Chapitre   : Suites arithmétiques et géométriques

I. Suites arithmétiques

1) Définition et propriétés

Activité 1 : Abonnement à un club de sport

Un club de sport propose le tarif suivant : un droit d'entrée annuel de 100€ est fixé et on paye 20€ par séance.

On pose $p_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n non nul, on note p_n le prix total payé par une personne ayant participé à n séances durant l'année.

1. Donner les valeurs de p_1, p_2 et p_3 .
2. Si une personne participe à 17 séances, elle paiera la somme de 440 euros, soit $p_{17} = 440$. Déterminer p_{18} et p_{19} .
3. Quelle relation y a-t-il entre p_{n+1} et p_n ?
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer p_{35}, c'est-à-dire le prix payé pour 35 séances.
5. Conjecturer une formule donnant p_n en fonction de n.

Définition 1 : Soit $r \in \mathbb{R}$.

Une suite est dite ______________________________ lorsque chaque terme se déduit du précédent en ______________________ une constante r, appelée la ____________________.

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} =$

Application 1 : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $= 3$.
Donner les 5 premiers termes de la suite.

Exercice 1 : Suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 2.

Déterminer le deuxième terme de la suite (u_n).

Propriété 1 : Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Alors pour tout entier naturel n, $u_n =$

De manière plus général, si $p < n, u_n =$

Preuve : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r$

$u_3 = u_2 + r$

…

$u_{n-1} = u_{n-2} + r$

$u_n = u_{n-1} + r$

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + r + u_1 + r + u_2 + r + \cdots + u_{n-2} + r + u_{n-1} + r$

Tous les termes entre u_1 et u_{n-1} se simplifient. Il ne reste dans le membre de gauche que u_n. Dans le membre de droite, il ne reste que u_0 et n termes tous égaux à r.

On obtient donc : $u_n = u_0 + nr$ c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$

Application 2 :

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
   Donner u_{28}.

Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_5 = -1$. Donner v_{28}.

Exercice 2 : Suites arithmétiques

Indiquer la bonne réponse.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. Pour tout entier naturel n :

a. $u_n = 5 + 2n$ b. $u_n = 2 + 5n$ c. $u_n = u_0 + 2$

Exercice 3 : Suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 7.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer u_{17}.

Exercice 4 : Suites arithmétiques

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -5$ et la relation $v_{n+1} = v_n - 2$ pour tout entier naturel n.

1. Justifier que (v_n) est une suite arithmétique et donner sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer v_6.

Exercice 5 : Suites arithmétiques

Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme u_0 et la raison r d'une suite arithmétique.

1. $u_0 = 1$ et $r = 4$ 2. $u_0 = 2$ et $r = 9$ 3. $u_0 = 5$ et $r = \frac{1}{2}$ 4. $u_0 = 12$ et $r = -3$

a) Déterminer u_1 et u_2.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer u_{25}.
d) Déterminer le sens de variation de la suite.

Application 3 :

Soit (u_n) une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 17$ et $u_{10} = 12$. Calculer r et u_0 et u_1.

Exercice 6 : Suites arithmétiques

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$. Calculer r et u_2 et u_5.
2. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = 10$. Calculer r et u_1 et u_5.
3. On sait que $u_1 = 10$ et $u_{10} = 28$. Calculer r et u_0 et u_5.
4. On sait que $u_{20} = -52$ et $u_{51} = -145$. Donner u_n en fonction de n.
5. On sait que $u_{22} = 15$ et $r = \frac{3}{4}$. Donner u_n en fonction de n.
6. On sait que $u_0 = 3$ et $u_{20} = u_{10} + 25$. Donner u_n en fonction de n.

Propriété 2 :

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque la différence $u_{n+1} - u_n$ est <u>indépendante</u> de l'entier n.

On dit alors que l'évolution est __________________________.

Application 4 : Reconnaitre une suite arithmétique :

1. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 5n^3 + 6n + 1$
   Cette suite est-elle arithmétique ?
2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = -3n + 5$
   Cette suite est-elle arithmétique ?

