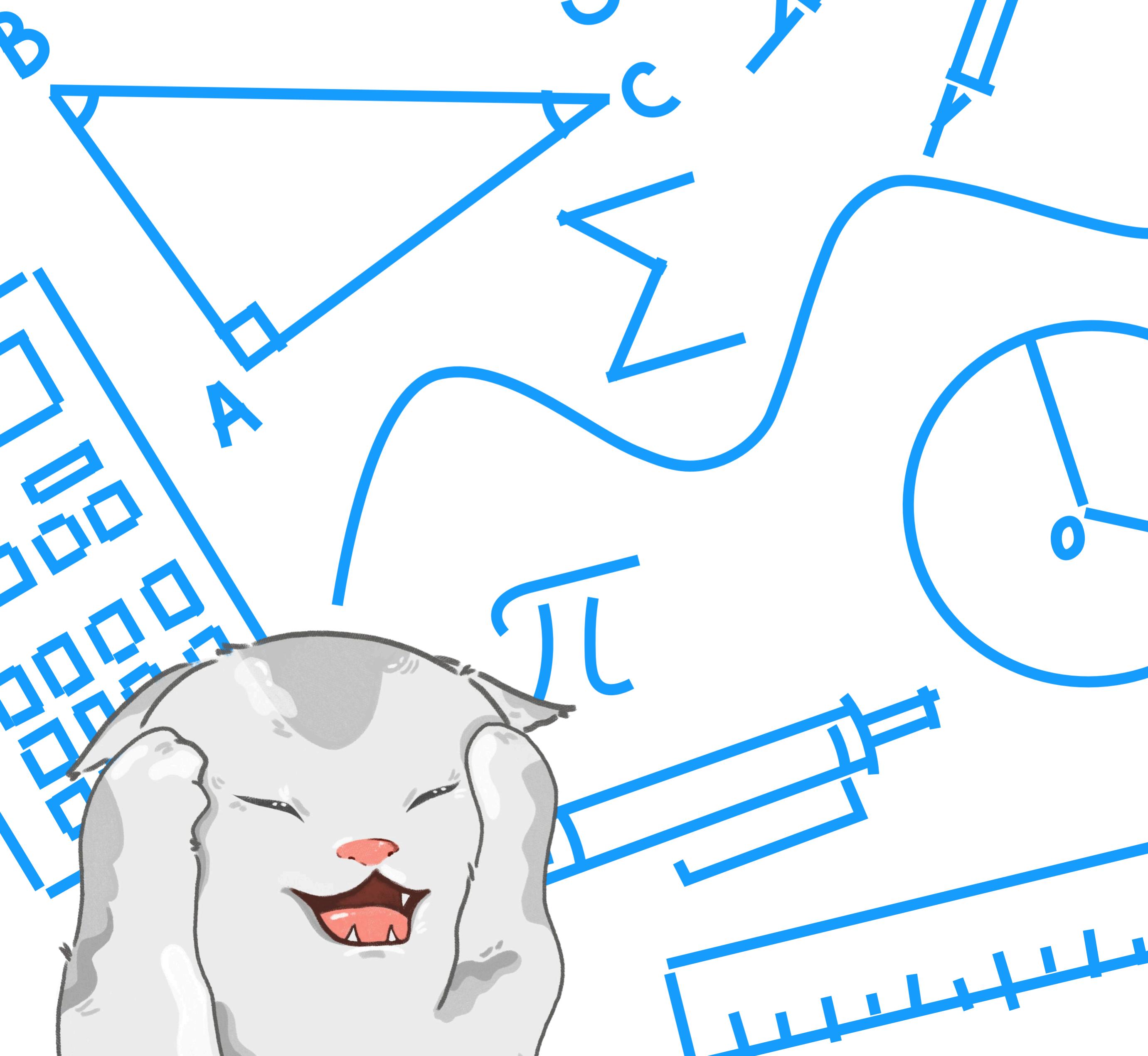


ТЕОРИЯ.

