда секущая плоскость задана тремя точками, ей принадлежащими, или прямой и не принадлежащей ей точкой, или двумя пересекающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми. Во всех случаях легко взять три точки  $M, N, K$ , принадлежащие плоскости  $\alpha$ , и решение проводить по указанной схеме.

## Задачи

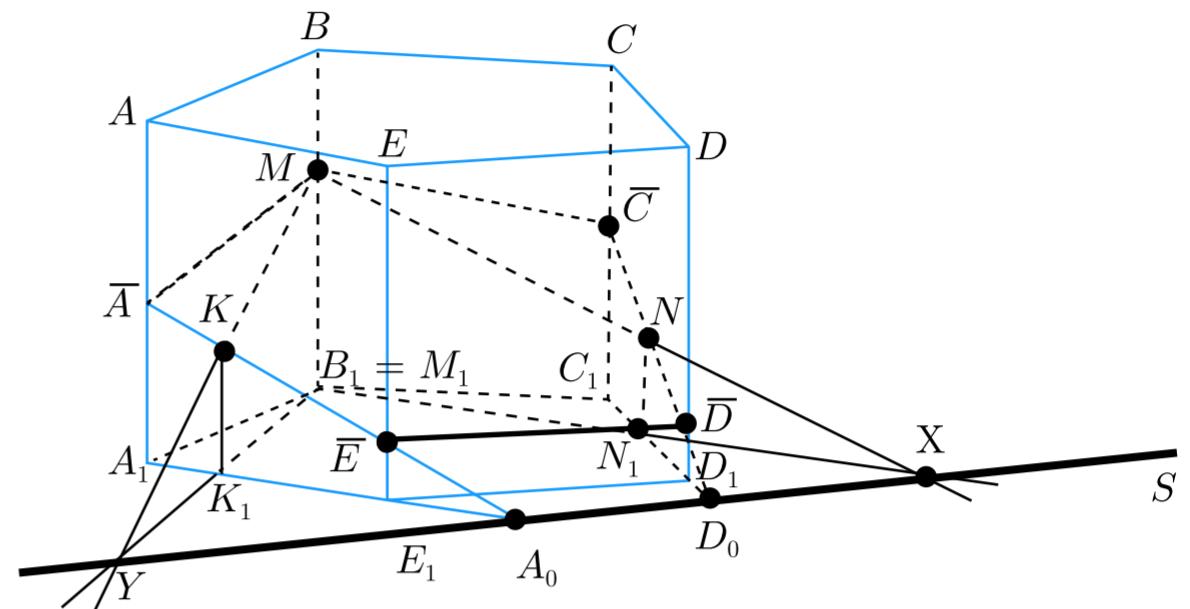
**Задача 1.** Постройте сечение призмы  $A_1B_1C_1D_1ABCD$  плоскостью, проходящей через три точки  $M, N, K$ . Рассмотрите все случаи расположения точек  $M, N, K$  на поверхности призмы.

Рассмотрим случай:  $M \in BB_1$ ,  $N \in CC_1D_1D$ ,  $K \in AA_1E_1$ .

В данном случае очевидно, что  $M_1 = B_1$ .

Построение.

1.  $MN \cap M_1N_1 = X$
2.  $MK \cap M_1K_1 = Y$
3.  $XY = S$  — след секущей плоскости.
4.  $A_1K_1 \cap S = A_0$
5.  $A_0K \cap A_1A = \bar{A}$ ,  $A_0K \cap EE_1 = \bar{E}$ .
6.  $D_1N_1 \cap S = D_0$
7.  $D_0N \cap DD_1 = \bar{D}$ ,  $D_0N \cap CC_1 = \bar{C}$ .
8.  $\bar{A}\bar{M}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$  — искомое сечение.

