Chapitre 10 : Variables aléatoires discrètes et loi de probabilité (correction)

Compétence : Variable aléatoire

Exercice 1 : Variable aléatoire

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$ et 3.

2. Décrire les évènements « $X = 2$ » et « $X \geq 1$ ».

« $X = 2$ » signifie « on tire exactement 2 boules vertes ».
« $X \geq 1$ » signifie « on tire au moins 1 boule verte ».

Exercice 2 : Variable aléatoire

On lance quatre dés à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de faces numérotées « 6 » obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ et 4

2. a. Décrire les évènements « $X \leq 2$ » et « $X > 3$ ».

« $X \leq 2$ » signifie « on obtient au plus 2 faces 6 ».
« $X > 3$ » signifie « on obtient 4 faces 6 ».

b. Que peut-on dire de ces événements ?

Ces événements sont incompatibles (disjoints).
En effet $P\left((X \leq 2) \cap (X > 3)\right) = 0$.

Exercice 3 : Variable aléatoire

On place dans un sac six cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase :

Le	hasard	fait	bien	les	choses

On tire un carton au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de voyelles du mot tiré.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre les valeurs 1 et 2.

2. Décrire l'évènement « $X = 2$ ».

« $X = 2$ » signifie « Le mot tiré a exactement 2 voyelles».

Exercice 4 : Variable aléatoire

Un sac contient une boule marquée « 2 » et une boule marquée « 3 ». On tire une boule, on note son numéro, on la remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le produit des numéros obtenus.

1. a. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience.

$\Omega = \{(2;2); (2;3); (3;2); (3;3)\}$

b. En déduire les valeurs prises par X ?

	2	**3**
2	**4**	**6**
3	**6**	**9**

X peut prendre les valeurs $4, 6$ et 9.

2. Quel sont les événements de Ω correspondant à l'événement « $X = 6$ » ?

« $X = 6$ » signifie « On a tiré une boule 2 et une boule 3 ».

Compétence : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exercice 5 :

On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 7, dont voici la loi de probabilité :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,223	0,335	0,251	0,126	0,047	0,014	0,003	0,001	1

Calculer :

a) $P(X = 0)$ =0,223 (par lecture directe du tableau)

b) $P(X = 5)$ = 0,014 (idem)

c) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) = 0.003 + 0.001 = 0.004$

d) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.223 + 0.335 = 0.558$

e) $P(X < 7) = 1 - P(X = 7) = 1 - 0.001 = 0.999$ (on peut aussi additionner les valeurs correspondantes de 0 à 6 mais c'est beaucoup plus long…)

f) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.126 + 0.047 + 0.014 = 0.187$

g) $P(3 < X < 5) = P(X = 4) = 0.047$

h) $P(X \leq 7) = 1$ (toutes les valeurs prises par X sont inférieures ou égale à 7)

i) $P(X = 8) = 0$ (impossible)

Exercice 6 :

On considère l'expérience suivante : on lance 10 fois successivement une pièce, et on appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on obtient « FACE ».

1) Traduire chaque phrase par une expression du type $P(X = 2)$ ou $P(X \leq 1)$…

a) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « FACE » $P(X = 4)$

b) La probabilité d'obtenir au moins 2 lancers « FACE » $P(X \geq 2)$

c) La probabilité d'obtenir plus de 7 lancers « FACE » $P(X \geq 7)$

d) La probabilité d'obtenir 3, 4 ou 5 lancers « FACE » $P(3 \leq X \leq 5)$

e) La probabilité d'obtenir moins de 3 lancers « FACE » $P(X \leq 3)$

f) La probabilité d'obtenir au plus 5 lancers « FACE » $P(X \leq 5)$

g) La probabilité d'obtenir plus de 1 lancer « FACE » $P(X \geq 1)$

h) La probabilité d'obtenir 5 à 9 lancers « FACE » $P(5 \leq X \leq 9)$

i) La probabilité d'obtenir au plus 8 lancers « FACE » $P(X \leq 8)$

j) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers «ILE » $P(X = 6)$

2) On admet que la loi de probabilité de l'expérience est la suivante :

Nombre de « FACE » : X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X = 7) = 0{,}117$ (lecture directe)

b) $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$P(X \geq 8) = 0{,}044 + 0{,}010 + 0{,}001 = 0{,}055$

c) $P(X \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$

$P(X \leq 3) = 0{,}001 + 0{,}0010, +0{,}044 + 0{,}117 = 0{,}172$

d) $P(X = 2) = 0{,}044$ (lecture directe)

e) $P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0{,}055$

Exercice 7 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une urne contient cinq boules : deux noires et trois blanches. On tire une boule. On gagne 2€ si la boule est blanche et on perd 1€ si elle est noire.

1. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une boule noire » ?

Soit N : « obtenir une boule noire », $p(N) = \frac{2}{5}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.
   Déterminer $P(X = -1)$ et $P(X = 2)$.

$\boldsymbol{P(X = -1) = P(N) = \frac{2}{5}}$

$\boldsymbol{P(X = 2) = P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}}$

Exercice 8 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Roméo offre à Juliette un bouquet de 25 roses constitué de 10 fleurs ayant 28 pétales, de 8 fleurs ayant 31 pétales et de 7 fleurs ayant 34 pétales. Juliette tire au hasard une rose du bouquet.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de pétales que possède la fleur.

1. Déterminer $P(X = 31)$.

$\boldsymbol{P(X = 31) = \frac{8}{25}}$

2. Décrire l'événement « $X \geq 30$ », puis déterminer $P(X \geq 30)$.

L'événement « $X \geq 30$ » signifie que les fleurs ont plus de 30 pétales.

$\boldsymbol{P(X \geq 30) = P(X = 31) + P(X = 34) = \frac{8}{25} + \frac{7}{25} = \frac{15}{25}}$.

Exercice 9 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On lance deux dés tétraédriques, dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. On note les résultats sous forme de couples d'obtention équiprobable

- Si le premier nombre obtenu est strictement inférieur au deuxième, on les additionne.
- Sinon, on effectue la différence des eux.

On note R la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre obtenu par le calcul.

1. Donner le nombre de couples possibles.

$\boldsymbol{\Omega = \{(x; y)|1 \leq x \leq 4 \; et \; 1 \leq y \leq 4\}}$

Il y a $\boldsymbol{4 \times 4 = 16}$ couples possibles.

2. Donner la loi de probabilité de R.

On fait d'abord un tableau à double entrée.

Dé1 \ Dé2	1	2	3	4
1	0	3	4	5
2	1	0	5	6
3	2	1	0	7
4	3	2	1	0

Loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 10 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Un jeu de 52 cartes est composé de douze "figures" : Valet, dame ou roi. Elles valent chacune un point. Les quatre AS valent chacun cinq points et les cartes restantes ne valent aucun point. On tire une carte au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{36}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{4}{52}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.

