Chapitre : Fonction exponentielle

I. Fonctions exponentielles

1) Fonction exponentielle

Propriété 1 :
Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve (facultative) :
Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x, on a à l'aide des propriétés sur la dérivée d'un produit et le composition :
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(-x) \times \left(-f'(x)\right) = 0$
Donc ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$ donc pour tout nombre réel x on a $\phi(x) = 1$. Ainsi $f(x) \times f(-x) = 1$. Ce qui montre que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

Définition 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
- $f' =$
- $f(0) =$

Cette fonction est appelée fonction ____________________. On note provisoirement cette fonction **exp**.

Preuve (facultative) :
1) Existence : Admise
2) Unicité : Si g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$ alors la fonction $h = \frac{g}{f}$ est définie (f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 1) et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$h' = \frac{g'f - f'g}{f^2} = 0$ car $f' = f$ et $g' = g$, donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.
Or $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$ donc pour tout nombre réel x on a $h(x) = 1$. Ainsi $g(x) = f(x)$.
Ce qui montre que $g = f$.

Propriétés 2 (conséquences) : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :
- $\exp'(x) =$
- $\exp(0) =$

3) Relation fonctionnelle et conséquences

Propriétés 3 : Soient x et y deux réels.
1) $\exp(x + y) =$ (relation fonctionnelle)
2) $\exp(x)\exp(-x) =$
3) $\exp(-x) =$
4) $\exp(x - y) =$

Preuve (facultative) :
1) Soit y un nombre réel donné et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
$f'(x) = \frac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x+y) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$, donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc pour tout nombre réel x on a $f(x) = \exp(y)$.
Ainsi $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$. Ce qui montre que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
2) D'après la propriété 3-1) $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$.
3) D'après la propriété 1, $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x donc d'après la propriété 3-2), on a bien : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
4) $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ d'après les propriétés 3-1) et 3-3).

Propriété 4(conséquence du 1)) : Pour tout nombre réel a et pour tout nombre entier n :
$\exp(na) =$

Preuve : On la fera pour $n \in \mathbb{N}$, sans utiliser la relation fonctionnelle, en même temps que la propriété 8.

Idée de preuve (par récurrence) :
$$\boldsymbol{exp}(2\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a})\right)^2$$
$$\boldsymbol{exp}(3\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{exp}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{exp}(2\boldsymbol{a})\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a})\right)^2\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a}) = \left(\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{a})\right)^3$$

Exercice 1 : Propriétés algébriques
Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $\exp(A(x))$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.
a) $\exp(x) \times \exp(x)$ b) $\exp(-1) \times \exp(x)$ c) $\exp(-x) \times \exp(x)$ d) $\exp(1) \times \exp(x)$

II. Notation e^x

Définition 2 : Le nombre e est l'image de par la fonction exponentielle. Ainsi $\exp(1) =$

Remarque : $e \approx 2{,}718281828$. C'est un nombre irrationnel.
Cette notation est due au mathématicien suisse Leonhard Euler vers 1728.

Propriété 5 : Pour tout nombre entier relatif n,
$$\exp(n) =$$

Preuve : Pour tout nombre entier relatif $n, \exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$

Par extension on convient de noter :

Propriété 6 : Pour tout nombre réel x,
$$\exp(x) =$$
e^x est l'image de x par la fonction exponentielle.

Avec cette notation, on retrouve les propriétés connues sur les puissances :

Propriétés 7 (propriétés algébriques) : Soient a et b deux réels. Soit n un entier, alors :
1) $e^0 =$

2) $e^{a+b} =$

3) $e^{-a} =$

4) $e^{a-b} =$

5) $(e^a)^n =$

Application 1 : Simplifier les expressions suivantes, pour tout réel x :

$A = e^{x+2}e^{-x+2}$ $\qquad$ $C = \sqrt{(e^{-2x}+1)^2}$

$B = \dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$ $\qquad$ $D = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$

Exercice 2 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire les réels donnés sous la forme e^k où k est un entier.