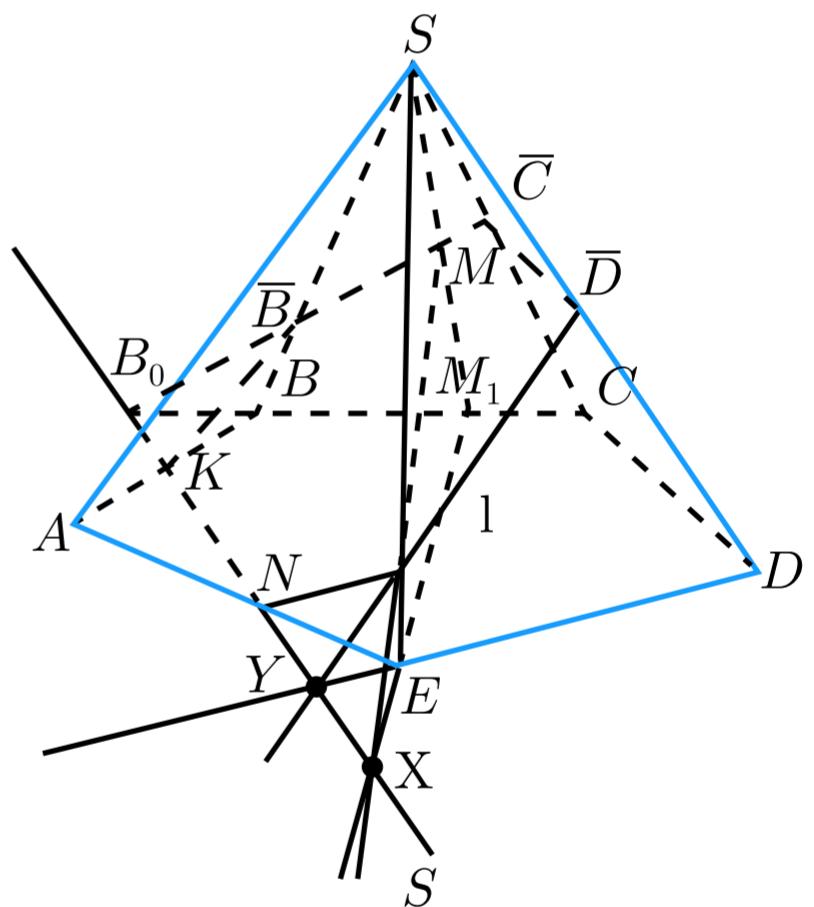


**Задача 2.**

Постройте сечение пирамиды  $SABCDE$  плоскостью, проходящей через точку  $M \in SBC$  и прямую  $l$ , лежащую в грани  $SED$ .

Построение.

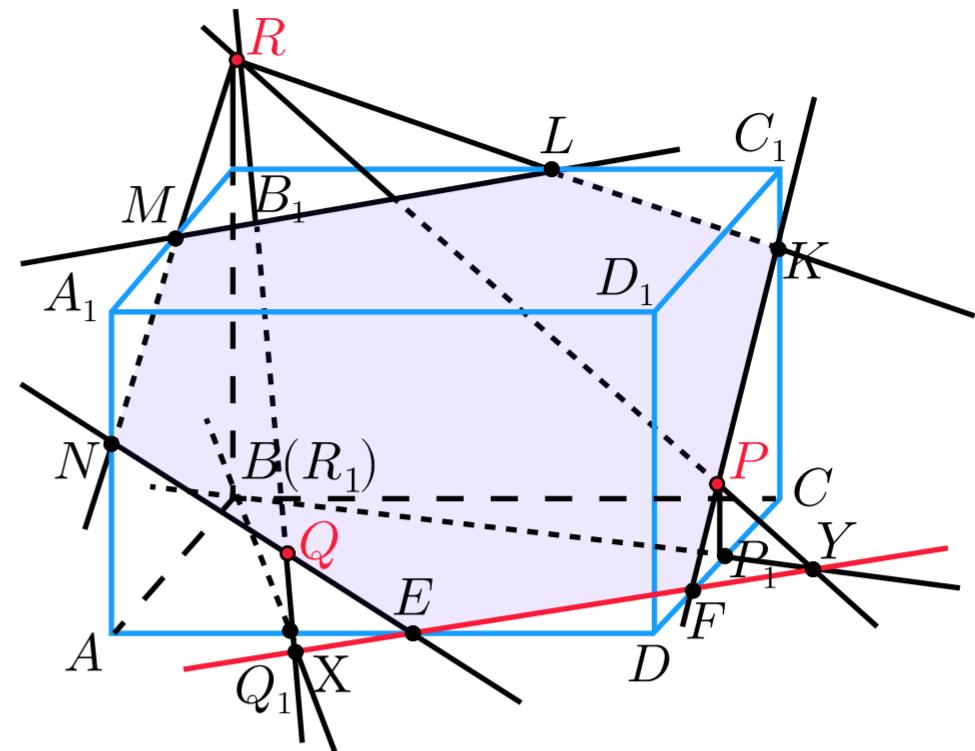
1.  $SM \cap BC = M_1$
2.  $l \cap SD = \bar{D}$ ,  $l \cap SE = \bar{E}$ .
3.  $M\bar{E} \cap M_1E = X$ ,  $l \cap ED = Y$ ,  $XY = S$  — след секущей плоскости.
4.  $S \cap AB = K$ ,  $S \cap AE = N$ .
5.  $BC \cap S = B_0$ ,  $B_0M \cap SB = \bar{B}$ ,  $B_0M \cap SC = \bar{C}$ .
6.  $K\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}N$  — искомое сечение.



