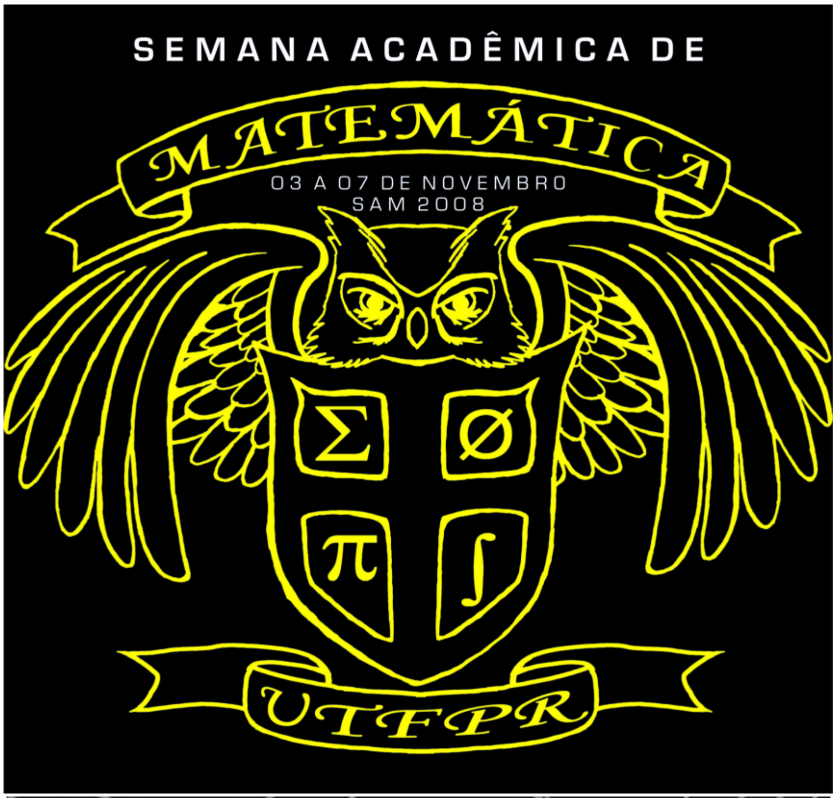


Oficina de Matemática: Simetrias

Texto: Armando Caputi e João Roberto Gerônimo (original)
João Roberto Gerônimo (alterações)

Ministrantes: João Roberto Gerônimo e Júlio César Coelho

Monitores: Cleilton Aparecido Canal e Kleber Luciano Niro

Novembro de 2008
Maringá – PR

Índice

Introdução

O trabalho com simetrias no plano possibilita a construção gradativa de conceitos geométricos, pois permite concretizar diversas situações que servem como ponto de partida para a exploração do deslumbrante mundo das formas que é a Geometria. Além do caráter lúdico que imprime às aulas e da importância matemática do tema, atividades envolvendo simetrias no plano, com materiais manipulativos, recursos computacionais ou ambos, quando realizadas de maneira apropriada, são excepcionalmente ricas em possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio qualitativo e da autonomia do participante.

A Oficina está organizada em quatro fases:

1. Construindo o Conceito de Simetria: Na primeira fase é trabalhado o conceito de simetria, tomando como ponto de partida as noções intuitivas dos participantes para chegar, através de diferentes atividades, ao conceito matemático do tema. Nesta fase é destacada a importância das isometrias do plano na conceituação das simetrias.
2. Entendendo o Conceito e Classificando as Isometrias no Plano: Durante a segunda fase é apresentado o conceito de isometria (os movimentos que aparecem na primeira fase) utilizando o programa Geogebra e uma classificação das isometrias do plano.
3. Classificando as Simetrias de Figuras Planas: Na terceira fase, os participantes lidam com o processo de classificação das simetrias planas e de reconhecimento dos diferentes padrões simétricos.
4. Simetrias no Computador e no Vídeo: Na quarta e última fase é apresentado sugestões de programas computacionais e vídeos que tratam do tema.

Esta oficina enfatiza que o trabalho do professor não deve se restringir a uma única estratégia de ação, mas utilizar todas as formas possíveis dentro e fora de seu ambiente escolar. Quanto mais possibilidades de utilização desses diversos tipos de abordagem, mais rico será o desenvolvimento desse e de outros temas que o professor trabalhe com os alunos. Além disso, a oficina destaca a importância de se trabalhar o conteúdo dado em sala de aula dentro de um contexto mais avançado, proporcionando ao aluno um momento de aprofundamento dos conceitos matemáticos.

No início e no final é solicitada uma pré e pós-avaliação para detectar o quanto a oficina proporcionou de conhecimento do tema. Tais avaliações não necessitarão de identificação.

A equipe MATEMATIVA agradece o seu interesse pela oficina.

Construindo o Conceito de Simetria

Cada um de nós possui, mesmo que vagamente, alguma concepção de simetria. Ao observarmos o mundo ao nosso redor, identificamos algumas imagens como simétricas, outras como assimétricas, mesmo sem explicitar o que queremos dizer com isso. A Matemática também tem sua concepção de simetria.

Atividade 1 Pré-Avaliação

Começaremos com pré-avaliação para obter o conceito que cada um possui de simetria.

Desenvolvimento:

1. Cite seis palavras ou expressões que o termo "simetria" lhe faz pensar.

2. Dentre as palavras/expressões citadas indicar as duas que lhe pareça mais próxima.

3. Realize o SIMIS-TESTE e anote aqui a porcentagem de acertos obtida:

4. Cite seis palavras ou expressões que o termo "simetria" lhe faz pensar.

5. Dentre as palavras/expressões citadas indicar as duas que lhe pareça mais próxima.

6. Realize o SIMIS-TESTE e anote aqui a porcentagem de acertos obtida:

7. Analise a veracidade das seguintes frases:

"Se a figura tiver reflexão então ela é simétrica!"

"Se a figura for simétrica então ela possui reflexão"

8. Quais palavras, dentre as abaixo mencionadas, mais se aproximam do conceito de simetria na sua concepção?

Harmonia	Repetição de Padrão	Reflexão	Beleza
Eixo de reflexão	Fractal	Translação	Transformação
Rotação	Deslocamento	Isometria	Movimento Rígido
Giro	Eixo de simetria	Função Bijetora	Semelhança

Atividade 2 Observando fotos e figuras

Vamos agora explorar esse particular enfoque, descobrindo, ao mesmo tempo, como a Matemática estuda e classifica seus objetos.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Observe as fotos apresentadas.
- Separe-as em dois grupos, conforme as considere simétricas ou não.
- Divida as simétricas em grupos que lhe pareçam semelhantes.
- Quais foram seus critérios?

2ª parte:

- Compare sua classificação com outros colegas.
- Os critérios usados foram os mesmos?
- Quais as diferenças?

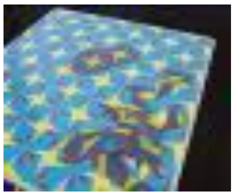
A partir dessas observações e comparações, chegaremos à concepção matemática de simetria.

Atividade 3 As mesas simétricas

Vamos passear um pouco pela Matemativa: Exposição Interativa de Matemática. Lá vamos encontrar duas mesas com uma mesma figura sobre elas (protegidas por um acrílico). Numa delas estão espalhadas vários pedaços iguais e na outra estão dois acrílicos com parte da figura desenhada sobre eles. Estas duas mesas foram feitas para se perceber em figuras simétricas a existência de padrões se repetindo e a existência de movimentos que não alteram a figura.

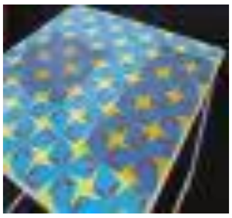
Desenvolvimento:

1ª parte: Repetição de Padrão



- Nas "mesas simétricas", discuta com os colegas a distribuição dos padrões na figura.
- Quais movimentos descrevem a "repetição" do padrão na reconstrução da figura?

2ª parte: Invariância



- Nas "mesas simétricas", discuta com os colegas os movimentos da peça de acrílico que preservam a figura e o que ocorre com a figura.
- Quais movimentos deixam essa figura invariante?

Atividade 4 Identificando os padrões de uma figura

A atividade anterior mostrou duas formas equivalentes com que a Matemática trabalha a noção de simetria. Uma delas é a existência de um padrão que se repete numa dada figura, de acordo com oportunos movimentos do plano. A atividade que se segue busca explorar ainda mais essa concepção.

Desenvolvimento:

- Considere a figura fornecida pelos monitores.
- Utilizando o pedaço de acrílico fornecido pelos monitores, coloque-o sobre a figura para desenhar o padrão encontrado.
- Determine os movimentos que fazem com que este padrão complete a figura toda.
- Compare os resultados entre os colegas.

Atividade 5 Identificando as simetrias de uma figura

A outra forma de conceber a simetria, como vimos anteriormente, é a existência de certos movimentos do plano que deixam uma dada figura invariante. Esses movimentos são o que chamamos de simetrias da figura. Voltemos nossa atenção agora a essa concepção.

