Chapitre : Suites (correction)

Compétence : Calcul de terme d'une suite

Exercice 1 : Suite définie par une fonction

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2$. Déterminer les termes u_0, u_1, u_2 et u_{15}.

$\boldsymbol{u_0 = 0^2 + 2 = 2}$	$\boldsymbol{u_1 = 1^2 + 2 = 3}$	$\boldsymbol{u_2 = 2^2 + 2 = 6}$	$\boldsymbol{u_{15} = 15^2 + 2 = 227}$

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2}n + 3$. Déterminer les termes d'indices 2, 3 et 7.

$\boldsymbol{v_2 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4}$	$\boldsymbol{v_3 = \frac{1}{2} \times 3 + 3 = \frac{9}{2}}$	$\boldsymbol{v_7 = \frac{1}{2} \times 7 + 3 = \frac{13}{2}}$

3. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{n+1}$. Calculer les cinq premiers termes.

$\boldsymbol{w_0 = \frac{1}{0+1} = 1}$	$\boldsymbol{w_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{w_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{w_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}}$	$\boldsymbol{w_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}}$

4. Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = (-1)^n$. Déterminer les termes a_0, a_1, a_2, a_{100} et a_{203}.

$\boldsymbol{a_0 = (-1)^0 = 1}$	$\boldsymbol{a_1 = (-1)^1 = -1}$	$\boldsymbol{a_2 = (-1)^2 = 1}$	$\boldsymbol{a_{100} = (-1)^{100} = 1}$	$\boldsymbol{a_{203} = (-1)^{203} = -1}$
On peut retenir que $(-1)^n = \begin{cases} \boldsymbol{1 \; si \; n \; est \; pair} \\ \boldsymbol{-1 \; si \; n \; est \; impair} \end{cases}$				

Exercice 2 : Suite définie par une fonction

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n^2 - 1$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

$\boldsymbol{u_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1}$	$\boldsymbol{u_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2}$	$\boldsymbol{u_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11}$

   b. Calculer le cinquième terme de la suite.

Le cinquième terme de la suite est $\boldsymbol{u_4 = 3 \times 4^2 - 1 = 3 \times 16 - 1 = 64 - 1 = 63}$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = -5n^2 + 2$.
   a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

$\boldsymbol{v_0 = -5 \times 0^2 + 2 = 2}$	$\boldsymbol{v_1 = -5 \times 1^2 + 2 = -3}$	$\boldsymbol{v_2 = -5 \times 2^2 + 2 = -18}$	$\boldsymbol{v_3 = -5 \times 3^2 + 2 = -43}$

   b. Calculer le huitième terme de la suite.

Le huitième terme de la suite est $\boldsymbol{v_7 = -5 \times 7^2 + 2 = -5 \times 49 + 2 = -245 + 2 = -243}$

Exercice 3 : Suite définie par récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$. Déterminer les termes u_1, u_2 et u_3.

$\boldsymbol{u_1 = 3u_0 - 2}$ $\boldsymbol{u_1 = 3 \times 3 - 2}$ $\boldsymbol{u_1 = 7}$	$\boldsymbol{u_2 = 3u_1 - 2}$ $\boldsymbol{u_1 = 3 \times 7 - 2}$ $\boldsymbol{u_1 = 19}$	$\boldsymbol{u_3 = 3u_2 - 2}$ $\boldsymbol{u_3 = 3 \times 19 - 2}$ $\boldsymbol{u_3 = 55}$

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 - v_n$. Déterminer les termes d'indices 1, 2, 3 et 5.

$\boldsymbol{v_1 = 1 - v_0}$ $\boldsymbol{v_1 = 1 - 2}$ $\boldsymbol{v_1 = -1}$	$\boldsymbol{v_2 = 1 - v_1}$ $\boldsymbol{v_2 = 1 - (-1)}$ $\boldsymbol{v_2 = 2}$	$\boldsymbol{v_3 = 1 - v_2}$ $\boldsymbol{v_3 = 1 - 2}$ $\boldsymbol{v_3 = -1}$	$\boldsymbol{v_4 = 1 - v_3}$ $\boldsymbol{v_4 = 1 - (-1)}$ $\boldsymbol{v_4 = 2}$	$\boldsymbol{v_5 = 1 - v_4}$ $\boldsymbol{v_5 = 1 - 2}$ $\boldsymbol{v_5 = -1}$
<u>Remarque :</u> Dans une suite définie par récurrence, il faut (généralement) calculer tous les termes précédents pour obtenir un terme d'indice donné.				

3. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 5, w_1 = \frac{13}{6}$ et $w_{n+2} = \frac{5}{6}w_{n+1} - \frac{1}{6}w_n$.

   Déterminer les termes w_2, w_3, w_4 et w_5.

$\boldsymbol{w_2 = \frac{5}{6}w_1 - \frac{1}{6}w_0}$ $\boldsymbol{w_2 = \frac{5}{6} \times \frac{13}{6} - \frac{1}{6} \times 5}$ $\boldsymbol{w_2 = \frac{35}{36}}$	$\boldsymbol{w_3 = \frac{5}{6}w_2 - \frac{1}{6}w_1}$ $\boldsymbol{w_3 = \frac{5}{6} \times \frac{35}{36} - \frac{1}{6} \times \frac{13}{6}}$ $\boldsymbol{w_3 = \frac{97}{216}}$	$\boldsymbol{w_4 = \frac{5}{6}w_3 - \frac{1}{6}w_2}$ $\boldsymbol{w_4 = \frac{5}{6} \times \frac{97}{216} - \frac{1}{6} \times \frac{35}{36}}$ $\boldsymbol{w_4 = \frac{275}{1296}}$	$\boldsymbol{w_5 = \frac{5}{6}w_4 - \frac{1}{6}w_3}$ $\boldsymbol{w_5 = \frac{5}{6} \times \frac{275}{1296} - \frac{1}{6} \times \frac{97}{216}}$ $\boldsymbol{w_5 = \frac{793}{7776}}$

Exercice 4 : Suite définie par récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3{u_n}^2 + 1$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

$\boldsymbol{u_0 = 1}$	$\boldsymbol{u_1 = 3{u_0}^2 + 1}$ $\boldsymbol{u_1 = 3 \times 1^2 + 1}$ $\boldsymbol{u_1 = 4}$	$\boldsymbol{u_2 = 3{u_1}^2 + 1}$ $\boldsymbol{u_2 = 3 \times 4^2 + 1}$ $\boldsymbol{u_2 = 49}$

   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le septième terme de la suite.

En utilisant le mode RECUR, on trouve $\boldsymbol{u_6 \approx 1,59 \times 10^{34}}$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = 3v_n + 7$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

$\boldsymbol{v_0 = -2}$	$\boldsymbol{v_1 = 3v_0 + 7}$ $\boldsymbol{v_1 = 3 \times (-2) + 7}$ $\boldsymbol{v_1 = 1}$	$\boldsymbol{v_2 = 3v_1 + 7}$ $\boldsymbol{v_2 = 3 \times 1 + 7}$ $\boldsymbol{v_2 = 10}$

   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le quinzième terme de la suite.

En utilisant le mode RECUR, on trouve $\boldsymbol{= 7174450}$

Exercice 5 : Suite définie par récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$, et telle qu'en multipliant un terme par 3, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes u_1, u_2 et u_3.

$\boldsymbol{u_1 = 3u_0 = 3 \times 1 = 3}$	$\boldsymbol{u_2 = 3u_1 = 3 \times 3 = 9}$	$\boldsymbol{u_3 = 3u_2 = 3 \times 9 = 27}$

   b. Donner une relation reliant u_{n+1} et u_n.

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{u_{n+1} = 3u_n}$
On appellera plus tard ce genre de suite une suite géométrique (de premier terme 1 et de raison $\boldsymbol{q = 3}$)

2. Soit (v_n) la suite définie par son premier terme $v_0 = 5$, et telle qu'en ajoutant 2 à un terme, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes v_1, v_2 et v_3.

$\boldsymbol{v_1 = v_0 + 2 = 5 + 2 = 7}$	$\boldsymbol{v_2 = v_1 + 2 = 7 + 2 = 9}$	$\boldsymbol{v_3 = v_2 + 2 = 9 + 2 = 11}$

   b. Donner une relation reliant v_{n+1} et v_n.

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{v_{n+1} = v_n + 2}$
On appellera plus tard ce genre de suite une suite arithmétique (de premier terme 5 et de raison $\boldsymbol{r = 2}$)

3. Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0 = 2$, et telle qu'en multipliant un terme par 2 puis en luis ajoutant -1, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes w_1, w_2 et w_3.

