# Chapitre 7 : Suites (2) : Arithmétiques et géométriques

Compétence : Suites arithmétiques

**Exercice 1 : Suites arithmétiques**

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2.

Déterminer le deuxième terme de la suite $(u_n)$.

| |
|---|
| **Le deuxième terme vaut $5+2=7$** |

**Exercice 2 : Suites arithmétiques**

Indiquer la bonne réponse.

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. Pour tout entier naturel $n$ :

**a.** $\boldsymbol{u_n = 5 + 2n}$ b. $u_n = 2 + 5n$ c. $u_n = u_0 + 2$

**Exercice 3 : Suites arithmétiques**

Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 7.

1. Déterminer $u_1, u_2$ et $u_3$.

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{u_1 = u_0 + r = 3 + 7 = 10}$ | $\boldsymbol{u_2 = u_1 + r = 10 + 7 = 17}$ | $\boldsymbol{u_3 = u_2 + r = 17 + 7 = 24}$ |

2. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$ on a : $u_{n+1} = u_n + r = u_n + 7$.** |

3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n = u_0 + nr = 3 + 7n$.** |

4. Déterminer $u_{17}$.

| |
|---|
| $\boldsymbol{u_{17} = 3 + 7 \times 17 = 122.}$ |

**Exercice 4 : Suites arithmétiques**

Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0 = -5$ et la relation $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel $n$.

1. Justifier que $(v_n)$ est une suite arithmétique et donner sa raison.

| |
|---|
| **Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours $-2$ ainsi $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $v_0 = -5$.** |

2. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$ on a : $v_n = -5 - 2n$.** |

3. Déterminer $v_6$.

| |
|---|
| $\boldsymbol{u_6 = -5 - 2 \times 6 = -17.}$ |

**Exercice 5 : Suites arithmétiques**

Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme $u_0$ et la raison $r$ d'une suite arithmétique.

1. Déterminer $u_1$ et $u_2$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer $u_{25}$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite.

| a. $u_0 = 1$ et $r = 4$ | b. $u_0 = 2$ et $r = 9$ | c. $u_0 = 5$ et $r = \frac{1}{2}$ | d. $u_0 = 12$ et $r = -3$ |
|---|---|---|---|
| **1.** $\boldsymbol{u_1 = 5}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 9}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 1 + 4n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{25} = 101}$<br>**4.** $\boldsymbol{r > 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante sur ℕ..** | **1.** $\boldsymbol{u_1 = 11}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 20}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 2 + 9n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{25} = 227}$<br>**4.** $\boldsymbol{r > 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante sur ℕ..** | **1.** $\boldsymbol{u_1 = \frac{11}{2}}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 6}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 5 + \frac{1}{2}n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{25} = \frac{35}{2}}$<br>**4.** $\boldsymbol{r > 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante sur ℕ.** | **1.** $\boldsymbol{u_1 = 9}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 6}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 12 - 3n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{25} = -63}$<br>$\boldsymbol{r < 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante sur ℕ.** |

**Exercice 6 : Suites arithmétiques**

$(u_n)$est une suite arithmétique de raison $r$.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$. Calculer $r$ et $u_2$ et $u_5$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_0 + rn$**
$r = u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3$
**Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2 + 3n$**
$u_2 = 2 + 3 \times 2 = 8$
$u_5 = 2 + 3 \times 5 = 17$

2. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = 10$. Calculer $r$ et $u_1$ et $u_5$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_0 + rn$**
$u_0 + rn = u_n$
$rn = u_n - u_0$
$r = \frac{u_n - u_0}{n}$ **avec $n \neq 0$**
$r = \frac{u_2 - u_0}{2} = \frac{10-2}{2} = 4$
**Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2 + 4n$**
$u_1 = 2 + 4 \times 1 = 6$
$u_5 = 2 + 4 \times 5 = 22$

3. On sait que $u_1 = 10$ et $u_{10} = 28$. Calculer $r$ et $u_0$ et $u_5$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_k + r(n-k)$**
$u_k + r(n-k) = u_n$
$r(n-k) = u_n - u_k$
$r = \frac{u_n - u_k}{n-k}$ **avec $n \neq k$ (On voit finalement $r$ comme un coefficient directeur)**
$r = \frac{u_{10} - u_1}{10-1} = \frac{28-10}{9} = 2$
**Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 10 + 2(n-1)$**
$u_0 = 10 + 2(-1) = 8$
$u_5 = 10 + 2(4) = 18$

4. On sait que $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$. Calculer $r$ et $u_0$ et $u_1$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_k + r(n-k)$**
$r = \frac{u_n - u_k}{n-k}$ **avec $n \neq k$**
$r = \frac{u_{10} - u_5}{10-5} = \frac{12-17}{5} = -1$
**Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 17 - (n-5)$**
$u_0 = 17 + 5 = 22$
$u_1 = 21$

5. On sait que $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$. Donner $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_k + r(n-k)$**
$r = \frac{u_n - u_k}{n-k}$ **avec $n \neq k$**
$r = \frac{u_{51} - u_{20}}{51-20} = \frac{-145+52}{31} = -3$
**Donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = -52 - 3(n-20)$**
$u_n = -52 - 3n + 60$
$u_n = 8 - 3n$

6. On sait que $u_{22} = 15$ et $r = \frac{3}{4}$. Donner $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_k + r(n-k)$**
$u_n = u_{22} + \frac{3}{4}(n-22)$
$u_n = 15 + \frac{3}{4}n - \frac{33}{2}$
$u_n = -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}n$

7. On sait que $u_0 = 3$ et $u_{20} = u_{10} + 25$. Donner $u_n$ en fonction de $n$.

$u_{20} = u_{10} + 25$
$u_{20} - u_{10} = 25$
$r = \frac{u_{20} - u_{10}}{20 - 10} = \frac{25}{10} = 2,5$
**Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = 3 + 2,5n$**

**Exercice 7 : Reconnaitre une suite arithmétique**

Parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont arithmétiques et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

| | |
|---|---|
| a. $u_n = 2n^2 - n + 1$ | $\boldsymbol{u_0 = 1 \,;\, u_1 = 2 \,;\, u_2 = 7}$<br>$\boldsymbol{u_1 - u_0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{u_2 - u_1 = 5 \neq 1}$**. Ainsi** $\boldsymbol{(u_n)}$ **n'est pas une suite arithmétique.** |
| b. $v_n = 5n - 2$ | $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n = 5(n+1) - 2 - (5n-2) = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5}$ **indépendant de** $\boldsymbol{n}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(v_n)}$ **est une suite arithmétique de premier terme** $\boldsymbol{-2}$ **et de raison** $\boldsymbol{5}$**.** |
| c. $w_n = \frac{n}{3} + 2$ | $\boldsymbol{w_{n+1} - w_n = \frac{n+1}{3} + 2 - \left(\frac{n}{3} + 2\right) = \frac{n}{3} + \frac{1}{3} + 2 - \frac{n}{3} - 2 \ = \frac{1}{3}}$ **indépendant de** $\boldsymbol{n}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(w_n)}$ **est une suite arithmétique de premier terme** $\boldsymbol{2}$ **et de raison** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$**.** |
| d. $x_n = 3^n + 1$ | $\boldsymbol{x_0 = 2 \,;\, x_1 = 4 \,;\, x_2 = 10}$<br>$\boldsymbol{x_1 - x_0 = 2}$ **et** $\boldsymbol{x_2 - x_1 = 6 \neq 2}$**. Ainsi** $\boldsymbol{(x_n)}$ **n'est pas une suite arithmétique.** |

**Exercice 8 : Reconnaitre une suite arithmétique**

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies sur $\mathbb{N}$.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + n \end{cases}$

| | |
|---|---|
| **Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours** $\boldsymbol{-4}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est une suite arithmétique de raison** $\boldsymbol{-4}$ **(et de premier terme** $\boldsymbol{-3}$**)** | $\boldsymbol{v_0 = 3 \,;\, v_1 = v_0 + 0 = 3}$ **et** $\boldsymbol{v_2 = v_1 + 1 = 4}$**.**<br>$\boldsymbol{v_1 - v_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{v_2 - v_1 = 1 \neq 0}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(v_n)}$ **n'est pas une suite arithmétique.** |

**Exercice 9 : Somme et Suites arithmétiques**

1. a. Déterminer la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 10$.

$$\boldsymbol{S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{10 \times 11}{2} = 55}$$

b. Application : Combien y aurait-il de boules de billard si la figure comportait 10 rangées ?

**Cela revient à faire le calcul précédent. Ainsi il y aurait 55 boules.**

2. Déterminer la somme $S = \sum_{k=1}^{100} k$.

$$\boldsymbol{S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050}$$

**Exercice 10 : Tableur**

On considère la suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 25$ et de raison 9.

On a créé une feuille de calcul ci-contre. La valeur de $u_0$ est entrée dans la cellule $B2$.

1. Quelle formule, si on la recopie vers le bas, peut-on saisir dans la cellule $B3$ afin d'obtenir les termes de la suite $(u_n)$ dans la colonne $B$ ?

$\boldsymbol{= B2 + 9}$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | $u_n$ | |
| 2 | 0 | 25 | 25 |
| 3 | 1 | 34 | |
| 4 | 2 | 43 | |
| 5 | 3 | 52 | |
| 6 | 4 | 61 | |

2. La valeur de $u_0$ est entrée dans la cellule $C2$. Quelle formule, si on la recopie vers le bas, peut-on saisir dans la cellule $C3$ pour obtenir la somme $u_0 + \cdots + u_n$ pour chaque valeur de $n$ ?

$\boldsymbol{= C2 + B3}$

Compétence : Modéliser une situation avec une suite arithmétique

**Exercice 11 : Modélisation arithmétique**

Dans une pisciculture, un pêcheur met 50 truites dans un étang vide. Il y a 100 naissances par an. On veut modéliser la situation par une suite $(u_n)$ qui représente le nombre de truites chaque année.

a) Donner l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a :**
$u_{n+1} = u_n + r$
$u_{n+1} = u_n + 100.$

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

**Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre, ici $100$.**
**Ainsi la suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r = 100$ et de premier terme $u_0 = 50$.**

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

**$r = 100 > 0$ donc $(u_n)$ est une suite strictement croissante sur $\mathbb{N}$.**

**Exercice 12 : Suites arithmétiques (Modéliser)**

Le nombre de fans sur la page facebook d'un certain artiste peut être modélisé par la suite $(u_n)$ de raison 900 telle que, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n$ désigne le nombre de fans l'année $2015 + n$. En 2015, le nombre de fans est 7500 : on a donc $u_0 = 7500$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.

| | |
|---|---|
| $u_1 = 7500 + 900 = 8400$ | $u_2 = 8400 + 900 = 9300$ |

2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 + nr = 7500 + 900n$.**

3. Au bout de combien d'années le nombre de fans aura dépassé le triple de celui de l'année 2015 ?

**Cela revient à résoudre $u_n > 22500$**
$7500 + 900n > 22500$
$900n > 15000$
$n > 16,67 > 17.$
**Le nombre de fans aura dépassé le triple de celui de l'année 2015 en $2015 + 17 = 2032$.**
**Pensez à vérifier à la calculatrice (RECUR).**

**Exercice 13 : Suites arithmétiques (Modéliser)**

En 2014, la population d'un village est de 1500 habitants. On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 100 habitants par an.

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'habitants pour l'année $2014 + n$.

1. Donner $u_0$.

$u_0 = 1500$

2. Calculer les valeurs $u_1$ et $u_2$ du nombre d'habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.

| | |
|---|---|
| $u_1 = 1500 + 100 = 1600$ | $u_2 = 1600 + 100 = 1700$ |

3. Exprimer, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = u_0 + nr = 1500 + 100n$.**

4. Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?