a) $e^{-7} \times e^3$ b) $e^{-1} \times e^{-5}$ c) $e^2 \times e$ d) $\dfrac{1}{e}$ e) $\dfrac{1}{e^{-1}}$

f) $\dfrac{1}{e^2}$ g) $\dfrac{e^{-3}}{e^2}$ h) $\dfrac{e}{e^{-1}}$ i) $\dfrac{e^{-2}}{e}$ j) $(e^2)^3$

k) $(e^3)^2$ l) $(e^{-1})^6$ m) $\dfrac{e^2 \times e^{-3}}{e^5}$ n) $e \times (e^{-1})^3$

Exercice 3 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, compléter avec le nombre qui convient.

a) $e^{\cdots} \times e^6 = e^{18}$ b) $e^{-1} \times e^{\cdots} = (e^4)^2$ c) $\dfrac{e^{\cdots}}{e^{1,5} \times e^3} = e^{10}$ d) $e \times \dfrac{1}{e^{\cdots}} = e^{-0,5}$

Exercice 4 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.

a) $e^x \times e^5$ b) $e^{-x} \times e^2$ c) $e^{-2x} \times e^{-1}$ d) $e^x \times e^x$

e) $e^x \times e^{-x}$ f) $e^{1-x} \times e^{1-x}$ g) $(e^x)^4$ h) $(e^{2x})^{-1}$

i) $(e^{-x+1})^2$ j) $\dfrac{e^x}{e^{0,1}}$ k) $\dfrac{e^x}{e^{0,1x}}$ l) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$

Exercice 5 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.

a) $e^{1+x} \times e^x$ b) $e^{2-x} \times e^{3-x}$ c) $(e^{1+x})^2 \times e^{-x}$ d) $e \times e^{5-0,1x}$ e) $\dfrac{1}{e^{-7+0,2x}}$

f) $\dfrac{e^{2x-5}}{e^{x+5}}$ g) $\dfrac{e^{-x+1}}{e^{x-3}}$ h) $\dfrac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$ i) $\dfrac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$ j) $\dfrac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$

Exercice 6 : Propriétés algébriques

t désigne un nombre réel. Développer et réduire chaque expression.

1) $A = (e^t - 1)^2$ 2) $B = e^{2t}(e^t - e^{-2t})$ 3) $C = 3e^t(e^t - e^{-t}) - 5e^{2t}$

Exercice 7 : Propriétés algébriques

Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x :

1. $3e^{2x} - 8e^{x} - 3 = (1 + 3e^{x})(e^{x} - 3)$
2. $\dfrac{1 + e^{2x}}{1 + e^{x}} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} + 1}$
3. $\dfrac{e^{1+2x}}{1 + e^{2x}} = \dfrac{e^{1+x}}{e^{-x} + e^{x}}$
4. $\dfrac{e^{x+1}}{e + e^{x+1}} = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}}$
5. $1 - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^{x}}{1 + e^{x}}$

III. Etude de la fonction exponentielle

Propriété 8 (Signe) : La fonction exponentielle est strictement ________________________ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout réel x on a e^{x}

Preuve :

Pour tout réel x, $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$ car $\exp\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.

Exercice 8 : Signe

Déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

a) $A(x) = 0{,}5 + e^{x}$

b) $B(x) = 1 + 0{,}5e^{x}$

c) $C(x) = -10e^{x}$

d) $D(x) = -1 - e^{x}$

e) $E(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

f) $F(x) = e^{x}(2 + e^{x})$

g) $G(x) = -2e^{-x-1}$

h) $H(x) = 0{,}3e^{1-0{,}7x}$

Exercice 9 : Signe

Déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

a) $A(x) = 5e^{x} - xe^{x}$

b) $B(x) = x^2e^{x} - xe^{x}$

c) $C(x)e^{x} - 2xe^{x}$

d) $D(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$

e) $E(x) = 4e^{-x} - x^2e^{-x}$

f) $F(x) = xe^{x} - e^{x+2}$

g) $G(x) = x^2e^{x} - e^{x+2}$

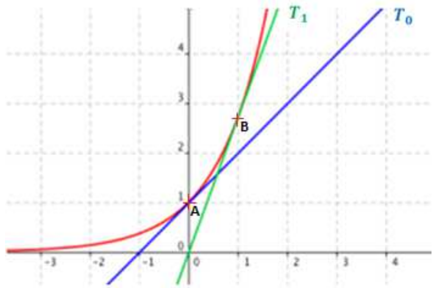
h) $H(x) = \dfrac{e^{x} - xe^{x}}{e^{x}+1}$

