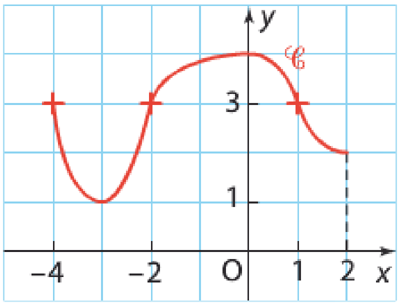
Chapitre 4 – Etude de fonctions

Compétence : Passer de la courbe au tableau de variation et au tableau de signes

Exercice 1 : Passer de la courbe au tableau de variation et au tableau de signes

On donne, dans chacun des cas suivants numérotés de $\boxed{1}$ à $\boxed{9}$, la représentation graphique d'une fonction f.

1. Préciser l'ensemble de définition
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Préciser les extremums de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de signes de la fonction f.



2.

x	-4		-3		0		2
Variations de f	3	↘	1	↗	4	↘	2

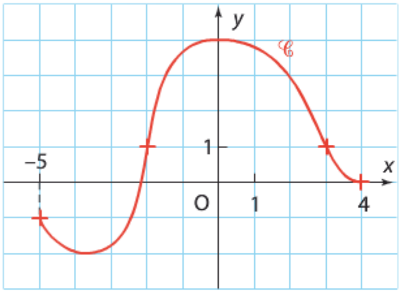
4.

x	-4		2
$f(x)$		$+$	

$D_f = [-4\ ;\ 2]$

Le maximum de f sur $[-4\ ;\ 2]$ est 4 atteint en $x = 0$.

Le minimum de f sur $[-4\ ;\ 2]$ est 1 atteint en $x = -3$.



2.

x	-5		-4		0		4
Variations de f	-1	↘	-2	↗	4	↘	0

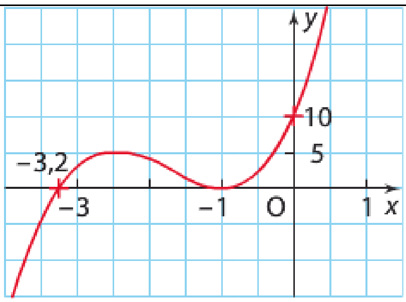
4.

x	-5		$-2{,}2$		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0

$D_f = [-5\ ;4]$

Le maximum de f sur $[-5\ ;\ 4]$ est 4 atteint en $x = 0$.

Le minimum de f sur $[-4\ ;\ 2]$ est -2 atteint en $x = -4$.



2.

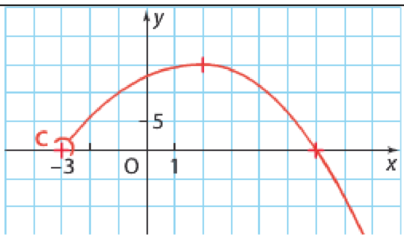
x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

4.

x	$-\infty$		$-3{,}2$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$D_f =]-\infty ; +\infty[$

Il n'y a pas de maximum et de minimum sur $]-\infty ; +\infty[$.



2.

x	-3		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	15	↘	$-\infty$

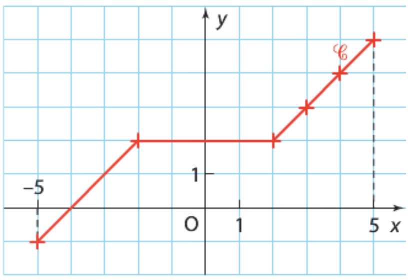
4.

x	-3		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$D_f =]-3 ; +\infty[$

Le maximum de f sur $]-3 ; +\infty[$ est 15 atteint en $x = 2$.

Ol n'y a pas de minimum sur $]-3 ; +\infty[$.



2.

x	-5		-2		2		5
Variations de f	-1	↗	2	→	2	↗	5

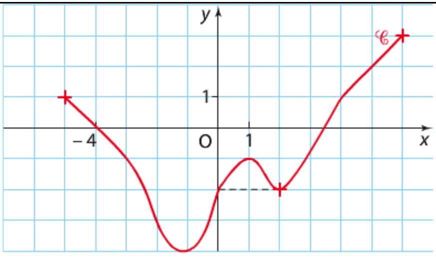
4.

x	-5		-4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$D_f = [-5\ ;5]$

Le maximum de f sur $[-5\ ;\ 5]$ est 5 atteint en $x = 5$.

