Chapitre : Produit scalaire (1)

Pour les exercices suivants, faire une figure avant de commencer, si nécessaire.

Attention beaucoup de « coquilles » sont présentes dans ce document. La correction en classe est donc prioritaire par rapport à ce document.

Compétence : Produit scalaire avec normes et angle

Exercice 1 : Produit scalaire avec normes et angle

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note θ une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}.\vec{v}$:

a. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 7$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}}$$

b. $\|\vec{u}\| = 8, \|\vec{v}\| = 5$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}}$$

c. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 7$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 2 \times 7 \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\sqrt{2}}$$

d. $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 6 \times 3 \times cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9\sqrt{3}}$$

e. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 10$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times 10 \times cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -20}$$

Exercice 2 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

a. $AB = 5, AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 0$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 5 \times 7 \times cos(0) = 35}$$

b. $AB = 10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 10 \times 4 \times cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

c. $AB = 3, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 3 \times 9 \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{27}{2}\sqrt{2}}$$

Exercice 3 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Calculer AB sachant que :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) \Leftrightarrow AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}}$$

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

$$\boldsymbol{AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{40}{8 \times cos(60)} = 10}$$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\boldsymbol{AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{-10}{4 \times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{15}{2}}$$

Exercice 4 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\widehat{BAC}$ au centième de radian près.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

a. $AB = 3, AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{6}{3\times 7} = \frac{2}{7}$ ainsi $\widehat{BAC} \approx 1,28$ rad.

b. $AB = 4\ AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{7}{4\times 2} = \frac{7}{8}$ ainsi $\widehat{BAC} \approx 0,51$ rad.

c. $AB = 8, AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{12}{8\times 3} = \frac{1}{2}$ ainsi $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Exercice 5 : Produit scalaire avec normes et angle

En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Sur un téléski, la perche exerce sur un skieur une force constante $\vec{F}$ d'intensité 400N lors d'un déplacement du point A au point B de longueur 100 m.

Une mesure de l'angle $(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$ est 30°.

Quel est le travail de la force $\vec{F}$ durant le déplacement $\overrightarrow{AB}$?

$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \lVert\vec{F}\rVert \times \lVert\overrightarrow{AB}\rVert \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = 400 \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20000\sqrt{3} \approx 34641$ Joules

Compétence : Propriété du produit scalaire

Exercice 6 : Propriété du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient :

$\lVert\vec{u}\rVert = 2, \lVert\vec{v}\rVert = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

Calculer les réels suivants : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{v}$; $(\vec{u} + 3\vec{v}).(2\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v})^2$

$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 5 + 3^2 = 14$ $(\vec{u} + 3\vec{v}).(2\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} + 6\vec{v}.\vec{u} + 3\vec{v}^2 = 2 \times 2^2 + 5 + 6 \times 5 + 3 \times 3^2 = 70$ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 2^2 + 2 \times 5 + 3^2 = 23$

Exercice supplémentaire : Propriété du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient :

$\lVert\vec{u}\rVert = 5, \lVert\vec{v}\rVert = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 4$.

Calculer les réels suivants :

$(6\vec{u} + \overrightarrow{3v}).(\vec{u} - 2\vec{v})$; $(-\vec{u} + 3\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v})$ et $(2\vec{u} + \vec{v})^2$

$(6\vec{u} + \overrightarrow{3v}).(\vec{u} - 2\vec{v}) = 90$ $(-\vec{u} + 3\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v}) = -44$ $(2\vec{u} + \vec{v})^2 = 120$

Exercice supplémentaire : Propriété du produit scalaire

1. Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$

2. Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 10$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5 + 10 = 15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA} = -15$

Exercice 7 : Propriété du produit scalaire

Soit ABC un triangle, I étant le milieu du côté $[BC]$.

On suppose que $BC = 8$ et $IA = 5$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}) = AI^2 + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = AI^2 + \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IB}^2 = 5^2 + 0 - 4^2 = 9}$$

Exercice 8 : Propriété du produit scalaire

Soit trois points A, B et C.

On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -4$.

