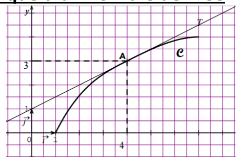
Chapitre : Dérivation (2)

I. Rappel : Nombre dérivée et tangentes (lecture graphique).

Exercice 1 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

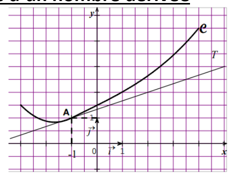
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse 4.



Donner la valeur de $f(4)$ et donner la valeur de $f'(4)$.

Exercice 2 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

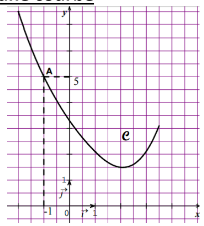
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse -1.



Donner la valeur de $f(-1)$ et donner la valeur de $f'(-1)$.

Exercice 3 : Tracer une tangente à une courbe

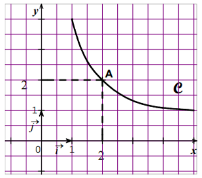
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1.
On sait $f'(-1) = -2$



1. Donner $f(-1)$
2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

Exercice 4 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2.
On sait $f'(2) = -1$



1. Donner $f(2)$
2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

II. Fonction dérivée

Sir Isaac Newton (1643- 1727) : Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais. En mathématiques, Newton partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition 1 : Dire qu'une fonction f est ______________________ sur un intervalle I signifie que pour tout $a \in I$, $f'(a)$______________________.

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on appelle fonction dérivée de f, notée __________, la fonction qui associe à tout nombre $x \in I$, le nombre dérivé de f en x notée ____________

Remarque : En physique, on parle de la notation différentielle $\frac{dy}{dt}$ où $f'(t) = \frac{dy}{dt}$ si $y = f(t)$.

III. Fonctions dérivées de référence

Propriétés 1 :

Fonction f définie par :	Fonction f' définie par :	f définie est dérivable sur
$f(x) = k \ \ (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax \ \ (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$	$\mathbb{R}$

Preuve (pour la fonction carré) : Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est dérivable en a.
Soit $h \neq 0$. Alors :

- $f(a) =$
- $f(a+h) =$
- $f(a+h) - f(a) =$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$

Ainsi, quelque soit le nombre réel a, f est dérivable en a et $f'(a) =$

Exercice 5 : Nombre dérivée

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a pour :

1. $f(x) = x^2$ et $a = -5$
2. $f(x) = x^3$ et $a = 2$

Exercice 6 : Equation de tangente

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$ et $a = 2$
2. $f(x) = x^3$ et $a = -1$

IV. Dérivées et opérations

Propriétés 2 :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Soit k un réel.

	Fonction	Dérivé
Produit d'une fonction par un nombre k (k constante)	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Différence	$u-v$	$u'-v'$

Application 1 : Dériver les fonctions f, g et h définie sur I par :

1. $f(x) = 8x^2$ et $I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = -7x$ et $I = \mathbb{R}^*$
3. $h(x) = 3x^3$ et $I = \mathbb{R}_+$

Exercice 7 : Produit par un réel

Dériver les fonctions suivantes définies par :

1. $f(x) = 6x$
2. $g(x) = -5x^3$
3. $h(x) = 7x$
4. $k(x) = -2x^2$

Propriété 3 : Soient a, b, c trois réels tel que $a \neq 0$, et f une fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors la dérivée f' est définie pour tout réel x par :

$f'(x) =$ ____

Preuve : Il suffit d'appliquer les propriétés 2.

Application 2 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 7x - 8$

Exercice 8 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x + 1$
b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$
c) $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$
d) $f(x) = 7x^3 - x^2 - 1$
e) $f(x) = x - 9$
f) $f(x) = -5x^2 + 6x - 9$
g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$
h) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 5x^2 - \frac{1}{8}x$

Exercice 9 : Pour chacun de cas suivants, calculer la dérivée de f

1) $f(x) = x^3 - 24x^2 + 180x + 60$ sur [0 ;15]
2) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 80$ sur [0 ;10]
3) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 57x$ sur [0 ;8]
4) $f(x) = 0{,}1x^3 - 10{,}5x^2 + 300x + 150$ sur [0 ;60]

V. Variations d'une fonction dérivable

Activité :
On définit une fonction f sur $[0\,;7]$ par $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x + 2$. Calculer la fonction dérivée f' de f.