Le minimum de f sur $[-5\ ;\ 5]$ est -1 atteint en $x = -5$.



2.

x	-5		-1		1		2		6
Variations de f	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

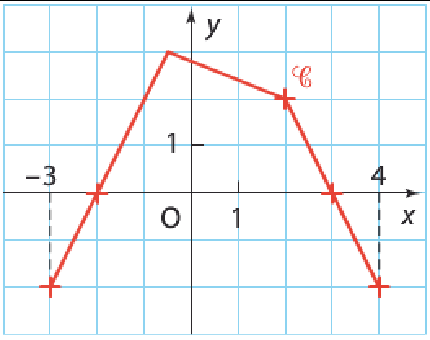
4.

x	-5		-4		$3{,}5$		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = [-5\,;6]$

Le maximum de f sur $[-5\,;\ 6]$ est 3 atteint en $x = 6$.

Le minimum de f sur $[-5\,;\ 6]$ est -4 atteint en $x = -1$.



2.

x	-3		$-\frac{1}{2}$		4
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2

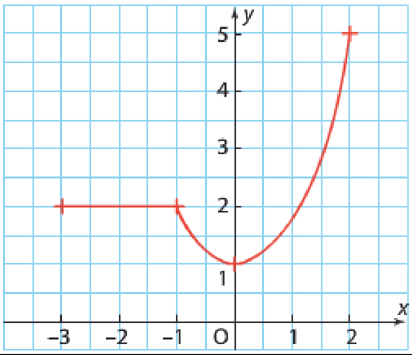
4.

x	-3		-2		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f = [-3\,;4]$

Le maximum de f sur $[-3\,;\ 4]$ est 3 atteint en $x = -\frac{1}{2}$.

Le minimum de f sur $[-3\,;\ 4]$ est -2 atteint en $x = -3$ et $x = 4$.



2.

x	-3		-1		0		2
Variations de f	2	$\rightarrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

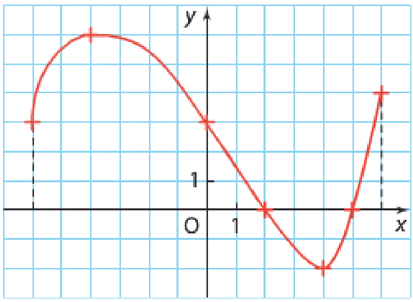
4.

x	-3		2
$f(x)$		$+$	

$D_f = [-3\,;2]$

Le maximum de f sur $[-3\,;\ 2]$ est 5 atteint en $x = 2$.

Le minimum de f sur $[-3\,;\ 2]$ est 1 atteint en $x = 0$.



2.

x	-6		-4		4		6
Variations de f	3	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

4.

x	-6		2		5		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_f = [-6\,;6]$

Le maximum de f sur $[-6\,;\ 6]$ est 6 atteint en $x = -4$.

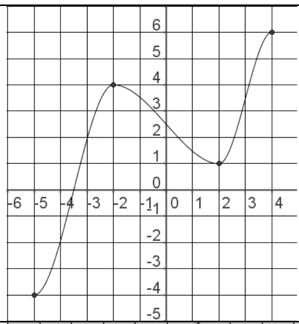
Le minimum de f sur $[-6\,;\ 6]$ est -2 atteint en $x = 4$.

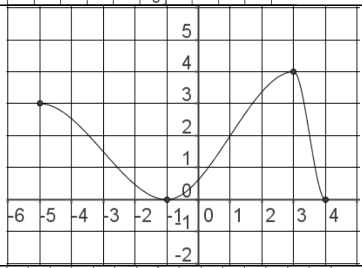
Compétence : Utiliser un tableau de variation

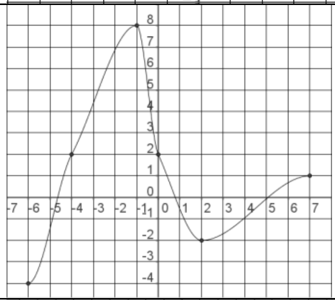
Exercice 2 : Utiliser un tableau de variation

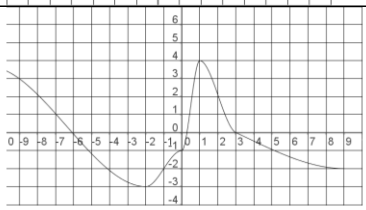
On donne, dans chacun des cas suivants numérotés de $\boxed{1}$ à $\boxed{6}$, le tableau de variation d'une fonction f.

