

# ТЕОРИЯ. ОСНОВЫ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПРИЗМА



## Многогранники

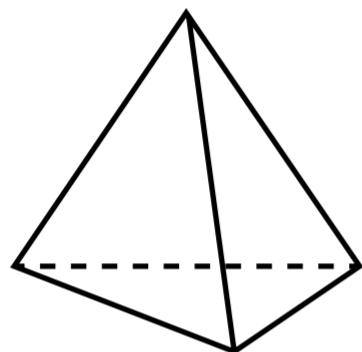
### Определения.

Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, называется **многогранной поверхностью**, или **многогранником**.

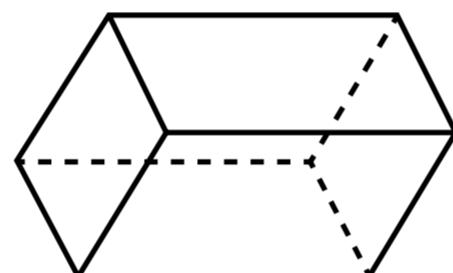
Тело, ограниченное многоугольниками, часто также называют многогранником.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. Стороны граней называются **рёбрами**, концы рёбер — **вершинами многогранника**. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю многогранника**.

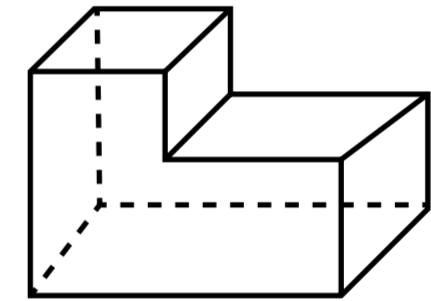
Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.



Тетраэдр



Параллелепипед



Невыпуклый многогранник

**Правильным многогранником** называется выпуклый многогранник, если все его грани — равные правильные многоугольники и, кроме того, в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер.

Виды правильных многогранников:

1. Правильный тетраэдр составляет из 4-х равносторонних треугольников.
2. Правильный октаэдр составлен из 8 равносторонних треугольников.
3. Правильный икосаэдр составляет из 20 равносторонних треугольников.
4. Куб составляет из 6 квадратов.
5. Правильный додекаэдр составляет из 12 правильных пятиугольников.

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет

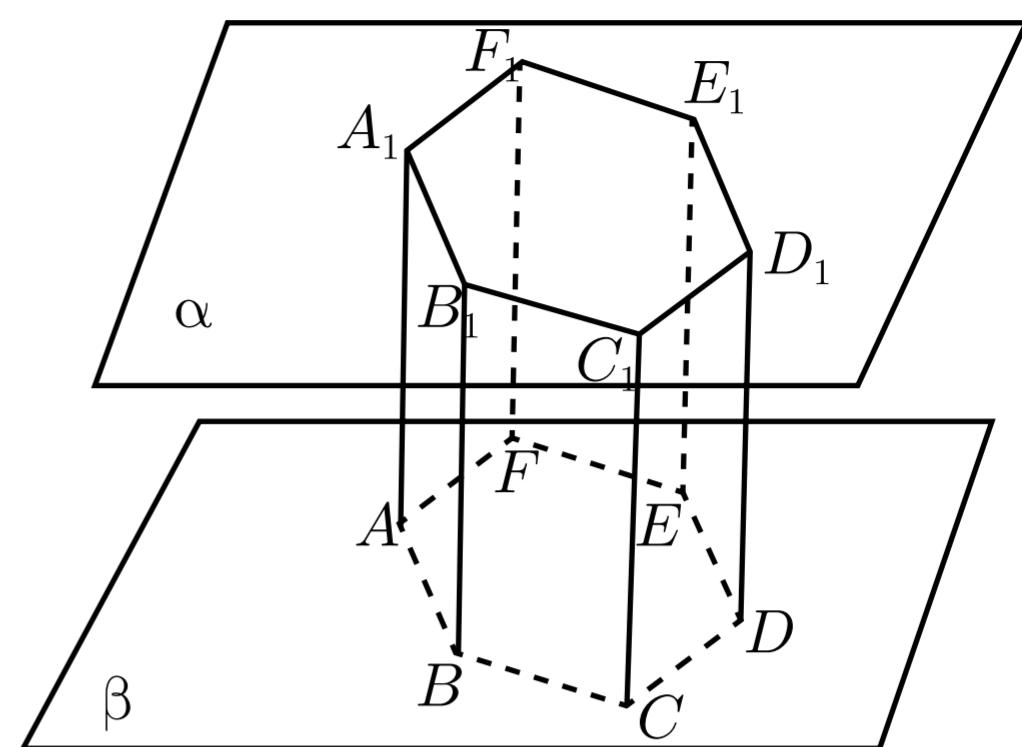
## Призма. Параллелепипед. Прямоугольный параллелепипед