1. Tracer les deux fonctions sur votre calculatrice.
2. Emettre une conjecture sur un éventuel lien entre la fonction dérivée et les variations de la fonction.
3. Expliquer ce lien avec vos mots.
4. Vérifier votre conjecture sur f et sur un nouvel exemple : $g(x) = x^2 + 3x - 6$ définie sur $[-7; 5]$.

Propriétés 4 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est strictement croissante sur I alors ____________________ sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I alors ____________________ sur I.
- Si f est constante sur I alors ____________________ sur I.

Exercice 10 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable et croissante sur $[3\,;+\infty[$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[3\,;+\infty[$?
2. Soit f une fonction dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et croissante sur $[4\,;+\infty[$.
   a. Quel est le signe de la dérivée de f sur $]-\infty\,;4]$?
   b. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[4\,;+\infty[$?

Exercice 11 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est croissante sur $]-\infty-5]$ et décroissante sur $[-5\,;+\infty[$.
   Recopier et compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$			0		

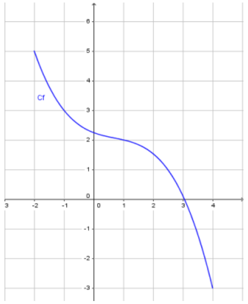
2. Soit f une fonction dérivable sur $[-8\,;8]$ et dont le tableau de variations est le suivant :

x	-8		-3		5		8
f	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Quel est le signe de la dérivée de f sur :
a. $[-8\,;-3]$ b. $[-3\,;5]$ c. $[5\,;8]$

Exercice 12 : Du sens de variation au signe de la dérivée

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.



1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $[-2\,;4]$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

Exercice 13 : Du sens de variation au signe de la dérivée

A chaque fonction A, B et C dont on a le tableau de variations, associer le tableau de signes 1, 2 ou 3 de sa dérivée $f'(x)$.

A

x	-4		2		3
$f(x)$	1	↗	8	↘	0

B

x	-4		2		3
$f(x)$	15	↘	8	↗	12

C

x	-4		0		3
$f(x)$	3	↘	0	↗	7

①

x	-4		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

②

x	-4		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

③

x	-4		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Propriétés 5 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est ________________________ sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est ________________________ sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est ________________________ sur I.

Exercice 14 : Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-7\,;+\infty[$ telle que $f'(x)$ est négatif pour tout réel $x \in [-7\,;+\infty[$.
   Quel est le sens de variation de f sur $[-7\,;+\infty[$?
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = x^2 + 3$ tout réel x.
   Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ est positif sur $]-\infty;\ 5]$ et négatif sur $[5\,;+\infty[$.
   a. Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty;\ 5]$?
   b. Quel est le sens de variation de f sur $[5\,;+\infty[$?

Exercice 15 : Du signe de la dérivée au sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

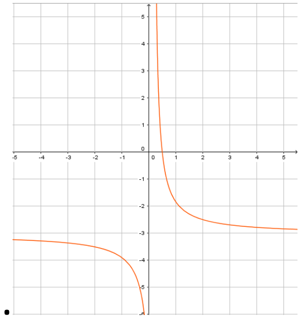
En déduire les variations de la fonction f.

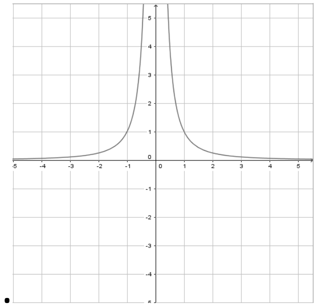
Exercice 16 : Associer à chaque courbe, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

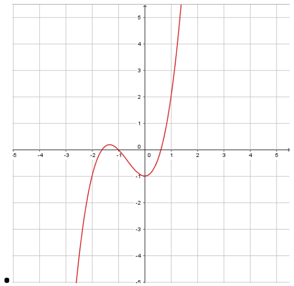
Voici les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ et de leurs fonctions dérivées f', g', h' et k'.

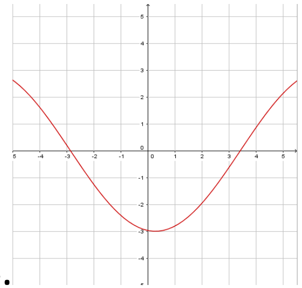
La courbe représentant f, g, h et k sont donnés, respectivement, par le graphique 1, 2, 3 et 4.

Associer à chaque courbe numérotée de 1 à 4, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

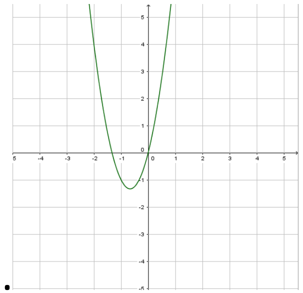
1. 