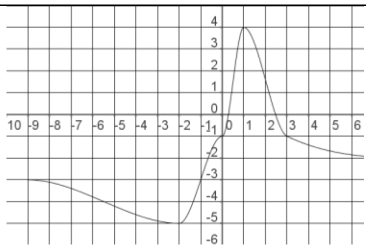
1. Préciser l'ensemble de définition
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation.
3. Préciser les extremums de la fonction f sur son ensemble de définition. En quelles valeurs sont-ils atteints ?

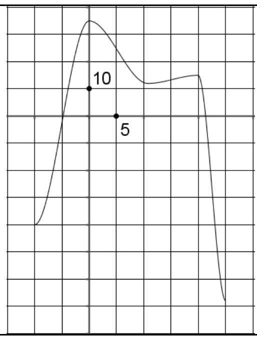
<table>
<tr><td>x : -5 ; -2 ; 2 ; 4
f : $-4 \nearrow 4 \searrow 1 \nearrow 6$</td><td></td><td>$D_f = [-5\,;4]$</td><td>Le maximum de f sur $[-5\,,;4]$ est 6 atteint en $x = 4$.

Le minimum de f sur $[-5\,;\,4]$ est -4 atteint en $x = -5$.</td></tr>
<tr><td>x : -5 ; -1 ; 3 ; 4
f : $3 \searrow 0 \nearrow 4 \searrow 0$</td><td></td><td>$D_f = [-5\,;4]$</td><td>Le maximum de f sur $[-5\,;\,4]$ est 4 atteint en $x = 3$.

Le minimum de f sur $[-5\,,;4]$ est 0 atteint en $x = -1$ et $x = 4$.</td></tr>
<tr><td>x : -6 ; -4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 7
g : $-4 \nearrow 2 \nearrow 8 \searrow 2 \searrow -2 \nearrow 1$</td><td></td><td>$D_f = [-6\,;7]$</td><td>Le maximum de f sur $[-6\,;\,7]$ est 8 atteint en $x = -1$.

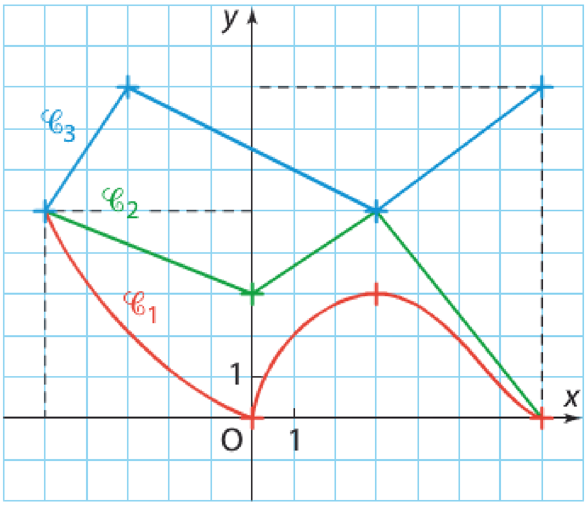
Le minimum de f sur $[-6\,;\,7]$ est -4 atteint en $x = -6$.</td></tr>
<tr><td>x : $-\infty$; -2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 9
f : $\searrow -3 \nearrow -1 \nearrow 4 \searrow 0 \searrow -2$</td><td></td><td>$D_f =]-\infty\,;9]$</td><td>Il n'y a pas de maximum sur $]-\infty\,;9]$.

Le minimum de f sur $]-\infty\,;9]$ est -3 atteint en $x = -2$.</td></tr>
<tr><td>x : -9 ; -2 ; 0 ; 1 ; 3 ; $+\infty$
f : $-3 \searrow -5 \nearrow -1 \nearrow 4 \searrow -1 \searrow$</td><td></td><td>$D_f = [-9\,;\,+\infty[$</td><td>Le maximum de f sur $[-9\,;\,+\infty[$ est 4 atteint en $x = 1$.