$E(X) = 0 \times \frac{36}{52} + 1 \times \frac{12}{52} + 5 \times \frac{4}{52} = \frac{32}{52} \approx 0,62$

Pour un très grand nombre de cartes tirées, on a en moyenne 0,62 point.

3. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Or $E(X^2) = 0^2 \times \frac{36}{52} + 1^2 \times \frac{12}{52} + 5^2 \times \frac{4}{52} = \frac{112}{52} \approx 2,15$

$V(x) = \frac{112}{52} - \left(\frac{32}{52}\right)^2 \approx 1,78$

$\sigma(X) = \sqrt{V(x)} \approx 1,33$

Exercice 11 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets, 3 donnent droit à quatre places gratuites, 6 donnent droit à deux places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite, et les autres billets ne gagnent rien.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe le nombre de places gratuites.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

$\boldsymbol{x_i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$
$\boldsymbol{P(X=x_i)}$	$\mathbf{\frac{69}{120}}$	$\mathbf{\frac{42}{120}}$	$\mathbf{\frac{6}{120}}$	$\mathbf{\frac{3}{120}}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X.
   Interpréter le résultat

$\boldsymbol{E(X) = 0 \times \frac{69}{120} + 1 \times \frac{42}{120} + 2 \times \frac{6}{120} + 4 \times \frac{3}{120}}$

$\boldsymbol{= \frac{66}{120} = 0,55}$

Pour un très grand nombre de séance de cinéma de ce type, un billet de loterie donne en moyenne 0,55 place gratuite.

Compétences : Utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire et Espérance mathématique et variance

Exercice 12 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0,5	1	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,2	0,15	0,05	a	0,32	0,18

1. Déterminer la valeur de a.

$\boldsymbol{a = 1 - (0,2 + 0,15 + 0,05 + 0,32 + 0,18)1 - 0.9 = 0.1}$

2. a. Calculer $P(X > 3)$.

$\boldsymbol{P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)0,32 + 0,18 = 0,5}$

   b. Calculer $P(X \geq 4)$.

$\boldsymbol{P(X \geq 4) = P(X > 3) = 0,5}$

   c. Calculer $P(X \leq 4)$.

$\boldsymbol{P(X \leq 4) = P(X = -2) + P(X = 0,5) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4)}$

$\boldsymbol{= 0,2 + 0,15 + 0,05 + 0,1 + 0,32 = 0,82.}$

(Ou $\boldsymbol{P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0,18 = 0,82}$ **)**

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(X) = -2 \times 0,2 + 0,5 \times 0,15 + 1 \times 0,05 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,32 + 5 \times 0,18 = 2,205}$

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, on obtient en moyenne $\boldsymbol{2,205}$.

4. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

Or $\boldsymbol{E(X^2) = (-2)^2 \times 0,2 + 0,5^2 \times 0,15 + 1^2 \times 0,05 + 3^2 \times 0,1 + 4^2 \times 0,32 + 5^2 \times 0,18 = 11,4075}$

$\boldsymbol{V(X) = 11,4075 - (2,205)^2 = 6,545}$

$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,56.}$

Exercice 13 :

Malik télécharge au plus cinq jeux par mois sur son smartphone.
On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre k de jeux téléchargés.

La loi N est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4	5
$P(N=k)$	0,13	0,28	...	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante.

$\boldsymbol{p = 1 - (0,13 + 0,28 + 0,07 + 0,3 + 0,1) = 1 - 0,88 = 0,12}$

2. Quelle est la probabilité qu'il télécharge :
   a. au moins 3 jeux ?

   $\boldsymbol{P(N \geq 3) = 0,07 + 0,3 + 0,1 = 0,47}$

   b. au plus 4 jeux ?

   $\boldsymbol{P(N \leq 4) = 1 - P(N = 5) = 1 - 0,1 = 0,9}$

3. Calculer l'espérance mathématique de N. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(N) = 0 \times 0,13 + 1 \times 0,28 + 2 \times 0,12 + \times 3 \times 0,07 + 4 \times 0,3 + 5 \times 0,1 = 2,43}$
Après un très grand nombre de téléchargement, il télécharge en moyenne 2,43 jeux par mois.

Exercice 14 :

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20€. Pour en assurer la promotion, chaque client à l'entrée lance un dé cubique non truqué. Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ; si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif; dans les autres cas le client paie plein tarif.
Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat du lancer de dés, le prix payé par le client.

1. Détermine la loi de probabilité de X.

k	0	10	20
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

$\boldsymbol{E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{4}{6} = \frac{90}{6} = 15}$
$\boldsymbol{V(X) = \cdots = \frac{175}{3} \approx 58,3}$ **et** $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(x)} \approx 7,64}$

3. Que peut-on en déduire si la salle, composée de 2000 places, est pleine ?

Pour un très grand nombre de spectacle de ce genre, la recette moyenne sera de $\boldsymbol{15 \times 2000 = 30000}$€.

Exercice 15 : Jeu équitable

Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une. Si celle-ci est verte, le joueur gagne 50€ ; si elle est bleue, rien ne se passe, si elle est rouge, le joueur perd a€.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.

Calculer a pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$
Le jeu est favorable si et seulement si $E(X) > 0$

On cherche d'abord la loi de probabilité :

k	$-a$	0	50
$P(X=k)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{2}{20}$

Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0$

$$\Leftrightarrow -a \times \frac{8}{20} + 0 \times \frac{10}{20} + 50 \times \frac{2}{20} = 0$$
$$\Leftrightarrow -8a + 0 \times 10 + 50 \times 2 = 0 \times 20$$
$$\Leftrightarrow -8a + 100 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{-100}{-8}$$
$$\Leftrightarrow a = 12,5€$$

Le joueur doit perdre 12€ s'il choisit une carte rouge pour que le jeu soit equitable.

Compétences : Propriétés de l'espérance et de la variance

Exercice 16 :

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique -15 et Y la variable aléatoire définie par : $Y = 3X - 18$.

Déterminer l'espérance de Y.

$\boldsymbol{E(Y) = 3E(X) - 18 = 3 \times (-15) - 18 = -63}$

Exercice 17 :

La variable aléatoire X a pour espérance mathématique 5 et pour variance 4.

Soit Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = -2X$ et $Z = 4X - 7$.

Calculer $E(Y), V(Y)$ et $\sigma(Y)$ ainsi que $E(Z)$ et $V(Z)$.