$\boldsymbol{w_1 = 2w_0 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3}$	$\boldsymbol{w_2 = 2w_1 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5}$	$\boldsymbol{w_3 = 2w_2 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9}$

   b. Donner une relation reliant w_{n+1} et w_n.

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{w_{n+1} = 2w_n - 1}$
On appellera plus tard ce genre de suite une suite arithmético-géométrique.

<u>Exercice 6 : Algorithme et suite</u>

La suite (u_n) est définie par $u_0 = A$ et l'algorithme suivant permettant d'afficher le terme d'indice N.

Variables	A est un réel, N et I sont des entiers.
	Saisir A et N.
Entrée	Pour I allant de 1 à N faire
Traitement	A prend la valeur $2 \times A - 1$
	Fin Pour
Sortie	Afficher A

1. Quelle valeur de A sera affichée après exécution de l'algorithme :

   a. Si on saisit $A = 1$ et $N = 5$? b. Si on saisit $A = 2$ et $N = 3$?

N	0	1	2	3	4	5
u_n	$A = 1$	$2 \times 1 - 1 = 1$	$2 \times 1 - 1 = 1$	$2 \times 1 - 1 = 1$	$2 \times 1 - 1 = 1$	$\mathbf{2 \times 1 - 1 = 1}$
u_n	$A = 2$	$2 \times 2 - 1 = 3$	$2 \times 3 - 1 = 5$	$\mathbf{2 \times 5 - 1 = 9}$		

2. Quelle valeur de N faut-il saisir pour obtenir le 3ème terme ?

Le 3ème terme est $\boldsymbol{u_2}$ ainsi il faut mettre $\boldsymbol{N = 2}$.

3. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche les terme de u_1 à u_N.

Il suffit de déplacer le « Afficher $\boldsymbol{A}$ » avant le Fin Pour.

4. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 quand $A = 3$.

N	0	1	2	3	4
u_n	$A = 3$	$2 \times 3 - 1 = 5$	$2 \times 5 - 1 = 9$	$2 \times 9 - 1 = 17$	$2 \times 17 - 1 = 33$

5. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{u_{n+1} = 2u_n - 1}$.

<u>Exercice supplémentaire : Tableur et suite explicite</u>

(u_n) est une suite définie par une relation explicite. On construit la feuille de calcul d'un tableur ci-contre.
Dans chaque cas, trouver la formule qu'il faut mettre dans la cellule $B2$ pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent.

	A	B
1	rang n	terme U_n
2	0	
3	1	
4	2	

1. $u_n = 3n + 1$	$\mathbf{= 3 * A2 + 1}$
2. $u_n = (-1)^n$	$\mathbf{= (-1)\hat{}A2}$
3. $u_n = n^2$	$\mathbf{= A2\hat{}2}$
4. $u_n = n(n+1)$	$\mathbf{= A2 * (A2 + 1)}$
5. $u_n = 5^n$	$\mathbf{= 5\hat{}A2}$

<u>Exercice supplémentaire : Tableur et suite récurrente</u>

(u_n) est une suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et une relation de récurrence. On construit la feuille de calcul d'un tableur ci-contre.
Dans chaque cas, trouver la formule qu'il faut mettre dans la cellule $B3$ pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent.