Il n'y a pas de minimum sur $[-9\,;\,+\infty[$.</td></tr>
<tr><td>x : -10 ; 0 ; 11 ; 20 ; 25
f : $-40 \nearrow 35 \searrow 12 \nearrow 15 \searrow -68$</td><td></td><td>$D_f = [-10\,;25]$</td><td>Le maximum de f sur $[-10\,;\,25]$ est 35 atteint en $x = 0$.

Le minimum de f sur $[-10\,;\,25]$ est -68 atteint en $x = 25$.</td></tr>
</table>

Exercice 3 : Attribuer à chaque courbe son tableau de variations



Attribuer à chaque courbe son tableau de variations :

1.

x	-5		-3		3		7
f	5	↗	8	↘	5	↗	8

$\mathbf{1 \rightarrow C_3}$

2.

x	-5		0		3		7
g	5	↘	0	↗	3	↘	0

$\mathbf{2 \rightarrow C_1}$

3.

x	-5		0		3		7
h	5	↘	3	↗	5	↘	0

$\mathbf{3 \rightarrow C_2}$

Exercice 4 : Comparaison

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-2		0		4		6
f	-1	↗	4	↘	-3	↗	3	↘	1

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

$\boldsymbol{D_f = [-4\,;6]}$

2. Décrire les variations de f.

La fonction f est strictement croissante sur $[-4\,;\,-2]$ et sur $[0\,;4]$.
La fonction f est strictement décroissante sur $[-2\,;\,0]$ et sur $[4\,;6]$.

3. Quelle est le maximum de la fonction f sur $[0\,;\,6]$?

Le maximum de la fonction f sur $[0;6]$ est 3 atteint en $x = 4$.

4. En justifiant ces réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$	**$1 < 3$, or la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;4]$ ainsi : $f(1) < f(3)$. VRAIE.**
b. $f(-2) > f(-1)$	**$-2 < -1$, or la fonction f est strictement décroissante sur $[-2\,;0]$ ainsi : $f(-2) > f(-1)$. VRAIE.**
c. $f(-3) < 4$	**Sur $[-4\,;\,-2]$, le maximum de la fonction f est 4, ainsi pour tout $x \in [-4\,;\,-2]$ on a : $f(x) \leq 4$. Or $-3 \in [-4\,;\,-2]$ ainsi $f(-3) < 4$. VRAIE.**
d. $f(0{,}1) < 0$	**Le tableau ne permet pas de conclure, on sait juste que pour tout $x \in [0\,;4]$ on a $-3 \leq f(x) \leq 3$.**
e. $f(x) \geq -1$ sur $[-4;6]$	**Le minimum de la fonction f sur $[-4\,;6]$ est -3. Ainsi pour tout réel $x \in [-4\,;\,6]$ on a $f(x) \geq -3$ et non -1. FAUSSE.**
f. $f(1) = 0$	**Le tableau ne permet pas de conclure, on sait juste que pour tout $x \in [0\,;4]$ on a $-3 \leq f(x) \leq 3$.**
g. $f(2) > 3$	**Pour tout $x \in [0\,;4]$ on a $-3 \leq f(x) \leq 3$. Or $2 \in [0\,;4]$ donc FAUSSE.**
h. $f(-3{,}5) = f(2)$	**Le tableau ne permet pas de conclure.**
i. Le minimum de f sur $[-4\,;6]$ est -1	**Le minimum de la fonction f sur $[-4\,;6]$ est -3. FAUSSE.**

Exercice 5 : Comparaison

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	0		2		4		5
f	-4	↘	-5	↗	-1	↘	-2

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

$\boldsymbol{D_f = [0\,;5]}$

2. Décrire les variations de f.

La fonction f est strictement croissante sur $[2\,;\,4]$. **La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,2]$ et sur $[4\,;5]$.**

3. Quelle est le minimum de la fonction f sur $[2\,;\,5]$?

Le minimum de la fonction f sur $[2;5]$ est -5 atteint en $x = 2$.

