Chapitre: Arithmétique et valeur absolue (correction)

Compétence : Multiples et diviseurs

Exercice 1:

1. Justifier que 98 est un multiple de 14.

$98 = 14 \times 7$ donc 98 est un multiple de 14.

2. Traduire cette propriété avec chacune des expressions : « est diviseur de » / « a pour diviseur »/ « est divisible par » / « a pour multiple ».

14 est diviseur de 98.

98 a pour diviseur 14.

98 est divisible par 14.

14 a pour multiple 98.

Exercice 2 : Compléter les phrases suivantes par « diviseur » ou « multiple » :

- 1. 350 est un **multiple** de 50.
- 2. 13 est un **diviseur** de 260.
- 3. 0 est un multiple de 89.
- 4. 1 est un diviseur de 16.

Exercice 3:

1. Donner cinq multiples de 11.

11; 22; 33; 44; 55.

2. Donner cinq diviseurs de 24.

 ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ± 6 (aussi ± 8 ; ± 12 et ± 24).

3. Donner tous les diviseurs positifs de 21.

1;3;7;21.

4. Déterminer tous les multiples de 9 inférieurs à 50.

9;18;27;36;45

5. Déterminer tous les multiples de 7 compris entre 100 et 150.

105;112;119;126;133;140;147

6. Combien y-a-t-il de multiples de 17 entre 1 et 100 ?

Il y a 5 multiples de 17 entre 1 et 100 :

17;34;51;68;85

Exercice 6 : Soit a un entier multiple de 6 et b un entier multiple de 15.

1. Montrer que a + b est un multiple de 3.

Soit a un entier multiple de 6: il existe un entier k tel que a=6k et b un entier multiple de 15: il existe un entier h tel que b=15h.

Ainsi a + b = 6k + 15h puis en factorisant par 3, on a : a + b = 3(2k + 5h).

Notons $q = 2k + 5h \in \mathbb{Z}$ donc a + b = 3q.

Ainsi a + b est un multiple de 3.

2. Montrer que $a \times b$ est un multiple de 90.

 $a \times b = 6k \times 15h$

 $a \times b = 90kh$

Notons $q = kh \in \mathbb{Z}$ donc $a \times b = 90q$

Ainsi $a \times b$ est un multiple de 90.

- 5. 42 est un diviseur/ multiple de 42.
- 6. 21 est un **diviseur** de -2100.
- 7. 2019 est un **diviseur** de 0.
- 8. 16 est un multiple de 4.

Exercice 4 : On donne a = 10k et b = 6k avec k entier.

1. Montrer que a est un multiple de 2.

 $a=10k=2\times 5k.$

Notons $q=5k\in\mathbb{Z}$ ainsi a=2q.

Ainsi a est un multiple de 2.

2. Montrer que *b* est un multiple de 3.

 $b=6k=3\times 2k.$

Notons $q=2k\in\mathbb{Z}$ ainsi b=3q.

Ainsi *b* est un multiple de 3.

3. Est-ce que 8 est un diviseur de a + b?

 $a + b = 10k + 6k = 16k = 8 \times 2k$

Notons $q=2k\in\mathbb{Z}$ ainsi a+b=8q

Ainsi 8 est un diviseur de a + b

Exercice 5: Montrer que si a et b sont des multiples de 11 alors a+b est un multiple de 11.

Soit deux multiples a et b de 11 : il existe deux entiers k et h tels que a = 11k et b = 11h.

Ainsi a + b = 11k + 11h puis en factorisant par 11, on a : a + b = 11(k + h).

Notons $q = k + h \in \mathbb{Z}$ donc a + b = 11q.

Ainsi a + b est un multiple de 11.

Exercice 7 : Soit a et b deux entiers.

1. Montrer que si a est un diviseur de a+b alors a est un diviseur de b.

a est un diviseur de a+b alors il existe un entier k tel que a+b=ak

b = ak - a

b = a(k-1)

Notons $q = k - 1 \in \mathbb{Z}$. Donc b = aq.

Ainsi a est un diviseur de b.

2. Montrer que si a est un diviseur de b alors a^2 est un diviseur de b^2 .

a est un diviseur de b alors il existe un entier k tel que b=ak

 $\boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{k}^2$

Notons $q = k^2 \in \mathbb{Z}$. Donc $b^2 = a^2q$.

