Chapitre : Fonctions inverse et racine carrée :

I. La fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$

1) Etude de la fonction

Définition 1 : L'inverse d'un nombre réel x est le nombre réel y tel que

Propriété 1 (Conséquence) :

1. Un nombre et son inverse ont même signe.
2. Le réel 0 n'a pas d'inverse, puisque le produit par 0 vaut toujours 0, donc jamais 1.

La fonction inverse n'est donc pas définie sur 0.

Définition 2 : La fonction inverse est définie sur par $f(x) =$

Application 1 : Déterminer les images des nombres suivants par la fonction inverse :

$A = 5$	$B = -\frac{1}{7}$	$C = 10^{-5}$	$D = 3\sqrt{2}$

Exercice 1 : Images, antécédents de nombres par la fonction inverse

Pour chacune des questions suivantes, choisir la ou les bonnes réponses :

1. L'inverse de 5 est :
   a. $0,5$ b. 5^{-1} c. -5
2. L'inverse de $-0,5$ est :
   a. -2 b. $0,5$ c. $-\frac{1}{\frac{1}{2}}$
3. L'inverse de $\frac{3}{4}$ est :
   a. $-0,75$ b. $\frac{4}{3}$ c. $1,33$
4. L'inverse de 10000 est :
   a. $0,001$ b. 10^{-4} c. -10000
5. L'inverse de 10^{-3} est :
   a. 10^{3} b. -10^{3} c. 1000

Exercice 2 : Images, antécédents de nombres par la fonction inverse

Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$\frac{2}{9}$	200	2,5			
$\frac{1}{x}$				0,8	$\frac{4}{3}$	100

Exercice 2 : Images, antécédents de nombres par la fonction inverse

Soit f la fonction inverse.

1. Calculer les images par f des nombres réels suivants :
   a. 8 b. -6 c. $0,4$ d. $-1,5$ e. $-\frac{3}{4}$ f. $\frac{1}{7}$ g. $\sqrt{3}$ h. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i. 10^{-4} j. 3^{5}
2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par f
   a. 4 b. -9 c. $0,49$ d. -1 e. $\frac{9}{4}$ f. 1 g. $\frac{1}{25}$ h. 10^{4}

Propriété 2 (signe) :

- L'inverse d'un réel strictement négatif est un réel strictement ____________________.
- L'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement ____________________.

Propriété 3 (variations) :

La fonction inverse est strictement

____

sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Preuve : Pour tous $a \in]-\infty; \mathbf{0}[$ et $b \in]-\infty; \mathbf{0}[$ tels que $a < b$,

$$f(a) - f(b) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{ab}} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}}$$

Or $a < b$ donc $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
De plus, $a < \mathbf{0}$ et $b < \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{ab} > \mathbf{0}$
Donc $f(a) - f(b) > \mathbf{0}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{f(a)} > \boldsymbol{f(b)}$
$a < b$ alors $f(a) > f(b)$:
Donc la fonction inverse est **strictement décroissante sur** $]-\infty; \mathbf{0}[$

Preuve : Pour tous $a \in]\mathbf{0}; +\infty[$ et $b \in]\mathbf{0}; +\infty[$ tels que $a < b$,

$$f(a) - f(b) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{ab}} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}}$$

Or $a < b$ donc $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} > \mathbf{0}$
De plus, $a > \mathbf{0}$ et $b > \mathbf{0}$ d'où $\boldsymbol{ab} > \mathbf{0}$
Donc $f(a) - f(b) > \mathbf{0}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{f(a)} > \boldsymbol{f(b)}$
Donc la fonction inverse est **strictement décroissante sur** $]\mathbf{0}; +\infty[$.

Exercice 4 : Tableau de variations de la fonction inverse

1. Donner le tableau de variation de la fonction inverse sur l'intervalle $[3 ; 7]$
2. Donner le tableau de variation de la fonction inverse sur l'intervalle $[-2 ; 0[$
3. Donner le tableau de variation de la fonction inverse sur l'intervalle $[-5 ; 4]$

Exercice 5 : Extremums de fonction inverse

1. Quel est le maximum de la fonction inverse sur $[-5 ; -3]$?
2. Quel est le minimum de la fonction inverse sur l'intervalle $[1 ; 4]$
3. Déterminer un intervalle où la fonction inverse admet 1 pour minimum et 3 pour maximum.

Exercice 6 : Variations de la fonction inverse et comparaisons

Indiquer quelle propriété du cours permet d'affirme sans calcul que :

1. Si $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ alors $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{3}$
2. Si $-0,8 < -\frac{3}{4}$ alors $-\frac{5}{4} > -\frac{4}{3}$

Propriété 4 (Comparaison) :

- si $0 < a \leq b$ alors
- si $a \leq b < 0$ alors

Application 2 :

1. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geq 2$?
2. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x < -4$?
3. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geq -3$?
4. A quel domaine appartient $\frac{1}{x}$ lorsque $x < 5$?