Desenvolvimento:

- Considere a figura fornecida pelos monitores.e busque identificar suas simetrias.
- Coloque o acrílico (fornecido pelos monitores) sobre a figura e copie o desenho.
- Movendo o acrílico, determine os movimentos que deixam a figura invariante.
- Compare os resultados entre os colegas.

Atividade 6 Construindo figuras simétricas

A determinação do padrão numa figura simétrica está intimamente ligada aos movimentos que preservam essa figura. O conhecimento do padrão, por si só, não nos permite reconstruir a figura original, é igualmente necessário conhecer os movimentos (simetrias) que constituem as devidas "repetições". Mas então, dada certa quantidade de padrões (todos iguais), é possível construir diferentes figuras simétricas?

Desenvolvimento:

- Considere a figura fornecida pelos monitores.e.cole conforme indicado.
- Recorte os padrões.
- Construa uma figura simétrica com estes padrões colando-os na grade.
- Anote ao lado da grade os movimentos que você utilizou para construí-la.
- Compare os resultados entre os colegas.

Atividade 7 Reconstruindo figuras

Na última atividade pudemos perceber como a construção de uma figura simétrica depende tanto do padrão inicial quanto das isometrias que aplicamos a ele. Ao que parece, então, o conhecimento desse par "padrão-simetrias" é suficiente para reconstruirmos uma dada figura. Será? Se nos fornecerem um padrão e um conjunto de movimentos que compõem uma figura que não conhecemos, seremos capazes de reconstruí-la novamente?

Desenvolvimento:

- Pegue a figura fornecida pelos monitores e encontre suas simetrias.
- Identifique o padrão existente.
- Recorte a figura em pedaços, definidos pelo padrão que você identificou.
- Escreva na folha em branco as simetrias da sua figura.
- Reúna os pedaços e entregue a um dos monitores, junto com a relação das simetrias.

- Receba o material do monitor e tente reconstruir a figura utilizando as informações fornecidas.
- Discuta o resultado.

Conclusão desta seção:

O conceito de simetria está ligado a:

- Existência de um padrão que se repete sob determinados movimentos;
- A figura fica invariante sob determinados movimentos.
- Os movimentos observados foram: deslocamentos em determinadas direções, giro da figura em certos pontos e determinados ângulos e algumas reflexões.

Questões a serem respondidas:

- Qual a definição formal destes movimentos?
- Que característica matemática possui estes movimentos?
- Existem somente estes tipos de movimentos?
- Como classificar todos os movimentos possíveis que determinam figuras simétricas segundo esta concepção?

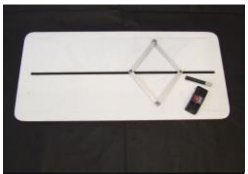
Entendendo o Conceito e Classificando as Isometrias do Plano

Atividade 8 Realizando isometrias com sistemas articulados

Voltemos à Matemativa: Exposição Interativa de Matemática. Lá vamos encontrar uma mesa com quatro mecanismos com articulações e deslizamentos. Eles foram feitos para realizar os quatro tipos de isometrias acima mencionados.

Desenvolvimento:

1ª parte: A Reflexão



- No mecanismo articulado "Reflexões", produza cópias refletidas de seu desenho.
- Qual o eixo de reflexão?

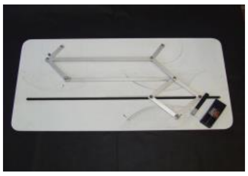
2ª parte: A Translação

- Com o mecanismo articulado "Translações", produza cópias transladadas de seu desenho.
- Qual o vetor da translação que o mecanismo reproduz?

3ª parte: A Rotação

- Com o mecanismo articulado "Rotações", produza cópias rotacionadas de seu desenho.
- Qual o ângulo de rotação produzido pelo mecanismo?

4ª parte: A Glissoreflexão



- No mecanismo articulado "Glissoreflexão", produza cópias "glissorefletidas" de seus desenhos.
- Identifique a reflexão e a translação envolvidas no mecanismo.

Uma vez compreendido o conceito de isometria de um plano, o passo seguinte - típico do pensamento matemático - consiste em **classificar** os tipos possíveis de isometrias.

Antes de entrarmos no processo de classificação, porém, iremos nos familiarizar com quatro tipos importantes de isometrias: **reflexões, translações, rotações e glissoreflexões**.

Observe que ainda não conhecíamos esta última transformação: a glissoreflexão. Caberia questionar a razão de se colocar esta transformação aqui sendo que ela é a composta de duas já conhecidas. Veremos mais adiante que isto se justifica pela classificação das isometrias planas. Por enquanto nos contentaremos em apenas tomar conhecimento dela.

Atividade 9 Um pouco sobre o GeoGebra©

- **O que é?**

Para explorarmos ainda mais as isometrias que vimos anteriormente, nada melhor do que um ambiente de geometria dinâmica. Escolhemos o software GeoGebra© por se tratar um software livre que, além do mais, não deixa nada a desejar se comparado a softwares proprietários do mesmo gênero.

O GeoGebra© é um software de matemática dinâmica para utilização no ensino médio e reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. Segundo o site oficial (www.geogebra.at), recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio software educacional Alemão e Europeu.

Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

- **O que se pode fazer com ele?**

Por um lado, o GeoGebra© é um sistema dinâmico de geometria onde se pode fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como gráficos de funções.

Por outro lado, o GeoGebra© tem a habilidade de tratar das variáveis para números, vetores e pontos, permitindo encontrar derivadas e integrais de funções e oferecendo comandos como Raízes ou Extremos.

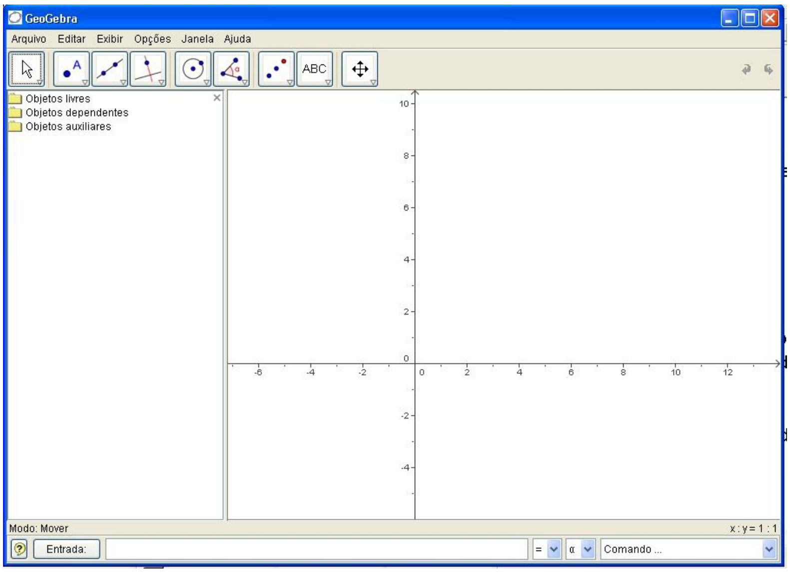
O GeoGebra© possui dois ambientes: uma janela geométrica e uma janela algébrica. As equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente na janela algébrica e as figuras geométricas podem ser inseridas na janela geométrica. Esses dois ambientes são característicos do GeoGebra©: uma expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa.

- **Como instalar e obter ajuda**

No site oficial estão todas as informações sobre instalação e ajuda. No site http://www.geogebra.at/help/docupt_BR.pdf você pode obter um manual em português sobre o GeoGebra©. Ele é um software livre (GNU General Public License) e, portanto, pode ser utilizado de forma não comercial sem nenhum custo.

- **Tela Inicial**

A tela inicial deste programa não é muito diferente de outros programas do gênero e o trabalho com este programa se resume em escolher no menu e nos botões o que se quer fazer.



Vamos desenvolver uma atividade simples apenas para nos familiarizar com ele:

Desenvolvimento:

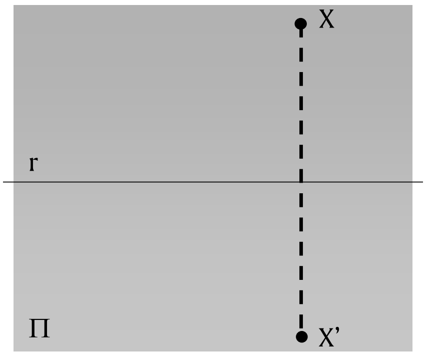
- Abra o programa GeoGebra© clicando no ícone sobre a área de trabalho.
- Clicando na opção "Exibir" desative a opção de exibir eixos clicando sobre a opção "Eixo". Para nós não será necessário utilizar sistema de eixos coordenados.
- Clique sobre os 9 quadradinhos (ícones) que são as ferramentas de desenho e liste todos os possíveis comandos que podemos executar sobre a tela, separando as 9 classes e depois separando em cada classe as respectivas subclasses (para ver as subclasses, você deve posicionar o mouse sobre a flechinha).
- Desenhe dois pontos.
- Desenhe uma reta passando por estes dois pontos.
- Desenhe a mediatriz do segmento por estes dois pontos.
- Desenhe um triângulo e depois construa um triângulo congruente a este.
- Mude as propriedades de algum dos objetos que você desenhou.