Calculer la longueur du segment $[AB]$.

$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 5 + 4 = 9$ ainsi $AB = 3$.

Exercice 9 : Propriété du produit scalaire

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6, AD = 7$ et $BD = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$, puis $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{DC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(DB^2 - DA^2 - DC^2\right) = \frac{1}{2}\left(10^2 - 7^2 - 6^2\right) = 7,5}$$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 7,5 + 6^2 = 43,5$ (car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$).

2. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = -7,5}$$

3. Déterminer alors la longueur de la diagonale $[AC]$

$AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = AD^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} + DC^2 = 7^2 + 2\times(-7,5) + 6^2 = 70$ ainsi $AC = \sqrt{70}$.

Remarque : Pour utiliser la question 2 on peut remarquer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right)$ donc $AC = \cdots$

Compétence : Expression analytique du produit scalaire

Exercice 10 : Expression analytique du produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans chacun des cas :

1. Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}.\vec{u}, (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}$ et $\vec{v}^2$.

a. $\vec{u}\binom{5}{6}$ et $\vec{v}\binom{2}{4}$	b. $\vec{u}\binom{-1}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{5}$	c. $\vec{u}\binom{10}{7}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$
$\vec{u}.\vec{v} = 5\times 2 + 6\times 4$ $= 10 + 24 = 34$ $\vec{u}.\vec{u} = 5^2 + 6^2$ $= 25 + 36 = 61$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 7\times 5 + 10\times 6$ $= 35 + 60 = 95$ $\vec{v}^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$	$\vec{u}.\vec{v} = (-1)\times 2 + 3\times 5$ $= -2 + 15 = 13$ $\vec{u}.\vec{u} = (-1)^2 + 3^2$ $= 1 + 9 = 10$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 1\times(-1) + 8\times 5$ $= -1 + 40 = 39$ $\vec{v}^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$	$\vec{u}.\vec{v} = 10\times 3 + 7\times 2$ $= 30 + 14 = 44$ $\vec{u}.\vec{u} = 10^2 + 7^2$ $= 100 + 49 = 149$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 13\times 10 + 9\times 7$ $= 130 + 63 = 193$ $\vec{v}^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

2. Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\binom{5}{3}$ et $\vec{v}\binom{10}{6}$	b. $\vec{u}\binom{21}{-7}$ et $\vec{v}\binom{2}{6}$	c. $\vec{u}\binom{8}{1}$ et $\vec{v}\binom{6}{7}$
$\vec{u}.\vec{v} = 5\times 10 + 3\times 6$ $= 50 + 18 = 68 \neq 0$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux**	$\vec{u}.\vec{v} = 21\times 2 + (-7)\times 6$ $= 42 - 42 = 0$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux**	$\vec{u}.\vec{v} = 8\times 6 + 1\times 7$ $= 48 + 7 = 55 \neq 0$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux**

3. Déterminer le réel m de telle sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\binom{4}{6}$ et $\vec{v}\binom{m}{-5}$	b. $\vec{u}\binom{7}{-2}$ et $\vec{v}\binom{9}{m}$	c. $\vec{u}\binom{2}{m-3}$ et $\vec{v}\binom{-1}{2m}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $4m - 30 = 0$ $m = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5.$	**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $63 - 2m = 0$ $m = \frac{63}{2} = 31,5.$	**$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $-2 + (m-3)(2m) = 0$ $2m^2 - 6m - 2 = 0.$ $m = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ou $m = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Exercice 11 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

1. $A(1\,;1), B(2\,;3), C(-2;1)$ et $D(2\,;\,-1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1\times 4+2\times(-2)=4-4=0$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.	

2. $A(-3\,;2), B(6\,;-1), C(3;4)$ et $D(1\,;\,-2)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-3)\\-1-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-3\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=9\times(-2)+(-3)\times(-6)=-18+18=0$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.	

Exercice 12 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle EFG.