Propriété 9 (Variation) : La fonction exponentielle est strictement ____________________________ sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Soit pour tout réel x, $f(x) = e^{x}$ ainsi par définition $f'(x) = e^{x} > 0$ d'après la propriété 9.
La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 10 (Courbe) :

Soit f la fonction exponentielle et C_f sa courbe représentative.



La courbe représentative C_e de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

- Tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	↗	1 ↗	e ↗	

$f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$
$f(1) = e$ et $f'(1) = e$

- Equation de la tangente T_0 à C_e au point $A(0\,;1)$:
  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
  $y = e'(0)(x - 0) + e^0$
  $y = 1 \times x + 1$
  $y = x + 1$

- Equation de la tangente T_1 à C_e au point $B(1\,;e)$:
  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
  $y = e \times (x - 1) + e$
  $y = ex$

Propriétés 11 (conséquence) :

1) Pour tous réels a et b, $e^{a} = e^{b} \Leftrightarrow$

2) Pour tous réels a et b, $e^{a} \leq e^{b} \Leftrightarrow$

Application 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{x+1} - e^{2x+5} = 0$

b) $e^{3-x} = 1$

c) $(e^x + 5)(e^x - 1) = 0$

d) $e^{2x-1} \leq e^{x+7}$

e) $e^{2x} + 2 \leq 0$

f) $e^x - 1 \leq 0$

Exercice 10 : Equation

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{2x} = e^5$

b) $e^x = e$

c) $e^x = e^{-x}$

d) $e^x = 1$

e) $e^{-x} = 1$

f) $e^{2-x} = 1$

g) $e^x = 0$

h) $e^{x+1} = -1$

Exercice 11 : Equation

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{x^2} = e^x$

b) $e^{-2x} - 1 = 0$

c) $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$

d) $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

e) $3e^{3x-42} + 1 = 4$

f) $e^{5x} = \frac{e^{-x}}{e}$

Exercice 12 : Equation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$.
2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$$

Exercice 13 : Equation

1. Démontrer que l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

Exercice 14 : Inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{x+1} \leq e^5$

b) $e^{3-x} > e^2$

c) $e^{-x} < e^4$

d) $1 \leq e^{3x}$

e) $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leq 0$

f) $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

g) $1 - e^{x^2-1} \geq 0$

Exercice 15 : Inéquation

1. Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$
3. En déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Inéquation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x} - e^x > 0$.
2. En déduire le signe de $1 - \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Inéquation

1. Factoriser le polynôme du second degré :

$$-5X^2 + 3X + 2$$

2. En déduire une factorisation de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$.
3. Etudier le signe de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Inéquation

1. Démontrer que pour tout réel x,

$$-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$$

2. En déduire le signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

IV. Dérivées et exponentielle

1) Dérivée

Propriété 12 : Soit f la fonction exponentielle. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) =$$

La fonction exponentielle est égale à sa ______________________________

Exercice 19 : Dérivée et fonction exponentielle

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = e^x + 4$
b) $g(x) = 2{,}7e^x + 8$
c) $l(x) = 5x^3 - 9e^x$
d) $h(x) = 5e^x + x$
e) $k(x) = 3x - 3e^x$
f) $m(x) = e - e^x$

Exercice 20 : Dérivée et fonction exponentielle

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

Produit :

a) $f(x) = (2x - 7)e^x$
b) $g(x) = (1 - x)e^x$
c) $h(x) = xe^x$
d) $k(x) = (3x^2 - 2)e^x$
e) $l(x) = (x^2 - 2x)e^x$
f) $m(x) = e^x(e^x - 2)$

Quotient :

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
b) $g(x) = \frac{x}{e^x}$
c) $h(x) = \frac{3x+1}{e^x}$
d) $k(t) = \frac{1+e^t}{e^t}$

Propriété 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ avec a et b deux réels.
f est dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) =$$

Preuve : $f(x)$ est la fonction $g(ax + b)$ avec g la fonction exponentielle.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = ag'(ax + b) = ae^{ax+b}$

Application 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x+1}$. Déterminer $f'(x)$.