Ainsi a^2 est un diviseur de b^2 .

Exercice 8 : Soit n un entier naturel. On pose a = 2n - 7 et b = n + 1.

1. Calculer a - 2b.

$$a-2b = 2n-7-2(n+1)$$

= $2n-7-2n-2$
= -9

2. Soit d un diviseur de a et b. Montrer que d est un diviseur de a-2b.

d un diviseur de a et b ainsi il existe deux entiers k et h tels que a = dk et b = dh.

$$a-2b=dk-2dh$$
$$=d(k-2h)$$

Notons $q = k - 2h \in \mathbb{Z}$. Donc a - 2b = dq ainsi d est un diviseur de a - 2b.

3. Soit d un entier diviseur de a et b. Quelles sont les valeurs possibles de d?

D'après la question 2 : d est un diviseur de a - 2b.

Et d'après la question 1 : d peut prendre les valeurs : -1 ; 9 ; 1 ; -9 ; 3 ; -3.

Exercice 9 : Les âges de quatre cousins Emma, Baptiste, Lily et Nathan sont 3, 8, 12 et 14 ans. La somme des âges de Lily et Emma est divisible par 5, celle des âges de Nathan et Lily est aussi divisible par 5.

Quel est l'âge de Baptiste?

	12 + 14 = 26
Divisible par 5 Divisible par 5	

Baptiste ne peut avoir que 14 ans. (Lily aura 12 ans et Emma et Nathan auront soit 3, soit 8 ans).

Exercice 10 : On cherche un nombre compris entre 15 000 et 16 000, dont tous les chiffres sont différents et tel que :

- son chiffre des centaines est un multiple de 3;
- son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 ;
- son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines.

Quel peut être ce nombre ? Donner toutes les possibilités.

15cdu avec:

- son chiffre des centaines est un multiple de 3 donc c = 0 ou 3 ou 6 (ou 9 mais sans successeur)
- son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines donc d = 1 ou 4 ou 7 (ordre important).
- son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 donc u=6~ou~8

Ainsi on a $\frac{15016}{15018}$; $\frac{15346}{15348}$; $\frac{15676}{15678}$; $\frac{15678}{15678}$ mais tous les chiffres doivent être différents donc on a seulement $\frac{15346}{15348}$ et $\frac{15678}{15678}$.

Exercice 11: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La somme de guatre entiers consécutifs est un multiple de 4.

Soit *n* un entier.

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$$

Cela ne semble par être un multiple de 4.

Cherchons un contre-exemple : 1 + 2 + 3 + 4 = 10 n'est pas un multiple de 4. FAUX.

2. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

Soit n un entier.

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$$

Notons $k = n + 2 \in \mathbb{Z}$ alors n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5k.

Ainsi la somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5. VRAI.

3. Le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9.

Soit a un multiple de 3 ainsi il existe un entier k tel que a = 3k.

Soit b un multiple de 3 ainsi il existe un entier b tel que b = 3b.

$$a \times b = 3k \times 3h = 9kh.$$

Notons $q = kh \in \mathbb{Z}$ alors ab = 9q. Ainsi le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9. VRAI.

4. Le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

Soit a un multiple de 4 ainsi il existe un entier k tel que a = 4k.

Soit b un multiple de 6 ainsi il existe un entier h tel que b = 6h.

$$a \times b = 4k \times 6h = 24kh$$
.

Notons $q=kh\in\mathbb{Z}$ alors ab=24q. Ainsi le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24. VRAI.

Compétence : Pair et impair

Exercice 13: Si n est un entier positif, quels nombres sont toujours des nombres pairs :

a)
$$2n + 3$$

 $2 \times 0 + 3 = 3$
Impair.

b)
$$4n = 2 \times 2n$$

Notons $k = 2n$
 $4n = 2k$ Pair.

c)
$$n + 1$$

 $0 + 1 = 1$
Impair.

d)
$$2n-5$$

 $2 \times 0 - 5 = -5$
 Impair.

e)
$$2n + 2 = 2(n + 1)$$

Notons $k = n + 1$
 $2n + 2 = 2k$ Pair.