### Определения.

Многогранник, составленный из двух равных  $n$ -угольников, расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов, называется **призмой**.

Многоугольники  $ABCDEF$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  называются **основаниями**, а параллелограммы  $ABB_1A_1$ ;  $BCC_1B_1$ ;  $CDD_1C_1$  и т. д. называются **боковыми гранями**.

Отрезки  $AA_1$ ;  $BB_1$ ;  $CC_1$ , ... называются **боковыми рёбрами призмы**. Эти рёбра, как противоположные стороны параллелограммов, равны и параллельны.

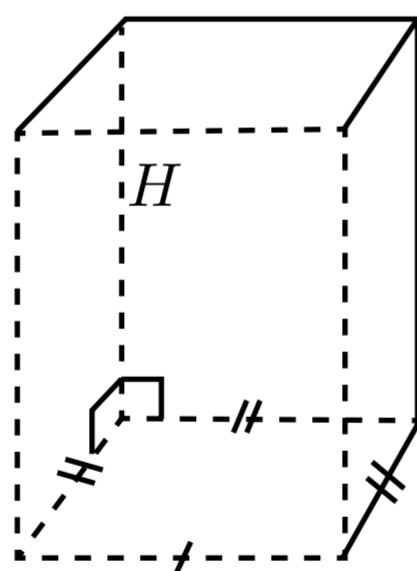


### Определения.

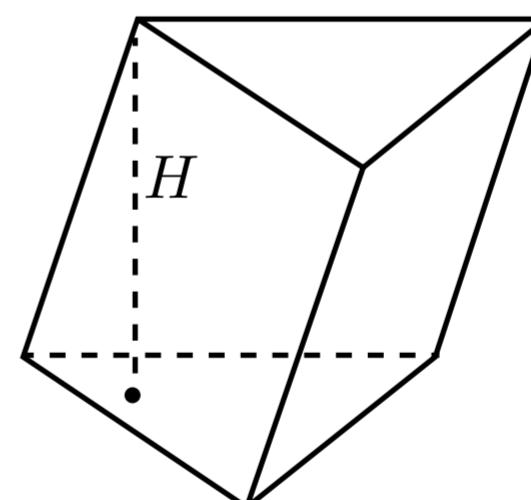
1. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется **высотой призмы**.

2. Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**, в противоположном случае — **наклонной**. Высота прямой призмы призмы равна её боковому ребру.

3. Прямая призма называется **правильной**, если её основания — правильные многоугольники, а боковые грани — равные прямоугольники.



Прямая четырёхугольная призма (правильная)



Наклонная треугольная призма

**Площадью полной поверхности призмы** называется сумма площадей всех её граней.

**Площадью боковой поверхности призмы** называется сумма площадей её боковых граней.

$$S_{\text{полн. пов.}} = S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$$

**Теорема.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$$S_{\text{бок. пов. прям. приз.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$$

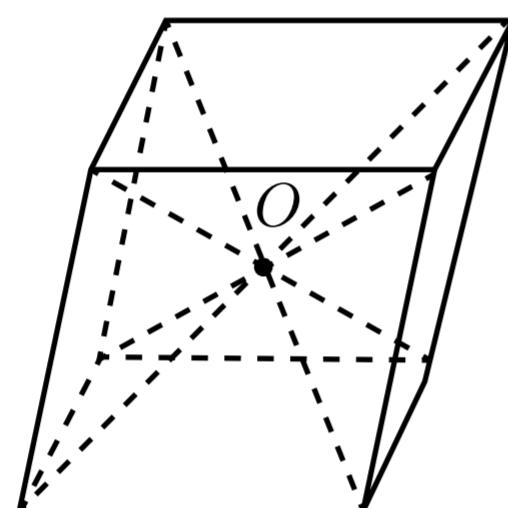
**Теорема.** Объём призмы (как прямой, так и наклонной) равен произведению площади основания на высоту призмы.