$\boldsymbol{E(Y) = E(-2X)}$ $\boldsymbol{= -2E(X)}$ $\boldsymbol{= -2 \times 5}$ $\boldsymbol{= -10}$	$\boldsymbol{V(Y) = V(-2X)}$ $\boldsymbol{= (2)^2 V(X)}$ $\boldsymbol{= 4 \times 4}$ $\boldsymbol{= 16}$	$\boldsymbol{\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}}$ $\boldsymbol{= \sqrt{16}}$ $\boldsymbol{= 4}$	$\boldsymbol{E(Z) = E(4X - 7)}$ $\boldsymbol{= 4E(X) - 7}$ $\boldsymbol{= 4 \times 5 - 7}$ $\boldsymbol{= 13}$	$\boldsymbol{V(Z) = V(4X - 7)}$ $\boldsymbol{= 4^2 V(X)}$ $\boldsymbol{= 16 \times 4}$ $\boldsymbol{= 64}$

Exercice 18 :

On note X la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe le nombre de smartphones vendus dans un magasin donné. Une étude montre que l'espérance mathématique de X est 120 et son écart-type est 12.

Le prix d'un smartphone est de 250€

Soit R la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe la recette du magasin. Déterminer $E(R)$ et $V(R)$.

$\boldsymbol{R = 250X}$	$\boldsymbol{E(X) = 120}$	$\boldsymbol{\sigma(X) = 12}$ **donc :** $\boldsymbol{V(X) = \sigma^{2(X)}}$ $\boldsymbol{= 12^2}$ $\boldsymbol{= 144}$
$\boldsymbol{E(R) = E(250X)}$ $\boldsymbol{= 250E(X)}$ $\boldsymbol{= 250 \times 120}$ $\boldsymbol{= 30000}$	$\boldsymbol{V(R) = V(250X)}$ $\boldsymbol{= 250^2 V(X)}$ $\boldsymbol{= 250^2 \times 12^2}$ $\boldsymbol{= 9000000}$	

Exercice 19 :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre d'articles fabriqués par une entreprise. On suppose que $E(X) = 1000$.

Le coût de fabrication de chaque article est de 50€ et les frais annuels de fabrication s'élèvent à 10000€.

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le coût total de fabrication. Déterminer $E(Y)$.

$\boldsymbol{Y = 10000 + 50X}$ $\boldsymbol{E(Y) = 10000 + 50E(X)}$ $\boldsymbol{E(Y) = 10000 + 50000}$ $\boldsymbol{E(Y) = 60000}$

Compétences : Expériences identiques et indépendantes.

Exercice 20 :

Une entreprise d'électronique fabriquant des multimètres constate lors d'un test de qualité que 8 % des appareils fabriqués présentent au moins un défaut D_1, 15 % présentent au moins un défaut D_2 et 5 % présentent les deux défauts. On choisit au hasard un appareil dans la production. Tous les tirages sont équiprobables.

1) a) Compléter le tableau ci-dessous par les pourcentages correspondants

	appareils présentant le défaut D_2	appareils ne présentant pas le défaut D_2	Total
appareils présentant le défaut D_1	5 %	3 %	8 %
appareils ne présentant pas le défaut D_1	10 %	82 %	92 %
Total	15 %	85 %	100 %

b) Quelle est la probabilité P_1 que le multimètre présente un et un seul défaut ?

$$P_1 = \frac{3}{100} + \frac{10}{100} = \frac{13}{100} = 0,13$$

c) Quelle est la probabilité P_2 qu'il ne présente aucun défaut ?

$$P_2 = \frac{82}{100} = 0,82$$

2) Les appareils présentant deux défauts sont mis au rebut. Les appareils présentant un seul défaut sont réparés. Un appareil sera commercialisé s'il ne présente aucun défaut ou s'il est réparé.

Le bénéfice réalisé par l'entreprise sur un multimètre commercialisé est de 500 € s'il ne nécessite pas de réparation, de 300 € s'il nécessite une réparation. La perte engendrée par un appareil mis au rebut est de 300 € soit un « bénéfice » de – 300 €.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe le bénéfice, positif ou négatif, à tout appareil pris au hasard dans la production.

- $P\,(X = 500) = P_2 = 0,82$ **pour les multimètres sans défaut.**
- $P\,(X = 300) = P_1 = 0,13$ **pour les multimètres présentant un seul défaut.**
- $P\,(X = -300) = 0,05$ **car il y a 5 % de multimètres qui présentent les 2 défauts, donc qui seront mis au rebut.**

x_i	– 300	300	500
p_i	$0,05$	$0,13$	$0,82$

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
Donner une interprétation pour E(X).

$E(X) = -300 \times 0,05 + 300 \times 0,13 + 500 \times 0,82$
$E(X) = 434€$
Si l'entreprise produit un très grand nombre de multimètres, elle peut espérer réaliser un bénéfice moyen de 434 euros par multimètre fabriqué.

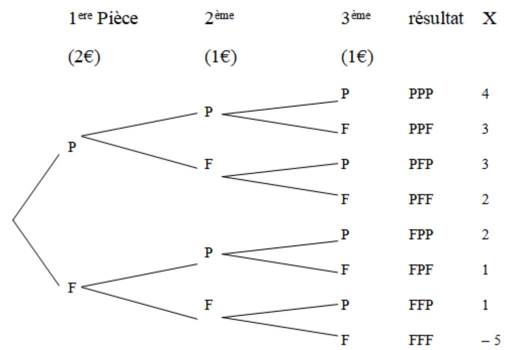
c) Calculer une valeur approchée au centième près de l'écart type σ (X).

$\sigma(X) \approx 181,23$ **(à la calculatrice mode STAT)**

Exercice 21 :

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie :
une de 2 euros et deux de 1 euro. Un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.

1) Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?



Il y a 8 résultats possibles.

2) Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros, sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.

a) Quelles valeurs peut prendre X ?

X prend comme valeur -5 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4.

b) Donner la loi de probabilité de X.

Gain X	– 5	1	2	3	4
probabilité p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) Calculer la probabilité de l'évènement « X ≤ 2 ».

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=-5) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

3) a) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

$$E(X) = -5 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$$

b) Ce jeu est-il équitable ?

Le jeu n'est pas équitable car $E(X) \neq 0$.
Remarque : Le jeu est favorable au joueur, car E(X) > 0.

c) Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

On note a la somme recherchée (on va remplacer le -5 par $-a$)
Le jeu est équitable ⇔ $E(X) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -a \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{a}{8} + \frac{16}{8} = 0 \\ &\Leftrightarrow -a + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 16 \end{aligned}$$

Le jeu sera équitable si le joueur perd 16€ quand il obtient face pour les 3 pièces.

Exercice 22 :

Un jeu consiste à tirer une boule d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

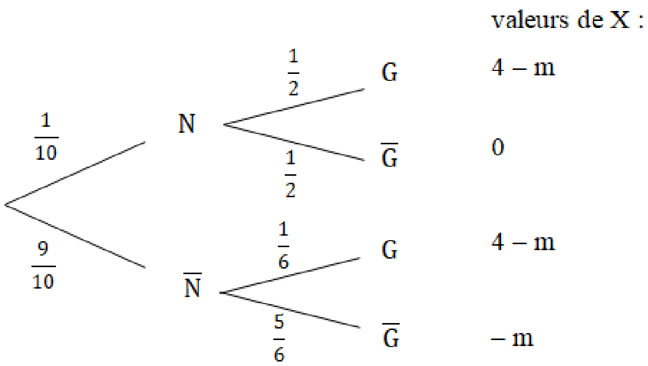
- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire est tirée » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1) a) Déterminer la probabilité de l'évènement N.

