Chapitre : Arithmétiques et valeur absolue

Dans tout ce chapitre la mention « entier » signifiera « entier relatif ».

I. Nombres entiers : Arithmétiques

1) Multiples et diviseurs

Définition 1 : Soit a et b deux entiers.
On dit que a est ______________________________ de b s'il existe un entier k tel que $a =$
On dit alors que b est un ______________________ de a.

Exemples : 15 est un multiple de 5 car il existe un entier 3 tel que $15 = 5 \times 3$.
2 est un diviseur de 10 car il existe un entier 5 tel que $10 = 2 \times 5$
7 n'est pas un diviseur de 4 car il n'existe pas d'entier k tel que $7 = 4k$.

Remarque 1 : b (non nul) est un diviseur de a si et seulement si le reste dans la division euclidienne de a par b est 0.

Définition 2 : Soit a un entier.
La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Preuve : Pour les multiples de 7 :
Soit deux multiples a et b de 7 : il existe deux entiers k et h tels que $a = 7k$ et $b = 7h$.
Ainsi $a + b = 7k + 7h$ puis en factorisant par 7, on a : $a + b = 7(k + h)$.
Comme k et h sont des entiers, $k + h$ est aussi un entier donc $a + b$ est un multiple de 7.

On démontrerait de la même façon la propriété pour toute autre valeur de a.

Application 1 :
Montrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

Application 2 :
Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Exercice 1 :
1. Justifier que 98 est un multiple de 14.
2. Traduire cette propriété avec chacune des expressions : « est diviseur de » / « a pour diviseur »/ « est divisible par » / « a pour multiple ».

Exercice 2 : Compléter les phrases suivantes par « diviseur » ou « multiple » :
1. 350 est un ……………………………………………… de 50.
2. 13 est un ……………………………………………… de 260.
3. 0 est un ………………………………………………… de 89.
4. 1 est un ………………………………………………… de 16.
5. 42 est un ……………………………………………… de 42.
6. 21 est un ……………………………………………… de -2100.
7. 2019 est un ………………………………………… de 0.
8. 16 est un ……………………………………………… de 4.

Exercice 3 :
1. Donner cinq multiples de 11.
2. Donner cinq diviseurs de 24.
3. Donner tous les diviseurs positifs de 21.
4. Déterminer tous les multiples de 9 inférieurs à 50.
5. Déterminer tous les multiples de 7 compris entre 100 et 150.
6. Combien y-a-t-il de multiples de 17 entre 1 et 100 ?

Exercice 4 : On donne $a = 10k$ et $b = 6k$ avec k entier.
1. Montrer que a est un multiple de 2.
2. Montrer que b est un multiple de 3.
3. Est-ce que 8 est un diviseur de $a + b$?

Exercice 5 : Montrer que si a et b sont des multiples de 11 alors $a + b$ est un multiple de 11.

Exercice 6 : Soit a un entier multiple de 6 et b un entier multiple de 15.
1. Montrer que $a + b$ est un multiple de 3.
2. Montrer que $a \times b$ est un multiple de 90.

Exercice 7 : Soit a et b deux entiers.
1. Montrer que si a est un diviseur de $a + b$ alors a est un diviseur de b.
2. Montrer que si a est un diviseur de b alors a^2 est un diviseur de b^2.

Exercice 8 : Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n - 7$ et $b = n + 1$.
1. Calculer $a - 2b$.
2. Soit d un diviseur de a et b. Montrer que d est un diviseur de $a - 2b$.
3. Soit d un entier diviseur de a et b. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

Exercice 9 : Les âges de quatre cousins Emma, Baptiste, Lily et Nathan sont $3, 8, 12$ et 14 ans. La somme des âges de Lily et Emma est divisible par 5, celle des âges de Nathan et Lily est aussi divisible par 5.
Quel est l'âge de Baptiste ?

Exercice 10 : On cherche un nombre compris entre 15 000 et 16 000, dont tous les chiffres sont différents et tel que :
- son chiffre des centaines est un multiple de 3 ;
- son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 ;
- son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines.

Quel peut être ce nombre ? Donner toutes les possibilités.

Exercice 11 : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
1. La somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4.
2. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.
3. Le produit de deux multiples de 3 est un multiple de 9.
4. Le produit d'un multiple de 4 et d'un multiple de 6 est un multiple de 24.

2) Nombres pairs et impairs

Définition 3 : Soit k un entier.
Un nombre pair est un entier multiple de 2.
Autrement dit : il s'écrit sous la forme $2k$.

Définition 4 : Soit k un entier.
Un nombre impair est un entier non multiple de 2.
Autrement dit : il s'écrit sous la forme $2k + 1$ (puisque le reste de sa division euclidienne par 2 est 1).

