

Oficina de Matemática: Descobrindo as Simetrias no Plano

Armando Caputi e João Roberto Gerônimo

Novembro de 2006

Índice

1	Introdução	3
2	Construindo o Conceito de Simetria	3
3	Isometrias no Plano	6
4	Classificando as Simetrias no Plano	21

1 Introdução

O trabalho com simetrias no plano possibilita a construção gradativa de conceitos geométricos, pois permite concretizar diversas situações que servem como ponto de partida para a exploração do deslumbrante mundo das formas que é a Geometria. Além do caráter lúdico que imprime às aulas e da importância matemática do tema, atividades envolvendo simetrias no plano, com materiais manipulativos, recursos computacionais ou ambos, quando realizadas de maneira apropriada, são excepcionalmente ricas em possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio qualitativo e da autonomia do participante.

A Oficina está organizada em três fases:

1. **Construindo o Conceito de Simetria:** Nesta fase é trabalhado o conceito de simetria, tomando como ponto de partida as noções intuitivas dos participantes para chegar, através de diferentes atividades, ao conceito matemático do tema. Durante essa primeira fase será destacada a importância das isometrias do plano na conceituação das simetrias.
2. **Isometrias no Plano:** Nesta fase o objeto de estudo são justamente as isometrias do plano: translações, rotações, reflexões e glissoreflexões. O objetivo deste grupo de atividades é focalizar essas transformações, deixando por um momento de lado as simetrias propriamente ditas. Queremos, neste momento, adquirir maior familiaridade com cada uma delas.
3. **Classificando as Simetrias no Plano:** Na terceira fase, os participantes lidam com o processo de classificação das simetrias planas e de reconhecimento dos diferentes padrões simétricos.

Esta oficina enfatiza que o trabalho do professor não deve se restringir a uma única estratégia de ação, mas utilizar todas as formas possíveis dentro e fora de seu ambiente escolar. Quanto mais possibilidades de utilização desses diversos tipos de abordagem, mais rico será o desenvolvimento desse e de outros temas que o professor trabalhe com os alunos. Além disso, a oficina destaca a importância de se trabalhar o conteúdo dado em sala de aula dentro de um contexto mais avançado, proporcionando ao aluno um momento de aprofundamento dos conceitos matemáticos.

2 Construindo o Conceito de Simetria

Cada um de nós possui, mesmo que vagamente, alguma concepção de simetria. Ao observarmos o mundo ao nosso redor, identificamos algumas imagens como simétricas, outras como assimétricas, mesmo sem explicitar o que queremos dizer com isso. A Matemática também tem sua concepção de simetria.

ATIVIDADE 1 *Observando fotos e figuras*

Começaremos agora a explorar esse particular enfoque, descobrindo, ao mesmo tempo, como a Matemática estuda e classifica seus objetos.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Observe as fotos apresentadas.
- Separe-as em dois grupos, conforme as considere simétricas ou não.
- Divida as simétricas em grupos que lhe pareçam semelhantes.
- Quais foram seus critérios?

2ª parte:

- Compare sua classificação com os colegas.
- Os critérios usados foram os mesmos? Quais as diferenças?
- A partir dessas comparações, chegaremos à concepção matemática de simetria.

Anotações:

ATIVIDADE 2 *As mesas simétricas*

Vamos passear um pouco pela *Matemática: Exposição Interativa de Matemática*. Lá vamos encontrar duas mesas com uma mesma figura sobre elas (protegidas por um acrílico). Numa delas estão espalhadas vários pedaços iguais e na outra estão dois acrílicos com parte da figura desenhada sobre eles. Estas duas mesas foram feitas para se perceber em figuras simétricas a existência de padrões se repetindo e a existência de transformações que não alteram a figura.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Nas “mesas simétricas”, discuta com os colegas a distribuição dos padrões na figura.
- Quais transformações descrevem a “repetição” do padrão?

2ª parte:

- Nas mesas simétricas, discuta com os colegas os movimentos da peça de acrílico que preservam a figura.
- Quais isometrias deixam essa figura invariante?

Anotações:

ATIVIDADE 3 *Identificando os padrões de uma figura*

A atividade anterior mostrou duas formas equivalentes com que a Matemática trabalha a noção de simetria. Uma delas é a existência de um padrão que se repete numa dada figura, de acordo com oportunas isometrias do plano. A atividade que se segue busca explorar ainda mais essa concepção.

Desenvolvimento:

- Observe a figura dada e busque um padrão.
- Use a peça de acrílico sobre a figura para desenhar o padrão encontrado.
- Determine os movimentos que fazem com que este padrão complete a figura toda.

- Troque de figura com um colega e repita o procedimento.
- Compare os resultados entre os colegas.

Anotações:

ATIVIDADE 4 *Identificando as simetrias de uma figura*

A outra forma de conceber a simetria, como vimos anteriormente, é a existência de isometrias do plano que deixam uma dada figura invariante. Essas isometrias são o que chamamos de simetrias da figura. Voltemos nossa atenção agora a essa concepção.

Desenvolvimento:

- Observe a figura dada e busque identificar suas simetrias.
- Coloque a cópia transparente da figura sobre a própria figura, de modo que os desenhos coincidam.
- Movendo a transparência, determine as transformações que deixam a figura invariante.
- Troque de figura com um colega e repita o procedimento.
- Compare os resultados entre os colegas.

Anotações:

ATIVIDADE 5 *Construindo figuras simétricas*

A determinação do padrão numa figura simétrica está intimamente ligada às transformações que preservam essa figura. O conhecimento do padrão, por si só, não nos permite reconstruir a figura original, é igualmente necessário conhecer as transformações (simetrias) que constituem as devidas “repetições”. Mas então, dada uma certa quantidade de padrões (todos iguais), é possível construir diferentes figuras simétricas?

Desenvolvimento:

- Escolha um dos tipos de padrão disponíveis e pegue uma boa quantidade deles.
- Construa uma figura simétrica com estes padrões.
- Anote as transformações que você utilizou para construí-la.
- Compare os resultados entre os colegas.

Anotações:

ATIVIDADE 6 *Reconstruindo figuras*

Na última atividade pudemos perceber como a construção de uma figura simétrica dependa tanto do padrão inicial quanto das isometrias que aplicamos a ele. Ao que parece, então, o conhecimento desse par “padrão-simetrias” é suficiente para reconstruirmos uma dada figura. Será? Se nos fornecerem um padrão e um conjunto de transformações que compõem uma figura que não conhecemos, seremos capazes de reconstruí-la novamente?

Desenvolvimento:

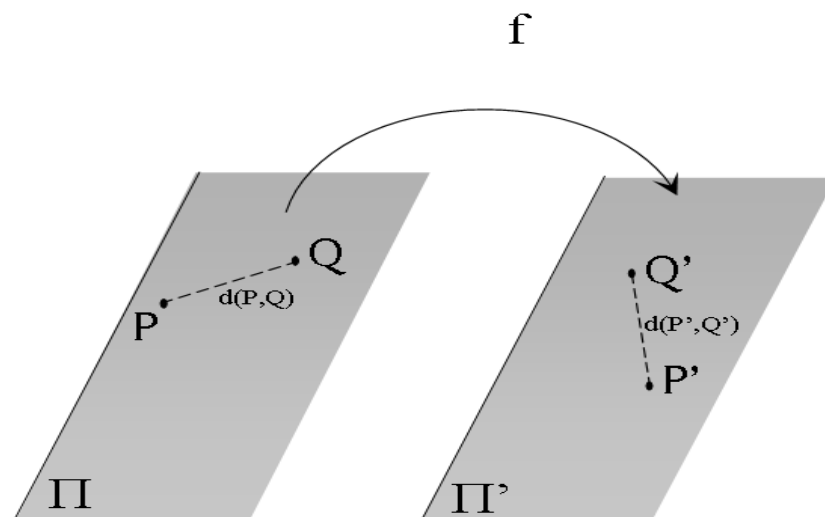
- Pegue a figura dada e encontre suas simetrias.
- Identifique o padrão existente.
- Recorte a figura em pedaços, definidos pelo padrão que você identificou.
- Escreva na folha em branco as simetrias da sua figura.
- Reúna os pedaços e forneça ao colega ao lado, junto com a relação das simetrias.
- Receba o material de seu colega e tente reconstruir a figura dele(a).
- Discuta o resultado.

Anotações:

3 Isometrias no Plano

Ao explorarmos o conceito de simetria, nos deparamos com aquele de isometria: transformações de um plano que preservam a distância entre os pontos. Antes de falarmos sobre estas transformações, vamos considerar uma definição mais geral que conceitua isometria entre dois planos quaisquer.

Uma aplicação $f : \Pi \rightarrow \Pi'$ de um plano Π em um plano Π' é denominada **isometria** se, dados dois pontos quaisquer P, Q em Π , a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$, ou seja, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.



Lembramos que os planos nos quais estamos trabalhando são planos euclidianos e a distância entre dois pontos é dada pela distância euclidiana. Nas atividades que se seguem, veremos exemplos de isometrias e também de transformações não isométricas.

