Chapitre : Variables aléatoires discrètes et loi de probabilité

Compétence : Variable aléatoire

Exercice 1 :Variable aléatoire

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre comme valeur : 0 ; 1 ; 2 et 3.

2. Décrire les évènements « $X = 2$ » et « $X \geq 1$ ».

« $X = 2$ » signifie « on tire exactement 2 boules vertes ».
« $X \geq 1$ » signifie « on tire au moins 1 boule verte ».

Exercice 2 : Variable aléatoire

On lance quatre dés à six faces numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de faces numérotées « 6 » obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre comme valeur : 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

2. a. Décrire les évènements « $X \leq 2$ » et « $X > 3$ ».

« $X \leq 2$ » signifie « on obtientau plus 2 faces 6 ».
« $X > 3$ » signifie « on obtient4faces 6 ».

b. Que peut-on dire de ces événements ?

Ces événements sont incompatibles (disjoints).
En effet $P\big((X \leq 2) \cap (X > 3)\big) = 0$.

Exercice 3 : Variable aléatoire

On place dans un sac six cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase :

Le	hasard	fait	bien	les	choses

On tire un carton au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de voyelles du mot tiré.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre comme valeur : 1 et 2

2. Décrire l'évènement « $X = 2$ ».

« $X = 2$ » signifie « Le mot tiré a exactement 2 voyelles».

Exercice 4 :Variable aléatoire

Un sac contient une boule marquée « 2 » et une boule marquée « 3 ». On tire une boule, on note son numéro, on la remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le produit des numéros obtenus.

1. a. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience.

$$\Omega = \{(2\,;2); (2\,;3); (3\,;2); (3\,;3)\}$$

b. En déduire les valeurs prises par X ?

	2	**3**
2	**4**	**6**
3	**6**	**9**

X peut prendre les valeurs 4, 6et 9.

2. Quel sont les événements de Ω correspondant à l'événement « $X = 6$ » ?

Les issues $(2\,;3)$et $(3\,;2)$ correspondent à l'événement « $X = 6$ ».

Compétence : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exercice 5 :

On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 7, dont voici la loi de probabilité :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,223	0,335	0,251	0,126	0,047	0,014	0,003	0,001	1

Calculer :

a) $P(X = 0)$ =0,223 (par lecture directe du tableau)

b) $P(X = 5)$ = 0,014 (idem)

c) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) = 0.003 + 0.001 = 0.004$

d) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.223 + 0.335 = 0.558$

e) $P(X < 7) = 1 - P(X = 7) = 1 - 0.001 = 0.999$ (on peut aussi additionner les valeurs correspondantes de 0 à 6 mais c'est beaucoup plus long…)

f) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.126 + 0.047 + 0.014 = 0.187$

g) $P(3 < X < 5) = P(X = 4) = 0.047$

h) $P(X \leq 7) = 1$ (toutes les valeurs prises par X sont inférieures ou égale à 7)

i) $P(X = 8) = 0$ (impossible)

Exercice 6 :

On considère l'expérience suivante : on lance 10 fois successivement une pièce, et on appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on obtient « FACE ».

1) Traduire chaque phrase par une expression du type $P(X = 2)$ ou $P(X \leq 1)$…

a) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X = 4)}$

b) La probabilité d'obtenir au moins 2 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \geq 2)}$

c) La probabilité d'obtenir plus de 7 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \geq 7)}$

d) La probabilité d'obtenir 3, 4 ou 5 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(3 \leq X \leq 5)}$

e) La probabilité d'obtenir moins de 3 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \leq 3)}$

f) La probabilité d'obtenir au plus 5 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \leq 5)}$

g) La probabilité d'obtenir au moins la moitié des lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \geq 5)}$

h) La probabilité d'obtenir plus de 1 lancer « FACE »

$\boldsymbol{P(X \geq 1)}$

i) La probabilité d'obtenir 5 à 9 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(5 \leq X \leq 9)}$

j) La probabilité d'obtenir au plus 8 lancers « FACE »

$\boldsymbol{P(X \leq 8)}$

2) On admet que la loi de probabilité de l'expérience est la suivante :

Nombre de « FACE » : X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X = 7) = \mathbf{0,117}$ **(lecture directe)**

b) $P(X \geq 8) = \boldsymbol{P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,044 + 0,010 + 0,001 = 0,055}$

c) $P(X \leq 3) = \boldsymbol{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,001 + 0,010 + 0,044 + 0,117 = 0,172}$

d) $P(X = 2) = \mathbf{0,044}$ **(lecture directe)**

e) $P(X > 7) = \boldsymbol{P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = 0,055}$

Exercice 7 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une urne contient cinq boules : deux noires et trois blanches. On tire une boule. On gagne 2€ si la boule est blanche et on perd 1€ si elle est noire.

1. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une boule noire » ?

$\boldsymbol{N}$: « on tire une boule noire » donc $\boldsymbol{P(N) = \frac{2}{5}}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Déterminer $P(X = -1)$et $P(X = 2)$.

$\boldsymbol{P(X = -1) = P(N) = \frac{2}{5}}$

$\boldsymbol{P(X = 2) = P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}}$

Exercice 8 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Roméo offre à Juliette un bouquet de 25 roses constitué de 10 fleurs ayant 28 pétales, de 8 fleurs ayant 31 pétales et de 7 fleurs ayant 34 pétales. Juliette tire au hasard une rose du bouquet.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de pétales que possède la fleur.

1. Déterminer $P(X = 31)$.

$\boldsymbol{P(X = 31) = \frac{8}{25}}$

2. Décrire l'événement « $X \geq 30$ », puis déterminer $P(X \geq 30)$.

L'événement « $\boldsymbol{X \geq 30}$ » signifie que les fleurs ont plus de 30 pétales.

$$\boldsymbol{P(X \geq 30) = P(X = 31) + P(X = 34) = \frac{8}{25} + \frac{7}{25} = \frac{15}{25}}$$

Exercice 9 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On lance deux dés tétraédriques, dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. On note les résultats sous forme de couples d'obtention équiprobable

- Si le premier nombre obtenu est strictement inférieur au deuxième, on les additionne.
- Sinon, on effectue la différence des deux.

On note R la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre obtenu par le calcul.

1. Donner le nombre de couples possibles.

$$\boldsymbol{\Omega = \{(x;y) | 1 \leq x \leq 4 \text{ } et \text{ } 1 \leq y \leq 4\}}$$

Il y a $\boldsymbol{4 \times 4 = 16}$ couples possibles.

2. Donner la loi de probabilité de R.

On fait d'abord un tableau à double entrée.

Dé1 \ Dé2	1	2	3	4
1	0	3	4	5
2	1	0	5	6
3	2	1	0	7
4	3	2	1	0

Loi de probabilité :

r_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(R = x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Exercice 10 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Un jeu de 52 cartes est composé de douze "figures" : Valet, dame ou roi. Elles valent chacune un point. Les quatre AS valent chacun cinq points et les cartes restantes ne valent aucun point. On tire une carte au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	0	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{36}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{4}{52}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.

$$E(X) = 0 \times \frac{36}{52} + 1 \times \frac{12}{52} + 5 \times \frac{4}{52} = \frac{32}{52} \approx 0,62$$

Pour un très grand nombre de cartes tirées, on a en moyenne 0,62 point.

3. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Or $E(X^2) = 0^2 \times \frac{36}{52} + 1^2 \times \frac{12}{52} + 5^2 \times \frac{4}{52} = \frac{112}{52} \approx 2,15$

$$V(x) = \frac{112}{52} - \left(\frac{32}{52}\right)^2 \approx 1,78$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)} \approx 1,33$$

Exercice 11 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmiles 120 billets, 3 donnent droit à quatre places gratuites, 6 donnent droit à deux places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite, et les autres billets ne gagnent rien.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe le nombre de places gratuites.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{69}{120}$	$\frac{42}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{3}{120}$

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat

$$E(X) = 0 \times \frac{69}{120} + 1 \times \frac{42}{120} + 2 \times \frac{6}{120} + 4 \times \frac{3}{120} = \frac{66}{120} = 0,55$$

Pour un très grand nombre de séance de cinéma de ce type, un billet de loterie donne en moyenne 0,55 place gratuite.