Propriété 1 : Le carré d'un nombre impair est impair.

Preuve : Soit k un entier.
Soit a un nombre impair alors il s'écrit de la forme $a = 2k + 1$.
$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1$ si l'on note $K = 2k^2 + 2k$.
K est un entier car c'est la somme de deux entiers (trivial), donc a^2 est impair.

Application 3 :
1. Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

2. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Application 4 (disjonction de cas sur la parité) :

Quels sont les entiers naturels n tels que $n^2 - 1$ est multiple de 4 ?

Exercice 12 : Si n est un entier positif, quels nombres sont toujours des nombres pairs :

a) $2n + 3$	b) $4n$	c) $n + 1$	d) $2n - 5$	e) $2n + 2$

Exercice 13 :

1. Montrer que le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
2. Montrer que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.
3. Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
4. Montrer que le produit de deux nombres pairs est un multiple de 4.
5. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.
6. Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.
7. Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.

Exercice 14 : Soit les nombres $a = 4p$ et $b = 5q$, avec p et q entiers.

1. Justifier que a est pair.
2. b peut-il être pair ?
3. Soit $c = ab$. Montrer que c est un multiple de 10.

3) Nombres premiers

Définition 5 : Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$.

Remarque 2 : 1 est diviseur de tout entier et un entier a est toujours diviseurs de lui-même. Ainsi un nombre premier a pour seuls diviseurs entiers naturels 1 et lui-même.

Remarque 3 : 0 n'est pas premier car tout entier a divise 0. En effet $0 = 0 \times a$.

Remarque 4 : 1 n'est pas premier car il n'a qu'un diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même.

Remarque 5 : Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5 , 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc…

Propriété 2 (Test de primalité) : Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si n n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

Propriété 3 : Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit comme puissance d'un nombre premier, soit comme produit de puissances de nombre premiers.
Cette décomposition en produits de facteurs premiers est unique, à l'ordre des facteurs près.

Remarque 6 : Pour décomposer un entier en facteurs premiers, on le divise successivement par les nombres de la liste ordonnée des nombres premiers.

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs de 360 sont 2, 3 et 5.

Application 5 : Décomposer 539 en produit de facteurs premiers puis écrire $\sqrt{539}$ sous la forme $a\sqrt{b}$.

Application 6 : Ecrire sous forme de fraction irréductible $\frac{252}{70}$ en décomposant 252 et 70 en produits de facteurs premiers.

Application 7 :

Déterminer un nombre entier n compris entre 600 et 800, qui est pair, divisible par 11 et multiple de 3 et de 5.

Application 8 :

1. Soit n un entier naturel non nul et $p = (n+1)(n+3)$. Montrer que p n'est pas premier.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $q = (n-1)(n^2+7)$.
   Pour quelle(s) valeur(s) de n l'entier q est-il premier ?

Exercice 15 : Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 32, 42, 50, 99, 100, 112 et 1 140.

Exercice 16 : Déterminer si les nombres suivants sont des nombres premiers : 18, 37, 41, 57, 89, 101, 383 et 643.

Exercice 17 : Soit p un nombre premier. Le nombre p^2 est-il premier ?

Exercice 18 : Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36, 49 et 63.

Exercice 19 : Soit n un entier naturel non nul, et l'entier a défini par $a = (n+4)(n+2)$.
Montrer que a n'est pas premier.

Exercice 20 :

1. a) Calculer $a^2 - b^2$ pour les valeurs suivantes de a et de b :

$(a\,;b) = (2\,;3)$	$(a\,;b) = (3\,;1)$
$(a\,;b) = (3\,;2)$	$(a\,;b) = (4\,;3)$
$(a\,;b) = (4\,;2)$	$(a\,;b) = (5\,;4)$
$(a\,;b) = (5\,;2)$	$(a\,;b) = (5\,;3)$

b) Parmi les résultats obtenus, quels sont ceux qui sont premiers ?

2. Soient a et b des entiers naturels non nuls avec $a \geq b$.

Montrer que si a et b ne sont pas deux entiers consécutifs, $a^2 - b^2$ ne peut pas être premier.

Exercice 21 : A la manière de Fermat

On souhaite décomposer en facteurs premiers le nombre 667.

1. Ce nombre est-il divisible par l'un des nombres premiers inférieurs à 20 ?

Pour le décomposer, nous allons, à la manière de Fermat, transformer son écriture.