Exercice 7 : Encadrement de $\frac{1}{x}$

En s'aidant du tableau de variations de la fonction inverse, proposer le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$ sachant que :

a. $x \in [2\,;2{,}5]$
b. $x \in [3\,;+\infty[$
c. $x \in [-1\,;-0{,}5]$
d. $x \in]-2\,;-\frac{3}{2}]$
e. $x \in]-\infty\,;-5]$
f. $x > 10$
g. $x \leq -4$
h. $0{,}05 < x \leq 0{,}1$

Exercice 8 : Variations de la fonction inverse et comparaisons

Comparer les inverses des nombres a et b suivants sans aucun calcul :

a. $a = \sqrt{3}$ et $b = 2$
b. $a = -0{,}34$ et $b = -0{,}27$
c. $a = \sqrt{7}$ et $b = 3$
d. $a = 10^{-3}$ et $b = 0{,}01$

2) Parité

Propriété 5 : La fonction inverse est

Remarque 1 : Une fonction est impaire si et seulement si :

- Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0
- Pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

⇨ On peut le vérifier ici : $f(-x) =$

Remarque 2 : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

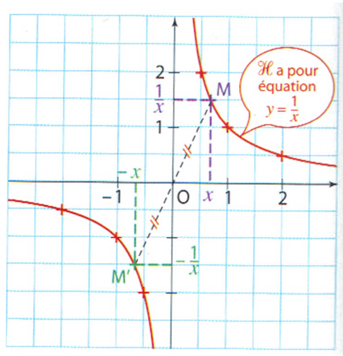
⇨ On va le vérifier maintenant :

3) Hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

Définition 3 : La fonction inverse est représentée par une courbe appelée :

Elle est constituée des points $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et a pour équation :

Attention : Comme 0 n'a pas d'image, il n'y a pas de point d'abscisse 0 sur l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.



Propriété 6 : Dans un repère orthogonal, l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ est symétrique par rapport à $O(0;0)$, c'est-à-dire qu'elle admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 9 : Représentation graphique

1. Dans un repère orthogonal (unité graphique : 4 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées), représenter graphiquement la fonction inverse sur $[-2\,;2]$.
2. En laissant apparaître les traits de construction, indiquer graphiquement :
   a. comment déterminer l'image de $1{,}5$ et de $-0{,}25$.
   b. comment déterminer l'antécédent de $1{,}5$

Exercice 10 : Représentation graphique de la fonction inverse, images et antécédents

1. Dans un repère orthogonal (unité graphique : 3 cm pour l'axe des abscisses, 1 cm pour l'axe des ordonnées), représenter graphiquement la fonction inverse sur $[-1\,;3]$.
2. En laissant apparaître les traits de construction, indiquer graphiquement :
   a. comment déterminer l'image de $\frac{5}{3}$.
   b. comment déterminer l'antécédent de $-1{,}5$

4) Equation $\frac{1}{x} = k$

Propriétés 7 :

- Si $k = 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$
- Si $k \neq 0$, l'équation $\frac{1}{x} = k$

Application 3 :

1. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

2. Résoudre l'équation $\frac{1}{x} = -3$

Exercice 11 : Equations de la forme $\frac{1}{x} = k$

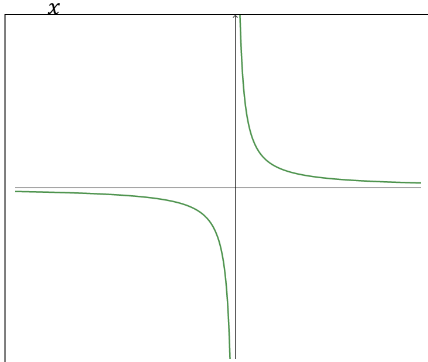
Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{1}{x} = 6$	b) $\frac{1}{x} = \frac{2}{5}$	c) $\frac{1}{x} = -2$	d) $\frac{1}{x} = 0{,}05$	e) $\frac{1}{x} = -0{,}4$
f) $\frac{1}{x} = -50$	g) $\frac{1}{x} = 10^6$	h) $\frac{1}{x} = -\frac{5}{16}$	i) $\frac{1}{x} = \sqrt{3}$	

