Chapitre : Etude de fonctions

I. Sens de variations et extremums

1) Sens de variations

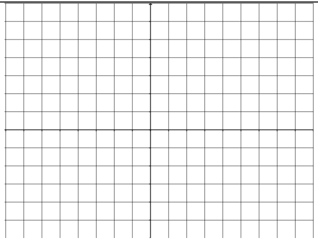
Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f est strictement ____________________

sur I signifie que f ____________________ l'ordre, c'est-à-dire :

Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors __________ (inégalité stricte).



Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f est ______________________________ sur I signifie que :

Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors ______________________________ (inégalité large).

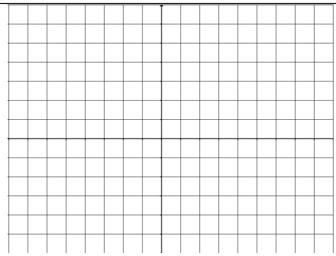
Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f est strictement ____________________

sur I signifie que f ____________________ l'ordre, c'est-à-dire :

Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors __________ (inégalité stricte).



Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f est ______________________________ sur I signifie que :

Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors ______________________________ (inégalité large).

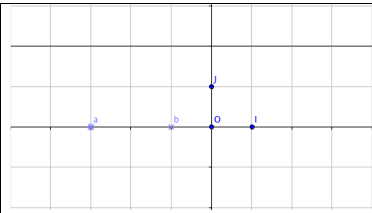
Définition 5 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f est ______________ sur I signifie que :

Pour tous nombres a et b de I, il existe un réel k

tel que :



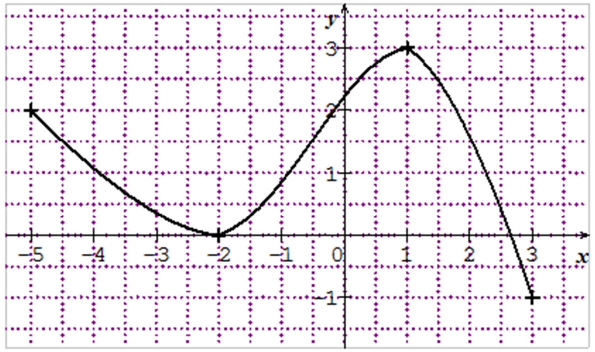
Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Dire que f est monotone sur I signifie que f est croissante ou décroissante sur I.

Définition 7 : Etudier les variations d'une fonction f, c'est déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est monotone, c'est-à-dire croissante ou décroissante.

Application 1 :

Soit f la fonction définie par la courbe ci-contre :

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f

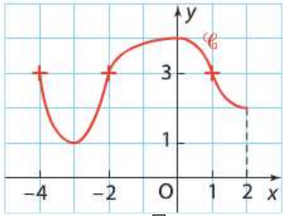


2. Donner le tableau de variations de la fonction f

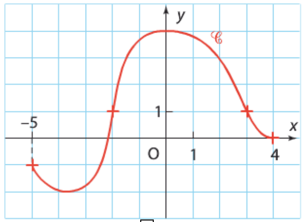
Exercice 1 : Passer de la courbe au tableau de variation et au tableau de signes

On donne, dans chacun des cas suivants numérotés de 1 à 9, la représentation graphique d'une fonction f.

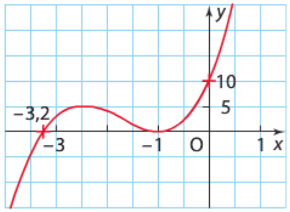
1. Préciser l'ensemble de définition
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Préciser les extremums de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de signes de la fonction f.



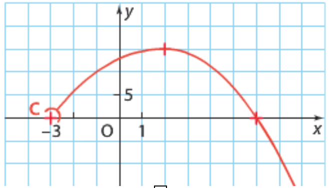
1



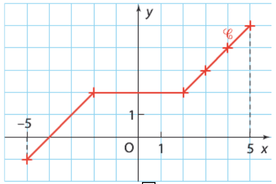
2



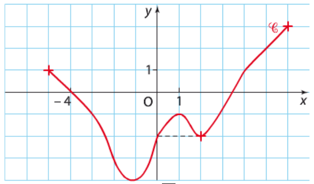
3



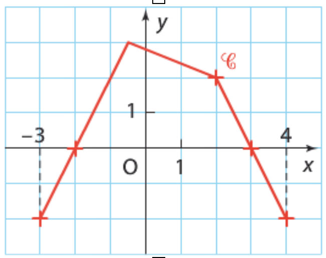
4



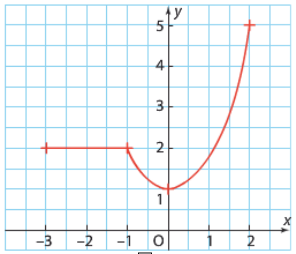
5



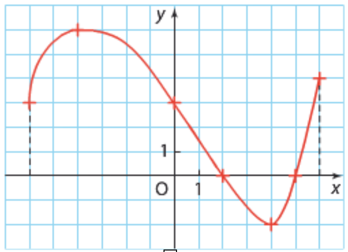
6



7



8



9

Exercice 2 : Utiliser un tableau de variation

On donne, dans chacun des cas suivants numérotés de 1 à 6, le tableau de variation d'une fonction f.