4. En justifiant ces réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$	**Le tableau ne permet pas de conclure.**
b. $f(1) < f(0)$	**$0 < 1$, or la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;2]$ ainsi :** **$f(0) > f(1)$. VRAIE.**
c. $f(3) < 0$	**Sur $[2\,;\,4]$, le maximum de la fonction f est -1, ainsi pour tout $x \in [2\,;\,4]$ on a :** **$f(x) \leq -1 < 0$. Or $3 \in [2\,;\,4]$ ainsi $f(3) < 0$. VRAIE.**
d. $f(3) = -3$	**Le tableau ne permet pas de conclure.**
e. $f(x) \leq -1$ sur $[0\,;5]$	**Le maximum de la fonction f sur $[0\,;5]$ est -1. Ainsi pour tout réel $x \in [0\,;\,5]$ on a** **$f(x) \leq -1$. VRAIE.**
f. $f(1) = -4{,}5$	**Le tableau ne permet pas de conclure.**
g. $f(1) < f(5)$	**$f(5) = -2$. Pour tout $x \in [0\,;2]$ on a $-5 \leq f(x) \leq -4 < -2$. Or $1 \in [0\,;2]$ donc** **VRAIE.**
h. $f(2) = f(5)$	**$f(2) = -5$ et $f(5) = -2$. Ainsi $f(2) \neq f(5)$. FAUSSE.**
i. Le minimum de f sur $[0\,;5]$ est -2	**Le minimum de la fonction f sur $[-4\,;6]$ est -5. FAUSSE.**

Exercice 6 : Images et antécédents

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		-1		3		6
f	10	↘	8	↗	9	↘	-1

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

$\boldsymbol{D_f = [-2\,;6]}$

2. Quelles sont les images par f de -1, 3 et 6 ?

$\boldsymbol{f(-1) = 8}$	$\boldsymbol{f(3) = 9}$	$\boldsymbol{f(6) = -1}$

3. Compléter le plus précisément possible :

a. $\boldsymbol{8} \leq f(2) \leq \boldsymbol{9}$ $\qquad$ $\boldsymbol{-1} \leq f(4) \leq \boldsymbol{9}$

4. Donner un antécédent de -1. En possède-t-il d'autre(s) ?

6 est un antécédent de -1 par f. Il n'en possède pas d'autre.

5. Combien 0 a-t-il d'antécédent ?

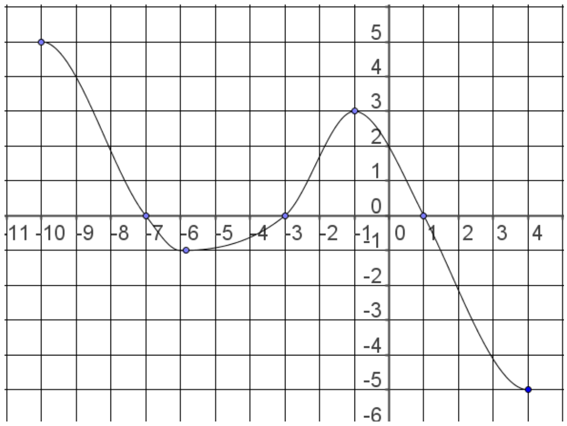
0 possède un seul antécédent, celui-ci appartient à l'intervalle $[3\,;0]$ où pour tout réel x on a : $-1 \leq f(x) \leq 9$.

Exercice 7 : Tracer une courbe

On donne le tableau de variation et le tableau de signe de la fonction f.

x	-10		-6		-1		4
f	5	↘	-1	↗	3	↘	-5

x	-10		-7		-3		1		4
f		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	



Proposer une représentation graphique de cette fonction.

Compétence : Parité

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\ (x) = 2x^2 + 3$.

1. Démontrer que cette fonction est paire.

$\boldsymbol{f(-x) = 2 \times (-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = f(x)}$

2. Que pouvez-vous en déduire pour la représentation graphique de f ?

La représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

3. Calculer, sans calculatrice, les images de 0, 5 et 10.

$\boldsymbol{f(0) = 2 \times 0^2 + 3 = 3}$	$\boldsymbol{f(5) = 2 \times 5^2 + 3 = 2 \times 25 + 3 = 53}$	$\boldsymbol{f(10) = 2 \times 10^2 + 3 = 2 \times 100 + 3 = 203}$

4. Quelles autres images pouvez-vous donner, sans aucun calcul ?

$\boldsymbol{f(-5) = f(5) = 53}$	$\boldsymbol{f(-10) = f(10) = 203}$

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\ (x) = -x^3 + 2x$.

1. Démontrer que cette fonction est impaire.

$\boldsymbol{f(-x) = -(-x)^3 + 2 \times (-x) = x^3 - 2x = -\left(-x^3 + 2x\right) = -f(x)}$

2. Que pouvez-vous en déduire pour la représentation graphique de f ?

La représentation graphique de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. VRAI ou FAUX ? Justifier…
   a) Le point $A\ (\ 2\ ;\ -4)$ appartient à la courbe de f.