$$V_{\text{приз.}} = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

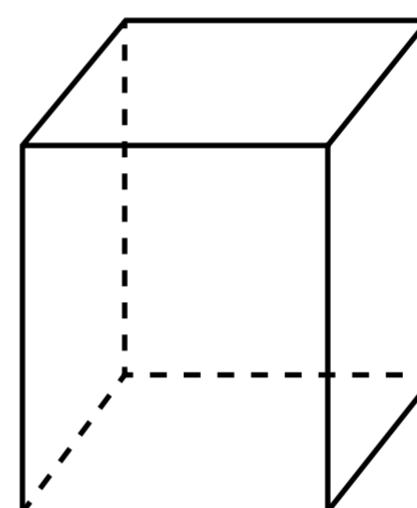
## Параллелепипед

### Определение.

Призма, имеющая в основании параллелограмм, называется **параллелепипедом**.



Наклонный  
параллелепипед



Прямой параллелепипед

Свойства параллелепипеда:

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Так как параллелепипед — это призма, то его объём равен произведению площади основания на высоту:

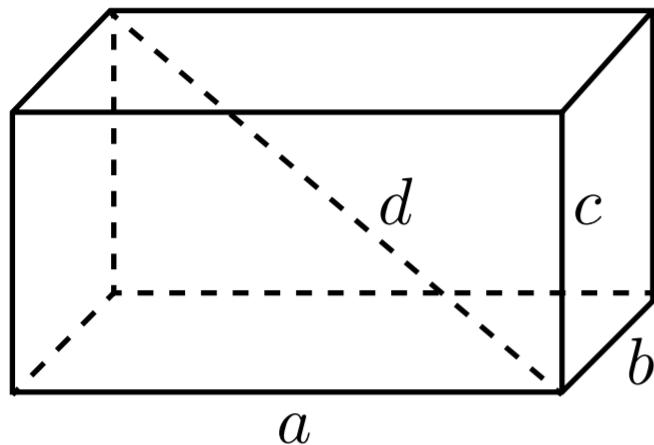
$$V_{\text{паралл.}} = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

## Прямоугольный параллелепипед

### Определения.

Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые рёбра перпендикулярны к основанию, а основания являются прямоугольниками.

Длины трёх рёбер, имеющих общую вершину, называются **измерениями прямоугольного параллелепипеда**.

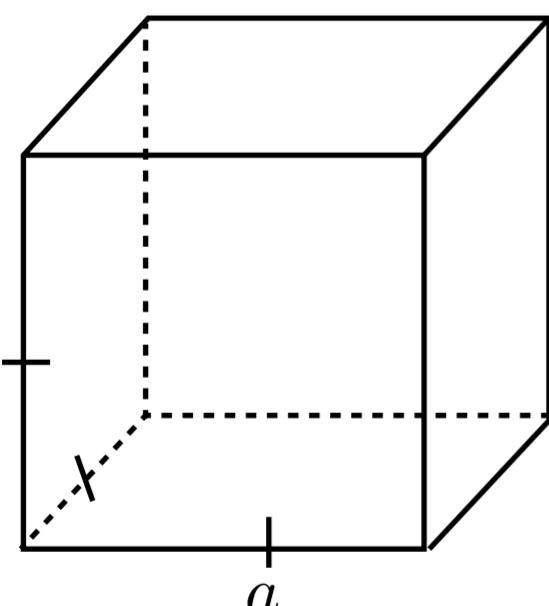


Свойства прямоугольного параллелепипеда:

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ .
4. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту (боковое ребро) или произведению трёх его измерений:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = a \cdot b \cdot c.$$



### Определение.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом**. Все шесть граней куба — равные друг другу квадраты.

Площадь полной поверхности куба равна:

$$S_{\text{пов. куба}} = 6a^2.$$

Объём куба равен кубу длины его ребра:

$$V_{\text{куба}} = a^3.$$