1. $E(8\,;4), F(4\,;-2)$, et $G(-2\,;\,2)$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-8\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ $EF=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}$ $=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-2-8\\2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ $EG=\sqrt{(-10)^2+(-2)^2}$ $=\sqrt{100+4}=\sqrt{104}$	$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-2-4\\2-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $FG=\sqrt{(-6)^2+4^2}$ $=\sqrt{36+16}=\sqrt{54}$

$EF=FG$ ainsi le triangle EFG est isocèle en F.
$EG^2=EF^2+FG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore EFG est rectangle en F.
<u>Conclusion :</u> Le triangle EFG est rectangle isocèle en F.
<u>Remarque :</u> Si on place les points sur un repère, on conjecture facilement que EFG est rectangle isocèle en F et montrer que : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG}=0$ et $EF=FG$ suffit.

2. $E(1\,;2), F(9\,;-2)$, et $G(13\,;\,6)$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}9-1\\-2-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ $EF=\sqrt{8^2+(-4)^2}$ $=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}13-1\\6-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$ $EG=\sqrt{12^2+4^2}$ $=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}$	$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}13-9\\6-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ $FG=\sqrt{4^2+8^2}$ $=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

$EF=FG$ ainsi le triangle EFG est isocèle en F.
$EG^2=EF^2+FG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore EFG est rectangle en F.
<u>Conclusion :</u> Le triangle EFG est rectangle isocèle en F.

Exercice 13 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(3\,;5), B(-3\,;7), C(-1;1)$ et $D(5\,;\,-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5-(-3)\\-1-7\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-3\\1-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=8\times(-4)+(-8)\times(-4)=-32+32=0$ donc les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.	

2. Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-3\\7-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-5\\1-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ainsi le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
De plus ces diagonales sont perpendiculaires ainsi $ABCD$ est un losange.
Attention : Il faut vérifier que $ABCD$ n'est pas un rectangle (il y a plusieurs méthodes).
$BD=\sqrt{128}$ et $AC=\sqrt{32}$ donc les diagonales ne sont pas égales donc $ABCD$ n'est pas un rectangle donc n'est pas un carré.

Exercice 14 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A\left(\frac{3}{2}\ ;-2\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}\ ;4\right)$, $C(2;2)$ et $D(-2\ ;\ 0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-3\times(-4)+6\times(-2)=12-12=0$ **donc les droites** (AB) **et** (CD) **sont perpendiculaires.**	

2. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$.

Attention : Nous ne pouvons rien conclure pour l'instant. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ **et** $\overrightarrow{DB}$**.**

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ **ainsi** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ **donc** $ACBD$ **est un parallélogramme.**

De plus ces diagonales sont perpendiculaire donc $ACBD$ **est un losange.**

$AB=\sqrt{45}$ **et** $CD=\sqrt{20}$ **donc les diagonales ne sont pas égales,** $ACBD$ **n'est pas un rectangle donc n'est pas un carré.**

Exercice 15 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $E(2\ ;20)$, $F(10\ ;-5)$ et $G(27\ ;\ 28)$.

1. Montrer que le triangle FEG est rectangle en E.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10-2\\-5-20\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\-25\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}27-2\\28-20\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}25\\8\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=8\times25+(-25)\times8=200-200=0$**. Ainsi les droites** (EF) **et** (EG) **sont perpendiculaires donc le triangle** FEG **est rectangle en** E**.** **Remarque : On pourrait montrer facilement que** $EF=EG$ **et donc que le triangle** FEG **était rectangle isocèle en** E**.**	

2. Calculer les coordonnées du point H tel que $EFHG$ est un rectangle.

Comme (EF) **et** (EG) **sont perpendiculaires** $EFHG$ **est un rectangle si** $EFHG$ **est un parallélogramme. Notons** $H(x\ ;y)$**.**

$EFHG$ **est un parallélogramme ssi** $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ **ssi** $\begin{cases}8=x-27\\-25=y-28\end{cases}$ **ssi** $\begin{cases}x=35\\y=3\end{cases}$ **ainsi** $H(35\ ;3)$**.**