$2018 - 2014 = 4$
**$u_4 = 1500 + 100 \times 4 = 1900$. La population sera de $1900$ habitants en 2018.**

5. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 3000 habitants ?

**Cela revient à résoudre $u_n = 3000$**
$500 + 100n = 3000$
$100n = 1500$
$n = 15.$
**La population devrait atteindre 3000 habitants en $2014 + 15 = 2029$.**
**Pensez à vérifier à la calculatrice (RECUR).**

**Exercice 14 : Suites arithmétiques (Modéliser)**

Albert place un capital initial $C_0 = 3000€$ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).

On note $C_n$ le capital d'Albert au bout de $n$ années, capital exprimé en euros.

1. Montrer que, pour tout entier $n$, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on?

**Le montant des intérêts qui s'ajoutent au capital d'une année $C_n$ est égal à $6\%$ de $3000$ c'est-à-dire :**
$\mathbf{3000 \times \frac{6}{100} = 180€.}$
**Ainsi on a : $C_{n+1} = C_n + 180$**
**Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours $180$ ainsi $C_n$ est une suite arithmétique de raison $180$ et de premier terme $3000$.**

2. Pour tout entier $n$, exprimer $C_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $C_n = 3000 + 180n$.**

3. De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans?

$\mathbf{C_{10} = 3000 + 180 \times 10 = 4800€.}$

4. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé?

**Cela revient à résoudre l'inéquation : $C_n \geq 2C_0$**
$\mathbf{3000 + 180n \geq 6000}$
$\mathbf{180n \geq 3000}$
$\mathbf{n \geq \frac{3000}{180}}$
**On trouve $n = 17$.**
**Le capital d'Albert aura doublé au bout de $17$ ans.**

5. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10000 € ?

**Cela revient à résoudre l'inéquation : $C_n \geq 10000$**
$\mathbf{3000 + 180n \geq 10000}$
$\mathbf{180n \geq 7000}$
$\mathbf{n \geq \frac{3700}{180}}$
**On trouve $n = 39$.**
**Le capital d'Albert aura dépassé 10000€ au bout de $39$ ans.**

**Exercice 15 : Suites arithmétiques (Modéliser)**

Au premier janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1500€.

Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7€ à partir du deuxième mois.

On note $a_0 = 1500$ son salaire d'embauche puis pour $n \geq 1$, $a_n$ son salaire à la fin du $(n+1)$ème mois.

1. Déterminer le salaire du deuxième mois.

$\mathbf{u_1 = 1500 + 7 = 1507}$

2. Exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$. En déduire la nature de la suite $(a_n)$.

**Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours $7$ ainsi $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $7$ et de premier terme $1500$.**

3. Exprimer $a_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $a_n = a_0 + nr = 1500 + 7n$.**

4. Déterminer le salaire du 7ème mois.

$\mathbf{a_6 = 1500 + 7 \times 6 = 1542}$

5. Déterminer le rang du premier mois pour lequel son salaire dépassera 2000€.

**Cela revient à résoudre $u_n > 2000$**
$\mathbf{1500 + 7n > 2000}$
$\mathbf{7n > 500}$
$\mathbf{n > 71,43 > 72.}$
**Son salaire dépassera 2000€ le $72 + 1 = 73$ ème mois.**
**Pensez à vérifier à la calculatrice (RECUR).**

**Exercice 16 : Modélisation arithmétique**

Alice a acheté une télévision au prix de 750 €. Son assureur lui annonce que le prix de sa télé perd 40 € de sa valeur tous les ans.

On veut modéliser la valeur de la télé chaque année par une suite $(u_n)$.

a) Donner l'expression de $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a :**
$u_{n+1} = u_n + r$
$u_{n+1} = u_n - 40.$

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

**Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre, ici $-40$.**
**Ainsi la suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r = -40$ et de premier terme $u_0 = 750.$**

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

**$r = -40 < 0$ donc $(u_n)$ est une suite strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.**

**Exercice 17 : Modélisation arithmétique**

On place à la banque un capital de 300 €. Chaque année, ce capital augmentera avec un taux d'intérêt à taux fixe. Ce taux est égal à 5% de la somme placée au départ.

a) Calculer le montant des intérêts annuels fixes.

$$Montant = 300 \times \frac{5}{100} = 15$$

**Ainsi le montant des intérêts annuels fixes est de 15€.**

b) On note $(C_n)$ le capital au bout de $n$ années. Quelle est la nature de la suite $(C_n)$ ? Donner ses éléments caractéristiques.

**Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours 15. Ainsi $(C_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 15$ et de premier terme $C_0 = 300.$**

c) Exprimer $C_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a :**
$C_n = 300 + 15n$

d) Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

$C_n \geq 2 \times 300$
$300 + 15n \geq 600$
$15n \geq 300$
$n \geq \frac{300}{15}$
$n \geq 20$

**Au bout de 20 années le capital aura doublé.**
**(Ici on aurait pu se contenter d'une équation).**

**Exercice 18 : Modélisation arithmétique**

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par $u_n$ le nombre d'abonnés en $2019 + n$ pour tout entier naturel $n$.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020et 2021.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u_1 = u_0 + 750}$<br>$\boldsymbol{u_1 = 6000 + 750}$<br>$\boldsymbol{u_1 = 6750}$ **abonnés en 2020** | $\boldsymbol{u_2 = u_1 + 750}$<br>$\boldsymbol{u_2 = 6750 + 750}$<br>$\boldsymbol{u_2 = 7500}$ **abonnés en 2021** |

2. Exprimer $u_{n+1}$en fonction de $u_n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**
$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$
$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 750.}$

3. Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

**Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre, ici 750.**
**Ainsi la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ est arithmétique de raison $\boldsymbol{r = 750}$ et de premier terme $\boldsymbol{u_0 = 6000}$.**

4. En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**
$\boldsymbol{u_n = 6000 + 750n}$

5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

$\boldsymbol{u_n = 18000}$
$\boldsymbol{6000 + 750n = 18000}$
$\boldsymbol{750n = 12000}$
$\boldsymbol{n = \frac{12000}{750}}$
$\boldsymbol{n = 16}$
**En 2019+16=2035 le nombre d'abonnés aura triplé.**

**Exercice 19 : Modélisation arithmétique**

Une personne qui n'a aucune pratique sportive décide au cours d'un mois de 30 jours de faire chaque jour 5 minutes de sport de plus que le jour précédent. On modélise cette situation par une suite $(t_n)$ telle que $t_0 = 0$ et où $t_n$ est le temps passé par cette personne à faire du sport le nième jour.

a) Déterminer $t_1$et $t_2$.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{t_1 = 5}$ | $\boldsymbol{t_2 = 10}$ |

b) Déterminer la nature de la suite $(t_n)$.

**Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours 5. Ainsi $\boldsymbol{(t_n)}$ est une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r = 5}$ et de premier terme $\boldsymbol{t_0 = 0}$.**

c) Exprimer $t_n$en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**
$\boldsymbol{u_n = 0 + 5n}$
$\boldsymbol{u_n = 5n}$

d) Déterminer le temps passé à faire du sport le trentième jour.

$\boldsymbol{t_{30} = 5 \times 30}$
$\boldsymbol{t_{30} = 150}$ **min (2h30 min)**

e) Calculer le temps passé à faire du sport au cours de ce mois.

**Nombre de termes : 31**
$\boldsymbol{t_0 = 0}$
$\boldsymbol{t_{30} = 150}$
$\boldsymbol{S = 31 \times \frac{150}{2} = 2325}$ **min**
**Le temps passé à faire du sport durant ce mois est de 2325 minutes.**

**Exercice 20 : Modélisation arithmétique**

Un nouveau parking souterrain vient d'ouvrir en centre-ville. Le premier jour de son exploitation, on constate une fréquentation de 350 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans ce parking de 10 voitures supplémentaires chaque jour.

a) Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

**Si on note $u_n$ le nombre de voitures passées dans ce parking le nième jour, on a :**

$$v_1 = 350$$

$v_{n+1} = v_n + 10$ **car il y a une augmentation de 10 voitures par jour.**
**La suite est donc arithmétique de raison 10.**
**On en déduit**
$v_n = v_1 + (n-1)r$
$v_n = 350 + (n-1) \times 10$
$v_n = 350 + 10n - 10$
$v_n = 340 + 10n$

**Pour la 1ère semaine, on a :**
$S = v_1 + \cdots + v_7$
**Avec** $v_1 = 350$ **et**
$v_7 = 340 + 7 \times 10 = 410$
$S = 7 \times \frac{v_1 + v_7}{2} = 7 \times \frac{350 + 410}{2} = 2660$

b) Le parking peut accueillir un total de 1500 voitures. Au bout de combien de jours sera-t-il saturé ?

**On cherche $n$ tel que :**
$u_n = 1500$
$340 + 10n = 1500$
$10n = 1160$
$n = \frac{1160}{10} = 116$

**Le parking est donc saturé au 116ème jour.**

c) Le coût de stationnement d'une voiture est en moyenne de 8 € par jour.

Combien la société exploitant ce parking aura-t-elle gagné entre l'ouverture et le jour où le parking sera à saturation ?

**On calcule le nombre total de voitures qui ont stationné entre le 1er et le 116ème jour**

$S = 116 \times \frac{v_1 + v_{116}}{2}$
$S = 116 \times \frac{350 + 1500}{2}$
$S = 107\,300$
**A 8 € par voiture, la somme gagnée est :**
$107\,300 \times 8 = 858\,400$ **euros.**

**Exercice 21 : Modélisation arithmétique**

Une entreprise spécialisée dans la confection de chaises doit fabriquer pour un des clients, qui dirige une chaine d'hôtels, 12 000 chaises. Elle commence à expédier, au mois de janvier 2020, 600 chaises. Pour répondre à la demande de son client plus rapidement, cette entreprise décide de produire 50 chaises de plus par mois.

On note $p_n$ la quantité de chaises produite le nième mois. Ainsi $p_1 = 600$.

a) Calculer $p_2$ et $p_3$.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{p_2 = 650}$ **le deuxième mois.** | $\boldsymbol{p_3 = 700}$ |

b) Quelle est la nature de la suite $(p_n)$ ? Préciser le premier terme et la raison.

**Pour passer d'un terme au suivant on ajoute toujours 50. Ainsi $(p_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme $p_1 = 600$.**

c) Exprimer le nombre de chaises produites le nième mois en fonction de n.

$\boldsymbol{p_n = p_1 + r(n-1)}$
$\boldsymbol{p_n = 600 + 50(n-1)}$
$\boldsymbol{p_n = 600 + 50n - 50}$
$\boldsymbol{p_n = 550 + 50n}$

d) En déduire le nombre de chaises produites entre le mois de janvier 2020 et le nième mois.

**Nombre de termes :** $\boldsymbol{n - 1 + 1 = n}$
$\boldsymbol{p_1 = 600}$
$\boldsymbol{p_n = 550 + 50n}$
$\boldsymbol{S = n \times \frac{600+550+50n}{2}}$
$\boldsymbol{S = n \times \frac{1150+50n}{2}}$
$\boldsymbol{S = n \times (575 + 25n)}$
$\boldsymbol{S = 575n + 25n^2}$

e) En déduire au bout de combien de temps l'entreprise aura terminé la commande de son client.