Remarque : La formule précédente est un cas particulier d'une formule plus générale :

Propriété 14 (hors programme) : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) =$$

Exercice 21 : Dérivées de $x \mapsto e^{ax+b}$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = e^{2x+5}$
b) $g(x) = e^{-x}$
c) $h(x) = 3e^{-2x}$
d) $k(x) = 2x - e^{-5x}$

2) Fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$ $avec\ k > 0$

Propriété 15 : Soit k un nombre réel strictement positif.
La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = e^{-kt}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t on a :
$$f_k'(t) =$$

Propriété 17 : Soit k un nombre réel strictement positif.
La fonction g_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_k(x) = e^{kt}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t on a :
$$g_k'(t) =$$

Propriété 16 : Soit k un nombre réel strictement positif.
La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_k(x) = e^{-kt}$$
est strictement ________________ sur $\mathbb{R}$.

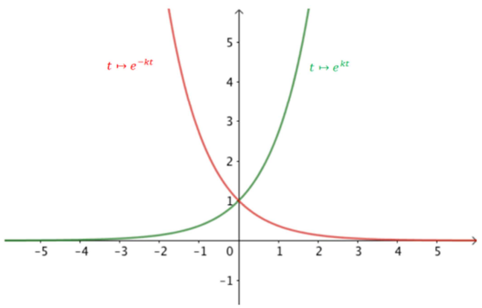
Propriété 18 : Soit k un nombre réel strictement positif.
La fonction g_k définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_k(x) = e^{kt}$$
est strictement ________________ sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $f_k(x) = e^{-kt}$
On pose $u(t) = -kt$ ainsi $u'(t) = -k$
$f'(t) = u'(t)e^{u(t)}$

$f'(t) = -ke^{-kt} < 0$ car pour tout réel t, on a : $e^{-kt} > 0$ et $k > 0$ (ainsi $-k < 0$)
Ainsi la fonction $f_k$est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : $g_k(x) = e^{kt}$
On pose $u(t) = kt$ ainsi $u'(t) = k$
$g'(t) = u'(t)e^{u(t)}$

$g'(t) = ke^{kt} > 0$ car pour tout réel t, on a : $e^{kt} > 0$ et $k > 0$
Ainsi la fonction $g_k$est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



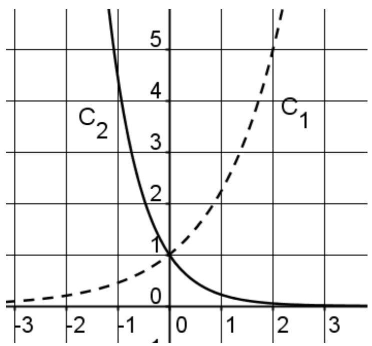
Exercice 22 : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{0,8x} \text{ et } g(x) = e^{-1,5x}.$$

On a représenté ci-contre ces deux fonctions.
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

Remarque : On pose pour tout entier naturel n, $u_n = e^{na}$.

- Si $a > 0$, la suite (u_n) est croissante. On dit que la croissance de cette suite est exponentielle.
- Si $a < 0$, la suite (u_n) est décroissante. On dit que la décroissance de cette suite est exponentielle.



Exercice 23 : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{2,2x}$$
et C_f sa courbe représentative.
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.
   c) Dans un repère, tracer la courbe C_f.
2. Reprendre la question précédente avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-0,3x}$.

Propriété 19 : Soit n un entier relatif.
Pour tout réel a, la suite de terme général e^{na} est géométrique.