Compétences : Utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire et Espérance mathématique et variance

Exercice 12 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0,5	1	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,15	0,05	a	0,32	0,18

1. Déterminer la valeur de a.

$\boldsymbol{a = 1 - (0,2 + 0,15 + 0,05 + 0,32 + 0,18)1 - 0.9 = 0.1}$

2. a. Calculer $P(X > 3)$.

$\boldsymbol{P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5)0,32 + 0,18 = 0,5}$

b. Calculer $P(X \geq 4)$.

$\boldsymbol{P(X \geq 4) = P(X > 3) = 0,5}$

c. Calculer $P(X \leq 4)$.

$\boldsymbol{P(X \leq 4) = P(X = -2) + P(X = 0,5) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4)}$
$\boldsymbol{= 0,2 + 0,15 + 0,05 + 0,1 + 0,32 = 0,82.}$
(Ou $\boldsymbol{P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0,18 = 0,82}$)

3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(X) = -2 \times 0,2 + 0,5 \times 0,15 + 1 \times 0,05 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,32 + 5 \times 0,18 = 2,205}$
En répétant un grand nombre de fois l'expérience, on obtient en moyenne $\boldsymbol{2,205}$.

4. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$
Or $\boldsymbol{E(X^2) = (-2)^2 \times 0,2 + 0,5^2 \times 0,15 + 1^2 \times 0,05 + 3^2 \times 0,1 + 4^2 \times 0,32 + 5^2 \times 0,18 = 11,4075}$
$\boldsymbol{V(X) = 11,4075 - (2,205)^2 = 6,545}$
$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,56.}$

Exercice 13 :

Malik télécharge au plus cinq jeux par mois sur son smartphone.
On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre k de jeux téléchargés.

La loi N est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4	5
$P(N = k)$	0,13	0,28	...	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante.

$\boldsymbol{P(N = 2) = 1 - (0,13 + 0,28 + 0,07 + 0,3 + 0,1) = 1 - 0,88 = 0,12}$

2. Quelle est la probabilité qu'il télécharge :

a. au moins 3 jeux ?

$\boldsymbol{P(N \geq 3) = 0,07 + 0,3 + 0,1 = 0,47}$

b. au plus 4 jeux ?

$\boldsymbol{P(N \leq 4) = 1 - P(N = 5) = 1 - 0,1 = 0,9}$

3. Calculer l'espérance mathématique de N. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(N) = 0 \times 0,13 + 1 \times 0,28 + 2 \times 0,12 + \times 3 \times 0,07 + 4 \times 0,3 + 5 \times 0,1 = 2,43}$
Après un très grand nombre de téléchargement, il télécharge en moyenne 2,43 jeux par mois.

Exercice 14 :

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20€. Pour en assurer la promotion, chaque client à l'entrée lance un dé cubique non truqué. Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ; si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif; dans les autres cas le client paie plein tarif.
Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat du lancer de dés, le prix payé par le client.

1. Détermine la loi de probabilité de X.

k	0	10	20
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

$\boldsymbol{E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{4}{6} = \frac{90}{6} = 15}$
$\boldsymbol{V(X) = \cdots = \frac{175}{3} \approx 58,3}$ **et** $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(x)} \approx 7,64}$

3. Que peut-on en déduire si la salle, composée de 2000 places, est pleine ?

Pour un très grand nombre de spectacle de ce genre, la recette moyenne sera de $\boldsymbol{15 \times 2000 = 30000}$€.

Exercice 15 :

Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une. Si celle-ci est verte, le joueur gagne 50€ ; si elle est bleue, rien ne se passe, si elle est rouge, le joueur perd a€.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.
Calculer a pour que le jeu soit équitable.

On cherche d'abord la loi de probabilité :

k	0	50	a
$P(X=k)$	$\frac{10}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$

Or $E(X)=0\times\frac{10}{20}+50\times\frac{2}{20}+\frac{8a}{20}=5+\frac{2}{5}a$

Ainsi

$E(X)=0 \Leftrightarrow 5+\frac{2}{5}a=0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}a=-5 \Leftrightarrow a=-\frac{25}{2}=-12,5€$

Exercice 16 :

Une entreprise d'électronique fabriquant des multimètres constate lors d'un test de qualité que 8 % des appareils fabriqués présentent au moins un défaut D_1, 15 % présentent au moins un défaut D_2 et 5 % présentent les deux défauts. On choisit au hasard un appareil dans la production. Tous les tirages sont équiprobables.