Exercice 13:

1. Montrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.

```
Soit a un nombre impair ainsi il existe un entier k tel que a=2k+1
Soit b un nombre impair ainsi il existe un entier h tel que b=2h+1
ab=(2k+1)(2h+1)
=4kh+2k+2h+1
=2(2kh+k+h)+1
Notons q=2kh+k+h\in\mathbb{Z}. Ainsi ab=2q+1, ce qui est un nombre impair.
```

2. Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

```
Soit a un nombre pair ainsi il existe un entier k tel que a=2k

Soit b un nombre impair ainsi il existe un entier b tel que b=2h+1

a+b=2k+(2h+1)

=2k+2h+1

=2(k+h)+1

Notons q=k+h\in\mathbb{Z}. Ainsi a+b=2q+1, ce qui est un nombre impair.
```

3. Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

```
Soit a un nombre pair ainsi il existe un entier k tel que a=2k
Soit b un nombre pair ainsi il existe un entier h tel que b=2h
a+b=2k+2h
=2(k+h)
Notons q=k+h\in\mathbb{Z}. Ainsi a+b=2q, ce qui est un nombre pair.
```

4. Montrer que le produit de deux nombres pairs est un multiple de 4.

```
Soit a un nombre pair ainsi il existe un entier k tel que a=2k
Soit b un nombre pair ainsi il existe un entier h tel que b=2h
ab=2k\times 2h
=4kh
Notons q=kh\in\mathbb{Z}. Ainsi ab=4q, ce qui est un multiple de 4.
```

5. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

```
Soit a un nombre impair ainsi il existe un entier k tel que a=2k+1 b=a+2=2k+3 est le nombre impair suivant. a+b=2k+1+2k+3 =4k+4 =4(k+1) Notons q=k+1\in\mathbb{Z}. Ainsi a+b=4q, ce qui est un multiple de 4.
```

6. Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

```
Soit n un nombre impair ainsi il existe un entier k tel que a=2k+1 n^2-1=(2k+1)^2-1\\ =4k^2+4k+1-1\\ =4k^2+4k\\ =4(k^2+k) Notons q=k^2+k\in\mathbb{Z}. Ainsi n^2-1=4q, ce qui est un multiple de 4.
```

7. Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.

```
Soit a un nombre pair ainsi il existe un entier k tel que a=2k a^3=(2k)^3=8k^3 Notons q=k^3\in\mathbb{Z}. Ainsi a^3=8q, ce qui est un multiple de 8.
```

Exercice 14: Soit les nombres a = 4p et b = 5q, avec p et q entiers.

1. Justifier que *a* est pair.

```
a = 4p = 2 \times 2p
```

Notons $k=2p\in\mathbb{Z}$. Ainsi a=2k, ce qui est un nombre pair.

2. *b* peut-il être pair ?

b peut être pair, en effet si q=2, on a : $b=5\times 2=10$ qui est nombre pair.

Mais b n'est pas toujours pair, en effet si q=3, on a : $b=5\times 3=15$ qui est nombre impair.

3. Soit c = ab. Montrer que c est un multiple de 10.

```
c = ab
= 4p \times 5q
= 20pq
= 10 \times 2pq
```

Notons $k=2pq\in\mathbb{Z}.$ Ainsi c=10k, ce qui est un multiple de 10.

Compétence: Nombre premiers

Exercice 15: Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers: 32, 42, 50, 99, 100, 112 et 1 140.

```
32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{5}
42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7
50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^{2}
99 = 9 \times 11 = 3 \times 3 \times 11 = 3^{2} \times 11
100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^{2} \times 5^{2}
112 = 2 \times 56 = 2 \times 2 \times 28 = 2 \times 2 \times 2 \times 14 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^{4} \times 7
1140 = 2 \times 570 = 2 \times 2 \times 285 = 2 \times 2 \times 5 \times 57 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 19 = 2^{2} \times 3 \times 5 \times 19
```

Exercice 16: Déterminer si les nombres suivants sont des nombres premiers: 18, 37, 41, 57, 89, 101, 383 et 643.

```
18 = 2 \times 9 ainsi 18 n'est pas premier.
```

 $\sqrt{37} \approx 6$, or 37 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. Ainsi 37 est premier.

 $\sqrt{41} \approx 6$, or 41 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. Ainsi 41 est premier.

 $57 = 3 \times 19$ ainsi 57 n'est pas premier.

 $\sqrt{89} \approx 9$, or 89 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7. Ainsi 89 est premier.

 $\sqrt{101} \approx 10$, or 101 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7. Ainsi 101 est premier.

 $\sqrt{383} \approx 19$, or 383 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ou 19. Ainsi 383 est premier.

 $\sqrt{643} \approx 25$, or 643 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ou 23. Ainsi 643 est premier.

Exercice 17 : Soit p un nombre premier. Le nombre p^2 est-il premier ?

```
2 est premier et 2^2 = 4 n'est pas premier. Donc p^2 n'est pas toujours premier.
```

Exercice 18: Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36, 49 et 63.

```
36 a pour diviseurs positifs : 1 ; 36 ; 2 ; 18 ; 3 ; 12 ; 6
49 a pour diviseurs positifs : 1 ; 49 ; 7
63 a pour diviseurs positifs : 1 ; 63 ; 3 ; 21 ; 7 ; 9
```

Exercice 19: Soit n un entier naturel non nul, et l'entier a défini par a = (n + 4)(n + 2).

Montrer que a n'est pas premier.

Si n=1 on a : $a=5\times 3=15$ qui n'est pas premier. Ce qui contredit le fait que a soit toujours premier.

Exercice 20:

1. a) Calculer $a^2 - b^2$ pour les valeurs suivantes de a et de b:

$$(a;b) = (2;3) a^2 - b^2 = 4 - 9 = -5 (a;b) = (3;1) a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 (a;b) = (3;2) a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 (a;b) = (4;2) a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 (a;b) = (5;2) a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 (a;b) = (5;3) a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

- b) Parmi les résultats obtenus, quels sont ceux qui sont premiers?
- 2. Soient a et b des entiers naturels non nuls avec $a \ge b$.

Montrer que si a et b ne sont pas deux entiers consécutifs, $a^2 - b^2$ ne peut pas être premier.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Si $a^2 - b^2$ est premier alors l'un des deux facteurs est égal à 1. C'est forcément a - b (le plus petit des deux). Ainsi a - b = 1 donc a = b + 1, c'est à dire que a et b doivent être consécutifs.

Cela montre que si a et b ne sont pas deux entiers consécutifs, $a^2 - b^2$ ne peut pas être premier.

Remarque:
$$(a; b) = (4; 2)$$
 $a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$ l'illustre bien.

Exercice 21 : A la manière de Fermat

On souhaite décomposer en facteurs premiers le nombre 667.

1. Ce nombre est-il divisible par l'un des nombres premiers inférieurs à 20 ?

Pour le décomposer, nous allons, à la manière de Fermat, transformer son écriture.

2. Vérifier que $667 = 26^2 - 9$ et en déduire la décomposition en facteurs premiers de 667.

$$26^{2} - 9 = 676 - 9$$

= 667
 $667 = 26^{2} - 9$
= $(26 - 3)(26 + 3)$
= 23×29 avec 23 et 29 premiers.

3. A l'aide de votre calculatrice, transformer de même l'écriture du nombre 437 pour trouver sa décomposition en produit de facteurs premiers.

$$437 = 441 - 4$$

$$= 21^{2} - 2^{2}$$

$$= (21 - 2)(21 + 2)$$

$$= 19 \times 23 \text{ avec 19 et 23 premiers.}$$

Exercice 22 : Décomposition et carrés parfaits

1. a) Décomposer en produit de facteurs premiers : 8, 2 400 et 11 400.

$$8 = 2^{3}$$

$$2400 = 24 \times 100 = 8 \times 3 \times 4 \times 25 = 2^{5} \times 3 \times 5^{2}$$

$$11400 = 1140 \times 10$$

$$= 2^{2} \times 3 \times 5 \times 19 \times 2 \times 5$$

$$= 2^{3} \times 3 \times 5^{2} \times 19$$

b) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de 8^2 , $2\,400^2$ et $11\,400^2$.

Quel point commun ont tous les exposants dans cette décomposition ?

$$8^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^6$$

$$2400^2 = \left(2^5 \times 3 \times 5^2\right)^2 = 2^{10} \times 3^2 \times 5^4$$

$$11400^2 = \left(2^3 \times 3 \times 5^2 \times 19\right)^2 = 2^6 \times 3^2 \times 5^4 \times 19^2$$
 Tous les exposants sont pairs.

2. Les nombres suivants sont-ils des carrés d'entiers :

a)
$$2^{24} \times 5^6 \times 7^2$$
 b) $2^3 \times 5^2$ NON

3. Comment reconnaître sur sa décomposition en produit de facteurs premiers qu'un entier $n \ge 2$ est le carré d'un entier ?

Il suffit que l'exposant de chaque facteur premier soit pair.

Compétence : Distance et valeur absolue

Exercice 23 : Dans chaque cas, calculer la distance exacte entre les deux nombres.

a) -4 et 7	b) 1,3 et 2,7	c) 7,4 et 3,6	d) $7.4 \text{ et } -3.6$
7 - (-4) = 11	2,7-1,3=1,4	7,4-3,6=3,8	7,4-(-3,6)=11

Exercice 24: Dans chaque cas, calculer la distance exacte entre les deux nombres, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

a) π et 5	b) $\sqrt{2}$ et 1	c) -1 et $\sqrt{3}$
$5-\pi \approx 1.86$	$\sqrt{2}-1\approx 0,41$	$\sqrt{3} - (-1) = \sqrt{3} + 1 \approx 2,73$

Exercice 25 : Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient x et écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles.

a) $ x - 3 = 5$	b) $ x + 7 = 2$	c) $ x-1 > 5$	$d) x - 7 \le 4$
$S = \{-2; 8\}$	$S = \{-9; -5\}$	$S =]-\infty; -4[\cup]6; +\infty[$	S = [3; 11]
e) $ x - 2 < 6$	$f) x + 5 \ge 3$	g) $ x + 1 \le 7$	h) $ 6 - x = 1$
S =] - 4;8[$S =]-\infty; -8[\cup]-2; +\infty[$	S = [-8; 6]	$S = \{5; 7\}$

Exercice 26:

Dans chaque cas, traduire l'inégalité par une écriture de la forme |x-a| < r ou $|x-a| \le r$.

a) $x \in [3; 7]$	b) $x \in]-9;-1[$	c) $x \in [-3; 5]$	d) $x \in]-12;35[$
$r = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$r = \frac{-1 - (-9)}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$r = \frac{5 - (-3)}{2} = \frac{8}{2} = 4$	$r = \frac{35 - (-12)}{3} = \frac{47}{3} = 23,5$
		2 1 2	a = -12 + 35 = 23 = 11 = 5
$a = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$	$a = \frac{-9 + (-1)}{2} = -5$	$a = \frac{-3+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$	$a = \frac{-12+35}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$
$ x-5 \leq 2$	x + 5 < 4	$ x-1 \leq 4$	x-11,5 <23,5

Exercice 27 : Dans chaque cas, déterminer tous les nombres x vérifiant l'égalité, en vous aidant éventuellement d'une droite graduée.

a) $ x-2 =1$	b) $ x+4 =5$	c) $ x+2 =0$
$S = \{1; 3\}$	$S = \{-9; 1\}$	$S = \{-2\}$
d) $ x-5 =2$	e) $ x = 2$	f) $ x-3 =3$
$S = \{3;7\}$	$S = \{-2; 2\}$	$S = \{0; 6\}$

Exercice 28:

Soient A et B les points d'abscisses 3 et 9 sur une droite graduée, et M un point de cette droite d'abscisse x vérifiant |x-3|=|x-9|.

a) Interpréter cette égalité en termes de distances.

AM = BM

b) En déduire la valeur de x.

M est le milieu de [AB] ainsi $x = \frac{3+9}{2} = 6$.

Exercice 29: QCM: Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Soient les points O; A; B; C et D de la droite numérique d'abscisses respectives 0; a; b; -a et -b où a et b sont des réels donnés.

- 1) La distance de AB est égale à :
- a) |a-b|
- b) a b
- c) |b-a|
- d) b a

- 2) La distance de AC est égale à :
- a) |2a|
- b) 0
- c) |-2*a*|
- d) 2a

- 3) |a + b| est égale à la distance :
- a) *AB*
- b) *BC*
- c) CD
- d) *AD*

- 4) |-b| est égale à la distance :
- a) *OA*
- b) *BD*
- c) AC
- d) *OD*