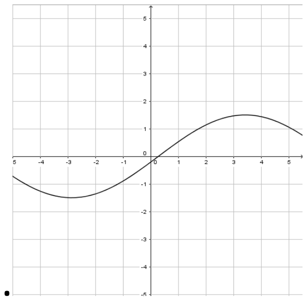
2. 

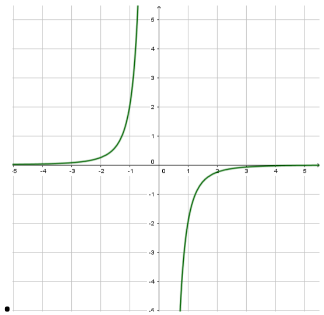
3. 

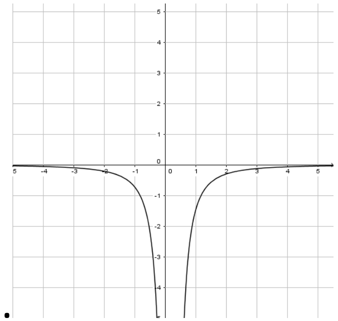
4. 

---

a. 

b. 

c. 

d. 

Application 3 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 - 5x + 1$.
   Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

4. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{1}{3}\ x^3 + x^2 + x + 38$.
   a) Monter que $k'(x) = (x+1)^2$
   b) Etudier les variations de k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Donner le sens de variations des fonctions suivantes :

1. f définie sur $I = [-3\,;3]$ par :
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$
2. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par :
$$f(x) = -3x^2 + x + 2$$
3. f définie sur $I = [0\,;4]$ par :
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
4. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par :
$$f(t) = -t^3 - 3t^2 + 9$$

Exercice 18 : On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$
1) a) Calculer $f'(x)$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$.
c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
d) Déterminer l'extremum de la fonction f.
2) a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = (x+1)(x-3)$$
2) b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 19 : On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par
$$f(x) = -x^2 - x + 2$$
1) a) Calculer $f'(x)$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$.
c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
d) Déterminer l'extremum de la fonction f.
2) a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = -\,(x-1)(x+2)$$
2) b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 20 : La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par
$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 20$$
a) Calculer $f'(x)$.
b) Montrer que $x_1 = 3\ et\ x_2 = 5$ sont des racines de $f'(x)$.
c) En déduire la forme factorisée de $f'(x)$.
d) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
e) Dresser le tableau de variations de f

Exercice 21 : La fonction f est définie sur [0 ;30] par :
$$f(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}1x^2 + 3{,}6 + 6$$
1) a) Calculer $f'(x)$
1) b) Vérifier que $f'(x) = 0{,}6\,(x-1)(x-6)$
2) Donner le signe de $f'(x)$.
3) En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle [1 ;6]

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur [0 ;10] par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 80$$

1) Déterminer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 3(x-3)(x-5)$$

2) Déterminer le tableau de variations de f.

Exercice 23 :

f est la fonction définie par :

$f(x) = 0{,}1x^3 - 10{,}5x^2 + 300x + 150$ sur [0 ;60]

1) Montrer que $f'(x) = 0{,}3\,(x-50)(x-20)$

2) Déterminer le signe de $f'(x)$

3) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 24 :

On considère la fonction f définie sur [0 ;7] par

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

1) a) Calculer $f'(x)$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ;7]

c) En déduire la tableau de variations de la fonction f sur [0 ;7]

2) La fonction f est représentée par la parabole appelée P.

a) Montrer que 1 et 5 sont racines de f.

b) Quelles sont les coordonées du sommet S de la parabole ? quel est l'axe de symétried la parabole P ?

Exercice 25 :

On a établi que le coût horaire d'utilisation d'une machine, en fonction du temps t d'utilisation en heure, est donné en euros par :

$f(t) = 0{,}4t^2 + 60t + 180$ pour $t \in [20\,;100]$.

1) Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur [20 ;100]

2) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur [20 ;100]

3) Donner la valeur maximale et la valeur minimale du coût horaire d'utilisation de cette machine.

Exercice 26 :

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre.

La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 15.

Pour l'entreprise, le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles est $B(x) = -0{,}1\,x^3 + 1{,}2x^2 + 6x - 5$.

1) Montrer que $B'(x) = -0{,}3(x-10)(x+2)$

2) Combien de tonnes de bouteilles en verre doit produire quotidiennement l'entreprise pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 27 :

Une entreprise fabrique et vend une quantité de x objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le coût total de fabrication de x objets, exprimé en euros est donné par :

$$C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$$

Chaque objet est vendu 200€.

1) Pour 12 objets fabriqués et vendus, calculer le coût de fabrication, la recette et le bénéfice.

2) $R(x)$ et $B(x)$ désignent le recette et le bénéfice pour x objets vendus.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Montrer que le bénéfice pour x objets vendus est :

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

3) On considère la fonction B définie sur [0 ;221] par

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

a) Calculer $B'(x)$ et montrer que 15 et 3 sont racines de $B'(x)$

b) Etudier le signe de $B'(x)$ sur [0 ;21].

c) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur [0 ;21]

3) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximal ?

Quel est ce bénéfice maximal ?

Exercice 28 :

Une entreprise produit et commercialise chaque mois q milliers de réveils, pour q appartenant à [0 ;72].

On appelle $C(q)$ le coût total mensuel de production et $R(q)$ le chiffre d'affaires mensuel réalisé pour la vente de q milliers de réveils, $C(q)$ et $R(q)$ étant exprimés en milliers d'euros.

On admet que toute la production est vendue chaque mois.

On admet que la fonction C est définie par :

$$C(q) = 0{,}1q^2 + q + 40$$

et le prix de vente unitaire $P(q)$ par :

$$P(q) = 11{,}2 - 0{,}05q$$

pour toute quantité q en milliers dans [0 ;72].

1) a) Vérifier que le chiffre d'affaires mensuel pour le vente de 10 milliers de réveils est de 107 milliers d'euros.

b) Déterminer le chiffre d'affaires mensuel $R(q)$ réalisé pour le vente de q milliers d'objets.

2) a) Montrer que le bénéfice mensuel $B(q)$ exprimé en millier d'euros, réalisé pour la production et la vente de q milliers de réveils est défini par :

$$B(q) = -0{,}15q^2 + 10{,}2q - 40$$

b) Calculer $B'(q)$ et étudier son signe sur [0 ;72].

c)En déduire les variations de la fonction B sur [0 ;72]

d) Déterminer la production mensuelle de l'entreprise qui correspond au bénéfice maximal et calculer le montant de ce bénéfice.

Exercice 29 : Physique

L'abscisse x d'un point sur un axe horizontal est donnée pa l'équation $x = 3t^2 + 2t + 5$ avec x en mètres et t en secondes.

a) Quelle est l'abscisse du point à l'instant $t = 0$? à $t = 5$?

b) Exprimer la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ en fonction de t.

Quelle est la vitesse de ce point à l'instant $t = 1$?

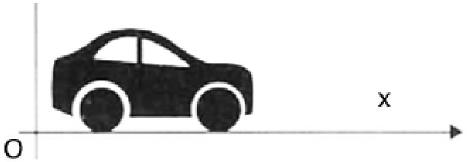
c) Montrer que l'accélération $a = \frac{dv}{dt}$ est constante.

Exercice 30 : Physique

Une voiture se déplace en ligne droite sur une route horizontale.

On repère sa position horizontale x, en utilisant un repère (O,x) , le point O étant lié au sol, comme indiqué sur la figure ci-contre.

L'association de ce repère et de ce point matériel, constitue un référentiel, supposé Galiléen.



Dans ce référentiel galiléen, x désigne la position de la voiture (en m), à l'instant t (en s).

On donne la relation : $x(t) = 1{,}5.t^2 + 10.t$

1. Dans ce repère, quelle est la position de la voiture à l'instant $t = 0$ s puis $t = 5$ s ?
2. Dans ce repère, donner l'expression littérale de la vitesse moyenne V_{moy} de la voiture entre 0 et 5 s.
3. Calculer la valeur de cette vitesse moyenne entre 0 et 5 s.
4. Donner l'expression littérale de la vitesse de la voiture $v_x(t)$?
5. En déduire la valeur de cette vitesse à l'instant $t = 0$ s puis à l'instant t = 5 s.
6. Dans ce repère, donner l'expression littérale de l'accélération moy. a_{moy} de la voiture entre 0 et 5 s.
7. Calculer la valeur de cette accélération moyenne entre 0 et 5 s.
8. Donner l'expression littérale de l'accélération de la voiture a_x ?
9. En déduire la valeur de cette accélération à l'instant $t = 0$ s puis à l'instant t = 5 s.
10. Caractériser le mouvement de la voiture en justifiant votre réponse.