Fiche méthode : Fonctions de référence

I. Fonction carré

Application 1 : Image

a. $8^2 = 64$
b. $(-6)^2 = 36$
c. $0^2 = 0$
d. $0{,}4^2 = 0{,}16$
e. $(-1{,}5)^2 = 2{,}25$
f. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
g. $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$
h. $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$
i. $\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25 \times 2 = 50$
j. $(10^{-4})^2 = 10^{-4\times2} = 10^{-8}$
k. $(2 \times 10^3)^2 = 4 \times 10^6$
l. $(3^5)^2 = 3^{5\times2} = 3^{10}$

Application 2 : Tableau de variations et encadrement

1. Sachant que $-2 \leq x \leq 4$, encadrer x^2.

x	-2		0		4
x^2	4	↘	0	↗	16

Le **minimum** de la fonction carré sur $[-2\,;\,4]$ est **0** atteint en $x = 0$.
Le **maximum** de la fonction carré sur $[-2\,;\,4]$ est **16** atteint en $x = 4$.
$\mathbf{0} \leq x^2 \leq \mathbf{16}$ **Attention au piège : Le minimum est 0.**
$x^2 \in [\mathbf{0}\,;\mathbf{16}]$

2. Sachant que $3 < x < 5$, encadrer x^2., encadrer x^2.

x	3		5
x^2	9	↗	25

Le **minimum** de la fonction carré sur l'intervalle $]3\,;5[$ est **9** atteint en $x = 3$
Le **maximum** de la fonction carré sur l'intervalle $]3\,;5[$ est **25** atteint en $x = 5$
$\mathbf{9} < x^2 < \mathbf{25}$
$x^2 \in]\mathbf{9}\,;\mathbf{25}[$

3. Sachant que $-8 < x < -\frac{2}{3}$, encadrer x^2.

x	-8		-2/3
x^2	64	↘	4/9

Le **minimum** de la fonction carré sur l'intervalle $]-8\,;-\frac{2}{3}[$ est $\frac{4}{9}$ atteint en $x = -\frac{2}{3}$
Le **maximum** de la fonction carré sur l'intervalle $]-8\,;-\frac{2}{3}[$ est **64** atteint en $x = -8$
$\frac{4}{9} < x^2 < \mathbf{64}$ **Attention au piège : minimum en 1er !!!**
$x^2 \in]\frac{4}{9}\ ;\mathbf{64}[$

Fonction carré :

La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2$$

Un carré est toujours **positif** dans $\mathbb{R}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Extremums :

Pour chercher des extremums d'une fonction, il est conseillé de dresser le tableau de variation de la fonction sur l'intervalle voulu.

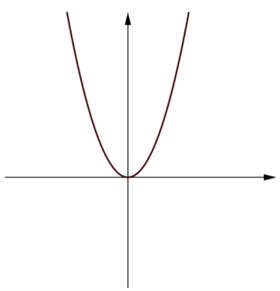
Attention :

Il y a par exemple ici des pièges. Quand l'intervalle contient un nombre négatif et un nombre positif, le minimum pour la fonction carré sera toujours 0.

Encadrement :

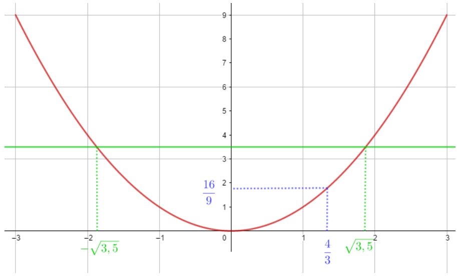
Pour encadrer une fonction sur un intervalle donné, il suffit de trouver le minimum et le maximum sur cet intervalle.

Courbe : Parabole



Application 3 : Représentation graphique de la fonction carré, images et antécédents

1. Dans un repère orthogonal (unité graphique : 3 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées), représenter graphiquement la fonction carré sur $[-3\,;3]$.
2. En laissant apparaître les traits de construction, indiquer graphiquement :
   a. comment déterminer l'image de $\frac{4}{3}$
   b. comment déterminer les antécédents de $3,5$



3. a. Quelles sont les valeurs exactes des antécédents de 3,5 ?

Les antécédents de 3,5 sont $-\sqrt{3{,}5}$ et $\sqrt{3{,}5}$.

b. De quelle équation ces nombres sont-ils solutions ?

Chercher des antécédents par la fonction f c'est résoudre l'équation $f(x) = k$
Ces nombres sont solutions de l'équation $x^2 = 3{,}5$.

Application 4 : Antécédents et équations

Résoudre les équations suivantes et en déduire les antécédents éventuels par la fonction carré.

