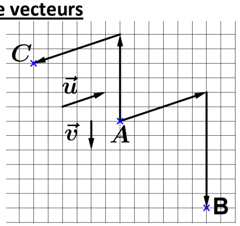
Fiche méthode : Colinéarité et vecteur directeur

I. Colinéarité

Application 1 : Construction de vecteurs

Construire les points B et C tel que :

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$
$\overrightarrow{AC} = -3\vec{v} - 2\vec{u}$



Application 2 : Points alignés et vecteurs colinéaires

Vérifier si les trois points sont alignés

a. $A(-3\,;3), B(5\,;-3)$ et $C(1\,;\,0)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

1ère méthode :	2ème méthode :
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$	$8 \times (-3) - (-6) \times 4$ $= -24 + 24$ $= 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors les 3 points sont alignés.

b. $E(3\,;3), F(2\,;1)$ et $G(-1\,;\,-3)$.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$

1ère méthode :	2ème méthode :
$\frac{-4}{-1} = 4$ $\frac{-6}{-2} = 3 \neq 4$	$-1 \times (-6) - (-2) \times (-4)$ $= 6 - 8$ $= -2 \neq 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires alors les 3 points ne sont pas alignés.

Application 3 : Parallélisme et vecteurs colinéaires

Vérifier si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

a. $A(-3\,;2), B(3\,;3), C(-3\,;\,-3)$ et $D(5\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

1ère méthode :	2ème méthode :
$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\frac{2}{1} = 2 \neq \frac{4}{3}$	$6 \times 2 - 1 \times 8 = 12 - 8$ $= 4 \neq 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

b. $A(0\,;5), B(3\,;0), C(-3\,;\,8)$ et $D(3\,;\,-2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$

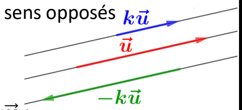
1ère méthode :	2ème méthode :
$\frac{6}{3} = 2$ $\frac{-10}{-5} = 2$	$3 \times (-10) - (-5) \times 6$ $= -30 + 30 = 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Produit d'un vecteur par un réel k :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, et k un réel strictement positif.

1) Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :
   - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction
   - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens
   - $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$
2) Le vecteur $-k\vec{u}$ est tel que :
   - $-k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction
   - $-k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont des sens opposés
   - $\|-k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$



Coordonnée du vecteur $k\vec{u}$:

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point dans un repère et k un réel.

Le **vecteur $k\vec{u}$** est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ dans le même repère.

Colinéarité :

- Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la **même direction.**
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ **ou** $\vec{v} = k\vec{u}$

Colinéarité et coordonnées :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0$$

Remarque :

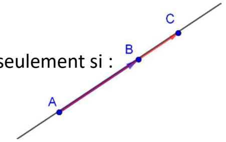
$xy' - x'y$ est appelé le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note : $det\,(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) = xy' - x'y$

Points alignés

A, B et C sont alignés si et seulement si :

$\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires.**

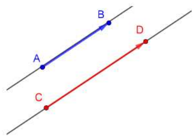


Remarque :

Il suffit de prendre deux vecteurs avec un point commun.

Droites parallèles

$(AB) /\!/ (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{CD}$ **sont colinéaires.**



Application 4 : Colinéarité en géométrie non repérée

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

1. Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}$ car on utilise la relation de Chasles
$\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$ car on utilise : $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{FD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$

2. Démontrer que les points B, F et E sont alignés.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE}$ $\overrightarrow{FE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{FE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AB}$ car $ABCD$ est un parallélogramme $\overrightarrow{FE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{BA}$

Ainsi $\overrightarrow{FE} = -3\overrightarrow{BF}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires c'est-à-dire les points B, F et E sont alignés.

II. Vecteurs directeurs

Application 5 : Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(5\,;-6)$ et $B(2\,;-1)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-5\\-1+6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) par définition.

2. Parmi les vecteurs suivants lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite (AB) ?

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\3{,}3\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{u}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc le vecteur $\vec{u}$ est directeur de la droite (AB).
- $-3 \times 8 - 5 \times 0 = -24 - 0 = -24 \neq 0$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc le vecteur $\vec{v}$ n'est pas directeur de la droite (AB).
- $\overrightarrow{AB} = -3\,\vec{w}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc le vecteur $\vec{w}$ est directeur de la droite (AB).
- $-3 \times 3{,}3 - 5 \times (-2) = -9{,}9 + 10 = 0{,}1 \neq 0$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires donc le vecteur $\vec{t}$ n'est pas directeur de la droite (AB).

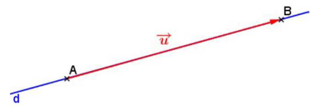
Vecteur directeur :

Soit d une droite et A, B deux points distincts.

On appelle **vecteur directeur de d** tout vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ tel que les points A et B appartiennent à la droite d.

De plus :

Un vecteur est appelé **vecteur directeur d'une droite** lorsqu'il est **colinéaire** à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A et B appartenant à la droite.



Vecteur directeur et équation réduite de droites :

Soit m et k deux réels.

1. Soit d la droite d'équation $y = mx + p$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. Soit d la droite horizontale d'équation $y = k$, le vecteur $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
3. Soit d la droite verticale d'équation $x = k$, le vecteur $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Ensemble de points et droite :

Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point du plan.

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Application 6 : Le point appartient-il à la droite ?

On considère la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-4; 1)$.

Les points $B(1; -7)$ et $C(-1; -3{,}5)$ appartiennent-ils à d ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+4\\-7-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$

$2 \times (-8) - (-3) \times 5 = -16 + 15 = -1 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires ainsi $B \notin d$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1+4\\-3{,}5-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$

$2 \times (-4{,}5) - (-3) \times 3 = -9 + 9 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ainsi $C \in d$.