2. Vérifier que $667 = 26^2 - 9$ et en déduire la décomposition en facteurs premiers de 667.
3. A l'aide de votre calculatrice, transformer de même l'écriture du nombre 437 pour trouver sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Exercice 22 : Décomposition et carrés parfaits

1. a) Décomposer en produit de facteurs premiers : 8, 2 400 et 11 400.
   b) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $8^2, 2\,400^2$ et $11\,400^2$.
   Quel point commun ont tous les exposants dans cette décomposition ?
2. Les nombres suivants sont-ils des carrés d'entiers :
   a) $2^{24} \times 5^6 \times 7^2$ | b) $2^3 \times 5^2$
3. Comment reconnaître sur sa décomposition en produit de facteurs premiers qu'un entier $n \geq 2$ est le carré d'un entier ?

II. Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

On a déjà vu dans le chapitre 1 cet ensemble. On rappelle sa définition :

Définition 6 : Soit p un entier relatif et q un entier naturel non nul.
Les **nombres rationnels** sont des nombres de la forme $\frac{p}{q}$
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Propriété 4 : Tout rationnel admet une écriture sous forme de fraction irréductible, c'est-à-dire $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers premiers entre eux.

Propriété 5 : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33333..$ est un nombre rationnel non décimal.

Preuve:

Raisonnement par l'absurde.	Principe d'une démonstration par l'absurde
Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal.	• On suppose le contraire de ce que l'on veut démontrer
Alors $\frac{1}{3} = \frac{p}{10^n}$ avec p un entier relatif et n un entier naturel. Ainsi $10^n = 3p$. Or $3p$ est un multiple de 3 donc 10^n doit être un multiple de 3. Autrement dit : 3 doit être un diviseur de 10, c'est ABSURDE !!!	• On raisonne comme si ce que l'on a supposé est vraie. On arrive à une contradiction, ce qui est impossible.
Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.	• On en déduit que ce que l'on a supposé est faux.

Propriété 6 : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est un irrationnel.

Preuve : Raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel.

Alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier naturel non nul. Cette fraction étant irréductible.

En élevant au carré, on a : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ c'est-à-dire $p^2 = 2q^2$.

Ainsi p^2est pair, ce qui entraine que p est pair.
(En effet si p impair alors p^2 serait forcément impair).
Comme p est pair, il existe un entier naturel k tel que $p = 2k$.
$p^2 = 2q^2$ s'écrit alors $(2k)^2 = 2q^2$ soit $4k^2 = 2q^2$ soit $q^2 = 2k^2$ ce qui entraine que q^2 est pair et donc q aussi.
On obtient donc que p et q sont pairs, or $\frac{p}{q}$ doit être irréductible, ce qui est ABSURDE.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

III. Nombres réels : distance et valeur absolue

Définition 7 : La distance de deux réels a et b est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique.

Propriété 7 :
- Si $a \geq b$ alors la distance de a à b est égale à $a - b$.
- Si $a \leq b$ alors la distance de a à b est égale à $b - a$.

On note la distance de a à b : $|a - b|$ et on lit : valeur absolue de $a - b$.

Exemples : $|\pi - 3|$ est la distance entre π et 3. Comme $\pi > 3$, on a $|\pi - 3| = \pi - 3$
$|\pi - 4|$ est la distance entre π et 4. Comme $\pi < 4$, on a $|\pi - 4| = 4 - \pi$

Exercice 23 : Dans chaque cas, calculer la distance exacte entre les deux nombres.
a) -4 et 7 | b) 1,3 et 2,7 | c) 7,4 et 3,6 | d) 7,4 et $-3{,}6$

Exercice 24 : Dans chaque cas, calculer la distance exacte entre les deux nombres, puis en donner une valeur arrondie à 10^{-2}près.
a) π et 5 | b) $\sqrt{2}$ et 1 | c) -1 et $\sqrt{3}$

Définition 8 : On appelle valeur absolue d'un nombre x la distance de ce nombre à 0 sur la droite graduée.
On la note$|x|$.

Propriété 8 : Soit x un nombre réel.
1) Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
2) Si $x < 0$ alors $|x| = -x$

Exemple : $|5| = 5$ et $|-3| = -(-3) = 3$.

Remarque 7 : Deux réels opposés ont la même valeur absolue.

Propriété 9 : Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$

Preuve : x^2 est le carré de x et de $-x$. Or $\sqrt{x^2}$ est celui des deux nombres qui est positifs, c'est donc par définition $|x|$.

Remarque 8 : Dans un repère orthonormé, la distance entre $O(0\,;0)$ et $M(x\,;0)$ est $\sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2}$ c'est-à-dire $\sqrt{x^2}$. On retrouve bien $|x|$ comme la distance de x à 0.