БОЛЬШОЙ КОНСПЕКТ ПО
ВСЕЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

\sin



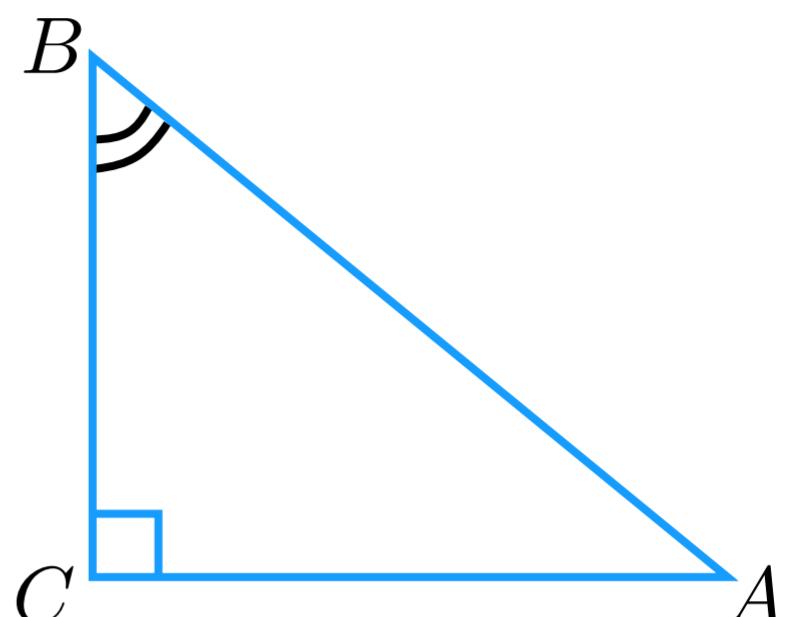
Тригонометрические определения

$$\sin B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$



Перевод градусов в радианы и наоборот

В тригонометрии углы можно измерять в **градусах (°)** и **радианах (rad)**.