$\boldsymbol{P(N) = \frac{1}{10}}$ **car il y a une boule noire pour 10 boules.**

b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{1}{5}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.



N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$\boldsymbol{P(G) = P(N \cap G) + P(\overline{N} \cap G)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = P(N)P_N(G) + P(\overline{N})P_{\overline{N}}(G)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{1}{5}}$$

c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

$$\boldsymbol{P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(\overline{G} \cap N)}{P(\overline{G})} = \frac{P(N) \times P_N(\overline{G})}{1 - P(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{16}}$$

2) Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	– m	0	4 – m
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

$$\boldsymbol{E(X) = -m \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{20} + (4 - m)\frac{1}{5} = \frac{-19m + 16}{20}}$$

c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable $\boldsymbol{\Leftrightarrow E(X) = 0}$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{-19m + 16}{20} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -19m + 16 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -19m = -16}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow m = \frac{16}{19}}$$

La valeur de m qui rend le jeu équitable est donc $m = \frac{16}{19} \approx 0,84$ €

Exercice 23 :

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

a. si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

b. si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

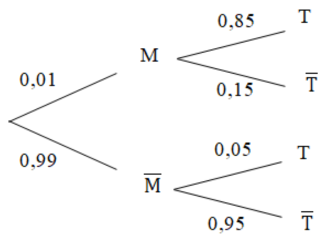
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2) Un animal est choisi au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

$\boldsymbol{P(M \cap T) = P(M)P_M(T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085}$

b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers,
donc d'après la formule des probabilités totales :

$\boldsymbol{P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)}$

$\boldsymbol{P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)}$

$\boldsymbol{P(T) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05}$

$\boldsymbol{P(T) = 0,058}$

La probabilité que son test soit positif est bien de 0,058.

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

$\boldsymbol{P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466}$

4) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le coût à engager par animal subissant le test.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

X_i	0	100	1000
P_i	0,9405	0,058	0,0015

b) Calculer l'espérance de X, et interpréter dans le contexte de l'exercice.

$\boldsymbol{E(X) = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3}$

Cela signifie que si l'éleveur a très un grand nombre de bêtes, en moyenne, cette maladie lui coûtera 7,3 € par animal.

c) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Pour 200 bêtes, on peut donc estimer que l'éleveur doit prévoir : $\boldsymbol{200 \times 7,3 = 1460}$ €.

Exercice 24 :

Lors d'une fête, le comité d'organisation a prévu une animation qui consiste à lancer un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
La partie est organisée selon les règles suivantes :
On mise 3 euros puis on lance le dé ;

c. pour la sortie du 6, on reçoit 10 euros ;
d. pour la sortie du 5, on reçoit 4 euros ;
e. pour la sortie du 4, on reçoit 1 euro ;
f. dans les autres cas on ne reçoit rien.

On appelle gain d'une partie la différence entre la somme reçue et la mise initiale.

1) On note X la variable aléatoire qui à l'issue d'une partie associe le gain.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

- **Pour la sortie du 6 (probabilité $\frac{1}{6}$) : $X = 10 - 3 = 7$**
- **Pour la sortie du 5 (probabilité $\frac{1}{6}$) : $X = 4 - 3 = 1$**
- **Pour la sortie du 4 (probabilité $\frac{1}{6}$) : $X = 1 - 3 = -2$**
- **Pour les autres cas (probabilité $\frac{3}{6}$) : $X = -3$**

Les valeurs prises par X sont donc : – 3 € ; – 2 € ; 1 € et 7 €.

b) Etablir la loi de probabilité de X.

Gain x_i	– 3	– 2	1	7
probabilité p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

c) Calculer l'espérance mathématique E(X).

$$E(X) = -3\times\frac{3}{6} - 2\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{6} + 7\times\frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = -0,5$$

d) Calculer la variance et l'écart type de X (valeur approchée arrondie au dixième).

$$E(X^2) = (-3)^2\times\frac{3}{6} + (-2)^2\times\frac{1}{6} + 1^2\times\frac{1}{6} + 7^2\times\frac{1}{6} =$$
$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 13,25$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 3,6$$

e) Le comité d'organisation prévoit la réalisation de 150 parties réalisées lors de cette fête.
Quel bénéfice peut-il espérer tirer de ce jeu ?

$E(X) = -0,5$ donc si un joueur joue un grand nombre de parties, il perdra en moyenne 0,5 € par partie.

Le comité peut donc espérer gagner, en moyenne, 0,5 € par partie.
Pour 150 parties, il peut espérer gagner 0,5×150 = 75 €.

2) Un joueur se présente, il dispose de 4 euros.
Déterminer la probabilité P que ce joueur puisse jouer une deuxième partie.

La probabilité cherchée est : $P = P(X = 7) + P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
(car il doit lui rester au moins 3 euros pour pouvoir remiser et rejouer)

3) Le comité d'organisation a décidé en dernière minute de rendre ce jeu équitable.
La règle du jeu reste identique, seule la mise est changée.
Déterminer cette nouvelle mise m qui rend le jeu équitable.

On note m la mise cherchée.
On obtient une nouvelle variable aléatoire, notée Y, avec la même loi de probabilité, mais les valeurs (– m), (1 – m), (4 – m) et (10 – m) dans la 1ère ligne.

Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(Y) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{3}{6}\times(-m) + \frac{1}{6}\times(1-m) + \frac{1}{6}\times(4-m) + \frac{1}{6}\times(10-m) = 0$
$\Leftrightarrow -3m + 1 - m + 4 - m + 10 - m = 0$
$\Leftrightarrow -6m + 15 = 0$
$\Leftrightarrow m = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5$

Pour que ce jeu soit équitable, la nouvelle mise doit être de 2,50 €.

<u>Autre méthode</u> : On note Y la nouvelle variable aléatoire avec le changement de mise.
On a donc $Y = X + 3 - m$.
(On doit ajouter le 3 pour commencer le gain « à 0 » et enlever la nouvelle mise m).
$E(aX + b) = aE(X) + b$, ce qui donne ici $E(Y) = E(X + 3 - m) = E(X) + 3 - m$.

Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(Y) = 0$
$\Leftrightarrow E(X) + 3 - m = 0$
$\Leftrightarrow m = E(X) + 3 = -0,5 + 3 = 2,5$

Exercice 25 :

Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges.
10 % des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus.

