Chapitre : Nombres complexes

Partie 1 :

Exercice 1 : Partie réelle et partie imaginaire

Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 5 + 3i$

$\boldsymbol{Re(z) = 5}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = 3}$

b) $z = 2 - 4i$

$\boldsymbol{Re(z) = 2}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -4}$

c) $z = -7 - 6i$

$\boldsymbol{Re(z) = -7}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -6}$

d) $z = -i$

$\boldsymbol{Re(z) = 0}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -1}$

e) $z = 12$

$\boldsymbol{Re(z) = 12}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = 0}$

f) $z = -\frac{3}{4}i + 5$

$\boldsymbol{Re(z) = 5}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -\frac{3}{4}}$

Exercice 2 : Egalité de deux nombres complexes

Dans chaque cas, déterminer les nombres réels a et b tels que :

a) $(2a + 1) - 3i = 5 + (2 - b)i$

$$\begin{cases} 2a + 1 = 5 \\ -3 = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$$

b) $(-a + 1) + (2b + 1)i = -3i$

$$\begin{cases} -a + 1 = 0 \\ 2b + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

c) $(a + 3) + (b - 3)i = 6$

$$\begin{cases} a + 3 = 6 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$$

d) $(-2a + 3) + (2 - 3b)i = 5 - 7i$

$$\begin{cases} -2a + 3 = 5 \\ 2 - 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 : Sommes et produits dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 4 - 2i + (-2) - 5i = 2 - 7i}$
b)	$\boldsymbol{2z_1 - 4z_2 = 2(4 - 2i) - 4(-2 - 5i) = 8 - 4i + 8 + 20i = 16 + 16i}$
c)	$\boldsymbol{z_1 \times z_2 = (4 - 2i)(-2 - 5i) = -8 - 20i + 4i + 10i^2 = -18 - 16i}$ **(car** $\boldsymbol{i^2 = -1}$**)**
d)	$\boldsymbol{{z_2}^2 = (-2 - 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = -21 + 20i}$ **(car** $\boldsymbol{i^2 = -1}$**)**
e)	$\boldsymbol{z_1^3 = (4 - 2i)^3 = (4 - 2i)(16 - 16i + 4i^2) = (4 - 2i)(12 - 16i) = 48 - 64i - 24i + 32i^2 = 16 - 88i}$
f)	$\boldsymbol{(-2 - z_1)(3 - 4z_2) = (-2 - (4 - 2i))(3 - 4(-2 - 5i)) = (-6 + 2i)(11 + 20i)}$ $\boldsymbol{= -66 - 120i + 22i + 40i^2 = -106 - 98i}$

Exercice 4 : Développer

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i}$
b)	$\boldsymbol{(-4 - i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i}$
c)	$\boldsymbol{(4 - 2i)(4 + 2i) = 16 - 4i^2 = 16 + 4 = 20}$

Exercice 5 : Développer

Soit les nombres complexes $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, mettre sous la forme algébrique $a + bi$ le nombre complexe :

$$\boldsymbol{1 + z + z^2 = 1 + -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}i^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0}$$

Exercice 6 : Conjugué

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - i$

$\boldsymbol{\bar{z} = 1 + i}$

b) $z = i + 2$

$\boldsymbol{\bar{z} = -i + 2 = 2 - i}$

c) $z = 3i$

$\boldsymbol{\bar{z} = -3i}$

d) $z = 3 - 2i$

$\boldsymbol{\bar{z} = 3 + 2i}$

e) $z = 5i - 4$

$\boldsymbol{\bar{z} = -5i - 4 = -4 - 5i}$

f) $z = -12$

$\boldsymbol{\bar{z} = -12}$

Exercice 7 : Conjugué

On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - i$.

1. a) Donner la forme algébrique de $z_1 + z_2$, puis de $\overline{z_1 + z_2}$.

$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 1 + i + 3 - i = 4}$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = 4}$

b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ puis de $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.

$\boldsymbol{\overline{z_1} = 1 - i}$ **et** $\boldsymbol{\overline{z_2} = 3 + i}$
$\boldsymbol{\overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - i + 3 + i = 4}$

c) Comparer les résultats obtenus.

$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

2. a) Donner la forme algébrique de $z_1 z_2$, puis de $\overline{z_1 z_2}$.

$\boldsymbol{z_1 z_2 = (1 + i)(3 - i) = 3 - i + 3i - i^2 = 4 + 2i}$
$\boldsymbol{\overline{z_1 z_2} = 4 - 2i}$

b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$\boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (1 - i)(3 + i) = 3 + i - 3i - i^2 = 4 - 2i}$

c) Comparer les résultats obtenus.

$\boldsymbol{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}}$

3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont quatre nombres réels.

$\boldsymbol{z_1 + z_2} = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2}} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1}} = a_1 - b_1 i$ **et** $\boldsymbol{\overline{z_2}} = a_2 - b_2 i$
$\boldsymbol{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

$\boldsymbol{z_1 z_2} = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$
$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
$\boldsymbol{\overline{z_1 z_2}} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
$\boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i)$
$= a_1 a_2 - a_1 b_2 i - a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
$\boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}}$

Exercice 8 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -4 - i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

Méthode : **On multiplie le numérateur et le dénominateur par le nombre complexe conjugué du dénominateur.**
Rappel : **Si** $\boldsymbol{z = a \pm bi}$ **alors** $\boldsymbol{z\bar{z} = a^2 + b^2}$.

a)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i}$
b)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-4-i} = \frac{-4+i}{(-4)^2+1^2} = -\frac{4}{17} + \frac{1}{17} i}$
c)	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-4-i} = \frac{(2-3i)(-4+i)}{(-4)^2+1^2} = \frac{-8+2i+12i-3i^2}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17} i}$
d)	$\boldsymbol{\frac{1}{{z_1}^2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13} i\right)^2 = \frac{4}{169} + \frac{12}{169} i + \frac{9}{169} i^2 = -\frac{5}{169} + \frac{12}{169} i}$
e)	$\boldsymbol{\frac{1}{{z_2}^2} = \left(\frac{1}{z_2}\right)^2 = \left(-\frac{4}{17} + \frac{1}{17} i\right)^2 = \frac{16}{289} - \frac{8}{289} i + \frac{1}{289} i^2 = \frac{15}{289} - \frac{8}{289} i}$
f)	$\boldsymbol{\frac{1+z_1}{1-z_2} = \frac{3-3i}{-3-i} = \frac{(3-3i)(-3+i)}{(-3)^2+1^2} = \frac{-9+3i+9i-3i^2}{10} = -\frac{6}{10} + \frac{12}{10} i = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5} i}$