$\boldsymbol{S_n \geq 12000}$
**On utilise le mode table**
$\boldsymbol{S_{13} = 11700} < 12000$
$\boldsymbol{S_{14} = 12950} > 12000$

**Au bout de 14 mois, l'entreprise aura terminé sa commande.**

**<u>Remarque :</u> On peut aussi résoudre l'équation :**
$\boldsymbol{575n + 25n^2 = 12000}$
$\boldsymbol{25n^2 + 575n - 12000 = 0}$
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 1\,530\,625}$

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{n_1 = \frac{-575-\sqrt{1530625}}{50} < 0}$ | $\boldsymbol{n_2 = \frac{-575+\sqrt{1530625}}{50}}$<br>$\boldsymbol{n_2 \approx 14}$ |

**Exercice 22 : Modélisation arithmétique**

Le loyer annuel d'un appartement est de 6500 € à l'entrée dans les lieux en 2018. Chaque année, le loyer annuel augmente de 150 €. On modélise le prix des loyers annuels par une suite arithmétique $(u_n)$.

On note $u_0$ le loyer annuel (en euros) payé en 2018 et $u_n$ le prix du loyer annuel (en euros) pour l'année $(2018 + n)$.

a) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a :**

$$u_n = 6500 + 150n$$

b) en déduire la valeur du loyer en 2025.

$2025 - 2018 = 7$

$u_7 = 6500 + 150 \times 7$

$u_7 = 7550$

c) Calculer le montant total des loyers pour les 11 premières années.

**Nombre de termes : 11**

$u_0 = 6500$

$u_{10} = 6500 + 150 \times 10$

$u_{10} = 8000$

$$S = 11 \times \frac{6500 + 8000}{2} = 79750$$

d) Les locataires avait envisagé d'acheter une maison pour un budget de 200 000 € avant de se décider à louer cet appartement. En quelle année la somme des loyers dépassera-t-elle les 200 000 € ?

**On cherche à résoudre $S_n \geq 200\,000$**

**Nombre de termes : $n + 1$**

$u_0 = 6500$

$u_n = 6500 + 150n$

$S_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$

$S_n = (n + 1) \times \frac{6500 + 6500 + 150n}{2}$

$S_n = (n + 1) \times (6500 + 75n)$

$S_n = 6500n + 75n^2 + 6500 + 75n$

$S_n = 75n^2 + 6575n + 6500$

**On utilise le mode table**

$S_{23} = 197400 < 200000$

$S_{24} = 207500 > 200000$

**Ainsi la somme des loyers dépassera 200 000€ la 24ème année.**

**Remarque :** **On peut aussi résoudre l'équation :**

$75n^2 + 6575n + 6500 > 200\,000$

$75n^2 + 6575n - 193\,500 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 101\,280\,625$

| | |
|---|---|
| $n_1 =< 0$ | $n_2 \approx 24$ |

**<u>Exercice 23 (MATHG-37231-1002)</u>**

Fanny est inscrite dans un club d'athlétisme. Elle pratique le penta bond (le penta bond est un enchaînement de cinq bonds après une course d'élan).

La première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m.

Chaque semaine, la longueur de son saut augmente de 0,1 m.

Pour $n$ entier naturel **non nul**, on note $s_n$ la longueur, en mètres, de son saut la $n$-ième semaine d'entraînement.

Puisque lors de la première semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8 m, on a $s_1 = 8$.

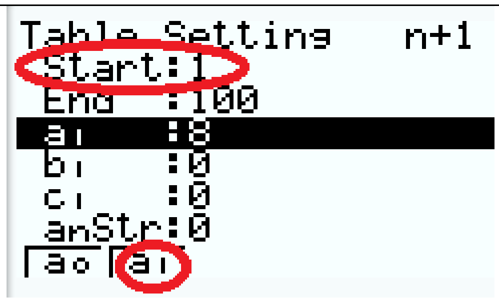
1. Pour $n \geq 2$, on considère la fonction Python suivante.

```
defsaut(n)
    s=8
    for k in range(2,n+1):
        s=s+0.1
    return s
```

a. Quelle valeur $s$ est-elle renvoyée par la commande saut(4) ?

**On utilise le mode recur avec $s_1 = 8$**

**On trouve $s = 8,3$**




b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

**On a en réalité calculé $s_4$ c'est-à-dire lors de la quatrième semaine d'entraînement, Fanny réalise un saut de 8,3 m**

2. Exprimer avec justification $s_n$ en fonction de $n$ pour $n$ entier naturel **non nul**.

**Pour tout entier naturel non nul $n$ on a :**

$\boldsymbol{s_n = s_1 + r(n-1)}$

$\boldsymbol{s_n = 8 + 0,1(n-1)}$

$\boldsymbol{s_n = 8 + 0,1n - 0,1}$

$\boldsymbol{s_n = 7,9 + 0,1n}$

3. Pour être qualifiée à une compétition, Fanny doit faire un saut d'au moins 12 mètres. À partir de quelle semaine, Fanny réalisera-t-elle un tel saut ? Justifier votre réponse.

**On cherche à résoudre $s_n \geq 12$**

$\boldsymbol{7,9 + 0,1n \geq 12}$

$\boldsymbol{0,1n \geq 12 - 7,9}$

$\boldsymbol{0,1n \geq 4,1}$

$\boldsymbol{n \geq \frac{4,1}{0,1}}$

$\boldsymbol{n \geq 41}$

**Au bout de 41 semaines Fanny se qualifiera à la compétition.**

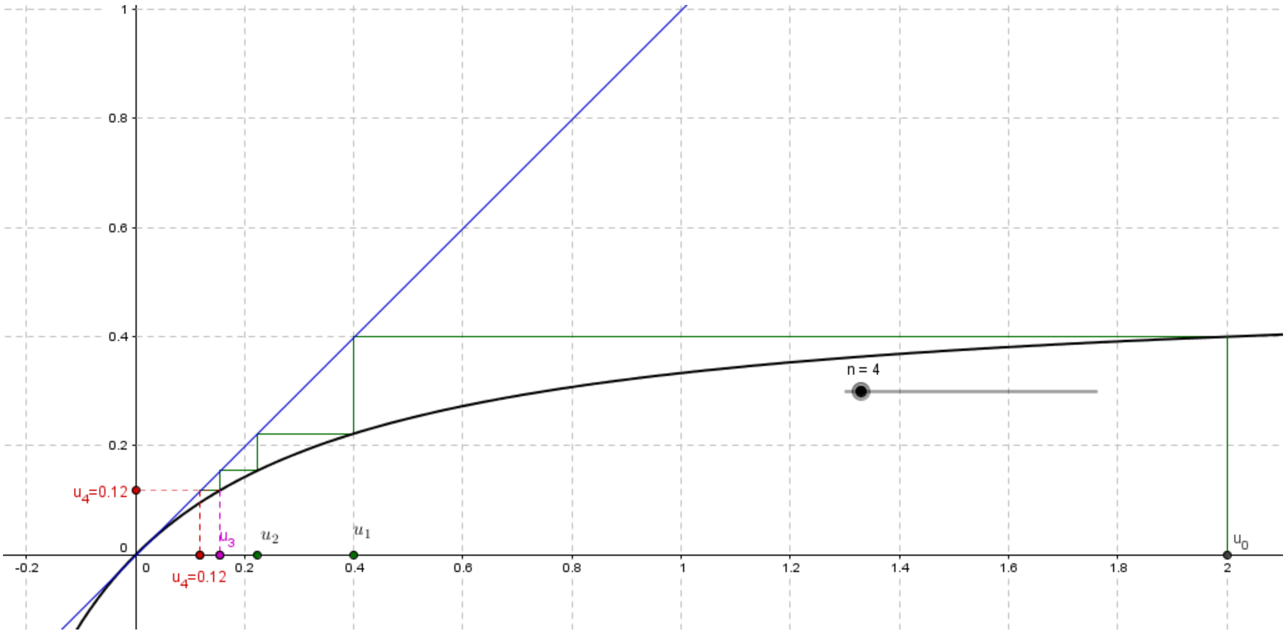
**Exercice supplémentaire : En route pour la terminale (Modéliser)**

Soit $(u_n)$ telle que $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}$.

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

1. (a) Tracer dans un repère orthonormé (unité : 1 carreau pour 0,2) la courbe d'équation $y = \frac{x}{1+2x}$.

   Représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)$ sur l'axe des abscisses. On laissera apparents les traits de construction.




   (b) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de la suite et sa limite ?

**La suite $(u_n)$ semble décroissante et semble tendre vers 0 à l'infini.**

2. Soit $(v_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ .

   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 2.

**Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{+1}} + 1 - \left(\frac{1}{u_n} + 1\right) = \frac{1+2u_n}{u_n} + 1 - \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{1}{u_n} + 2 - \frac{1}{u_n} = 2$.**
**Ainsi la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.**

   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a $v_n = \frac{3}{2} + 2n$.**

   (c) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $n$ on a $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ ainsi $u_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}+2n-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+2n} = \frac{1}{\frac{1+4n}{2}} = \frac{2}{1+4n}$**

**Compétence : Suites géométriques**

**Exercice 24 : Suites géométriques**

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme 10 et de raison 0,5.

Déterminer le deuxième terme de la suite $(u_n)$.

**Le deuxième terme vaut $\mathbf{10 \times 0,5 = 5}$..**

**Exercice 25 : Suites géométriques**

Indiquer la bonne réponse.

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Pour tout entier naturel $n$ :

a. $u_n = 2 + 3n$ b. $u_n = 2 + 3^n$ **c.** $\boldsymbol{u_n = 2 \times 3^n}$

**Exercice 26 : Suites géométriques**

Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

1. Déterminer $u_1, u_2$ et $u_3$.

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{u_1 = 3 \times 2 = 6}$ | $\boldsymbol{u_2 = 6 \times 2 = 12}$ | $\boldsymbol{u_3 = 12 \times 2 = 24}$ |

2. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n = 2u_n}$**

3. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n}$**

4. Déterminer $u_{17}$.

$\boldsymbol{u_{17} = 3 \times 2^{17} = 393216}$

**Exercice 27 : Suites géométriques**

Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_0 = 5$ et la relation $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ pour tout entier naturel $n$.

