Um Tiro na Interseção das Hipérboles

***Osvaldo Germano do Rocio*[1] *João Roberto Gerônimo*[2]**

RESUMO. Neste trabalho, abordaremos o problema de detectar o lugar de ocorrência de um tiro via o conceito de hipérbole e suas intersecções.

Palavras-chave: *Hipérbole, geometria analítica, aplicação da hipérbole.*

1. Introdução

Assistindo a um documentário no canal Discovery Channel de uma televisão por assinatura, tivemos conhecimento da seguinte situação: para inibir a ocorrência de "balas perdidas", uma cidade dos Estados Unidos instalou sensores pela cidade capazes de detectar os estampidos que ocorrem quando algum tiro é disparado. Os sensores são instalados em locais estratégicos e quando pelo menos três detectam a ocorrência de algum disparo é possível, com certa precisão, determinar o local de onde partiu o tiro.

Neste trabalho pretendemos abordar o assunto e mostrar como acreditamos que ele funciona. A geometria analítica será nossa ferramenta básica e o título é uma pista de como ela contribui para o perfeito funcionamento do sistema instalado por essa cidade.

2. Formulação do Problema

Suponhamos que vários sensores estejam espalhados pela cidade em locais estratégicos e bem conhecidos. Estes sensores estão acoplados a relógios perfeitamente sincronizados entre si e são capazes de detectar a ocorrência de um ruído num horário com precisão de até milionésimos de segundos. Quando ocorre algum disparo vários sensores podem captar a sua ocorrência e, quando pelo menos três não colineares captam a sua ocorrência, deve se selecionar os três não colineares mais próximos do local do disparo.

Observem que, embora o local do disparo seja desconhecido, é perfeitamente possível saber quais dos sensores estavam mais próximos do local, basta observar os horários em que os relógios acoplados aos sensores registraram o estampido.

Com estes elementos, suponhamos que o local do disparo seja P (este local é desconhecido) e que as posições (conhecidas) dos sensores selecionados sejam P_1, P_2 e P_3. Consideremos H_1, H_2 e H_3 os respectivos horários em que os sensores

---

1 Doutor em matemática pela UNICAMP e docente da Universidade Estadual de Maringá-PR. E-mail: rocio@uem.br.
2 Doutor em engenharia elétrica pela UNICAMP e docente da Universidade Estadual de Maringá-PR. E-mail: jrgeronimo@uem.br.

colocados nos locais P_1, P_2 e P_3 captaram o estampido e suponhamos que $H_1 \leq H_2 \leq H_3$.

Consideremos agora as distâncias d_1, d_2, e d_3 do local P aos locais P_1, P_2 e P_3, respectivamente. Como não sabemos a localização de P, apesar de termos conhecimento da localização de P_1, P_2 e P_3, estas distâncias, por enquanto, são desconhecidas. Isto ocorre porque os sensores não determinam o momento do disparo mas o momento em que som do disparo chegou até cada um deles.

Ilustramos esta situação no mapa central da cidade de Maringá apresentado na Figura 1 em escala 1:8000.