Exercice 9 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = -1 - 2i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_1} = \cdots = \frac{2}{29} + \frac{5}{29} i}$
b)	$\boldsymbol{\frac{-2}{z_2} = \cdots = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} i}$
c)	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \cdots = \frac{8}{5} + \frac{9}{5} i}$
d)	$\boldsymbol{\frac{1+z_1}{1-z_2} = \cdots = -\frac{1}{2} - 2i}$

Exercice 10 : Résoudre une équation dans ℂ

Résoudre dans ℂ les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique.

a)	$(1+3i)z+2-4i=0 \Leftrightarrow z=\frac{-2+4i}{1+3i} \Leftrightarrow z=\frac{(-2+4i)(1-3i)}{1^2+3^2} \Leftrightarrow z=\frac{-2+6i+4i-12i^2}{10} \Leftrightarrow z=1+i$
b)	$(-4-i)z+3-5i \Leftrightarrow z=\frac{-3+5i}{-4-i} \Leftrightarrow z=\frac{(-3+5i)(-4+i)}{(-4)^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{12-3i-20i+5i^2}{17} \Leftrightarrow z=\frac{7}{17}-\frac{23}{17}i$
c)	$7z-4i=-iz+5 \Leftrightarrow (7+i)z=5+4i \Leftrightarrow z=\frac{5+4i}{7+i} \Leftrightarrow z=\frac{(5+4i)(7-i)}{7^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{35-5i+28i-4i^2}{50} \Leftrightarrow z=\frac{39}{50}+\frac{23}{50}i$

Exercice 11 : Résoudre une équation dans ℂ

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation :

a) $\frac{z+1}{z-1}=1+i$ b) $\frac{z-2i}{z+3}=2-i$

Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}-\{1\}$ on a : $\frac{z+1}{z-1}=1+i \Leftrightarrow z+1=(1+i)(z-1)$ $\Leftrightarrow z+1=z-1+iz-i \Leftrightarrow -iz=-2-i$ $\Leftrightarrow z=-2i-i^2 \Leftrightarrow z=1-2i$	**Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}-\{3\}$ on a :** $\frac{z-2i}{z+3}=2-i \Leftrightarrow z-2i=(2-i)(z+3)$ $\Leftrightarrow z-2i=2z+6-iz-3i \Leftrightarrow (-1+i)z=6-i$ $\Leftrightarrow z=\frac{6-i}{-1+i} \Leftrightarrow z=\frac{(6-i)(-1-i)}{(-1)^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{-6-6i+i+i^2}{2}$ $\Leftrightarrow z=-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}i$

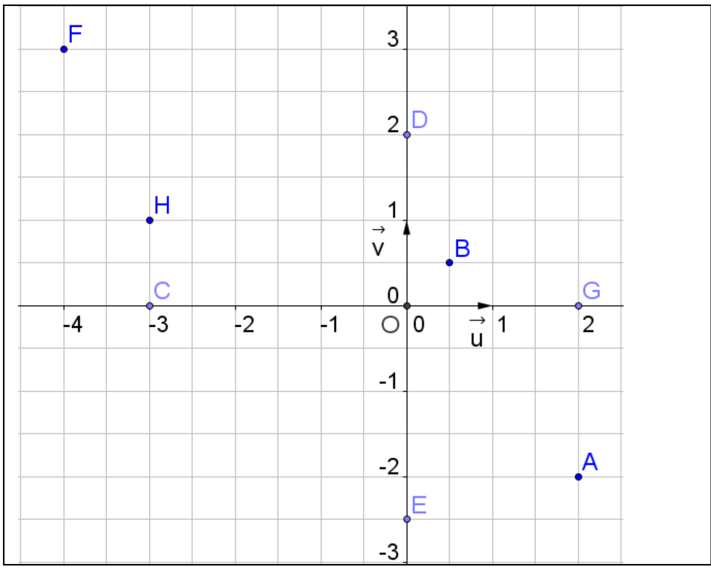
Exercice 12 : Résoudre une équation dans ℂ

Déterminer les solutions complexes z_1 et z_2 tels que :

a) $\begin{cases} 2z_1+z_2=4 \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z_1+z_2=i \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ -2iz_1+4-2z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ (-2-2i)z_1=-4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{-4}{-2-2i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{-4(-2+2i)}{(-2)^2+2^2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{8}{8}-\frac{8}{8}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2(1-i) \\ z_1=1-i \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=2+2i \\ z_1=1-i \end{cases}$	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+z_2=i \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+2iz_1=i \\ z_2=2iz_1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (2+2i)z_1=i \\ z_2=2iz_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{i}{(2+2i)} \\ z_2=2iz_1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{i(2-2i)}{8} \\ z_2=2iz_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ z_2=2i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{cases}$

Exercice 13 : Affixe



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$, placer les points d'affixes :

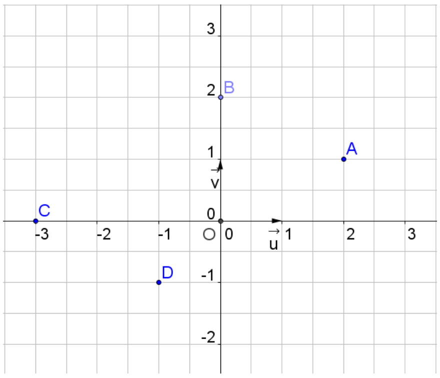
a) $z_A=2-2i$ b) $z_B=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

c) $z_C=-3$ d) $z_D=2i$

e) $z_E=-\frac{5}{2}i$ f) $z_F=-4+3i$

g) $z_G=2$ h) $z_H=-3+i$

Exercice 14 : Affixe de points

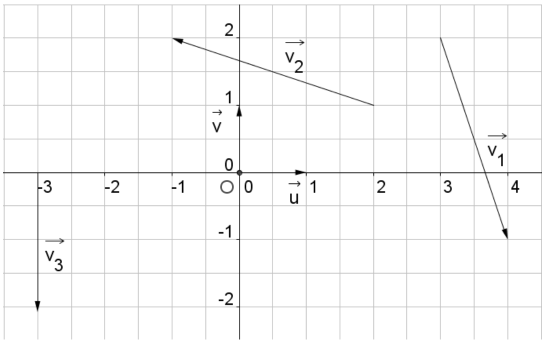


Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D représentés.