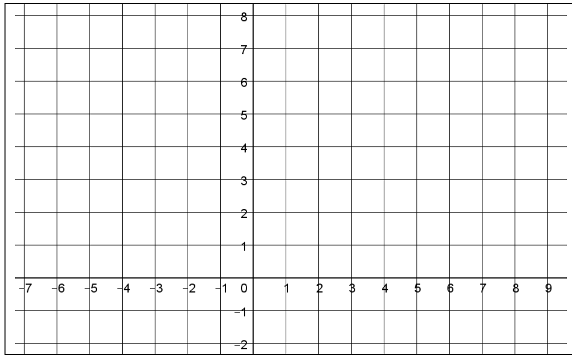
Propriété 10 : Soit a un réel et r un réel positif et nul.
On dit que l'intervalle $[a-r\,;a+r]$ a pour centre a et pour rayon r.
Dire qu'un réel x appartient à $[a-r\,;a+r]$ revient à dire que $|x-a|\leq r$.

Preuve :
$x\in[a-r\,;a+r]\Leftrightarrow a-r\leq x\leq a+r\Leftrightarrow -r\leq x-a\leq r\Leftrightarrow -r\leq a-x\leq r$
La distance de x au réel a est soit $x-a$, soit $a-x$.
On trouve bien $|x-a|\leq r$.

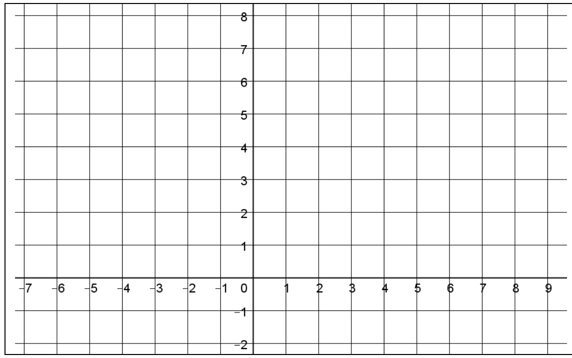
Exemple : L'intervalle $[0{,}2\,;0{,}3]$ a pour longueur $0{,}3-0{,}2=0{,}1$ donc son rayon est $\frac{0{,}1}{2}=0{,}05$.
Son centre est $0{,}2,+0{,}05=0{,}25$. On aurait pu faire $\frac{0{,}2+0{,}3}{2}=0{,}25$.
Dire que $x\in[0{,}2\,;0{,}3]$ revient donc à dire que la distance de x au centre $0{,}25$ de l'intervalle est inférieure ou égale à $0{,}05$ c'est-à-dire $|x-0{,}25|\leq 0{,}05$.

Application 9 :

1. Interpréter géométriquement $|x-2|$ pour un réel x donné. En déduire les réels x tels que $|x-2|=3$.



2. Interpréter géométriquement $|x+3|$ pour un réel x donné. En déduire les réels x tels que $|x+3|\leq 1$.



Exercice 25 : Dans chaque cas, représenter sur une droite graduée l'ensemble auquel appartient x et écrire cet ensemble à l'aide d'intervalles.

a) $\lvert x-3\rvert=5$	b) $\lvert x+7\rvert=2$	c) $\lvert x-1\rvert>5$	d) $\lvert x-7\rvert\leq 4$
e) $\lvert x-2\rvert<6$	f) $\lvert x+5\rvert\geq 3$	g) $\lvert x+1\rvert\leq 7$	h) $\lvert 6-x\rvert=1$

Exercice 26 :
Dans chaque cas, traduire l'inégalité par une écriture de la forme $|x-a|<r$ ou $|x-a|\leq r$.

a) $x\in[\,3;7\,]$	b) $x\in]-9\,;-1\,[$	c) $x\in[-3\,;5\,]$	d) $x\in]-12\,;35\,[$

Exercice 27 : Dans chaque cas, déterminer tous les nombres x vérifiant l'égalité, en vous aidant éventuellement d'une droite graduée.

a) $\lvert x-2\rvert=1$	b) $\lvert x+4\rvert=5$	c) $\lvert x+2\rvert=0$
d) $\lvert x-5\rvert=2$	e) $\lvert x\rvert=2$	f) $\lvert x-3\rvert=3$

Exercice 28 :
Soient A et B les points d'abscisses 3 et 9 sur une droite graduée, et M un point de cette droite d'abscisse x vérifiant $|x-3|=|x-9|$.
a) Interpréter cette égalité en termes de distances.
b) En déduire la valeur de x.

Exercice 29 : QCM : Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).
Soient les points O ; A ; B ; C et D de la droite numérique d'abscisses respectives 0 ; a ; b ; $-a$ et $-b$ où a et b sont des réels donnés.

1) La distance de AB est égale à :
a) $|a-b|$ b) $a-b$ c) $|b-a|$ d) $b-a$

2) La distance de AC est égale à :
a) $|2a|$ b) 0 c) $|-2a|$ d) $2a$

3) $|a+b|$ est égale à la distance :
a) AB b) BC c) CD d) AD

4) $|-b|$ est égale à la distance :
a) OA b) BD c) AC d) OD