ATIVIDADE 7 *Uma transformação definida entre planos paralelos*

Vejamos como é fácil, sem utilizar muitos conceitos, apresentar um exemplo de isometria.

Desenvolvimento:

- Desenhe dois planos paralelos Π e Π' .
- Desenhe uma reta r secante a um dos planos (e, portanto, secante ao outro).
- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi', f(X) = X'$, onde X' é a interseção de Π' com a reta paralela a r passando por X . Escolha e desenhe alguns pontos em Π e encontre as imagens correspondentes desenhando-as no plano Π' .
- Verifique que f é uma isometria observando que, para quaisquer P, Q em Π , a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' (observe que, por construção, o quadrilátero $PQQ'P'$ forma um paralelogramo).

Anotações:

ATIVIDADE 8 *Nem toda transformação é uma isometria: uma aplicação definida entre planos perpendiculares*

A propriedade de preservar distância é uma condição bem restritiva. Vejamos como é simples construir uma aplicação que não satisfaz esta propriedade.

Desenvolvimento:

- Desenhe dois planos perpendiculares Π e Π' e a reta r interseção destes dois planos.
- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi', f(X) = X'$, onde X' é a projeção ortogonal de X sobre r .
- Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' .
- Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é diferente da distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$ em Π' .
- Conclua que f não é uma isometria.
- Porque o terceiro item não é suficiente para concluir que f é uma isometria?

Anotações:

ATIVIDADE 9 *A função constante*

Desenvolvimento:

- Desenhe dois planos perpendiculares Π e Π' .
- Escolha um ponto A no plano Π' .
- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi', f(X) = A$.
- Quanto mede a distância entre as imagens de dois pontos de Π ?
- f é uma isometria?

Anotações:

Antes de continuar com outros exemplos, vamos ver uma propriedade das isometrias que nos será útil mais adiante.

ATIVIDADE 10 *Toda isometria leva retas em retas*

Nesta atividade veremos que uma isometria transforma necessariamente uma reta de um plano em outra reta de outro plano.

Desenvolvimento:

- Tome dois planos Π e Π' e suponha seja dada uma isometria $f : \Pi \rightarrow \Pi'$.
- Tome três pontos colineares A, B, C em Π e indique com A', B', C' as suas imagens, isto é, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$.
- É possível que os pontos A', B', C' sejam colineares? Compare as distâncias entre os pontos correspondentes.
- Conclua que f manda pontos colineares em pontos colineares.
- Agora tome um ponto P' em Π' . Queremos afirmar que existe algum ponto P em Π tal que $f(P) = P'$.
- Faça a seguinte construção: tome três pontos não colineares M, N, O em Π e suas respectivas imagens M', N', O' em Π' (observe que, pelo mesmo argumento acima, esses pontos também não são colineares).
- Construa as circunferências de centros M, N, O e raios $\overline{M'P'}, \overline{N'P'}$ e $\overline{O'P'}$, respectivamente.
- Conclua que existe um ponto P em Π tal que $f(P) = P'$.
- Junte a última conclusão com aquela do quarto item para, finalmente, concluir que uma isometria leva retas em retas.

Anotações:

No estudo das simetrias, as transformações que nos interessam são aquelas onde $\Pi = \Pi'$. Assim, a partir de agora, consideraremos somente transformações $f : \Pi \rightarrow \Pi$.

ATIVIDADE 11 *Um exemplo de transformação de um plano nele mesmo*

Desenvolvimento:

- Considere o plano Π determinado pela folha de papel. Desenhe um sistema de eixos coordenados Ox e Oy , de forma que a cada ponto X de Π associamos um par ordenado (a, b) e escrevamos $X = (a, b)$.
- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi, f(X) = f(a, b) = (a + 3, b + 5)$.
- Tome dois pontos quaisquer P, Q em Π e compare a distância entre P e Q à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.
- É possível concluir com essa informação que f é uma isometria?
- É possível encontrar dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é diferente da distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$?
- Conclua que f é uma isometria.

Anotações:

ATIVIDADE 12 *Uma isometria mais simples: a função identidade*

Desenvolvimento:

- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi, f(X) = X$.
- Verifique que f é uma isometria.

Anotações:

ATIVIDADE 13 *Uma outra transformação no plano*

Desenvolvimento:

- Considere o plano Π determinado pela folha de papel. Desenhe um sistema de eixos coordenados Ox e Oy , de forma que a cada ponto X de Π associamos um par ordenado (a, b) e escrevamos $X = (a, b)$.
- Considere a função $f : \Pi \rightarrow \Pi, f(X) = f(a, b) = (a^2, b^2)$.
- Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é igual à distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.

- É possível concluir com essa informação que f é uma isometria?
- Encontre dois pontos P, Q em Π , tais que a distância entre P e Q é diferente da distância entre $P' = f(P)$ e $Q' = f(Q)$.
- Conclua que f não é uma isometria.

Anotações:

ATIVIDADE 14 *Dois propriedades importantes das isometrias*

Usaremos agora as idéias da Atividade 10 para obter as seguintes propriedades:

1. Se uma isometria $f : \Pi \rightarrow \Pi$ deixa fixos dois pontos A e B , então f deixa fixos todos os pontos da reta que passa por A e B .
2. Se uma isometria $f : \Pi \rightarrow \Pi$ deixa fixos três pontos não colineares, então f deixa fixos todos os pontos do plano Π , isto é, f é a transformação identidade.

Desenvolvimento:

- Tome dois pontos A, B do plano Π e indique com r a reta por esses pontos. Tendo em mente a Atividade 10, qual a imagem da reta r ?
- Tome um ponto X qualquer da reta r . Observando que o ponto A é deixado fixo pela isometria f , quais as possíveis imagens do ponto X ?
- Repita o procedimento tomando por base o ponto B e conclua que o ponto X também é deixado fixo por f .
- Conclua a Propriedade 1.
- Tome três pontos não colineares A, B, C do plano Π .
- Tome um ponto X qualquer do plano Π (diferente dos pontos A, B, C) e considere as circunferências centradas em A, B, C que passam por X .
- Lembre da segunda parte da Atividade 10 para analisar as possíveis imagens do ponto X .
- Conclua que f deixa o ponto X fixo.
- Conclua a Propriedade 2.

Anotações:

Uma vez compreendido o conceito de isometria de um plano, o passo seguinte - típico do pensamento matemático - consiste em *classificar* os tipos possíveis de isometrias.

Antes de entrarmos no processo de classificação, porém, iremos nos familiarizar com quatro tipos importantes de isometrias: *reflexões*, *translações*, *rotações*, *glissoreflexões*.

ATIVIDADE 15 *Realizando isometrias com sistemas articulados*

Voltemos à *Matemática: Exposição Interativa de Matemática*. Lá vamos encontrar uma mesa com quatro mecanismos com articulações e deslizamentos. Eles foram feitos para realizar os quatro tipos de isometrias acima mencionados.

Desenvolvimento:

1ª parte: A Reflexão

- No mecanismo articulado “Reflexões”, produza cópias refletidas de seu desenho.
- Qual o eixo de reflexão?

2ª parte: A Translação

- Com o mecanismo articulado “Translações”, produza cópias transladadas de seu desenho.
- Qual o vetor da translação que o mecanismo reproduz?

3ª parte: A Rotação

- Com o mecanismo articulado “Rotações”, produza cópias rotacionadas de seu desenho.
- Qual o ângulo de rotação produzido pelo mecanismo?

4ª parte: A Glissoreflexão

- No mecanismo articulado “Glissoreflexão”, produza cópias “glissorefletidas” de seus desenhos.
- Identifique a reflexão e a translação envolvidas no mecanismo.

Anotações:

ATIVIDADE 16 *Realizando isometrias com softwares de geometria dinâmica*

Para explorarmos ainda mais as isometrias que vimos nos sistemas articulados, nada melhor do que um ambiente de geometria dinâmica. Escolhemos o software GeoGebra[©] por se tratar um software livre que, além do mais, não deixa nada a desejar se comparado a softwares proprietários do mesmo gênero.

- **Um pouco sobre o GeoGebra[©]**



- **O que é?**

O GeoGebra[®] é um software de matemática dinâmica para utilização no ensino médio e reúne num só programa geometria, álgebra e cálculo. Segundo o site oficial (www.geogebra.at), recebeu muitos prêmios internacionais, incluindo o prêmio software educacional Alemão e Europeu.

Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

- **O que pode fazer?**

Por um lado, o GeoGebra[®] é um sistema dinâmico de geometria onde se pode fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como gráficos de funções.

Por outro lado, o GeoGebra[®] tem a habilidade de tratar das variáveis para números, vetores e pontos, permitindo encontrar derivadas e integrais de funções e oferecendo comandos como Raízes ou Extremos.

O GeoGebra[®] possui dois ambientes: uma janela geométrica e uma janela algébrica. As equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente na janela algébrica e as figuras geométricas podem ser inseridas na janela geométrica. Esses dois ambientes são característicos do GeoGebra[®]: uma expressão na janela algébrica corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa.