1. Justifier que $(v_n)$ est une suite géométrique et donner sa raison.

**Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$. Ainsi $\boldsymbol{(v_n)}$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ (et de premier terme 5).**

2. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a $\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$**

3. Déterminer $v_6$.

$\boldsymbol{v_6 = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{5}{729}}$

**Exercice 28 : Suites géométriques**

Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme $u_0$ et la raison $q$ d'une suite géométrique.

a. $u_0 = 5$ et $q = 2$ b. $u_0 = 7$ et $q = -2$ c. $u_0 = -2$ et $q = \frac{1}{5}$ d. $u_0 = -3$ et $q = 4$

1. Déterminer $u_1$ et $u_2$.
2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Calculer $u_{10}$.
4. Déterminer le sens de variation de la suite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** $\boldsymbol{u_1 = 10}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 20}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 5 \times 2^n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{10} = 5120}$<br>**4.** $\boldsymbol{q > 1}$ **et** $\boldsymbol{u_0 > 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante sur** $\mathbb{N}$**.** | **1.** $\boldsymbol{u_1 = -14}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = 28}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = 7 \times (-2)^n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{10} = 7168}$<br>**4.** $\boldsymbol{q < 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est alternée.** | **1.** $\boldsymbol{u_1 = -\frac{2}{5}}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = -\frac{2}{25}}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = -2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{10} = -\frac{2}{9765625}}$<br>**4.** $\boldsymbol{0 < q < 1}$ **et** $\boldsymbol{u_0 < 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante sur** $\mathbb{N}$ | **1.** $\boldsymbol{u_1 = -12}$ **et** $\boldsymbol{u_2 = -48}$<br>**2.** $\boldsymbol{u_n = -3 \times 4^n}$<br>**3.** $\boldsymbol{u_{10} = -3145728}$<br>**4.** $\boldsymbol{q > 1}$ **et** $\boldsymbol{u_0 < 0}$ **donc** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante sur** $\mathbb{N}$**.** |

**Exercice 29 : Suites arithmétiques**

$(u_n)$ est une suite géométrique de raison strictement positive $q$.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = \frac{9}{2}$. Calculer $q$.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u_2 = u_0 q^2}$<br>$\boldsymbol{q^2 = \frac{u_2}{u_0}}$<br>$\boldsymbol{q^2 = \frac{\frac{9}{2}}{2}}$ | $\boldsymbol{q^2 = \frac{9}{4}}$<br>$\boldsymbol{q = \sqrt{\frac{9}{4}}}$<br>$\boldsymbol{q = \frac{3}{2}}$ |

2. On sait que $u_0 = 16$ et $u_4 = 0{,}0256$ Calculer $q$.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u_4 = u_0 q^4}$<br>$\boldsymbol{q^4 = \frac{u_4}{u_0}}$<br>$\boldsymbol{q^4 = \frac{0{,}0256}{16}}$ | $\boldsymbol{q^4 = 0{,}0016}$<br>$\boldsymbol{q = \sqrt[4]{0{,}0016}}$<br>$\boldsymbol{q = 0{,}2}$ |

3. On sait que $u_1 = 7$ et $u_4 = 1512$ Calculer $q$ puis $u_7$.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u_4 = u_1 q^3}$<br>$\boldsymbol{q^3 = \frac{u_4}{u_1}}$<br>$\boldsymbol{q^3 = \frac{1512}{7}}$ | $\boldsymbol{q^3 = 216}$<br>$\boldsymbol{q = \sqrt[3]{216}}$<br>$\boldsymbol{q = 6}$<br><br>$\boldsymbol{u_7 = u_1 \times q^6 = 7 \times 6^6 = 326592}$ |

**Exercice 30 : Reconnaitre une suite géométrique**

Parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont géométrique et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

| | |
|---|---|
| a. $u_n = 2n^2 + 3$ | $\boldsymbol{u_0 = 3}$ ; $\boldsymbol{u_1 = 5}$ ; $\boldsymbol{u_2 = 11}$<br>$\boldsymbol{\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{3}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{u_2}{u_1} = \frac{11}{5} \neq \frac{5}{3}}$**. Ainsi** $\boldsymbol{(u_n)}$ **n'est pas une suite géométrique.** |
| b. $v_n = 4 \times 5^n$ | $\boldsymbol{v_n}$ **est de la forme** $\boldsymbol{v_0 \times q^n}$ **avec** $\boldsymbol{v_0 = 4}$ **et** $\boldsymbol{q = 5}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(v_n)}$ **est une suite géométrique de raison** $\boldsymbol{5}$ **et de premier terme** $\boldsymbol{4}$**.** |
| c. $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ | $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$ **est de la forme** $\boldsymbol{w_0 \times q^n}$ **avec** $\boldsymbol{w_0 = \frac{1}{3}}$ **et** $\boldsymbol{q = \frac{5}{3}}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(w_n)}$ **est une suite géométrique de raison** $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$ **et de premier terme** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$**.** |
| d. $x_n = 9^n + 11^n$ | $\boldsymbol{x_0 = 2}$ ; $\boldsymbol{x_1 = 20}$ ; $\boldsymbol{x_2 = 202}$<br>$\boldsymbol{\frac{x_1}{x_0} = \frac{20}{2} = 10}$ **et** $\boldsymbol{\frac{x_2}{x_1} = \frac{202}{20} = 10{,}1 \neq 10}$**. Ainsi** $\boldsymbol{(x_n)}$ **n'est pas une suite géométrique.** |

**Exercice 31 : Reconnaitre une suite géométrique**

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies sur $\mathbb{N}$.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite géométrique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 4^{v_n} \end{cases}$

| | |
|---|---|
| **Pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par** $\boldsymbol{5}$**. Ainsi** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est une suite géométrique de raison** $\boldsymbol{5}$ **(et de premier terme** $\boldsymbol{3}$**).** | $\boldsymbol{v_0 = 1}$ ; $\boldsymbol{v_1 = 4^{v_0} = 4}$ **et** $\boldsymbol{v_2 = 4^{v_1} = 256}$**.**<br>$\boldsymbol{\frac{v_1}{v_0} = 4}$ **et** $\boldsymbol{\frac{v_2}{v_1} = \frac{256}{4} = 64 \neq 4}$**.**<br>**Ainsi** $\boldsymbol{(v_n)}$ **n'est pas une suite géométrique.** |

**Exercice 32 : Somme et Suites géométriques**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Déterminer la somme $S = u_0 + \cdots + u_7$

$$S = u_0 \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 765$$

2. Déterminer la somme $S' = u_8 + \cdots + u_{14}$

**Il y a $(14 - 8) + 1 = 7$ termes dans cette suite. Et $u_8 = 3 \times 2^8 = 768$.**

$$S = u_8 \frac{(1 - q^{nombre\ de\ termes})}{1 - q} = 768 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = 97536$$

**Exercice 33 : Somme et Suites géométriques**

1. a. Déterminer la somme $S = 1 + 2 + +2^2 + \cdots + 2^7$.

$$S = \sum_{k=0}^{7} 2^k = \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 255$$

b. Application : On pose un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la deuxième, quatre grains de gris sur la troisième case…
On continue en doublant le nombre de grains de riz d'une case à la suivante.
Combien y-a-t-il de grains de riz sur la septième case ? sur la n-ième case ? sur l'échiquier ?

**Sur la septième case il y a $2^6 = 64$ grains de riz.**
**Sur la $n$-ème case il y a $2^{n-1}$ grains de riz.**
**Sur l'échiquier il y a $8 \times 8 = 64$ cases, ainsi il y a :**

$$S = \sum_{k=0}^{63} 2^k = \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \times 10^{19} \text{ grains de riz}$$

2. Déterminer la somme $S = \sum_{k=0}^{14} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

$$S = \sum_{k=0}^{14} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right) = 2 - \frac{1}{2^{14}}$$

**Exercice 34 : Tableur**

On a créé une feuille de calcul permettant de déterminer des termes d'une suite géométrique.
Le premier terme $u_0$ est saisi dans la cellule $B2$ et la valeur de la raison dans la cellule $D1$.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | $u_n$ | q= | 3 |
| 2 | 0 | 7 | | |
| 3 | 1 | | | |

Parmi les formules suivantes, choisir celles qui, saisies dans la cellule $B3$, permettent de compléter la colonne $B$ « par recopie vers le bas ».

| | | | |
|---|---|---|---|
| =D1*B2 | **=D$1*B2** | =$D1*B2 | **=$D$1*B2** |

Compétence : Modéliser une situation avec une suite géométrique

**Exercice 35 : Suites géométriques (Modéliser)**

La responsable d'un site payant d'information en ligne veut modéliser l'évolution du nombre d'abonnés dans les années futures. En 2015, le nombre d'abonnés est 1500 et la responsable estime que le nombre d'abonnés va augmenter de 3% par an.

On note $u_n$ le nombre total d'abonnés lors de l'année $2015+n$. On a donc $u_0=5000$.

1. Déterminer le nombre $u_1$ d'abonnés en 2016

**Augmenter de $3\%$ revient à multiplier par $1+\frac{3}{100}=1,03$.**
**$u_1=1500\times 1,03=1545$.**

2. Exprimer $u_{n+1}$en fonction de $u_n$ et en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $1,03$ ainsi $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $1500$.**
**Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1}=1,03u_n$**
**Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n=u_0\times q^n=1500\times 1,03^n$**

3. Estimer le nombre d'abonnés en 2025.

**$2025-2015=10$.**
**$u_{10}=1500\times 1,03^{10}\approx 2016$**

4. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés aura au moins doublé.

**On cherche à résoudre $u_n>3000$. On ne peut la résoudre en 1ère, on verra en TS la méthode par le calcul.**
**A la calculatrice (RECUR) : $u_{23}\approx 2960,3<3000$ et $u_{24}\approx 3049,1>3000$.**
**Le nombre d'abonnés aura au moins doublé en 2039 (2 015 + 24).**

**Exercice 36 : Suites géométriques (Modéliser)**

Pour stocker des fichiers photos dans un appareil numérique ou sur disque dur, on utilise des algorithmes de compression pour réduire la taille du fichier.

On estime qu'à chaque niveau de compression la taille du fichier diminue de 21,4%.

Considérons un fichier de taille initial 689 ko.

On pose $T_0=689$ et, pour tout entier naturel non nul $n$, $T_n$ désigne la taille de ce fichier après compression de niveau $n$.

1. Déterminer $T_1$

**Diminuer de $21,4\%$ revient à multiplier à $1-\frac{21,4}{100}=0,786$.**
**$u_1=689\times 0,786=541,554$.**

2. Exprimer $T_{n+1}$ en fonction de $T_n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $T_{n+1}=0,786T_n$.**

3. En déduire la nature de la suite $(T_n)$.

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $0,786$ ainsi $(T_n)$ est une suite géométrique de raison $0,786$ et de premier terme $689$.**

4. Déterminer l'expression du terme général $T_n$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $T_n=T_0\times q^n=689\times 0,786^n$**

5. Déterminer la taille du fichier après une compression de niveau sept.

**$T_7=689\times 0,786^7\approx 127,7$ ko**

**Exercice 37 : Suites géométriques**

Victor est né le 1er janvier 2008. À sa naissance, son père a décidé de mettre de l'argent de côté pour lui.

Il place 2 000 euros le 1er janvier 2008 à intérêts composés au taux annuel de 3 %.

On note $u_n$ le capital acquis par Victor à l'année $2008 + n$.

a. Justifier que $(u_n)$ est une suite géométrique, préciser le terme initial et la raison.

| |
|---|
| **Augmenter de $3\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.**<br>**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $1,03$ ainsi $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 1,03$ et de 1er terme $u_0 = 2000$.** |

b. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 2000 \times 1,03^n$** |

c. A 18 ans, Victor veut s'acheter une moto qui coûte 3 500 euros.

Pourra-t-il le faire ? Justifier.

| |
|---|
| $u_{18} = 2000 \times 1,03^{18} \approx 3405€ < 3500$<br>**Victor ne pourra pas s'acheter une moto qui coûte 3 500 euro à 18 ans.** |

**Exercice 38 : Suites géométriques (Modéliser)**

La population d'une banlieue augmente de 7% par an et celle du centre-ville diminue de 4% par an . En janvier 2015, elles sont toutes les deux de 30000 habitants. Pour tout $n$ entier naturel, on note $b_n$ et $c_n$ les populations de la banlieue et du centre-ville l'année $2015 + n$.