Exercice 16 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(5\ ;3)$ et $B(-3\ ;\ 1)$. Déterminer les coordonnées du point C de sorte que C appartiennent à l'axe des abscisses et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Soit $C(x\ ;y)$**.** C **appartiennent à l'axe des abscises donc** $C(x\ ;0)$**.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-5\\1-3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-5\\-3\end{pmatrix}$

ABC **est rectangle en** A **ssi** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ **ssi** $-8(x-5)+(-2)\times(-3)=0$ **ssi** $-8x+40+6=0$ **ssi** $x=\frac{23}{4}$**.**

Ainsi $C\left(\frac{23}{4}\ ;0\right)$**.**

Exercice 17 : Produit scalaire avec normes et angle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. On donne les points A, B et C.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. $A(1\ ;2)$, $B(3\ ;-4)$ et $C(1\ ;\ -1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times0+(-6)\times(-3)=18$ $AB=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$ $AC=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{18}{\sqrt{40}\times3}=\frac{6}{\sqrt{40}}$. $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{40}}\right)\approx0,32$ **rad (ou 18,43°).**

2. $A(4\ ;1)$, $B(-3\ ;1)$ et $C(1\ ;\ 5)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-7)\times(-3)+0\times4=21$ $AB=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$ $AC=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{21}{7\times5}=\frac{3}{5}$. $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx0,93$ **rad (ou 53,13°).**

3. $A(1\ ;2)$, $B(-1\ ;2)$ et $C(3\ ;\ 2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times2+0\times0=-4$ $AB=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$ $AC=\sqrt{2^2+0^2}=2$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{-4}{2\times2}=-1$ $\widehat{BAC}=\pi$ **rad (ou 180°).**

Exercice 18 : Produit scalaire avec normes et angle

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;3)$, $B(-3\,;2)$ et $C(-5\,;\,-2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-4\times5+(-1)\times(-7)=-20+7=-13$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=9\times4+(-6)\times1=36-6=30$

2. En déduire une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

$AB=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}\,;\ AC=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}\,;\ BC=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$

$\cos(\widehat{BAC})=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{-13}{\sqrt{17}\times\sqrt{74}}$ **ainsi** $\widehat{BAC}\approx111,5°$

$\cos(\widehat{ABC})=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\frac{30}{\sqrt{17}\times\sqrt{117}}$ **ainsi** $\widehat{ABC}\approx47,7°$

$\widehat{ACB}=180°-(\widehat{BAC}+\widehat{ABC})\approx20,8°$

Compétence : Produit scalaire et projeté orthogonal

Exercice 19 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de A.

On suppose que $AB=6$, $BH=4$ et $HC=5$. Calculer :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Faire un dessin pour s'aider !!! On a $BC=BH+HC=4+5=9$.

D'après le théorème de Pythagore dans le, triangle AHB rectangle en H on a :

$AB^2=AH^2+HB^2$ **ainsi** $AH^2=6^2-4^2=20$ **donc** $AH=\sqrt{20}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BH\times BC=4\times9=36$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AH^2=20$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}=AH^2=20$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CH\times CB=5\times9=45$

Exercice 20 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un carré de côté 5. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2=25$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}=BA^2=25$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=BC^2=25$

Exercice 21 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que : $AB=AD=5$ et $DC=7$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ **car** $ABCD$ est un trapèze rectangle en A

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}=-CD\times AB=-7\times5=-35$ **car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire.**

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Bh}=AB\times BH=5\times2=10$ **où H est le projeté orthogonal de C sur [AB].**

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=CD^2=7^2=49$

Exercice 22 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle rectangle en B, avec $AB=4$ et $BC=6$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2=16$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ **car ABC est un triangle rectangle en B**

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB}=CB^2=6^2=36$

Exercice 23 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle équilatéral de côté 5.

Soit les points I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AC]$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

ABC est un triangle équilatéral ainsi I, J et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points C, A et B sur les segments respectifs $[AB], [BC]$ et $[AC]$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB \times AI = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = BI \times BA = \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AC^2 = \frac{25}{2} - 25 = -\frac{25}{2}$

Exercice 24 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$.

On note O le centre de ce losange.