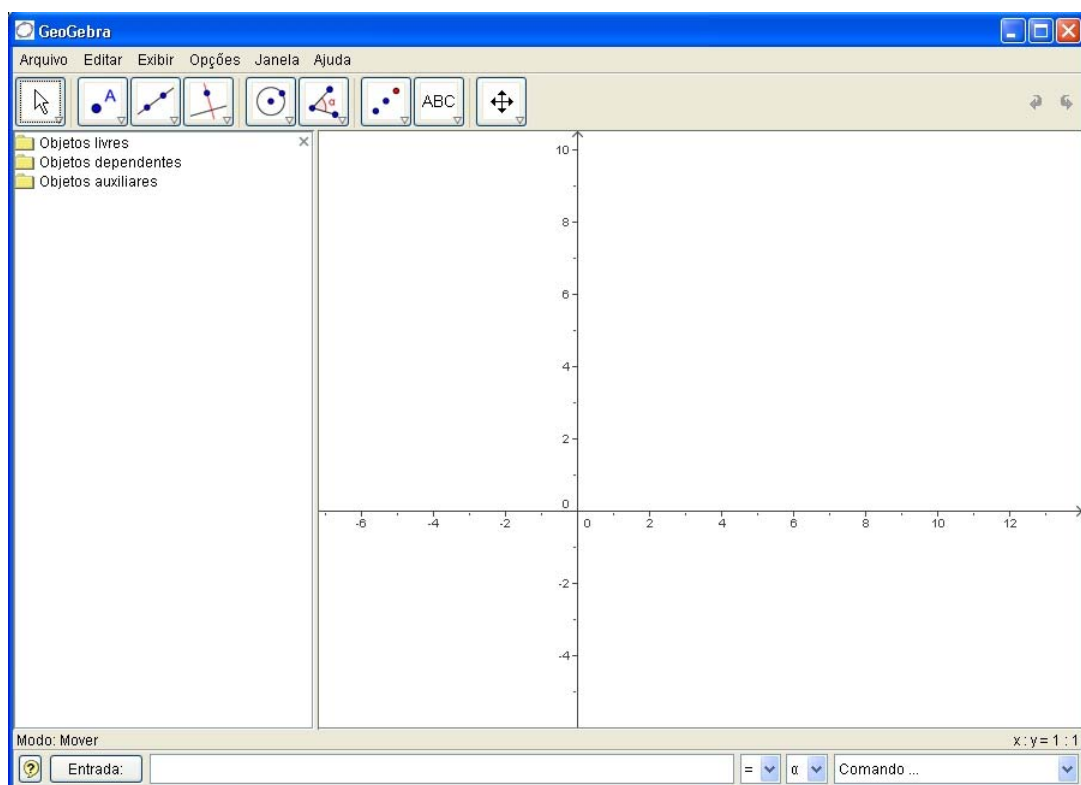
- **Como instalar e obter ajuda**

No site oficial estão todas as informações sobre instalação e ajuda. No site

http://www.geogebra.at/help/docupt_BR.pdf

você pode obter um manual em português sobre o GeoGebra[®]. Ele é um software livre (GNU General Public License) e, portanto, pode ser utilizado sem nenhum custo.

- **Tela Inicial**



A tela inicial deste programa não é muito diferente de outros programas do gênero e o trabalho com este programa se resume em escolher no menu e nos botões o que se quer fazer. Vamos desenvolver uma atividade simples apenas para nos familiarizar com ele:

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©] clicando no ícone sobre a área de trabalho.
- Clicando na opção "Exibir" desative a opção de exibir eixos clicando sobre a opção "Eixo". Para nós não será necessário utilizar sistema de eixos coordenados.
- Clique sobre os 9 quadradinhos (ícones) que são as ferramentas de desenho e liste todos os possíveis comandos que podemos executar sobre a tela, separando as 9 classes e depois separando em cada classe as respectivas subclasses (para ver as subclasses, você deve posicionar o mouse sobre a flechinha).
- Desenhe dois pontos.
- Desenhe uma reta passando por estes dois pontos.
- Desenhe a mediatriz do segmento por estes dois pontos.
- Desenhe um triângulo e depois construa um triângulo congruente a este.
- Mude as propriedades de algum dos objetos que você desenhou.

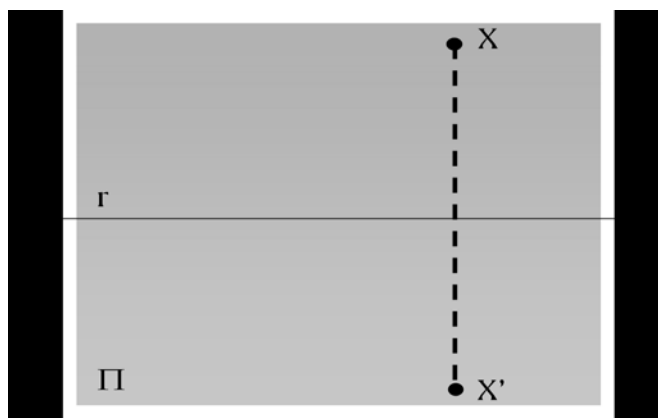
Anotações:

ATIVIDADE 17 A Reflexão

Seja r uma reta do plano, a **reflexão em torno de r** é a função $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$, definida por:

$$R_r(X) = \begin{cases} X & \text{se } X \in r \\ X' & \text{se } X \notin r, \end{cases}$$

onde X' é escolhido de tal modo que a reta r é a mediatriz do segmento XX' .



Em outras palavras, a reflexão com relação a r é a isometria que leva cada ponto do plano em sua “imagem especular”: um ponto perpendicularmente oposto com relação a r e à mesma distância de r . Observe que, por definição, os pontos da reta r são fixados por R_r . Sendo assim, R_r funciona como um espelho.

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©].
- Com a ferramenta “reta definida por dois pontos”, crie uma reta r .

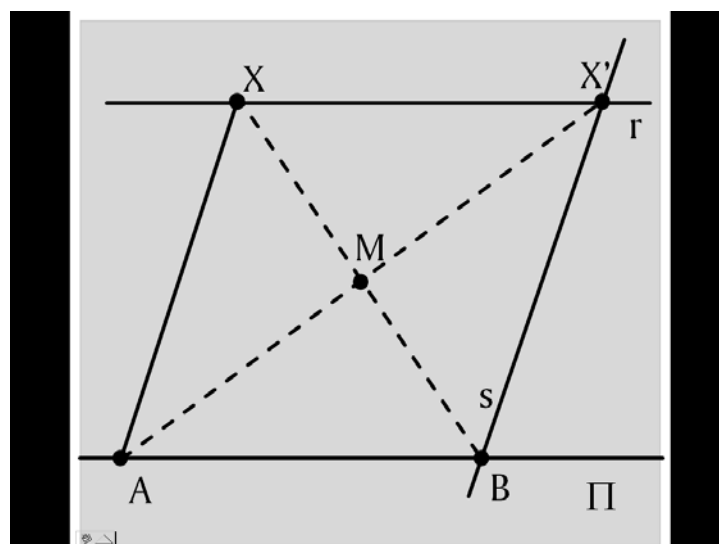
- Crie um polígono P_1 qualquer, preferencialmente situado totalmente em um mesmo lado da reta r .
- Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta ” clique no polígono P_1 e depois na reta r . Aparecerá o polígono regular P_2 , simétrico de P_1 em relação à reta r .
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Movimente a reta r e verifique a posição do polígono P_2 .
- Movimente a reta r até que ela intercepte o polígono P_1 .
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 movimentando a reta r ?
- Utilizando a ferramenta “distância” sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1 .
- Conclua que a reflexão é uma isometria. Como você demonstraria isto?

Anotações:

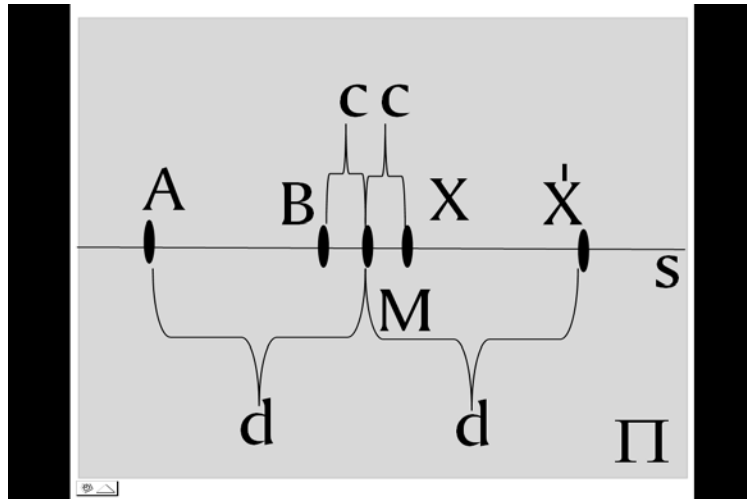
ATIVIDADE 18 A Translação

Dados dois pontos distintos A e B em Π , considere o segmento orientado AB . A **translação por AB** é a função $T_{AB}: \Pi \rightarrow \Pi$, definida por $T_{AB}(X) = X'$, onde X' é o único ponto tal que os segmentos orientados XX' e AB têm mesmo comprimento, mesma direção e mesma orientação (ou, de modo equivalente, X' é o único ponto tal que AX' e BX tenham o mesmo ponto médio).