Un joueur tire un jeton au hasard. Lorsque le jeton tiré est rouge, le joueur gagne une sommes x en euros. Lorsque le jeton tiré est blanc, le joueur gagne le carré de cette somme. Enfin, lorsque le jeton tiré est bleu, le joueur perd le dube de cette somme.
On appelle G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1) On suppose dans cette question que x = 2 €.

a) Déterminer la loi de probabilité de G.

g_i	-8	2	4
p_i	**0,1**	**0,6**	**0,3**

b) Quel gain moyen par partie le joueur peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois ?

$\boldsymbol{E(G) = 0,1 \times (-8) + 0,6 \times 2 + 0,3 \times 4 = 1,6}$
S'il joue un grand nombre de fois, le joueur peut espérer un gain moyen de 1,6 € par partie.

2) Si x = 5 €, est-ce plus intéressant pour le joueur ?

g_i	-125	5	25
$\boldsymbol{p_i}$	**0,1**	**0,6**	**0,3**

$\boldsymbol{E(G) = 0,1 \times (-125) + 0,6 \times 5 + 0,3 \times 25 = -2}$

Cette fois, l'espérance est négative, ce jeu est défavorable au joueur, qui va perdre en moyenne 2 € par partie, donc ce n'est pas du tout intéressant.

3) On cherche à déterminer s'il existe une valeur de x pour que le gain moyen espéré par partie soit le plus grand possible.

a) Montrer que cela revient à maximiser la fonction f définie par :
f (x) = – 0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x.

g_i	$-x^3$	x	x^2
p_i	**0,1**	**0,6**	**0,3**

$\boldsymbol{E(G) = 0,1 \times (-x^3) + 0,6 \times x + 0,3 \times x^2 = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x}$

Trouver x pour que le gain moyen espéré par partie soit le plus grand possible revient bien à maximiser la fonction f définie par : $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x$.

b) Résoudre le problème posé.

On étudie les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

- **On calcule la dérivée : $f'(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 0,6 = 0,3(-x^2 + 2x + 2)$**
- **On étudie le signe de la dérivée : c'est celui du polynôme du second degré ci-dessus.**

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 2 = 12.\ \Delta > 0$**, donc il y a 2 racines :**

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{-2} = 1-\sqrt{3}$ **et** $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times(-1)} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{-2} = 1+\sqrt{3}$

$f'(x)$ est du signe de a, ici négatif, à l'extérieur des racines.

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f (x)	0	↗	max	↘	

Le gain moyen espéré par partie sera maximal pour $x = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73$ €.

<u>**Remarque**</u> **: ce n'est pas demandé, mais le gain moyen par partie serait alors égal à $f(1+\sqrt{3}) \approx 1,84$ €.**

Exercice 26 :

ATTENTION l'énoncé est différent par rapport au livret.

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille. L'eau provient de deux sources.

Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau est calcaire.

On a effectué des tests pendant une journée et on constate que :

- **11,2**% des bouteilles d'eau issues de la source 1 contiennent de l'eau calcaire.
- **3** % des bouteilles d'eau issues de la source 2 contiennent de l'eau calcaire.

La source 1 fournit 70% de la production totale des bouteilles d'eau.

1) Compléter le tableau des fréquences (en pourcentages) ci-après :

	Source 1	Source 2	Total
Eau calcaire	11,2	3	14,2
Eau non calcaire	58,8	27	85,8
Total	70	30	100

2) On prélève au hasard une bouteille dans la production de cette journée. toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirée. On considère les événements suivants :
   - A : " la bouteille d'eau provient de la source 1";
   - B : " la bouteille d'eau provient de la source 2";
   - C : " l'eau contenue dans la bouteille est calcaire".

   a) Calculer $P(A)$; $P(C)$; $P(A \cap C)$et $P(B \cap C)$.

La source 1 fournit 70% de la production totale donc $\boldsymbol{P(A) = \frac{70}{100} = 0,70}$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire est 14,2% donc $\boldsymbol{P(C) = 0,142}$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 11,2% donc $\boldsymbol{P(A \cap C) = 0,112}$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 3% donc $\boldsymbol{P(B \cap C)}$ **= 0,03.**

   b) Calculer la probabilité que l'au contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

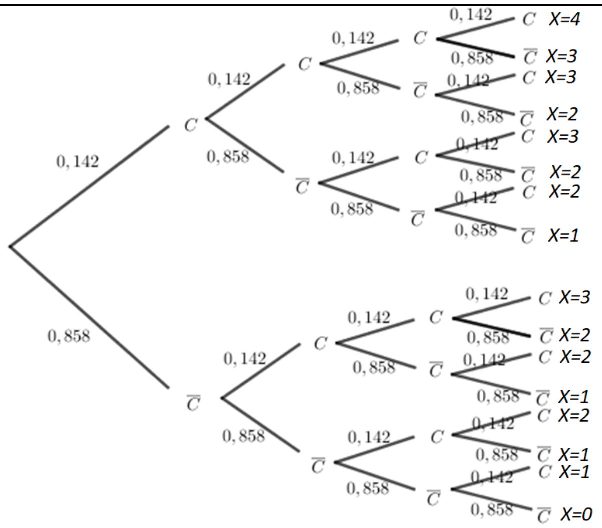
$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0,112}{0,142} = \frac{56}{71}$$

3) L'usine fait des packs de quatre bouteilles d'eau. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout pack de 4 bouteilles d'eau le nombre de bouteilles d'eau calcaire.

   a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucune bouteille avec de l'eau calcaire ?

$\boldsymbol{P(X = 0) = 0,858^4 \approx 0,542}$

   b) Quelle est la probabilité qu'un pack contienne au moins une bouteille d'eau calcaire?



$\boldsymbol{p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)}$
$\boldsymbol{p(X \geq 1) = 1 - 0,858^4}$
$\boldsymbol{p(X \geq 1) \approx 0,458}$

Exercice 27 :

Une étude statistique a été réalisée sur une population de 1000 souris de laboratoire.

Chaque souris a été observée afin de déceler la présence d'une certaine bactérie dans son organisme. Dans cette population de souris :

- 60% des souris sont des mâles ;
- parmi les souris mâles, 20% sont porteuses de la bactérie ;
- 10% des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie.

1) Compléter le tableau suivant:

	Souris Femelle	Souris mâle	Total
Souris porteuse de la bactérie	**100**	**120**	**220**
Souris non porteuse de la bactérie	**300**	**480**	**780**
Total	**400**	**600**	1000

- 60% des souris sont des mâles donc on calcule 60% de 1000 : $1000 \times \frac{60}{100} = 600$
- parmi les souris mâles, 20% sont porteuses de la bactérie donc on calcule 20% de 600 : $600 \times \frac{20}{100} = 120$
- 10% des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie donc on calcule 10% de 1000 : $100 \times \frac{10}{100} =$ 100

Les autres valeurs s'obtiennent par addition et soustraction.