1. Calculer :

a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ **car $ABCD$ est un losange et ces diagonales sont perpendiculaires.**

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = BO \times BD = 5 \times 10 = 50.$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AO.AC = 4 \times 8 = 32$

2. a. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AD} = AD^2 + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}$

Or dans le triangle AOD rectangle en O, on a d'après le théorème de Pythagore : $AD^2 = AO^2 + OD^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD} = -DB \times DO = -10 \times 5 = -50.$

Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 41 - 50 = -9.$

b. De la même façon, calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = BA^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = BA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 41 - 32 = 9$

Compétence : Produit scalaire avec normes

Exercice 25 : Définition du produit scalaire (avec normes)

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}.\vec{v}$, puis indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

   a. $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 7$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 12$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(12^2 - 5^2 - 7^2\right) = 35 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

   b. $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 - 3^2 - 4^2\right) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}$

   a. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2} = \sqrt{2\times 6 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{32}$

   b. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 8$ et $\vec{u}.\vec{v} = -5$.

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2} = \sqrt{2\times(-5) + 2^2 + 8^2} = \sqrt{58}$

3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\|\vec{u}\|$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}}$

   a. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 10, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}} = \sqrt{10^2 - 2^2 - 2\times 6} = \sqrt{84}$

   b. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8, \|\vec{v}\| = 9$ et $\vec{u}.\vec{v} = -11$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}} = \sqrt{8^2 - 9^2 - 2\times(-11)} = \sqrt{5}$

Exercice 26 : Définition du produit scalaire (avec normes)

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5, AC = 9$ et $AD = 7$.

1. Calculer :

   a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}\right\|^2 - AB^2 - BA^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2 - 5^2 - 5^2\right) = -25$

Ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -AB^2 = -5^2 = -25$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 25$ en effet $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(CB^2 - CA^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 - 9^2 - 5^2\right) = -28,5$

2. a. Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

$ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

   b. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right) = \frac{1}{2}\left(9^2 - 5^2 - 7^2\right) = 3,5$

Exercice 27 : Définition du produit scalaire (avec normes)

ABC est un triangle tel que $AB = 6, BC = 3$ et $AC = 4$. Calculer :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 - 6^2 - 4^2\right) = -\frac{43}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 - 6^2 - 3^2\right) = \frac{29}{2}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 - CA^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 - 4^2 - 3^2\right) = \frac{11}{2}$

Exercice 28 : Définition du produit scalaire (avec normes)

$ABCD$ est un losange tel que $AB = 10$ et $AC = 16$.

1. Calculer la longueur de la diagonale $[BD]$

Notons $\boldsymbol{I}$, le centre du losange (donc le milieu de diagonales [AC] et [BD]). On a $\boldsymbol{AI = \frac{AC}{2} = 8}$.
Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires. Ainsi le triangle $\boldsymbol{AIB}$ est rectangle en I.
Dans ce triangle on utilise le théorème de Pythagore :
$\boldsymbol{AB^2 = AI^2 + IB^2}$
$\boldsymbol{IB^2 = AB^2 - AI^2}$
$\boldsymbol{IB^2 = 100 - 64}$
$\boldsymbol{IB^2 = 36}$
$\boldsymbol{IB = 6}$

Ainsi $\boldsymbol{BD = 2IB = 12}$.

2. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right) = \frac{1}{2}\left(16^2 - 10^2 - 10^2\right) = 28$

($\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$).

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BD^2 - BC^2 - BA^2\right) = \frac{1}{2}\left(12^2 - 10^2 - 10^2\right) = -28$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(CD^2 + AD^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(10^2 + 10^2 - 16^2\right) = -28$

(Remarque : On utilise ici la formule $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ puisque le calcul de $\vec{u}+\vec{v}$ n'était pas possible, cette formule se démontre facilement en développant $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.)

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}\right\|^2 - CD^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2 - 10^2 - 10^2\right) = -100$

Ou $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = -CD \times AB = -10 \times 10$ car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont (colinéaires de sens) opposés

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = BC \times AD = 10 \times 10$ car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires de même sens (égaux).

Exercice 29 : Définition du produit scalaire (avec normes)

$ABCD$ est un carré de côté 4.