1. Déterminer les populations l'année 2016 , puis les populations en 2017 .

| |
|---|
| **Pour la banlieue, augmenter de $7\%$ revient à multiplier par $1 + \frac{7}{100} = 1,07$.**<br>$b_1 = 1,07 \times 30000 = 32100$ **habitants en 2016 et** $b_2 = 1,07 \times 32100 = 34347$ **habitants en 2017.**<br>**Pour le centre-ville, diminuer de $4\%$ revient à multiplier par $1 - \frac{4}{100} = 0,96$.**<br>$c_1 = 0,96 \times 30000 = 28800$ **habitants en 2016 et** $c_2 = 0,96 \times 28800 = 27648$ **habitants en 2017.** |

2. a. Exprimer $b_{n+1}$ en fonction de $b_n$. En déduire la nature de la suite $(b_n)$.

| |
|---|
| **Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $1,07$ ainsi $(b_n)$ est une suite géométrique de raison $1,07$ et de premier terme $30000$.**<br>**Pour tout entier naturel $n$, on a : $b_{n+1} = 1,07b_n$.** |

b. Exprimer $b_n$ en fonction de $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$, on a : $b_n = 30000 \times 1,07^n$** |

3. a. Exprimer $c_{n+1}$ en fonction de $c_n$. En déduire la nature de la suite $(c_n)$.

| |
|---|
| **Pour passer d'un terme au suivante on multiplie toujours par $0,96$ ainsi $(c_n)$ est une suite géométrique de raison $0,96$ et de premier terme $30000$.**<br>**Pour tout entier naturel $n$, on a : $c_{n+1} = 0,96c_n$.** |

b. Exprimer $c_n$ en fonction de $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $n$, on a : $c_n = 30000 \times 0,96^n$** |

4. Déterminer les populations prévues pour l'année 2033.

| | |
|---|---|
| $2033 - 2015 = 18$<br>$b_{18} = 30000 \times 1,07^{18} \approx 101398$ | $c_{18} = 30000 \times 0,96^{18} \approx 14388$ |

5. Déterminer à la calculatrice le plus petit entier naturel $n$ tel que :

a. La population de la banlieue soit supérieure à 50000 habitants.

| |
|---|
| **On cherche à résoudre $b_n > 50000$.**<br>**A la calculatrice (RECUR) : $b_7 \approx 48173 < 50000$ et $b_8 \approx 51546 > 50000$.**<br>**La population de la banlieue sera supérieure à 50000 habitants en 2023.** |

b. La population du centre-ville soit inférieure à 10000 habitants.

| |
|---|
| **On cherche à résoudre $c_n < 10000$.**<br>**A la calculatrice (RECUR) : $c_{26} \approx 10379 > 10000$ et $c_{27} \approx 9964 < 10000$.**<br>**La population de la banlieue sera supérieure à 50000 habitants en 2042.** |

**Exercice 39 : Suites géométriques (Modéliser)**

***BAC STI2D – Polynésie juin 2014***

*« En 2009, les Français ont en moyenne produit 374 kg de déchets ménagers par habitant. »*

Le maire d'une commune de 53700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.

Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.

**$53700 \times 374 = 20\ 083\ 800$ kg, soit $20\ 083$ tonnes.**

**Sachant que la ville compte 53 700 habitants et que la production moyenne nationale de déchets en 2009 était de 374 kg par habitant, la ville aurait du produire environ 20 083 tonnes de déchets et non 23 000 comme cela a été le cas, d'où la déception du maire : sa ville produit plus de déchets que la moyenne nationale.**

2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul $n$, on note $d_n$ la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.

a. Montrer que $d_1 = 0{,}985 d_0$.

**Diminuer de$1,5\%$ revient à multiplier par $1 - \frac{1,5}{100} = 0,985$.**

**$d_1 = 0,985 \times d_0$.**

b. Déterminer la nature de la suite $(d_n)$.

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $0,985$ ainsi $(d_n)$ est une suite géométrique de raison $0,985$ et de premier terme $d_0 = 400$.**

c. Exprimer $d_n$en fonction de $n$

**Pour tout entier naturel $n$, on a : $d_n = d_0 \times q^n = 400 \times 0,985^n$**

d. Calculer la limite de la suite $(d_n)$.

**$0 < q < 1$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,985^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$**

e. Quelle devrait être, à ce rythme-là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?

**$2014 - 2011 = 3$.**

**$d_3 = 400 \times 0,985^5 \approx 382$.**

**La production de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 serait alors de $382$ kg.**

f. En quelle année le maire pourra être satisfait ?

**On cherche à résoudre $d_n \leq 374$**

**A la calculatrice (RECUR) : $d_4 \approx 377 > 374$ et $d_5 \approx 371 < 374$**

**Ainsi le maire sera satisfait en $2011 + 5 = 2016$.**

3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que l'appel dechets(374) renvoie le nombre d'années nécessaires pour que la production de déchets de la ville devienne inférieure ou égale à la moyenne Française de 2009.

```
def dechets(M):
    d=400
    a=2011
    while d>374 :
        d=0.985*d
        a=a+1
    return a
```

**Exercice 40 : Modélisation géométrique**

Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2019, il reçoit une commande de 7500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.

1) Le délai est-il suffisant ? Justifier.

$\mathbf{250 \times 24 = 6000} < 7500$
**Le délai est insuffisant.**

2) Le chef d'atelier décide d'augmenter la production chaque semaine de 5%. On note $(u_n)$ le nombre de lunettes produites la nième semaine et on a $u_1 = 250$.

a) Calculer $u_2$et $u_3$.

**Augmenter de 5% revient à multiplier par** $\mathbf{1 + \frac{5}{100} = 1,05}$

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u_2 = 1,05u_1}$ | $\boldsymbol{u_3 = 1,05u_2}$ |
| $\boldsymbol{u_2 = 1,05 \times 250}$ | $\boldsymbol{u_3 = 1,05 \times 262,5}$ |
| $\boldsymbol{u_2 = 262,5}$ | $\boldsymbol{u_3 = 275,625}$ |

b) Déterminer la nature de la suite $(u_n)$ et préciser ses éléments caractéristiques.

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $\mathbf{1,05}$ ainsi $\boldsymbol{(u_n)}$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q = 1,05}$ et de 1er terme $\boldsymbol{u_1 = 250}$.**

c) Exprimer le terme général $u_n$ en fonction de $n$.

$\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$
$\boldsymbol{u_n = 250 \times 1,05^{n-1}}$

d) Conclure.

**Nombre de termes : 24 (semaines)**

$$\boldsymbol{S = u_1 \times \frac{1 - q^{24}}{1 - q} = 250 \times \frac{1 - 1,05^{24}}{1 - 1,05} = 11\,125,5}$$

**Avec une augmentation de $\mathbf{5\%}$ on peut largement effectuer une commande de $\mathbf{7500}$.**

**Exercice 41 : Modélisation géométrique:**

Un jour donné, la pression atmosphérique à l'altitude 0 est égale à 1000 hectopascals (hPa) et diminue de 1 %pour une élévation en altitude de 100 m. On note $u_n$ la pression atmosphérique à $n$ centaines de mètres d'altitude, où $n$ est un entier naturel.

a) Déterminer la pression atmosphérique à 100 m et à 200 m d'altitude.

**Diminuer de 1% revient à multiplier par** $\mathbf{1 - \frac{1}{100} = 0,99}$

$\boldsymbol{u_1 = 0,99u_0}$
$\boldsymbol{u_1 = 0,99 \times 1\,000}$
$\boldsymbol{u_1 = 990}$
**A 100m …**

b) Etablir un lien entre $u_{n+1}$et $u_n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**

$$\boldsymbol{u_{n+1} = 0,99u_n}$$

c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $\mathbf{0,99}$ ainsi $\boldsymbol{(u_n)}$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q = 0,99}$ et de 1er terme $\boldsymbol{u_0 = 1\,000}$.**

d) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**

$$\boldsymbol{u_n = 1\,000 \times 0,99^n}$$

e) En déduire la pression atmosphérique au sommet du Mont-Blanc ce jour-là. *(On prendra 4800m comme altitude)*

$\boldsymbol{u_{48} = 1000 \times 0,99^{48}}$
$\boldsymbol{u_{48} = 617,2901}$
$\boldsymbol{u_{48} \approx 617\ hPa}$

**Exercice 42 : TTCMATH06292**

On considère la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0$ égal à 300 et de raison $q$ égale à 1,13.

1. Cette suite sert à modéliser une évolution.
   Préciser si cette évolution correspond à une augmentation ou une diminution et indiquer le taux d'évolution, exprimé en pourcentage, associé.

| |
|---|
| $\mathbf{1,13 > 1}$ **ainsi on a une augmentation de** $\mathbf{13\%}$**.** |

2. Exprimer $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :** $\boldsymbol{u_n = 300 \times 1,13^n}$ |

3. Justifier que $u_{11}$ est proche de 1 150.

| |
|---|
| $\boldsymbol{u_{11} = 300 \times 1,13^{11}}$<br>$\boldsymbol{u_{11} \approx 1150,76}$ |

4. Calculer $\sum_{i=0}^{11} u_i$ soit $u_0 + u_1 + \cdots + u_{11}$. On arrondira le résultat à l'unité.

| |
|---|
| **Nombre de termes : 12**<br>$$\boldsymbol{S = 300 \times \frac{1-1,13^{12}}{1-1,13} \approx 7695}$$ |

Une usine a produit et installé au total plus de 7 500 piscines dans la région de la Loire, de janvier 2007 à janvier 2019. Cette usine est passée d'une capacité de production annuelle de 300 piscines en 2007 à 1 150 piscines en 2018. La production annuelle suit une évolution relative constante.

5. Peut-on utiliser la suite $(u_n)$ pour modéliser la production de piscines depuis 2007 de cette usine? Justifier la réponse.

| | |
|---|---|
| **2007 correspond à** $\boldsymbol{u_0 = 300}$<br>$\boldsymbol{2007 + 11 = 2018}$ **correspond à** $\boldsymbol{u_{11} = 1150}$ | **Avec une augmentation relative de** $\mathbf{13\%}$ **on peut modéliser la production de piscines depuis 2007 de cette usine.** |

**Exercice 43 : TTCMATH06289**

Le dioxyde de carbone ou $CO_2$ est un des gaz à effet de serre.

En 1960, les émissions de $CO_2$ dans le monde ont été estimées à 15,4 milliards de tonnes. Depuis, on estime que ces émissions augmentent chaque année de 1,8 % par rapport à l'année précédente.

Pour tout entier naturel $n$, le nombre $u_n$ désigne les émissions de $CO_2$, exprimées en milliard de tonnes, pendant l'année $(1960 + n)$. On a ainsi : $u_0 = 15{,}4$.

1. Vérifier que $u_1 = 15{,}6772$.

| |
|---|
| **Augmenter de 1,8% revient à multiplier par** $\boldsymbol{1 + \frac{1{,}8}{100} = 1,018}$<br>$\boldsymbol{u_1 = 1,018u_0}$<br>$\boldsymbol{u_1 = 1,018 \times 15,4}$<br>$\boldsymbol{u_1 = 15,6772}$ |

2. Justifier que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

| |
|---|
| **Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par** $\boldsymbol{1,018}$ **ainsi** $\boldsymbol{(u_n)}$ **est une suite géométrique de raison** $\boldsymbol{q = 1,018}$ **et de 1er terme** $\boldsymbol{u_0 = 15,4}$**.** |

3. Exprimer $u_n$ en fonction de l'entier naturel $n$.

| |
|---|
| **Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**<br>$$\boldsymbol{u_n = 15,4 \times 1,018^n}$$ |

4. Selon ce modèle défini par la suite $(u_n)$, déterminer l'année à partir de laquelle les émissions annuelles de $CO_2$ émises dans le monde dépasseront les 75 milliards de tonnes.

| |
|---|
| $\boldsymbol{u_n} > 75$<br>$\boldsymbol{15,4 \times 1,018^n} > 75$<br>$\boldsymbol{u_{88} \approx 74,015} < 75$<br>$\boldsymbol{u_{89} \approx 75,348} > 75$<br>**En** $\boldsymbol{1960 + 89 = 2049}$ **les émissions annuelles de** $\boldsymbol{CO_2}$ **émises dans le monde dépasseront les** $\boldsymbol{75}$ **milliards de tonnes.** |

5. Selon ce même modèle, un journaliste prétend que les émissions totales de $CO_2$ émises dans le monde depuis 1960 dépasseront les 2 000 milliards de tonnes en 2030. A-t-il raison ?

| |
|---|
| **Nombre de termes : 71**<br>$\boldsymbol{S = 15,4 \times \frac{1-1{,}018^{71}}{1-1{,}018} = 2180,7}$ **milliards de tonnes.**<br>**La journaliste a donc raison.** |

**Exercice 44 : TTCMATH06288**

Le directeur d'un cinéma de centre-ville a vu le nombre d'entrées diminuer de 5 % par an depuis l'ouverture en 2000, année au cours de laquelle il avait comptabilisé 200 000 entrées.