Remarque : Parfois on pense que la suite (u_n) peut être arithmétique à l'aide d'exemple et prouver qu'elle ne l'est pas en calculant pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 7 : Reconnaitre une suite arithmétique

Parmi les suites définies sur $\mathbb{N}$ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont arithmétiques et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

a. $u_n = 2n^2 - n + 1$ b. $v_n = 5n - 2$ c. $w_n = \frac{n}{3} + 2$ d. $x_n = 3^n + 1$

Exercice 8 : Reconnaitre une suite arithmétique

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + n \end{cases}$

2) Variations d'une suite arithmétique

Propriétés 3 : Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
• Si $r > 0$, la suite (u_n) est ______________________________
• Si $r = 0$, la suite (u_n) est ______________________________
• Si $r < 0$, la suite (u_n) est ______________________________

Preuve :
La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r, donc pour tout$n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = r$.
On raisonne ensuite par disjonction des cas :

- 1er cas : si $r > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est ________________
- 2e cas : si $r = 0$, $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est ________________
- 3e cas : si $r < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est ________________

Exemples :
- La suite arithmétique de premier terme -5 et de raison 3 est ________________
- La suite arithmétique de premier terme 10 et de raison -6 est ________________

3) Modèle discret de croissance linéaire

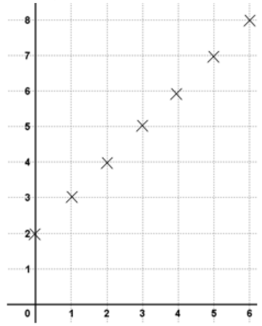
Propriété 4 : Lorsque la suite (u_n) est arithmétique les points $A_n(n\,;u_n)$ sont :
____________________.

Preuve : Comme pour tout entier n, $u_n = u_0 + rn$, le point $A_n(n\,;u_n)$ appartient à la droite d'équation $y = u_0 + rx$.

Remarque : Pour une suite arithmétique on parle de croissance linéaire ou décroissance linéaire.

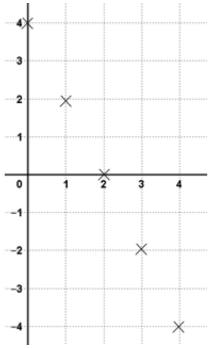
Exemples :

$u_0 = 2$; raison $r = 1$



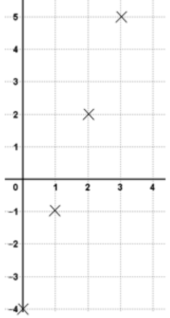
$u_n = 2 + n$

$u_0 = 4$; raison $r = -2$



$u_n = 4 - 2n$

$u_0 = -4$; raison $r = 3$



$u_n = -4 + 3n$

Application 5 : Modéliser une situation à l'aide d'une suite arithmétique.

En 2015, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celle-ci augmentent de 6€.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant des étrennes l'année $2015 + n$.

1. Donner les valeurs a_1 et a_2. A quelle année correspondent-elles ?

2. a. Donner la nature de la suite (a_n)

   b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n

   c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

3. Donner le sens de variation de la suite (a_n)

4. Déterminer le seuil n_p à partir duquel Anne aura reçu un montant supérieur ou égal à 300€

Exercice 9 : Modélisation arithmétique

Dans une pisciculture, un pêcheur met 50 truites dans un étang vide. Il y a 100 naissances par an. On veut modéliser la situation par une suite (u_n) qui représente le nombre de truites chaque année.

a) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

Exercice 10 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Le nombre de fans sur la page facebook d'un certain artiste peut être modélisé par la suite (u_n) de raison 900 telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre de fans l'année $2015 + n$. En 2015, le nombre de fans est 7500 : on a donc $u_0 = 7500$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années le nombre de fans aura dépassé le triple de celui de l'année 2015 ?

Exercice 11 : Suites arithmétiques (Modéliser)

En 2014, la population d'un village est de 1500 habitants. On fait l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 100 habitants par an.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants pour l'année $2014 + n$.

1. Donner u_0.
2. Calculer les valeurs u_1 et u_2 du nombre d'habitants prévu en 2015 et 2016 selon ce modèle.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
4. Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?
5. Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 3000 habitants ?

Exercice 12 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Albert place un capital initial $C_0 = 3000$€ à un taux annuel de 6%, les intérêts étant simples, c'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du capital initial (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).

On note C_n le capital d'Albert au bout de n années, capital exprimé en euros.

1. Montrer que, pour tout entier n, $C_{n+1} = C_n + 180$. Qu'en déduit-on?
2. Pour tout entier n, exprimer C_n en fonction de n.
3. De quel capital Albert dispose-t-il au bout de 10 ans?
4. Au bout de combien d'années le capital a-t-il doublé?
5. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 10000 € ?

Exercice 13 : Suites arithmétiques (Modéliser)

Au premier janvier 2010, Chloé débute dans une entreprise avec un salaire mensuel de 1500€.

Il est prévu dans son contrat une augmentation mensuelle de 7€ à partir du deuxième mois.

On note $a_0 = 1500$ son salaire d'embauche puis pour $n \geq 1$, a_n son salaire à la fin du $(n+1)$ème mois.

1. Déterminer le salaire du deuxième mois.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire la nature de la suite (a_n).
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Déterminer le salaire du 7ème mois.
5. Déterminer le rang du premier mois pour lequel son salaire dépassera 2000€.

Exercice 14 : Modélisation arithmétique

Alice a acheté une télévision au prix de 750 €. Son assureur lui annonce que le prix de sa télé perd 40 € de sa valeur tous les ans.

On veut modéliser la valeur de la télé chaque année par une suite (u_n).

a) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Quelle est la nature de la suite ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Donner le sens de variations de la suite en justifiant.

Exercice 15 : Modélisation arithmétique

On place à la banque un capital de 300 €. Chaque année, ce capital augmentera avec un taux d'intérêt à taux fixe. Ce taux est égal à 5% de la somme placée au départ.

a) Calculer le montant des intérêts annuels fixes.

b) On note (C_n) le capital au bout de n années. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Donner ses éléments caractéristiques.

c) Exprimer C_n en fonction de n.

d) Au bout de combien d'années le capital aura-t-il doublé ?

Exercice 16 : Modélisation arithmétique

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.

On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.

On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020et 2021.
2. Exprimer u_{n+1}en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 17 : Modélisation arithmétique

Lors de son embauche dans une société pour un contrat à durée déterminée d'un an, Harry se voit proposer un salaire mensuel net de 1 590 € le premier mois puis, à compter du deuxième mois, une augmentation chaque mois de 15 € par rapport au salaire mensuel net précédent.

Sur l'année, Harry percevra douze salaires mensuels nets, ce qui constituera son salaire annuel net.

1. Calculer le salaire mensuel net d'Harry le deuxième mois de son contrat ainsi que celui le troisième mois de son contrat.
2. On note (u_n) le montant, exprimé en euros, du salaire mensuel net d'Harry le n-ième mois de son contrat où n est un entier naturel non nul. Ainsi, on a $u_1 = 1\,590$.
   a) Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n.
3. Les charges salariales représentent 23 % du salaire annuel brut d'Harry. Ces charges viennent se déduire du salaire annuel brut afin de donner le salaire annuel net.
   Compléter l'algorithme suivant en langage *Python*, afin qu'il retourne le salaire brut lorsque l'on entre le salaire net.

```
def net_vers_brut (salaire_net) :
      salaire_brut = …
           return (salaire_brut)
```

II. Suites géométriques

Activité 2 : Intérêts composés

Le 1er janvier 2019 vous avez reçu 1000€, votre capital, noté C_0, est alors placé à 3% avec intérêts composés pendant plusieurs années (les intérêts d'une année deviennent du capital pour les années suivantes et rapportent eux aussi des intérêts).

Notons pour tout entier naturel n non nul, C_n le capital obtenu l'année $2019 + n$.

1. a) Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 3% ?

b) En déduire le montant des intérêts obtenus pour ce capital le 1er janvier 2020 . On le note C_1.

2. Faire de même pour le capital C_2 et C_3.

3. (a) Les augmentations successives de capital $C_1 - C_0$, $C_2 - C_1$, …, sont-elles constantes ?

(b) Calculer $\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_1}$, …, que constatez-vous?

(c) Ecrire sans justification une relation générale permettant de passer du capital C_n obtenus la n-ième année à C_{n+1}.

(d) Peut-on calculer C_n en fonction de C_0 et de n, sans passer par les intermédiaires $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$?

4. Déterminer, à la calculatrice, à partir de quelle année votre capital initial C_0 a augmenté de plus de la moitié de sa valeur.

1) Définition et propriétés

Propriété 5 :

- **Augmenter** une grandeur de $p\%$ revient à *multiplier* sa valeur initiale par le coefficient multiplicateur :

- **Diminuer** une grandeur de $p\%$ revient à *multiplier* sa valeur initiale par le coefficient multiplicateur :

Définition 2 : Soit $q \in \mathbb{R}$.
Une suite est dite ___________________________________lorsque chaque terme se déduit du précédent en _________________________ par une même constante réelle q, appelée _______________________.
Autrement dit, on obtient la suite définie par une relation de récurrence suivante :
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} =$

Application 6 : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $= 2$.
Donner les 5 premiers termes.

Exercice 18 : Suites géométriques

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme 10 et de raison 0,5.
Déterminer le deuxième terme de la suite (u_n).

Propriété 6 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n =$

De manière plus général, si $p < n, u_n =$

Application 7 :

1. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $u_0 = 3$.
   Donner u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_5 = -1$.
   Donner v_{10}.

Exercice 19 : Suites géométriques

Indiquer la bonne réponse.

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$. Pour tout entier naturel n :

a. $u_n = 2 + 3n$ b. $u_n = 2 + 3^n$ c. $u_n = 2 \times 3^n$

Exercice 20 : Suites géométriques

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer u_{17}.

Exercice 21 : Suites géométriques

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 5$ et la relation $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Justifier que (v_n) est une suite géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Déterminer v_6.

Exercice 22 : Suites géométriques

Dans chacun des cas suivants, on donne le premier terme u_0 et la raison q d'une suite géométrique.

1. $u_0 = 5$ et $q = 2$ 2. $u_0 = 7$ et $q = -2$ 3. $u_0 = -2$ et $q = \frac{1}{5}$ 4. $u_0 = -3$ et $q = 4$

a) Déterminer u_1 et u_2.
b) Exprimer u_n en fonction de n.
c) Calculer u_{10}.
d) Déterminer le sens de variation de la suite.

Application 8 :

On sait que $u_5 = 2$ et $u_{11} = 128$ Calculer $q > 0$ puis u_{2011}.

Exercice 23 : Suites arithmétiques

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.

1. On sait que $u_0 = 2$ et $u_2 = \frac{9}{2}$. Calculer q.
2. On sait que $u_0 = 16$ et $u_4 = 0{,}0256$. Calculer q.
3. On sait que $u_1 = 7$ et $u_4 = 1512$. Calculer q puis u_7.

Propriété 7 :

Si (v_n) est une suite géométrique ne s'annulant pas, alors la variation relative $\frac{v_{n+1}-v_n}{v_n}$ est ____.

On dit alors que l'évolution est ________________________________.

Application 9 : Reconnaitre une suite géométrique :

1. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3 \times 2^n$
   Cette suite est-elle géométrique ?

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n^2 - 1$
   Cette suite est-elle géométrique ?

Exercice 24 : Reconnaitre une suite géométrique

Parmi les suites définies sur ℕ ci-dessous, reconnaitre celles qui sont géométrique et indiquer, pour celle qui le sont, le premier terme et la raison.

a) $u_n = 2n^2 + 3$ b) $v_n = 4 \times 5^n$ c) $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ d) $x_n = 9^n + 11^n$

Exercice 25 : Reconnaitre une suite géométrique

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur ℕ.

Pour chacune d'elles, préciser s'il s'agit d'une suite géométrique et indiquer sa raison le cas échéant.

a. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$ b. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 4^{v_n} \end{cases}$

2) Variations d'une suite géométrique

Propriétés 8 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est ______________ si $u_0 > 0$ et _________________ si $u_0 < 0$
- Si $q = 0$, la suite (u_n) est __________________________
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est __________________________
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est _________________ si $u_0 > 0$ et __________________ si $u_0 < 0$

Preuve :

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0q^n$.

$$u_{n+1} - u_n = u_0q^{n+1} - u_0q^n = u_0q^n(q-1)$$

On raisonne ensuite par disjonction des cas :

- 1er cas : si $0 < q < 1$ alors $q^n > 0$ et $q - 1 < 0$ donc $q^n(q-1) < 0$.
  - Si $u_0 > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est décroissante.
  - Si $u_0 < 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$, et la suite (u_n) est croissante.

- 2ème cas : si $q = 0$ alors :

$u_{n+1} - u_n = 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est consante.

- 3ème cas : si $q = 1$ alors :

$u_{n+1} - u_n = 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n = 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n$, et la suite (u_n) est consante.

- 4ème cas : si $q > 1$ alors $q^n > 0$ et $q - 1 > 0$ donc $q^n(q-1) > 0$.
  - Si $u_0 > 0$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$, et la suite (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 < 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est décroissante.

Propriété 9 : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Si $q < 0$ alors q^n prend des valeurs positives si n est pair et des valeurs négatives si n est impaires.

La suite (u_n) est dite ____.

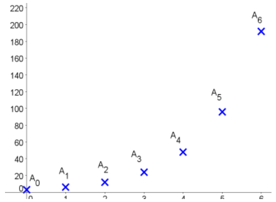
Exemples :

- La suite géométrique de premier terme -5 et de raison 3 est décroissante car $q = 3 > 1$ et $u_0 = -5 < 0$
- La suite géométrique de premier terme 10 et de raison -6 est alternée car $q = -6 < 0$
- La suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{2}$ est décroissante car $0 < (q =)\frac{1}{2} < 1$ et $u_0 = 3 > 0$

3) Modèle discret de croissance exponentielle

Propriété 10 : Lorsque la suite (u_n) est géométrique de premier terme strictement positif et de raison q strictement supérieur à 1, alors les termes de la suite (u_n) augmentent très rapidement en fonction de n : on parle de croissance exponentielle.

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2, alors pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 2^n$.



n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	3	6	12	24	48	96	192

Application 10 :

La responsable d'un site payant d'information en ligne veut modéliser l'évolution du nombre d'abonnés dans les années futures. En 2015, le nombre d'abonnés est 1500 et la responsable estime que le nombre d'abonnés va augmenter de 3% par an.

On note u_n le nombre total d'abonnés lors de l'année $2015 + n$. On a donc $u_0 = 1500$.

1. Déterminer le nombre u_1 d'abonnés en 2016
2. Exprimer u_{n+1}en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n). Donner les caractéristiques de cette suite.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n
5. Estimer le nombre d'abonnés en 2025.
6. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés aura au moins doublé.

Exercice 26 : Suites géométriques (Modéliser)
Pour stocker des fichiers photos dans un appareil numérique ou sur disque dur, on utilise des algorithmes de compression pour réduire la taille du fichier.
On estime qu'à chaque niveau de compression la taille du fichier diminue de 21,4%.
Considérons un fichier de taille initial 689 ko.
On pose $T_0 = 689$et, pour tout entier naturel non nul n, T_n désigne la taille de ce fichier après compression de niveau n.

1. Déterminer T_1
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
3. En déduire la nature de la suite (T_n).
4. Déterminer l'expression du terme général T_n.
5. Déterminer la taille du fichier après une compression de niveau sept.

Exercice 27 : Suites géométriques
Victor est né le 1er janvier 2008. À sa naissance, son père a décidé de mettre de l'argent de côté pour lui.
Il place 2 000 euros le 1er janvier 2008 à intérêts composés au taux annuel de 3 %.
On note u_n le capital acquis par Victor à l'année $2008 + n$.

a. Justifier que (u_n) est une suite géométrique, préciser le terme initial et la raison.
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. A 18 ans, Victor veut s'acheter une moto qui coûte 3 500 euros.
Pourra-t-il le faire ? Justifier.

Exercice 28 : Suites géométriques (Modéliser)
La population d'une banlieue augmente de 7% par an et celle du centre-ville diminue de 4% par an . En janvier 2015, elles sont toutes les deux de 30000 habitants. Pour tout n entier naturel, on note b_n et c_n les populations de la banlieue et du centre-ville l'année $2015 + n$.

1. Déterminer les populations l'année 2016 , puis les populations en 2017 .
2. a. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n. En déduire la nature de la suite (b_n).
   b. Exprimer b_n en fonction de n.
3. a. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. En déduire la nature de la suite (c_n).
   b. Exprimer c_n en fonction de n.
4. Déterminer les populations prévues pour l'année 2033.
5. Déterminer à la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que :
   a. La population de la banlieue soit supérieure à 50000 habitants.
   b. La population du centre-ville soit inférieure à 10000 habitants.

Exercice 29 : Modélisation géométrique
Un atelier fabrique 250 paires de lunettes par semaine. Au 1er janvier 2019, il reçoit une commande de 7500 pièces pour début juin. Le chef d'atelier compte réaliser cette commande en 24 semaines.
1) Le délai est-il suffisant ? Justifier.
2) Le chef d'atelier décide d'augmenter la production chaque semaine de 5%. On note (u_n) le nombre de lunettes produites la nième semaine et on a $u_1 = 250$.
a) Calculer $u_2$et u_3.
b) Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser ses éléments caractéristiques.
c) Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

Exercice 30 : Suites géométriques (Modéliser) : *BAC STI2D – Polynésie juin 2014*
« En 2009, les Français ont en moyenne produit 374 kg de déchets ménagers par habitant. »

Le maire d'une commune de 53700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.
Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.
   a. Montrer que $d_1 = 0{,}985d_0$.
   b. Déterminer la nature de la suite (d_n).
   c. Exprimer $d_n$en fonction de n
   d. Calculer la limite de la suite (d_n).
   e. Quelle devrait être, à ce rythme-là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?
3. Compléter la fonction Python ci-dessous pour que l'appel dechets(374) renvoie le nombre d'années nécessaires pour que la production de déchets de la ville devienne inférieure ou égale à la moyenne Française de 2009.

```
def dechets(M):
    d=400
    a=2011
    while ……………… :
        d=………………
        a=………………
    return a
```

Exercice 31 : Modélisation géométrique
Un jour donné, la pression atmosphérique à l'altitude 0 est égale à 1000 hectopascals (hPa) et diminue de 1 %pour une élévation en altitude de 100 m. On note u_n la pression atmosphérique à n centaines de mètres d'altitude, où n est un entier naturel.
a) Déterminer la pression atmosphérique à 100 m et à 200 m d'altitude.
b) Etablir un lien entre u_{n+1}et u_n.
c) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
d) Exprimer u_n en fonction de n.
e) En déduire la pression atmosphérique au sommet du Mont-Blanc ce jour-là. *(On prendra 4800m comme altitude)*

Exercice 32 : Modélisation géométrique : TTCMATH06289
Le dioxyde de carbone ou CO_2 est un des gaz à effet de serre.
En 1960, les émissions de CO_2 dans le monde ont été estimées à 15,4 milliards de tonnes. Depuis, on estime que ces émissions augmentent chaque année de 1,8 % par rapport à l'année précédente.
Pour tout entier naturel n, le nombre u_n désigne les émissions de CO_2, exprimées en milliard de tonnes, pendant l'année $(1960 + n)$. On a ainsi : $u_0 = 15{,}4$.

1. Vérifier que $u_1 = 15{,}6772$.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de l'entiernaturel n.
4. Selon ce modèle défini par la suite (u_n), déterminer l'année à partir de laquelle les émissions annuelles de CO_2 émises dans le monde dépasseront les 75 milliards de tonnes.

Exercice 33 : Modélisation géométrique : TTCMATH06288

Le directeur d'un cinéma de centre-ville a vu le nombre d'entrées diminuer de $5\ \%$ par an depuis l'ouverture en 2000, année au cours de laquelle il avait comptabilisé $200\ 000$ entrées.

Pour tout entier naturel n, on modélise par u_n le nombre d'entrées dans ce cinéma l'année $2000 + n$. On définit ainsi la suite $u$sur $\mathbb{N}$. On a : $u_0 = 200\ 000$.

1. Quelle est la nature de la suite u ? Justifier et donner la valeur de la raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n, où n est un entier naturel.
3. On cherche à déterminer au bout de combien d'années, le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été divisé par deux par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma.
   Pour cela, on programme une fonction, en langage Python, appelée cinéma et sans argument :
   a) Compléter les instructions manquantes afin de répondre au problème posé.
   b) Le programme renvoie la valeur 14. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def cinema():
N = 0
U = 200000
whileU >………….:
N = …..
U = …..
      return N
```

Exercice 34 : Modélisation géométrique

Bob vient d'acheter un lave-linge très perfectionné à 1500 € qu'il décide d'assurer. En cas de défaillance, l'assureur rembourse l'appareil mais il applique une décote de 12% par an sur la valeur de l'appareil.

On note a_n la valeur remboursable du lave-linge lors de la nième année. On a $a_0 = 1500$.

a) Calculer $a_1$et a_2.

b) Etablir un lien entre a_{n+1}et a_n pour tout entier naturel n.

c) Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.

d) Exprimer a_n en fonction de n.

e) On voudrait savoir à partir de quelle année la valeur remboursable du lave-linge sera-t-elle inférieure à 100€.

Ecrire un programme en Python afin de répondre au problème et déterminer la réponse au problème posé.

Exercice 35 : Arithmétique ? Géométrique ?

Chacune des situations suivantes peut-être modélisée par une suite.

Est-elle arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre ? Modéliser, si possible, ces situations à l'aide d'une suite (u_n) et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

1. La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 8% chaque heure après l'injection de ce médicament.
2. Chaque année une piscicultrice voit la population de son élevage de poissons augmenter de 10% de façon naturelle et de 200 poissons qu'elle ajoute.
3. Le prix du loyer augmente de 40€ tous les trois ans.
4. L'étude de la population d'une ville montre que chaque année elle perd 2% de ses habitants mais voit arriver une cinquantaine de nouveaux habitants.

III. Suites arithmético-géométriques

Exercice 36 : Suites arithmético-géométriques

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2014 + n$.

1. a. Calculer a_1 et a_2.
   b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation : $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 400$
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.
   b. En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2000$.
   c. Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir.
4. On propose le programme Python suivant :
   a. Expliquer ce que permet de calculer ce programme.
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil() :
   N=0
   A=2500
   while  A-200>50 :
      A=A*0.8+400
      N=N+1
   return(N)
```

Exercice 37 : Suites arithmético-géométriques

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{4}$ pour tout n de IN.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de IN.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

c) Démontrer votre conjecture.

3) a) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 38 : Suites arithmético-géométriques

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0{,}25\ u_n + 3$ pour tout n de IN.

La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n - 4$ pour tout n de IN.

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, et préciser ses caractéristiques.

2) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 39 : Suites arithmético-géométriques

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout n de IN.

1) On pose, pour tout n de IN : $v_n = u_n + 1$.

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n).

2) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.