2) On prélève au hasard une souris de la population et on l'examine afin de déterminer son sexe et de détecter l'éventuelle présence de la bactérie.

Soit les événements suivants :

F : "la souris prélevée est une femelle"

B : "la souris prélevée est porteuse de la bactérie"

a) A l'aide des données de l'énoncé, déterminer $p(F)$et $p(F \cap B)$.

Il y a 400 femelles sur les 1000 souris :

$$\boldsymbol{p(F) = \frac{400}{1000} = 0,4}$$

Il y a 100 femelles porteuse de la bactérie sur les 1000 souris :

$$\boldsymbol{p(F \cap B) = \frac{100}{1000} = 0,1}$$

b) Calculer la probabilité qu'une souris soit porteuse de la bactérie sachant que c'est une femelle.

On cherche $p_F(B)$

Parmi les 400 femelles, 100 sont porteuse de la maladie, donc $p_F(B) = \frac{100}{400} = 0,25$

Autre méthode :

$$\boldsymbol{p_F(B) = \frac{p(F \cap B)}{p(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25}$$

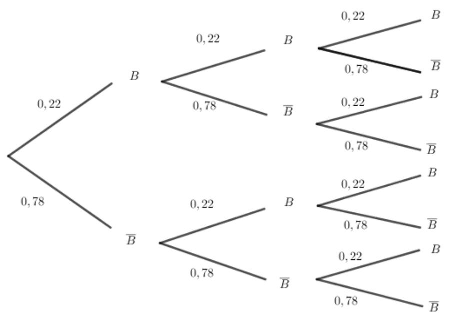
c) Démontrer que la probabilité de B est égale à 0,22.

Il y a 220 souris malades sur les 1000 donc :

$$\boldsymbol{p(B) = \frac{220}{1000} = 0,22}$$

3) On prélève dans la population, au hasard et successivement, 3 souris. La population est suffisamment grande pour pouvoir assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de souris porteuses de la bactérie parmi les 3 souris prélevées. Calculer la probabilité de prélever exactement 2 souris porteuses de la bactérie (on arrondira au centième)

On modélise la situation par un arbre pondéré:



On cherche $p(X = 2)$

Il y a trois chemins identique qui conviennent :

$$\boldsymbol{BB\overline{B} - B\overline{B}B - \overline{B}BB}$$

$$\boldsymbol{p(X = 2) = 3 \times 0,22^2 \times 0,78}$$

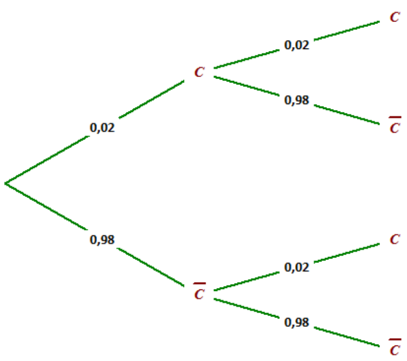
$$\boldsymbol{p(X = 2) \approx 0,11}$$

La probabilité de prélever exactement 2 souris porteuses de la bactérie est d'environ 0,11

<u>Exercice 28 : Arbres pondérés</u>

Sur un VTT, la probabilité de crevaison de la roue avant et celle de la crevaison de la roue arrière sont égales à 0,02. On suppose que la crevaison d'un pneu n'a aucune influence sur l'autre pneu. Construire un arbre pondéré pour déterminer :

On note C l'événement " le pneu est crevé" de probabilité 0,02.
La situation est représentée par :



1) la probabilité d'avoir deux pneus crevés

$p(CC) = 0,02 \times 0,02 = 0,0004$

2) la probabilité de ne pas avoir de crevaison.

$p(\overline{C}\overline{C}) = 0,98 \times 0,98 = 0,9604$

Exercice 29 : Arbres pondérés

Une boite opaque contient 20 jetons : 3 rouges, 7 jaunes et 10 bleus.

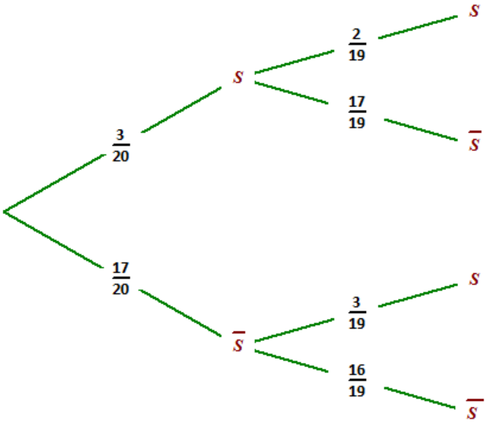
On choisit au hasard un jeton et on appelle succès " obtenir un jeton rouge"

1) On ne remet pas le jeton tiré dans l'urne et on tire à nouveau un jeton.

a) Les deux épreuves sont-elles indépendantes ? Justifier.

Avant le tirage du deuxième jeton, la composition de la boite change en fonction de la couleur du 1er jeton tiré. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes.

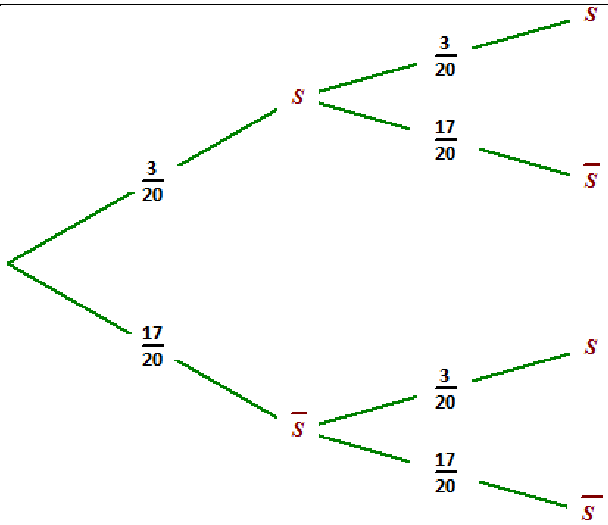
b) Représenter la situation par un arbre pondéré.



c) Calculer la probabilité d'avoir exactement un jeton rouge.

$$p = p(S\overline{S}) + p(\overline{S}S) = \frac{3}{20}\times\frac{17}{19}+\frac{17}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{51}{190}$$

2) On remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton. Représenter ce double tirage par un arbre pondéré et calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès.