Quando X não é colinear com A e B temos que A, X, X' e B formam um paralelogramo, como na figura a seguir:



Quando X é colinear com A e B temos a situação ilustrada na figura a seguir:



- No programa GeoGebra[©], crie um polígono qualquer P_1 .
- Crie um vetor v , de preferência, exterior ao polígono P_1 . Note que este vetor representa todos os segmentos orientados que possuem a direção, o sentido e o módulo de v .
- Com a ferramenta “transladar por um vetor” clique no polígono P_1 e depois no vetor v .
- Aparecerá um segundo polígono P_2 , obtido de P_1 por translação através de v .
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Movimente o ponto extremo final do vetor v e observe a posição de P_2 em relação a P_1 .
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 movimentando o extremo do vetor v ?
- Utilizando a ferramenta “distância” sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1 .
- Conclua que a translação é uma isometria. Como você demonstraria isto?

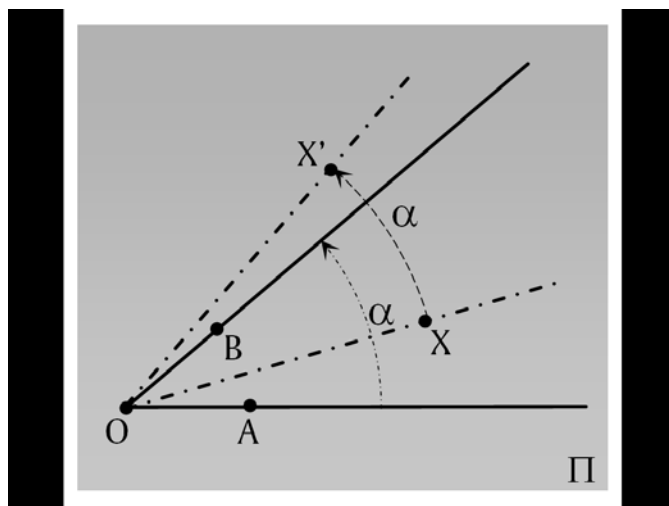
Anotações:

ATIVIDADE 19 A Rotação

Sejam A , B e O pontos não colineares em Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo orientado de vértice O . A **rotação de ângulo α** em torno do ponto O é a função $C_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ definida por

$$C_{O,\alpha}(X) = \begin{cases} X & \text{se } X = O \\ X' & \text{se } X \neq O, \end{cases}$$

onde X' é tal que $\overline{XO} = \overline{X'O}$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o sentido de rotação de X para X' é o mesmo que o de OA para OB .



As rotações são isometrias bastante conhecidas e muito freqüentes em nosso dia-a-dia. É a única isometria do plano que possui um único ponto fixo, o centro da rotação. As circunferências centradas nesse ponto são preservadas pela rotação.

Desenvolvimento:

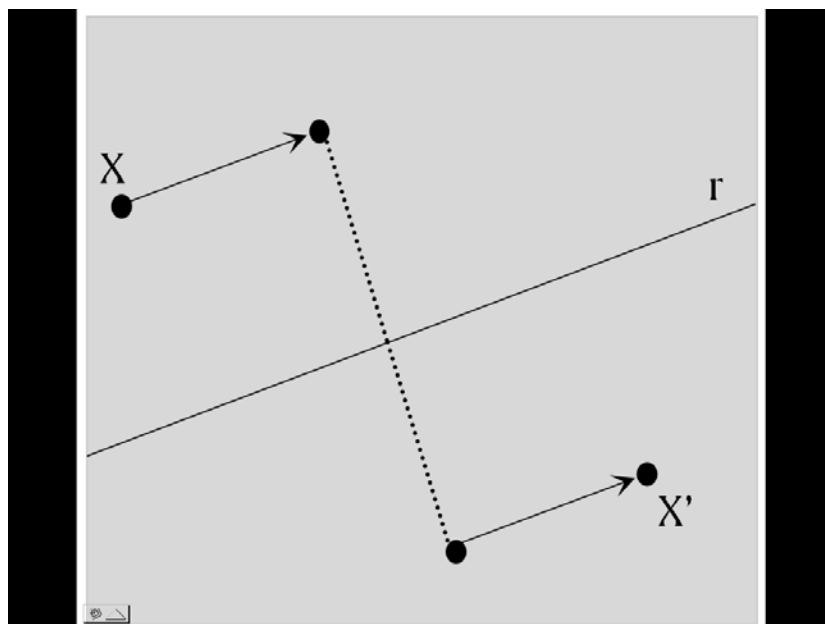
- No programa GeoGebra[®], crie um polígono qualquer P_1 .
- Crie um ponto O (de preferência, no exterior do polígono P_1).
- Crie um ângulo α .
- Com a ferramenta “girar em torno de um ponto por um ângulo”, clique no polígono P_1 , em seguida no ponto O e depois no ângulo α .
- Aparecerá um outro polígono P_2 , obtido de P_1 por rotação do ângulo α em torno do ponto O .
- Modifique sua cor para melhor distinguir do polígono inicial.
- Clique no ângulo α e altere o valor do mesmo. Perceba que P_2 irá mudar de local, mas sempre será obtido de P_1 por rotação de ângulo α em relação ao ponto O .
- Você consegue colocar P_2 sobre P_1 alterando o ângulo α ?
- Utilizando a ferramenta “distância” sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1 .
- Conclua que a rotação é uma isometria. Como você demonstraria isto?

Anotações:

ATIVIDADE 20 A Glissoreflexão

Das quatro isometrias, é a mais incomum e, talvez, a mais difícil de ser compreendida plenamente, pois é obtida a partir de duas isometrias já vistas. De fato, ela resulta de uma reflexão, seguida de uma translação em direção paralela ao eixo de reflexão. Aparentemente, portanto, ela não traz nenhuma informação nova. No mundo da simetria, entretanto, ela é imprescindível, pois nem sempre as isometrias que a compõem (a reflexão e a translação acima) são simetrias da figura em questão.

Sejam AB um segmento orientado e r uma reta paralela a AB . A **glissoreflexão segundo AB** e a reta r é a isometria obtida fazendo-se a reflexão em torno da reta r e, em seguida, a translação por AB . Veja a figura a seguir:



Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©].
- Crie uma reta r e um vetor v , paralelo à reta r .
- Crie um polígono P_1 qualquer, de preferência totalmente de um lado da reta r .
- Com a ferramenta “reflexão com relação a uma reta” clique no polígono P_1 e depois na reta r . Aparecerá o polígono regular P_2 simétrico de P_1 em relação à reta r .
- Com a ferramenta “transladar por um vetor” clique no polígono P_2 e depois no vetor v .
- Aparecerá um terceiro polígono P_3 , imagem de P_2 pela translação através do vetor v .
- O polígono P_3 é a imagem de P_1 por uma glissoreflexão.
- Modifique a cor do polígono P_3 para melhor distinguir do polígono P_1 .
- Mova a reta r e o vetor v e observe a imagem de P_1 .
- É possível fazer com que os polígonos P_1 e P_3 coincidam?
- Utilizando a ferramenta “distância” sobre os lados de ambos os polígonos verifique que esta transformação preserva a distância movimentando o polígono P_1 .
- Conclua que a glissoreflexão é uma isometria. Como você demonstraria isto?

Anotações:

Vamos aproveitar o ambiente dinâmico do GeoGebra[©] para construir um exemplo mais interessante de transformação não isométrica.

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©].
- Crie um ponto A qualquer.
- Crie um segmento a qualquer, de preferência não muito grande.
- Crie um polígono P_1 qualquer.
- Com a ferramenta “homotetia de um ponto por um fator”, clique no polígono P_1 e no ponto A .
- Na janela que aparecerá, digite a (a etiqueta do segmento criado anteriormente) e clique em “Aplicar”. O comprimento do segmento a representa o fator da homotetia.
- Aparecerá um polígono P_2 , similar ao polígono P_1 . Modifique sua cor.
- Se necessário, modifique o comprimento do segmento a para que ambos os polígonos caibam na janela.
- Utilizando a ferramenta “distância”, compare os comprimentos de lados correspondentes dos polígonos.
- Mova o polígono P_1 e compare as distâncias. Faça o mesmo alterando o comprimento do segmento a .
- Conclua que, em geral, uma homotetia não é uma isometria.
- Há algum caso em que uma homotetia é uma isometria?

Anotações:

Voltemos agora ao nosso propósito de classificar as isometrias do plano. Há vários modos de se obter essa classificação. Aquela que escolhemos, baseia-se na idéia de *composição de isometrias*.

O que ocorre se, após fazermos uma isometria, voltamos a fazer uma outra isometria? Em linguagem matemática mais apropriada, perguntaríamos: o que ocorre se fizermos a composta de duas isometrias? Se em cada uma delas preservamos as distâncias, o resultado final também preservará as distâncias, ou seja, será outra isometria.