$\boldsymbol{z_A = 2 + i}$ **car** $\boldsymbol{A(2\,;1)}$
$\boldsymbol{z_B = 2i}$ **car** $\boldsymbol{B(0\,;2)}$
$\boldsymbol{z_C = -3}$ **car** $\boldsymbol{C(-3\,;0)}$
$\boldsymbol{z_D = -1 - i}$ **car** $\boldsymbol{D(-1\,;\,-1)}$

Exercice 15 : Affixe de vecteurs



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives z_1, z_2 et z_3 des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ représentés.

$\boldsymbol{z_1 = 1 - 3i}$ **car** $\boldsymbol{A(1\,;-3)}$
$\boldsymbol{z_2 = -3 + i}$ **car** $\boldsymbol{B(-3\,;1)}$
$\boldsymbol{z_C = -2i}$ **car** $\boldsymbol{C(0\,;-2)}$

Exercice 16 : Milieu

1. Soit les points A et B d'affixes respectives $2 + 3i$ et $-1 + 2i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?

On note $\boldsymbol{M}$ le milieu de $[AB]$ ainsi $\boldsymbol{z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+3i-1+2i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.}$

2. Soit les points A et B d'affixes respectives $3 - 2i$ et $4 + 5i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?

On note $\boldsymbol{M}$ le milieu de $[AB]$ ainsi $\boldsymbol{z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3-2i+4+5i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i.}$

Exercice 17 : Affixes et parallélogrammes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - \frac{3}{4}i, z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 5 + \frac{1}{2}i$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Vérifier sur un graphique.

$\boldsymbol{ABCD}$ **soit un parallélogramme** $\boldsymbol{\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C + z_A - z_B}$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow z_D = 5 + \frac{1}{2}i + 2 - \frac{3}{4}i - (-1 + 2i) \Leftrightarrow z_D = 8 - \frac{9}{4}i.}$

Exercice 18 : Affixes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i, z_B = 4i, z_C = \frac{7}{2} + 2i$ et $z_D = \frac{3}{2} - i$.
   Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On conjecture en faisant une figure que $\boldsymbol{ABCD}$ semble être un parallélogramme.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4i - (-2 + i) = 4i + 2 - i = 2 + 3i}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \frac{7}{2} + 2i - \left(\frac{3}{2} - i\right) = \frac{7}{2} + 2i - \frac{3}{2} + i = 2 + 3i}$
Ainsi $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}}$ **donc $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme.**

2. On considère les quatre points P, Q, R et S d'affixes respectives $z_P = -1 + 2i, z_Q = -2 + 5i, z_R = 2 + 4i$ et $z_S = 3 + i$. Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$?

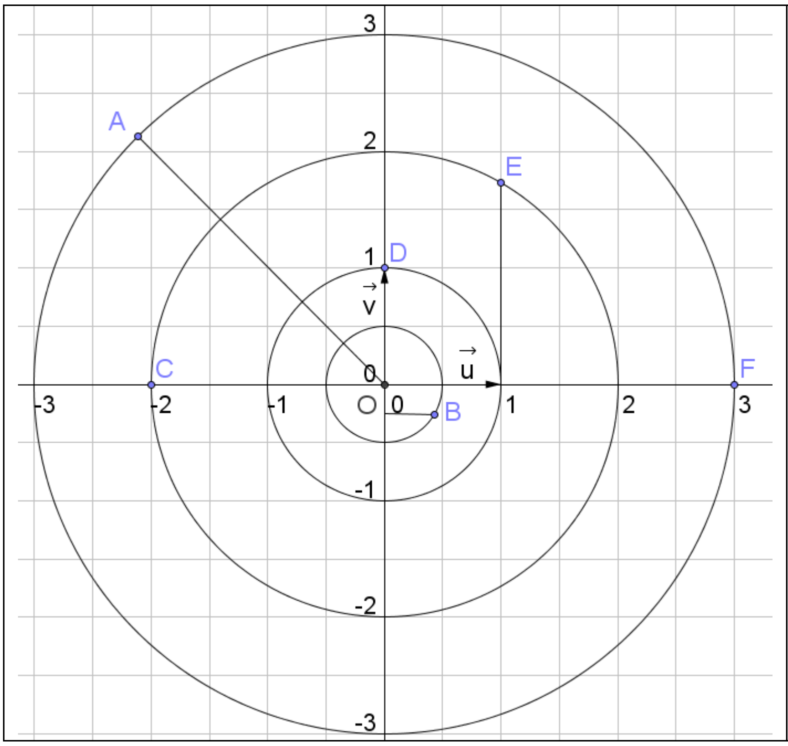
On conjecture en faisant une figure que $\boldsymbol{PQRS}$ semble être un parallélogramme.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{PQ}} = z_Q - z_P} = -2 + 5i - (-1 + 2i) = \boldsymbol{-2 + 5i + 1 - 2i = -1 + 3i}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{SR}} = z_R - z_S} = 2 + 4i - (3 + i) = \boldsymbol{2 + 4i - 3 - i = -1 + 3i}$
Ainsi $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{PQ}} = z_{\overrightarrow{SR}}}$ **donc $\boldsymbol{PQRS}$ est un parallélogramme.**

3. On considère les trois points E, F et G d'affixes respectives $z_E = 2 + 2i, z_F = 4 + i$, et $z_G = -4 + 5i$.
   Que peut-on dire des points E, F et G ?

On conjecture en faisant une figure que les points $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont alignés.
$$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = 4 + i - (2 + 2i) = 4 + i - 2 - 2i = 2 - i}$$
$$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{EG}} = z_G - z_E = -4 + 5i - (2 + 2i) = -6 + 3i = -3z_{\overrightarrow{EF}}}$$
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{EG}}$ sont colinéaires donc les points $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont alignés.