$\boldsymbol{f(2) = -2^3 + 2 \times 2 = -8 + 4 = -4.}$ **VRAI**

   b) Le point $B\ (-2\ ; -4)$ appartient à la courbe de f.

FAUX, la fonction est impaire donc $\boldsymbol{f(-2) = -f(2) = 4.}$

   c) Le point $C\ (\ -2\ ;\ 4)$ appartient à la courbe de f.

VRAI, voir au-dessus.

Exercice 10 : Ne pas confondre recette et bénéfice

Une entreprise fabrique et commercialise un produit. Chaque semaine, elle limite sa production à 21kg.

I) Etude de la recette

L'entreprise vend ce produit 84€/kg.

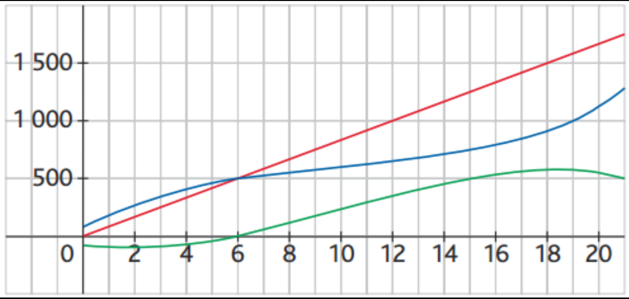
a. Quelle est sa recette si elle en vend 5kg ? 10kg ?

$\boldsymbol{R(5) = 84 \times 5 = 420€}$	$\boldsymbol{R(10) = 84 \times 10 = 840€}$

b. Pour x kg vendus, on note la recette $R(x)$. Déterminer l'expression de $R(x)$ en fonction de x.

Pour tout réel $x \in [0\,;21]$ on a $R(x) = 84x$.

c. Dans le repère ci-dessous, identifier la courbe représentative de la fonction R.



La fonction R est une fonction linéaire, ainsi elle est représentée par une droite passant par l'origine, c'est la courbe rouge.

II) Etude du coût de production

Pour x kg de produit fabriqué, le coût de fabrication en euros est donné par : $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 120x + 72$

a. Combien coûte la fabrication de 6kg de produit ? 10kg ?

$\boldsymbol{C(6) = \frac{1}{3} \times 6^3 - 10 \times 6^2 + 120 \times 6 + 72}$ $\boldsymbol{= 504\ €}$	$\boldsymbol{C(10) = \frac{1}{3} \times 10^3 - 10 \times 10^2 + 120 \times 10 + 72}$ $\boldsymbol{\approx 605€ \quad \left(\frac{1816}{3}\right)}$

b. Donner le tableau de valeurs de la fonction C sur $[0\,;21]$ avec un pas de 3.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**
$\boldsymbol{C(x)}$	**72**	**351**	**504**	**585**	**648**	**747**	**936**	**1269**

c. On admet que la fonction C est croissante sur $[0\,;21]$. Identifier la courbe représentative de la fonction C.

Comme C est croissante sur $[0\,;21]$, sa courbe représentative est la courbe bleue.

d. Résoudre graphiquement l'équation $R(x) = C(x)$

$\boldsymbol{S = \{6\}}$

Ainsi lorsque l'entreprise produit et vend 6kg de produit, la recette et le cout de production sont égaux (ainsi le bénéfice est nul).

e. Résoudre graphiquement l'inéquation $R(x) > C(x)$

$\boldsymbol{S =]6\,;21]}$

Ainsi lorsque l'entreprise produit et vend entre 6 et 21kg de produit, la recette est supérieur au cout de production (ainsi l'entreprise fait un bénéfice).

f. Interpréter ces deux derniers résultats.

III) Etude du bénéfice

Pour x kg de produit fabriqué et vendu, le bénéfice est donné par : $B(x) = R(x) - C(x)$

a. Montrez que le bénéfice est donné par : $B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 10x^2 - 36x - 72$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B(x)} &= \boldsymbol{R(x) - C(x)} \\
&= \boldsymbol{84x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 120x + 72\right)} \\
&= \boldsymbol{84x - \frac{1}{3}x^3 + 10x^2 - 120x - 72} \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{3}x^3 + 10x^2 - 36x - 72}
\end{aligned}$$

b. Donner le tableau de valeurs de la fonction B sur $[0\,;21]$ avec un pas de 3.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**
$\boldsymbol{B(x)}$	**−72**	**−99**	**0**	**171**	**360**	**513**	**576**	**495**

c. On admet que la fonction B est décroissante sur $[18\,;21]$. Identifier la courbe représentative de la fonction B.

