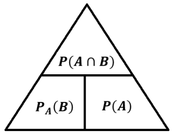
Fiche méthode : Probabilités conditionnelles

I. Probabilités conditionnelles et tableau à double entrée

Application 1 : Probabilités conditionnelles et tableau à double entrée

Une maladie a atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test. Parmi les bien portants, 2% ont un test positif. Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.



1) Compléter le tableau suivant :

	Malades	Bien portants	Total
Test positif	851	582	1 433
Test négatif	49	28 518	28 567
Total	900	29 100	30 000

Dans les questions suivantes, les résultats numériques demandés seront arrondis à 10^{-3}.

2) On choisit au hasard une personne dans cette population. On considère les événements T et M suivants :

- T : " le test est positif pour la personne choisie"
- M : " la personne choisie est malade."

a) Décrire par une phrase les événements suivants : $\bar{T}$; $T\cap M$; $\bar{T}\cap M$.

$\bar{T}$: « le test est négatif pour la personne choisie »
$T\cap M$: « pour la personne choisie le test est positif et la personne est malade »
$\bar{T}\cap M$: « pour la personne choisie le test est négatif et la personne est malade »

b) Calculer les probabilités $p(\bar{T})$; $p(T\cap M)$; $p(\bar{T}\cap M)$.

$p(\bar{T})=\frac{28567}{30000}\approx 0{,}952$ | $p(T\cap M)=\frac{851}{30000}\approx 0{,}028$ | $p(\bar{T}\cap M)=\frac{49}{30000}\approx 0{,}002$

c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.

$$p(M\cup T)=P(M)+P(T)-P(M\cap T)=\frac{900}{30000}+\frac{1433}{30000}-\frac{851}{30000}=\frac{1482}{30000}=0{,}0494\approx 0{,}049$$

d) Déterminer les probabilités conditionnelles : $p_T(M)$ et $p_M(T)$.

$$p_T(M)=\frac{Card(T\cap M)}{Card(T)}=\frac{851}{1433}\approx 0{,}594$$

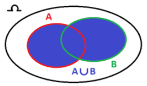
$$p_M(T)=\frac{Card(T\cap M)}{Card(M)}=\frac{851}{900}\approx 0{,}946$$

e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

$$p_{\bar{T}}(M)=\frac{Card(\bar{T}\cap M)}{Card(\bar{T})}=\frac{49}{28567}\approx 0{,}002$$

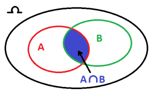
Rappels :

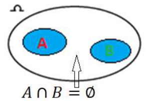
- La **réunion** de A et B, notée $\boldsymbol{A\cup B}$ est l'évènement dont les issues réalisent A **ou** B.



$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

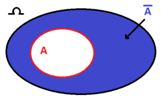
- L'**intersection** de A et B, notée $\boldsymbol{A\cap B}$ est l'évènement dont les issues réalisent A **et** B.





Si $\boldsymbol{A\cap B=\emptyset}$ alors $\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)}$
On dit alors que A et B sont **incompatibles.**

- Le **contraire** (ou **complémentaire**) de A dans Ω, noté $\boldsymbol{\bar{A}}$ est l'évènement de Ω qui contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.



$$\boldsymbol{P(\bar{A})=1-P(A)}$$

Probabilité conditionnelle :

- Soit A et B deux événements de l'univers Ω, A étant de probabilités non nulle ($P(A)\neq 0$).
La probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé est :
$$\boldsymbol{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$
Cette probabilité est appelée probabilité conditionnelle de B sachant A.
- Si $P(A)\neq 0$ alors $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
- Dans une **situation d'équiprobabilité :**
$$\boldsymbol{P_A(B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(A)}}$$
où $\boldsymbol{Card(\ldots)}$: nombre d'éléments.

Tableau à double entrée :

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles.
$P_A(B)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A\cap B)$ et de $P(A)$ lues dans le tableau.

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	**TOTAL**
$\boldsymbol{A}$	$P(A\cap B)$	$P(A\cap\bar{B})$	$P(A)$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(\bar{A})$
TOTAL	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

On peut remplacer les probabilités par $Card(\ldots)$

II. Arbre pondéré et probabilités totales

Application 2 : Arbre pondéré et probabilités totales

Un magasin de vêtements a constitué un stock d'un certain type de pantalons venant de trois fabricants f1, f2, et f3. Certains de ces pantalons présentent un défaut.
60 % du stock provient du fabricant f1, 30 % du stock provient du fabricant f2, et le reste du stock provient du fabricant f3. La qualité de la production n'est pas la même selon les fabricants. Ainsi :

- 6 % des pantalons produits par le fabricant f1 sont défectueux
- 4 % des pantalons produits par le fabricant f2 sont défectueux
- 2 % des pantalons produits par le fabricant f3 sont défectueux.

On prélève au hasard un pantalon dans le stock.
On considère les évènements suivants :

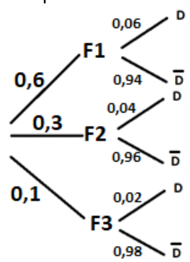
- F1 : « le pantalon a été fabriqué par f1 » ;
- F2 : « le pantalon a été fabriqué par f2 » ;
- F3 : « le pantalon a été fabriqué par f3 » ;

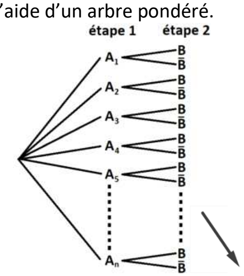
D : « le pantalon est défectueux ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement F3.

$$P(F3)=1-P(F1)-P(F2)=1-0{,}6-0{,}3=0{,}1$$

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.





3. a. Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,05.

$F1$, $F2$ et $F3$ forment une partition de l'univers ainsi d'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(D)=P(F1\cap D)+P(F2\cap D)+P(F3\cap D)$
$P(D)=P(F1)\times P_{F1}(D)+P(F2)\times P_{F2}(D)+P(F3)\times P_{F3}(D)$
$P(D)=0{,}6\times 0{,}06+0{,}3\times 0{,}04+0{,}1\times 0{,}02$
$P(D)=0{,}05$

b. En déduire la probabilité de l'évènement : « le pantalon est sans défaut ».

$P(\bar{D})=1-P(D)=1-0{,}05=0{,}95$

4. On prélève un pantalon parmi ceux qui présentent un défaut. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par le fabricant f1 ?

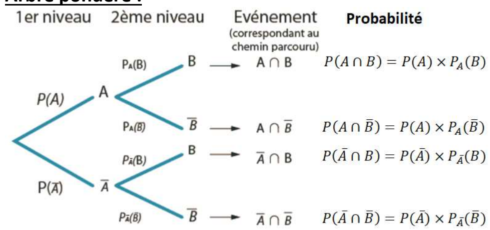
$$P_D(F1)=\frac{P(D\cap F1)}{P(D)}=\frac{0{,}6\times 0{,}06}{0{,}05}=\frac{0{,}036}{0{,}05}=0{,}72$$

5. Les événements F_1 et D sont-ils indépendants ?

1ère méthode :	**2ème méthode :**
$P_{F_1}(D)=0{,}06$	$P(F_1)\times P(D)=0{,}6\times 0{,}05=0{,}03$
$P(D)=0{,}05$	$P(F_1\cap D)=0{,}6\times 0{,}06=0{,}036$
$P_{F_1}(D)\neq P(D)$	$P(F_1\cap D)\neq P(F_1)\times P(D)$

Ainsi F_1 et D ne sont pas indépendants.

Arbre pondéré :



- Une **branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante. Par exemple, la probabilité de la branche reliant A à B est $P_A(B)$.
- Un **chemin** est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. Sa probabilité est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
- Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.
- La probabilité d'un chemin est **le produit** des probabilités rencontrées le long du chemin.
- La probabilité d'un événement s'obtient en effectuant **la somme** des probabilités de tous les chemins menant à cet événement.

Formule des probabilités totales :

- Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'événements **non vide, deux à deux incompatibles** et dont la **réunion est $\boldsymbol{\Omega}$.**
- Soit n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω.
Pour tout événement B, on a :
$$\boldsymbol{P(B)=P(A_1\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)=P(A_1)\times P_{A_1}(B)+\cdots+P(A_n)\times P_{A_n}(B)}$$

Indépendance :

Soit A et B deux événements de l'univers Ω de probabilité non nulle.

- On dit que l'événement B est **indépendant** de l'événement A si la réalisation ou non de l'événement A **ne modifie** pas la probabilité de B.
- Les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - A et B sont deux événements indépendants
  - $P_A(B)=P(B)$
  - $P_B(A)=P(A)$
  - $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$