Fiche méthode : Tableaux de signes

I. Equations

Application 1 : Tableau de signe

1. Dresser le tableau de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 4$

1[ère] étape : On résout $3x + 4 = 0$

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$

2[ème] étape : Tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

2. Résoudre $f(x) \leq 0$

$$S =]-\infty\,;-\frac{4}{3}]$$

Tableau de signe d'une fonction affine :

Le signe de $mx + p$ est le signe de m (appelé coefficient directeur) à « droite du zéro »

Valeurs de x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de -m	0	signe de m	

Pour trouver $-\frac{p}{m}$ on résout l'équation :

$mx + p = 0$

$mx = -p$

$x = -\frac{p}{m}$ (car $m \neq 0$).

Pour résoudre $f(x) \leq 0$:

On regarde où se trouve le signe « $-$ » dans la deuxième ligne et on écrit les abscisses (1[ère] ligne) correspondantes.

II. Inéquation produit

Application 2 : Inéquation produit

1. Quelles sont les solutions de l'inéquation :

$(2-10x)(4x-1) \geq 0$ **(positif)**

$2 - 10x = 0$	$4x - 1 = 0$
$-10x = -2$	$4x = 1$
$x = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$	$x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$	
$2-10x$		+	0	−		−		m=-10<0
$4x-1$		−		−	0	+		m=4>0
$(2-10x)(4x-1)$		−	0	+	0	−		

$$S = \left[\frac{1}{5}\,;\frac{1}{4}\right]$$

2. Quelles sont les solutions de l'inéquation :

$(3x+2)(-x+2)(2x-1) \leq 0$ **(négatif)**

$3x + 2 = 0$	$-x + 2 = 0$	$2x - 1 = 0$
$3x = -2$	$x = 2$	$2x = 1$
$x = -\frac{2}{3}$		$x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$	
$3x+2$		−	0	+		+		+		m=3>0
$-x+2$		+		+		+	0	−		m=-1<0
$2x-1$		−		−	0	+		+		m=2>0
$(3x+2)(-x+2)(2x-1)$		+	0	−	0	+	0	−		

$$S = \left[-\frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\right] \cup [2\,;\,+\infty[$$

Méthode : Inéquation produit :

Pour résoudre une inéquation produit avec des expressions affines :

- On résout déjà des équations.
  - S'il y 'a un produit de deux facteurs, il y aura deux équations à résoudre.
  - S'il y 'a un produit de n facteurs, il y aura n équations à résoudre.
- On met les solutions de ces équations dans l'ordre croissant dans la 1[ère] ligne du tableau.
- Dans les lignes suivantes on met un « 0 » en dessous des solutions correspondantes.
- On cherche le signe de chaque expression en utilisant la règle du signe du coefficient directeur à droite du zéro.
- On complète les signes de la dernière ligne en utilisant la règle du produit en comptant le nombre de « $-$ » par colonne :
  - S'il y a un nombre pair de « $-$ » on met un « $+$ »
  - S'il y a un nombre impair de « $-$ » on met un « $-$ »
- On résout l'inéquation en regardant la dernière ligne.

III. Inéquation quotient

Application 3 : Inéquation quotient

Quelles sont les solutions de l'inéquation :

$$\frac{4x+9}{6-10x} \leq 0 \textbf{ (négatif)}$$

$4x + 9 = 0$	Valeur interdite :
$4x = -9$	$6 - 10x = 0$
$x = -\frac{9}{4}$	$-10x = -6$
	$x = \frac{-6}{-10}$
	$x = \frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{9}{4}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$	
$4x+9$		−	0	+		+		m=4>0
$6-10x$		+		+	0	−		m=-10<0
$\frac{4x+9}{6-10x}$		−	0	+	‖	−		

$$S =]-\infty\,;-\frac{9}{4}] \cup]\frac{3}{5}\,;+\infty[$$

Méthode : Inéquation quotient :

- Pour résoudre une inéquation quotient avec des expressions affines la méthode est quasiment la même que pour un tableau de signe « produit » à une seule différence très importante :
  Comme il s'agit d'un quotient, il y a certainement une ou plusieurs valeurs interdites, on les trouve en calculant « dénominateur=0 ».
- Dans la dernière ligne : on signale par une *double barre* verticale la ou les valeurs interdites (à la place du zéro).
- Pour résoudre l'inéquation, on exclura toujours les valeurs interdites par un « crochet extérieur ».

IV. Autres exemples

a) $f(x) = (2x^2 + 1)(2x - 8)(-x + 3)$

$2x^2 + 1 = 0$	$2x - 8 = 0$	$-x + 3 = 0$
$x^2 = -\frac{1}{2}$	$2x = 8$	$-x = -3$
impossible	$x = \frac{8}{2}$	$x = 3$
	$x = 4$	

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$	
$2x^2+1$		+		+		+		toujours positif
$2x-8$		−		−	0	+		m=2>0
$-x+3$		+	0	−		−		m=-1<0
$f(x)$		−	0	+	0	−		

Attention : $x \mapsto 2x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine

b) $f(x) = \frac{5-x}{x^2(3x-6)}$

	Valeurs interdites :	
$5 - x = 0$	$x^2 = 0$	$3x - 6 = 0$
$-x = -5$	$x = 0$	$3x = 6$
$x = 5$		$x = \frac{6}{3}$
		$x = 2$

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$	
$5-x$		+		+		+	0	−		m=-1<0
x^2		+	0	+		+		+		carré toujours positif
$3x-6$		−		−	0	+		+		m=3>0
$f(x)$		−	‖	−	‖	+	0	−		

c) $f(x) = \frac{-10(3x+7)}{1-6x}$

$3x + 7 = 0$	Valeur interdite :
$3x = -7$	$1 - 6x = 0$
$x = -\frac{7}{3}$	$-6x = -1$
	$x = \frac{-1}{-6}$
	$x = \frac{1}{6}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$	
-10		−		−		−		
$3x+7$		−	0	+		+		m=3>0
$1-6x$		+		+	0	−		m=-6<0
$f(x)$		+	0	−	‖	+		

Attention : Il ne faut pas oublier le -10 dans le tableau !