1. Calculer $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.

$\boldsymbol{ABCD}$ est un carré de côté 4 donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4$	**La diagonale d'un carré de côté $\boldsymbol{a}$ mesure toujours $\boldsymbol{a\sqrt{2}}$ (à démontrer à l'aide du théorème de Pythagore).** **Ainsi $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 4\sqrt{2}$**

2. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$ e) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ puisque $\boldsymbol{ABCD}$ est un carré (et donc les droite (AB) et (AD) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}\right\|^2 - AB^2 - CD^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2 - 4^2 - 4^2\right) = -16$

Ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD = -4 \times 4 = -16$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont (colinéaires de sens) opposés.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 - 4^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2 - 4^2 - 4^2\right) = -16$

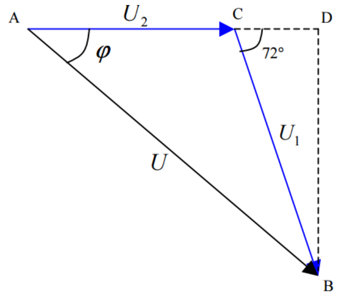
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}\right\|^2 - AB^2 - BA^2\right) = \frac{1}{2}\left(0^2 - 4^2 - 4^2\right) = -16$

Ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -AB \times BA = -4 \times 4 = -16$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont (colinéaires de sens) opposés.

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = 0$ puisque $\boldsymbol{ABCD}$ est un carré (et donc les droite (CB) et (CD) sont perpendiculaires.

Compétence : Calculs de longueurs, d'aires et d'angles

Exercice 30 : Electricité



Il est conseillé d'avoir un bon $\cos\varphi$, sur une installation électrique.
La figure est issue d'une situation rencontrée en électricité. On donne :
$\|\overrightarrow{BC}\| = U_1 = 25$, $\|\overrightarrow{AC}\| = U_2 = 20$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = -72°$.
Dans le triangle ABC, déterminer :

1. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $U = \|\overrightarrow{AB}\|$

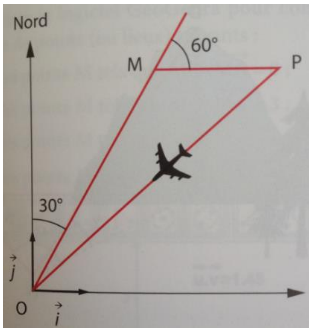
$\boldsymbol{U^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 - 2U_1U_2\cos(\widehat{C})}$ **or** $\boldsymbol{\widehat{C} = 180° - 72° = 108°}$
$\boldsymbol{U^2 \approx 1334,02}$ **ainsi** $\boldsymbol{U \approx 36,52.}$
Remarque : Dans cette formule, j'utilise un angle géométrique, car $\boldsymbol{cos(-a) = cos(a)}$ **ainsi l'orientation n'est pas importante.**

2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la mesure φ en degrés de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

$\boldsymbol{\frac{U}{\sin(\widehat{C})} = \frac{U_1}{\sin(\widehat{A})}}$ **ainsi** $\boldsymbol{\sin(\widehat{A}) = \frac{U_1 \sin(\widehat{C})}{U} \approx 0,65}$ **ainsi** $\boldsymbol{\widehat{A} \approx 40,65°.}$
$\boldsymbol{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \approx -40,65°}$

Exercice 31 : Parcours d'un avion (En mécanique)

Un avion se déplace dans un plan horizontal à partir d'un point O situé à la verticale de sa base.

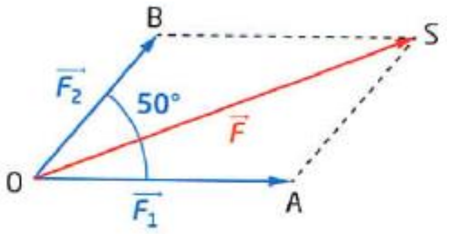


Il part en suivant une direction de 30° par rapport au nord, cap nord-est, parcourt 200 km et arrive en point M. Là il change de cap, suit la direction est, sur une distance de 100 km jusqu'au point P.
Quelle distance doit-il parcourir pour revenir au-dessus de sa base ?