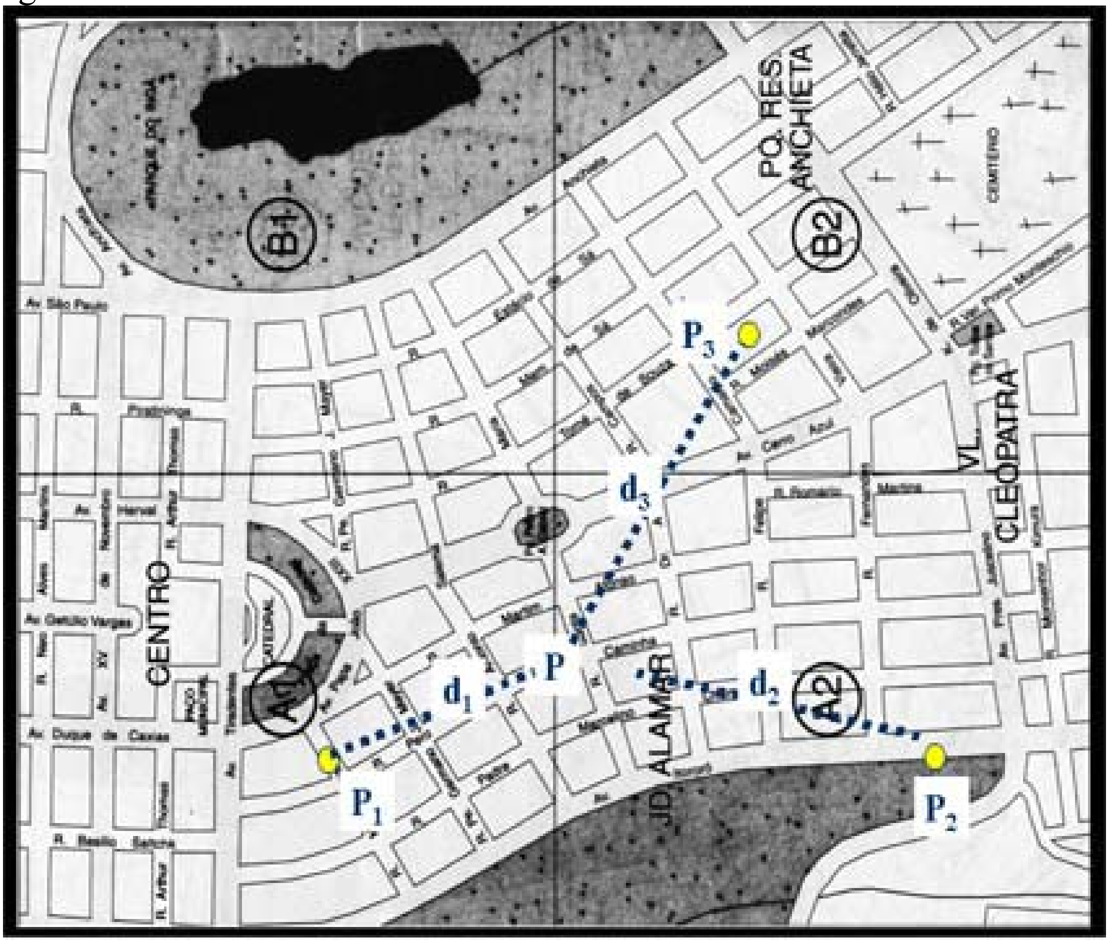

Figura 1: Mapa ilustrativo com localização conhecida dos sensores (pontos amarelos).

Como $H_1 \leq H_2 \leq H_3$ temos $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Consideremos os seguintes intervalos de tempo calculados com precisão de milionésimos de segundos:

- O tempo t_{21} é a diferença entre o horário em que o sensor localizado na posição P_2 e o sensor localizado na posição P_1 captou a ocorrência do disparo, ou seja,

$$t_{21} = H_2 - H_1.$$

- O tempo t_{31} é diferença entre o horário em que o sensor localizado na posição P_3 e o sensor localizado na posição P_1 captou a mesma ocorrência, ou seja,

$$t_{31}=H_3-H_1.$$

Frisamos novamente que, embora as distâncias d_1, d_2 e d_3 não sejam conhecidas[3], pois não sabemos até o momento o local do disparo, podemos determinar as diferenças:

$$d_2-d_1 = a \quad \text{e} \quad d_3-d_1 = b. \tag{1}$$

De fato, sabendo que a velocidade do som no meio ambiente é aproximadamente 343 metros por segundos e convertendo os tempos t_{21} e t_{31} em segundos, essas são dadas por:

$$a = d_2-d_1 = t_{21}.(343) \text{ metros}$$
$$\text{e}$$
$$b = d_3-d_1 = t_{31}\ (343) \text{ metros.}$$

Pelas nossas hipóteses sobre os horários em que os sensores captaram s disparo, temos que

$$0 \le a \le b. \tag{2}$$

Denotando por d a distância euclidiana e utilizando a desigualdade triangular segue que

$$\begin{aligned} &a = d_2-d_1 = d(P,P_2) - d(P,P_1) \le d(P_1,P_2) \\ \text{e} \\ &b = d_3-d_1 = d(P,P_3) - d(P,P_1) \le d(P_1,P_3). \end{aligned} \tag{3}$$

