Fiche méthode : Proportion

I. Proportion d'une sous-population

Application 1 : Proportion d'une sous-population

Une classe compte 32 élèves, dont 20 filles. Parmi les 18 élèves de 17 ans, on dénombre 8 filles.

1. a. Quelle est la proportion de filles dans la classe ?

Soit p_1 la proportion de filles dans la classe. Ainsi $p_1 = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$.

b. Quel est le pourcentage de fille dans la classe ?

$p_1 = \frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$

2. a. Quelle est la proportion de filles de 17 ans parmi les filles ?

Soit p_2 la proportion de filles de 17 ans parmi les filles. Ainsi $p_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b. Quel est le pourcentage de filles de 17 ans parmi les filles ?

$p_2 = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$

3. Quelles sont les populations considérées dans les questions 1. et 2. ?

Dans la question 1, la population considérée est la classe. Dans la question 2, la population considérée est les filles.

4. a. Parmi les 32 élèves, il y en a 25% qui ont 18 ans, combien d'élèves ont 18 ans ?

Soit n le nombre d'élèves ayant 18 ans. $n = \frac{25}{100} \times 32 = 8$. Ainsi il y a 8 élèves de 18 ans dans la classe.

b. Quel est le pourcentage d'élèves n'ayant ni 17 ans ni 18 ans ?

Soit p_3 la proportion d'élèves n'ayant ni 17 ans ni 18 ans. Il y a $18 + 8 = 26$ élèves de 17 ans ou 18 ans. Ainsi il y a $32 - 26 = 6$ élèves ayant ni 17 ans ni 18 ans. $p_3 = \frac{6}{32} = 0{,}1875 = \frac{18{,}75}{100} = 18{,}75\%$

Application 2 : Proportion d'une sous-population

1. On considère une première boite de maquereaux de 175g.
   a. Il y a 26,7 g de protéines dans les maquereaux. Quel est le pourcentage de protéines ?

Il y a $\frac{26{,}7}{175} \approx 0{,}1526 = 15{,}26\%$ de protéines dans les maquereaux

   b. Il y a 7,2% de lipides. Quelle est la masse (en g) de lipides dans les maquereaux ?

Il y a $\frac{7{,}2}{100} \times 175 = 12{,}6g$ de lipides dans les maquereaux.

2. On considère une deuxième boite de maquereaux. On sait qu'il y a 30g de protéines dans cette boite et que cela représente 20% de la boite. Quelle est le poids de cette boite de maquereaux ?

La boite a un poids de : $\frac{30}{0{,}2} = 150$g

Vocabulaires :

- Les éléments qui constituent une population sont **les individus** de cette population.
- Le nombre d'individus est appelé **l'effectif** de la population.

Exemples de populations :
L'ensemble des élèves d'un lycée, l'ensemble des lettres de l'alphabet, l'ensemble des livres de classe d'un élève.

- Une **sous population** d'une population de référence E est une population dont tous les individus sont aussi des individus de la population E.

Proportion :

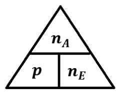
- Soit E une population de référence d'effectif n_E et A une sous-population de E d'effectif n_A.
  La proportion de A dans E est le quotient défini par : $\boldsymbol{p = \frac{n_A}{n_E}}$.

Remarque : Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.

Exemple : $p = 0{,}25$ s'écrit aussi : $p = \frac{25}{100}$ ou encore : $p = 25\%$.

- Une proportion est toujours comprise entre 0 et 1, et n'a pas d'unité.

- Si l'on connait deux des trois nombres n_A, n_E et p, alors on pe e troisième :
  $\boldsymbol{p = \frac{n_A}{n_E}}$ s'écrit aussi :
  $\boldsymbol{n_A = p \times n_E}$ ou encore :
  $\boldsymbol{n_E = \frac{n_A}{p}}$



- Calculer $p\%$ d'un nombre N, c'est multiplier N par : $\frac{p}{100}$.

II. Réunion et intersection de sous-populations

Application 3 : Proportion d'union et intersection

On a interrogé 1200 personnes sur la possession d'un ordinateur et d'une télévision. Les résultats sont donnés ci-dessous :

	Ordinateur	Sans ordinateur	**Total**
TV	414	462	**876**
Sans TV	90	234	**324**
Total	**504**	**696**	**1200**

On note :

- p_O la proportion de personnes ayant un ordinateur.
- p_T la proportion de personnes ayant un ordinateur.
- $p_{O\cap T}$ la proportion de personnes ayant un ordinateur et une télé.
- $p_{O\cup T}$ la proportion de personnes ayant au moins l'un des deux

Calculer la proportion de personnes ayant :

a) un ordinateur	b) une télévision
$p_O = \frac{504}{1200}$	$p_T = \frac{876}{1200}$
c) un ordi et une télé	d) au moins l'un des 2.
$p_{O\cap T} = \frac{414}{1200}$	$p_{O\cup T} = p_O + p_T - p_{O\cap T}$ $p_{O\cup T} = \frac{504}{1200} + \frac{876}{1200} - \frac{414}{1200}$ $p_{O\cup T} = \frac{966}{1200}$

Soient A et B deux sous-populations d'une même population E.

Vocabulaire : Réunion et intersection :

- L'intersection $A \cap B$ est la sous-population constituée des éléments appartenant à A et à B.
- L'union $A \cup B$ est la sous-population constituée des éléments appartenant à A ou à B.
- Deux sous-populations A et B d'une même population E sont disjointes lorsqu'elles n'ont pas d'élément commun : $A \cap B = \emptyset$

Proportion : Réunion et intersection :

- Les proportions de A, de B, de $A \cup B$ et de $A \cap B$ dans E sont liées par la relation :
  $$\boldsymbol{p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}}$$
- Si A et B sont deux sous-populations **disjointes** d'une même population E :
  $$\boldsymbol{p_{A\cup B} = p_A + p_B}$$

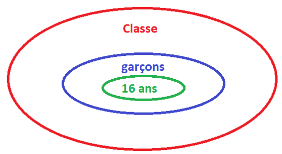
III. Proportions échelonnées

Application 3 :

Dans une classe, il y a **40% de garçons dont 75% ont 16 ans**.

Quelle est la proportion de garçons ayant 16 ans parmi les élèves de la classe.

$p = \frac{40}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{3}{10}$ La proportion de garçons ayant 16 ans parmi les élèves de la classe.



- **40% de garçons** : Proportion de l'ensemble bleu dans l'ensemble rouge.
- **dont 75% ont 16 ans** : Proportion de l'ensemble vert dans l'ensemble bleu.
- Chercher la proportion de garçons ayant 16 ans parmi les élèves de la classe : Proportion de l'ensemble vert dans l'ensemble rouge.

Inclusion :

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B, noté $A \subset B$, lorsque tous les éléments de A appartiennent à B

Proportions échelonnées :

Soient trois populations $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ telles que $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{E}$.

La proportion p de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{E}$ est le **produit** de la proportion $p_1$de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ et de la proportion p_2 de $\boldsymbol{B}$ dans $\boldsymbol{E}$:
$$\boldsymbol{p = p_1 \times p_2}$$