Partie 2 :

Exercice 1 : Placer des points à l'aide des coordonnées polaires



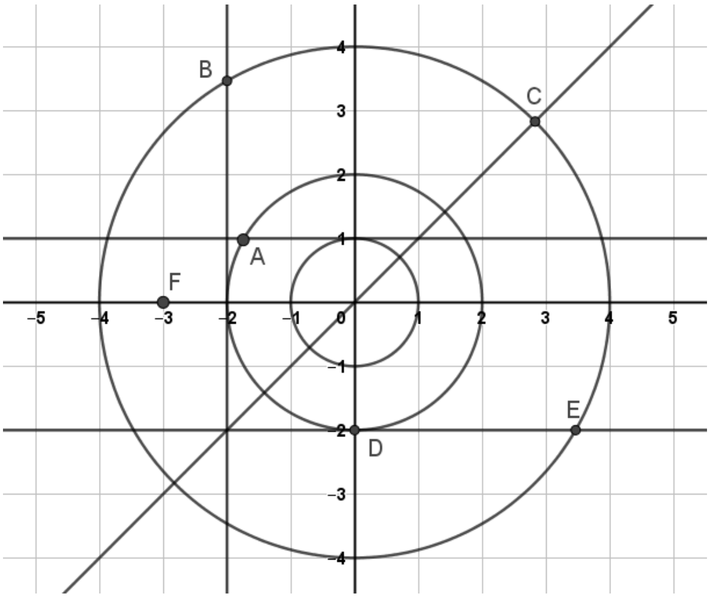
Placer dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D telle que :

a) z_A a pour module 3 et pour argument $\frac{3\pi}{4}$.
b) z_B a pour module $\frac{1}{2}$ et pour argument $-\frac{\pi}{6}$.
c) z_C a pour module 2 et pour argument π.
d) z_D a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.
e) z_E a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$.
f) z_F a pour module 3 et pour argument 0.

Exercice 2 : Lecture graphique de coordonnées polaires

Par lecture graphique, donner le module et un argument des affixes de chacun des points représentés ci dessous.

Point	Module	Argument
A	2	$\frac{5\pi}{6}$
B	4	$\frac{2\pi}{3}$
C	4	$\frac{\pi}{4}$
D	2	$-\frac{\pi}{2}$
E	4	$-\frac{\pi}{6}$
F	3	π



Exercice 3 : Affixes et distance

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Calculer la distance AB si A et B ont pour affixes respectives :

a. $z_A = 2 - i$ et $z_B = -1 + 3i$

$$\boldsymbol{z_B - z_A = -1 + 3i - (2 - i) = -3 + 4i}$$

$$\boldsymbol{AB = |z_B - z_A| = |-3 + 4i|} \textbf{ avec } \boldsymbol{a = -3} \textbf{ et } \boldsymbol{b = 4}$$
$$\boldsymbol{= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5}$$

b. $z_A = -3 + 5i$ et $z_B = 2 + 2i$

$$\boldsymbol{z_B - z_A = 2 + 2i - (-3 + 5i) = 5 - 3i}$$

$$\boldsymbol{AB = |z_B - z_A| = |5 - 3i|} \textbf{ avec } \boldsymbol{a = 5} \textbf{ et } \boldsymbol{b = -3}$$
$$\boldsymbol{= \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}}$$

c. $z_A = 1 + i$ et $z_B = 3 + 2i$

$$\boldsymbol{z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 2 + i}$$

$$\boldsymbol{AB = |z_B - z_A| = |2 + i|} \textbf{ avec } \boldsymbol{a = 2} \textbf{ et } \boldsymbol{b = 1}$$
$$\boldsymbol{= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}}$$

d. $z_A = 2$ et $z_B = -1 + i$

$$\boldsymbol{z_B - z_A = -1 + i - 2 = -3 + i}$$

$$\boldsymbol{AB = |z_B - z_A| = |-3 + i|} \textbf{ avec } \boldsymbol{a = -3} \textbf{ et } \boldsymbol{b = 1}$$
$$\boldsymbol{= \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}}$$

Exercice 4 : Triangle équilatéral

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes $z_A = 2i$ et $z_B = \sqrt{3} + i$. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

$$\boldsymbol{OA = |z_A - z_O| = |z_A| = |2i| = 2}$$

$$\boldsymbol{OB = |z_B| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2}$$

$$\boldsymbol{AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} + i - 2i| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2}$$

$\boldsymbol{OA = OB = AB}$ **donc le triangle** $\boldsymbol{OAB}$ **est équilatéral.**

Remarque $\boldsymbol{z_O = 0}$

Cours $\boldsymbol{|ki| = |k|}$

Exercice 5 : Nature d'un triangle

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i, z_B = -2 - 2i$ et $z_C = -4i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2. Calculer les distance AB, AC et BC.

$\boldsymbol{z_B - z_A = -2 - 2i - (2 - 2i) = -4}$ $\boldsymbol{AB = \lvert z_B - z_A\rvert = \lvert -4\rvert = 4}$	$\boldsymbol{z_C - z_A = -4i - (2 - 2i) = -2 - 2i}$ $\boldsymbol{AC = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$	$\boldsymbol{z_C - z_B = -4i - (-2 - 2i) = 2 - 2i}$ $\boldsymbol{BC = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$

3. Déterminer la nature du triangle ABC.

Ainsi $\boldsymbol{AC = BC}$ **donc le triangle** $\boldsymbol{ABC}$ **est isocèle en** $\boldsymbol{C}$**.**

$$\boldsymbol{AB^2 = 4^2 = 16}$$
$$\boldsymbol{AC^2 + BC^2 = 8 + 8 = 16}$$

De plus on remarque que $\boldsymbol{AB^2 = AC^2 + BC^2}$ **donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle** $\boldsymbol{ABC}$ **est rectangle en** $\boldsymbol{C}$**.**

<u>Conclusion :</u> Le triangle $\boldsymbol{ABC}$ **est isocèle rectangle en** $\boldsymbol{C}$**.**

Exercice 6 : Nature d'un triangle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$z_A = 5 + 3i \quad ; \qquad z_B = 6 + 6i\ ; \qquad z_c = -1 + 5i$$

a) Placer les points dans le repère.

b) Calculer les longueurs AB, AC et BC.