Il s'agit de la courbe verte.

d. Résoudre graphiquement l'équation $B(x) = 0$. Est-ce cohérent avec votre réponse à la question II (d) ?

$\boldsymbol{S = \{6\}}$**. Cela est cohérent.**

e. Résoudre graphiquement l'équation $B(x) > 0$. Est-ce cohérent avec votre réponse à la question II (f) ?

$\boldsymbol{S =]6\,;21]}$**. Cela est cohérent.**

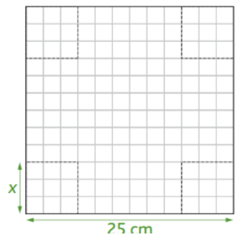
Déterminer graphiquement la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal.

Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ? Comment aurait été possible d'établir ce résultat grâce aux courbes représentatives des fonctions R et C ?

Le bénéfice est maximal pour 18kg de produits fabriqués et vendus. Ce bénéfice est alors de 576€.
Il suffisait de regardait pour quel quantité de produits l'écart entre la recette et le cout de production est le plus grand (lorsque la droite est au-dessus de $\boldsymbol{C_c}$**).**

<u>Exercice supplémentaire : Optimisation</u>

On dispose d'un carré de métal de 25 cm de côté. Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x et on relève les bords par pliage.



1. a. Calculer le volume V de la boîte si $x = 2$.

$V = L \times l \times h$ avec $L = 25 - 2 \times 2 = 21, l = 21$ et $h = 2$.
$V = 23 \times 23 \times 2 = 882 cm^3$

b. Exprimer en fonction de x le volume V. On note $V = f(x)$

$f(x) = x(25 - 2x)^2 = x\left(625 - 100x + 4x^2\right) = 4x^3 - 100x^2 + 625x.$

c. x peut-il prendre n'importe quelle valeur ? En déduire l'ensemble de définition de f.

$x \geq 0$ puisque une longueur est toujours positive et il faut que $2x \leq 25$ c'est-à-dire $x \leq 12,5$.
Ainsi $D_f = [0 ; 12,5]$.

d. À quelle condition (sur x) le volume est-il nul ?

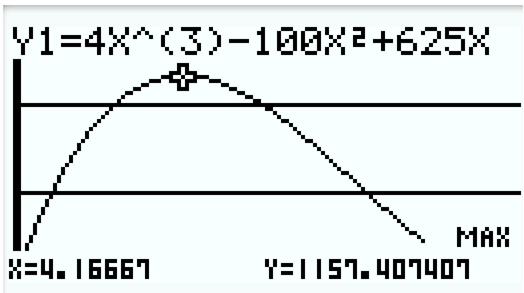
$f(x) = 0$
$x(25 - 2x)^2 = 0$
$x = 0$ ou $25 - 2x = 0$
$x = 0$ ou $x = 12,5$.
Le volume est nul pour $x = 0$ cm et $x = 12,5$ cm

2. On vient de définir une fonction qui, à tout nombre de l'intervalle [0 ; 12,5], associe le volume de la boîte $V = f(x)$.

a. À l'aide de la calculatrice, donner le tableau de valeurs de la fonction f sur [0 ; 12,5] avec un pas de 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12,5
$f(x)$	**0**	**529**	**882**	**1083**	**1156**	**1125**	**1014**	**847**	**648**	**441**	**250**	**99**	**12**	**0**

b. Tracer la courbe représentative de f.



c. Résoudre graphiquement les équations :

$$f(x) = 500 \text{ et } f(x) = 1000.$$

$S \approx \{0,93 ; 8,71\}$ pour $f(x) = 500$	**$S \approx \{2,5 ; 6,1\}$ pur $f(x) = 1000$**

3. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	0		4,17		12,5
$f(x)$			1157,41		
	800	$\nearrow$		$\searrow$	850

b. Quel le volume maximal ? En quelle valeur est-il atteint ?

Le volume maximal est d'environ $1157,41 cm^3$ pour environ $x = 4,17$ cm