1ère méthode :

On repère les trois chemins pour obtenir au moins un succès (SS ; $S\overline{S}$ et $\overline{S}\,S$)

$$p = \frac{3}{20}\times\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\times\frac{17}{20}+\frac{17}{20}\times\frac{3}{20}=\frac{111}{400}$$

2ème méthode :

"Obtenir au moins un succès" est le contraire de l'événement " obtenir 0 succès"

donc la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$p = 1 - p(\overline{S}\,\overline{S}) = 1-\frac{17}{20}\times\frac{17}{20}=\frac{111}{400}$$

Exercice 30 : Arbres pondérés

On dispose de deux boîtes contenant chacune des boules vertes, des boules bleues, et des boules rouges, indiscernables au toucher. La répartition des couleurs dans chaque boîte est différente.

Dans la première boite, 10% des boules sont vertes et 70% sont rouges.

Dans la deuxième boite, 30% des boules sont bleues et 40% sont rouges.

On tire au hasard une boule dans la première boîte puis une boule dans la deuxième boîte.

On appelle :

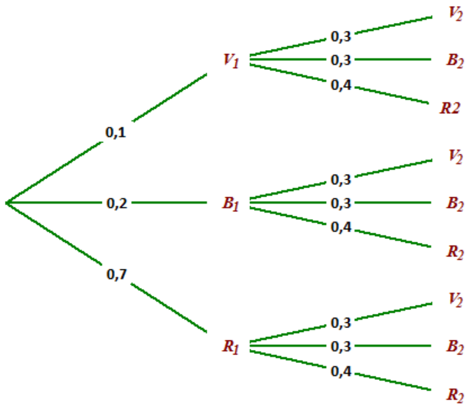
- V_1 l'événement " la 1ère boule tirée est verte"
- V_2 l'événement " la deuxième boule est verte"

On définit de la même manière les événements R_1 et R_2 correspondant au tirage d'une boule rouge, les événements B_1 et B_2 correspondant au tirage d'une boule bleue.

1) a) Calculer la probabilité $p(B_1)$ de l'événement B_1.

$\boldsymbol{p(B_1) + p(V_1) + p(R_1) = 1}$
$\boldsymbol{p(B_1) = 1 - p(R_1) - p(V_1)}$
$\boldsymbol{p(B_1) = 1 - 0,7 - 0,1 = 0,2}$

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.



2) a) Définir l'événement $V_1 \cap R_2$ à l'aide d'une phrase, puis calculer sa probabilité.

$\boldsymbol{V_1 \cap R_2}$ est l'événement " la première boule tirée est verte et la deuxième est rouge"
ou " on choisit une boule verte dans la boite 1 et une rouge dans la boite 2 "
$\boldsymbol{p(V_1 \cap R_2) = 0,1 \times 0,4 = 0,04}$

b) Calculer la probabilité que les deux boules soient vertes.

$\boldsymbol{p(V_1 \cap V_2) = 0,1 \times 0,3 = 0,03}$

c) Justifier que $p(R_2) = 0,4$.

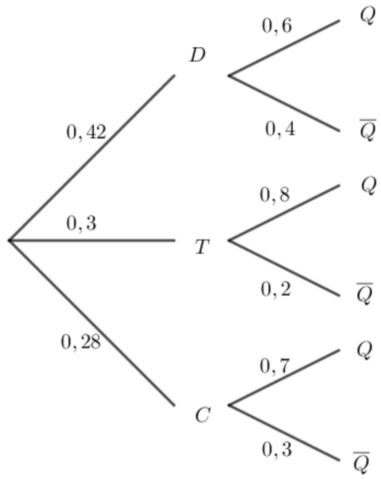
On repère les trois chemins qui mènent à $\boldsymbol{R_2}$
$\boldsymbol{p(R_2) = p(V_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2)}$
$\boldsymbol{p(R_2) = 0,1 \times 0,4 + 0,2 \times 0,4 + 0,7 \times 0,4}$
$\boldsymbol{p(R_2) = 0,4}$

3) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur.

Soit $\boldsymbol{A}$ l'événement : «les deux boules tirées soient de la même couleur ».
$\boldsymbol{p(A) = p(V_1 \cap V_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,03 + 0,2 \times 0,3 + 0,7 \times 0,4}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,03 + 0,06 + 0,28}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,37}$

Exercice 31 : Arbres pondérés

Un prince charmant se doit de partir à l'aventure et d'affronter des périls.
Dans 42 % des cas, il affronte un Dragon, dans 30 % ce sont des Trolls et dans les autres cas, c'est le Chevalier noir.
Lorsqu'il affronte un Dragon, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,6.
Tuer un dragon lui rapporte 1 000 pièces d'or
Lorsqu'il affronte un Troll, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,8.
Tuer un troll lui rapporte 500 pièces d'or.
Lorsqu'il affronte un chevalier noir, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,7.
Tuer un chevalier noir lui rapporte 300 pièces d'or.



1) Compléter l'arbre pondéré ci contre.

2) Un prince part à l'aventure. Quelle est la probabilité...

i. qu'il gagne 1 000 pièces d'or ?

$\boldsymbol{p(D \cap Q) = 0,42 \times 0,6 = 0,252}$

ii. qu'il gagne des pièces d'or ?

Le prince gagne des pièces d'or s'il réussit sa quête :
$\boldsymbol{p(Q) = 0,42 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 + 0,28 \times 0,7 = 0,688}$

iii. qu'il revienne bredouille (pour autant qu'il revienne) ?

$\boldsymbol{p(\overline{Q}) = 1 - p(Q) = 1 - 0,688 = 0,312}$

3) On appelle G la variable aléatoire représentant le gain en pièces d'or du prince.
Déterminer la loi de probabilité de G.

Gains (en pièces d'or)	1 000	500	300	0
Probabilité	**0,252**	**0,24**	**0,196**	**0,312**

$\boldsymbol{p(G = 1000) = p(D \cap Q) = 0,42 \times 0,6 = 0,252}$
$\boldsymbol{p(G = 500) = p(T \cap Q) = 0,3 \times 0,8 = 0,24}$
$\boldsymbol{p(G = 300) = p(C \cap Q) = 0,28 \times 0,7 = 0,196}$
$\boldsymbol{p(G = 0) = p(\overline{Q}) = 0,312}$

4) Combien un prince gagne-t-il de pièces d'or en moyenne pour une quête ?

On calcule l'espérance $\boldsymbol{E(G)}$
$\boldsymbol{E(G) = 1000 \times 0,252 + 500 \times 0,24 + 300 \times 0,196 + 0 \times 0,312 = 430,8}$
En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le prince gagne en moyenne 430,8 pièces d'or .

Exercice 32 : Arbres pondérés

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n°1 : voyage en 1ère classe et hôtel pour un coût de 150€
- la formule n°2 : voyage en 2ème classe et hôtel pour un coût de 100€.