$\boldsymbol{z_B - z_A = 6+6i-(5+3i)}$ $\boldsymbol{= 6+6i-5-3i}$ $\boldsymbol{= 1+3i}$ $\boldsymbol{AB = \lvert z_B - z_A\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert 1+3i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{1^2+3^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{10}}$	$\boldsymbol{z_C - z_A = -1+5i-(5+3i)}$ $\boldsymbol{= -1+5i-5-3i}$ $\boldsymbol{= -6+2i}$ $\boldsymbol{AC = \lvert z_C - z_A\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert -6+2i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{(-6)^2+2^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{40}}$	$\boldsymbol{z_C - z_B = -1+5i-(6+6i)}$ $\boldsymbol{= -1+5i-6-6i}$ $\boldsymbol{= -7-i}$ $\boldsymbol{BC = \lvert z_C - z_B\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert -7-i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{(-7)^2+(-1)^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{50}}$

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

$\boldsymbol{BC^2 = 50}$ $\boldsymbol{AB^2 + AC^2 = 10 + 40 = 50}$ **On remarque que $\boldsymbol{CB^2 = AB^2 + AC^2}$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $\boldsymbol{ABC}$ est rectangle en $\boldsymbol{A}$.**

Exercice 7 : Nature d'un quadrilatère

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 3i\ ; z_B = 7+2i\ ;\ z_c = 2 - 3i\ ; z_D = -5 - 2i$$

a) Calculer les longueurs AB, BC, CD et DA.

$\boldsymbol{z_B - z_A = 7+2i-3i}$ $\boldsymbol{= 7-i}$ $\boldsymbol{AB = \lvert z_B - z_A\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert 7-i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{7^2+(-1)^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{50}}$	$\boldsymbol{z_C - z_B = 2-3i-(7+2i)}$ $\boldsymbol{= 2-3i-7-2i}$ $\boldsymbol{= -5-5i}$ $\boldsymbol{BC = \lvert z_C - z_B\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert -5-5i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{(-5)^2+(-5)^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{50}}$
$\boldsymbol{z_D - z_C = -5-2i-(2-3i)}$ $\boldsymbol{= -5-2i-2+3i}$ $\boldsymbol{= -7+i}$ $\boldsymbol{CD = \lvert z_D - z_C\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert -7+i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{(-7)^2+1^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{50}}$	$\boldsymbol{z_A - z_D = 3i-(-5-2i)}$ $\boldsymbol{= 3i+5+2i}$ $\boldsymbol{= 5+5i}$ $\boldsymbol{DA = \lvert z_A - z_D\rvert}$ $\boldsymbol{= \lvert 5+5i\rvert}$ $\boldsymbol{= \sqrt{5^2+5^2}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{50}}$

b) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$, en justifiant soigneusement.

$\boldsymbol{AB = BC = CD = DA}$ ainsi $\boldsymbol{ABCD}$ est un losange (quatre côtés égaux).

Exercice 8 : Cercle

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et Ω d'affixes :

$z_A = -3 - i, z_B = -2 + 4i$ et $z_\Omega = i$.

Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle de centre Ω dont on déterminera le rayon.

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{\Omega A}} = z_A - z_\Omega = -3-i-i = -3-2i}$ $\boldsymbol{\Omega A = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{\Omega B}} = z_B - z_\Omega = -2+4i-i = -2+3i}$ $\boldsymbol{\Omega B = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}}$
$\boldsymbol{\Omega A = \Omega B = \sqrt{13}}$ donc $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ appartiennent au cercle de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et de rayon $\boldsymbol{\sqrt{13}}$.	

Exercice 9 : Système d'équation trigonométrique

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ ces systèmes :

a. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$

b. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{6}}$

c. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{5\pi}{6}}$

d. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = -\frac{5\pi}{6}}$

e. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$

f. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{4}}$

g. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{3\pi}{4}}$

h. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{-3\pi}{4}}$

i. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$

j. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{3}}$

k. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

l. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{-2\pi}{3}}$

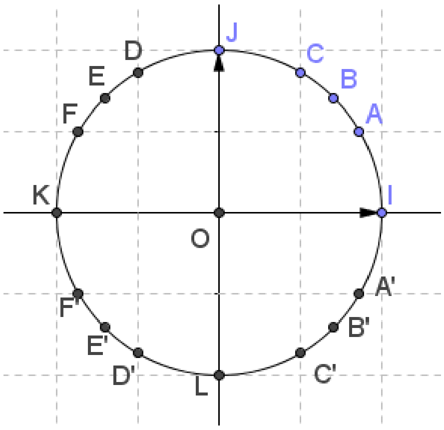
m. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

n. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{2}}$

o. $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = 0}$

p. $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{\theta = \pi}$

Exercice 10 : Affixes et mesure d'angle



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = -3 - 3i$.

1. Placer les points A et B.

On place le point $A(-1\ ;1)$ et le point $B(-3\ ;\ -3)$.

2. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$.

$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \arg z_A = \frac{3\pi}{4}$ **(modulo 2π)**

Justification :

$|z_A| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z_A|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z_A|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \arg z_B = -\frac{3\pi}{4}$ **(modulo 2π)**

Justification :

$|z_B| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z_B|} = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z_B|} = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

3. Que peut-on déduire pour le triangle OAB ?

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{6\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$ **(angle droit)**

Le triangle OAB est rectangle en O.

Exercice 11 : Affixes et mesure d'angle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i, z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)i$ et $z_C = \left(2\sqrt{3}+1\right)+3i$.

1. Placer les points A, B et C.

On place les points $A(1\ ;1), B\left(0\ ;1+\sqrt{3}\right)$ et $C(2\sqrt{3}+1\ ;\ 3)$.

2. Déterminer une mesure en radian de l'angle $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC}\right)$.

$\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = \arg z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{2\pi}{3}$ **(modulo 2π)**

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= i+\sqrt{3}i-(1+i) \\ &= i+\sqrt{3}i-1-i \\ &= -1+\sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{\left|z_{\overrightarrow{AB}}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

D'après le cercle trigonométrique on trouve : $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC}\right) = \arg z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{\pi}{6}$ **(modulo 2π)**

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AC}} &= z_C - z_A \\ &= 2\sqrt{3}+1+3i-(1+i) \\ &= 2\sqrt{3}+1+3i-1-i \\ &= 2\sqrt{3}+2i \end{aligned}$$

$$\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{\left|z_{\overrightarrow{AC}}\right|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'après le cercle trigonométrique on trouve : $\theta = \frac{\pi}{6}$

3. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right) = \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ **(angle droit)**

Ainsi le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 12 : Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants. En déduire la forme trigonométrique de z.