Para ver isto de modo mais formal, sejam dadas as isometrias $f : \Pi \rightarrow \Pi$ e $g : \Pi \rightarrow \Pi$ do plano Π . Para quaisquer A e B de Π , se escrevermos $A' = g(A)$, $A'' = f \circ g(A) = f(A')$ e $B' = g(B)$, $B'' = f \circ g(B) = f(B')$, teremos:

$$\overline{A''B''} = \overline{f(A')f(B')} = \overline{A'B'} = \overline{g(A)g(B)} = \overline{AB}.$$

ATIVIDADE 22 Composto isometrias

E se compusermos duas das isometrias que já conhecemos, será uma isometria diferente das anteriores?

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©].

- Escolha duas isometrias, dentre aquelas quatro (podem ser do mesmo tipo).
- Use os procedimentos das atividades anteriores para construí-las com o GeoGebra[©], uma de cada vez.
- Identifique a isometria resultante da composição das duas que escolheu.
- É uma das quatro já vistas (reflexão, translação, rotação ou glissoreflexão)?
- Repita essa atividade com outras escolhas de isometrias iniciais, completando a seguinte tabela:

Isometrias		Condição	Composição das Isometrias
R_r	R_s	$r = s$	Identidade
R_r	R_s	$r // s, r \neq s$	$T_u, u \perp r$, o sentido de u é de r para s e $ u = 2.d(r, s)$
R_r	R_s	$r \cap s = \{O\}$	$C_{O,\alpha}, \alpha = 2.\angle(r, s)$
$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O = O'$	$C_{O,\alpha+\alpha'}$
$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O \neq O', \alpha + \alpha' \neq 0$	$C_{P,\alpha+\alpha'}$
$C_{O,\alpha}$	$C_{O',\alpha'}$	$O \neq O', \alpha + \alpha' = 0$	T_u
R_r	$C_{O,\alpha}$	$O \in r$	R_s
R_r	$C_{O,\alpha}$	$O \notin r$	$T_v \circ R_s$
$C_{O,\alpha}$	R_r	$O \in r$	R_t
$C_{O,\alpha}$	R_r	$O \notin r$	$T_w \circ R_t$
T_u	T_v	Qualquer	T_{u+v}
T_v	R_r	Qualquer	$T_w \circ R_s, w // s$
R_r	T_v	Qualquer	$T_u \circ R_t, u // t$
T_u	$C_{O,\alpha}$	Qualquer	$C_{P,\alpha}$
$C_{O,\alpha}$	T_u	Qualquer	$C_{Q,\alpha}$

Anotações:

Observação: As isometrias do plano, consideradas conjuntamente à operação de composição, constituem uma estrutura algébrica denominada *grupo*. Não é o caso, aqui, de entrarmos em detalhes, mas, grosso modo, isso traduz a idéia de que podemos compor isometrias seguidamente, de modo associativo, obtendo sempre outras isometrias, dentre elas a identidade e as isometrias inversas.

ATIVIDADE 23 Caracterizando as isometrias no GeoGebra[©]

Até o momento, vimos exemplos de quatro tipos de isometrias (lembrando que a identidade pode ser vista como uma translação por um vetor nulo ou como uma rotação de ângulo 0). Na atividade anterior, descrevemos todas as possíveis composições destas isometrias e só obtivemos isometrias desses mesmos quatro tipos.

Nesta atividade, veremos que toda isometria é resultado da composição de um certo número de reflexões.

Desenvolvimento:

- Abra o programa GeoGebra[©].
- Construa um triângulo ABC qualquer, utilizando a ferramenta “polígono”.

- Considere uma isometria qualquer $f : \Pi \rightarrow \Pi$ (pense o plano Π como sendo o plano da tela do computador). Já sabemos que a imagem do triângulo ABC pela isometria será um triângulo DEF congruente a ABC (por que?).
- Construa um triângulo DEF congruente a ABC , utilizando oportunamente a ferramenta “círculo dados centro e raio”. Faça a construção de modo a deixar os triângulos separados.
- Modifique a cor do triângulo DEF para melhor acompanhar o processo. Se quiser, mude as propriedades de visualização dos círculos para “não exibir objeto”.
- Trace a mediatriz do segmento AD e faça a reflexão do triângulo ABC em relação a essa reta, obtendo o triângulo $A'B'C'$. Note que $A' = D$, por construção.
- Verifique se os pontos B' e E coincidem. Em caso afirmativo, pule essa etapa. Senão, trace a mediatriz do segmento $B'E$ e faça a reflexão do triângulo $A'B'C'$ em relação a essa reta, obtendo o triângulo $A''B''C''$. Note que $A'' = A' = D$ e que $B'' = E$, por construção.
- Verifique se os pontos C'' e F coincidem (se você pulou a etapa anterior, leia A'', B'', C'' como sendo A', B', C'). Em caso afirmativo, pule essa etapa. Senão, trace a mediatriz do segmento $C''F$ e faça a reflexão do triângulo A'', B'', C'' em relação a essa reta, obtendo o triângulo $A'''B'''C'''$. Note que $A''' = D, B''' = E, C''' = F$, por construção.
- Observe que, após essas reflexões (quantas foram?), o triângulo ABC foi levado a coincidir com o triângulo DEF .
- Lembre da segunda propriedade vista na Atividade 14.
- Conclua que a composição dessas reflexões produz a isometria f .
- Movimente o triângulo ABC e veja que o resultado não se altera.
- O que ocorreria se, no início do processo, os vértices A e D coincidisse? E se dois pares de vértices coincidisse? Ou três?
- Conclua que toda isometria é a composta de, no máximo, três reflexões.

Anotações:

ATIVIDADE 24 *Classificando as isometrias*

Enfim, temos todos os elementos para obter a classificação desejada. É o que faremos nessa atividade.

Desenvolvimento:

- Considere uma isometria qualquer.
- Pela Atividade 23, enumere todas as possibilidades para esta isometria.
- Em cada possibilidade, utilize a Atividade 22 para determinar que tipo de isometria é esta.
- Conclua o seguinte resultado: Existem apenas quatro tipos de isometrias no plano, a saber: as reflexões, as translações, as rotações e as glissoreflexões.

Anotações:

4 Classificando as Simetrias no Plano

Para classificar as simetrias no plano, o primeiro passo, sem perceber, já foi dado anteriormente: estabelecer os critérios para efetuar a classificação. Quais seriam os melhores critérios para classificar as simetrias? Quando diremos que duas figuras têm o mesmo tipo de simetria ou quando têm tipos diferentes? Diante do que vimos até agora, não será difícil concordar que um ótimo critério para distinguir os diferentes tipos de figuras simétricas serão as suas simetrias, ou melhor dizendo, o conjunto de todas as isometrias que preservam cada figura. Em termos matemáticos mais apropriados, falamos no grupo de simetrias de cada figura. Mais formalmente:

Dado um subconjunto F do plano, que denominamos figura geométrica plana (ou simplesmente, figura), as isometrias $\varphi : \Pi \rightarrow \Pi$ do plano que têm a propriedade $\varphi(F) = F$ são denominadas **simetrias** da figura F . Em outras palavras, as simetrias de F são as isometrias do plano que deixam invariante a figura F . O conjunto formado por todas as simetrias de F é denominado **grupo das simetrias** de F e denotado por Γ_F . Se F tiver grupo de simetrias não unitário, isto é, se possuir simetrias diferentes da identidade, então dizemos que F é uma figura **simétrica**, caso contrário, dizemos que F é uma figura **assimétrica**.

As atividades que se seguem buscam ilustrar e aprofundar esse processo de identificação dos grupos de simetrias e, conseqüentemente, de classificação das figuras simétricas.

Observação: Antes de prosseguir, somos obrigados a lançar mão de um termo técnico para estabelecer uma restrição importante ao tipo de estudo que estamos fazendo. Trata-se do fato de que os grupos de simetrias considerados para efeito da classificação são somente grupos *discretos*. Em termos práticos, essa restrição pode ser entendida como segue:

- Se uma figura é invariante por translações numa dada direção, então, dentre essas translações, existe uma de amplitude mínima.
- Se uma figura é invariante por rotações em torno de um centro, então, dentre essas rotações, existe uma de ângulo mínimo.

ATIVIDADE 25 *Separando as figuras em classes*

A classificação das figuras simétricas se dá a partir de seus grupos de simetrias. Assim, diremos que duas figuras têm o mesmo tipo de simetria se possuem o mesmo grupo de simetrias¹. Nesta atividade, daremos um primeiro passo para a classificação das simetrias: separá-las em função da invariância por translações.

Desenvolvimento:

- No computador, abra a pasta 'Atividade 25'.
- Observe que todas as figuras da pasta são simétricas.
- Separe aquelas que são invariantes por alguma translação daquelas que não o são. Essas últimas são as chamadas *rosetas*.

¹Há aqui, deliberadamente, uma simplificação do processo de classificação. Para que tal classificação fosse completa, seria necessário considerar os grupos de simetrias juntamente com seus "geradores". Tal enfoque, porém, vai além dos propósitos desta oficina.