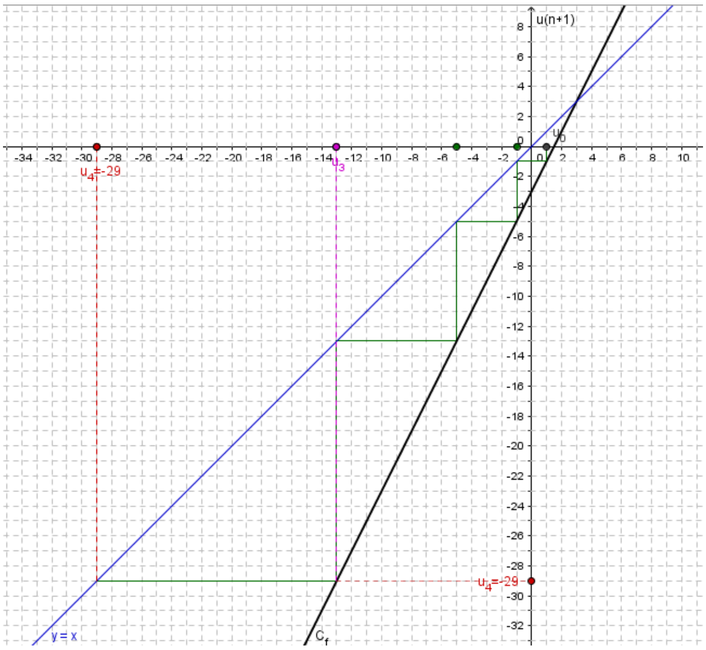
	A	B
1	rang n	terme U_n
2	0	3
3	1	
4	2	

1. $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$	$\mathbf{= 1/2 * B2}$
2. $u_{n+1} = u_n - 2$	$\mathbf{= B2 - 2}$
3. $u_{n+1} = {u_n}^5$	$\mathbf{= B2\hat{}5}$
4. $u_{n+1} = 2u_n + n$	$\mathbf{= 2B2 + A2}$

Exercice supplémentaire : Représentation graphique.

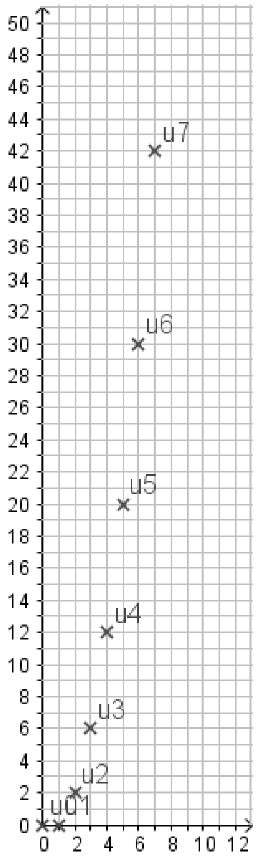
1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Représenter graphiquement les cinq premiers termes de cette suite dans un repère.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = n^2 - 3n + 5$.
Représenter graphiquement les huit premiers termes de cette suite dans un repère.



Méthode : **On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x - 3$**

- **On trace la droite d'équation $y = x$**
- **On trace la courbe d'équation $y = f(x)$**
- **On place $u_0 = 1$ sur l'axe des abscisses.**
- **On cherche l'image de u_0, c'est u_1.**
- **Pour revenir sur l'axe des abscisses on se sert de la droite d'équation $y = x$.**
- **On recommence…**



Méthode : **On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x - 5$**

Il suffit de calculer les images avec n un entier, cela crée des points.

Compétence : Sens de variations d'une suite

Exercice 7 : Sens de variations d'une suite

1. Soit (u_n) une suite décroissante. Comparer u_4 et u_5.

(u_n) est une suite décroissante ainsi pour tout entier naturel n, on $u_{n+1} \leq u_n$.
Ainsi $u_5 \leq u_4$.

2. Soit (v_n) une suite croissante. Déterminer le signe de $u_{11} - u_{10}$

(v_n) est une suite croissante ainsi pour tout entier naturel n, on $u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi $u_{11} \geq u_{10}$ donc $u_{11} - u_{10} \geq 0$.

Exercice 8 : Sens de variations d'une suite (récurrente)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$	**Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$** **$u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi la suite (u_n) est croissante.**
b. $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$	**Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -n^2 \leq 0$** **$u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante.**
c. $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n - 7n \end{cases}$	**Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -7n \leq 0$** **$u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante.**
d. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n + 3 \end{cases}$	**Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = n^2 - n + 3$** **Il faut chercher le signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 3$.** **$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$** **Et $a = 1 > 0$ ainsi pour tout réel x, $f(x) > 0$. Ainsi $n^2 - n + 3 > 0$.** **$u_{n+1} > u_n$. Ainsi la suite (u_n) est strictement croissante.**

Exercice supplémentaire : Sens de variations d'une suite

1. a. Rappeler les variations de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (i_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $i_n = \frac{1}{n}$.

Pour tout entier naturel n non nul on a $i_n = \frac{1}{n} = f(n)$ où f est la fonction inverse.
Comme la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la suite (i_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

2. a. Rappeler les variations de la fonction carré sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par $c_n = n^2$.