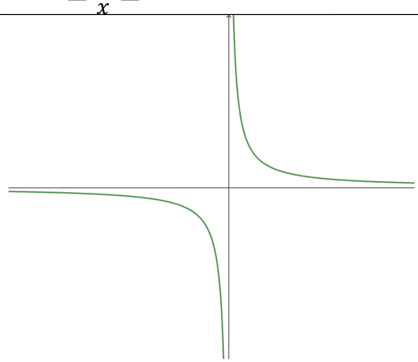
Application 4 : Inéquations avec la fonction inverse

En s'aidant, de l'hyperbole représentative de la fonction inverse, résoudre chacune des inéquation (déterminer à quel intervalle ou réunion d'intervalle appartient x) :

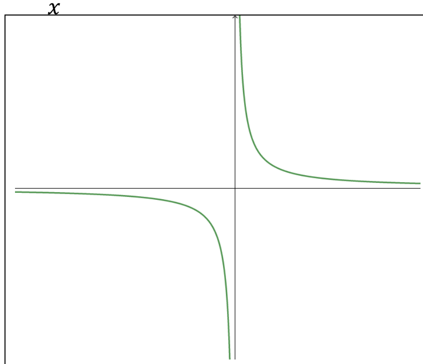
a. $\frac{1}{x} < -5$



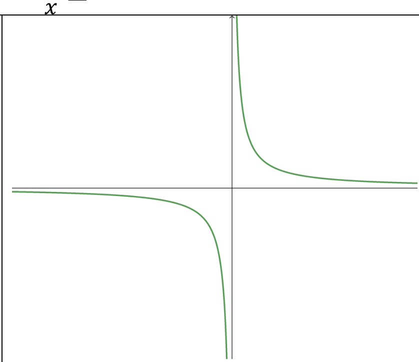
b. $4 \leq \frac{1}{x} \leq 9$



c. $\frac{1}{x} < 1$



d. $\frac{1}{x} \geq -1$



Exercice 12 : Inéquations avec la fonction inverse

En s'aidant, de l'hyperbole représentative de la fonction inverse, résoudre chacune des inéquation (déterminer à quel intervalle ou réunion d'intervalle appartient x) :

a. $\frac{1}{x} \geq 2$

b. $\frac{1}{x} < -5$

c. $\frac{1}{x} < 1$

d. $\frac{1}{x} \geq -1$

e. $\frac{1}{x} \leq \frac{5}{4}$

f. $0 < \frac{1}{x} \leq 2$

g. $4 \leq \frac{1}{x} \leq 9$

h. $-2 < \frac{1}{x} \leq -1{,}5$

II. Fonction racine carrée

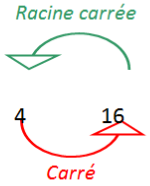
1) La racine carrée d'un nombre positif

Définition 4 : Soit a un nombre positif,
On appelle racine carrée de a, notée :   , **le nombre positif dont le carré est a.**

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé **radical**.

$\sqrt{12} \approx 3,4641$ $\sqrt{35} \approx 5,9160$

Valeur exacte   *Valeur approchée*



Application 5 :

$(-4)^2 =$ | $4^2 =$ | $\sqrt{16} =$ | $\sqrt{25} =$ | $\sqrt{49} =$ | $\sqrt{2,25} =$

Propriété 8 : La racine carrée d'un nombre   n'existe pas !

Remarque :
$\sqrt{-30}$ n'existe pas : cela voudrait dire que -30 serait le carré d'un nombre !!

2) La fonction racine carrée

Définition 5 : La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ (les réels positifs) par $f(x) =$
est appelée **fonction racine carrée.**

Exercice 13 :
Compléter :

- L'image de 16 par la fonction racine carrée est :
- L'image de 0 par l fonction racine carrée est :
- L'image de 8 par la fonction racine carrée est :
- L'image de $\frac{4}{9}$ par la fonction racine carrée est :

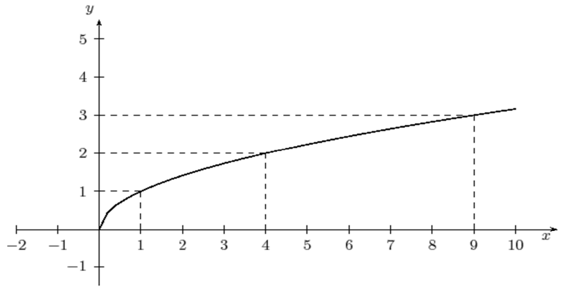
- L'antécédent de 2 par la fonction racine carrée est :
- L'antécédent de 5 par la fonction racine carrée est :
- - 8 a-t-il un antécédent par la fonction racine carrée ?
Si oui, lequel ?
- 0 a-t-il un antécédent par la fonction racine carrée ?
Si oui, lequel ?

Propriété 9 (variations) : La fonction racine carrée est

____

sur $[0\,;+\infty[$.

