Chapitre : Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

1) Définition et propriétés

Activité 1 : Abonnement à un club de sport

Un club de sport propose le tarif suivant : un droit d'entrée annuel de 100€ est fixé et on paye 20€ par séance.

On pose $p_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note p_n le prix total payé par une personne ayant participé à n séances durant l'année.

1. Donner les valeurs de p_1, p_2 et p_3 .
2. Si une personne participe à 17 séances, elle paiera la somme de 440 euros, soit $p_{17} = 440$. Déterminer p_{18} et p_{19} .
3. Quelle relation y a-t-il entre p_{n+1}et p_n ?
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer p_{35}, c'est-à-dire le prix payé pour 35 séances.
5. Conjecturer une formule donnant p_n en fonction de n.

Définition 1 : Soit $r \in \mathbb{R}$.
Une suite est dite ______________________________ lorsque chaque terme se déduit du précédent en ______________________ une constante r, appelée la ______________________.
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} =$

Application 1 : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $= 3$.
Donner les 5 premiers termes de la suite.

Exercice 1 : Suites arithmétiques
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2.
Déterminer le deuxième terme de la suite (u_n).

Propriété 1 : Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n =$
De manière plus général, si $p < n, u_n =$

Preuve : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
…
$u_{n-1} = u_{n-2} + r$
$u_n = u_{n-1} + r$

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + \cdots + u_{n-2} + r + u_{n-1} + r$

Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient. Il ne reste dans le membre de gauche que u_n. Dans le membre de droite, il ne reste que u_0 et n termes tous égaux à r.

On obtient donc : $u_n = u_0 + nr$ c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$

Application 2 :

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$. Donner u_{28}.

Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_5 = -1$. Donner v_{28}.

Exercice 2 : Suites arithmétiques

Indiquer la bonne réponse.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. Pour tout entier naturel n :

a. $u_n = 5 + 2n$ b. $u_n = 2 + 5n$ c. $u_n = u_0 + 2$

Exercice 3 : Suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 7.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer u_{17}.

Exercice 4 : Suites arithmétiques

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -5$ et la relation $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel n.

1. Justifier que (v_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer v_6.

Exercice 5 : Suites arithmétiques

Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme u_0 et la raison r d'une suite arithmétique.

1. $u_0 = 1$ et $r = 4$ 2. $u_0 = 2$ et $r = 9$ 3. $u_0 = 5$ et $r = \frac{1}{2}$ 4. $u_0 = 12$ et $r = -3$

a) Déterminer u_1 et u_2.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer u_{25}.
d) Déterminer le sens de variation de la suite.

Application 3 :

Soit (u_n) une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$. Calculer r et u_0 et u_1.

Exercice 6 : Suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$. Calculer r et u_2 et u_5.
2. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = 10$. Calculer r et u_1 et u_5.
3. On sait que $u_1 = 10$ et $u_{10} = 28$. Calculer r et u_0 et u_5.
4. On sait que $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$. Donner u_n en fonction de n.
5. On sait que $u_{22} = 15$ et $r = \frac{3}{4}$. Donner u_n en fonction de n.
6. On sait que $u_0 = 3$ et $u_{20} = u_{10} + 25$. Donner u_n en fonction de n.

Propriété 2 :

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de l'entier n.

On dit alors que l'évolution est __________________________.

Application 4 : Reconnaitre une suite arithmétique :

1. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 5n^3 + 6n + 1$
   Cette suite est-elle arithmétique ?

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = -3n + 5$
   Cette suite est-elle arithmétique ?

Remarque : Parfois on pense que la suite (u_n) peut être arithmétique à l'aide d'exemple et prouver qu'elle ne l'est pas en calculant pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 7 : Reconnaitre une suite arithmétique

Parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont arithmétiques et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

a. $u_n = 2n^2 - n + 1$ b. $v_n = 5n - 2$ c. $w_n = \frac{n}{3} + 2$ d. $x_n = 3^n + 1$

Exercice 8 : Reconnaitre une suite arithmétique

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + n \end{cases}$

2) Variations d'une suite arithmétique

Propriétés 3 : Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
• Si $r > 0$, la suite (u_n) est ___________________________________
• Si $r = 0$, la suite (u_n) est ___________________________________
• Si $r < 0$, la suite (u_n) est ___________________________________

Preuve :
La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r, donc pour tout$n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$.
On raisonne ensuite par disjonction des cas :

- 1er cas : si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est ___________________
- 2e cas : si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est ___________________
- 3e cas : si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est ___________________

Exemples :
- La suite arithmétique de premier terme -5 et de raison 3 est ___________________
- La suite arithmétique de premier terme 10 et de raison -6 est ___________________

3) Modèle discret de croissance linéaire

Propriété 4 : Lorsque la suite (u_n) est arithmétique les points $A_n(n\,;u_n)$ sont ________________________.

Preuve : Comme pour tout entier n, $u_n = u_0 + rn$, le point $A_n(n\,;u_n)$ appartient à la droite d'équation $y = u_0 + rx$.