Vamos agora fixar um sistema de coordenadas associados à situação da seguinte forma: A origem do sistema de coordenadas deve ser o ponto médio O do segmento P_1P_2. O eixo das abscissas deve ser tomado como sendo a reta passando por P_1 e P_2 orientada no sentido do segmento P_1P_2. O eixo das ordenadas deve ser a reta passando por O e perpendicular ao segmento P_1P_2 orientada de forma que P_3 esteja no semi-espaço positivo determinado pelo eixo das abscissas (Figura 2).

---

[3] Veja que se estas distâncias fossem conhecidades o problema estava resolvido através da intersecção de três circunferências.

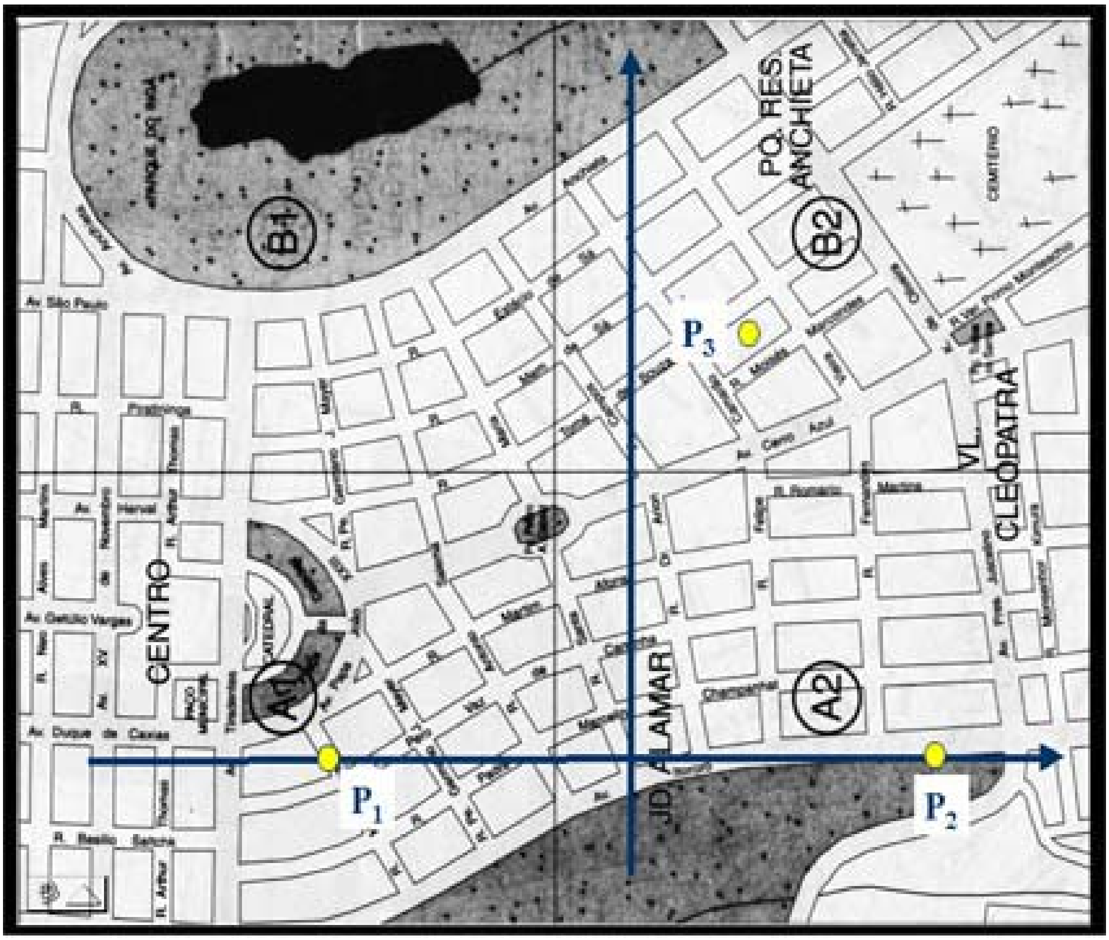

Figura 2: Mapa ilustrativo da Figura 1 com o sistema de eixos coordenados.

Consideremos fixo este sistema de coordenadas e suponhamos que :

$P_1 = (-c,0)$ (local do sensor que registrou o menor tempo)
$P_2 = (c,0)$ (local do sensor que registrou o segundo menor tempo)
$P_3 = (x_3,y_3)$ (local do sensor que registrou o terceiro menor tempo) (4)
$P = (x,y)$ (local do disparo)

Pelas hipóteses formuladas c > 0 e como estamos procurando quem são as coordenadas x e y do ponto P, elas devem satisfazer ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} d(P_2,P)-d(P_1,P) = a & (5) \\ d(P_3,P)-d(P_1,P) = b\,. & (6) \end{cases}$$

Portanto, determinar o local do disparo é equivalente a determinar a solução do sistema acima, mediante as condições já estabelecidas.

3. Solução Geométrica

Neste ponto nos lembramos da equação da hipérbole! Se F_1 e F_2 são dois pontos fixos distintos e se k é um número real fixo satisfazendo

$$0 < k < d(F_1,F_2)$$

então a hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo transverso medindo 2k é o lugar geométrico dos pontos P que satisfazem à equação:

$$\left| d(F_2,P) - d(F_1,P) \right| = 2k.$$

O gráfico da hipérbole possui dois ramos: um positivo associado à equação

$$d(F_2,P) - d(F_1,P) = 2k.$$

o qual consiste dos pontos da hipérbole mais próximos de F_1 que de F_2 e o outro (que chamaremos de negativo) associado à equação

$$d(F_2,P) - d(F_1,P) = -2k.$$

o qual consiste dos pontos da hipérbole mais próximos de F_2 que de F_1.

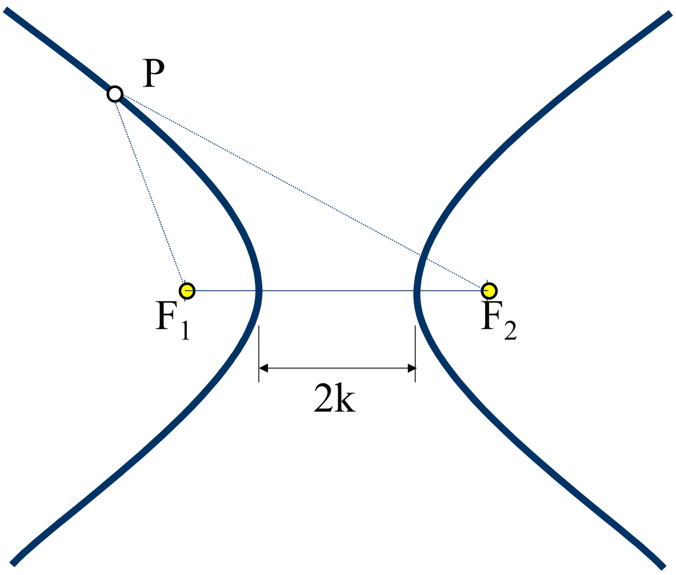

Figura 3: Representação gráfica da hipérbole de focos F_1 e F_2 e excentricidade c.

Com isto podemos observar que o ponto P de onde partiu o disparo estará situado exatamente na interseção dos ramos positivos de duas hipérboles assim descritas:

A primeira tem por focos os pontos P_1 e P_2 e eixo transverso medindo

$$a = d_2-d_1;$$

A segunda tem por focos os pontos P_1 e P_3 e eixo transverso medindo

$$b = d_3 - d_1.$$

Representando geometricamente as equações (5) e (6) obteremos um gráfico com o aspecto apresentado na Figura 4. Considerando que partimos de uma situação em que os sensores estavam em posições bem conhecidas e posicionando o gráfico em um mapa da cidade com escala adaptada ao parâmetros métricos adotados, teremos que o local de onde partiu o disparo está situado na intersecção dos ramos positivos de duas hipérboles.

