Chapitre : Fonctions circulaires

I. Fonction sinus

Définition 1 : La fonction sinus est la fonction notée sin, définie sur $\mathbb{R}$ et qui à chaque réel x associe le nombre ____________.
Cette fonction prend ses valeurs dans _______________.

Application 1 : Donner les valeurs des sinus suivants (arrondis au centième au besoin).

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $\quad$ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$ $\quad$ $\sin(\,60\,) =$ $\quad$ $\sin(-45) =$

$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx$ $\quad$ $\sin(\,25\,) \approx$ $\quad$ $\sin(-140) \approx$

Propriété 1 : La fonction sin $: x \to \sin(x)$ est périodiques de période : _________
La courbe représentative est inchangée par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Autrement dit : Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a :

$$\sin(x + 2k\pi) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

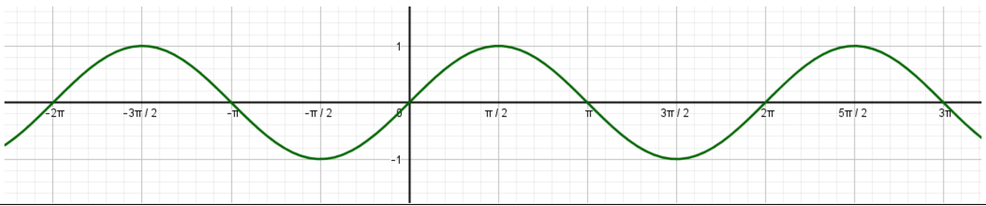
Propriété 2 : La fonction sin $: x \to \sin x$ est _________________________ .
La courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Autrement dit : Pour tout réel x on a :

$$\sin(-x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Preuve : On retrouve avec les fonctions, les propriétés géométriques du sinus et du cosinus lues sur le cercle trigonométrique.

Propriété 3 : La courbe représentative de la fonction sinus est une ___________________.



Propriété 4 : La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **la dérivée de $\sin(x)$ est** _________.
Tableau de variations sur une période :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)=\cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)=\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

II. Fonction cosinus

Définition 2 : La fonction cosinus est la fonction notée cos, définie sur $\mathbb{R}$ et qui à chaque réel x associe le nombre ____________.
Cette fonction prend ses valeurs dans _______________.

Application 2 : Donner les valeurs des cosinus suivants (arrondis au centième au besoin).

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ $\quad$ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$ $\quad$ $\cos(\,60\,) =$ $\quad$ $\cos(-45) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx$ $\quad$ $\cos(\,25\,) \approx$ $\quad$ $\cos(-45) \approx$

Propriété 5 : La fonction cos $: x \to \cos(x)$ est périodiques de période : _________
La courbe représentative est inchangée par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Autrement dit : Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a :

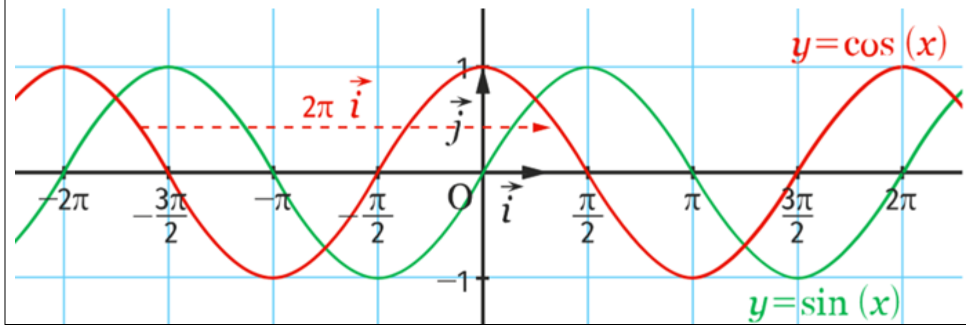
$$\cos(x + 2k\pi) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Propriété 6 : La fonction cos $: x \to \cos x$ est _________________________.
La courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Autrement dit : Pour tout réel x on a :

$$\cos(-x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Propriété 7 : La courbe représentative de la fonction cosinus est une sinusoïde. Cette sinusoïde est translatée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport à la courbe de la fonction sinus.



Propriété 8 : La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **la dérivée de $\cos(x)$ est** ________.
Tableau de variations sur une période :

x	$-\pi$		0		π
$f'(x)=-\sin(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)=\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	1

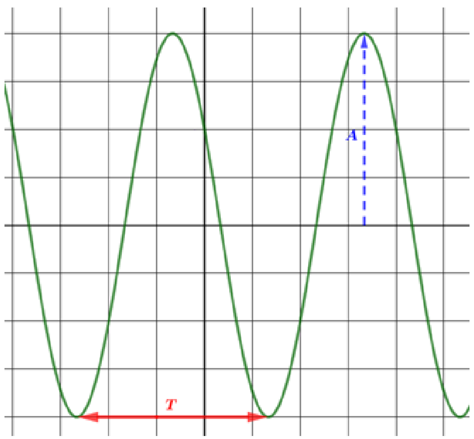
III. Fonctions $Acos(\omega t + \varphi)$ et $Asin(\omega t + \varphi)$

Propriété 9 : Soient ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.
En physique on utilise des fonctions de la forme :

- $t \mapsto Acos(\omega t + \varphi)$
- $t \mapsto Asin(\omega t + \varphi)$

1) Ces fonctions ont pour période : $T =$
2) La fréquence $f =$ est le nombre de périodes par seconde (en Hertz)
3) ω est la pulsation : c'est le nombre de périodes par intervalle de longueur 2π

   $\omega =$ (en rad/s)
4) A est l'amplitude de la sinusoïde : c'est la valeur maximale.
5) $\omega t + \varphi$ est la phase instantanée (en rad).
6) φ est la phase à l'origine (quand $t = 0$)



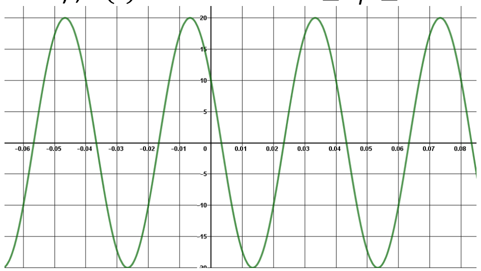
Preuve : $cos\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$

Exercice 1 : Déterminer la période des fonctions suivantes.

a) $f(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$: $T =$ ....
b) $f(t) = \sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$: $T =$ .....
c) $f(t) = \sin(3t)$: $T =$ .....
d) $f(t) = \cos(4t + \pi)$: $T =$ .....

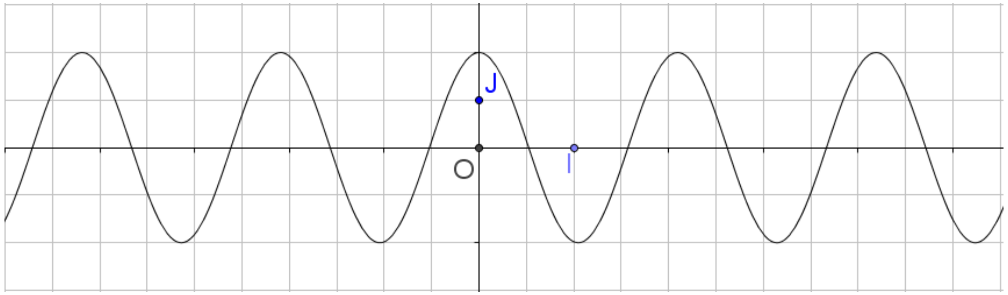
Application 3 :
Le graphique ci dessous donne la tension aux bornes d'une bobine. cette tension s'écrit $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où t est le temps (en secondes) , $u(t)$ est en volts et $0 \leq \varphi \leq \pi$.

1) Sur le graphique, déterminer la période T et l'amplitude A.
2) En déduire la valeur de ω, puis l'expression de $u(t)$ en fonction de t et φ



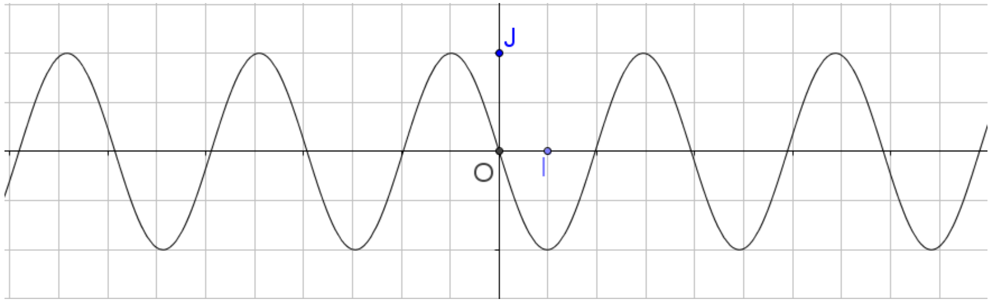
3) En utilisant $u(0)$, déterminer φ et l'expression de $u(t)$

Exercice 2 : Courbes de fonctions sinusoïdales
Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Acos(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



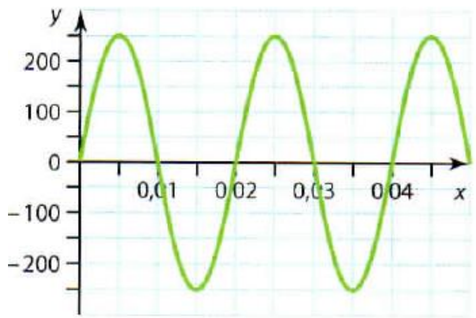
1. Déterminer graphiquement la valeur de A.
2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

Exercice 3 : Courbes de fonctions sinusoïdales
Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Asin(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.
2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

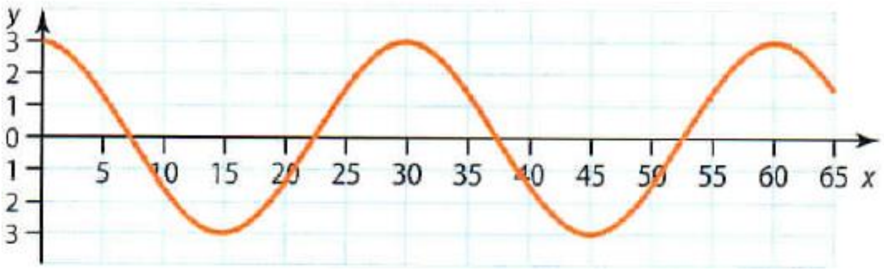
Exercice 4 :
Lors de l'émission d'un son pur, la pression de l'air (en mP) est donné par une fonction f définie par :
$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$
où t est le temps exprimé en secondes.
1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω.
2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.
3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de f.



Exercice 5 :

La tension en Volts aux bornes d'un générateur très basse fréquence est définie par :

$U(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où t est le temps exprimé en secondes. La fonction U est représentée ci dessous.



1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω

2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.

3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de U.

Exercice 6 : Courbes de fonctions sinusoïdales

1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x)$. Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.
   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $3\cos(2x) = -2$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 7 : Courbes de fonctions sinusoïdales

1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin(3x)$. Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.
   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $4\sin(3x) = -1$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 8 :

Suite à un tremblement de terre, le Japon est touché par un tsunami. On modélise la hauteur de l'eau par la fonction h, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$h(t) = a\cos(bt) \text{ avec } h \text{ en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

Déterminer les nombres a et b dans le cas d'un tsunami où les vagues mesurent 12 mètres de haut et présentent une période de 20 minutes.

Exercice 8 :

On modélise la température d'une ville par la fonction $\theta(t) = 15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$

où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

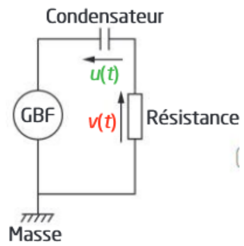
a) Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?

b) A quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues?

c) Quelles sont les températures extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles?

Exercice 9 :

On réalise un montage en branchant en série une résistance ($R = 100\ \Omega$) et un condensateur à un GBF qui génère une tension sinusoïdale. On branche sur ce circuit un oscilloscope bi-courbe.



La tension aux bornes du condensateur est

$$u(t) = U\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

La tension aux bornes de la résistance est

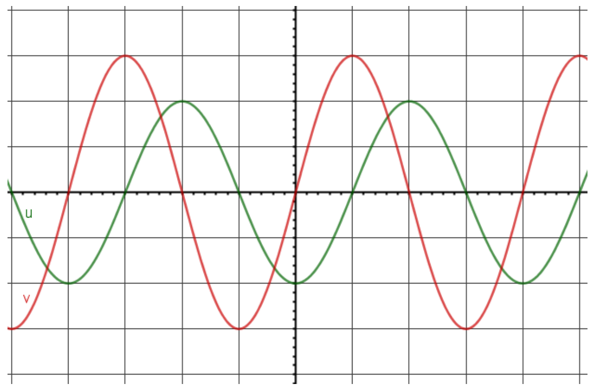
$$v(t) = V\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

1) En utilisant l'oscillogramme ci-dessous, identifier U, ω_1, φ_1, V, ω_2, φ_2 .

Le réglage de l' oscilloscope est :

• sensibilité verticale : $\frac{1V}{div}$.

• sensibilité horizontale : 0,25 $ms\,\frac{}{div}$.



2) Le déphasage entre les signaux $s_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ est $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Deux signaux sont :

• en phase si les signaux sont proportionnels

• en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.

Traduire ces informations en termes de déphasage.

Que peut on en déduire sur φ_1 et φ_2?

3) Deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le déphasage est $\frac{\pi}{2}$. Comment traduire cette information à l'aide des représentations graphiques des signaux ?

4) Si $\Delta\varphi$ est positif, le signal 2 est en avance de phase par rapport au signal 1.

Si $\Delta\varphi$ est négatif, le signal 2 est en retard de phase par rapport au signal 1.

Que peut-on dire sur les signaux u et v ?

5) La loi d'Ohm s'applique sur les valeurs instantanées en régime sinusoïdal. Ainsi $v(t) = R\,i(t)$.

En déduire l'expression de $i(t)$.

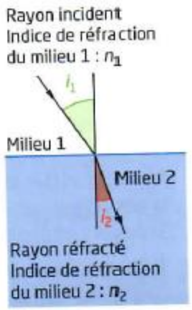
i et u sont-elles en phase, en opposition de phase ou en quadrature de phase ?

Exercice 10 :

La réfraction est la déviation des signaux lumineux passant obliquement d'un milieu transparent à un autre. Chaque milieu est défini par son indice de réfraction.
L'indice de l'air est 1, celui de l'eau est 1,33, celui de l'huile d'olive est 1,47 et celui d'un diamant est 2,42.

i_1 est l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction . Cette déviation est régie par la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

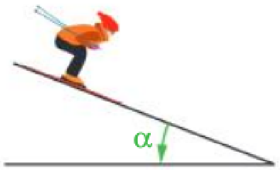


a) Déterminer une mesure de l'angle d'incidence lorsque l'angle de réfraction est égal à 30° et lorsque le rayon lumineux passe de l'air à l'eau.
b) Déterminer une mesure de l'angle de réfraction lorsque l'angle d'incidence est égal à 15° et lorsque le rayon lumineux passe de l'air à l'huile d'olive.

c) Une personne possède un diamant. Pour être certaine qu'il s'agisse bien d'un diamant, elle le porte chez un bijoutier. Quelle sera la mesure de l'angle de réfraction si le bijoutier envoie un rayon lumineux avec un angle d'incidence de 45°?

Exercice 11 :

Un skieur s'élance sur une pente verglacée à $t = 0s$.
Cette piste fait un angle de α rad avec l'horizontale.
En physique, on montre que si on néglige les frottements, la vitesse à l'instant t du skieur est donnée, en mètres par seconde, par la formule $v(t) = gt\sin(\alpha)$ où g est l'accélération de la pesanteur avec : $g = \frac{9{,}81m}{s^2}$.
Si besoin, on arrondira à 10^{-2}.



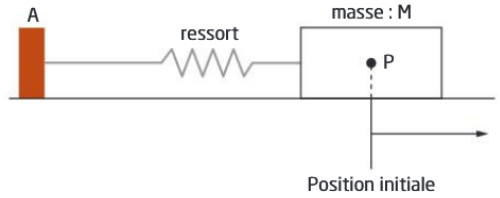
1) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \frac{\pi}{9}$.
a) Calculer la vitesse du skieur après 5s , puis 10 s de glisse.
b) La vitesse du skieur est-elle proportionnelle au temps ?
c) La vitesse du skieur est-elle une fonction croissante du temps ?
2) Maintenant, on suppose que α varie et on mesure la vitesse du skieur après 5s.
a) Compléter le tableau si ci-dessous :

α	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
$v(5)$						

b) La vitesse du skieur après 5 s est -elle proportionnelle à α ?

Exercice 12 :

Un objet (M) de masse m peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à l'une des extrémités d'un ressort à réponse linéaire, de masse négligeable et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.
On écarte le centre d'inertie P de l'objet de sa position d'équilibre; P effectue alors des oscillations autour de celle-ci.



On admet que l'équation horaire du mouvement du point P est donnée en mètres par :

$$x(t) = 0{,}1\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

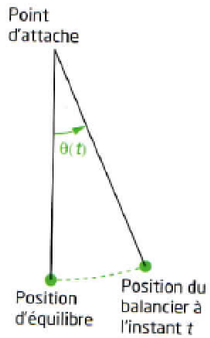
où t est exprimé en secondes.

a) Calculer $x(1)$. Interpréter la valeur à l'aide du contexte.
b) Déterminer la valeur t_0 de t pour laquelle le point P se retrouve à sa position d'équilibre pour la première fois.
c) Combien de fois le point P repasse par sa position d'équilibre dans l'intervalle [0 ; 40] ?

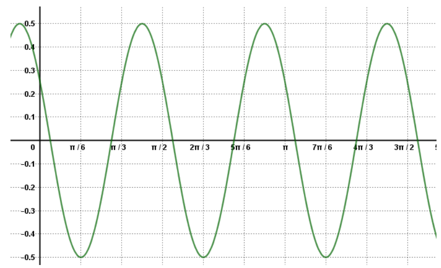
Exercice 13 :

Une horloge à balancier comporte un pendule pesant dont les oscillations sont entretenues par un engrenage ; cela permet au balancier d'entretenir des oscillations constantes.

On appelle θ la fonction, qui à tout instant t exprimé en secondes, associe l'angle $\theta(t)$, exprimé en radians, que fait la tige à l'instant t avec la position d'équilibre.
On dispose de la représentation graphique de θ et on admet que θ est périodique de période T.



1) a) Lire $\theta(0)$ et interpréter le résultat en fonction des données de l'exercice.
b) L'horloger affirme au propriétaire de la comtoise que la valeur maximale de $\theta(t)$ est 60°. Qu'en pensez-vous ?



2) On admet que $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ pour tout $t \geq 0$.
a) Déterminer par lecture graphique la période T de $\theta(t)$ et la valeur de A.
b) Proposer une démarche qui permette de déterminer la valeur de φ.
c) φ a pour valeur exacte l'une des valeurs ci-dessous :

$$\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\ ou\ \frac{\pi}{3}.$$

Préciser laquelle en justifiant votre choix.