Atividade 10 A Reflexão em torno de uma reta

Seja r uma reta do plano, a **reflexão em torno de r** é a função $R_r:\Pi\to\Pi$, definida por:

$$R_r(X)=\begin{cases} X & se \quad X\in r \\ X' & se \quad X\notin r \end{cases}$$

onde X′ é escolhido de tal modo que a reta r é a mediatriz do segmento XX′.



em outras palavras, a reflexão com relação a r é a isometria que leva cada ponto do plano em sua "imagem especular": um ponto perpendicularmente oposto com relação à r e à mesma distância de r. Observe que, por definição, os pontos da reta r são fixados por R_r. Sendo assim, R_r funciona como um espelho.

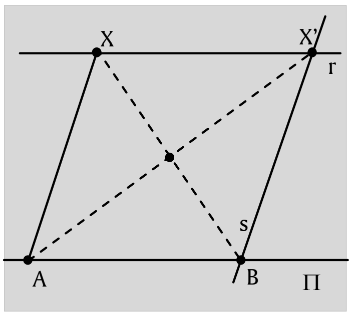
Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra©.
- Com a ferramenta "reta definida por dois pontos", crie uma reta r.
- Crie um polígono P_1 qualquer, preferencialmente situado totalmente em um mesmo lado da reta r.
- Com a ferramenta "reflexão com relação a uma reta" clique no polígono P_1 e depois na reta r. Aparecerá o polígono regular P_2, simétrico de P_1 em relação à reta r.
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Movimente a reta r e verifique a posição do polígono P_2.
- Movimente a reta r até que ela intercepte o polígono P_1.
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 movimentando a reta r?
- Utilizando a ferramenta "distância" sobre os lados de ambos os polígonos, verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1.
- Conclua que a reflexão é uma isometria. Como você demonstraria isto?
- Conclua também que os únicos pontos fixados pela reflexão são a reta r.

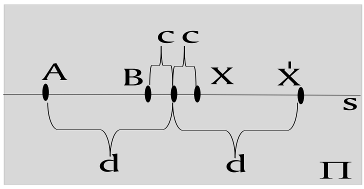
Atividade 11 A Translação por um segmento orientado

Dados dois pontos distintos A e B em Π, considere o segmento orientado AB. A **translação por** AB é a função $T_{AB}: \Pi \to \Pi$, definida por $T_{AB}(X) = X'$, onde X′ é o único ponto tal que os segmentos orientados XX′ e AB têm mesmo comprimento, mesma direção e mesma orientação (ou, de modo equivalente, X′ é o único ponto tal que AX′ e BX tenham o mesmo ponto médio).

Quando X não é colinear com A e B temos que A,X,X′ e B formam um paralelogramo, como na figura a seguir:



Quando X é colinear com A e B temos a situação ilustrada na figura a seguir:



Observamos que diferentes segmentos orientados fornecem a mesma translação. De fato, *dados dois segmentos orientados AB e CD, então $T_{AB} = T_{CD}$ se, e somente se, AB e CD são eqüipolentes*. Assim, o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, que é a classe de equivalência dos segmentos eqüipolentes a AB, determina uma única translação e, reciprocamente, uma translação determina um único vetor.

A translação está intimamente ligada com vetor. Em latim "vehere" significa transportar. Escreveremos então T_v ao invés de T_{AB} e definiremos $|v| = \overline{AB}$. Utilizando a linguagem vetorial, teremos que a translação nos fornece a seguinte relação,

$$v = T_u(X) - X \quad \text{ou} \quad T_u(X) = X + v.$$

Desenvolvimento:

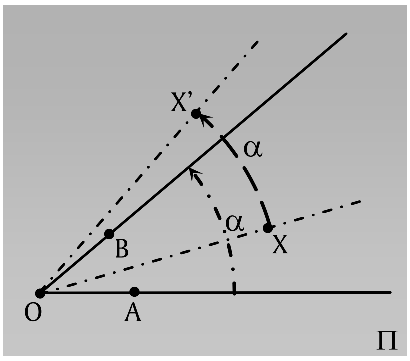
- No programa GeoGebra©, crie um polígono qualquer P_1.
- Crie um vetor v, de preferência, exterior ao polígono P_1. Note que este vetor representa todos os segmentos orientados que possuem a direção, o sentido e o módulo de v.
- Com a ferramenta "transladar por um vetor" clique no polígono P_1 e depois no vetor v.
- Aparecerá um segundo polígono P_2, obtido de P_1 por translação através de v.
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Movimente o ponto extremo final do vetor v e observe a posição de P_2 em relação a P_1.
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 movimentando o extremo do vetor v?
- Utilizando a ferramenta "distância" sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1.
- Conclua que a translação é uma isometria. Como você demonstraria isto?
- Conclua que não existem pontos fixados pela translação.

Atividade 12 A Rotação de um ângulo orientado em torno de um ponto

Sejam A, B e O pontos não colineares em Π e α = AOB um ângulo orientado de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $C_{O,\alpha}:\Pi\rightarrow\Pi$ definida por

$$C_{O,\alpha}(X) = \begin{cases} X & se \quad X = O \\ X' & se \quad X \neq O \end{cases}$$

onde X′ é tal que XO=X′O, XOX′=α e o sentido de rotação de X para X′ é o mesmo que o de OA para OB.



As rotações são isometrias bastante conhecidas e muito freqüentes em nosso dia-a-dia. É a única isometria do plano que possui um único ponto fixo, o centro da rotação. As circunferências centradas nesse ponto são preservadas pela rotação.

Desenvolvimento:

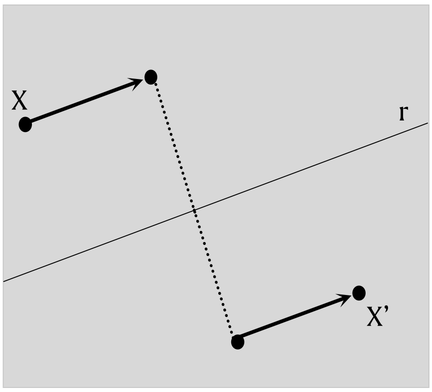
- No programa GeoGebra©, crie um polígono qualquer P_1.
- Crie um ponto O (de preferência, no exterior do polígono P_1).
- Crie um ângulo α.
- Com a ferramenta "girar em torno de um ponto por um ângulo", clique no polígono P_1, em seguida no ponto O e depois no ângulo α.

- Aparecerá um outro polígono P_2, obtido de P_1 por rotação do ângulo α em torno do ponto O.
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Clique no ângulo α e altere o valor do mesmo. Perceba que P_2 irá mudar de local, mas sempre será obtido de P_1 por rotação de ângulo α em relação ao ponto O.
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 alterando o ângulo α?
- Utilizando a ferramenta "distância" sobre os lados de ambos os polígonos, verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1.
- Conclua que a rotação é uma isometria. Como você demonstraria isto?
- Conclua que o único ponto fixado pela rotação é o centro.

Atividade 13 A Glissoreflexão em torno de uma reta e por um segmento orientado

Das quatro isometrias, é a mais incomum e, talvez, a mais difícil de ser compreendida plenamente, pois é obtida a partir de duas isometrias já vistas. De fato, ela resulta de uma reflexão, seguida de uma translação em direção paralela ao eixo de reflexão. Aparentemente, portanto, ela não traz nenhuma informação nova. No mundo da simetria, entretanto, ela é imprescindível, pois nem sempre as isometrias que a compõem (a reflexão e a translação acima) são simetrias da figura em questão.

Sejam AB um segmento orientado e r uma reta paralela a AB. A **glissoreflexão em torno de** r **e por AB** é a isometria obtida fazendo-se a reflexão em torno da reta r e, em seguida, a translação por AB. Veja a figura a seguir:



Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra©.
- Crie uma reta r e um vetor v, paralelo à reta r.
- Crie um polígono P_1 qualquer, de preferência totalmente de um lado da reta r.
- Com a ferramenta "reflexão com relação a uma reta" clique no polígono P_1 e depois na reta r. Aparecerá o polígono regular P_2 simétrico de P_1 em relação à reta r.
- Com a ferramenta "transladar por um vetor" clique no polígono P_2 e depois no vetor v.
- Aparecerá um terceiro polígono P_3, imagem de P_2 pela translação através do vetor v.
- O polígono P_3 é a imagem de P_1 por uma glissoreflexão.
- Modifique a cor do polígono P_3 para melhor distinguir do polígono P_1.
- Mova a reta r e o vetor v e observe a imagem de P_1.

- É possível fazer com que os polígonos P_1 e P_3 coincidam?
- Utilizando a ferramenta "distância" sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1.
- Conclua que a glissoreflexão é uma isometria. Como você demonstraria isto?
- Conclua que não existem pontos fixados pela glissoreflexão.

Atividade 14 Compondo isometrias

E se compusermos duas das isometrias que já conhecemos, será uma isometria diferente das anteriores?