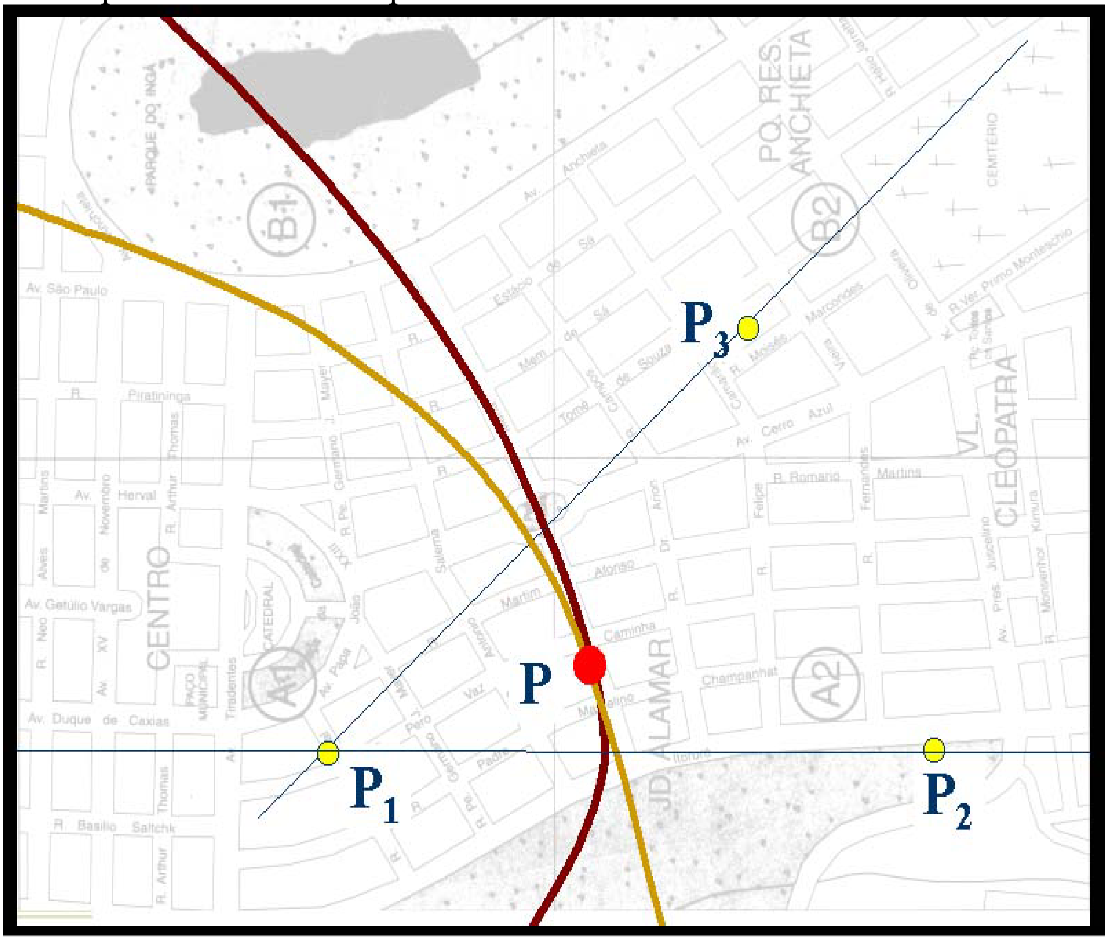

Figura 4: Intersecção dos ramos positivos das hipérboles de focos P_1 e P_2 e focos P_1 e P_3.

4. Solução Algébrica

Na seção anterior abordamos o problema do ponto de vista geométrico. Nesse método a possibilidade de ocorrência de imprecisões é bem maior do que o do método que abordaremos nesta seção.

Do ponto de vista algébrico devemos analisar a solução do sistema de equações não lineares

$$d(P_2,P) - d(P_1,P) = a \qquad (7)$$

$$d(P_3,P) - d(P_1,P) = b \tag{8}$$

onde $0 \leq a \leq b$ e as coordenadas dos pontos P_1, P_2 e P_3 satisfazem as condições estabelecidas em (4).

Primeiramente, lembramos que foram considerados três sensores não colineares. Isto é suficiente para garantir que teremos duas hipérboles distintas.

Desenvolvendo a equação (7) obtemos

$$cx + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{9}$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{d^2} = 1 \tag{10}$$

onde $d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Isolando a variável x, que deve ser negativa, obtemos de (10) que

$$x = -\frac{a}{2d}\sqrt{d^2 - y^2} \tag{11}$$

.

Desenvolvendo a equação (8) obtemos:

$$(-2x_3 - 2c)x + (-2y_3 y) + (x_3^2 + y_3^2 - b^2 - c^2) = 2b\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \tag{12}$$

Comparando (9) e (12) obtemos

$$(2(x_3 + c) - \frac{4bc}{a})x = -2y_3 y + (x_3^2 + y_3^2 - b^2 - c^2 + ba) \tag{13}$$

Substituindo (11) em (13) obtemos

$$m\sqrt{d^2 - y^2} = -2y_3 y + n.$$

onde $m = \frac{-e}{d}(2(x_3 + c) - \frac{4c}{a})$ e $n = x_3^2 + y_3^2 - b^2 - c^2 + ba$.

Elevando ao quadrado, obtemos finalmente a seguinte equação de segundo grau na variável y

$$(4y_3^2 + m^2)y^2 - 4y_3 ny + (n^2 - m^2 d^2) = 0 \tag{14}$$

Portanto, a solução corresponde a dois valores de y. Para sabermos qual é a solução correta testamos as soluções na equação (10), que nos fornecerá o resultado. Vejamos um exemplo hipotético.

5. Exemplo Ilustrativo

Suponhamos que algum disparo tenha ocorrido e que três sensores tenham captado o estampido nos seguintes horários:

$$H_1 = 8h{:}12min{:}25\ seg\ 125\ \mu s$$
$$H_2 = 8h{:}12min{:}25\ seg591\ \mu s$$
$$H_3 = 8h{:}12min{:}26\ seg\ 238\ \mu s$$

Nesse caso

$$t_{21} = H_2 - H_1 = 466 \text{ milésimos de segundos,}$$
$$t_{31} = H_3 - H_1 = 647 \text{ milésimos de segundos,}$$

Portanto as respectivas diferenças das distâncias do ponto onde ocorreu o disparo aos pontos P_1, P_2 e P_3 são

$$\begin{aligned} a = d_2 - d_1 = t_{21} \times 343 = 0{,}466 \times 343 \cong 160 \text{ m},\\ b = d_3 - d_1 = t_{31} \times 343 = 0{,}647 \times 343 \cong 222 \text{ m}. \end{aligned} \qquad (15)$$

Suponhamos agora que as coordenadas dos pontos onde estão instalados os sensores sejam

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0)\\ P_2 &= (0,864)\\ P_3 &= (168,744). \end{aligned} \qquad (16)$$

Calculando os valores de d, m e n obtemos

$$d = 318{,}195,\ m = 229{,}98 \text{ e } n = 102.732{,}42.$$

Substituindo os valores em (14) e resolvendo a equação de segundo grau obtemos dois valores:

$$32{,}83 \text{ e } 178{,}98.$$

Substituindo em (11) obtemos os valores de x respectivamente iguais a

$$-79{,}17 \text{ e } -65{,}81.$$

Testando os pontos (-79,17 , 32,83) e (-65,81 , 178,98) na equação (10) verificamos que apenas o primeiro satisfaz a equação e este ponto será a intersecção das duas hipérboles que corresponderá ao local onde ocorreu o tiro.