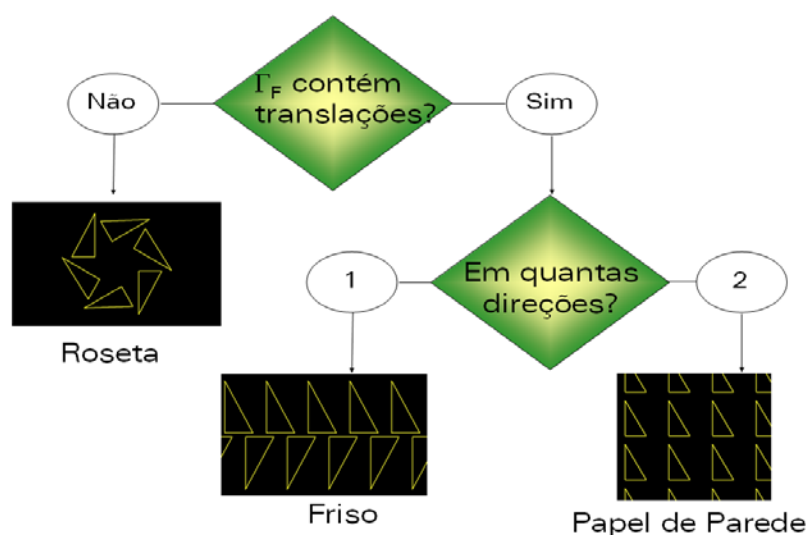
- Das primeiras, observe que algumas só são preservadas por translações em uma única direção. São os chamados *frisos*. Separe-os também.
- Observe que as figuras que restaram são preservadas por translações em várias direções. São os chamados *papéis de parede*.

Anotações:

Concluimos assim que um ponto de partida para identificar a classe de simetria de uma dada figura consiste em fazer as seguintes perguntas:

1. O grupo de simetrias da figura possui translações?
2. Em caso afirmativo, em quantas direções distintas elas ocorrem?

Se a resposta à primeira pergunta for não, então a figura pertence à classe das **rosetas**. Se a resposta à segunda pergunta for uma única direção de translação, então a figura pertence à classe dos **frisos**. Se, por fim, as simetrias translacionais se derem em infinitas direções, então a figura pertence à classe dos **papéis de parede**. Podemos resumir isto no seguinte diagrama:



Construído utilizando kall® - Jeff Weeks
<http://www.sussex.ac.uk/~jeffw/geometry/>

ATIVIDADE 26 *Explorando as rosetas na mesa de espelhos*

Para trabalharmos com algumas rosetas, vamos usar três peças da exposição *Matemática*.

Desenvolvimento:

1ª parte: Espelhos articulados: Este conjunto de dois espelhos articulados reproduz a composta de várias reflexões em retas concorrentes.

- Coloque alguns objetos avulsos entre os espelhos.
- Observe o efeito produzido pelos dois espelhos.
- Observe como as imagens virtuais dos espelhos também se comportam como espelhos.

- Observe que, para alguns valores do ângulo entre os espelhos, a imagem obtida é invariante por rotação.
- Quais são esses ângulos?
- Qual o ângulo da rotação correspondente?

2ª parte: Espelho com fissura: Esta peça reproduz uma reflexão.

- Identifique as rosetas que possuem simetria de reflexão e seus respectivos eixos.

3ª parte: Espelhos em ângulo reto: Uma das imagens simétricas que nos é mais familiar é o nosso próprio rosto. É inegável, de fato, que possuímos uma simetria de reflexão vertical em nossas faces (na verdade, no corpo todo). Mas será que somos realmente tão simétricos assim?

- Observe a sua imagem. É assim que você se vê no espelho?

Anotações:

ATIVIDADE 27 *Seu rosto-roseta no computador*

Desenvolvimento:

- Tire uma foto de seu rosto.
- Com um editor de fotografia, redimensione sua imagem (altura 2 cm) e salve no formato bmp.
- Utilize o programa “Simetria de Rosto” para observar quanto seu rosto é realmente simétrico.

Anotações:

ATIVIDADE 28 *Utilizando recortes e dobraduras para construir rosetas*

Muitos de nós, quando criança, já produziu muitas figuras simétricas com papel e tesoura, mesmo sem conhecer a matemática que estava por trás daquele divertimento.

Desenvolvimento:

- Escolha um modelo de roseta.
- Siga as instruções para fazer as dobraduras.
- Crie seus recortes, seguindo as instruções.
- Abra o papel e veja o resultado.
- Quais isometrias preservam sua figura?

Anotações:

ATIVIDADE 29 *Classificação das rosetas*

Uma figura do tipo roseta, por não possuir simetrias de translação, só pode possuir simetrias de rotação e/ou de reflexão.

Desenvolvimento:

- Premissa teórica: Discussão sobre a impossibilidade de uma figura do tipo roseta ser invariante por rotações de centros distintos.
- Suponha dada uma figura do tipo roseta e considere seu grupo de simetrias.
- Considere α o menor ângulo positivo de rotação dentre todas as rotações do grupo.
- Considere uma rotação deste grupo com um ângulo β .
- Utilizando o algoritmo da divisão de Euclides, escreva β em função de α e um resto θ .
- Verifique que a rotação de ângulo θ pertence ao grupo.
- Observando que θ é menor do que α , conclua que $\theta = 0$.
- Conclua que β é um múltiplo inteiro de α .

Anotações:

Assim, quando há simetrias de rotação, há necessariamente uma de ângulo mínimo α , que é um submúltiplo de 2π (isto é, $\frac{2\pi}{\alpha}$ é um número inteiro). Todas as outras são obtidas a partir dessa, aplicada um certo número de vezes (isto é, são rotações com ângulos $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, (n-1)\alpha, n\alpha$).

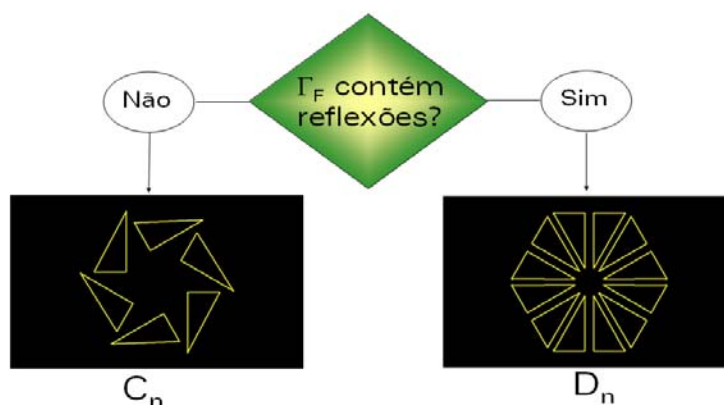
Diante disso, a classificação das rosetas se resume às seguintes perguntas:

1. O grupo de simetrias da figura possui rotações? Qual o menor ângulo α em que essas ocorrem?
2. O grupo de simetrias da figura possui reflexões?

A primeira pergunta sempre possui resposta afirmativa (eventualmente α é 2π), donde extraímos o grau $n = \frac{2\pi}{\alpha}$. Se a resposta à segunda pergunta for não, então o grupo de simetrias é chamado de **grupo cíclico de grau n** , e indicado com C_n . Este é um grupo cíclico de ordem finita n , gerado por uma rotação de ângulo α (o menor ângulo).

Se a resposta à segunda pergunta for sim, isto é, caso existam simetrias de reflexão, o grupo de simetrias é chamado de **grupo diedral de grau n** , e indicado com D_n . Este é um grupo finito de ordem par $2n$. Nesse caso, há n reflexões que deixam a figura invariante, todas efetuadas por retas que passam pelo centro das rotações do grupo.

O seguinte diagrama sintetiza esse algoritmo para classificar o grupo de cada figura do tipo roseta:



Construído utilizando [katip](http://www.katip.org/jeff/weeks) - Jeff Weeks
<http://www.katip.org/jeff/weeks>

ATIVIDADE 30 *Explorando os frisos na mesa de espelhos*

Para trabalharmos com alguns frisos vamos novamente utilizar peças da exposição *Matemática*.

Desenvolvimento:

1ª parte: Espelhos paralelos: Este conjunto de dois espelhos paralelos reproduz a composta de várias reflexões por retas paralelas.

- Coloque alguns objetos avulsos entre os espelhos.
- Observe o efeito produzido pelos dois espelhos.
- Observe como uma translação é obtida a partir das duas reflexões (na verdade, infinitas reflexões: uma em cada um dos infinitos “espelhos virtuais” que aparecem nos dois espelhos reais).
- Produza diferentes frisos.
- Quais as suas simetrias?

2ª parte: Câmara de três espelhos: Esta peça reproduz reflexões tanto na horizontal quanto na vertical.

- O que ocorre de diferente no conjunto de três espelhos em relação ao anterior?

Anotações:

ATIVIDADE 31 *Utilizando recortes e dobraduras para construir frisos*

Assim como para as rosetas, os frisos também foram personagens freqüentes de nossa infância, na forma de dobraduras e recortes. Quem nunca fez a famosa corrente de bonequinhos que se dão a mão?

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Escolha um modelo simples de friso.
- Siga as instruções para fazer as dobraduras.
- Crie seus recortes, seguindo as instruções.
- Abra o papel e veja o resultado.
- Quais isometrias preservam sua figura?