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra©.
- Escolha duas isometrias, dentre aquelas quatro (podem ser do mesmo tipo).
- Use os procedimentos das atividades anteriores para construí-las com o GeoGebra©, uma de cada vez.
- Identifique a isometria resultante da composição das duas que escolheu.
- É uma das quatro já vistas (reflexão, translação, rotação ou glissoreflexão)?
- Repita essa atividade com outras escolhas de isometrias iniciais, confirmando a seguinte tabela:

N	Isometrias f	g	Condição	Composição das Isometrias ($f \circ g$)
1	R_r	R_s	$r = s$	Identidade
2	R_r	R_s	$r \neq s$ e $r // s$	T_u
3	R_r	R_s	$r \neq s$ e $r \cap s = \{O\}$	$C_{O,\alpha}$
4	T_u	T_v	-	T_{u+v}
5	$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O = O'$	$C_{O,\alpha+\alpha'}$
6	$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O \neq O'$ e $\alpha + \alpha' \neq 0$	$C_{P,\alpha+\alpha'}$
7	$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O \neq O'$ e $\alpha + \alpha' = 0$	T_u
8	R_r	T_u	$u \perp r$	$R_{r'}$
9	R_r	T_u	$u \not\perp r$	$T_v \circ R_{r'}$, com $r' // v$
10	T_u	R_r	$u \perp r$	$R_{r'}$
11	T_u	R_r	$u \not\perp r$	$T_v \circ R_{r'}$, com $r' // v$
12	R_r	$C_{O,\alpha}$	$O \in r$	R_s
13	R_r	$C_{O,\alpha}$	$O \notin r$	$T_v \circ R_{r'}$, com $r' // v$
14	$C_{O,\alpha}$	R_r	$O \in r$	R_s
15	$C_{O,\alpha}$	R_r	$O \notin r$	$T_v \circ R_{r'}$, com $r' // v$
16	T_u	$C_{O,\alpha}$	-	$C_{O',\alpha}$
17	$C_{O,\alpha}$	T_u	-	$C_{O',\alpha}$

As isometrias do plano, consideradas conjuntamente à operação de composição, constituem uma estrutura algébrica denominada **grupo**[1]. Isso traduz a idéia de que podemos compor isometrias seguidamente, de modo associativo, obtendo sempre outras isometrias, dentre elas a identidade e as isometrias inversas.

[1] Um par formado por um conjunto e uma operação é denominado **grupo** se a operação neste conjunto for associativa, admitir um elemento neutro e todo elemento do conjunto possuir um inverso.

Atividade 15 Caracterizando as isometrias no GeoGebra©

Até o momento, vimos exemplos de quatro tipos de isometrias (lembrando que a identidade pode ser vista como uma translação por um vetor nulo ou como uma rotação de ângulo 0). Na atividade anterior, descrevemos todas as possíveis composições destas isometrias e só obtivemos isometrias desses mesmos quatro tipos.

Nesta atividade, veremos que toda isometria é resultado da composição de certo número de reflexões.

Desenvolvimento:

1ª. Parte: Toda isometria leva retas em retas

Veremos primeiramente que uma isometria transforma necessariamente uma reta de um plano em outra reta de outro plano.

- Tome dois planos Π e Π′ e suponha seja dada uma isometria f: Π→Π′.
- Tome três pontos colineares A, B, C em Π e indique com A′, B′, C′ as suas imagens, isto é, A′=f(A), B′=f(B) e C′=f(C).
- É possível que os pontos A′,B′,C′ sejam não colineares? Compare as distâncias entre os pontos correspondentes.
- Conclua que f manda pontos colineares em pontos colineares. Conclua, de maneira análoga, que f manda pontos não colineares em pontos não colineares.
- Considere dois pontos distintos P e Q, P′ = f(P) e Q′ = f(Q). Sabendo que PQ e P′Q′ são congruentes conclua que f é injetora.
- Agora tome um ponto P′ em Π′. Queremos mostrar que existe algum ponto P em Π tal que f(P)=P′, ou seja, queremos mostrar que f é sobrejetora.
- Considere um ponto M em Π e M′ = f(M) em Π′. Se M′ = P′, o problema está resolvido?
- Caso contrário, um outro ponto N em Π e N′ = f(N) em Π′. Se N′ = P′, o problema está resolvido?
- Caso contrário, suponha que a reta M′N′ não contém o ponto P′. O que ocorre se contiver o ponto P′?
- Considere o ponto simétrico P″ de P′ em relação a M′N′.
- Verifique que existem dois pontos P_1 e P_2 tais que os triângulos MNP_1, MNP_2, M′N′P′ e M′N′P″ são congruentes.
- Conclua que existe um ponto P em Π tal que f(P)=P′ e, consequentemente, que f é sobrejetora.
- Mostre que a função inversa f^{-1} é uma isometria.
- Conclua que uma isometria leva retas em retas.

2ª. Parte: Se uma isometria f deixa fixos dois pontos A e B, então f deixa fixos todos os pontos da reta que passa por A e B.

- Tome dois pontos A, B do plano Π e indique com r a reta por esses pontos. Tendo em mente a 1ª. Parte, qual a imagem da reta r?
- Tome um ponto X qualquer da reta r. Observando que o ponto A é deixado fixo pela isometria f, quais as possíveis imagens do ponto X?
- Repita o procedimento tomando por base o ponto B e conclua que o ponto X também é deixado fixo por f.
- Conclua que f deixa fixos todos os pontos da reta que passa por A e B.

3ª. Parte: Se uma isometria f: Π→Π deixa fixos três pontos não colineares, então f deixa fixos todos os pontos do plano Π, isto é, f é a transformação identidade.

- Tome três pontos não colineares A,B,C do plano Π.
- Tome um ponto X qualquer do plano Π (diferente dos pontos A,B,C).

- Analise as possíveis imagens do ponto X.
- Conclua que f deixa o ponto X fixo.
- Conclua que f é a transformação identidade..

  4ª. Parte: Toda isometria é a composta de, no máximo, três reflexões.
- Abra o programa GeoGebra©.
- Construa um triângulo ABC qualquer, utilizando a ferramenta "polígono".
- Considere uma isometria qualquer f: Π→Π (pense o plano Π como sendo o plano da tela do computador). Já sabemos que a imagem do triângulo ABC pela isometria será um triângulo DEF congruente a ABC (por quê?).
- Construa um triângulo DEF congruente a ABC, utilizando oportunamente a ferramenta "círculo dados centro e raio". Faça a construção de modo a deixar os triângulos separados.
- Modifique a cor do triângulo DEF para melhor acompanhar o processo. Se quiser, mude as propriedades de visualização dos círculos para "não exibir objeto".
- Trace a mediatriz do segmento AD e faça a reflexão do triângulo ABC em relação a essa reta, obtendo o triângulo A′B′C′. Note que A′=D, por construção.
- Verifique se os pontos B′ e E coincidem. Em caso afirmativo, pule essa etapa. Senão, trace a mediatriz do segmento B′E e faça a reflexão do triângulo A′B′C′ em relação a essa reta, obtendo o triângulo A″B″C″. Note que A″=A′=D e que B″=E, por construção.
- Verifique se os pontos C″ e F coincidem (se você pulou a etapa anterior, leia A″,B″,C″ como sendo A′,B′,C′). Em caso afirmativo, pule essa etapa. Senão, trace a mediatriz do segmento C″F e faça a reflexão do triângulo A″,B″,C″ em relação a essa reta, obtendo o triângulo A‴,B‴,C‴. Note que A‴=D, B‴=E, C‴=F, por construção.
- Observe que, após essas reflexões (quantas foram?), o triângulo ABC foi levado a coincidir com o triângulo DEF.
- Lembre da segunda propriedade vista na *3ª. Parte*.
- Conclua que a composição dessas reflexões produz a isometria f.
- Movimente o triângulo ABC e veja que o resultado não se altera.
- O que ocorreria se, no início do processo, os vértices A e D coincidissem? E se dois pares de vértices coincidissem? Ou três?
- Conclua que toda isometria é a composta de, no máximo, três reflexões.

Atividade 16 Classificando as isometrias

Enfim, temos todos os elementos para obter a classificação desejada. É o que faremos nessa atividade.

Desenvolvimento:

- Considere uma isometria qualquer.
- Pela Atividade 15, enumere todas as possibilidades para esta isometria.
- Em cada possibilidade, utilize a Atividade 14 para determinar que tipo de isometria será esta.
- Conclua o seguinte resultado: Existem apenas quatro tipos de isometrias no plano, a saber: as reflexões, as translações, as rotações e as glissoreflexões.

Conclusão desta seção:

- Os movimentos que deixam a figura invariante são as isometrias;

- Os movimentos que completam a figura com o padrão existente são as isometrias.
- Existem somente quatro tipos de isometrias planas: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento.

Questões a serem respondidas:

- O que é exatamente uma simetria?
- Como encontrar simetrias de uma figura?
- Qual a diferença entre simetria e isometria?
- É possível classificar as figuras segundo as simetrias existentes na figura?