## Задачи

## Задача 3.

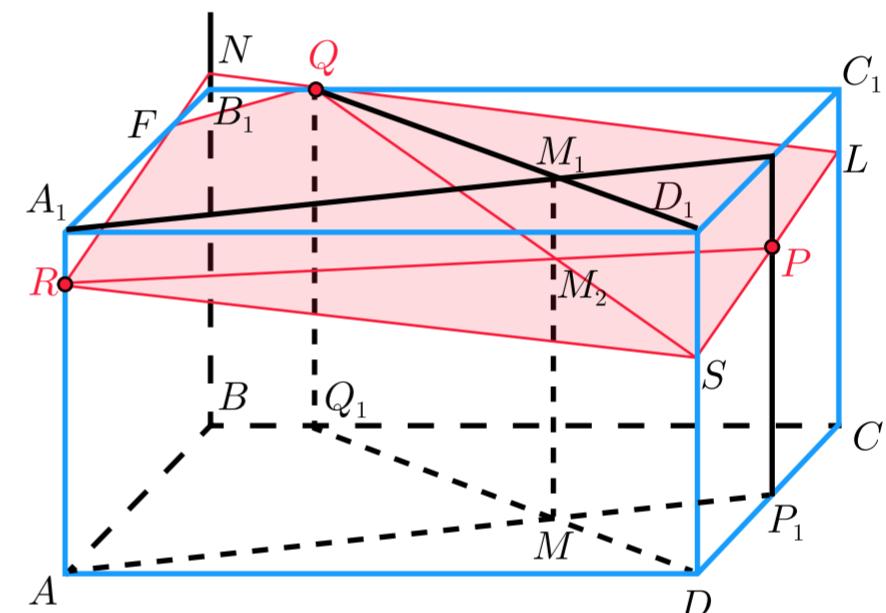
Точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  взяты на поверхности параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  следующим образом: точка  $P$  лежит в грани  $CC_1D_1D$ , точка  $Q$  — в грани  $AA_1D_1D$ , точка  $R$  на прямой  $BB_1$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью  $(PQR)$ .



# Метод внутреннего проектирования.

## Задача 4.

Точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  взяты на поверхности параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  следующим образом: точка  $P$  лежит на грани  $CC_1D_1D$ , точка  $Q$  – на ребре  $B_1C_1$ , а точка  $R$  – на ребре  $AA_1$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью  $(PQR)$ .



## Комбинированный метод.

## Задача 5.

На рёбрах  $A_1B$  и  $DD_1$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взяты соответственно точки  $P$  и  $S$ , а в гранях  $DD_1C_1C$  и  $AA_1D_1D$  соответственно точки  $Q$  и  $R$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $S$  параллельно плоскости  $PQR$ .