Pour tout entier naturel $n$, on modélise par $u_n$ le nombre d'entrées dans ce cinéma l'année $2000 + n$ . On définit ainsi la suite $u$sur $\mathbb{N}$. On a : $u_0 = 200\,000$.

1. Quelle est la nature de la suite $u$ ? Justifier et donner la valeur de la raison.

**Diminuer de 5% revient à multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$**
**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $0,95$ ainsi $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de 1^er^ terme $u_0 = 200\,000$.**

2. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$, où $n$ est un entier naturel.

**Pour tout entier naturel $n$ on a :**

$$\boldsymbol{u_n = 200\,000 \times 0,95^n}$$

3. Selon ce modèle, combien d'entrées le directeur a-t-il comptabilisé entre 2000 et 2010 ? Arrondir le résultat à l'unité.

**Nombre de termes : 11**

$$\boldsymbol{S = 200\,000 \times \frac{1 - 0,95^{11}}{1 - 0,95} \approx 1\,724\,800}$$

**Entre $2000$ et , le directeur a comptabilisé environ 1 724 800 places.**

4. On cherche à déterminer au bout de combien d'années, le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été **divisé par deux** par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma. Pour cela, on programme une fonction, en langage Python, appelée cinéma et sans argument :
   a) Compléter les instructions manquantes afin de répondre au problème posé.
   b) Le programme renvoie la valeur 14. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

**Au bout de 14 ans le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été divisé par deux par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma.**

```
def cinema():
  N = 0
  U = 200000
  whileU >100 000:
    N = N+1
    U = 0,95U
  return N
```

**Exercice 45 : Suites arithmético-géométriques**

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013. Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique $(a_n)$.

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et $a_n$ représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2014 + n$.

1. a. Calculer $a_1$ et $a_2$.

**$80\%$ des anciens inscrits renouvelleront leur inscription signifie qu'on a une baisse de $20\%$.**
**Le coefficient multiplicateur est alors de $1 - \frac{20}{100} = 0,8$. On rajoute 400 nouveaux adhérents.**

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a_1 = 2500 \times 0,8 + 400 = 2400}$ | $\boldsymbol{a_2 = 2400 \times 0,8 + 400 = 2320}$ |

b. Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a la relation : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 400$

**De l'année $n$ à l'année $n + 1$ on a :**

- **80 % de renouvellement : $0,8a_n$,**
- **400 nouveaux adhérents : $+400$**

**donc pour tout entier naturel $n$, on a la relation : $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$**

2. On pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = a_n - 2000$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.

**Pour tout entier naturel $n$, on a :**

$$\boldsymbol{v_{+1} = a_{n+1} - 2000 = 0,8a_n + 400 - 2000 = 0,8a_n - 1600 = 0,8(a_n - 2000) = 0,8v_n}$$

**Ainsi $(v_n)$ est géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2500 - 2000 = 500.$**

b. En déduire que le terme général de la suite $(a_n)$ est : $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2000$.

**D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n$ et :**
**Pour tout entier naturel $n$, $v_n = a_n - 2000$ ainsi $a_n = v_n + 2000 = 500 \times 0,8^n + 2000$**

c. Calculer la limite de la suite $(a_n)$.

**$0 < q < 1$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,8^n = 0$ et en rajoutant $2000$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2000$**

d. Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir.

**Au fil des années le nombre d'adhérents décroit et va venir se stabiliser vers 2000.**

3. On propose l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | N est un entier |
| | A est un réel |
| **Initialisation :** | N prend la valeur 0 |
| | A prend la valeur 2500 |
| **Traitement :** | Tant que $A - 2000 > 50$ |
| | A prend la valeur $A \times 0,8 + 400$ |
| | N prend la valeur $N + 1$ |
| | Fin du Tant que |
| **Sortie :** | Afficher N |

a. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

**L'algorithme retourne le rang de la première année où le nombre d'adhérents est inférieur ou égal à 2050.**

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

**A la calculatrice (RECUR) : $a_{10} \approx 2053.6 > 2050$ et $a_{11} \approx 2042,9 < 2050$.**
**Donc à partir de $2013 + 11 = 2024$ pour la première fois le nombre d'adhérents sera inférieure à 2050.**

**Exercice 46 : Modélisation géométrique**

Bob vient d'acheter un lave-linge très perfectionné à 1500 € qu'il décide d'assurer. En cas de défaillance, l'assureur rembourse l'appareil mais il applique une décote de 12% par an sur la valeur de l'appareil.

On note $a_n$ la valeur remboursable du lave-linge lors de la nième année. On a $a_0 = 1500$.

a) Calculer $a_1$et $a_2$.

| | |
|---|---|
| **Diminuer de 12% revient à multiplier par** $\mathbf{1-\frac{12}{100}=0,88}$ | |
| $\boldsymbol{a_1 = 0,88a_0}$ | $\boldsymbol{a_2 = 0,88a_1}$ |
| $\boldsymbol{a_1 = 0,88 \times 1\,500}$ | $\boldsymbol{a_2 = 0,88 \times 1\,320}$ |
| $\boldsymbol{a_1 = 1320}$ | $\boldsymbol{a_2 = 1\,161,6}$ |

b) Etablir un lien entre $a_{n+1}$et $a_n$ pour tout entier naturel $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**

$$\boldsymbol{a_{n+1} = 0,88a_n}$$

c) Quelle est la nature de la suite $(a_n)$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $\mathbf{0,88}$ ainsi $(\boldsymbol{a_n})$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q = 0,88}$ et de 1er terme $\boldsymbol{a_0 = 1\,500}$.**

d) Exprimer $a_n$ en fonction de $n$.

**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ on a :**

$$\boldsymbol{a_n = 1500 \times 0,88^n}$$

e) On voudrait savoir à partir de quelle année la valeur remboursable du lave-linge sera-t-elle inférieure à 100€.

Ecrire un programme en Python afin de répondre au problème et déterminer la réponse au problème posé.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{a_n} < 100$<br>**A la calculatrice on trouve :**<br>$\boldsymbol{a_{21}} \approx \mathbf{102,38} > 100$<br>$\boldsymbol{a_{22}} \approx \mathbf{90,1} < 100$ | **A partir de la 22ème année la valeur remboursable du lave-linge sera inférieure à 100€.** |

**Exercice 47 : Arithmétique ? Géométrique ?**

Chacune des situations suivantes peut-être modélisée par une suite.

Est-elle arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre ? Modéliser, si possible, ces situations à l'aide d'une suite $(u_n)$ et exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

1. La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 8% chaque heure après l'injection de ce médicament.

**Diminuer de $\mathbf{8\%}$ revient à multiplier par $\mathbf{1-\frac{8}{100}=0,92}$.**
**$\boldsymbol{u_n}$ représente la concentration du médicament la n-ième heure.**
**Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par $\mathbf{0,92}$.**
**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,92u_n}$ ainsi $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite géométrique de raison $\mathbf{0,92}$.**

2. Chaque année une piscicultrice voit la population de son élevage de poissons augmenter de 10% de façon naturelle et de 200 poissons qu'elle ajoute.

**$\boldsymbol{u_n}$ représente la population de l' élevage de poissons la n-ième année.**
**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = 1,1u_n + 200}$ ainsi $(\boldsymbol{u_n})$ est ni arithmétique, ni géométrique.**
**<u>Remarque :</u> La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite arithmético-géométrique.**

3. Le prix du loyer augmente de 40€ tous les trois ans.

**$\boldsymbol{u_n}$ représente le prix du loyer la $\boldsymbol{3n}$-ième année.**
**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 40}$ ainsi $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite arithmétique de raison $\mathbf{40}$.**

4. L'étude de la population d'une ville montre que chaque année elle perd 2% de ses habitants mais voit arriver une cinquantaine de nouveaux habitants.

**$\boldsymbol{u_n}$ représente la population de la ville la n-ième année.**
**Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,98u_n + 50}$ ainsi $(\boldsymbol{u_n})$ est ni arithmétique, ni géométrique.**
**<u>Remarque :</u> La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est une suite arithmético-géométrique.**

Compétence : Symbole $\sum$

**Exercice 48 :**

Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

$$a)\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2=\sum_{k=1}^{13}\boldsymbol{k^2}$$

$$b)\ 3^2+4^2+5^2+\cdots+103^2=\sum_{k=3}^{103}\boldsymbol{k^2}$$

$$c)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{101}{102}=\sum_{k=1}^{101}\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k+1}}$$

$$d)\ 1^3+2^3+\cdots+25^3=\sum_{k=1}^{25}\boldsymbol{k^3}$$

$$e)\ 1\times2+\ 2\times3+3\times4+\cdots+25\times26$$

$$=\sum_{k=1}^{25}\boldsymbol{k(k+1)}$$

$$f)\ 3+7+11+\cdots 47=\sum_{k=0}^{11}\boldsymbol{3+4k}$$

**Somme de termes d'une suite arithmétiques de raison $r=4$ et de 1er terme $u_0=3$**

$$g)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}}$$

**Exercice 50 :**

Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes.

$$a)\ \sum_{k=2}^{15}\frac{1}{k^2}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2^2}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3^2}}+\cdots+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{15^2}}$$

$$b)\ \sum_{j=0}^{12}(-3+2j)$$

$$=(\boldsymbol{-3+2\times0})+(\boldsymbol{-3+2\times1})+(\boldsymbol{-3+2\times2})+\cdots+(\boldsymbol{-3+2\times12})$$

$$=(\boldsymbol{-3})+(\boldsymbol{-1})+\boldsymbol{1}+\cdots+\boldsymbol{21}$$

**Les termes augmentent de 2 en 2....**

$$c)\ \sum_{i=0}^{27}\left((-1)^i(1+i)\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{(-1)^0(1+0)}\right)+\left(\boldsymbol{(-1)^1(1+1)}\right)+\cdots+\left(\boldsymbol{(-1)^{27}(1+27)}\right)$$

$$=\boldsymbol{1-2+3-4+\cdots+27-28}$$

**Exercice 49 :**

Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

$$S_1=1+2+3+\cdots+253=\sum_{k=1}^{253}\boldsymbol{k}$$

$$S_2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{k^2}$$

$$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{34\times35}$$

$$=\sum_{k=1}^{34}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k\times(k+1)}}$$

$$S_4=1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\sum_{k=1}^{n+1}\boldsymbol{k^3}$$

$$S_5=1+0{,}8^1+0{,}8^2+\cdots+0{,}8^{25}=\sum_{k=0}^{25}\boldsymbol{0{,}8^k}$$

$$S_6=0{,}3^0+0{,}3^1+0{,}3^2+\cdots+0{,}3^n=\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{0{,}3^k}$$

**Exercice 51 :**

Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes.

$$a)\ \sum_{i=7}^{18}\frac{1}{i^3}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{7^3}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8^3}}+\cdots+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{18^3}}$$

$$b)\ \sum_{j=8}^{14}(5j+6)$$

$$=(\boldsymbol{5\times8+6})+(\boldsymbol{5\times9+6})+\cdots+(\boldsymbol{5\times\ 14+\ 6})$$

$$=\boldsymbol{46+51+56\ldots+76}$$

Les termes augmentent de 5 en 5....

$$c)\ \sum_{i=3}^{15}\left((-1)^i i^2\right)$$

$$=\left((-1)^3\times3^2\right)+\left((-1)^4\times4^2\right)+\cdots+\left((-1)^{15}\times15^2\right)$$

$$=\boldsymbol{-3^2+4^2-5^2+\cdots+14^2-15^2}$$

$$d)\ \sum_{k=0}^{6}\left(-4\times(-5)^k\right)$$

$$=\left(-4\times(-5)^0\right)+\left(-4\times(-5)^1\right)+\cdots+\left(-4\times(-5)^6\right)$$

$$=(\boldsymbol{-4})+\boldsymbol{20}+\cdots+\boldsymbol{62500}$$

**Les termes sont multipliés par $-5$ à chaque fois**

$d)\ \sum_{k=0}^{10}(2\times 3^k) = \ (\mathbf{2\times 3^0}) + (\mathbf{2\times 3^1})$

$+ (\mathbf{2\times 3^2}) + \cdots + (\mathbf{2\times 3^{10}})$

$= \mathbf{2 + 6 + 18 + \cdots + 118\,098}$

**Les termes sont multipliés par 3 à chaque fois**

## Compétence : Etude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

**Exercice 52 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour tout n de IN.

1) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ?