Remarque : Pour une suite arithmétique on parle de croissance linéaire ou décroissance linéaire.

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2, alors pour tout entier naturel n, $u_n = -3 + 2n = 2n - 3$. Les points $A(n\,;u_n)$ sont situés sur la droite d'équation $y = 2x - 3$.

4) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Propriété 5 : Soit n un entier naturel non nul. Alors :
$s_n =$

Application 5 :
Si on veut additionner les 100 premiers entiers naturels on fait :

Notation : La somme $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ peut aussi s'écrire :

Cette notation se lit somme pour i allant de 0 à n de i.

Preuve : Soit $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Il y a n termes dans cette somme.

$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + +(n-2) + (n-1) + n$
$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$

En additionnant les deux lignes, on obtient :

$2s_n = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)$
$2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$

Comme il y a n terme dans cette somme, on a donc :

$2s_n = n(n+1)$. On retrouve bien : $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété 6 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, alors la somme des premiers termes vaut :

Preuve : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 donc $u_n = u_0 + nr$ et il y a $n+1$ terme dans la suite S_n.

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
$S_n = u_0 + (u_0 + r) + \cdots + (u_0 + nr)$
$S_n = (u_0 + u_0 + \cdots u_0) + r + 2r + \cdots + nr$

Or comme il y a $n+1$ terme dans cette suite. Ainsi il y a $n+1$ u_0.
$s_n = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \cdots + n)$

Or $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ainsi :
$S_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$
$S_n = (n+1)\left(u_0 + r\frac{n}{2}\right)$
$S_n = (n+1)\frac{2u_0 + rn}{2}$
$S_n = (n+1)\frac{u_0 + (u_0 + rn)}{2}$
$S_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$

Propriété 7 : Le nombre de terme d'une suite se calcule de la manière suivante :

nombre de terme = rang du dernier terme − rang du 1er terme + 1

Application 6 : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ et $u_4 = 2$
Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$

Exercice 9 : Somme et Suites arithmétiques

1. a. Déterminer la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 10$.
   b. Application : Combien y aurait-il de boules de billard si la figure comportait 10 rangées ?

2. Déterminer la somme $S = \sum_{k=1}^{100} k$.

Exercice 10 : Tableur

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 25$ et de raison 9.
On a créé une feuille de calcul ci-contre.
La valeur de u_0 est entrée dans la cellule $B2$.

	A	B	C
1	n	u_n	
2	0	25	25
3	1	34	
4	2	43	
5	3	52	
6	4	61	

1. Quelle formule, si on la recopie vers le bas, peut-on saisir dans la cellule $B3$ afin d'obtenir les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?
2. La valeur de u_0 est entrée dans la cellule $C2$. Quelle formule, si on la recopie vers le bas, peut-on saisir dans la cellule $C3$ pour obtenir la somme $u_0 + \cdots + u_n$ pour chaque valeur de n ?

5) Limite d'une suite arithmétique (hors programme 1ère)

Propriété 8 : Soit $r \in \mathbb{R}$.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est ______________________________ et
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est ______________________________ et
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est ______________________________ et

Application 7 : Modéliser une situation à l'aide d'une suite arithmétique.

En 2015, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celle-ci augmentent de 6€.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant des étrennes l'année $2015 + n$.

1. Donner les valeurs a_1 et a_2. A quelle année correspondent-elles ?
2. a. Donner la nature de la suite (a_n)
   b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n
   c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. Donner le sens de variation de la suite (a_n)
4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2030 ?
5. a. Déterminer la limite de la suite (a_n) en $+\infty$.
   b. Déterminer le seuil n_p à partir duquel Anne aura reçu un montant supérieur ou égal à 300€

Exercice 11 : Modélisation arithmétique

Dans une pisciculture, un pêcheur met 50 truites dans un étang vide. Il y a 100 naissances par an. On veut modéliser la situation par une suite (u_n) qui représente le nombre de truites chaque année.

a) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

Exercice 12 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Le nombre de fans sur la page facebook d'un certain artiste peut être modélisé par la suite (u_n) de raison 900 telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre de fans l'année $2015 + n$. En 2015, le nombre de fans est 7500 : on a donc $u_0 = 7500$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années le nombre de fans aura dépassé le triple de celui de l'année 2015 ?

Exercice 13 : Suites arithmétiques (Modéliser)

En 2014, la population d'un village est de 1500 habitants. On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 100 habitants par an.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants pour l'année $2014 + n$.

1. Donner u_0.
2. Calculer les valeurs u_1 et u_2 du nombre d'habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
4. Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?
5. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 3000 habitants ?

Exercice 14 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Albert place un capital initial $C_0 = 3000€$ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant <u>simples</u>, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).

On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1. Montrer que, pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on?
2. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3. De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans?
4. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé?
5. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10000 € ?

Exercice 15 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Au premier janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1500€.

Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7€ à partir du deuxième mois.

On note $a_0 = 1500$ son salaire d'embauche puis pour $n \geq 1$, a_n son salaire à la fin du $(n+1)$ème mois.