Pour tout entier naturel n on a $c_n = n^2 = f(n)$ où f est la fonction carré.
Comme la fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la suite (c_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Exercice 9 : Sens de variations d'une suite (explicite)

Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

a. $u_n = 2n$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction linéaire croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(a = 2 > 0)$. Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**
b. $u_n = n^2$	**$u_n = f(n)$ où f est la fonction carré croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**
c. $u_n = 1 - 5n$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction affine décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(m = -5 < 0)$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.**
d. $u_n = n^2 + 3n - 1$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction du second degré croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(a = 1 > 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2})$. Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**
e. $u_n = 3n^2 - 4$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction du second degré croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(a = 3 > 0$ et $-\frac{b}{2a} = 0$. Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**
f. $u_n = 5n - 8$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction affine croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(m = 5 > 0)$. Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.**
g. $u_n = -3n^2 - 2n + 1$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction du second degré décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(a = -3 < 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{6}$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.**
h. $u_n = 3 - 2n$	**$u_n = f(n)$ où f est une fonction affine décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ $(m = -2 < 0)$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.**

Compétence : Recherche de seuils (BONUS : à ne pas réviser !!!)

Exercice 10 : Recherche de seuils

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n - 0{,}25$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geq 5000$.

$\boldsymbol{u_n \geq 5000 \Leftrightarrow n - 0,25 \geq 5000 \Leftrightarrow n \geq 5000,25}$

2. En déduire le plus petit entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, $u_n \geq 5000$.

Ainsi le plus petit entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, $u_n \geq 5000$ est $n_0 = 5001$.

Exercice 11 : Recherche de seuils

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n+1}$.

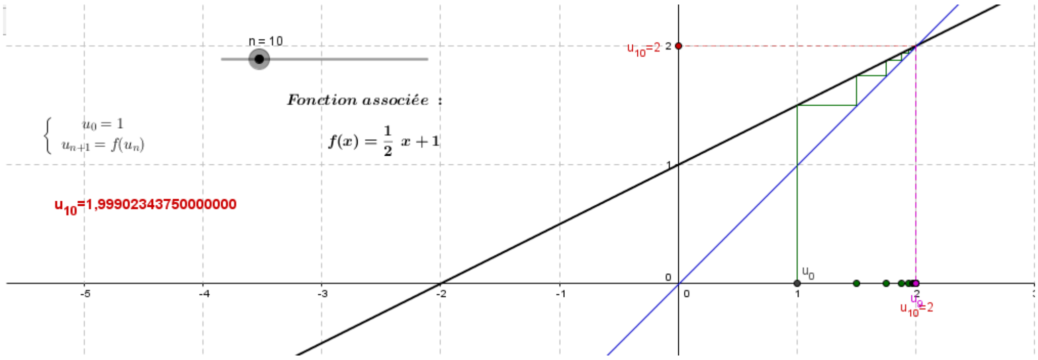
Déterminer un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N, $0 < v_n \leq 0{,}001$.

$n + 1 \neq 0$ ainsi (v_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ et $v_n > 0$ pour tout entier naturel n.
$\boldsymbol{v_N \leq 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{N+1} \leq 0,001 \Leftrightarrow N + 1 \geq \frac{1}{0,001} \Leftrightarrow N + 1 \geq 1000 \Leftrightarrow N \geq 999}$ **.**
Ainsi le plus petit entier N tel que pour tout n supérieur ou égal à N, $0 < v_n \leq 0,001$ est $N = 999$

Exercice 12 : Conjecture du comportement d'une suite

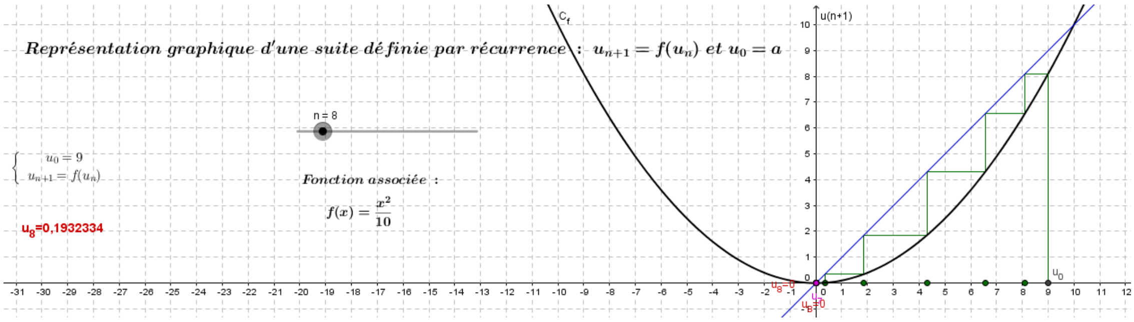
Représenter la suite et conjecturer le sens de variation et le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$