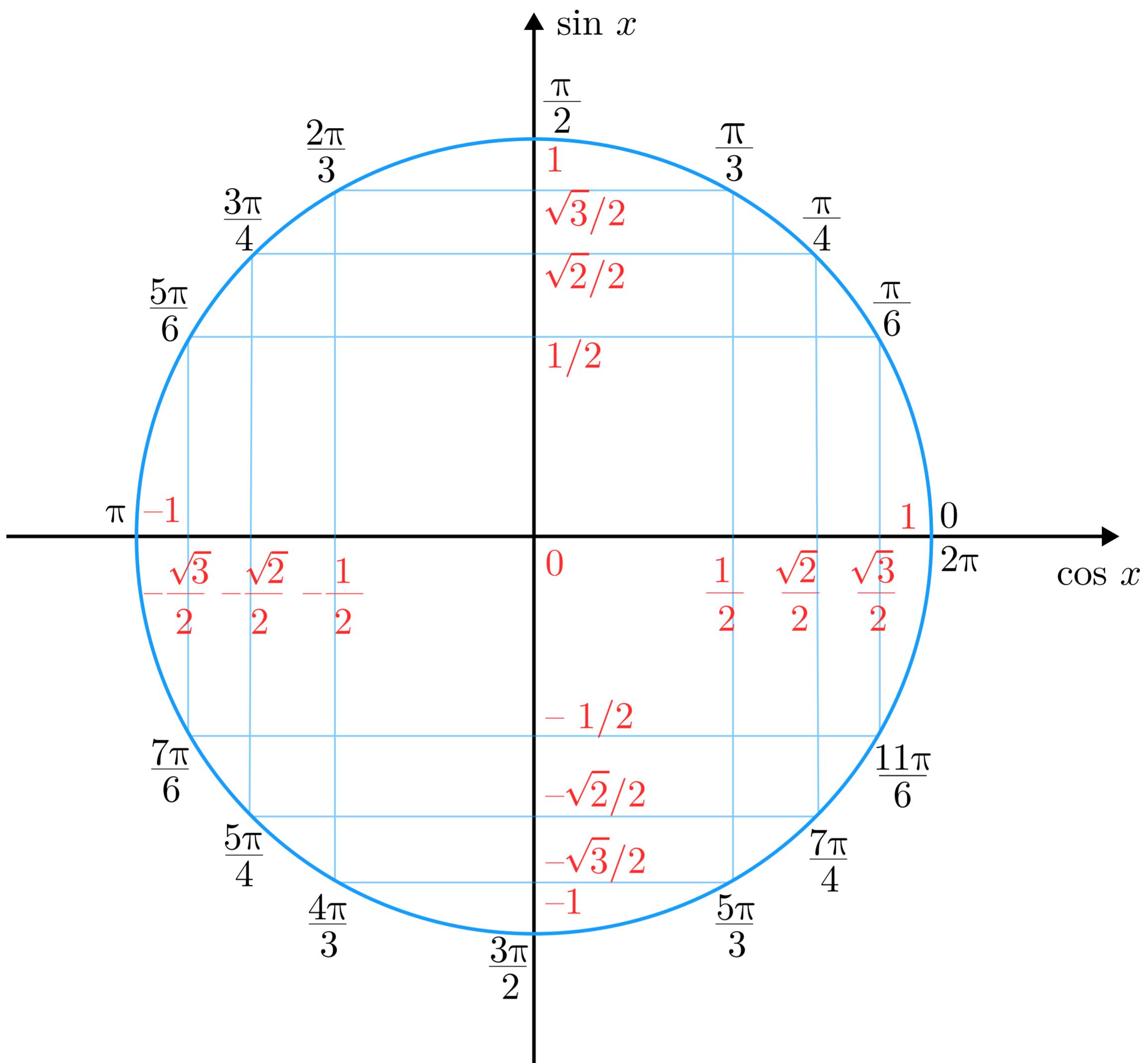
Основное соответствие

$$180^\circ = \pi \text{ (рад)}$$

Формулы перевода:

- Из градусов в радианы: $x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180}$
- Из радиан в градусы: $x \text{ (рад)} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

Тригонометрическая окружность



Основные углы

α	градусы	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	
$\ctg \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Тангенс и котангенс

$$\tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\ctg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tg \alpha \cdot \ctg \alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Формулы суммы/разности

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Формулы двойного и тройного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Синус, косинус и тангенс половинного угла

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Формулы приведения

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

Любую из формул приведения можно получить, пользуясь правилом:

а) в правой части формулы ставится такой же знак, какой имеет левая часть, если считать, что:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

б) если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, а косинус - на синус; если же угол равен $\pi \pm \alpha$, то функция не меняет своего названия.

Для любого целого $n (n \in \mathbb{Z})$ справедливы равенства:

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение $\cos x = a$

1. Арккосинус числа $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arccos a$) – такое число $a \in [0; \pi]$, косинус которого равен a , т. е.

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \cos(\arccos a) = a.$$

Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$, если $a \in [-1; 0)$, то $\frac{\pi}{2} < \arccos a \leq \pi$.
Если $|a| > 1$, то выражение $\arccos a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство $\cos(\arccos a) = a$. Равенство $\arccos(\cos a) = a$ является верным только при $a \in [0; \pi]$, хотя $\arccos(\cos a)$ имеет смысл при всех $a \in R$. Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

3. Если $-1 \leq a \leq 1$, то все корни уравнения $\cos x = a$ определяются формулой $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$. Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней.

4. Формулы корней уравнения $\cos x = a$ при $a = 0, a = 1, a = -1$:

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z;$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Уравнение $\sin x = a$

1. Арксинус числа $a \in [-1; 1]$ (обозначается $\arcsin a$) такое число — $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ синус которого равен a , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \sin(\arcsin a) = a.$$

Если $a \in [0; 1]$, то $0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, а если $a \in [-1; 0)$, то $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a < 0$.

Если $|a| > 1$, то выражение $\arcsin a$ не имеет смысла.

2. Для любого $a \in [1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin a) = a.$$

Равенство

$$\arcsin(\sin a) = a$$

является верным при $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ хотя выражение в левой части имеет смысл при всех $a \in R$. Для любого $a \in [-1; 1]$ верно равенство $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

3. Для любого $a \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$$

4. Если $|a| \leq 1$, то все корни уравнения $\sin x = a$ определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней.

5. Формулы корней уравнения $\sin x = a$ при $a = 0, a = 1, a = -1$:

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

1. Арктангенс числа $a \in R$ (обозначается $\operatorname{arctg} a$) — такое число $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a , т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \alpha = a.$$

2. Для любого $a \in R$ справедливо равенство

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a.$$

Равенство

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha
является верным только при $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.$$

Для любого $a \in R$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a.$$

3. Для любого $a \in R$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни, определяемые формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$