$\boldsymbol{OM = 200}$ **et** $\boldsymbol{MP = 100}$**. On cherche** $\boldsymbol{PO}$**.**
On remarque assez facilement que $\boldsymbol{\widehat{M} = 180 - 60° = 120°.}$
$\boldsymbol{PO^2 = MP^2 + MO^2 - 2MP \times MO \times \cos(\widehat{M})}$
$\boldsymbol{PO^2 = 70000}$
$\boldsymbol{PO \approx 264,58}$ **km.**

Exercice 32 :

On souhaite calcule la somme de deux forces. Soit $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces s'exerçant sur un même point O d'intensités respectives $F_1 = 40N$ et $F_2 = 30N$ en formant un angle de 50° comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\vec{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

On souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.

a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.

Dans un parallélogramme,

- **la somme des mesures des angles fait 360°**
- **les angles opposés sont égaux**

donc $\widehat{OAS} = (360 - 2 \times 50) \div 2 = 140°$

b) En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.

<u>Rappel :</u> Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC, on pose $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

Dans le triangle OAS, $OS^2 = OA^2 + AS^2 - 2 \times OA \times AS \times \cos(\widehat{OAS})$

avec $OA = F_1 = 40 \text{ et } AS = F_2 = 30$

$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(140°)$

$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(140°)$

$OS^2 \approx 4338,51$

Donc :

$OS = \sqrt{4338,51} \approx 65,87$

c) Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près .

On utilise à nouveau le théorème d'Al Kashi dans le triangle OAS

$AS^2 = OA^2 + OS^2 - 2 \times OA \times OS \times \cos(\widehat{AOS})$

On isole $\cos(\widehat{AOS})$ **:**

$2 \times OA \times AS \times \cos(\widehat{AOS}) = OA^2 + OS^2 - AS^2$

$$\cos(\widehat{AOS}) = \frac{OA^2 + OS^2 - AS^2}{2 \times OA \times OS}$$

$$\cos(\widehat{AOS}) = \frac{40^2 + 65,87^2 - 30^2}{2 \times 40 \times 65,87}$$

$\cos(\widehat{AOS}) \approx 0,956$

$\widehat{AOS} \approx \cos^{-1}(0,956)$

$\widehat{AOS} \approx 17,0°$

d) Conclure par rapport au problème posé.

On souhaitait déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.

$\vec{F}$ **pour intensité** $F = AS = 65,87\ N$ **et fait un angle de 17° avec la force** $\overrightarrow{F_1}$.

b) En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.

<u>Rappel :</u> Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC, on pose $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

Dans le triangle OAS, $OS^2 = OA^2 + AS^2 - 2 \times OA \times AS \times \cos(\widehat{OAS})$

avec $OA = F_1 = 40\ et\ AS = F_2 = 30$

$$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(140°)$$
$$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(140°)$$
$$OS^2 \approx 4338{,}51$$

Donc :

$$OS = \sqrt{4338{,}51} \approx 65{,}87$$

c) Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près .

On utilise à nouveau le théorème d'Al Kashi dans le triangle OAS

$$AS^2 = OA^2 + OS^2 - 2 \times OA \times OS \times \cos\left(\widehat{AOS}\right)$$

On isole $\cos\left(\widehat{AOS}\right)$:

$$2 \times OA \times AS \times \cos\left(\widehat{AOS}\right) = OA^2 + OS^2 - AS^2$$
$$\cos\left(\widehat{AOS}\right) = \frac{OA^2 + OS^2 - AS^2}{2 \times OA \times OS}$$

$$\cos\left(\widehat{AOS}\right) = \frac{40^2 + 65{,}87^2 - 30^2}{2 \times 40 \times 65{,}87}$$

$$\cos\left(\widehat{AOS}\right) \approx 0{,}956$$
$$\widehat{AOS} \approx \cos^{-1}(0{,}956)$$
$$\widehat{AOS} \approx 17{,}0°$$

d) Conclure par rapport au problème posé.