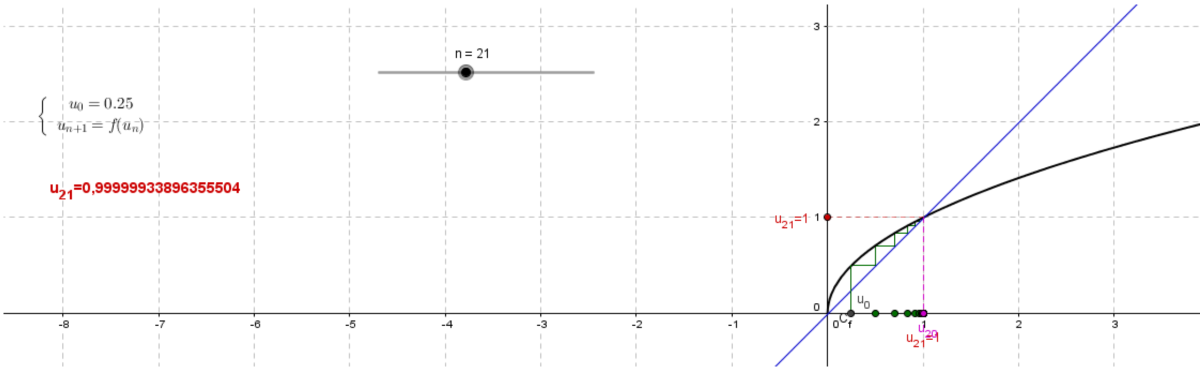
On conjecture que la suite (u_n) est croissante et que la suite (u_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$.

b) $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{10}$



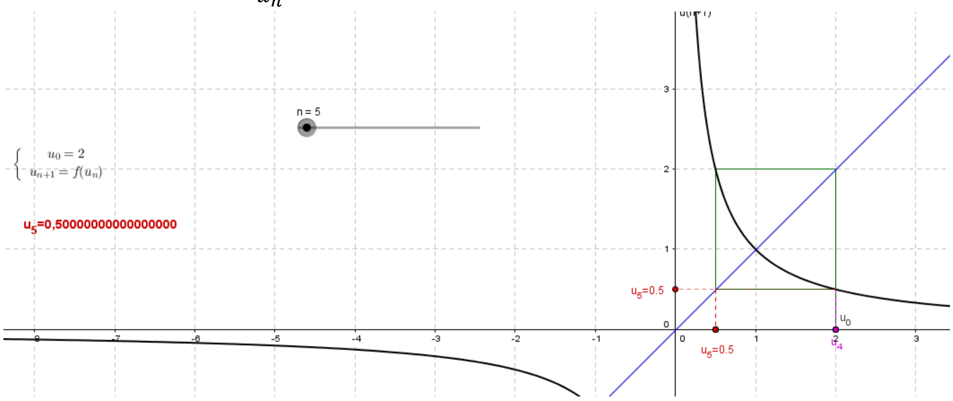
On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

c) $u_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$



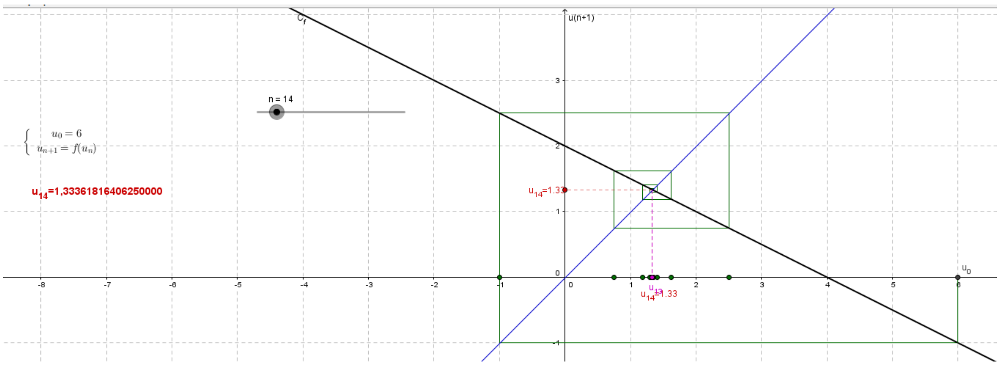
On conjecture que la suite (u_n) est croissante et que la suite (u_n) tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

d) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$



On conjecture que la suite (u_n) est alternée et que la suite (u_n) n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

e) $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$



On conjecture que la suite (u_n) est alternée et que la suite (u_n) tend vers $\frac{4}{3} \approx 1,33$ lorsque n tend vers $+\infty$.

<u>Exercice 13 : Cas d'une limite finie à l'infini</u>

La suite (u_n) a pour limite L (à conjecturer à l'aide de la calculatrice) quand n tend vers $+\infty$.

Trouver un indice m tel que, lorsque $n > m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle I proposé.

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $I =]0\,;10^{-4}[$.

On conjecture que la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
(u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}^*$ et $u_n > 0$ pour tout entier naturel n non nul.
$u_m < 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} < 10^{-4} \Leftrightarrow \sqrt{m} > 10^4 \Leftrightarrow m > 10^8$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n > m$, $u_n \in]0\,;10^{-4}[$ est $m = 10^8 + 1$.

b) $u_n = \frac{1}{n+5}$ et $I =]0\,;10^{-5}[$

On conjecture que la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
$n + 5 \neq 0$ ainsi (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$ et $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
$u_m < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{m+5} < 10^{-5} \Leftrightarrow m + 5 > 10^5 \Leftrightarrow m > 10^5 - 5$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n > m$, $u_n \in]0\,;10^{-5}[$ est $m = 10^5 - 4 = 99996$.

c) $u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$ et $I =]0{,}49\,;0{,}51[$

On conjecture que la suite (u_n) tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
(u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$.
$0,49 < u_m < 0,51 \Leftrightarrow 0,49 < \frac{1}{2} + \frac{3}{2m} < 0,51 \Leftrightarrow -0,01 < \frac{3}{2m} < 0,01$
Comme $m > 0$, pour que ces conditions soient vérifiées, il suffit que $\frac{3}{2m} < 0,01$ soit $\frac{2m}{3} > 100$ soit $m > 150$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n > m$, $u_n \in]0,49\,;0,51[$est $m = 151$.

d) $u_n = 3 + \frac{1}{n}$ et $I =]3 - 10^{-4}\,;3 + 10^{-4}[$

On conjecture que la suite (u_n) tend vers 3 quand n tend vers $+\infty$.
(u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$.
$3 - 10^{-4} < u_m < 3 + 10^{-4} \Leftrightarrow 3 - 10^{-4} < 3 + \frac{1}{m} < 3 + 10^{-4} \Leftrightarrow -10^{-4} < \frac{1}{m} < 10^{-4}$
Comme $m > 0$, pour que ces conditions soient vérifiées, il suffit que $\frac{1}{m} < 10^{-4}$soit $m > 10^4$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n > m$, $u_n \in]3 - 10^{-4}\,;3 + 10^{-4}[$est $m = 10001$.

Exercice 14 : Cas d'une limite infinie à l'infini

Dans chacun des cas suivants :

- Donner, en justifiant, les variations de (u_n)
- Trouver un indice m tel que , lorsque $n \geq m$, les les termes u_n appartiennent à l'intervalle I donné.

a) $u_n = \sqrt{2n+1}$ et $I = [10^5 \; ; \; +\infty[$.

1ère étape : $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie et croissante sur $[-\frac{1}{2} \; ; \; +\infty[$ donc aussi sur $[0 \; ; \; +\infty[$.
f est définie si et seulement si $2x+1 \geq 0$ ssi $x \geq -\frac{1}{2}$.
On pose $g(x) = 2x+1$, la fonction g est une fonction affine croissante sur $[0 \; ; \; +\infty[$ $(m = 2 > 0)$.
Comme la fonction racine carré est croissante sur $[0 \; ; \; +\infty[$, la fonction f est croissante sur $[0 \; ; \; +\infty[$.
Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
2ème étape :
$\boldsymbol{u_m \geq 10^5 \Leftrightarrow \sqrt{2m+1} \geq 10^5 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 10^{10} \Leftrightarrow m \geq 5 \times 10^9 - \frac{1}{2}}$.
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \in [10^5 \; ; \; +\infty[$ est $m = 5 \times 10^9$

