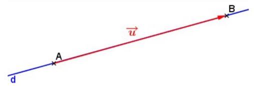
Chapitre : Vecteurs et droites

I. Rappels de 2nd (non fait l'année précédente)

1) Vecteurs directeur

Définition 1 : Soit d une droite et A, B deux points distincts.
On appelle ________________________________ **de d** tout vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ tel que les points A et B ________________________________ à la droite d.
Autrement dit :
Un vecteur est appelé **vecteur directeur d'une droite** lorsqu'il est ____________________________ à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A et B appartenant à la droite.

Propriété 1 : Un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d s'il existe deux points distincts A et B appartenant à d tels que :



Remarque : une droite possède une infinité de vecteurs directeurs.

Propriété 2 : Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont ______________________.

Application 1 : Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(5\,;-6)$ et $B(2\,;-1)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Parmi les vecteurs suivants lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite (AB) ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ b. $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ c. $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ d. $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\3{,}3\end{pmatrix}$

Exercice 1 : Vecteurs directeurs

Dire si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(1\,;2), B(3\,;7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$.
2. $A(-3\,;2), B(4\,;7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.
3. $A(-1\,;3), B(7\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Application 2 : Donner un vecteur directeur des droites suivantes :

1. $d_1 : y = -4x + 1$
2. $d_2 : y = -4$ (droite parallèle à l'axe des abscisses)
3. $d_3 : x = 5$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées)

Propriété 3 : Soit m et k deux réels.

1. Soit d la droite d'équation $y = mx + p$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. Soit d la droite d'équation $y = k$, le vecteur $\vec{\imath}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

   (Conséquence du 1.)
3. Soit d la droite d'équation $x = k$, le vecteur $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Exemple : Revoir l'application précédente.

Propriété 4 : Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. $d \parallel d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ______________________________.
2. $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ______________________________.

Propriété 5 : Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point du plan.

$$M \in d \Leftrightarrow$$

Application 3 :

On considère la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-4; 1)$.

Les points $B(1; -7)$ et $C(-1; -3; 5)$ sont-ils des points de d ?

2) Equation cartésienne de droite

Activité : On se place dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soient $A(4\,;-3)$ et $B(2\,;1)$.

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit $M(x\,;y)$ un point appartenant à (AB). Donner une équation de la droite (AB).

Propriété 6 : Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Toute droite d du plan admet une équation de la forme :
Cette équation est appelée ____.

Propriété 7 (réciproque de la 6) : Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant la relation $ax + by + c = 0$ est une

____________________.

Exemple : L'équation cartésienne de la droite (AB) donnée au début de ce paragraphe est $4x + 2y - 10 = 0$

Exercice 2 : Déterminer une équation cartésienne

Soit (d) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x - 2$.

Identifier s'autres équations de (d) parmi celle-ci :

a) $x = 4y + 2$ b) $x - 4y - 2 = 0$ c) $x = 8$
d) $-x + 4y + 8 = 0$ e) $0{,}5x - 2y = 4$ f) $y + 6 = x$

Propriété 8 : Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de toute droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$

Preuve :

Soient (E) l'ensemble qui a pour équation $ax + by + c = 0$ avec a, b, c des réels tels que $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

$$(E) \Leftrightarrow by = -ax - c$$

- Si $b \neq 0$ alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on obtient une équation de la forme $y = mx + p$
- Si $b = 0$ alors $a \neq 0$ et on a donc $0 = -ax - c \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$
  C'est une équation de la forme $x = k$, c'est-à-dire une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple : Un vecteur directeur de la droite (AB) précédente est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Application 4 : Vecteurs directeurs

Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) dont on donne une équation.

$(d) : 5x + 4y + 1 = 0$	$(d) : x - 3 = 0$
$(d) : y = 7x - 5$	$(d) : \ -x + 2y = 0$

Application 5 : On considère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(2; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1ère méthode : (colinéarité)

2ème méthode : $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Déterminer une équation cartésienne

On donne un point A d'une droite (d) et un vecteur directeur de cette droite.

Déterminer une équation de (d).

a) $A(-2\,; 3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $A(-4\,; 6)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Application 6 : On considère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(2;-1)$ et $B(-25\,;30)$.

Exercice 4 : Déterminer une équation cartésienne

On donne deux points A et B.

Déterminer une équation de la droite (AB).

1. $A(4\,;5)$ et $B(3\,;3)$
2. $A(-1\,;\,-1)$ et $B(11\,;3)$
3. $A(2\,;2)$ et $B(-2\,;\,-2)$
4. $A(3\,;7)$ et $B(3\,;\,-9)$

Exercice 5 : Déterminer une équation cartésienne

Déterminer une équation de la droite (d), parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(1\,;4), B(-1\,;4)$ et $C(0\,;0)$
2. $A(-1\,;\,-3), B(-2\,;\,-4)$ et $C(1\,;1)$
3. $A(1\,;1), B(3\,;3)$ et $C(2\,;7)$

Exercice 6 : Droites parallèles

On donne une équation de deux droites (d_1) et (d_2).

Indiquer si ces droites sont parallèles.

Donner les coordonnées du point d'intersection si les droites sont sécantes.

1. $(d_1) : 7x + y - 1 = 0$ et $(d_2) : x + 5y - 3 = 0$
2. $(d_1) : x - y - 1 = 0$ et $(d_2) : -2x + 2y - 3 = 0$

Exercice 7 : Déterminer une équation cartésienne

Déterminer une équation de la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.

1. $(d) : 4x + 2y - 5 = 0$ et $A(1\,;1)$.
2. $(d) : x + 2y - 5 = 0$ et $A(0\,;1)$.
3. $(d) : x - 5 = 0$ et $A(1\,;2)$.

Exercice 8 : Equation de médianes

Soit les points $A(1\,;-2), B(6\,;5)$ et $C(8\,;\,-6)$.

1. Déterminer une équation des médianes issues de A et de B dans le triangle ABC.
2. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Exercice 9 : Equation de médianes

Soit les points $A(-1\,;1), B(3\,;7)$ et $C(4\,;\,-2)$.

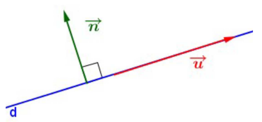
1. Déterminer les coordonnées des points A' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$.
2. Déterminer une équation des médianes issues de A et de C dans le triangle ABC.
3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Application 7 : Etant donné deux points $A(a\,;b)\ et\ B(x\,;y)$ dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, écrire un algorithme rendant une équation cartésienne de la droite (AB).

II. Vecteur normal à une droite

Définition 2 : Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un vecteur ______________________ à la droite d est un vecteur non nul ______________________ au vecteur $\vec{u}$.



Propriété 9 : Soit a, b et c des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, soit d une droite et $\vec{u}$ un vecteur.

d a pour équation $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Preuve :

- Sens direct :

Soit d la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Soit $\vec{n}\binom{a}{b}$.

Montrons que $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.

- Si $a = 0$, alors $\vec{n}\binom{0}{b}$ et d est une droite horizontale de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{0}$.

$$\vec{n}.\vec{u} = 0 \times 1 + b \times 0 = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\vec{n}$ est normal à d.

- Si $b = 0$, alors $\vec{n}\binom{a}{0}$ et d est une droite vecticale de vecteur directeur $\vec{u}\binom{0}{1}$.

$$\vec{n}.\vec{u} = a \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\vec{n}$ est normal à d.

- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$: on cherche deux points A et B de d.

Prenons les points $A(0; -\frac{c}{b})$ et $B(-\frac{c}{a}; 0)$. Ainsi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}$.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = a \times -\frac{c}{a} + b \times \frac{c}{b} = -c + c = 0$$

Donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\vec{n}$ est normal à d.

- Sens réciproque :

Soit $\vec{n}\binom{a}{b}$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et d une droite de vecteur normal $\vec{n}$.

Montrons que d a pour équation $ax + by + c = 0$.

Soit $A(x_A; y_A) \in d$ et $M(x; y) \in d$ ainsi $\overrightarrow{AM}\binom{x - x_A}{y - y_A}$. Alors :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$$

Si on pose $c = -ax_A - by_A$. On obtient bien $d : ax + by + c = 0$.

Exercice 10 : Equations de droite et vecteur normal

1. Proposer une équation d'une droite (d) dont un vecteur normal est $\vec{n}\binom{5}{2}$.
2. Proposer une équation d'une droite (d) dont un vecteur normal est $\vec{n}\binom{7}{-3}$.

Exercice 11 : Equations de droite et vecteur normal

1. Pourquoi un vecteur normal de la droite (d) d'équation $3x - 5y + 7 = 0$ a-t-il pour coordonnées $\binom{3}{-5}$?
2. Indiquer une équation d'une autre droite ayant le même vecteur normal.

3. | 3.

Application 8 :

Soient $A(2\,;1), B(0;\ -2)$ et $C(-3\,;5)$ trois points dans un repère orthonormé.

Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A.

Exercice 12 : Equations de droite et vecteur normal

Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

a) $A(1\,;2)$ et $\vec{n}\binom{1}{-1}$ b) $A(-3\,;4)$ et $\vec{n}\binom{2}{-3}$ c) $A(1\,;5)$ et $\vec{n}\binom{1}{2}$ d) $A(5\,;-2)$ et $\vec{n}\binom{-4}{1}$

Application 9 :

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la droite d d'équation $y = 2x + 3$.

Exercice 13 : Equations de droite et vecteur normal

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $2x + 3y + 4 = 0$.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $3x - 2y - 5 = 0$.

Propriété 10 : Conclusion (vecteurs et droite) :

Soit a, b et c des réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Si la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, elle a pour vecteur normal $\vec{n}\left(\quad \right)$ et pour vecteur directeur $\vec{u}\left(\quad \right)$

Exercice 14 : Equations de droite et vecteur normal

Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation :

a) $5x - 3y + 7 = 0$ b) $y = -7x + 3$ c) $x = -5$

d) $y = 2$ e) $-3x + 5y - 2 = 0$ f) $y = 4x - 10$

Exercice 15 : Equations de droite et vecteur normal

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{5}{-2}$. Le vecteur $\vec{n}\binom{1}{2}$ est-il un vecteur normal de la droite (d) ?

Exercice 16 : Equations de droite et vecteur normal

Soit les points $A(2\,;3)$ et $B(-2\,;8)$.

1. Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).
2. En déduire que le vecteur de coordonnées $\binom{5}{4}$ est un vecteur normal de la droite (AB).

Exercice 17 : Equations de droite et vecteur normal

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{5}$.

Parmi les vecteurs ci-dessous, indiquer ceux qui sont des vecteurs normaux de la droite (d).

a) $\vec{v}\binom{15}{-12}$ b) $\vec{w}\binom{2}{8}$ c) $\vec{s}\binom{-4}{5}$ d) $\vec{t}\binom{-5}{4}$

Exercice 18 : Hauteurs et vecteur normal

1. Soit les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $C(2\,;-2)$.
   Donner une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C
2. Soit les points $A(3\,;5)$, $B(6\,;-1)$ et $C(1\,;4)$.
   Donner une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Exercice 19 : Hauteurs et vecteur normal

Soit les points $A(0\,;2)$, $B(4\,;1)$ et $C(3\,;4)$.

1. Donner une équation de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
2. a. Déterminer le point d'intersection H de ces deux hauteurs.
   b. Calculer $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 20 : Médiatrices et vecteur normal

1. Soit $A(1\,;\ 2)$ et $B(-1\,;4)$.
   Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Soit $A(2\,;\ 5)$ et $B(-1\,;-3)$.
   Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 21 : Médiatrices et vecteur normal

Soit $A(-1\,;2)$, $B(0\,;\ -3)$ et $C(3\,;1)$.

1. Détermine une équation de la médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AC]$.
3. Déterminer le centre du cercle circonscrit à ABC

Exercice 22 : Tangente à un cercle et vecteur normal

Soit le cercle de centre $\Omega(-1\,;\ -2)$ et passant par l'origine O du repère.

Déterminer une équation de la tangente à ce cercle passant par O, puis tracer le cercle et cette tangente.

Exercice 23 : Tangente à un cercle et vecteur normal

Soit C le cercle de centre $\Omega(4\,;\ -2)$ et de rayon $r = 10$.

1. Vérifier que le point $M(-2\,;6)$ appartient à C.
2. Déterminer une équation de la tangente en M au cercle C.

III. Applications du produit scalaire

1) Formule de la médiane

Propriété 11 : Soient deux points A et B et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 =$

Preuve :

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 \\
&= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 \quad \text{or } \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \text{ car } I \text{ milieu de } [AB] \\
&= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + IA^2 + IB^2 \text{ or } IA = IB = \frac{AB}{2} \text{ car } I \text{ milieu de } [AB] \\
&= 2MI^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + 2 \times \frac{AB^2}{4} \\
&= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}
\end{aligned}$$

Application 10 : Formule de la médiane

Soit un triangle ABC tel que $AC = 2, CB = 5$ et $AB = 6$.
I est le milieu de $[AB]$. Déterminer IC.

Exercice 24 : Formule de la médiane

Soit un triangle ABC tel que $AB = 6, AC = 5$ et $BC = 7$.
En utilisant le théorème de la médiane, calculer les longueurs des médianes de ce triangle.

2) Equation de cercle

Propriété 12 :
Soit C un cercle de centre $O(x_O; y_O)$ et de rayon r. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$M \in C \Leftrightarrow$$

Preuve : $M \in C \Leftrightarrow OM = r \Leftrightarrow OM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$

RAPPEL : Soit les points $A(x_A\,; y_A)$ et $B(x_B\,; y_B)$ on a alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Application 11 : Déterminer une équation du cercle de centre $O(-1; 2)$ et de rayon 3.

Propriété 13 : Soient A et B deux point du plan.
Soit C un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan.

$$M \in C \Leftrightarrow$$

Preuve :

- Si M distinct de A et B.
  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow$les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaire
  $\Leftrightarrow$le triangle AMB est rectangle en M
  $\Leftrightarrow M \in C$ de diamètre $[AB]$
- Si $M = A$ ou $M = B$alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ car l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{MA}$ ou $\overrightarrow{MB}$ est nul.

Application 12 :

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(4\,;5)$ et $B(-2\,;7)$.

Application 13 : Déterminer et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2-4x+6y-3=0$.

Exercice 25 : Equations de cercles

1. Déterminer le rayon du cercle d'équation $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
2. Déterminer les coordonnées du centre du cercle d'équation $(x-5)^2+(y-7)^2=14$.
3. Déterminer une équation du cercle de centre $A(1\,;0)$ et de rayon 2.
4. Déterminer une équation du cercle de centre 0 et de rayon 3.
5. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $A(1\,;9)$ et $B(4\,;3)$.
6. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $A(-3\,;5)$ et $B(2\,;-1)$.
7. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $x^2+y^2-6x+2y+5=0$ et préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

Exercice 26 : Intersection d'un cercle et d'une droite.

1. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'interception de la droite (d) d'équation $2x-y+1=0$ et du cercle C d'équation $x^2-4x+y^2-21=0$.
2. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'interception de la droite (d) d'équation $6x+2y-10=0$ et du cercle C de centre $A(-1\,;-1)$ et de rayon 5.

IV. Supplément

1) Formule des aires

Propriété 14 : Soient A, B et C trois points distincts.
Pour tout triangle ABC non aplati, tel que $= BC$, $b = AC$ et $c = AB$. L'aire du triangle ABC vaut :

$$S =$$

Preuve (formule des aires) :

Soit H la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On sait que : $S = \frac{1}{2}AB \times CH$

- Si l'angle $\hat{A}$ est aigu $CH = AC\sin(\hat{A})$
- Si l'angle $\hat{A}$ est obtus $CH = AC\sin(\widehat{CAH})$
  Or $\widehat{CAH} = \pi - \hat{A}$ et $\sin(\pi - \hat{A}) = \sin(\hat{A})$
  Ainsi $CH = AC\sin(\hat{A})$

Dans les deux cas, on a $S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin(\hat{A}) = cb\sin(\hat{A})$

2) Formule des sinus

Propriété 15 : Soient A, B et C trois points distincts.
Pour tout triangle ABC non aplati, tel que $= BC$, $b = AC$ et $c = AB$

Exercice 27 : Calculs de longueurs et d'angles

Dans chacun des cas suivants on demande de trouver pour un triangle ABC une mesure des trois angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ et les longueurs $a = BC, b = AC, c = AB$.
Tous les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

1. $a = 125$; $\hat{A} = 54°$; $\hat{B} = 65°$
2. $a = 512$; $b = 426$; $\hat{A} = 48{,}50°$
3. $a = 6{,}34$; $b = 7{,}30$; $c = 9{,}98$
4. $b = 215$; $c = 150$; $\hat{B} = 42°$
5. $\hat{B} = 50{,}29°$; $\hat{C} = 88{,}36°$; $a = 48{,}17$

Exercice 28 : Calculs d'angles et d'aires

On considère le triangle ABC tel que $AC = 24\ cm, BC = 28\ cm$ et $AB = 40\ cm$.

1. Faire un dessin à l'échelle $\frac{1}{4}$.
2. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC. Arrondir à 10^{-1}.
3. Calculer l'aire S du triangle ABC. Arrondir à 10^{-1}.
4. Calculer l'aire S' du triangle dessiné à la première question.
5. On appelle H le pied de la hauteur issue du point C. Placer H sur le dessin.
   Donner l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de CH. En déduire CH.
6. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir à 10^{-1}.
7. Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

3) Cosinus d'un angle

Propriété 16 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\cos(\theta) =$$

Preuve : Par la définition du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos(\theta)$

Propriété 17 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\cos(\theta) =$$

Preuve : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on sait que pour $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Formules d'addition des sinus et cosinus

Propriété 18 : Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $\cos(a - b) =$
2) $\cos(a + b) =$
3) $\sin(a + b) =$
4) $\sin(a - b) =$

Preuve (Formules d'addition des sinus et cosinus) :

1) Considérons les points A et B du cercle trigonométrique associés aux nombres a et b.

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = a - b$$

Comme A et B appartiennent au cercle trigonométrique, $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1$, donc :

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(a - b)$$

De plus $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos(a)\\\sin(a)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos(b)\\\sin(b)\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Finalement : $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

2) $\cos(a + b) = \cos(a - (-b))$
$= \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$
$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Rappel :
$\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}$ **et**
$\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin(x)}$

3) $\sin(a + b) = \cos\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos(a)\cos\left(b - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(a)\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

Rappel :
$\boldsymbol{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)}$ **et**
$\boldsymbol{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)}$

4) $\sin(a - b) = \sin(a + (-b))$
$= \cos(a)\sin(-b) + \sin(a)\cos(-b)$
$= -\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
$= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Application 14 :

a) Calculer $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ et en déduire la valeur en radians de $75°$

b) Calculer les valeurs exactes de $\cos 75°$ et $\sin 75°$

Exercice 29 : Formules d'addition

1. a. Quelle est la valeur exacte des nombres :

$\cos\frac{\pi}{3}$ $\sin\frac{\pi}{3}$ $\cos\frac{\pi}{4}$ $\sin\frac{\pi}{4}$

b. En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$.

2. a. Quelle est la valeur exacte des nombres :

$\cos\frac{\pi}{6}$ $\sin\frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{\pi}{4}$ $\sin\frac{\pi}{4}$

b. En déduire $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Formules de duplication des sinus et cosinus

Propriété 19 : Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $\cos(2a) =$
2) $\sin(2a) =$

Preuve :

On utilise les propriétés 2 et 3 du II)4) en remplaçant b par a et la relation :

$$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$$

Application 15 : Utiliser les formules de duplication pour déterminer des valeurs exactes de sinus et cosinus.

Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 30 : Formules de duplication

1. On sait que $\cos a = 0{,}6$. Déterminer $\cos(2a)$.
2. On sait que $\sin a = 0{,}3$. Déterminer $\cos(2a)$.
3. On sait que $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Déterminer $\sin(2a)$.
4. Soit a le réel tel que $\cos a = \frac{2}{3}$ et $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
5. Calculer la valeur exacte de $\cos(2a)$ et de $\sin(2a)$.

Propriété 20 : Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $cos^2(a) =$

2) $sin^2(a) =$

Application 16 : Linéariser $cos^2(a)$ et $sin^2(a)$

Linéariser $\cos^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$