<table>
<tr><td>$u_0 = 0$</td><td>$u_1 = \sqrt{1+0^2}$<br>$u_1 = 1$</td><td>$u_2 = \sqrt{1+1^2}$<br>$u_2 = \sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$u_1 - u_0 = 1$</td><td>$u_2 - u_1 = \sqrt{2} - 1 \neq 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ainsi $(u_n)$ n'est pas une suite arithmétique.</td></tr>
</table>

2) On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = u_n^2$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $v_0 = u_0^2$<br>$v_0 = 0^2$<br>$v_0 = 0$ | $v_1 = u_1^2$<br>$v_1 = 1^2$<br>$v_1 = 1$ | $v_2 = u_2^2$<br>$v_2 = \sqrt{2}^2$<br>$v_2 = 2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = 4$ |

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

**$(v_n)$ semble être une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0$.**

c) Démontrer votre conjecture.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n^2$

$v_{n+1} = u_{n+1}^2$

$v_{n+1} - v_n = 1 + u_n^2 - u_n^2 = 1$

**Ainsi $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0$.**

3) a) Donner l'expression de $v_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = v_0 + rn$

$v_n = 0 + 1 \times n$

$v_n = n$

b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n^2$

**En supposant $u_n \geq 0$ on a :**

$u_n = \sqrt{v_n}$

$u_n = \sqrt{n}$

**Exercice 53 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}$ pour tout n de IN.

1) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ?

| | | |
|---|---|---|
| $u_0 = \frac{1}{2}$ | $u_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}$<br>$u_1 = \frac{\frac{1}{2}}{2}$<br>$u_1 = \frac{1}{4}$ | $u_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1+2\times\frac{1}{4}}$<br>$u_2 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}$<br>$u_2 = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$<br>$u_2 = \frac{1}{6}$ |
| $u_1 - u_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ | $u_2 - u_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{1}{12} \neq -\frac{1}{4}$ | |
| **Ainsi $(u_n)$ n'est pas une suite arithmétique.** | | |

2) On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

| | | |
|---|---|---|
| $v_0 = \frac{1}{u_0} + 1$<br>$v_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1$<br>$v_0 = 2 + 1$<br>$v_0 = 3$ | $v_1 = \frac{1}{u_1} + 1$<br>$v_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 1$<br>$v_1 = 4 + 1$<br>$v_1 = 5$ | $v_2 = \frac{1}{u_2} + 1$<br>$v_2 = \frac{1}{\frac{1}{6}} + 1$<br>$v_2 = 6 + 1$<br>$v_2 = 7$ |

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

**$(v_n)$ semble être une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$.**

c) Démontrer votre conjecture.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1+2u_n}{u_n} + 1$$
$$v_{n+1} = \frac{1+2u_n}{u_n} + \frac{u_n}{u_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{1+3u_n}{u_n}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1+3u_n}{u_n} - \left(\frac{1}{u_n} + 1\right)$$
$$= \frac{1+3u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} - 1$$
$$= \frac{1+3u_n-1}{u_n} - 1$$
$$= \frac{3u_n}{u_n} - 1$$
$$= 3 - 1$$
$$= 2$$

**Ainsi $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$.**

3) a) Donner l'expression de $v_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$$v_n = v_0 + rn$$
$$v_n = 3 + 2n$$

b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$$v_n = \frac{1}{u_n} + 1$$
$$\frac{1}{u_n} = v_n - 1$$
$$u_n = \frac{1}{v_n - 1}$$
$$u_n = \frac{1}{3+2n-1}$$
$$u_n = \frac{1}{2+2n}$$

**Exercice 54 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ pour tout n de IN.

1) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

| | | |
|---|---|---|
| $u_0 = 1$ | $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4}$<br>$u_1 = \frac{3}{4}$ | $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$<br>$u_2 = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$<br>$u_2 = \frac{5}{8}$ |
| $u_1 - u_0 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$<br>$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$ | $u_2 - u_1 = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8} \neq -\frac{1}{4}$<br>$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{3}{4}$ | |
| **Ainsi $(u_n)$ n'est ni une suite arithmétique, ni u ne suite géométrique.** | | |

2) On définit la suite $(v_n)$ par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

| | | |
|---|---|---|
| $v_0 = u_0 - \frac{1}{2}$<br>$v_0 = 1 - \frac{1}{2}$<br>$v_0 = \frac{1}{2}$ | $v_1 = u_1 - \frac{1}{2}$<br>$v_1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$<br>$v_1 = \frac{1}{4}$ | $v_2 = u_2 - \frac{1}{2}$<br>$v_2 = \frac{5}{8} - \frac{4}{8}$<br>$v_2 = \frac{1}{8}$ |

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

**$(v_n)$ semble être une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.**

c) Démontrer votre conjecture.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{2}{4}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ **(Remarque : *Il faut penser à factoriser par la raison conjecturée précédemment*).**

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.**

3) a) Donner l'expression de $v_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = v_0 q^n$

$v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n - \frac{1}{2}$

$u_n = v_n + \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$

**Exercice 55 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,25\, u_n + 3$ pour tout n de IN.

La suite $(v_n)$ est définie par $v_n = u_n - 4$ pour tout n de IN.

1) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique, et préciser ses caractéristiques.

| | |
|---|---|
| **Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n - 4$<br>$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$<br>$v_{n+1} = 0,25u_n + 3 - 4$<br>$v_{n+1} = 0,25u_n - 1$<br>$v_{n+1} = 0,25(u_n - 4)$<br>$v_{n+1} = 0,25v_n$ | $v_0 = u_0 - 4$<br>$v_0 = 3 - 4$<br>$v_0 = -1$<br><br>**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,25$ et de premier terme $v_0 = -1$.** |

2) Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de n.

| |
|---|
| **$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,25$ et de premier terme $v_0 = -1$ donc pour tout entier naturel $n$ : $v_n = -1 \times 0,25^n$**<br><br>**Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n - 4$<br>$u_n = v_n + 4$<br>$u_n = -1 \times 0,25^n + 4$ |

**Exercice 56 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout n de IN.

1) On pose, pour tout n de IN : $v_n = u_n + 1$.

Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et en déduire la nature de la suite $(v_n)$.

| | |
|---|---|
| **Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n + 1$<br>$v_{n+1} = u_{n+1} + 1$<br>$v_{n+1} = 3u_n + 2 + 1$<br>$v_{n+1} = 3u_n + 3$<br>$v_{n+1} = 3(u_n + 1)$<br>$v_{n+1} = 3v_n$ | $v_0 = u_0 + 1$<br>$v_0 = 4 + 1$<br>$v_0 = 5$<br><br>**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 5$.** |

2) Donner l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de n.

| |
|---|
| **$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = 5$ donc pour tout entier naturel $n$ :**<br>$v_n = 5 \times 3^n$<br><br>**Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n + 1$<br>$u_n = v_n - 1$<br>$u_n = 5 \times 3^n - 1$ |

**Exercice 57 :** *BAC S France juin 2013*

Soit la suite numérique $(u_n)$ définie sur INpar :

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$. On pourra en donner des valeurs approchées à $10^{-2}$ près.

| | | |
|---|---|---|
| $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3}\times 0 + 1$<br>$u_1 = \frac{2}{3}\times 2 + 0 + 1$<br>$u_1 = \frac{4}{3} + 1$<br>$u_1 = \frac{4}{3} + \frac{3}{3}$<br>$u_1 = \frac{7}{3}$ | $u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}\times 1 + 1$<br>$u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1$<br>$u_2 = \frac{14}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9}$<br>$u_2 = \frac{26}{9}$ | $u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}\times 2 + 1$<br>$u_3 = \frac{2}{3}\times\frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1$<br>$u_3 = \frac{52}{27} + \frac{18}{27} + \frac{27}{27}$<br>$u_3 = \frac{97}{27}$ |

2) On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur INpar $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

| | |
|---|---|
| **Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n - n$<br>$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$<br>$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$<br>$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$<br>$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n)$<br>$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ | $v_0 = u_0 - 0$<br>$v_0 = 2$<br><br>**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 2$.** |

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

**$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 2$ donc pour tout entier naturel $n$ :**

$$v_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

**Pour tout entier naturel $n$,**

$$v_n = u_n - n$$
$$u_n = v_n + n$$
$$u_n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

Exprimer $S_n$ en fonction de n.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^k + k = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k$$

$$= 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} = \dots = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

**Exercice 58 :**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0,6\, u_n + 7$ pour tout n de IN.

1) Calculer $u_1$ ; $u_2$ et $u_3$.

| | | |
|---|---|---|
| $u_1 = 0,6u_0 + 7$<br>$u_1 = 0,6 \times 4 + 7$<br>$u_1 = 9,4$ | $u_2 = 0,6u_1 + 7$<br>$u_2 = 0,6 \times 9,4 + 7$<br>$u_2 = 12,64$ | $u_3 = 0,6u_2 + 7$<br>$u_3 = 0,6 \times 12,64 + 7$<br>$u_3 = 14,584$ |

2) On pose, pour tout n de IN : $v_n = u_n - 17,5$.

Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique et préciser ses caractéristiques.

| | |
|---|---|
| **Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n - 17,5$<br>$v_{n+1} = u_{n+1} - 17,5$<br>$v_{n+1} = 0,6u_n + 7 - 17,5$<br>$v_{n+1} = 0,6u_n - 10,5$<br>$v_{n+1} = 0,6(u_n - 17,5)$<br>$v_{n+1} = 0,6v_n$ | $v_0 = u_0 - 17,5$<br>$v_0 = 4 - 17,5$<br>$v_0 = -13,5$<br><br>**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $v_0 = -13,5$.** |

3) Donner l'expression de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de n.