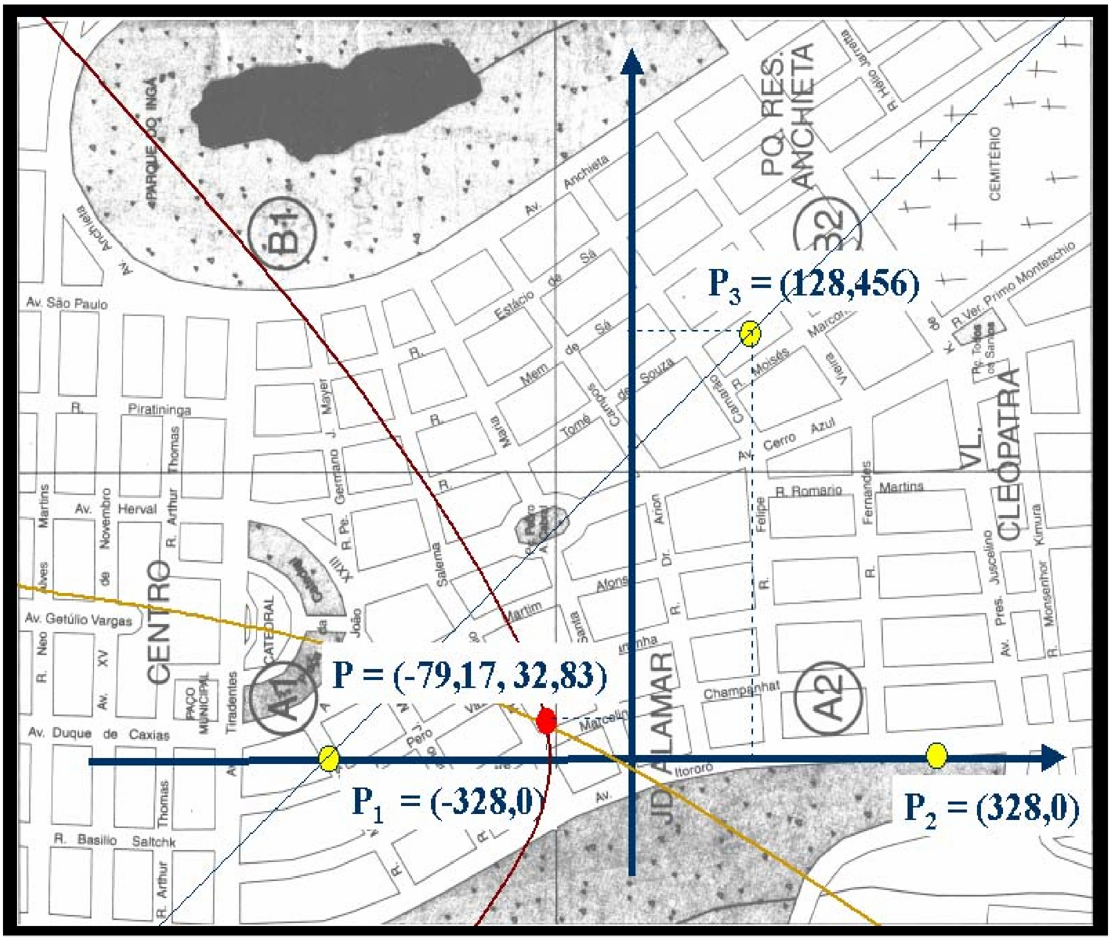

Figura 4: Intersecção dos ramos positivos das hipérboles de focos P_1 e P_2 e focos P_1 e P_3

6. Comentários Finais

A precisão na determinação exata do local onde ocorreu o disparo depende essencialmente da precisão tanto dos aparelhos eletrônicos como do mapa da cidade e do perfeito conhecimento do local exato dos sensores. No entanto, no atual estágio de desenvolvimento tecnológico isto é perfeitamente possível de se ter.

6. Indicações Bibliográficas

[1] BOLDRINI, J. L.; COSTA S, I. R.; RIBEIRO, V. L. F.; WETZLER, H. G.; Álgebra Linear. 3ª. ed., Harper & Row do Brasil. São Paulo, 1980.
[2] BOULOS P. CAMARGO, I.;. Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial. McGraw-Hill Ltda.. São Paulo, 1987.