Sa courbe représentative est donnée ci-contre :



Preuve : Pour tous réels a et b tels que $0 \leq a < b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

- Or $a < b$ donc $b - a > 0$
- De plus, $a > 0$ et $b > 0$ d'où $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{b} > 0$ ainsi $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$

Donc $f(b) - f(a) > 0$ c'est-à-dire $f(a) < f(b)$

Donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\ +\infty[$

Propriété 10 (parité) : La fonction racine carrée

Application 6 : Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ dans chaque cas :

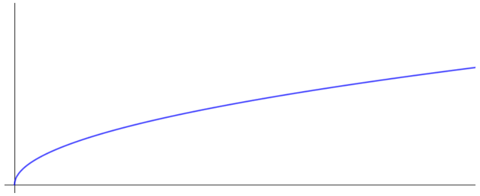
a) $4 \leq x < 6$ b) $1 < x \leq 3$

Application 7 : Résoudre, en écrivant des étapes de calcul, puis faire le lien avec le graphique.

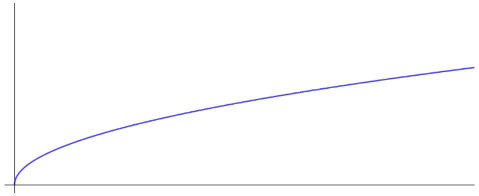
1) $\sqrt{x} = 3$	2) $\sqrt{x} = -5$	3) $\sqrt{x} = 10$	4) $\sqrt{x} = 0$

Application 8 : Résoudre, en faisant un schéma et une lecture graphique si besoin :

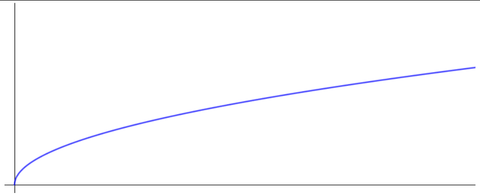
1) $\sqrt{x} < 4$



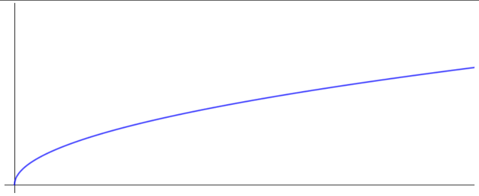
2) $\sqrt{x} \geq 9$



3) $\sqrt{x} > -1$



4) $\sqrt{x} < -3$



Exercice 14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x} = 0$

b) $\sqrt{x} = 7$

c) $2\sqrt{x} = 8$

d) $\sqrt{x} = -1$

e) $\sqrt{x} > -6$

f) $\sqrt{x} < 2$

g) $\sqrt{x} > 5$

h) $\sqrt{x} \leq 6$

i) $\sqrt{x} \geq -2$

j) $\sqrt{x} \leq 8$

3) Propriétés de la racine carrée

Propriétés 11 : Pour tous nombres a et b positifs :

$\sqrt{a^2} =$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 =$	$\sqrt{a \times b} =$

Application 9 :

$\sqrt{3^2} =$ $\quad\left(\sqrt{10}\right)^2 =$ $\quad\sqrt{144} =$ $\quad\sqrt{37^2} =$ $\quad\left(\sqrt{2}\right)^2 =$

Application 10:

$\sqrt{4{,}5 \times \sqrt{2}} =$ $\quad\sqrt{3} \times \sqrt{12} =$ $\quad\sqrt{2} \times \sqrt{32} =$

Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible :

$\sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = \sqrt{4}\times\sqrt{7} = 2\times\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

$\sqrt{44} = \sqrt{4\times11} = \sqrt{4}\times\sqrt{11} = 2\times\sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

$3\sqrt{72} = 3\times\sqrt{36\times2} = 3\times\sqrt{36}\times\sqrt{2} = 3\times6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

$\sqrt{6}\times\sqrt{12} = \sqrt{6}\times\sqrt{6\times2} = \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

Application 11 : Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers et b le plus petit possible.

a) $\sqrt{12}$	
b) $\sqrt{50}$	
c) $\sqrt{40}$	
d) $\sqrt{63}$	
e) $\sqrt{99}$	
f) $\sqrt{54}$	

Propriété 12 : Pour tous nombres a et b positifs, $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} =$

Application 12 :

$\sqrt{\frac{12}{3}} =$ $\quad\sqrt{\frac{4}{9}} =$ $\quad\sqrt{\frac{49}{25}} =$

Propriété 13 : Pour tous nombres a et b positifs : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ mais on sait que :

$\sqrt{a+b} <$

Contre-exemple :

$\sqrt{9+16} =$ $\quad\sqrt{9} + \sqrt{16} =$