2ª parte:

- Observe os 7 modelos de frisos com os golfinhos².
- Para cada um, faça os recortes e as dobraduras seguindo as instruções.
- Quais as simetrias de cada um dos modelos?

Anotações:

ATIVIDADE 32 *As possíveis simetrias de um friso*

Os frisos são figuras invariantes por translação em uma única direção. Assim, dentre as simetrias de um friso, necessariamente encontraremos translações. Mas podemos encontrar também reflexões, rotações e/ou glissoreflexões. Esta atividade nos levará a compreender as possíveis simetrias de um friso.

Desenvolvimento:

1ª parte:

- Suponha dada uma figura do tipo friso e considere seu grupo de simetrias.
- Considere v o vetor da translação de amplitude mínima (isto é, não há nenhuma translação do grupo com vetor de módulo maior que o de v).
- Considere uma translação qualquer do grupo, com vetor de translação w .
- Utilizando o algoritmo da divisão de Euclides, escreva w em função de v e um resto u .
- Verifique que a translação de vetor u pertence ao grupo.
- Observando que u é menor do que v , conclua que $u = 0$.
- Conclua que w é um múltiplo inteiro de v .

2ª parte:

- Como podem ser as reflexões que mantêm o friso invariante? Mais especificamente, quais são os possíveis eixos de reflexão para que tenhamos uma simetria do friso?
- Se o friso possuir rotações, quais os possíveis ângulos dessas rotações?
- Nesse caso, onde podem se localizar os centros das rotações?

²Esses modelos de dobraduras foram gentilmente cedidos pela equipe da exposição italiana *Simmetrie - Giochi di specchi*.

- Com relação às glissoreflexões, quais os possíveis vetores que as caracterizam?

Anotações:

Em suma, concluímos que as possíveis simetrias de um friso são:

1. Translações segundo um vetor v e seus múltiplos.
2. Reflexão horizontal (isto é, segundo uma reta paralela à direção de v , passando pelo “meio” do friso).
3. Reflexões verticais (isto é, segundo retas perpendiculares à direção do vetor v).
4. Rotações de ângulo raso.
5. Glissoreflexões não triviais (isto é, cujas translações e reflexões que as compõem não são simetrias do grupo).

Além do mais, tiramos as seguintes conclusões:

1. Se o grupo possui reflexões verticais, a distância entre dois eixos de reflexão consecutivos é igual ao módulo de v ou à sua metade.
2. Se o grupo possui rotações, a distância entre dois centros de rotação consecutivos é igual ao módulo de v ou à sua metade.
3. Se o grupo possui glissoreflexões não triviais, o módulo do vetor das glissoreflexões mínimas é igual ao módulo de v ou à sua metade.

ATIVIDADE 33 *Classificação dos frisos*

Pelo que vimos na Atividade 32, o que pode diferenciar os grupos de simetrias dos frisos é a existência, ou não, de reflexão horizontal, reflexões verticais, rotações e/ou glissoreflexões não triviais. Como cada uma dessas possibilidades admite resposta ‘sim’ ou ‘não’, um simples cálculo combinatório nos mostra que, no máximo, há 16 grupos distintos. Nesta atividade, veremos que, na verdade, somente 7 desses grupos são possíveis (aqueles dos golfinhos da Atividade 31), completando assim a classificação das figuras do tipo friso.

Desenvolvimento:

1ª parte:

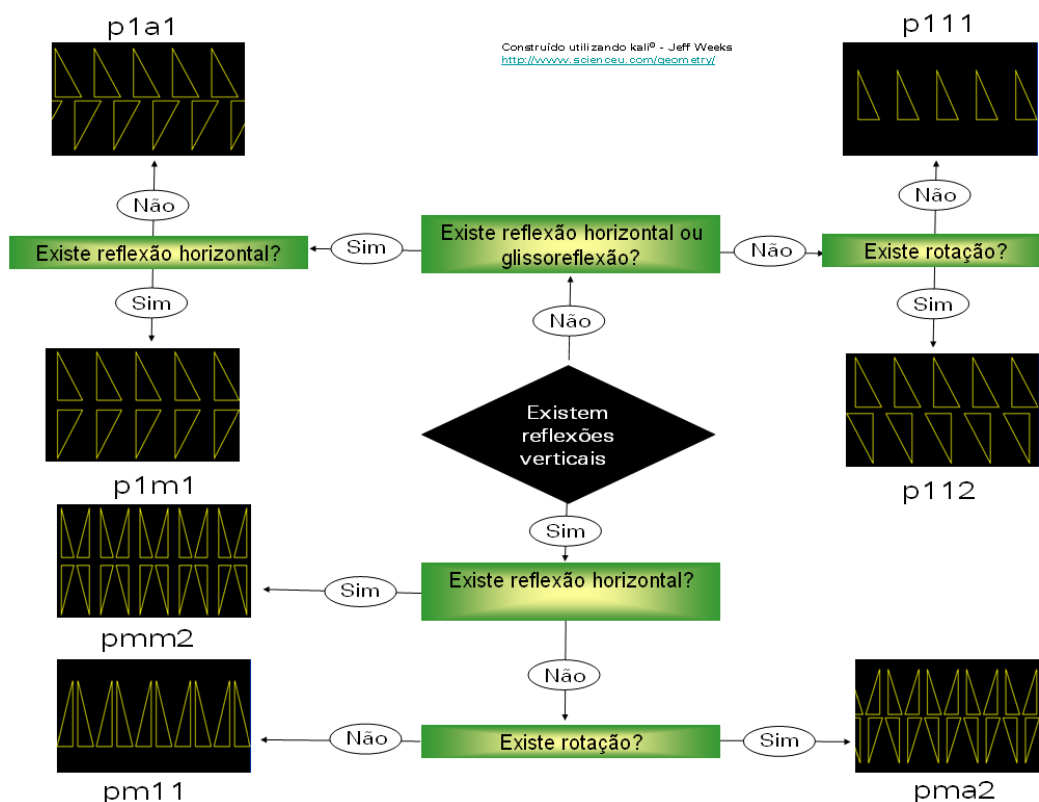
- Construa uma tabela com 4 colunas e 16 linhas.
- Atribua a cada coluna uma das quatro simetrias possíveis (estamos desconsiderando as translações): reflexão horizontal, reflexões verticais, rotações, glissoreflexões não triviais.
- Com ‘zeros’ e ‘uns’, preencha a tabela com todas as possibilidades: o ‘zero’ numa célula representa que a isometria correspondente àquela coluna não está no grupo; o ‘um’ representa que está.

2ª parte:

- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal, então não pode possuir glissoreflexões não triviais, e vice-versa.

- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal e reflexões verticais, então necessariamente tem que possuir rotações.
- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexão horizontal e rotações, então necessariamente tem que possuir reflexões verticais.
- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui reflexões verticais e rotações centradas nos eixos de reflexão, então necessariamente tem que possuir glissoreflexões não triviais.
- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui glissoreflexões não triviais e rotações, então necessariamente tem que possuir reflexões verticais.
- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Observe que se um grupo possui glissoreflexões não triviais e reflexões verticais, então necessariamente tem que possuir rotações.
- Em função do item acima, elimine da tabela as linhas que correspondem a situações impossíveis.
- Finalmente, observe que sobraram somente 7 linhas possíveis.

As sete linhas que sobraram na tabela que construímos, correspondem aos únicos grupos de simetrias possíveis para os frisos. O seguinte diagrama ilustra o algoritmo para determinar a classe do grupo de simetrias de cada figura do tipo friso:



Vamos à *Matemática*! Como pudemos perceber em diferentes ocasiões, os espelhos são ferramentas muito versáteis na produção de simetrias. Um único espelho produz somente uma reflexão, mas combinando diferentes espelhos (isto é, compondo reflexões) conseguimos obter translações, rotações e até glissoreflexões. Veremos agora o efeito de câmaras de espelhos, através das quais poderemos observar vários tipos diferentes de papéis de parede.

Desenvolvimento:

- Escolha uma das câmaras de espelho.
- Coloque objetos avulsos dentro da câmara para explorar o efeito produzido pelos espelhos.
- Use os painéis de fórmica branca para produzir papéis de parede a partir de seus desenhos.
- Agora, observe as figuras afixadas nas paredes externas da câmara.
- Com as peças coloridas, tente reproduzir cada figura (note que as cores são diferentes, pois o objetivo é reproduzir o desenho).
- Repita o procedimento nas outras câmaras.

Anotações:

ATIVIDADE 35 *Utilizando recortes e dobraduras para construir papéis de parede*

Com uma folha de papel é possível também construir alguns tipos de papéis de parede.

Desenvolvimento:

- Pegue uma folha de papel sulfite, ou papel para dobraduras.
- Dobre ela ao meio e repita o processo três ou quatro vezes.
- Faça um desenho de contorno que seja fácil de recortar.
- Recorte o contorno e abra a folha.
- Quais isometrias preservam sua figura?
- O procedimento lembra alguma das câmaras de espelhos?
- Por que o procedimento de dobradura e recorte funciona para produzir simetrias?