b) $u_n = \frac{2-n}{3}$ et $I =]-\infty\, ; -10^5]$

1ère étape : $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine décroissante $(m = -1 < 0)$ sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $[0 \; ; \; +\infty[$.
Ainsi la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
2ème étape :
$\boldsymbol{u_m \leq -10^5 \Leftrightarrow \frac{2-m}{3} \leq -10^5 \Leftrightarrow 2-m \leq -3 \times 10^5 \Leftrightarrow -m \leq -3 \times 10^5 - 2 \Leftrightarrow m \geq 3 \times 10^5 + 2}$.
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \in]-\infty\, ; -10^5$ est $m = 3 \times 10^5 + 2$

c) $u_n = \frac{2}{3}n^2$ et $I = [10^6 \; ; \; +\infty[$

1ère étape : $u_n = \frac{2}{3}f(n)$ où f est la fonction carré croissante sur $[0 \; ; \; +\infty[$ et $\frac{2}{3} > 0$.
Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
2ème étape :
$\boldsymbol{u_m \geq 10^6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}m^2 \geq 10^6 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{3}{2} \times 10^6 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \times 10^3}$.
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \in [10^5 \; ; \; +\infty[$ est $m = 1225$

d) $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ et $I = [10^5 \; ; \; +\infty[$

1ère étape : $u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$, pour tout entier naturel n, on a :
$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n \left(\frac{5}{2} - 1\right) \geq 0}$. **Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$.**
Ainsi la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
2ème étape :
$\boldsymbol{u_m \geq 10^5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^m \geq 10^5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^m \geq 2 \times 10^5}$.
A partir de ce calcul, nous ne pouvons plus le faire sans calculatrice (vous verrez la méthode avec la fonction logarithme népérien en Terminal).
On trouve à la calculatrice :
$\boldsymbol{u_{10} \approx 4768 < 10^5}$ **et** $\boldsymbol{u_{11} \approx 11921 > 10^5}$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \in [10^5 \; ; \; +\infty[$ est $m = 11$.

e) $u_n = -2 \times 5^n$ et $I =]-\infty\, ; -10^6]$

1ère étape : Pour tout entier naturel n, on a :
$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = -2 \times 5^{n+1} - (-2 \times 5^n) = -2 \times 5^n(5-1) \leq 0}$. **Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.**
Ainsi la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
2ème étape :
$\boldsymbol{u_m \leq -10^6 \Leftrightarrow -2 \times 5^m \leq -10^6 \Leftrightarrow 5^m \geq 5 \times 10^5}$.
A partir de ce calcul, nous ne pouvons plus le faire sans calculatrice.
On trouve à la calculatrice :
$\boldsymbol{u_8 \approx -781250 > -10^6}$ **et** $\boldsymbol{u_9 \approx -3906250 < -10^6}$
Ainsi le plus petit entier m tel que pour tout $n \geq m$, $u_n \in]-\infty\, ; -10^5$ est $m = 9$

Exercice 15 : Modélisation

Dans un étang, pendant l'hiver 2015, la population des gardons était estimée à 600 kg. Mais, chaque année la quantité de gardons diminue du quart de sa valeur.

Pour compenser cette diminution, on réintroduit chaque automne 200 kg de gardons.

On note u_n la quantité de gardons, exprimée en kg, au début de l'hiver de l'année $2015 + n$.

On a ainsi $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$$

1. Déterminer la quantité u_1 de gardons présents l'hiver 2016, puis la quantité de gardons u_2 l'hiver 2017.

$\boldsymbol{u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 200}$ $\boldsymbol{u_1 = \frac{3}{4} \times 600 + 200}$ $\boldsymbol{u_1 = 650}$	$\boldsymbol{u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 200}$ $\boldsymbol{u_2 = \frac{3}{4} \times 650 + 200}$ $\boldsymbol{u_2 = 687,5}$

2. A l'aide d'un tableur, ou d'une calculatrice, déterminer la quantité de gardons présents dans l'étang au début de l'hiver 2025.

On utilise le mode RECUR de la calculatrice et on trouve $\boldsymbol{u_{10} \approx 789}$