Fiche méthode : Dérivation

I. Nombre dérivé et taux d'accroissement

Application 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et h un réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$.

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(-2+h) = (-2+h)^2 + 1$
$= 4 - 4h + h^2 + 1$
$= h^2 - 4h + 5$

2. Vérifier que le taux d'accroissement de f entre -2 et $-2+h$ est égal à $-4+h$

Pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 4h + 5 - 5}{h} = \frac{h^2 - 4h}{h} = h - 4$$

3. En déduire que f est dérivable en -2 et déterminer $f'(-2)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} 3h - 4 = -4 = f'(-2)$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -4$.

Nombre dérivé et taux d'accroissement :

Le nombre dérivé de la fonction f en a est, si elle existe, la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 , on note ce nombre $\boldsymbol{f'(a)}$.

On écrit alors :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Méthode :

Pour déterminer $f'(a)$ lorsqu'on a l'expression de $f(x)$ sans utiliser les formules de dérivation :

- On calcule $f(a)$
- On calcule $f(a+h)$
- On calcule $f(a+h) - f(a)$
- On calcule $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- On en déduit $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Si la limite existe alors :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Et f est dérivable en a.

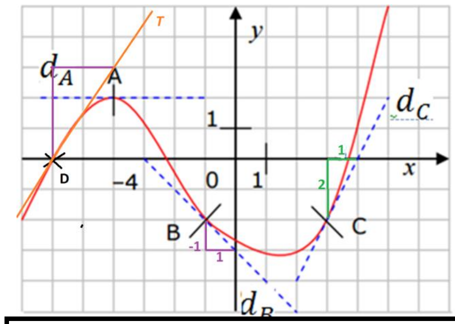
II. Nombre dérivé et coefficient directeur

Application 2 : La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-contre en rouge.

1. Déterminer :

$f'(-4)$	Le point A a pour abscisse -4. $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente (horizontale) à C_f au point A ainsi $f'(-4) = 0$.
$f'(-1)$	Le point B a pour abscisse -1. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point B ainsi : $\boldsymbol{f'(-1) = -1}$
$f'(3)$	Le point C a pour abscisse 3. $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point C ainsi : $\boldsymbol{f'(3) = 2}$

2. **Tracer la tangente T à la courbe au point $D(-6\,;0)$ sachant que $f'(-6) = \frac{3}{2}$**



Application 3 :

Dans le plan muni du repère (O, I, J), soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe C_f au point $A(-3;1)$ passe par le point $B(2;-1)$.

Déterminer le nombre dérivé $f'(-3)$

$$\boldsymbol{f'(-3) = m_{(AB)} = \frac{-1-1}{2+3} = -\frac{2}{5}}$$

Nombre dérivé et coefficient directeur :

Le nombre dérivé de f en a est le coefficient directeur de la tangente à C_f en a.

Il est noté $f'(a)$.

Rappel : Coefficient directeur :

- On note m le coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{Vertical}}{\text{Horizontal}}$$

- Si la tangente est horizontale, alors $m = 0$.

III. Tangente

Application 4 :

1. Déterminer une équation de la tangente au point $A(-1\,;2)$ à C_f sachant que $f'(-1) = 3$.

$A(-1\,;2) \in C_f$ donc $f(-1) = 2$	$T_A : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ $y = 3(x+1) + 2$ $y = 3x + 3 + 2$ $y = 3x + 5$

2. Déterminer une équation de la tangente T au point $A(1\,;3)$ à C_f sachant que le coefficient directeur de T est 4.

$A(1\,;3) \in C_f$ donc $f(1) = 3$ $m = 4 = f'(1)$	$T_A : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $y = 4(x-1) + 3$ $y = 4x - 4 + 3$ $y = 4x - 1$

3. Donner une équation de la tangente au point A de C_f d'abscisse x_A sachant :
$f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f'(x) = 2x - 5$ en $x_A = 2$

$f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 3$ $= 4 - 10 + 3$ $= -3$ $f'(2) = 2 \times 2 - 5$ $= -1$	$T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ $y = -(x-2) - 3$ $y = -x + 2 - 3$ $y = -x - 1$

Tangente :

- La tangente en un point d'une courbe est la position limite d'une sécante passant par ce point et un point voisin de la courbe, lorsque ce point vient se confondre avec le premier point.
- Si f est dérivable en a , alors la tangente à la courbe représentative C_f de f au point A de C_f est **la droite passant par A** de **coefficient directeur** : **le nombre dérivé** de f en a.
- La tangente à la courbe représentative C_f au point A admet pour équation :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Rappel :

Si $M(x\,;y) \in C_f$ alors $M(x\,;f(x))$.
Autrement dit : $y = f(x)$.

IV. Formule de dérivées

Application 5 :

1. Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 5$

Pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

2. Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -9x + \frac{3}{4}$

Pour tout réel x, $f'(x) = -9$

3. Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^7$

Pour tout réel x, $f'(x) = 7x^6$.

Application 6 :

Dériver les fonctions f, g, h et k définie sur I par :

1. $f(x) = 8x^4$ et $I = \mathbb{R}$

Pour tout réel x on a : $f'(x) = 8 \times 4x^3$
$f'(x) = 32x^3$

2. $g(x) = -\frac{3}{x}$ et $I = \mathbb{R}^*$

Pour tout réel x non nul, $g(x) = -\frac{3}{x} = -3 \times \frac{1}{x}$

Pour tout réel x non nul, $g'(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$g'(x) = \frac{3}{x^2}$

3. $h(x) = 3\sqrt{x}$ et $I = \mathbb{R}_+$

Pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

4. $k(x) = -x^2 + 7x - 8$ et $I = \mathbb{R}$

Pour tout réel x on a : $f'(x) = -2x + 7$

Fonctions dérivées de référence :

Fonction f	Fonction f'
$f(x) = k$ (k =constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = mx$ ($m \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = m$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \neq 0$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{kx}$	$f'(x) = ke^{kx}$

Dérivées et opérations :

u et v fonctions :	**Fonction**	**Dérivée**
Produit d'une fonction par un nombre k	ku	ku'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit	$u \times v$	$u'v + v'u$
Inverse ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
Puissance	u^n	$nu^{n-1}u'$
Composée (g est une fonction)	$g(u)$	$u'g(u)$

Application 7 : Produit

Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)(x^4 - 2x^2 + 1)$$

Pour tout réel x on a :

$f(x) = (x+1)(x^4 - 2x^2 + 1) = \boldsymbol{u(x)v(x)}$ avec :

$u(x) = x + 1$	$v(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
$u'(x) = 1$	$v'(x) = 4x^3 - 4x$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$f'(x) = 1(x^4 - 2x^2 + 1) + (4x^3 - 4x)(x+1)$
$f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x$
$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$

Remarque : Ici, on pourrait tout simplement développer l'expression de f et dériver la fonction polynôme trouvée.

Application 8 : Puissance 2

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-4x^3 - 2x + 5)^2$$

Pour tout réel x on a :

$f(x) = (-4x^3 - 2x + 5)^2 = \big(\boldsymbol{u(x)}\big)^2$ avec :
$u(x) = -4x^3 - 2x + 5$
$u'(x) = -12x^2 - 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 2u'(x)v(x)}$
$f'(x) = 2(-12x^2 - 2)(-4x^3 - 2x + 5)$
$f'(x) = (-24x^2 - 4)(-4x^3 - 2x + 5)$
$f'(x) = 96x^5 + 48x^3 - 120x^2 + 16x^3 + 8x - 20$
$f'(x) = 96x^5 + 64x^3 - 120x^2 + 8x - 20$

Application 9 : Quotient

Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

Pour tout réel x on a : $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{u(x)}}{\boldsymbol{v(x)}}$ avec :

$u(x) = x^2 - x + 1$	$v(x) = x^2 + 1$ avec $v(x) \neq 0$
$u'(x) = 2x - 1$	$v'(x) = 2x$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}}$$
$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+1) - 2x(x^2 - x + 1)}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - x^2 - 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Application 10 : Inverse

Dériver la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$ on a :

$f(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{v(x)}}$ avec :
$v(x) = x^2$
$v'(x) = 2x$

$$f'(x) = -\frac{\boldsymbol{v'(x)}}{\boldsymbol{(v(x))^2}}$$
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2)^2} \qquad (*)$$
$$f'(x) = -\frac{2x}{x^4}$$
$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$(*)$ Normalement pour étudier la fonction f on doit s'arrêter là.

Application 11 : Puissance 3 (composée)

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)^3$$

Pour tout réel x on a :

$f(x) = (2x+1)^3 = \big(\boldsymbol{u(x)}\big)^3$ avec :

$u(x) = 2x + 1$	$g(x) = x^3$
$u'(x) = 2$	$g'(x) = 3x^2$

$\boldsymbol{f'(x) = 3u'(x)\big(u(x)\big)^2}$
$f'(x) = 3 \times 2 \times (2x+1)^2$
$f'(x) = 6(2x+1)^2$

Application 12 : Racine (composée)

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

Pour tout réel x on a :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\boldsymbol{u(x)}}$ avec :

$u(x) = x^2 + 5$	$g(x) = \sqrt{x}$
$u'(x) = 2x$	$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

V. Etude de fonction

Application 12 : Fonction polynôme du second degré

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2x^2 - 5x + 1$$

Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

1ère étape : Calculer sa fonction dérivée.
Pour tout réel x, $h'(x) = 4x - 5$.
2ème étape : Etudier le signe de la dérivée
h' est une fonction affine.
On doit étudier le signe de $h'(x)$:
On résout $h'(x) = 0$
$4x - 5 = 0$
$4x = 5$
$x = \frac{5}{4}$
3ème étape :

x	$-\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		↘	$-\frac{17}{8}$	↗	

$m = 4 > 0$

Application 13 : Fonction polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2$$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[-2\,;4]$.

1ère étape : Calculer sa fonction dérivée.
La fonction f est dérivable sur $[-2\,;4]$ et
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$$
2ème étape : Etudier le signe de la dérivée
La fonction f' est une fonction trinôme du second degré avec $a = 3, b = -3$ et $c = -6$
On résout alors l'équation $3x^2 - 3x - 6 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6)$
$= 9 + 72$
$= 81 > 0$
et $\sqrt{\Delta} = 9$
L'équation admet deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{3-9}{2\times 3}$	$x_2 = \frac{3+9}{2\times 3}$
$x_1 = \frac{-6}{6}$	$x_2 = \frac{12}{6}$
$x_1 = -1 \in [-2\,;4]$	$x_2 = 2 \in [-2\,;4]$

3ème étape : On résume les signes et les variations dans un même tableau :

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$5{,}5$	↘	-8	↗	**18**

$a > 0$

Comme $a > 0$, son signe est à l'extérieur des racines.

2. Déterminer les extremums de f sur $[-2\,;4]$.

- Le minimum de f sur $[-2\,;4]$ est égal à -8 atteint en $x = 2$
- Le maximum de f sur $[-2\,;4]$ est égal à 18 atteint en $x = 4$

3. Déterminer un encadrement de f sur $[-2\,;4]$.

Pour tout $x \in [-2\,;4]$, $-8 \leq f(x) \leq 18$.

Signe de $f'(x)$ et variation de f :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est strictement croissante sur I.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est strictement décroissante sur I.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est constante sur I.

Extremums locaux :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I.
- Dire que $f(a)$ est un **minimum local** de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant a tel que, pour tout nombre réel x de J on a : $f(x) \geq f(a)$.
- Dire que $f(b)$ est un **maximum local** de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant b tel que, pour tout nombre réel x de J on a : $f(x) \leq f(b)$.
- On appelle **extremum local** un minimum local ou un maximum local.

Extremums locaux et nombre dérivé :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ (c'est à dire $f(x_0)$) tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I, alors $f'(x_0) = 0$.
La courbe C représentative de la fonction f admet une **tangente horizontale** au point d'abscisse x_0.

Signe de la dérivée et extremums :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I
Si la dérivée f' **s'annule et en change de signe** en x_0 alors f présente un extremum local en x_0.

Méthode : Etude de fonctions :

Pour étudier une fonction, il faut, si nécessaire :
1ère étape : Calculer sa fonction dérivée.
2ème étape : Etudier le signe de la dérivée
Si la fonction dérivée est :
- Une fonction affine : signe du coefficient directeur m à droite du zéro.
- Une fonction polynôme du second degré :
  - Si $\Delta > 0$: signe de a à l'extérieur des racines.
  - Si $\Delta = 0$: signe de a sur tout l'intervalle sauf α.
  - Si $\Delta < 0$: signe de a sur tout l'intervalle.
- Une autre fonction : On résout les inéquations : $f'(x) > 0$ et $f'(x) < 0$.

3ème étape : On résume les signes et les variations dans un même tableau.

Remarque : Il ne faut pas oublier de calculer les images.