Preuve : Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = e^{na}$.
$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a$ soit $u_{n+1} = e^a \times u_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^a et de premier terme $e^0 = 1$.
On démontre ainsi que pour tout entier naturel n on a $u_n = u_0 q^n$ c'est-à-dire $e^{na} = (e^a)^n$.

Exercice 24 : Suite géométrique

(u_n) est la suite définie, pour nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = -3e^{1,1n}$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme u_0.

Exercice 25 : Suite géométrique

(v_n) est la suite définie, pour nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{3}e^{5-0,6n}$.
La suite (v_n) est-elle géométrique ?
Justifier.

V. Etude de fonctions exponentielles

Exercice 26 : Etude de fonction exponentielle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^x$$

Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 27 : Etude de fonction exponentielle

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5e^{-4,5x} + 6$$

Démontrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 : Etude de fonction exponentielle

f est la fonction définie sur $[1\,;3]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{2x}$$

Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 29: Etude de fonction exponentielle

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

Dresser le tableau de variations de g.

Exercice 30 : Etude de fonction exponentielle et courbe

f est la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x) = e^{0,82x}$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. A l'aide d'un tableau de valeur allant de -3 à 3 avec un pas de 1, tracer la courbe représentative de f.

Exercice 31 : Etude de fonction exponentielle et courbe

f est la fonction définie sur $[-3\,;1]$ par :

$$g(x) = (5 - 4x)e^x$$

1. Dresser le tableau de variations de g.
2. A l'aide d'un tableau de valeur allant de -3 à 1 avec un pas de 1, tracer la courbe représentative de g.

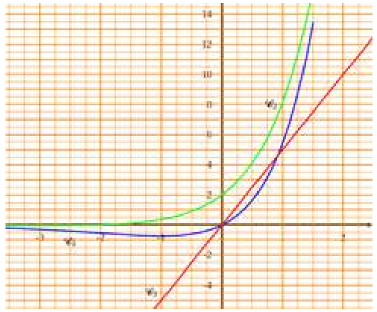
Exercice 32 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (2 + x)e^x$ et $g(x) = 2x\,e^x$.

On a tracé, ci-contre, trois courbes C_1, C_2 et C_3.

Parmi elles figure la représentation graphique de chacune des fonctions f et g.



1) $f\,(0)$ est égal à :

a) 0 b) 2 c) -2

2) La représentation graphique de la fonction g est :

a) C_1 b) C_2 c) C_3

3) Pour tout nombre réel x, $g'(x)$ est égal à :

a) $2\,e^x$ b) $2(x+1)\,e^x$ c) $2 + e^x$

Exercice 33 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

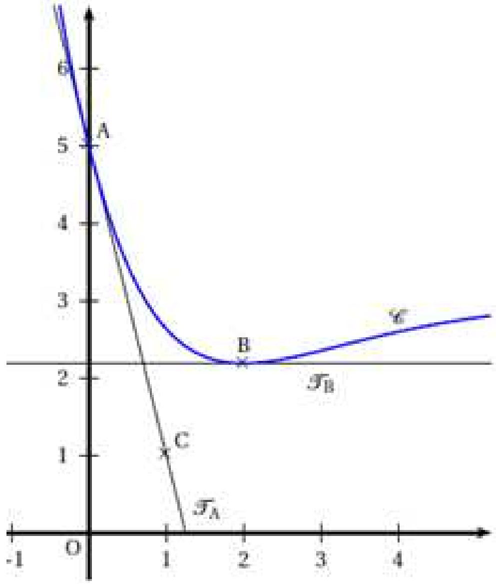
Dans tout l'exercice, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-contre une petite partie de la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.

On note $f\,'$ la fonction dérivée de f.

La courbe C_f passe par le point $A\,(0\,;\,5)$ et par le point B d'abscisse 2.

La tangente T_A à la courbe au point A passe par le point $C\,(1\,;\,1)$ et la tangente T_B au point B est horizontale.