**$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $v_0 = -13,5$ donc pour tout entier naturel $n$ :** $v_n = -13,5 \times 0,6^n$

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n - 17,5$

$u_n = v_n + 17,5$

$u_n = -13,5 \times 0,6^n + 17,5$

**Exercice 59 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 6}{5}$ pour tout n de IN.

1) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ? *Justifier soigneusement …*

| | | |
|---|---|---|
| $u_0 = 7$ | $u_1 = \dfrac{2u_0 + 6}{5}$<br>$u_1 = \dfrac{14 + 6}{5}$<br>$u_1 = 4$ | $u_2 = \dfrac{2u_1 + 6}{5}$<br>$u_2 = \dfrac{8 + 6}{5}$<br>$u_2 = \frac{14}{5}$ |

| | |
|---|---|
| $u_1 - u_0 = 4 - 7 = -3$<br>$u_2 - u_1 = \frac{14}{5} - 4 \neq -3$<br>**Ainsi la suite $(u_n)$ n'est pas arithmétique.** | $\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{7}$<br>$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{14}{5}}{4} \neq \frac{4}{7}$<br>**Ainsi la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.** |

2) On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1[er] terme.

| | |
|---|---|
| **Pour tout entier naturel $n$,**<br>$v_n = u_n - 2$<br>$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$<br>$v_{n+1} = \frac{2u_n+6}{5} - 2$<br>$v_{n+1} = \frac{2u_n+6}{5} - \frac{10}{5}$<br>$v_{n+1} = \frac{2u_n-4}{5}$<br>$v_{n+1} = \frac{2(u_n-2)}{5}$<br>$v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ | $v_0 = u_0 - 2$<br>$v_0 = 7 - 2$<br>$v_0 = 5$<br><br>**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 5$.** |

b) Exprimer $v_n$ en fonction de n, et en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n.

**$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 5$ donc pour tout entier naturel $n$ :**

$v_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

**Pour tout entier naturel $n$,**

$v_n = u_n - 2$

$u_n = v_n + 2$

$u_n = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$

**Exercice 60 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_1 = \dfrac{2}{7}$ et pour tout entier $n \geq 1$ : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n}$ .

(On admettra que quel que soit $n \geq 1$ , $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$).

1) Calculer $u_2$ et $u_3$.

$$u_2 = \frac{u_1}{3-u_1}$$
$$u_2 = \frac{\frac{2}{7}}{3-\frac{2}{7}}$$
$$u_2 = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{19}{7}}$$
$$u_2 = \frac{2}{19}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{3-u_2}$$
$$u_3 = \frac{\frac{2}{19}}{3-\frac{2}{19}}$$
$$u_3 = \frac{\frac{2}{19}}{\frac{55}{19}}$$
$$u_3 = \frac{2}{55}$$

2) a) La suite $(v_n)$ est définie pour tout $n \geq 1$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer $v_1$.

$$v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{7}{2}$$

b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ : $v_{n+1} = 3v_n - 1$.

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$$
$$v_{n+1} = \frac{3-u_n}{u_n}$$
$$v_{n+1} = \frac{3}{u_n} - 1$$
$$v_{n+1} = 3 \times \frac{1}{u_n} - 1$$
$$v_{n+1} = 3v_n - 1$$

3) La suite $(w_n)$ est définie par : $w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$.

Exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$ et calculer $w_1$.

$$w_n = v_n - \frac{1}{2}$$
$$w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2}$$
$$w_{n+1} = 3v_n - 1 - \frac{1}{2}$$
$$w_{n+1} = 3v_n - \frac{3}{2}$$
$$w_{n+1} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right)$$
$$w_{n+1} = 3w_n$$

$$w_1 = v_1 - \frac{1}{2}$$
$$w_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}$$
$$w_1 = 3$$

Quelle est la nature de la suite $(w_n)$ ?

**Ainsi $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $w_1 = 3$.**

Exprimer $w_n$ en fonction de n.

**$(w_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $w_1 = 3$ donc pour tout entier naturel $n$ :**

$$w_n = w_1 q^{n-1}$$
$$w_n = 3 \times 3^{n-1}$$
$$w_n = 3^n$$

4) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de n.

| **Pour tout entier naturel $n$ :** | **Pour tout entier naturel $n$ :** |
|---|---|
| $w_n = v_n - \frac{1}{2}$<br>$v_n = w_n + \frac{1}{2}$<br>$v_n = 3^n + \frac{1}{2}$ | $v_n = \frac{1}{u_n}$<br>$u_n = \frac{1}{v_n}$<br>$u_n = \frac{1}{3^n + \frac{1}{2}}$ |

**Exercice 61 :**

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2} u_n$ pour tout n de IN.

a) On a une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, mais pour quelle fonction f ?

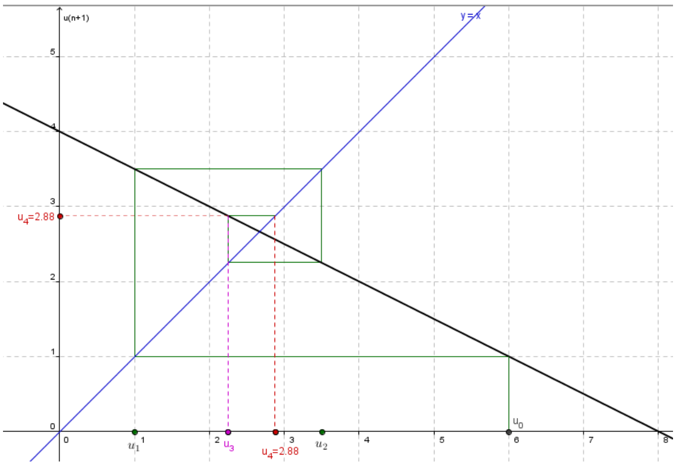
**$f$ est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$**

b) Résoudre l'équation f (x) = x.

$$4 - \frac{1}{2}x = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - x = -4 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -4 \Leftrightarrow x = -4 \times -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

c) Tracer la représentation graphique de f.

d) Construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.



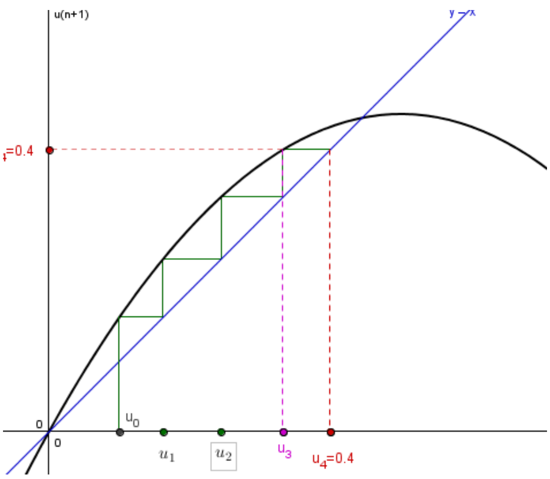

e) Que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variations et le comportement à l'infini de cette suite ?

**La suite $(u_n)$ ne semble ni croissante, ni décroissante.**

$$\lim_{+\infty} u_n = \frac{8}{3}\ (\approx 2,6666)$$

**Exercice 62 :**

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{9}{5} x (1 - x)$.




1) Résoudre l'équation f (x) = x.

$$\frac{9}{5}x(1-x) = x$$
$$\frac{9}{5}x(1-x) - x = 0$$
$$x\left(\frac{9}{5} - \frac{9}{5}x - 1\right) = 0$$
$$x\left(\frac{4}{5} - \frac{9}{5}x\right) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } \frac{4}{5} - \frac{9}{5}x = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{9}$$

2) On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in$ IN.

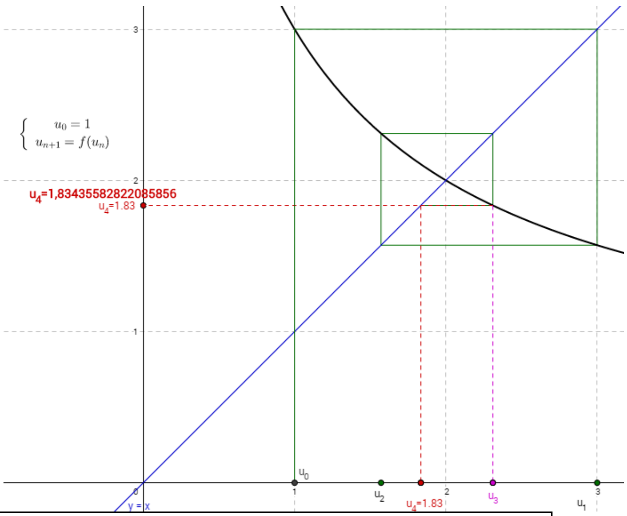
a) Sur le graphique donné, **construire** les termes $u_0$ ; $u_1$ ; $u_2$ ; $u_3$ et $u_4$ sur l'axe des abscisses.

b) Que peut-on conjecturer sur les variations de la suite et son comportement à l'infini ?

**La suite $(u_n)$ semble croissante.**

$$\lim_{+\infty} u_n = \frac{4}{9}\ (\approx 0,444)$$

**Exercice 63 :**




On définit la suite u par son 1[er] terme : $u_0 = 1$

et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

1) La relation de récurrence est du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Donner l'expression f (x) de cette fonction f.

**$f$ est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :**

$$f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$$

b) La courbe de cette fonction est donnée ci-contre.

Construire $u_0$ , $u_1$ , $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses.

c) Que peut-on conjecturer sur les variations de u et son comportement à l'infini ?

**La suite $(u_n)$ ne semble ni croissante, ni décroissante.**

$$\lim_{+\infty} u_n = 2$$

2) On définit la suite v par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$ pout tout n de IN.

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme.

**Pour tout entier naturel $n$,**

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} - 2}{\dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n + 8 - 2(2u_n + 1)}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 8 + 2(2u_n + 1)}{2u_n + 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n + 8 - 4u_n - 2}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 8 + 4u_n + 2}{2u_n + 1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{-3u_n + 6}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{5u_n + 10}$$

$$v_{n+1} = \frac{-3(u_n - 2)}{5(u_n + 2)}$$

$$v_{n+1} = -\frac{3}{5} v_n$$

**Ainsi $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.**

b) Exprimer $v_n$ en fonction de n, et donner la limite de la suite v.

**$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$ donc pour <u>tout entier naturel $n$</u> :**

$$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

$$-1 < q < 0 \textbf{ donc : } \lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

c) En déduire la limite de la suite u. *(c'est hors programme, mais intuitif !)*

$$\boldsymbol{v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2}}$$
$$\boldsymbol{v_n(u_n+2) = u_n - 2}$$
$$\boldsymbol{v_n u_n + 2v_n - u_n = -2}$$
$$\boldsymbol{u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n}$$
$$\boldsymbol{u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n}$$
$\boldsymbol{u_n = \frac{-2-2v_n}{v_n-1}}$ **(on suppose que $\boldsymbol{v_n \neq 1}$)**

**Comme :** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \; on\; a\; alors :\; \lim_{n\to+\infty} u_n = "\frac{-2}{-1}" = 2}$

**<u>Exercice 64 :</u>**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [ 0 ; + ∞ [ par : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites $(u_n)$ définies par un premier terme positif ou nul $u_0$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1) Étude de propriétés de la fonction f :**

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [ 0 ; + ∞ [.

b) Résoudre dans l'intervalle [ 0 ; + ∞ [ l'équation f (x) = x. On note α la solution.

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle [ 0 ; α ],
alors f (x) appartient à l'intervalle [ 0 ; α ].
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle [ α ; + ∞ [
alors f (x) appartient à l'intervalle [ α ; + ∞ [.

**2) Étude de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = 0$ :**

Dans cette question, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$
et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$.

a) Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes d'équations y = x et y = f (x).
Placer le point $A_0$ de coordonnées ( $u_0$ ; 0 ), et, en utilisant ces courbes, construire à partir de $A_0$ les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

b) Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite $(u_n)$ ? *(pour démonter ces conjectures… besoin du programme de TS !)*

**3) Étude des suites $(u_n)$ selon les valeurs du réel positif ou nul $u_0$ :**

*Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite $(u_n)$ suivant les valeurs du réel positif ou nul $u_0$ ?