	Module :	**Argument :**	**Forme trigonométrique :**
	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	**θ tel que** $\begin{cases}\cos\theta = \frac{a}{\lvert z\rvert} \\ \sin\theta = \frac{b}{\lvert z\rvert}\end{cases}$	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
a) $z = 1+i$	$\lvert z\rvert = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ **Ainsi $\theta = \frac{\pi}{4}$**	$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
b) $z = -5i$	$\lvert z\rvert = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$ **Ou** $\lvert z\rvert = \lvert -5\rvert = 5$	$\begin{cases}\cos\theta = \frac{0}{5} = 0 \\ \sin\theta = \frac{-5}{5} = -1\end{cases}$ **Ainsi $\theta = -\frac{\pi}{2}$**	$z = 5\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$
<u>**Remarque :**</u> **z est un imaginaire pour avec $Im(z) < 0 \Leftrightarrow arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$**			
c) $z = -1$	$\lvert z\rvert = \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1$ **Ou** $\lvert z\rvert = \lvert -1\rvert = 1$	$\begin{cases}\cos\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin\theta = \frac{0}{1} = 0\end{cases}$ **Ainsi $\theta = \pi$**	$z = \cos\pi + i\sin\pi$
<u>**Remarque :**</u> **z est un réel strictement négatif $\Leftrightarrow arg(z) = \pi\ \ [2\pi]$**			
d) $z = 1+i\sqrt{3}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$	$\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ **Ainsi $\theta = \frac{\pi}{3}$**	$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

e) $z=\sqrt{3}+i$	$\|z\|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{\pi}{6}$	$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
f) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$	$\|z\|=1$	$\theta=\frac{\pi}{4}$	$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$
g) $z=1-i$	$\|z\|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=-\frac{\pi}{4}$	$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$
h) $z=2+2i$	$\|z\|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{\pi}{4}$	$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
i) $z=-1+i\sqrt{3}$	$\|z\|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$	$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{2\pi}{3}$	$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
j) $z=2i$	$\|z\|=\sqrt{0^2+2^2}=2$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{0}{2}=0\\ \sin\theta=\frac{2}{2}=1\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{\pi}{2}$	$z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
<u>Remarque :</u> z est un imaginaire pour avec $Im(z)>0\Leftrightarrow arg(z)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$			
k) $z=3$	$\|z\|=\sqrt{3^2+0^2}=3$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{3}{3}=1\\ \sin\theta=\frac{0}{3}=0\end{cases}$ Ainsi $\theta=0$	$z=3(\cos 0+i\sin 0)$
<u>Remarque :</u> z est un réel strictement positif $\Leftrightarrow arg(z)=0\quad[2\pi]$			
l) $z=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$ $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	$\|z\|=$ $\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=$ $\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$	$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{-5\pi}{6}$	$z=\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$
m) $z=-1+i$	$\|z\|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=\frac{3\pi}{4}$	$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
n) $z=2-2i$	$\|z\|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=$ $2\sqrt{2}$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=-\frac{\pi}{4}$	$z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$
o) $z=\sqrt{3}-i$	$\|z\|=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=2$	$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$ Ainsi $\theta=-\frac{\pi}{6}$	$z=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$
p) $z=-7i$	$\|z\|=7$	$\theta=-\frac{\pi}{2}$	$z=7\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

Exercice 13 : Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ.

Ecrire z sous la forme algébrique $a+bi$ dans les cas suivants :

	$z = r(cos(\theta) + \text{isin}(\theta))$ et $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$
a) $r = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$	$z = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
b) $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$	$z = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$
c) $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$	$z = \frac{1}{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
d) $r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{4}$	$z = cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
e) $r = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$	$z = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
f) $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$	$z = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$
g) $r = 1$ et $\theta = \frac{7\pi}{3}$	$z = cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
h) $r = 4$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$	$z = 4\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
i) $r = 3$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$	$z = 3\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
j) $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$	$z = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(0 - i) = -2i$
k) $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pi$	$z = \frac{1}{2}\left(cos(\pi) + i\,sin(\pi)\right) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$
l) $r = \frac{1}{3}$ et $\theta = \frac{7\pi}{6}$	$z = \frac{1}{3}\left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$
m) $r = 4$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$	$z = 4\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} - 2i$
n) $r = 2\sqrt{3}$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$	$z = 2\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} - 3i$
o) $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$	$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 + i$
p) $r = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$	$z = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Exercice 14 : Nature d'un triangle

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

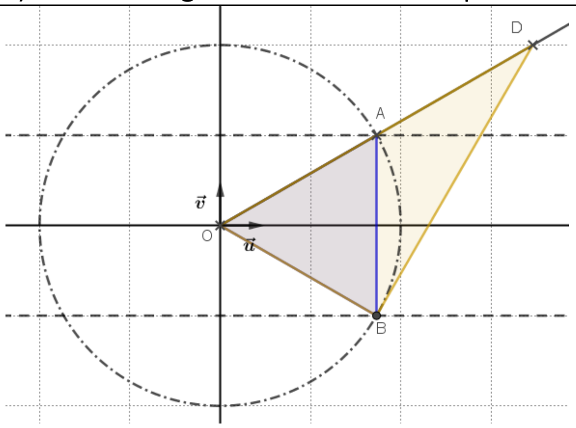
On prendra 1 cm pour unité graphique. Soient A, B et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2\sqrt{3} + 2i\,;\; z_B = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_D = 4\sqrt{3} + 4i.$$

1) Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

$\lvert z_A\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{4 \times 3 + 4}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{16} = 4$ **Soit** $\theta = \arg(z_A)$**, on a** $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\lvert z_A\rvert} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\lvert z_A\rvert} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ **D'après le cercle trigonométrique on a :** $\theta = \frac{\pi}{6}$ **La forme trigonométrique de z_A est :** $z_A = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$\lvert z_B\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{4 \times 3 + 4}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{16} = 4$ **Soit** $\theta = \arg(z_A)$**, on a** $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\lvert z_B\rvert} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{\lvert z_B\rvert} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ **D'après le cercle trigonométrique on a :** $\theta = -\frac{\pi}{6}$ **La forme trigonométrique de z_B est :** $z_B = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) Faire une figure et construire les points A et B. Expliquer sur la copie votre construction.



$|z_A| = 4$ donc $OA = 4$.
Le point A est donc sur le cercle de centre O et de rayon 4.
$Im(z_A) = \ 2$ donc l' ordonnée de A est 2.
A est donc l'un des deux points sur le cercle de centre O et de rayon 4, qui a pour ordonnée 2.
Comme $Re(z_A) = 2\sqrt{3}$, on a $Re(z_A) > 0$.
Donc A est le point situé le plus à droite.