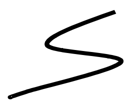
Classificando as Simetrias de Figuras Planas

Para classificar as simetrias no plano, o primeiro passo, sem perceber, já foi dado anteriormente: estabelecer os critérios para efetuar a classificação. Quais seriam os melhores critérios para classificar as simetrias? Quando diremos que duas figuras têm o mesmo tipo de simetria ou quando têm tipos diferentes? Diante do que vimos até agora, não será difícil concordar que um ótimo critério para distinguir os diferentes tipos de figuras simétricas será dado pelas suas simetrias ou, melhor dizendo, o conjunto de todas as isometrias que preservam cada figura. Em termos matemáticos mais apropriados, falamos no grupo de simetrias de cada figura. Mais formalmente:

Dado um subconjunto F do plano, que denominamos figura geométrica plana (ou simplesmente, figura), as isometrias $\varphi: \Pi \rightarrow \Pi$ do plano que têm a propriedade $\varphi(F)=F$ são denominadas simetrias da figura F. Em outras palavras, as simetrias de F são as isometrias do plano que deixam invariante a figura F. Se considerarmos o conjunto de todas as simetrias de uma figura F juntamente com a composição de funções veremos que este par satisfaz as seguintes propriedades:

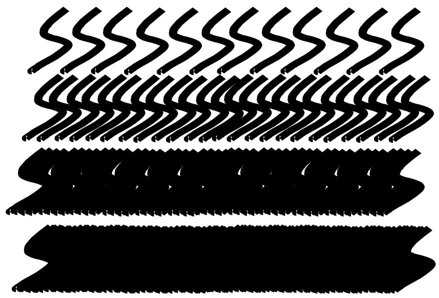
- A operação de composição de funções é associativa;
- A identidade é uma simetria;
- A inversa de uma simetria é uma simetria.

Por causa disto este par pode ser chamado de **grupo das simetrias** de F e denotado por Γ_F. Se F tiver grupo de simetrias não unitário, isto é, se possuir simetrias diferentes da identidade, então diremos que F é uma figura **simétrica**, caso contrário, dizemos que F é uma figura **assimétrica**.

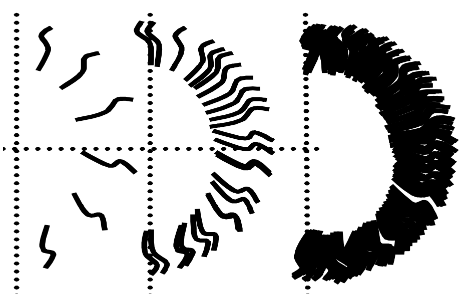


As atividades que se seguem buscam ilustrar e aprofundar esse processo de identificação dos grupos de simetrias e, conseqüentemente, de classificação das figuras simétricas.

Antes de prosseguir, somos obrigados a restringir os tipos de figuras simétricas que estaremos analisando. Ao considerarmos uma figura não nos interessará neste estudo, aquelas que possuem translações ou rotações arbitrariamente pequenas. De fato, no caso da translação para que uma figura possua translações arbitrariamente pequenas é necessário que ela seja uma faixa como se observa na figura ao lado ou até mesmo o plano inteiro.



Se ocorrer rotações arbitrariamente pequenas teremos um anel como se observa na figura ao lado ou até mesmo um círculo inteiro.

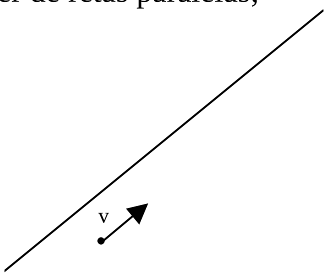
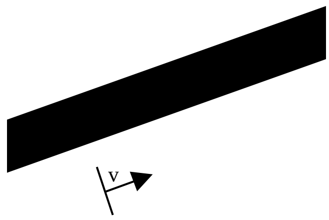
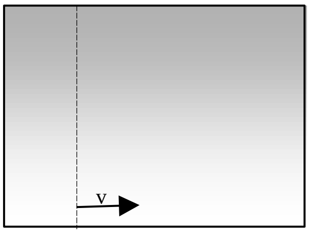
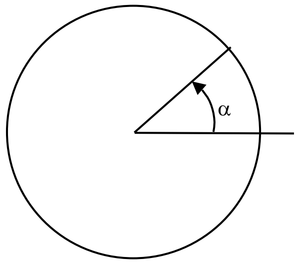
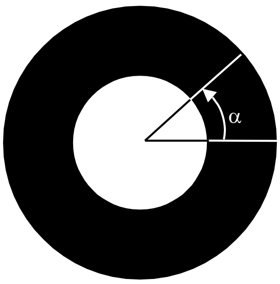
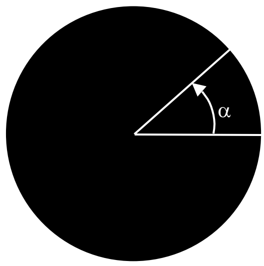


Sendo assim, as figuras geométricas que possuem grupo de simetrias com translações e rotações arbitrariamente pequenas não serão consideradas neste contexto, pois são figuras do tipo faixa ou anel.

Em resumo, essa restrição pode ser entendida como segue:

1. Se uma figura é invariante por translações numa dada direção, então, dentre essas translações, existe uma de amplitude mínima.
2. Se uma figura é invariante por rotações em torno de um centro, então, dentre essas rotações, existe uma de ângulo mínimo.

As figuras simétricas que possuem estas duas propriedades são denominadas **ornamentos**. Veja abaixo as figuras simétricas que não são ornamentos.

Uma reta qualquer ou uma coleção qualquer de retas paralelas; 	Uma faixa ilimitada e de largura fixa ou uma coleção qualquer de faixas ilimitadas paralelas; 
O plano ou um semi-plano; 	Uma circunferência ou uma coleção qualquer de circunferências concên-tricas; 
Uma coroa circular de largura fixa ou uma coleção qualquer de coroas circulares concêntricas; 	Um círculo qualquer. 

Atividade 17 Separando as figuras em classes

A classificação das figuras simétricas se dá a partir de seus grupos de simetrias. Assim, diremos que duas figuras têm o mesmo tipo de simetria se possuem o mesmo grupo de simetrias[2]. Nesta atividade, daremos um primeiro passo para a classificação das simetrias: separá-las em função da invariância por translações.

Desenvolvimento:

- Considere as figuras dadas;
- Observe que todas elas são simétricas.
- Separe aquelas que são invariantes por alguma translação daquelas que não o são. Essas últimas são as chamadas **rosetas**.
- Das primeiras, observe que algumas só são preservadas por translações em uma única direção. São os chamados **frisos**. Separe-os também.
- Observe que as figuras que restaram são preservadas por translações em várias direções. São os chamados **papéis de parede**.

Concluímos assim que um ponto de partida para identificar a classe de simetria de uma dada figura consiste em fazer as seguintes perguntas:

1. O grupo de simetrias da figura possui translações?
2. Em caso afirmativo, em quantas direções distintas elas ocorrem?

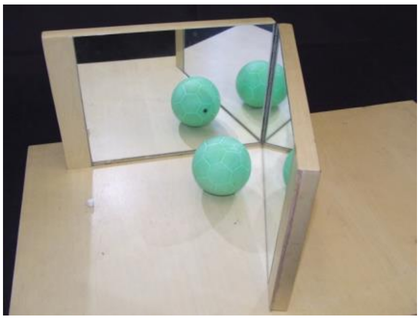
Se a resposta à primeira pergunta for não, então a figura pertence à classe das rosetas. Se a resposta à segunda pergunta for uma única direção de translação, então a figura pertence à classe dos frisos. Se, por fim, as simetrias translacionais se derem em infinitas direções, então a figura pertence à classe dos papéis de parede. Complete diagrama entregue pelos monitores colando as respectivas figuras.

Atividade 18 Explorando as rosetas na mesa de espelhos

Para trabalharmos com algumas rosetas, vamos usar três peças da exposição Matemativa.

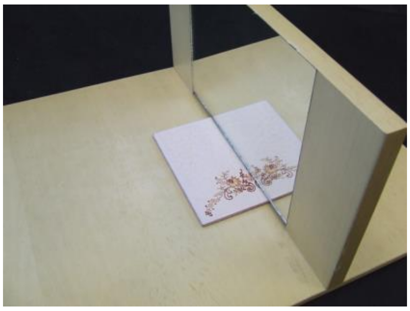
Desenvolvimento:

1ª parte: Espelhos articulados



Este conjunto de dois espelhos articulados reproduz a composta de várias reflexões em retas concorrentes.

- Coloque alguns objetos avulsos entre os espelhos.
- Observe o efeito produzido pelos dois espelhos.
- Observe como as imagens virtuais dos espelhos também se comportam como espelhos.
- Observe que, para alguns valores do ângulo entre os espelhos, a imagem obtida é invariante por rotação.
- Quais são esses ângulos?
- Qual o ângulo da rotação correspondente?