1. Préciser l'ensemble de définition
2. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f à partir de son tableau de variation.
3. Préciser les extremums de la fonction f sur son ensemble de définition. En quelles valeurs sont-ils atteints ?

x	-5		-2		2		4
f	-4	↗	4	↘	1	↗	6

1

x	-5		-1		3		4
f	3	↘	0	↗	4	↘	0

2

x	-6		-4		-1		0		2		7
g	-4	↗	2	↗	8	↘	2	↘	-2	↗	1

3

x	$-\infty$		-2		0		1		3		9
f		↘	-3	↗	-1	↗	4	↘	0	↘	-2

4

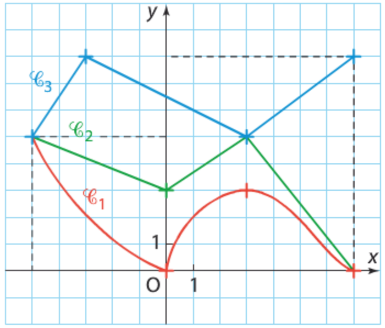
x	-9		-2		0		1		3		$+\infty$
f	-3	↘	-5	↗	-1	↗	4	↘	-1	↘	

5

x	-10		0		11		20		25
f	-40	↗	35	↘	12	↗	15	↘	-68

6

Exercice 3 : Attribuer à chaque courbe son tableau de variations



Attribuer à chaque courbe son tableau de variations :

1.

x	-5		-3		3		7
f	5	↗	8	↘	5	↗	8

2.

x	-5		0		3		7
g	5	↘	0	↗	3	↘	0

3.

x	-5		0		3		7
h	5	↘	3	↗	5	↘	0

2) Extremum

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel de I.

Dire que f admet un ______________________________ atteint en $x = a$ sur I signifie que :

Pour tout nombre réel $x \in I$: ______________________________.

Définition 9 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et b un nombre réel de I.

Dire que f admet un ______________________________ atteint en $x = b$ sur I signifie que :

Pour tout nombre réel $x \in I$: ______________________________.

Définition 10 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dire que f admet un extremum sur I signifie que f admet un minimum ou un maximum sur I.

Application 1 (suite) :

3. Quel est le maximum de la fonction f sur $[-5; 3]$. En quelle valeur est-il atteint ?

4. Quel est le minimum de la fonction f sur $[-5; 3]$. En quelle valeur est-il atteint ?

3) Tableaux de signes

Lors de l'étude d'une fonction, il est souvent utile de déterminer le signe de la fonction en tout point.

Définition 11 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **positive** sur I lorsque pour tout x de I :
  ____.
- On dit que f est **négative** sur I lorsque pour tout x de I :
  ____.

Cette étude peut être résumée dans un tableau de signes, c'est un tableau de deux lignes :

Dans la première ligne, on indique les valeurs remarquables : les extrémités de l'ensemble de définition et les valeurs qui annulent la fonction.

Application 1 (suite) :

5. Donner le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 4 : Comparaison

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-2		0		4		6
f	-1	↗	4	↘	-3	↗	3	↘	1

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Décrire les variations de f.
3. Quelle est le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ 6]$?
4. En justifiant ces réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$
b. $f(-2) > f(-1)$
c. $f(-3) < 4$
d. $f(0{,}1) < 0$
e. $f(x) \geq -1$ sur $[-4; 6]$
f. $f(1) = 0$
g. $f(2) > 3$
h. $f(-3{,}5) = f(2)$
i. Le minimum de f sur $[-4\ ; 6]$ est -1

Exercice 5 : Comparaison

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	0		2		4		5
f	-4	↘	-5	↗	-1	↘	-2

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Décrire les variations de f.
3. Quelle est le minimum de la fonction f sur $[2\ ;\ 5]$?
4. En justifiant ces réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$
b. $f(1) < f(0)$
c. $f(3) < 0$
d. $f(3) = -3$
e. $f(x) \leq -1$ sur $[0\ ; 5]$
f. $f(1) = -4{,}5$
g. $f(1) < f(5)$
h. $f(2) = f(5)$
i. Le minimum de f sur $[0\ ; 5]$ est -2

Exercice 6 : Images et antécédents

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

x	-2		-1		3		6
f	10	↘	8	↗	9	↘	-1

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quelles sont les images par f de $-1, 3$ et 6 ?
3. Compléter le plus précisément possible :

a. ... $\leq f(2) \leq \cdots$ b. ... $\leq f(4) \leq \cdots$

4. Donner un antécédent de -1.
   En possède-t-il d'autre(s) ?
5. Combien 0 a-t-il d'antécédent ?

Exercice 7 : Tracer une courbe

On donne le tableau de variation et le tableau de signe de la fonction f.

x	-10		-6		-1		4
f	5	↘	-1	↗	3	↘	-5

x	-10		-7		-3		1		4
f		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Proposer une représentation graphique de cette fonction.