40% des employés inscrits choisissent la formule n°1

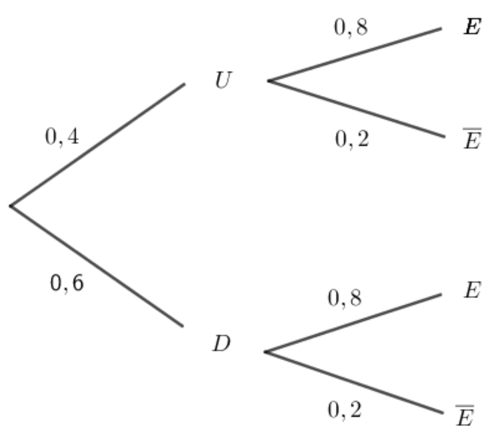
Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30€.

Indépendamment de la formule choisie, 80% des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note les évènements suivants :

- U : " l'employé inscrit choisit la formule n°1"
- D : " l'employé inscrit choisit la formule n°2"
- E : " l'employé inscrit choisit l'excursion facultative"

1) Construire l'arbre de probabilités correspondant à la situation.



2) Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n°2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.

$\boldsymbol{p(D \cap E) = 0,6 \times 0,8 = 0,48}$

3) Soit C le coût total du voyage (excursion comprise)

a) Déterminer les valeurs possibles que peut prendre C.

C prend les valeurs : 100 ; 130; 150 et 180
En effet $C = 100$ pour un voyage en 2ème classe sans excursion
$C = 130$ pour un voyage en 2ème classe avec excursion
$C = 150$ pour un voyage en 1ère classe sans excursion
$C = 180$ pour un voyage en 1ère classe avec excursion

b) Déterminer la loi de probabilité de C.

$\boldsymbol{p(C = 100) = p(D \cap \overline{E}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12}$
$\boldsymbol{p(C = 130) = p(D \cap E) = 0,6 \times 0,8 = 0,48}$
$\boldsymbol{p(C = 150) = p(U \cap \overline{E}) = 0,4 \times 0,2 = 0,08}$
$\boldsymbol{p(C = 180) = p(U \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32}$

D'où la loi de probabilité de C :

k	100	130	150	180
$p(C = k)$	0,12	0,48	0,08	0,32

c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(C) = 100 \times 0,12 + 130 \times 0,48 + 150 \times 0,08 + 180 \times 0,32}$
$\boldsymbol{E(C) = 144}$
En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le coût moyen du voyage est 144€

Compétence : Schéma de Bernoulli

Exercice 33 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

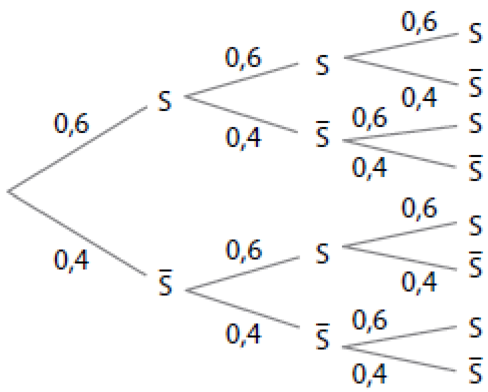
Une urne contient trois boules blanches et deux boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne.

On note S l'évènement « Obtenir une boule blanche ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement S.

$\boldsymbol{P(S) = \frac{3}{5} = 0,6.}$

2. On répète trois fois l'expérience décrite ci-dessus.
   Représenter le schéma de Bernoulli relatif à cette épreuve à l'aide d'un arbre pondéré.



Exercice 34 :

Marie est employée par une plateforme téléphonique. Elle a remarqué qu'elle traitait la demande d'un client en moins de 2 minutes avec une probabilité de 0,3 et cela indépendamment des clients précédents.

a) Un client appelle. Montrer que la situation peut se modéliser par une épreuve de Bernoulli. Présenter la loi de Bernoulli dans un tableau.

On considère l'épreuve de Bernoulli « Marie traite la demande d'un client » ayant deux issues :

- **Le succès S : « la demande est traitée en moins de deux minutes » de probabilité $p = 0,3$.**
- **L'échec $\bar{S}$: « la demande est traitée en plus de deux minutes » de probabilité $q = 1 - p = 0,7$**

La loi de Bernoulli est :

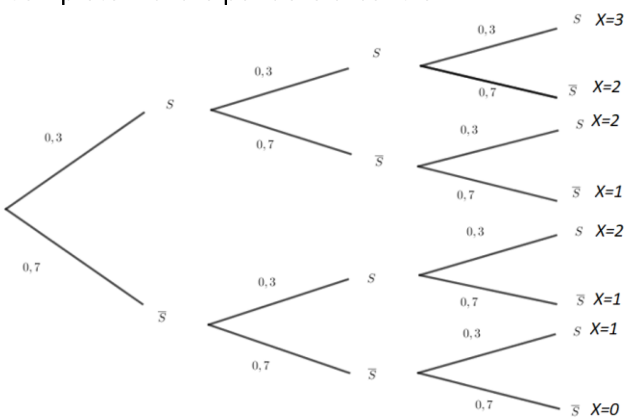
issue	Succès	Echec
Probabilité	0,3	0,7

b) Trois clients appellent successivement.

On traduit la situation par un arbre pondéré.

On note S le succès.

Compléter l'arbre pondéré ci contre.



On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès c'est-à-dire le nombre de demandes traitées en moins de deux minutes.

c) Calculer la probabilité de l'événement A : " Marie a traité chacune des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(A) = p(X = 3) = 0,3^3 = 0,027}$

d) Calculer la probabilité de l'événement B : " Marie a traité exactement une des trois demandes en moins de 2 minutes".

Il y a 3 chemins identiques qui correspondent : $S\bar{S}\bar{S}$; $\bar{S}S\bar{S}$; $\bar{S}\bar{S}S$

$\boldsymbol{p(B) = p(X = 1) = 3 \times 0,3 \times 0,7^2}$

$\boldsymbol{p(B) = p(X = 1) = 0,441}$

e) Calculer la probabilité de l'événement C : " Marie n'a traité aucune des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(C) = p(X = 0)0,7^3 = 0,343}$

f) Calculer la probabilité de l'événement D : " Marie a traité au moins une des trois demandes en moins de 2 min.".

$\boldsymbol{p(D) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(C) = 1 - 0,7^3 = 0,657}$

Exercice supplémentaire :

En France, 18% des personnes âgées de plus de 75 ans sont atteintes de la maladie d'Alzheimer.

Dans un groupe de sept personnes de plus de 75 ans, quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une d'entre elles soit atteinte de cette maladie ? Arrondir au millième.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes atteintes de la maladie d'Alzheimer dans un groupe de 7 personnes.

$\boldsymbol{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)}$

Or $\boldsymbol{P(X = 0) = (1 - 0,18)^7 = 0,82^7 \approx 0,2493}$

$\boldsymbol{P(X \geq 1) \approx 0,7507}$

La probabilité pour qu'au moins l'une d'entre elles soit atteinte de cette maladie est d'environ $0,75$.