2ª parte: Espelho com fissura

Esta peça reproduz uma reflexão.

- ·Identifique as rosetas que possuem simetria de reflexão e seus respectivos eixos.

3ª parte: Espelhos em ângulo reto

---

[2] Há aqui, deliberadamente, uma simplificação do processo de classificação. Par fosse completa, seria necessário considerar os grupos de simetrias juntamente com enfoque, porém, vai além dos propósitos desta oficina.

Uma das imagens simétricas que nos é mais familiar é o nosso próprio rosto. É inegável que enxergamos simetria de reflexão vertical em nossas faces (na verdade, no corpo todo). Mas será que somos realmente tão simétricos assim?

- Observe a sua imagem. É assim que você se vê no espelho?
- Explique o que está acontecendo

Atividade 19 Utilizando recortes e dobraduras para construir rosetas

Muitos de nós, quando criança, já produzimos muitas figuras simétricas com papel e tesoura, mesmo sem conhecer a matemática envolvida naquele divertimento.

Desenvolvimento:

1ª parte: Duas repetições

- Pegue um papel dobradura no formato retangular.
- Dobre ao meio.
- Faça um contorno à lápis para recorte.
- Recorte com a tesoura o contorno desenhado.
- Abra a dobradura e liste as simetrias existentes na figura obtida.

2ª parte: Quatro repetições

Pegue um papel dobradura no formato quadrado.

- Dobre ao meio e depois dobre ao meio novamente.
- Faça um contorno à lápis para recorte.
- Recorte com a tesoura o contorno desenhado.
- Abra a dobradura e liste as simetrias existentes na figura obtida.

3ª parte: Seis repetições

Pegue um papel dobradura no formato quadrado.

- Dobre ao meio na diagonal.
- Encontre o ponto médio do lado dobrado e dobre conforme instruções.
- Faça um contorno à lápis para recorte.
- Recorte com a tesoura o contorno desenhado.
- Abra a dobradura e liste as simetrias existentes na figura obtida.

Atividade 20 Classificação das rosetas

Uma figura do tipo roseta, por não possuir simetrias de translação, só pode possuir simetrias de rotação e/ou de reflexão.

Desenvolvimento:

- Utilizando os resultados da Atividade 14 conclua a impossibilidade de uma figura do tipo roseta ser invariante por rotações de centros distintos.
- Suponha dada uma figura do tipo roseta e considere seu grupo de simetrias.
- Considere α o menor ângulo positivo de rotação dentre todas as rotações do grupo.
- Considere uma rotação deste grupo com um ângulo β.
- Verifique que sempre existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\beta = n.\ \alpha + \theta$, $\theta \geq 0$ e $\theta < \alpha$. Escreva β em função de α e um resto θ.
- Verifique que a rotação de ângulo θ pertence ao grupo.
- Observe que θ é menor do que α, conclua que $\theta = 0$.
- Conclua que β é um múltiplo inteiro de α.

Assim, quando há simetrias de rotação, há necessariamente uma de ângulo mínimo α, que é um submúltiplo de 2π (isto é, $\frac{2\pi}{\alpha}$ é um número inteiro). Todas as outras são obtidas a partir dessa, aplicada certo número de vezes (isto é, são rotações com ângulos α, 2α, 3α,... ,$(n - 1).\alpha$, $n.\alpha$).

Diante disso, a classificação das rosetas se resume às seguintes perguntas:

1. O grupo de simetrias da figura possui rotações? Qual o menor ângulo α em que essas ocorrem?

2. O grupo de simetrias da figura possui reflexões?

A primeira pergunta sempre possui resposta afirmativa (eventualmente α é 2π), donde extraímos o grau $n = \frac{2\pi}{\alpha}$. Se a resposta à segunda pergunta for não, então o grupo de simetrias é chamado de **grupo cíclico de grau n**, e indicado com $\mathbf{C_n}$. Este é um grupo cíclico de ordem finita n, gerado por uma rotação de ângulo α (o menor ângulo).

Se a resposta à segunda pergunta for sim, isto é, caso existam simetrias de reflexão, o grupo de simetrias é formado por rotações e reflexões. Nesse caso, há n reflexões que deixam a figura invariante, todas efetuadas por retas que passam pelo centro das rotações do grupo. De fato para cada rotação existente a composta com a reflexão forma uma nova reflexão, conforme se observa as composições obtidas na Atividade 14. Neste caso, o grupo de simetrias é chamado de **grupo diedral de grau n**, e indicado com $\mathbf{D_n}$. Este é um grupo finito de ordem par 2n. Complete o diagrama entregue pelos monitores colando as respectivas figuras obtendo de forma sintética o algoritmo para classificar o grupo de cada figura do tipo roseta:

Atividade 21 Explorando os frisos na mesa de espelhos

Para trabalharmos com alguns frisos vamos novamente utilizar peças da exposição Matemativa.

Desenvolvimento:

1ª parte: Espelhos paralelos

Este conjunto de dois espelhos paralelos reproduz a composta de várias reflexões por retas paralelas.

- Coloque alguns objetos avulsos entre os espelhos.
- Observe o efeito produzido pelos dois espelhos.
- Observe como uma translação é obtida a partir das duas reflexões (na verdade, infinitas reflexões: uma em cada um dos infinitos "espelhos virtuais" que aparecem nos dois espelhos reais).
- Produza diferentes frisos. Quais as suas simetrias?

2ª parte: Câmara de três espelhos

Esta peça reproduz reflexões tanto na horizontal quanto na vertical.

- O que ocorre de diferente no conjunto de três espelhos em relação ao anterior?

Atividade 22 Utilizando recortes e dobraduras para construir frisos

Assim como para as rosetas, os frisos também foram personagens freqüentes de nossa infância, na forma de dobraduras e recortes. Quem nunca fez a famosa corrente de bonequinhos que se dão a mão?

Desenvolvimento:

- Observe os 7 modelos de frisos fornecidos pelos monitores.
- Para cada um, faça os recortes e as dobraduras seguindo as instruções.
- Desenhe os modelos obtidos e obtenha as simetrias de cada um deles completando a tabela seguinte.

Atividade 23 As possíveis simetrias de um friso

Os frisos são figuras invariantes por translação em uma única direção. Assim, dentre as simetrias de um friso, necessariamente encontraremos translações. Mas podemos encontrar também reflexões, rotações e/ou glissoreflexões. Esta atividade nos levará a compreender as possíveis simetrias de um friso.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Suponha dada uma figura do tipo friso e considere seu grupo de simetrias.
- Considere v o vetor da translação de amplitude mínima (isto é, não há nenhuma translação do grupo com vetor de módulo maior que o de v).
- Considere uma translação qualquer do grupo, com vetor de translação w, observando que w é paralelo a v. Conclua que $w = \alpha.v$.
- Verifique que existem $n \in \mathbb{Z}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \beta < 1$, tal que $\alpha = n + \beta$ e conclua que $w = n.v + \beta.v$.
- Verifique que as translações pelos vetores w e $-n.v$ pertencem ao grupo.
- Conclua que a translação por $\beta.v$ também pertence ao grupo.
- Observe que $\beta.v$ tem amplitude menor do que v e conclua que $\beta = 0$.
- Conclua que w é um múltiplo inteiro de v.

2ª parte: Utilizando os resultados da Atividade 14 responda às seguintes perguntas;

- Como podem ser as reflexões que mantêm o friso invariante? Mais especificamente, quais são os possíveis eixos de reflexão para que tenhamos uma simetria do friso?
- Se o friso possuir rotações, quais os possíveis ângulos dessas rotações. Nesse caso, onde podem se localizar os centros das rotações?
- Com relação às glissoreflexões, quais os possíveis vetores que as caracterizam?

Em suma, podemos concluir que as possíveis simetrias de um friso são:

1. Translações segundo um vetor v e seus múltiplos inteiros.

2. Reflexão horizontal (isto é, segundo uma reta paralela à direção de v, passando pelo “meio” do friso). Fixada ela, as composições com as translações fornecem as glissoreflexões triviais, ou seja, glissoreflexões geradas por reflexões pertencentes ao grupo.

3. Reflexões verticais (isto é, segundo retas perpendiculares à direção do vetor v). Fixada uma delas, as outras são obtidas mediante as composições com as translações do item 1.

4. Rotações de ângulo raso. Fixada uma delas, as outras são obtidas mediante as composições com as translações do item 1.

5. Glissoreflexões não triviais (isto é, cujas translações e reflexões que as compõem não são simetrias do grupo).

Além do mais, tiramos as seguintes conclusões:

1. Se o grupo possui reflexões verticais, a distância entre dois eixos de reflexão consecutivos é igual ao módulo de v ou à sua metade.

2. Se o grupo possui rotações, a distância entre dois centros de rotação consecutivos é igual ao módulo de v ou à sua metade.

3. Se o grupo possui glissoreflexões não triviais, o módulo do vetor das glissoreflexões mínimas é igual ao módulo de v ou à sua metade.