$|z_B| = 4$ donc $OB = 4$.
Le point B est donc sur le cercle de centre O et de rayon 4.
$Im(z_B) = -2$ donc l' ordonnée de B est -2.
B est donc l'un des deux points sur le cercle de centre O et de rayon 4, qui a pour ordonnée -2 .
Comme $Re(z_B) = 2\sqrt{3}$, on a $Re(z_B) > 0$.
Donc B est le point situé le plus à droite.

3) Démontrer que OAB est un triangle équilatéral.

$OA = \ \|z_A\| = 4$	$OB = \ \|z_B\| = 4$	$AB = \|z_B - z_A\|$ $AB = \ \left\|2\sqrt{3} - 2i \ - \left(2\sqrt{3} + \ 2i\right)\right\|$ $AB = \left\|2\sqrt{3} - 2i - 2\sqrt{3} - 2i\right\|$ $AB = \|-4i\|$ $AB = \sqrt{0^2 + \ (-4)^2}$ $AB = \sqrt{16}$ $AB = \ 4$

$OA = OB = AB$ donc OAB est équilatéral.

4) Démontrer que les points O, A et D sont alignés.

O, A et D sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
On calcule les affixes des deux vecteurs et on vérifie que ces deux affixes sont proportionnelles.
L'affixe de $\overrightarrow{OA}$ est $z_{\overrightarrow{OA}} \ = z_A - z_O = z_A = 2\sqrt{3} + 2i$
L'affixe de $\overrightarrow{OD}$ est $z_{\overrightarrow{OD}} \ = z_D - z_O = z_D = 4\sqrt{3} + 4i$
On voit que $z_{\overrightarrow{OD}} \ = 2 \, z_{\overrightarrow{OA}}$ donc $\overrightarrow{OD} \ = 2\,\overrightarrow{OA}$
Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires , donc O, A et D sont alignés.

5) Construire le point D sur la figure. Expliquer sur la copie votre construction.

$\overrightarrow{OD} \ = 2\,\overrightarrow{OA}$ donc A est le milieu de [OD] ou D est le symétrique de O par rapport à A.

6) Démontrer que le triangle OBD est rectangle.

$OB = \ \|z_B\| = 4$ **(cf question 1)**	$OD = \ \|z_D\| = \|2\,z_A\| = \|2\|\,\|z_A\| = 2 \times 4 = 8$	$BD = \|z_D - z_B\|$ $BD = \ \left\|4\sqrt{3} + 4i \ - \left(2\sqrt{3} - \ 2i\right)\right\|$ $BD = \left\|4\sqrt{3} + 4i - 2\sqrt{3} + 2i\right\|$ $BD = \left\|2\sqrt{3} + 6i\right\|$ $BD = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + \ 6^2}$ $BD = \sqrt{4 \times 3 + 36}$ $BD = \ \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$OD^2 = \ 8^2 = 64$
$OB^2 + \ BD^2 = 4^2 + \ \sqrt{48}^2 \ = 16 + 48 = 64$
Donc : $OD^2 = \ OB^2 + \ BD^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, OBD est rectangle en B.

Exercice 15 : Nature d'un triangle

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C définies par :

$$z_A = 2 + 2i\ ;\quad z_B = -2 + 2i\ ;\quad z_C = -\sqrt{3} + i.$$

1) a) Déterminer les formes trigonométriques des nombres complexes z_A, z_B et z_C.

$z_A = 2 + 2i$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{2^2 + 2^2}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{4+4}$ $\lvert z_A\rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **Soit** $\theta = \arg(z_A)$**, on a** $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\lvert z_A\rvert} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\lvert z_A\rvert} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ **D'après le cercle trigonométrique on a :** $\theta = \frac{\pi}{4}$ $z_A = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	$z_B = -2 + 2i$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{4+4}$ $\lvert z_B\rvert = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ **Soit** $\theta = \arg(z_B)$**, on a** $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\lvert z_B\rvert} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\lvert z_B\rvert} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ **D'après le cercle trigonométrique on a :** $\theta = \frac{3\pi}{4}$ $z_B = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$	$z_C = -\sqrt{3} + i$ $\lvert z_C\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\lvert z_C\rvert = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$ $\lvert z_C\rvert = \sqrt{3+1}$ $\lvert z_C\rvert = \sqrt{4} = 2$ **Soit** $\theta = \arg(z_C)$**, on a** $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\lvert z_C\rvert} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\lvert z_C\rvert} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **D'après le cercle trigonométrique on a :** $\theta = \frac{5\pi}{6}$ $z_C = 2\sqrt{2}\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) Dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, placer les points A et B, et construire le point C, en laissant apparents les traits de construction.

On place facilement $A(2 ; 2)$ et $B(-2\ ;\ 2)$
$\lvert z_C\rvert = 2$ **donc** $OC = 2$ **Le point C est donc sur le cercle de centre O et de rayon 2.**
$Im(z_C) = 1$ **donc l' ordonnée de C est 1.**
C est donc l'un des deux points sur le cercle de centre O et de rayon 2, qui a pour ordonnée 1.
Comme $Re(z_C) = -\sqrt{3}$**, on a** $Re(z_C) > 0$ **donc A est le point situé le plus à gauche**

2) a) Calculer les longueurs AB, CA et CB.

$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$ $AB = \lvert -2 + 2i - (2 + 2i)\rvert$ $AB = \lvert -2 + 2i - 2 - 2i\rvert$ $AB = \lvert -4\rvert$ $AB = \sqrt{(-4)^2 + 0^2}$ $AB = \sqrt{16}$ $AB = 4$	$CA = \lvert z_A - z_C\rvert$ $CA = \lvert 2 + 2i - (-\sqrt{3} + i)\rvert$ $CA = \lvert 2 + 2i + \sqrt{3} - i\rvert$ $CA = \lvert 2 + \sqrt{3} + i\rvert$ $CA = \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$ $CA = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}$ $CA = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$	$CB = \lvert z_B - z_C\rvert$ $CB = \lvert -2 + 2i - (-\sqrt{3} + i)\rvert$ $CB = \lvert -2 + 2i + \sqrt{3} - i\rvert$ $CB = \lvert -2 + \sqrt{3} + i\rvert$ $CB = \sqrt{\left(-2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1^2}$ $CB = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1}$ $CB = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

$AB^2 = 4^2 = 16$
$CA^2 + CB^2 = \left(\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}\right)^2 = 8 + 4\sqrt{3} + 8 - 4\sqrt{3} = 16$
On a : $AB^2 = CA^2 + CB^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC **est rectangle en** C**.**

Exercice 16 : Nature d'un triangle

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B, et C d'affixes respectives :

$$z_A = 4 + 4i \qquad z_B = 4 - 4i \qquad z_C\ avec\ \lvert z_C\rvert = 4 \text{ et } \arg(z_C) = \frac{\pi}{3}$$

1) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
2) Déterminer la forme algébrique de z_C.
3) Placer A et B dans le repère, et construire C à la règle et au compas, en expliquant.

4) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 17 : Nature d'un quadrilatère

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1) On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$2z + 6i = 2 + iz$$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.

b) Déterminer la forme trigonométrique de z_1.

2) Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i,\quad z_B = -2 - 2i\ et\ z_C = -4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $OACB$? Justifier soigneusement

Exercice 18 : *BAC STI2D – France juin 2014*

On considère les deux nombres complexes :

- z a pour module 2 et pour argument $\frac{2\pi}{3}$.
- z' a pour module 2 et pour argument - $\frac{2\pi}{3}$.

1) La forme algébrique de z est égale à :

a) $-1 + i\sqrt{3}$ b) $1 + i\sqrt{3}$ c) $2 + i\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - i$

2) Le nombre complexe z' est le nombre complexe :

a) opposé de z b) inverse de z c) conjugué de z d) opposé du conjugué de z

3) Le nombre complexe $z \times z'$:

a) est un nombre réel b) est un nombre imaginaire pur

c) a pour module 2 d) est un nombre complexe dont un argument est $\frac{4\pi}{3}$

4) Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = i$ est :

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) - $\frac{\pi}{6}$

Exercice 19 : BAC STI2D – Antilles-Guyane juin 2014

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unités 2 cm.

Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

1. Donner les écritures algébriques de z, de $\bar{z}$ et de $\frac{1}{2}\bar{z}$.

$$\boldsymbol{z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i}$$

$$\boldsymbol{\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

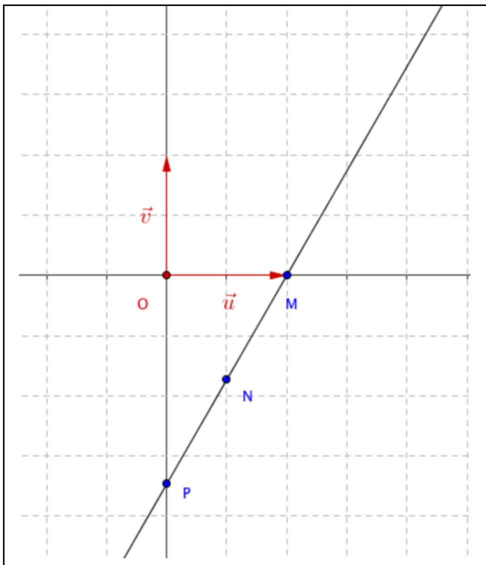
2. On considère le nombre complexe $p = \frac{2+\bar{z}}{2-\bar{z}}$

   a. Montrer que $p = -i\sqrt{3}$.

$$\boldsymbol{p = \frac{2+\bar{z}}{2-\bar{z}} = \frac{2+1-\sqrt{3}i}{2-(1-\sqrt{3}i)} = \frac{3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(3-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{3-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \frac{-4\sqrt{3}i}{4} = -i\sqrt{3}.}$$

   b. Les points M, N et P sont les points d'affixes respectives 1, $\frac{1}{2}\bar{z}$ et p.

   Placer ces trois points dans le repère. Justifier l'alignement de ces trois points.

	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{MP}} = z_P - z_M = -i\sqrt{3} - 1 = -1 - \sqrt{3}i}$ **$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{MP}} = 2z_{\overrightarrow{MN}}}$ ainsi les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{MN}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{MP}}$ sont colinéaires donc les points $\boldsymbol{M, N}$ et $\boldsymbol{P}$ sont alignés.**

<u>Exercice 20 : *BAC STI2D - Métropole juin 2017*</u>

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) <u>Proposition 1 :</u>

Le nombre complexe z de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3} + 6i$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives : z_A de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = z_A \times z_B$.

<u>Proposition 2 :</u> Le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

<u>Exercice 21 : *BAC STI2D - Métropole septembre2017*</u>

Dans le plan complexe muni d'une repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3)$ et par les points B et C d'affixes respectives : $z_B = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\ i$ et z_C de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

1) Soit z_A l'affixe du point A.

   a) Donner la forme algébrique de z_A .

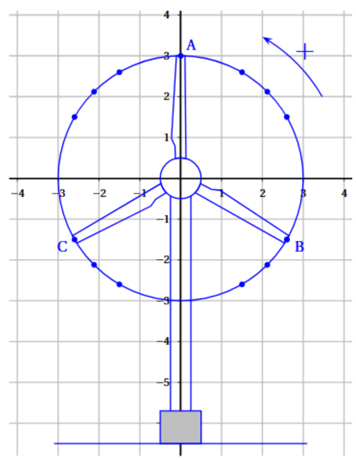
   b) Donner la forme trigonométrique de z_A .

2) Déterminer la forme trigonométrique de z_B

3) On admet que lorsque l'hélice tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct, les points A, B et C sont transformés respectivement en A'; B' et C' tels que :

- A' a pour affixe $z_{A'} = z_A \times i$
- B' a pour affixe $z_{B'} = z_B \times i$
- C' a pour affixe $z_{C'} = z_C \times i$

Déterminer la forme trigonométrique de $z_{C'}$



<u>Exercice 22 : *BAC STI2D - Antilles Guyane - juin 2016*</u>

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1) La forme algébrique du nombre complexe $\frac{1+2i}{3-i}$ est :

a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{10}i$ b) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$ c) $\frac{1}{8} + \frac{7}{8}i$ d) « Aucune des réponses a.-b.-c. ».

2) La forme trigonométrique du nombre complexe $2 - 2i\sqrt{3}$ est

a) $\left[4\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$ b) $\left[-4\,;\frac{\pi}{6}\right]$ c) $\left[4\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$ d) $\left[16\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$