1) a) Compléter le tableau ci-dessous par les pourcentages correspondants

	appareils présentant le défaut D_2	appareils ne présentant pas le défaut D_2	Total
appareils présentant le défaut D_1	5 %	3 %	8 %
appareils ne présentant pas le défaut D_1	10 %	82 %	92 %
Total	15 %	85 %	100 %

b) Quelle est la probabilité P_1 que le multimètre présente un et un seul défaut ?

$P_1=\frac{3}{100}+\frac{10}{100}=\frac{13}{100}=0,13$

c) Quelle est la probabilité P_2 qu'il ne présente aucun défaut ?

$P_2=\frac{82}{100}=0,82$

2) Les appareils présentant deux défauts sont mis au rebut. Les appareils présentant un seul défaut sont réparés.
Un appareil sera commercialisé s'il ne présente aucun défaut ou s'il est réparé.

Le bénéfice réalisé par l'entreprise sur un multimètre commercialisé est de 500 € s'il
ne nécessite pas de réparation, de 300 € s'il nécessite une réparation. La perte engendrée
par un appareil mis au rebut est de 300 € soit un « bénéfice » de – 300 €.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe le bénéfice, positif ou négatif, à tout appareil pris au hasard dans la production.

- $P\ (X=500)=P_2=0,82$ **pour les multimètres sans défaut.**
- $P\ (X=300)=P_1=0,13$ **pour les multimètres présentant un seul défaut.**
- $P\ (X=-300)=0,05$ **car il y a 5 % de multimètres qui présentent les 2 défauts, donc qui seront mis au rebut.**

x_i	– 300	300	500
p_i	0,05	0,13	0,82

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
Donner une interprétation pour E(X).

$E(X)=-300\times0,05+300\times0,13+500\times0,82$
$E(X)=434€$
Si l'entreprise produit un très grand nombre de multimètres, elle peut espérer réaliser un bénéfice moyen de 434 euros par multimètre fabriqué.

c) Calculer une valeur approchée au centième près de l'écart type σ (X).

$\sigma(X)\approx 181,23$ **(à la calculatrice mode STAT)**

Compétences : Propriétés de l'espérance et de la variance (hors programme)

Exercice 17 :

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique -15 et Y la variable aléatoire définie par : $Y = 3X - 18$.
Déterminer l'espérance de Y.

$\boldsymbol{E(Y) = 3E(X) - 18 = 3 \times (-15) - 18 = -63}$

Exercice 18 :

La variable aléatoire X a pour espérance mathématique 5 et pour variance 4.
Soit Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = -2X$et $Z = 4X - 7$.
Calculer $E(Y), V(Y)$et $E(Z)$.

$\boldsymbol{E(Y) = -2E(X) = -2 \times 5 = -10}$
$\boldsymbol{V(Y) = a^2V(X) = (-2)^2 \times 4 = 16}$
$\boldsymbol{E(Z) = 4E(X) - 7 = 4 \times 5 - 7 = 13}$

Exercice 19 :

On note X la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe le nombre de smartphones vendus dans un magasin donné. Une étude montre que l'espérance mathématique de X est 120 et son écart-type est 12.
Le prix d'un smartphone est de 250€
Soit R la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe la recette du magasin. Déterminer $E(R)$et $V(R)$.

$\boldsymbol{R = 250X}$
$\boldsymbol{E(R) = 250E(X) = 250 \times 120 = 30000€}$
$\boldsymbol{V(R) = 250^2V(X) = 250^2 \times 12^2 = 9000000}$
Car $\boldsymbol{\sigma(X) = 12}$**donc** $\boldsymbol{V(X) = \sigma^2(X) = 12^2 = 144.}$

Exercice 20 :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre d'articles fabriqués par une entreprise. On suppose que $E(X) = 1000$.
Le coût de fabrication de chaque article est de 50€ et les frais annuels de fabrication s'élèvent à 10000€.
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le coût total de fabrication. Déterminer $E(Y)$.