Atividade 24 Classificação dos frisos

Pelo que vimos na Atividade 23, o que pode diferenciar os grupos de simetrias dos frisos é a existência, ou não, de reflexão horizontal, reflexões verticais, rotações e/ou glissoreflexões não triviais. Como cada uma dessas possibilidades admite resposta 'sim' ou 'não', um simples cálculo combinatório nos mostra que, no máximo, há 16 grupos distintos. Nesta atividade, veremos que, na verdade, somente 7 desses grupos são possíveis (aqueles dos golfinhos da Atividade 22), completando assim a classificação das figuras do tipo friso.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Complete a tabela com 4 colunas e 16 linhas.
- Atribua a cada coluna uma das quatro simetrias possíveis (estamos desconsiderando as translações): reflexão horizontal, reflexões verticais, rotações, glissoreflexões não triviais.
- Com 'zeros' e 'uns', preencha a tabela com todas as possibilidades: o 'zero' numa célula representa que a isometria correspondente àquela coluna não está no grupo; o 'um' representa que está.

No.	Reflexão Horizontal	Reflexão Vertical	Rotação	Glissoreflexão	É possível?
1	S	S	S	S	
2	S	S	S	N	
3	S	S	N	S	
4	S	S	N	N	
5	S	N	S	S	
6	S	N	S	N	
7	S	N	N	S	
8	S	N	N	N	
9	N	S	S	S	
10	N	S	S	N	
11	N	S	N	S	
12	N	S	N	N	
13	N	N	S	S	
14	N	N	S	N	
15	N	N	N	S	
16	N	N	N	N	

2ª parte:

- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal, então não pode possuir glissoreflexões não triviais, e vice-versa. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal e reflexões verticais, então necessariamente tem que possuir rotações. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal e rotações, então necessariamente tem que possuir reflexões verticais. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexões verticais e rotações centradas nos eixos de reflexão, então necessariamente tem que possuir glissoreflexões não triviais. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui glissoreflexões não triviais e rotações, então necessariamente tem que possuir reflexões verticais. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.

- Observe que se um grupo possui glissoreflexões não triviais e reflexões verticais, então necessariamente tem que possuir rotações. Em função disto, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Finalmente, observe que sobraram somente 7 linhas possíveis. As sete linhas que sobraram na tabela que construímos, correspondem aos únicos grupos de simetrias possíveis para os frisos. Explicite na tabela a seguir todas as simetrias existentes em cada um dos 7 casos e, utilizando letras do alfabeto, construa um frisos para cada um deles. Apresentamos na tabela duas notações para
    - Cristalográfica: É a mais utilizada e é adotada pela IUC (União Internacional de Cristalografia) e é constituída de 4 caracteres XYZW onde
      X: é igual a “p” se a célula primitiva não for centrada e igual “c” se a célula primitiva for centrada. No caso do friso, sempre será “p”.
      Y: é “m” se existe uma reta de reflexão na direção perpendicular a direção dos vetores de translação, é “g” se não existe tal reta, mas admite uma glissoreflexão nessa mesma direção e é “1”, caso contrário.
      Z: é igual a “m” se existe uma reta de reflexão na direção dos vetores de translação, a “g” se não existe tal reta, mas admite uma glissoreflexão nesta mesma direção e “1”, caso contrário.
      W: é a maior ordem de rotação que a figura possui. Os valores possíveis, no caso dos frisos, são 1 ou 2.
    - “Orbifold”: Este nome vem de “orbital manifold” e está dentro de um contexto topológico. Assim para entender completamente esta notação é necessário algum conhecimento de topologia. De uma maneira simplificada, podemos entender que ela é constituída de uma seqüência formada por alguns símbolos, a saber:
        - Número 2: Indica a presença de rotações de ordem 2.
        - Infinito (∞): serve para indicar que é um friso.
        - Asterisco: *: sua presença indica a existência de reflexões..
        - A letra “o”.
        - A letra “x”: sua presença indica a existência de uma glissoreflexão.
- A tabela, a seguir, apresenta estas notações

Tipo	**Notação**			**Simetrias Existentes**
	Cristalográfica	**“Orbifold”**	**Friso com letras**	
A	p111 (11)	∞∞		
B	p112 (12)	22∞		
C	p1m1 (1m)	∞*		
D	p1a1 (1g)	∞x		
E	pm11 (m1)	*∞∞		
F	pmm2 (mm)	*22∞		

G	pma2 (mg)	2*∞		

- Complete o seguinte diagrama colando as respectivas figuras obtendo de forma sintética o algoritmo para classificar o grupo de simetrias de cada figura do tipo friso:

Atividade 25 Explorando os papéis de parede nas câmaras de espelhos

Vamos à Matemativa! Como pudemos perceber em diferentes ocasiões, os espelhos são ferramentas muito versáteis na produção de simetrias. Um único espelho produz somente uma reflexão, mas combinando diferentes espelhos (isto é, compondo reflexões) conseguimos obter translações, rotações e até glissoreflexões. Veremos agora o efeito de câmaras de espelhos, através das quais poderemos observar vários tipos diferentes de papéis de parede.

Desenvolvimento:

1ª parte: Gaiola de Espelhos

Este conjunto de três espelhos em forma de gaiola permite que você entre e se veja espalhado infinitamente, reproduzindo a composta de várias reflexões por retas paralelas e concorrentes num padrão triangular eqüilátera.

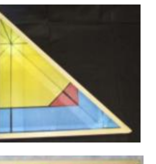
- Observe-se dentro da gaiola e veja o efeito produzido pelos três espelhos.
- Observe como as translações são obtidas a partir de duas reflexões (na verdade, infinitas reflexões: uma em cada um dos infinitos "espelhos virtuais" que aparecem nos três espelhos reais).
- Quais as suas simetrias?

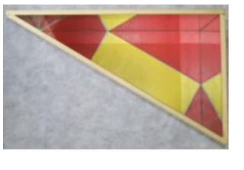
2ª parte: Câmaras Quadradas

Esta peça reproduz reflexões tanto na horizontal quanto na vertical.

- Coloque um azulejo dentro da câmara e observe o que ocorre.
- Observe como as translações são obtidas a partir das reflexões determinadas pelos quatro espelhos (na verdade, infinitas reflexões: uma em cada um dos infinitos "espelhos virtuais" que aparecem nos três espelhos reais).
- Quais as suas simetrias?

3ª parte: Câmaras Retangular e Triangulares





- Escolha uma das câmaras de espelhos disponíveis.
- Coloque objetos avulsos dentro da câmara para explorar o efeito produzido pelos espelhos.
- Observe como as translações são obtidas a partir das reflexões determinadas pelos quatro espelhos (na verdade, infinitas reflexões: uma em cada um dos infinitos "espelhos virtuais" que aparecem nos três espelhos reais).
- Faça algum desenho sobre o painel de fórmica branca (disponível na câmara escolhida), para produzir papéis de parede a partir de seu desenho.
- Agora, observe as figuras afixadas nas paredes externas da câmara.
- Com as peças coloridas, tente reproduzir cada figura (note que as cores são diferentes, pois o objetivo é reproduzir o desenho).
- Quais as simetrias existentes nesta câmara escolhida?

Atividade 26 Utilizando recortes e dobraduras para construir papéis de parede

Com uma folha de papel é possível também construir alguns tipos de papéis de parede.

Desenvolvimento:

- Pegue uma folha de papel sulfite, ou papel para dobraduras no formato de quadrado.
- Dobre ela ao meio e repita o processo três ou quatro vezes.
- Faça um desenho de contorno que seja fácil de recortar.
- Recorte o contorno e abra a folha.
- Quais isometrias preservam sua figura?
- O procedimento lembra alguma das câmaras de espelhos?
- Repita o procedimento fazendo uma dobra na diagonal responda as perguntas anteriores.
- Por que os procedimentos de dobraduras e recortes funcionam para produzir simetrias?

Atividade 27 Classificando os papéis de parede

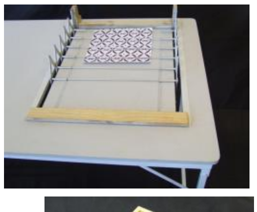
O procedimento para classificar os papéis de parede é muito similar àquele que usamos com os frisos: identificar as possíveis simetrias de um papel de parede; considerar todas as combinações dessas simetrias; eliminar aquelas que se mostram impossíveis. No final, o resultado que se obtém é que existem somente 17 grupos de simetrias possíveis.

Entretanto, em função da própria amplitude de possibilidades que aparecem nesse caso, esse estudo torna-se muito mais complicado (veja [Gerônimo] e [Maria Dedo] para um estudo detalhado). Em função disso, e por não acrescentar muito ao nosso trabalho, não vamos desenvolver o processo de classificação dos papéis de parede como fizemos para os frisos. Vamos, diretamente, tomar contato com o algoritmo de classificação desses grupos de simetrias.

Desenvolvimento:

- Complete o seguinte diagrama colando as respectivas figuras obtendo de forma sintética o algoritmo para classificar o grupo de simetrias de cada figura do tipo papel de parede.
- Escolha uma das figuras apresentadas.
- Utilize o algoritmo abaixo para classificar a figura.
- O resultado confere?
- Escolha outras figuras e repita o procedimento.