$x^2 = 36 > 0$
$x = -\sqrt{36}$ ou $x = \sqrt{36}$
$x = -6$ ou $x = 6$
Les antécédents de 36 par la fonction carré sont : $-0{,}6$ et $0{,}6$.

$x^2 = -5 < 0$
Il n'y a pas d'antécédent de -5 par la fonction carré.

Equations :

- Si $a > 0$, $x^2 = a$ admet deux solutions réelles : $\boldsymbol{S} = \{-\sqrt{\boldsymbol{a}}\,;\sqrt{\boldsymbol{a}}\}$
- Si $a = 0$, $x^2 = a$ admet une unique solution : $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0}\}$
- Si $a < 0$, $x^2 = a$ n'admet pas de solution : $\boldsymbol{S} = \emptyset$

Méthode :
$(\textbf{Expression})^2 = a$
Expression$= -\sqrt{a}$ ou **Expression**$= \sqrt{a}$

Puis on résout les équations et on conclut par $S =$

Application 5 : Antécédents et équations

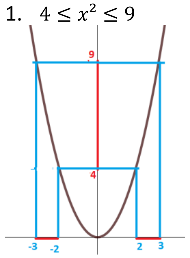
$(\mathbf{2x-1})^2 = 25$

$\mathbf{2x-1} = -\sqrt{25}$	ou	$\mathbf{2x-1} = \sqrt{25}$
$2x - 1 = -5$	ou	$2x - 1 = 5$
$2x = -5 + 1$	ou	$2x = 5 + 1$
$2x = -4$	ou	$2x = 6$
$x = -\frac{4}{2}$	ou	$x = 3$
$x = -2$	ou	$x = 3$

$S = \{-2\,;3\}$

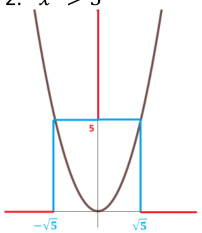
Application 6 : Dans chacun des cas suivants**, à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré**, déterminer pour quelles valeurs de x on a :

1. $4 \leq x^2 \leq 9$



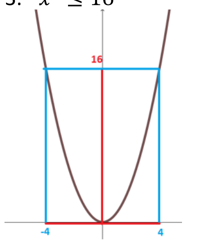
$x \in [-3\,;\,-2] \cup [2\,;3]$

2. $x^2 > 5$



$x \in]-\infty\,;\,-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}\,;\,+\infty[$

3. $x^2 \leq 16$



$x \in [-4\,;4]$

II. Fonction cube

Application 7 : Image et antécédent

- L'image de 3 par la fonction cube est : 27
- L'image de 0 par la fonction cube est : 0
- L'image de -6 par la fonction cube est : -216
- L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction cube est : $2\sqrt{2}$
- L'antécédent de 2 par la fonction cube est : $\sqrt[3]{2}$
- L'antécédent de 125 par la fonction cube est : 5
- L'antécédent de -8 par la fonction cube est : -2
- L'antécédent de -5 par la fonction cube est : $-\sqrt[3]{5}$

Application 8 : Tableau de variations et encadrement

a) $4 \leq x < 6$

x	4	6
x^3	64 ↗	216

$64 \leq x^3 < 216$

b) $-3 < x \leq 4$

x	-3	4
x^3	-27 ↗	64

$-27 < x^3 \leq 64$

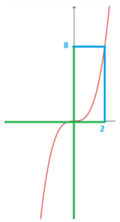
Application 9 : Antécédents et équations

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^3 = 8$	2) $x^3 = 5$
$x = 2$ $S = \{2\}$	$x = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$ $S = \{\sqrt[3]{5}\}$
4) $x^3 = -10$	**5) $x^3 = -27$**
$x = -\sqrt[3]{10} \approx -2{,}15$ $S = \{-\sqrt[3]{10}\}$	$x = -3$ $S = \{-3\}$

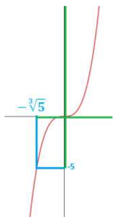
Application 10 : Résoudre, en faisant un schéma et une lecture graphique si besoin :

1) $x^3 < 8$



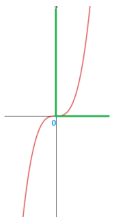
$S =]-\infty\,; 2[$

2) $x^3 \geq -5$



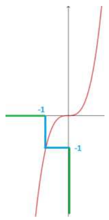
$S = [-\sqrt[3]{5}\,; +\infty[$

3) $x^3 > 0$



$S =]0\,; +\infty[$

4) $x^3 \leq -1$



$S =]-\infty\,; -1]$

Fonction cube :

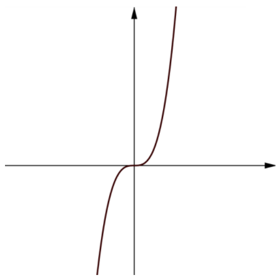
La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

Courbe :



Equation et inéquation :

Soit k un réel.

- L'équation $x^3 = k$ admet une unique solution : $\boldsymbol{S} = \{\sqrt[3]{\boldsymbol{k}}\}$
- L'inéquation $x^3 < k$ a pour ensemble de solution l'intervalle : $\boldsymbol{S} =]-\infty\,; \sqrt[3]{\boldsymbol{k}}[$

III. Fonction inverse

Application 11 : Image et antécédent

x	$\frac{2}{9}$	200	$2{,}5 = \frac{5}{2}$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{1}{100} = 0{,}01$
$\frac{1}{x}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{200} = 0{,}005$	$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$0{,}8$ $\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$	100

Application 12 : Tableau de variations et encadrement

1. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geq 2$?

x	2	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

$\frac{1}{x} \in]0\,; \frac{1}{2}[$

2. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x < -4$?

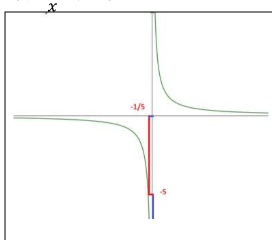
x	$-\infty$	-4
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{x} \in]-\frac{1}{4}\,; 0[$

Application 13 : Inéquations avec la fonction inverse

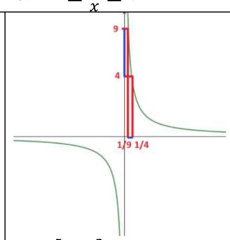
En s'aidant, de l'hyperbole représentative de la fonction inverse, résoudre chacune des inéquation (déterminer à quel intervalle ou réunion d'intervalle appartient x) :

a. $\frac{1}{x} < -5$



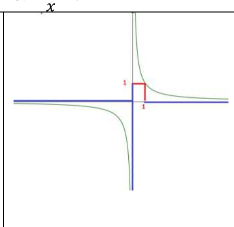
$S =]-0{,}2\,; 0[$

b. $4 \leq \frac{1}{x} \leq 9$



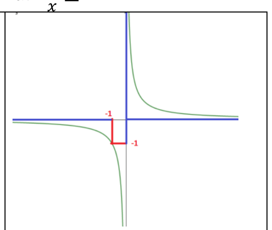
$S = \left[\frac{1}{9}\,; \frac{1}{4}\right]$

c. $\frac{1}{x} < 1$



$S =]-\infty\,; 0[\cup]1\,; +\infty[$

d. $\frac{1}{x} \geq -1$



$S =]-\infty\,; -1] \cup]0\,; +\infty[$

Fonction inverse :

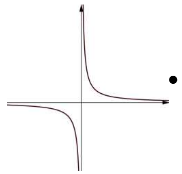
La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	0

Courbe : Hyperbole



Equations :

- Si $k = 0, \frac{1}{x} = k$ a pour solution : $\boldsymbol{S} = \emptyset$
- Si $k \neq 0, \frac{1}{x} = k$ a pour solution : $\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}}\right\}$

IV. Fonction racine carrée

Application 14 : Image

x	0	3	9	-5	$\frac{4}{9}$	8
$\sqrt{x}$	$\mathbf{0}$	$\sqrt{3}$	$\mathbf{3}$	[redacted]	$\frac{2}{3}$	$2\sqrt{2}$

Application 15 : Equations et inéquations

a) $\sqrt{x} = 0$ — $S = \{0\}$
b) $\sqrt{x} = 7$ — $S = \{49\}$
c) $2\sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4$ — $S = \{16\}$
d) $\sqrt{x} = -1$ — $S = \emptyset$
e) $\sqrt{x} < 2$ — $S = [0\,; 4[$
f) $\sqrt{x} > 5$ — $S =]25\,; +\infty[$
g) $\sqrt{x} \leq 6$ — $S = [0\,; 36]$
h) $\sqrt{x} \geq -2$ — $S = [0\,; +\infty[$

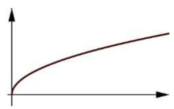
Fonction racine carrée :

La fonction racine carré est définie sur $]0\,; +\infty$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Courbe :



Equations :

- Si $k \geq 0$, $\sqrt{x} = k$ a pour solution : $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{k^2}\}$
- Si $k < 0$, $\sqrt{x} = k$ n'a pas de solution : $\boldsymbol{S} = \emptyset$