1. Déterminer le salaire du deuxième mois.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire la nature de la suite (a_n).
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Déterminer le salaire du 7ème mois.
5. Déterminer le rang du premier mois pour lequel son salaire dépassera 2000€.

Exercice 16 : Modélisation arithmétique

Alice a acheté une télévision au prix de 750 €. Son assureur lui annonce que le prix de sa télé perd 40 € de sa valeur tous les ans.

On veut modéliser la valeur de la télé chaque année par une suite (u_n).

a) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

Exercice 17 : Modélisation arithmétique

On place à la banque un capital de 300 €. Chaque année, ce capital augmentera avec un taux d'intérêt à taux fixe. Ce taux est égal à 5% de la somme placée au départ.

a) Calculer le montant des intérêts annuels fixes.

b) On note (C_n) le capital au bout de n années. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer C_n en fonction de n.

d) Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Exercice 18 : Modélisation arithmétique

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.

On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.

On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020et 2021.
2. Exprimer u_{n+1}en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 19 : Modélisation arithmétique

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de 30 jours de faire chaque jour 5 minutes de sport de plus que le jour précédent. On modélise cette situation par une suite (t_n) telle que $t_0 = 0$ et où t_n est le temps passé par cette personne à faire du sport le nième jour.

a) Déterminer $t_1$et t_2.

b) Déterminer la nature de la suite (t_n).

c) Exprimer $t_n$en fonction de n.

d) Déterminer le temps passé à faire du sport le trentième jour.

e) Calculer le temps passé à faire du sport au cours de ce mois.

Exercice 20 : Modélisation arithmétique

Un nouveau parking souterrain vient d'ouvrir en centre-ville. Le premier jour de son exploitation, on constate une fréquentation de 350 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans ce parking de 10 voitures supplémentaires chaque jour.

a) Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

b) Le parking peut accueillir un total de 1500 voitures. Au bout de combien de jours sera-t-il saturé ?

c) Le coût de stationnement d'une voiture est en moyenne de 8 € par jour. Combien la société exploitant ce parking aura-t-elle gagné entre l'ouverture et le jour où le parking sera à saturation ?

Exercice 21 : Modélisation arithmétique

Une entreprise spécialisée dans la confection de chaises doit fabriquer pour un de des clients, qui dirige une chaine d'hôtels, 12 000 chaises. Elle commence à expédier, au mois de janvier 2020, 600 chaises. Pour répondre à la demande de son client plus rapidement, cette entreprise décide de produire 50 chaises de plus par mois.

On note p_n la quantité de chaises produite le nième mois. Ainsi $p_1 = 600$.

a) Calculer $p_2$et p_3.

b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Préciser le premier terme et la raison.

c) Exprimer le nombre de chaises produites le nième mois en fonction de n.

d) En déduire le nombre de chaises produites entre le mois de janvier 2020 et le nième mois.

e) En déduire au bout de combien de temps l'entreprise aura terminé la commande de son client.

Exercice 22 : Modélisation arithmétique

Le loyer annuel d'un appartement est de 6500 € à l'entrée dans les lieux en 2018. Chaque année, le loyer annuel augmente de 150 €. On modélise le prix des loyers annuels par une suite arithmétique (u_n).

On note u_0 le loyer annuel (en euros) payé en 2018 et u_n le prix du loyer annuel (en euros) pour l'année $(2018 + n)$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) en déduire la valeur du loyer en 2025.

c) Calculer le montant total des loyers pour les 11 premières années.

d) Les locataires avait envisagé d'acheter une maison pour un budget de 200 000 € avant de se décider à louer cet appartement. En quelle année la somme des loyers dépassera-t-elle les 200 000 € ?

Exercice 23 (MATHG-37231-1002)

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).

La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.

Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de 0,1 m.

Pour n entier naturel **non nul**, on note s_n la longueur, en mètres, de son saut la n-ième semaine d'entraînement.

Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_1 = 8$.

1. Pour $n \geq 2$, on considère la fonction Python suivante.

```
defsaut(n)
     s=8
     for k in range(2,n+1):
          s=s+0.1
     return s
```

   a. Quelle valeur s est-elle renvoyée par la commande saut(4) ?
   b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
2. Exprimer avec justification s_n en fonction de n pour n entier naturel **non nul**.
3. Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres.
   a. À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ?
   b. Justifier votre réponse.

II. Suites géométriques

Activité 2 : Intérêts composés

Le 1er janvier 2019 vous avez reçu 1000€, votre capital, noté C_0, est alors placé à 3% avec intérêts composés pendant plusieurs années (les intérêts d'une année deviennent du capital pour les années suivantes et rapportent eux aussi des intérêts).

Notons pour tout entier naturel n non nul, C_n le capital obtenu l'année $2019 + n$.

1. a) Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3% ?

   b) En déduire le montant des intérêts obtenus pour ce capital le 1er janvier 2020 . On le note C_1.

2. Faire de même pour le capital C_2 et C_3.

3. (a) Les augmentations successives de capital $C_1 - C_0$, $C_2 - C_1$, …, sont-elles constantes ?

   (b) Calculer $\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_1}$, …, que constatez-vous?

   (c) Ecrire sans justification une relation générale permettant de passer du capital C_n obtenus la n-ième année à C_{n+1}.

   (d) Peut-on calculer C_n en fonction de C_0 et de n, sans passer par les intermédiaires $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$?

4. Déterminer, à la calculatrice, à partir de quelle année votre capital initial C_0 a augmenté de plus de la moitié de sa valeur.

1) Définition et propriétés

Propriété 9 :

- **Augmenter** une grandeur de $p\%$ revient à *multiplier* sa valeur initiale par le coefficient multiplicateur :

- **Diminuer** une grandeur de $p\%$ revient à *multiplier* sa valeur initiale par le coefficient multiplicateur :

Définition 2 : Soit $q \in \mathbb{R}$.
Une suite est dite __________________________________lorsque chaque terme se déduit du précédent en _________________________ par une même constante réelle q, appelée _______________________.
Autrement dit, on obtient la suite définie par une relation de récurrence suivante :
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} =$

Application 8 : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.
Donner les 5 premiers termes.

Exercice 24 : Suites géométriques
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme 10 et de raison 0,5.
Déterminer le deuxième terme de la suite (u_n).

Propriété 10 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n =$
De manière plus général, si $p < n, u_n =$

Application 9 :

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
   Donner u_{10}.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_5 = -1$.
   Donner v_{10}.

Exercice 25 : Suites géométriques
Indiquer la bonne réponse.
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Pour tout entier naturel n :
a. $u_n = 2 + 3n$ b. $u_n = 2 + 3^n$ c. $u_n = 2 \times 3^n$

Exercice 26 : Suites géométriques
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer u_{17}.

Exercice 27 : Suites géométriques
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 5$ et la relation $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Justifier que (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer v_6.

Exercice 28 : Suites géométriques
Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme u_0 et la raison q d'une suite géométrique.

1. $u_0 = 5$ et $q = 2$ 2. $u_0 = 7$ et $q = -2$ 3. $u_0 = -2$ et $q = \frac{1}{5}$ 4. $u_0 = -3$ et $q = 4$

a) Déterminer u_1 et u_2.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer u_{10}.
d) Déterminer le sens de variation de la suite.

Application 10 :
On sait que $u_5 = 2$ et $u_{11} = 128$ Calculer $q > 0$ puis u_{2011}.

Exercice 29 : Suites arithmétiques

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = \frac{9}{2}$. Calculer q.
2. On sait que $u_0 = 16$ et $u_4 = 0{,}0256$ Calculer q.
3. On sait que $u_1 = 7$ et $u_4 = 1512$ Calculer q puis u_7.

Propriété 11 :

Si (v_n) est une suite géométrique ne s'annulant pas, alors la variation relative $\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n}$ est ____.

On dit alors que l'évolution est ________________________________.

Application 11 : Reconnaitre une suite géométrique :

1. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3 \times 2^n$
   Cette suite est-elle géométrique ?

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n^2 - 1$
   Cette suite est-elle géométrique ?

Exercice 30 : Reconnaitre une suite géométrique

Parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont géométrique et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

a) $u_n = 2n^2 + 3$ b) $v_n = 4 \times 5^n$ c) $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ d) $x_n = 9^n + 11^n$

Exercice 31 : Reconnaitre une suite géométrique

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite géométrique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 4^{v_n} \end{cases}$

2) Variations d'une suite géométrique

Propriétés 12 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est ______________ si $u_0 > 0$ et _________________ si $u_0 < 0$
- Si $q = 0$, la suite (u_n) est __________________________
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est __________________________
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est _________________ si $u_0 > 0$ et __________________ si $u_0 < 0$

Preuve :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 q^n$.

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1)$$

On raisonne ensuite par disjonction des cas :

- 1er cas : si $0 < q < 1$ alors $q^n > 0$ et $q - 1 < 0$ donc $q^n(q-1) < 0$.
  - Si $u_0 > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est décroissante.
  - Si $u_0 < 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$, et la suite (u_n) est croissante.

- 2ème cas : si $q = 0$ alors :

$u_{n+1} - u_n = 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est consante.

- 3ème cas : si $q = 1$ alors :

$u_{n+1} - u_n = 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est consante.

- 4ème cas : si $q > 1$ alors $q^n > 0$ et $q - 1 > 0$ donc $q^n(q-1) > 0$.
  - Si $u_0 > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$, et la suite (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est décroissante.

Propriété 13 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Si $q < 0$ alors q^n prend des valeurs positives si n est pair et des valeurs négatives si n est impaires.

La suite (u_n) est dite ____.

Exemples :

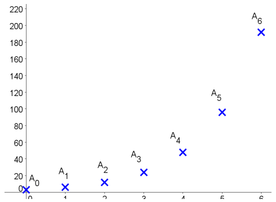
- La suite géométrique de premier terme -5 et de raison 3 est décroissante car $q = 3 > 1$ et $u_0 = -5 < 0$
- La suite géométrique de premier terme 10 et de raison -6 est alternée car $q = -6 < 0$
- La suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{2}$ est décroissante car $0 < (q =)\frac{1}{2} < 1$ et $u_0 = 3 > 0$

3) Modèle discret de croissance linéaire

Propriété 14 : Lorsque la suite (u_n) est géométrique de premier terme strictement positif et de raison q strictement supérieur à 1, alors les termes de la suite (u_n) augmentent très rapidement en fonction de n : on parle de croissance exponentielle.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2, alors pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 2^n$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	3	6	12	24	48	96	192



4) Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Propriété 15 : Soit q un nombre réel différent de 1. Alors :

$s_n =$

Preuve :

Calcul de $s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$ où $q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$:

$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n \Leftrightarrow (1-q)s_n = (1-q)(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n)$

$\Leftrightarrow (1-q)s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - q^4 - \cdots - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow (1-q)s_n = 1 - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ car $q \neq 1$

Notation : La somme $s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$ peut aussi s'écrire :

Cette notation se lit somme pour i allant de 0 à n de q puissance i.

Application 12 : $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 =$

Propriété 16 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors la somme des premiers termes vaut :

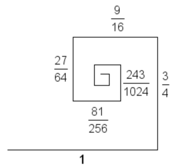
$S_n =$

Preuve : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_0 q^i = u_0 \sum_{i=0}^{n} q^i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Pour calculer la somme de n termes consécutifs en partant d'un terme quelconque u_k, on remplace u_0 par u_k et on compte le nombre de termes dans la somme pour connaitre la puissance.

Application 13 : On considère la ligne brisée constituée de onze segments donnée ci-contre.



1) On admet que les longueurs (en m) des différents segments sont les termes d'une suite géométrique. Déterminer la raison de cette suite.

2) Quelle est la longueur totale de la ligne brisée ?

Exercice 32 : Somme et Suites géométriques

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Déterminer la somme $S = u_0 + \cdots + u_7$
2. Déterminer la somme $S' = u_8 + \cdots + u_{14}$

Exercice 34 : Tableur

On a créé une feuille de calcul permettant de déterminer des termes d'une suite géométrique.
Le premier terme u_0 est saisi dans la cellule $B2$ et la valeur de la raison dans la cellule $D1$.

	A	B	C	D
1	n	u_n	q=	3
2	0	7		
3	1			

Parmi les formules suivantes, choisir celles qui, saisies dans la cellule $B3$, permettent de compléter la colonne B « par recopie vers le bas ».

=D1*B2	=D$1*B2	=$D1*B2	=D1*B2

Exercice 33 : Somme et Suites géométriques

1. a. Déterminer la somme $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^7$.

b. Application : On pose un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la deuxième, quatre grains de gris sur la troisième case…
On continue en doublant le nombre de grains de riz d'une case à la suivante.
Combien y-a-t-il de grains de riz sur la septième case ? sur la n-ième case ? sur l'échiquier ?

2. Déterminer la somme $S = \sum_{k=0}^{14} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

5) Limite d'une suite géométrique (hors programme 1ère)

Propriété 17 : Soit $q > 0$, alors :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} & \text{si } q > 1 \\ & \text{si } q = 1 \\ & \text{si } 0 < q < 1 \end{cases}$$

Application 14 : $\lim_{n \to +\infty} 2^n =$, $\lim_{n \to +\infty} 0,5^n =$

Propriété 18 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.

1. Si $0 < q < 1$, alors
2. Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors (u_n) est ______________________________ et
3. Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors (u_n) est ______________________________ et
4. Si $q = 1$, alors (u_n) est ______________________ (et donc __________________________)
   et

Application 15 :

L'entreprise Iron SA exploite un filon de minerai de fer depuis 1950. La première année d'extraction l'entreprise a récupéré 20 000 tonnes de fer. Cependant, depuis 1950, en raison des difficultés croissantes d'extraction et de l'appauvrissement du filon, les quantités extraites diminuent de 1 % par an.
On appelle T_n le nombre de tonnes extraites l'année $(1950 + n)$. On a donc $T_0 = 20\,000$.
Les résultats seront arrondis à la tonne.
1) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
En déduire la nature et les caractéristiques de la suite (T_n). Donner l'expression de T_n en fonction de n.

2) Quelle est la quantité extraite en 2008 ?

3) On note S_n la quantité totale extraite entre 1950 et l'année $(1950 + n)$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

4) En 1950, les géologues estimaient que ce filon recelait un million de tonnes de métal. En quelle année théoriquement le filon sera-t-il épuisé ?

Exercice 35 : Suites géométriques (Modéliser)

La responsable d'un site payant d'information en ligne veut modéliser l'évolution du nombre d'abonnés dans les années futures. En 2015, le nombre d'abonnés est 1500 et la responsable estime que le nombre d'abonnés va augmenter de 3% par an.

On note u_n le nombre total d'abonnés lors de l'année $2015 + n$. On a donc $u_0 = 1500$.

1. Déterminer le nombre u_1 d'abonnés en 2016
2. Exprimer u_{n+1}en fonction de u_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n
3. Estimer le nombre d'abonnés en 2025.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés aura au moins doublé.

Exercice 36 : Suites géométriques (Modéliser)

Pour stocker des fichiers photos dans un appareil numérique ou sur disque dur, on utilise des algorithmes de compression pour réduire la taille du fichier.

On estime qu'à chaque niveau de compression la taille du fichier diminue de 21,4%.

Considérons un fichier de taille initial 689 ko.

On pose $T_0 = 689$et, pour tout entier naturel non nul n, T_n désigne la taille de ce fichier après compression de niveau n.

1. Déterminer T_1
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
3. En déduire la nature de la suite (T_n).
4. Déterminer l'expression du terme général T_n.
5. Déterminer la taille du fichier après une compression de niveau sept.

Exercice 37 : Suites géométriques

Victor est né le 1er janvier 2008. À sa naissance, son père a décidé de mettre de l'argent de côté pour lui. Il place 2 000 euros le 1er janvier 2008 à intérêts composés au taux annuel de 3 %.

On note u_n le capital acquis par Victor à l'année $2008 + n$.

a. Justifier que (u_n) est une suite géométrique, préciser le terme initial et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. A 18 ans, Victor veut s'acheter une moto qui coûte 3 500 euros.
Pourra-t-il le faire ? Justifier.

Exercice 38 : Suites géométriques (Modéliser)

La population d'une banlieue augmente de 7% par an et celle du centre-ville diminue de 4% par an . En janvier 2015, elles sont toutes les deux de 30000 habitants. Pour tout n entier naturel, on note b_n et c_n les populations de la banlieue et du centre-ville l'année $2015 + n$.

1. Déterminer les populations l'année 2016 , puis les populations en 2017 .
2. a. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n. En déduire la nature de la suite (b_n).
   b. Exprimer b_n en fonction de n.
3. a. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire la nature de la suite (c_n).
   b. Exprimer c_n en fonction de n.
4. Déterminer les populations prévues pour l'année 2033.
5. Déterminer à la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que :
   a. La population de la banlieue soit supérieure à 50000 habitants.
   b. La population du centre-ville soit inférieure à 10000 habitants.

Exercice 39 : Suites géométriques (Modéliser)

BAC STI2D – Polynésie juin 2014

« En 2009, les Français ont en moyenne produit 374 kg de déchets ménagers par habitant. »

Le maire d'une commune de 53700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.

Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.

a. Montrer que $d_1 = 0{,}985d_0$.

b. Déterminer la nature de la suite (d_n).

c. Exprimer $d_n$en fonction de n

d. Calculer la limite de la suite (d_n).

e. Quelle devrait être, à ce rythme-là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que l'appel dechets(374) renvoie le nombre d'années nécessaires pour que la production de déchets de la ville devienne inférieure ou égale à la moyenne Française de 2009.

```
def dechets(M):
    d=400
    a=2011
    while ………………. :
        d=……………….
        a=……………….
    return a
```

Exercice 40 : Modélisation géométrique

Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2019, il reçoit une commande de 7500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.

1) Le délai est-il suffisant ? Justifier.

2) Le chef d'atelier décide d'augmenter la production chaque semaine de 5%. On note (u_n) le nombre de lunettes produites la nième semaine et on a $u_1 = 250$.

a) Calculer $u_2$et u_3.

b) Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

d) Conclure.

Exercice 41 : Modélisation géométrique:

Un jour donné, la pression atmosphérique à l'altitude 0 est égale à 1000 hectopascals (hPa) et diminue de 1 %pour une élévation en altitude de 100 m. On note u_n la pression atmosphérique à n centaines de mètres d'altitude, où n est un entier naturel.

a) Déterminer la pression atmosphérique à 100 m et à 200 m d'altitude.

b) Etablir un lien entre u_{n+1}et u_n.

c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

d) Exprimer u_n en fonction de n.

e) En déduire la pression atmosphérique au sommet du Mont-Blanc ce jour-là. *(On prendra 4800m comme altitude)*

Exercice 42 : TTCMATH06292

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0$égal à 300 et de raison q égale à 1,13.

1. Cette suite sert à modéliser une évolution.
   Préciser si cette évolution correspond à une augmentation ou une diminution et indiquer le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, associé.
2. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.
3. Justifier que u_{11} est proche de 1 150.
4. Calculer $\sum_{i=0}^{11} u_i$ soit $u_0 + u_1 + \cdots + u_{11}$. On arrondira le résultat à l'unité.

Une usine a produit et installé au total plus de 7 500 piscines dans la région de la Loire, de janvier 2007 à janvier 2019. Cette usine est passée d'une capacité de production annuelle de 300 piscines en 2007 à 1 150 piscines en 2018. La production annuelle suit une évolution relative constante.

5. Peut-on utiliser la suite $(\boldsymbol{u_n})$ pour modéliser la production de piscines depuis 2007 de cette usine? Justifier la réponse.

Exercice 43 : TTCMATH06289

Le dioxyde de carbone ou CO_2 est un des gaz à effet de serre.

En 1960, les émissions de CO_2 dans le monde ont été estimées à 15,4 milliards de tonnes. Depuis, on estime que ces émissions augmentent chaque année de 1,8 % par rapport à l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, le nombre u_n désigne les émissions de CO_2, exprimées en milliard de tonnes, pendant l'année $(1960 + n)$. On a ainsi : $u_0 = 15{,}4$.

1. Vérifier que $u_1 = 15{,}6772$.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de l'entiernaturel n.
4. Selon ce modèle défini par la suite (u_n), déterminer l'année à partir de laquelle les émissions annuelles de CO_2 émises dans le monde dépasseront les 75 milliards de tonnes.
5. Selon ce même modèle, un journaliste prétend que les émissions totales de CO_2 émises dans le monde depuis 1960 dépasseront les 2 000 milliards de tonnes en 2030. A-t-il raison ?

Exercice 44 : TTCMATH06288

Le directeur d'un cinéma de centre-ville a vu le nombre d'entrées diminuer de 5 % par an depuis l'ouverture en 2000, année au cours de laquelle il avait comptabilisé 200 000 entrées.

Pour tout entier naturel n, on modélise par u_n le nombre d'entrées dans ce cinéma l'année $2000 + n$. On définit ainsi la suite $u$sur $\mathbb{N}$. On a : $u_0 = 200\ 000$.

1. Quelle est la nature de la suite u ? Justifier et donner la valeur de la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n, où n est un entier naturel.
3. Selon ce modèle, combien d'entrées le directeur a-t-il comptabilisé entre 2000 et 2010 ? Arrondir le résultat à l'unité.
4. On cherche à déterminer au bout de combien d'années, le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été divisé par deux par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma.
   Pour cela, on programme une fonction, en langage Python, appelée cinéma et sans argument :
   a) Compléter les instructions manquantes afin de répondre au problème posé.
   b) Le programme renvoie la valeur 14. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def cinema():
N = 0
U = 200000
whileU >.............:
N = .....
U = .....
    return N
```

Exercice 45 : Suites arithmético-géométriques

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2014 + n$.

1. a. Calculer a_1 et a_2.
   b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 400$
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.
   b. En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2000$.
   c. Calculer la limite de la suite (a_n).
   d. Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir.
3. On propose le programme Python suivant :
   a. Expliquer ce que permet de calculer ce programme.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil() :
   N=0
   A=2500
   while  A-200>50 :
      A=A*0.8+400
      N=N+1
   return(N)
```

Exercice 46 : Modélisation géométrique

Bob vient d'acheter un lave-linge très perfectionné à 1500 € qu'il décide d'assurer. En cas de défaillance, l'assureur rembourse l'appareil mais il applique une décote de 12% par an sur la valeur de l'appareil.

On note a_n la valeur remboursable du lave-linge lors de la nième année. On a $a_0 = 1500$.

a) Calculer $a_1$et a_2.

b) Etablir un lien entre a_{n+1}et a_n pour tout entier naturel n.

c) Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.

d) Exprimer a_n en fonction de n.

e) On voudrait savoir à partir de quelle année la valeur remboursable du lave-linge sera-t-elle inférieure à 100€.

Ecrire un programme en Python afin de répondre au problème et déterminer la réponse au problème posé.

Exercice 47 : Arithmétique ? Géométrique ?

Chacune des situations suivantes peut-être modélisée par une suite.

Est-elle arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre ? Modéliser, si possible, ces situations à l'aide d'une suite (u_n) et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

1. La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 8% chaque heure après l'injection de ce médicament.
2. Chaque année une piscicultrice voit la population de son élevage de poissons augmenter de 10% de façon naturelle et de 200 poissons qu'elle ajoute.
3. Le prix du loyer augmente de 40€ tous les trois ans.
4. L'étude de la population d'une ville montre que chaque année elle perd 2% de ses habitants mais voit arriver une cinquantaine de nouveaux habitants.

III. Compétence : Symbole $\sum$

Exercice 48 :

Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2$

b) $3^2+4^2+5^2+\cdots+103^2$

c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{101}{102}$

d) $1^3+2^3+\cdots+25^3$

e) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+25\times 26$

f) $3+7+11+\cdots 47$

g) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

Exercice 50 :

Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes.

$a)\ \sum_{k=2}^{15}\frac{1}{k^2}$

$b)\ \sum_{j=0}^{12}(-3+2j)$

$c)\ \sum_{i=0}^{27}\left((-1)^i(1+i)\right)$

$d)\ \sum_{k=0}^{10}(2\times 3^k)$

Exercice 49 :

Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

$S_1=1+2+3+\cdots+253$

$S_2=1^2+2^2+\cdots+n^2$

$S_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{34\times 35}$

$S_4=1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3$

$S_5=1+0{,}8^1+0{,}8^2+\cdots+0{,}8^{25}$

$S_6=0{,}3^0+0{,}3^1+0{,}3^2+\cdots+0{,}3^n$

Exercice 51 :

Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes.

$a)\ \sum_{i=7}^{18}\frac{1}{i^3}$

$b)\ \sum_{j=8}^{14}(5j+6)$

$c)\ \sum_{i=3}^{15}\left((-1)^i\, i^2\right)$

$d)\ \sum_{k=0}^{6}(-4\times(-5)^k)$

IV. Etude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 52 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ pour tout n de IN.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n^2$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

c) Démontrer votre conjecture.

3) a) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 53 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$ pour tout n de IN.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

c) Démontrer votre conjecture.

3) a) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 54 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ pour tout n de IN.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

c) Démontrer votre conjecture.

3) a) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 55 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0{,}25\, u_n + 3$ pour tout n de IN.

La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n - 4$ pour tout n de IN.

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, et préciser ses caractéristiques.

2) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 56 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout n de IN.

1) On pose, pour tout n de IN : $v_n = u_n + 1$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n).

2) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 57 : *BAC S France juin 2013*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur IN par :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2) On désigne par (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 58 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0{,}6\, u_n + 7$ pour tout n de IN.

1) Calculer u_1 ; u_2 et u_3.

2) On pose, pour tout n de IN : $v_n = u_n - 17{,}5$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.

3) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 59 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$ pour tout n de IN.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? *Justifier soigneusement …*

2) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 60 :

La suite (u_n) est définie par $u_1 = \frac{2}{7}$ et pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$.

(On admettra que quel que soit $n \geq 1$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$).

1) Calculer u_2 et u_3.

2) a) La suite (v_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Calculer v_1.

b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$.

3) La suite (w_n) est définie par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$.

Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et calculer w_1.

Quelle est la nature de la suite (w_n) ?

Exprimer w_n en fonction de n.

4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 61 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2} u_n$ pour tout n de IN.

a) On a une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, mais pour quelle fonction f ?

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

c) Tracer la représentation graphique de f.

d) Construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

e) Que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variations et le comportement à l'infini de cette suite ?

Exercice 62 :

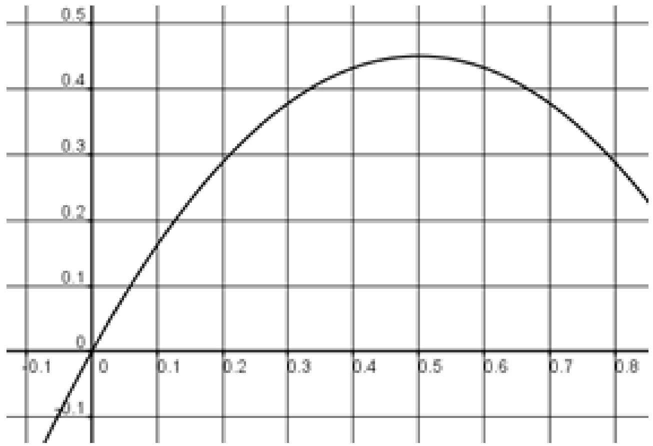
On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{9}{5} x (1 - x)$.

1) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in$ IN.

a) Sur le graphique donné, **construire** les termes u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

b) Que peut-on conjecturer sur les variations de la suite et son comportement à l'infini ?



Exercice 63 :

On définit la suite u par son 1er terme : $u_0 = 1$

et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1) La relation de récurrence est du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Donner l'expression $f(x)$ de cette fonction f.

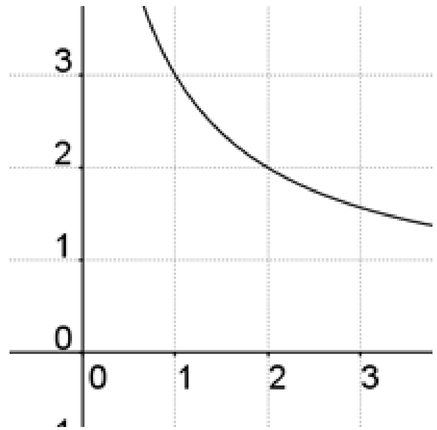
b) La courbe de cette fonction est donnée ci-contre.

Construire u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

c) Que peut-on conjecturer sur les variations de u et son comportement à l'infini ?

2) On définit la suite v par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$ pout tout n de IN.

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme.



b) Exprimer v_n en fonction de n, et donner la limite de la suite v.

c) En déduire la limite de la suite u. *(c'est hors programme, mais intuitif !)*

Exercice 64 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Étude de propriétés de la fonction f :

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[\,0\,;\alpha\,]$,
alors f (x) appartient à l'intervalle $[\,0\,;\alpha\,]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\,\alpha\,;+\infty\,[$
alors f (x) appartient à l'intervalle $[\,\alpha\,;+\infty\,[$.

2) Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$:

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$
et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$.

a) Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.

b) Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ? *(pour démonter ces conjectures… besoin du programme de TS !)*

3) Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0 :

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n)
suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?