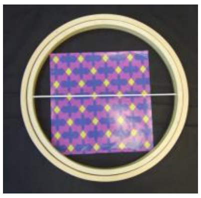
Atividade 28 Reconhecendo os grupos de simetrias



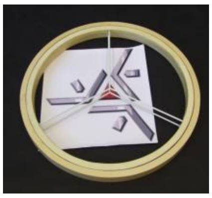
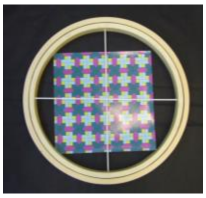
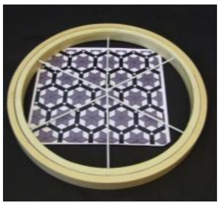
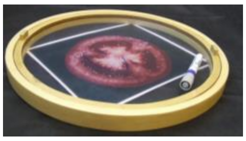
Com a classificação completa, podemos agora, diante de qualquer figura simétrica, dizer a qual grupo de simetria ela pertence. É o que faremos nessa atividade, com o auxílio das peças de "reconhecimento" da exposição Matemativa.

Desenvolvimento:

- Escolha uma das figuras disponíveis.
- Com o auxílio da peça "Reconhecimento de Translações", determine se a figura é invariante por translações e, se for o caso, em quantas direções.
- A sua figura é uma roseta, um friso ou um papel de parede?
- Escolha o algoritmo apropriado para a sua figura.



- Siga a orientação do algoritmo e use as peças de reconhecimento para determinar o grupo de simetria de sua figura.
- Troque de figura com um colega e repita o procedimento.
- Compare o resultado.

Conclusão desta seção:

- As simetrias de uma figura são todas as isometrias que preservam a figura;
- Nem toda isometria é uma simetria da figura.
- As simetrias de uma figura são classificadas em três tipos: rosetas, frisos e papéis de parede;
- Cada tipo é dividido em subclasses. A classe de rosetas é dividida em duas subclasses: a dos diedrais e a dos cíclicos. Existem somente sete tipos de frisos e existem somente dezessete tipos de papéis de parede.

Questões que podem ser feitas mas que estão fora do escopo da oficina:

- Como são as simetrias no espaço?
- E as simetrias em espaços de dimensão maior?

As Simetrias Planas no Computador e no Vídeo

Atividade 29 O Programa SIMIS

A utilização do computador em sala de aula é uma prática cada vez mais freqüente e necessária. Não poderia ser diferente com um assunto tão rico quanto o de simetrias no plano. A seguir, apresentaremos um programa (em fase de aprimoramento) que permite ao aluno explorar as isometrias principais e os grupos de simetrias das figuras planas.

Desenvolvimento:

- Abra o programa “SIMIS”.
- Escolha o "grupo translacional" com o qual quer trabalhar: rosetas, frisos, papéis de parede.
- Escolha um grupo de simetria.
- Desenhe na área indicada e observe o resultado.
- Repita o procedimento com outras escolhas.

Atividade 30 O Programa FACE

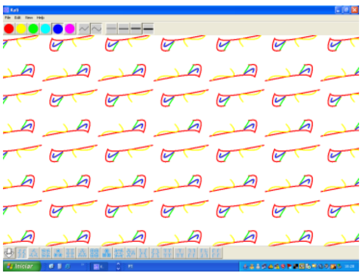
Veja seu rosto-roseta no computador

- Tire uma foto de seu rosto.
- Com um editor de fotografia, redimensione sua imagem (altura 2 cm) e salve no formato bmp.
- Utilize o programa "FACE" para observar quanto seu rosto é realmente simétrico.

Atividade 31 O Programa KALI

A utilização do computador em sala de aula é uma prática cada vez mais freqüente e necessária. Não poderia ser diferente com um assunto tão rico quanto o de simetrias no plano. A seguir, apresentaremos um programa (em fase de aprimoramento) que permite ao aluno explorar as isometrias principais e os grupos de simetrias das figuras planas.

Desenvolvimento:



- Abra o programa KALI.
- Escolha o "grupo translacional" com o qual quer trabalhar: rosetas, frisos, papéis de parede.
- Escolha um grupo de simetria.

- Desenhe na área indicada e observe o resultado.
- Repita o procedimento com outras escolhas.

As simetrias do plano são um tema muitíssimo explorado, principalmente porque aparece em contextos tão distintos como a física dos cristais e as artes plásticas. Há uma quantidade incontável de vídeos, livros, programas de computador e sítios na Internet que tratam do tema. Selecionamos aqui alguns vídeos com o objetivo de ilustrar esse maravilhoso mundo das simetrias.

A TV Escola é um canal do Governo Federal direcionado a professores e alunos, fornecendo material suplementar ao conteúdo curricular. Oferece, em particular, material de vídeo para ser copiado e divulgado nas escolas de todo o país. O tema 'Simetrias' foi abordado em 3 séries apresentadas na TV Escola, a saber:

Atividade 32 Vídeo da Série "Falando em Matemática"

É uma série de 26 programas que mostra como a História ajuda a entender melhor os conceitos matemáticos. O tema "Simetrias" é abordado em um dos programas desta série e possui a duração de 12'31". Foi realizado por La Cinquième, França, em 1999.

Desenvolvimento:

- Assista ao vídeo apresentado.
- Anote os principais conceitos apresentados.
- Entre o que foi apresentado no vídeo e o que foi apresentado nesta oficina apresente as diferenças.

Atividade 33 Vídeo "Azulejos de Alhambra"

O palácio de Alhambra, na Espanha, é conhecido por suas estampas decorativas. Estudos matemáticos irão mostrar que apesar da aparente infinidade de variações, se observadas de seu centro e em sua ordem de rotação, há pouca diferença entre os elementos essenciais da gravura em retícula, repetidas para papéis de parede e estampas em metro. Este programa possui a duração de 24 minutos e foi realizado pela BBC, Grã-Bretanha, em 1994.

Desenvolvimento:

- Assista ao vídeo apresentado.
- Anote os principais conceitos apresentados.
- Entre o que foi apresentado no vídeo e o que foi apresentado nesta oficina apresente as diferenças.
- As simetrias apresentadas nos azulejos de Alhambra são todas as existentes na classificação? Isto fica claro no filme?

Atividade 34 Vídeo da Série "Arte e Matemática"

É uma série de 13 programas que mostra as relações entre Matemática e Arte, nos mais variados meios e expressões. Enquanto a Matemática apresenta a face mais rígida e estruturada da criação artística, a Arte representa a face mais intuitiva e lúdica do pensamento matemático. O tema "Simetrias" é abordado em um dos programas desta série e possui a duração de 20'01". Foi realizado pela TV Escola/MEC-TV Cultura, Brasil, em 2000.

Desenvolvimento:

- Assista ao vídeo apresentado.
- Anote os principais conceitos apresentados.
- Entre o que foi apresentado no vídeo e o que foi apresentado nesta oficina apresente as diferenças.

Avaliação da Oficina

Atividade 35 Pós-Avaliação

Repetiremos a pré-avaliação para determinar a evolução do conceito que cada um adquiriu de simetria.

Desenvolvimento:

Turma 1::

- Responda o questionário entregue pelos monitores.
- No programa SIMISTESTE responda se as figuras apresentadas são simétricas ou não clicando sobre os respectivos botões.

Turma 2::

- No programa SIMISTESTE responda se as figuras apresentadas são simétricas ou não clicando sobre os respectivos botões.
- Responda o questionário entregue pelos monitores.

Atividade 36 Avaliação dos Aspectos Gerais da Oficina

- Responda o questionário entregue pelos monitores.
- Sem a necessidade de se identificar devolva o questionário respondido aos monitores.

Referências Bibliográficas

ATRACTOR, O Ritmo das Formas.
BELLINGERI, P. e outros. O Ritmo das Formas. Atractor, 2003.
GERÔNIMO, J. R., FRANCO, V. S., Ornamentos no Plano (em preparação)
LEDERBERG-RUOFF, E. B., Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano
MARIA DEDÒ, "Forme -- simmetria e topologia", editoras Decibel e Zanichelli, 1999.
FARMER, D. W. Grupos e Simetria, Editora Gradiva, Lisboa, 1996 (Tradução).
LEIVAS, J. C. P., Geometria das Transformações, Texto.
NOGUEIRA, C.M.I. e outros. Jogos e Atividades com Simetrias no Plano (em preparação)
WEYL, H. Simetria. EDUSP, São Paulo, 1997 (Tradução).
Página na Internet: http://www.matemativa.uem.br. (acesso em 17/09/2007)
Página na Internet: http://matemilano.mat.unimi.it/ (acesso em 24/05/2006)
Página na Internet: http://www2.spsu.edu/math/tile/symm/types/index.htm (acesso em 24/05/2006)
Página na Internet: http://www.montessoriworld.org/ (acesso em 24/05/2006)
Página na Internet: http://www.scienceu.com/geometry/ (acesso em 24/05/2006)

APOIO: