Fiche méthode : Arithmétiques

I. Multiples et diviseurs

Application 1 : Multiple ou diviseur ?

Compléter les phrases suivantes par « diviseur » ou « multiple » :

1. 350 est un **multiple** de 50.
2. 13 est un **diviseur** de 260.
3. 0 est un **multiple** de 89.
4. 1 est un **diviseur** de 16.
5. 42 est un **diviseur/ multiple** de 42.
6. 21 est un **diviseur** de -2100.
7. 2019 est un **diviseur** de 0.
8. 16 est un **multiple** de 4.

Application 1 :

Montrer que la somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.

Soit deux multiples a et b de **5** : il existe deux entiers k et h tels que $a = \mathbf{5}k$ et $b = \mathbf{5}h$.
Ainsi $a + b = \mathbf{5}k + \mathbf{5}h$ puis en factorisant par **5**, on a : $a + b = \mathbf{5}(k + h)$.
Comme k et h sont des entiers, $k + h$ est aussi un entier donc $a + b$ est un multiple de 5.

Multiple et diviseur :

Soit a et b deux entiers.
On dit que a est multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples :

- 15 est un multiple de 5 car il existe un entier 3 tel que $15 = 3 \times 5$.
- 2 est un diviseur de 10 car il existe un entier 5 tel que $10 = 5 \times 2$
- 7 n'est pas un diviseur de 4 car il n'existe pas d'entier k tel que $7 = k \times 4$.

Somme de deux multiples :

Soit a un entier.
La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Application 2 : Somme de trois entiers consécutifs

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Trois entiers consécutifs peuvent d'écrire : $n, n + 1$ et $n + 2$ où n est un entier quelconque.

$$\begin{aligned} s &= n + (n + 1) + (n + 2) \\ &= 3n + 3 \\ &= 3(n + 1) \end{aligned}$$

n est un entier donc $n + 1$ aussi.

Si on note $k = n + 1$, on a $s = 3k$ avec k un entier.
Donc s est un multiple de 3.

Exercice 4 : Multiple et diviseur

On donne $a = 10k$ et $b = 6k$ avec k entier.

1. Montrer que a est un multiple de 2.

$a = 10k = 2 \times 5k$.
Notons $q = 5k \in \mathbb{Z}$ ainsi $a = 2q$.
Ainsi a est un multiple de 2.

2. Montrer que b est un multiple de 3.

$b = 6k = 3 \times 2k$.
Notons $q = 2k \in \mathbb{Z}$ ainsi $b = 3q$.
Ainsi b est un multiple de 3.

3. Est-ce que 8 est un diviseur de $a + b$?

$a + b = 10k + 6k = 16k = 8 \times 2k$
Notons $q = 2k \in \mathbb{Z}$ ainsi $a + b = 8q$
Ainsi 8 est un diviseur de $a + b$

II. Nombres pairs et impairs

Application 5 : Carré d'un nombre impair

Soit k un entier.
Soit a un nombre impair alors il s'écrit de la forme : $a = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2K + 1 \end{aligned}$$

Où l'on note $K = 2k^2 + 2k$.
K est un entier car c'est la somme de deux entiers (trivial), donc a^2 est impair.

Soit k un entier.

Nombre pair :

- Un nombre pair est un entier multiple de 2.
- Un nombre pair s'écrit sous la forme : $2k$.

Nombre impair :

- Un nombre impair est un entier non multiple de 2.
- Un nombre impair s'écrit sous la forme : $2k + 1$ (puisque le reste de sa division euclidienne par 2 est 1).

Carré d'un nombre impair :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Application 6 : Travailler avec des nombres pairs et impairs

1. Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Soit deux nombres impairs a et b.
Il existe donc un entier k tel que $a = 2k + 1$ et un entier h tel que $b = 2h + 1$.

$$\begin{aligned} a + b &= 2k + 1 + 2h + 1 \\ &= 2k + 2h + 2 \\ &= 2(k + h + 1) \end{aligned}$$

Puisque k et h sont des entiers, $k + h + 1$ est un entier. Notons $d = k + h + 1$.
Ainsi $a + b = 2d$ ce qui montre que $a + b$ est un nombre pair.

2. Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs a et $a + 1$.

Si a est pair alors il existe donc un entier k tel que : $a = 2k$.

$$\begin{aligned} a(a + 1) &= 2k(2k + 1) \\ &= 2K \end{aligned}$$

Où on pose K l'entier $k(2k + 1)$.

Si a est impair alors il existe donc un entier h tel que $a = 2h + 1$.

$$\begin{aligned} a(a + 1) &= (2h + 1)(2h + 2) \\ &= 4h^2 + 4h + 2h + 2 \\ &= 2(2h^2 + 2h + h + 1) \\ &= 2K \end{aligned}$$

Où on pose K l'entier $(2h^2 + 2h + h + 1)$.

Ainsi $a(a + 1) = 2K$ ce qui montre que $a(a + 1)$ est un nombre pair.

III. Nombres premiers

Application 7 : Test de primalité

Déterminer si les nombres suivants sont des nombres premiers : 18, 37, 41, 89 et 643.

- **$18 = 2 \times 9$ ainsi 18 n'est pas premier.**
- **$\sqrt{37} \approx 6$, or 37 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. Ainsi 37 est premier.**
- **$\sqrt{41} \approx 6$, or 41 n'est pas divisible par 2, 3 ou 5. Ainsi 41 est premier.**
- **$\sqrt{89} \approx 9$, or 89 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 7. Ainsi 89 est premier.**
- **$\sqrt{643} \approx 25$, or 643 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ou 23. Ainsi 643 est premier.**

Application 8 : Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$

Décomposer 539 en produit de facteurs premiers puis écrire $\sqrt{539}$ sous la forme $a\sqrt{b}$.

Méthode :
Pour décomposer un entier en facteurs premiers, on le divise successivement par les nombres de la liste ordonnée des nombres premiers.

$539 = 7 \times 7 \times 11 = 7^2 \times 11$

$\sqrt{539} = \sqrt{7^2 \times 11} = \sqrt{7^2} \times \sqrt{11} = 7\sqrt{11}.$

Application 9 : Fraction irréductible

Ecrire sous forme de fraction irréductible $\frac{252}{70}$.

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \times 126 \\ &= 2 \times 2 \times 63 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 21 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70 &= 7 \times 10 \\ &= 7 \times 2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\frac{252}{70} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{7 \times 2 \times 5} = \frac{2 \times 3^2}{5} = \frac{18}{5}$$

Nombre premier :

Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs distincts dans $\mathbb{N}$.

Remarques :

- 1 est diviseur de tout entier et un entier a est toujours diviseurs de lui-même. Ainsi un nombre premier a pour seuls diviseurs entiers naturels 1 et lui-même.
- 0 n'est pas premier car tout entier a divise 0. En effet $0 = 0 \times a$.
- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un diviseur dans $\mathbb{N}$: lui-même.
- Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5 , 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc…

Test de primalité :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Si n n'admet pour diviseur aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.

Décomposition en produit de facteurs premiers :

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit comme puissance d'un nombre premier, soit comme produit de puissances de nombre premiers.
Cette décomposition en produits de facteurs premiers est unique, à l'ordre des facteurs près.

Remarque :

Pour décomposer un entier en facteurs premiers, on le divise successivement par les nombres de la liste ordonnée des nombres premiers.