Anotações:

ATIVIDADE 36 *Classificando os papéis de parede*

O procedimento para classificar os papéis de parede é muito similar àquele que usamos com os frisos: identificar as possíveis simetrias de um papel de parede; considerar todas as combinações dessas simetrias; eliminar aquelas que se mostram impossíveis. No final, o resultado que se obtém é que existem somente 17 grupos de simetrias possíveis.

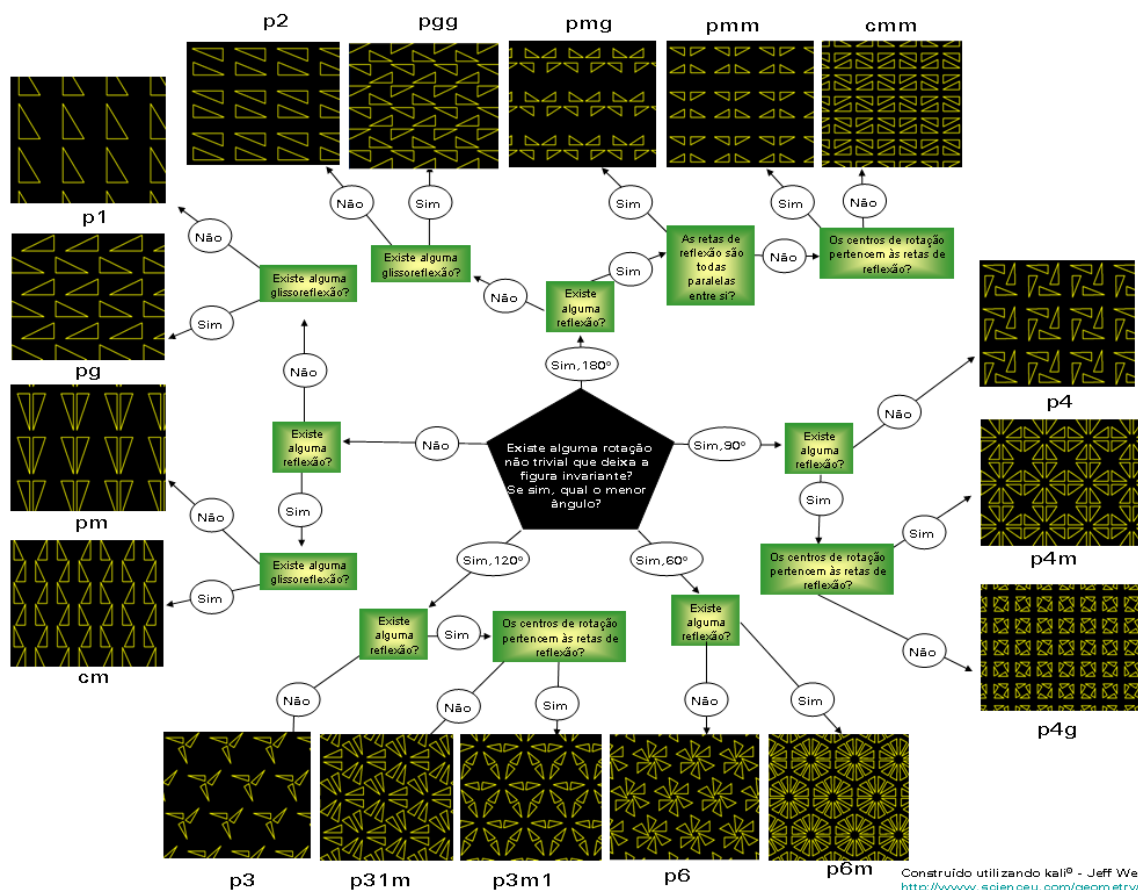
Entretanto, em função da própria amplitude de possibilidades que aparecem nesse caso, esse estudo torna-se muito mais complicado (veja [2] e [3] para um estudo detalhado). Em função disso, e por não acrescentar muito ao nosso trabalho, não vamos desenvolver o processo de classificação dos papéis de parede como fizemos para os frisos. Vamos, diretamente, tomar contato com o algoritmo de classificação desses grupos de simetrias.

Desenvolvimento:

- No computador, abra a pasta 'Atividade 36'.
- Escolha uma das figuras.
- Utilize o algoritmo abaixo para classificar a figura.
- O resultado confere?
- Escolha outras figuras e repita o procedimento.

Anotações:

Algoritmo de classificação para papéis de parede:



Construído utilizando kali® - Jeff Weeks
<http://www.sciencenue.com/geometrv/>

ATIVIDADE 37 *Reconhecendo os grupos de simetrias*

Com a classificação completa, podemos agora, diante de qualquer figura simétrica, dizer a qual grupo de simetria ela pertence. É o que faremos nessa atividade, com o auxílio das peças de "reconhecimento" da exposição *Matemática*.

Desenvolvimento:

- Escolha uma das figuras disponíveis.
- Com o auxílio da peça “Reconhecimento de Translações”, determine se a figura é invariante por translações e, se for o caso, em quantas direções.
- A sua figura é uma roseta, um friso ou um papel de parede?
- Escolha o algoritmo apropriado para a sua figura.
- Siga a orientação do algoritmo e use as peças de reconhecimento para determinar o grupo de simetria de sua figura.
- Troque de figura com um colega e repita o procedimento.
- Compare o resultado.

Anotações:

ATIVIDADE 38 *As simetrias no computador*

A utilização do computador em sala de aula é uma prática cada vez mais freqüente e necessária. Não poderia ser diferente com um assunto tão rico quanto o de simetrias no plano. A seguir, apresentaremos um programa (em fase de aprimoramento) que permite ao aluno explorar as isometrias principais e os grupos de simetrias das figuras planas.

Desenvolvimento:

- Abra o programa SIMIS.
- Escolha o “grupo translacional” com o qual quer trabalhar: rosetas, frisos, papéis de parede.
- Escolha um grupo de simetria.
- Desenhe na área indicada e observe o resultado.
- Repita o procedimento com outras escolhas.

Anotações:

ATIVIDADE 39 *Simetrias no video*

As simetrias do plano são um tema muitíssimo explorado, principalmente porque aparece em contextos tão distintos como a física dos cristais e as artes plásticas. Há uma quantidade incontável de vídeos, livros, programas de computador e sítios na Internet que tratam do tema. Seleccionamos aqui alguns vídeos com o objetivo de ilustrar esse maravilhoso mundo das simetrias.

A TV Escola é um canal do Governo Federal direcionado a professores e alunos, fornecendo material suplementar ao conteúdo curricular. Oferece, em particular, material de vídeo para ser copiado e divulgado nas escolas de todo o país. O tema 'Simetrias' foi abordado em 3 séries apresentadas na TV Escola, a saber:

1. FALANDO EM MATEMÁTICA: É uma série de 26 programas que mostra como a História ajuda a entender melhor os conceitos matemáticos. O tema 'Simetrias' é abordado em um dos programas desta série e possui a duração de 12'31". Foi realizado por La Cinquième, França, em 1999.
2. AZULEJOS DE ALHAMBRA: O palácio de Alhambra, na Espanha, é conhecido por suas estampas decorativas. Estudos matemáticos irão mostrar que apesar da aparente infinidade de variações, se observadas de seu centro e em sua ordem de rotação, há pouca diferença entre os elementos essenciais da gravura em retícula, repetidas para papéis de parede e estampas em metro. Este programa possui a duração de 24 minutos e foi realizado pela BBC, Grã-Bretanha, em 1994.
3. ARTE E MATEMÁTICA: É uma série de 13 programas que mostra as relações entre Matemática e Arte, nos mais variados meios e expressões. Enquanto a Matemática apresenta a face mais rígida e estruturada da criação artística, a Arte representa a face mais intuitiva e lúdica do pensamento matemático. O tema simetrias é abordado em um dos programas desta série e possui a duração de 20'01". Foi realizado pela TV Escola/MEC-TV Cultura, Brasil, em 2000.

Anotações:

References

- [1] BELLINGERI, P. e outros. O Ritmo das Formas. Atractor, 2003.
- [2] GERÔNIMO, J. R., FRANCO, V. S., Ornamentos no Plano (em preparação)
- [3] MARIA DEDÒ, "Forme – simmetria e topologia", editoras Decibel e Zanichelli, 1999.
- [4] FARMER, D. W. Grupos e Simetria, Editora Gradiva, Lisboa, 1996 (Tradução).
- [5] LEIVAS, J. C. P., Geometria das Transformações, Texto.
- [6] NOGUEIRA, C.M.I. e outros. Jogos e Atividades com Simetrias no Plano (em preparação)
- [7] WEYL, H. Simetria. EDUSP, São Paulo, 1997 (Tradução).
- [8] Página na Internet: MATEMATICA: Exposição Interativa de Matemática. www.matematica.uem.br. (acesso a partir de fevereiro de 2007)
- [9] Página na Internet: <http://matemilano.mat.unimi.it/> (acesso em 24/05/2006)
- [10] Página na Internet: <http://www2.spsu.edu/math/tile/symm/types/index.htm> (acesso em 24/05/2006)
- [11] Página na Internet: <http://www.montessoriworl.org/> (acesso em 24/05/2006)
- [12] Página na Internet: <http://www.scienceu.com/geometry/> (acesso em 24/05/2006)