II. Parité

Définition 12 :
Un ensemble D est symétrique par rapport à zéro $\Leftrightarrow \forall x \in D : -x \in D$.

Remarque : Le symbole $\forall$ signifie « quel que soit ». La notation $\forall x \in D$ se lit :
« quel que soit x appartenant à D », ce qui signifie « pour tout élément x de l'ensemble D ».

Application 2 : Entourer en rouge les ensembles qui sont symétriques par rapport à zéro :

$[-10\,;\,10]$	$[-5\,;\,+\infty[$	$[-2\,;\,2[$	$]-\infty;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^*$

Définition 13 : Soit f une fonction définie sur D
Une fonction est ________________________________ si et seulement si :
- Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout $x \in D$, ____.

Propriété 2 : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport
____
____.

Définition 14 : Soit f une fonction définie sur D
Une fonction est ________________________________ si et seulement si :
- Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout $x \in D$, ____.

Propriété 3 : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport
_________________________.

Application 3 : Etudier la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Exercice 8 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x^2 + 3.$$
1. Démontrer que cette fonction est paire.
2. Que pouvez-vous en déduire pour la représentation graphique de f ?
3. Calculer, sans calculatrice, les images de 0, 5 et 10.
4. Quelles autres images pouvez-vous donner, sans aucun calcul ?

Exercice 9 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -x^3 + 2x.$$
1. Démontrer que cette fonction est impaire.
2. Que pouvez-vous en déduire pour la représentation graphique de f ?
3. VRAI ou FAUX ? Justifier…

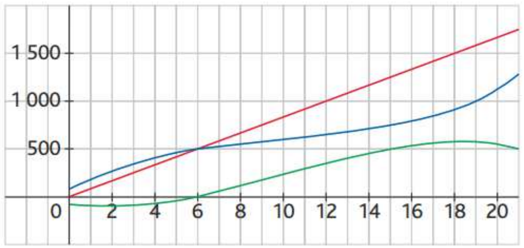
a) Le point $A\ (2\,;\,-4)$ appartient à la courbe de f.
b) Le point $B\ (-2\,;-4)$ appartient à la courbe de f.
c) Le point $C\ (-2\,;\,4)$ appartient à la courbe de f.

III. Problème

Exercice 10 : Ne pas confondre recette et bénéfice
Une entreprise fabrique et commercialise un produit. Chaque semaine, elle limite sa production à 21kg.

I) Etude de la recette
L'entreprise vend ce produit 84€/kg.

a. Quelle est sa recette si elle en vend 5kg ? 10kg ?
b. Pour x kg vendus, on note la recette $R(x)$. Déterminer l'expression de $R(x)$ en fonction de x.
c. Dans le repère ci-contre, identifier la courbe représentative de la fonction R.



II) Etude du coût de production
Pour x kg de produit fabriqué, le coût de fabrication en euros est donné par :
$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 120x + 72$$
a. Combien coûte la fabrication de 6kg de produit ? 10kg ?
b. Donner le tableau de valeurs de la fonction C sur $[0\,;21]$ avec un pas de 3.
c. On admet que la fonction C est croissante sur $[0\,;21]$. Identifier la courbe représentative de la fonction C.
d. Résoudre graphiquement l'équation $R(x) = C(x)$
e. Résoudre graphiquement l'inéquation $R(x) > C(x)$
f. Interpréter ces deux derniers résultats.

III) Etude du bénéfice
Pour x kg de produit fabriqué et vendu, le bénéfice est donné par :
$$B(x) = R(x) - C(x)$$
a. Montrez que le bénéfice est donné par : $B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 10x^2 - 36x - 72$
b. Donner le tableau de valeurs de la fonction B sur $[0\,;21]$ avec un pas de 3.
c. On admet que la fonction B est décroissante sur $[0\,;21]$. Identifier la courbe représentative de la fonction B.
d. Résoudre graphiquement l'équation $B(x) = 0$. Est-ce cohérent avec votre réponse à la question II (d) ?
e. Résoudre graphiquement l'équation $B(x) > 0$. Est-ce cohérent avec votre réponse à la question II (f) ?
f. Déterminer graphiquement la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal. Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ? Comment aurait été possible d'établir ce résultat grâce aux courbes représentatives des fonctions R et C ?