PARTIE A :

1) La valeur de $f(0)$ est :

a) -4 b) 4 c) 1,2 d) autre réponse

2) La valeur de $f\,'(0)$ est :

a) -4 b) 4 c) 1,2 d) autre réponse

3) La valeur de $f\,'(2)$ est :

a) 0 b) 3 c) 2,1 d) autre réponse

PARTIE B : La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

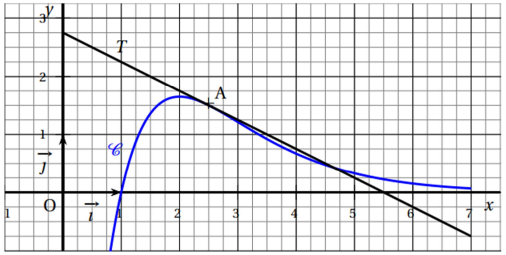
$$f(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^{-x} + 3$$

On désigne par $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f

1. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, :
$$f'(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$
2. Étudier le signe de $f\,'(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 34 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Sur le graphique ci-dessous, C_f est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Étude graphique

La droite T est tangente à C_f au point $A(2{,}5;\ 1{,}5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75.

Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$
2. $f'(2{,}5)$
3. Une équation de la tangente T ;

Partie B - Étude algébrique

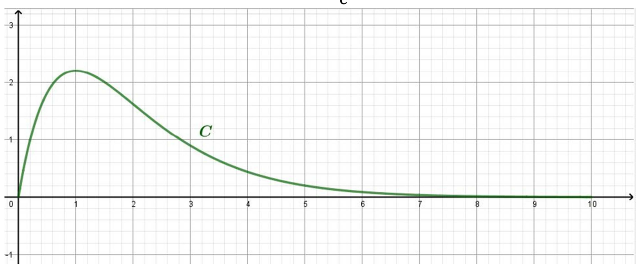
On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)e^{-x+2{,}5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = e^{2{,}5}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$.
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

Exercice 35 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L = milligramme par litre) peut être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{6x}{e^x} \quad \text{où } x \text{ est le temps exprimé en heure.}$$



Sa courbe représentative ***C*** est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression :
$$f'(x) = \frac{6-6x}{e^x}.$$
2. Étudier le signe de f' sur $[0; 10]$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.
3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
4. Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L.
   Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe *C*.

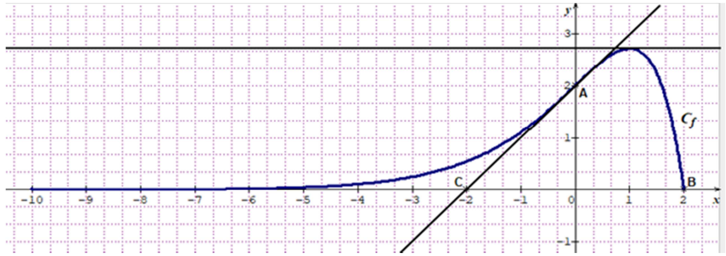
Exercice 36 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Dans le repère ci-dessous, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;2]$.

On a placé dans ce repère les points $\mathrm{A}(0\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;0)$ et $\mathrm{C}(-2\,;0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe C_f.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



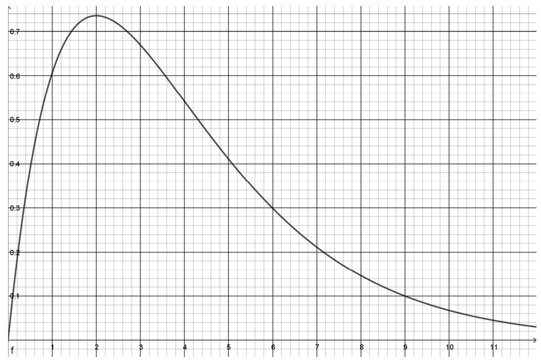
1. Déterminer la valeur de $f'(1)$.
2. Donner une équation de la tangente à la courbe C_f au point A.

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10\,;2]$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-10\,;2]$,
   $f'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^x$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;2]$.
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B.

Exercice 37 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

La concentration d'un médicament dans le sang en mg.L^{-1} au cours du temps t, exprimé en heure, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Calculer la valeur exacte de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = (1-0{,}5t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0; +\infty[$.
4. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
5. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.