$\boldsymbol{Y = 10000 + 50X}$
$\boldsymbol{E(Y) = 10000 + 50E(X)}$
$\boldsymbol{E(Y) = 10000 + 50000}$
$\boldsymbol{E(Y) = 60000}$

Exercice 21 :

On dispose de deux boîtes contenant chacune des boules vertes, des boules bleues, et des boules rouges, indiscernables au toucher. La répartition des couleurs dans chaque boîte est différente.

Dans la première boite, 10% des boules sont vertes et 70% sont rouges.

Dans la deuxième boite, 30% des boules sont bleues et 40% sont rouges.

On tire au hasard une boule dans la première boîte puis une boule dans la deuxième boîte.

On appelle :

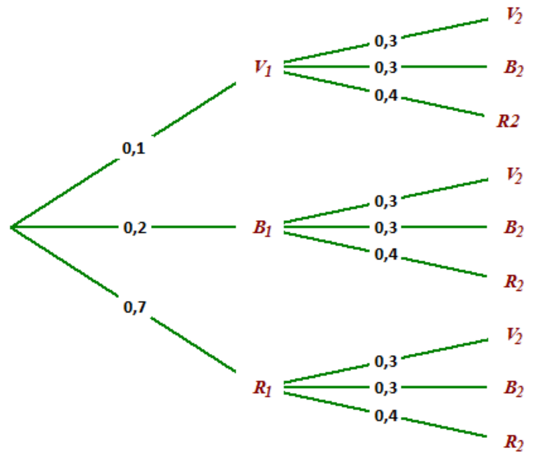
- V_1 l'événement " la 1ère boule tirée est verte"
- V_2 l'événement " la deuxième boule est verte"

On définit de la même manière les événements R_1 et R_2 correspondant au tirage d'une boule rouge, les événements B_1 et B_2 correspondant au tirage d'une boule bleue.

1) a) Calculer la probabilité $p(B_1)$ de l'événement B_1.

$\boldsymbol{p(B_1) + p(V_1) + p(R_1) = 1}$
$\boldsymbol{p(B_1) = 1 - p(R_1) - p(V_1)}$
$\boldsymbol{p(B_1) = 1 - 0,7 - 0,1 = 0,2}$

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.



2) a) Définir l'événement $V_1 \cap R_2$ à l'aide d'une phrase, puis calculer sa probabilité.

$V_1 \cap R_2$ est l'événement " la première boule tirée est verte et la deuxième est rouge"
ou " on choisit une boule verte dans la boite 1 et une rouge dans la boite 2 "
$\boldsymbol{p(V_1 \cap R_2) = 0,1 \times 0,4 = 0,04}$

b) Calculer la probabilité que les deux boules soient vertes.

$\boldsymbol{p(V_1 \cap V_2) = 0,1 \times 0,3 = 0,03}$

c) Justifier que $p(R_2) = 0{,}4$.

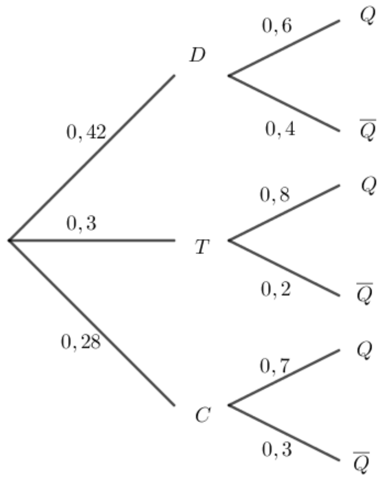
On repère les trois chemins qui mènent à R_2
$\boldsymbol{p(R_2) = p(V_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap R_2)}$
$\boldsymbol{p(R_2) = 0,1 \times 0,4 + 0,2 \times 0,4 + 0,7 \times 0,4}$
$\boldsymbol{p(R_2) = 0,4}$

3) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur.

Soit A l'événement : «les deux boules tirées soient de la même couleur ».
$\boldsymbol{p(A) = p(V_1 \cap V_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2)}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,03 + 0,2 \times 0,3 + 0,7 \times 0,4}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,03 + 0,06 + 0,28}$
$\boldsymbol{p(A) = 0,37}$

Exercice 22 :

Un prince charmant se doit de partir à l'aventure et d'affronter des périls.
Dans 42 % des cas, il affronte un Dragon, dans 30 % ce sont des Trolls et dans les autres cas, c'est le Chevalier noir.
Lorsqu'il affronte un Dragon, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,6.
Tuer un dragon lui rapporte 1 000 pièces d'or
Lorsqu'il affronte un Troll, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,8.
Tuer un troll lui rapporte 500 pièces d'or.
Lorsqu'il affronte un chevalier noir, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,7.
Tuer un chevalier noir lui rapporte 300 pièces d'or.



1) Compléter l'arbre pondéré ci contre.

2) Un prince part à l'aventure. Quelle est la probabilité...

i. qu'il gagne 1 000 pièces d'or ?

$\boldsymbol{p(D \cap Q) = 0,42 \times 0,6 = 0,252}$

ii. qu'il gagne des pièces d'or ?

Le prince gagne des pièces d'or s'il réussit sa quête :
$\boldsymbol{p(Q) = 0,42 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 + 0,28 \times 0,7 = 0,688}$

iii. qu'il revienne bredouille (pour autant qu'il revienne) ?

$\boldsymbol{p(\overline{Q}) = 1 - p(Q) = 1 - 0,688 = 0,312}$

3) On appelle G la variable aléatoire représentant le gain en pièces d'or du prince.
Déterminer la loi de probabilité de G.

Gains (en pièces d'or)	1 000	500	300	0
Probabilité	**0,252**	**0,24**	**0,196**	**0,312**

$\boldsymbol{p(G = 1000) = p(D \cap Q) = 0,42 \times 0,6 = 0,252}$
$\boldsymbol{p(G = 500) = p(T \cap Q) = 0,3 \times 0,8 = 0,24}$
$\boldsymbol{p(G = 300) = p(C \cap Q) = 0,28 \times 0,7 = 0,196}$
$\boldsymbol{p(G = 0) = p(\overline{Q}) = 0,312}$

4) Combien un prince gagne-t-il de pièces d'or en moyenne pour une quête ?

On calcule l'espérance $\boldsymbol{E(G)}$
$\boldsymbol{E(G) = 1000 \times 0,252 + 500 \times 0,24 + 300 \times 0,196 + 0 \times 0,312 = 430,8}$
En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le prince gagne en moyenne 430,8 pièces d'or .

Exercice 23 :

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n°1 : voyage en 1ère classe et hôtel pour un coût de 150€
- la formule n°2 : voyage en 2ème classe et hôtel pour un coût de 100€.

40% des employés inscrits choisissent la formule n°1

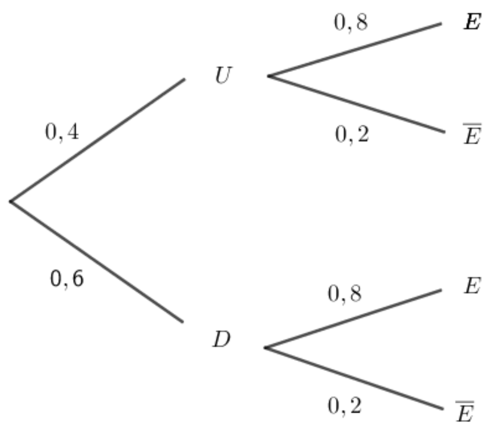
Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30€.

Indépendamment de la formule choisie, 80% des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.

On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note les évènements suivants :

- U : " l'employé inscrit choisit la formule n°1"
- D : " l'employé inscrit choisit la formule n°2"
- E : " l'employé inscrit choisit l'excursion facultative"

1) Construire l'arbre de probabilités correspondant à la situation.



2) Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n°2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.

$\boldsymbol{p(D \cap E) = 0,6 \times 0,8 = 0,48}$

3) Soit C le coût total du voyage (excursion comprise)

a) Déterminer les valeurs possibles que peut prendre C.

C prend les valeurs : 100 ; 130; 150 et 180
En effet $C = 100$ pour un voyage en 2ème classe sans excursion
$C = 130$ pour un voyage en 2ème classe avec excursion
$C = 150$ pour un voyage en 1ère classe sans excursion
$C = 180$ pour un voyage en 1ère classe avec excursion

b) Déterminer la loi de probabilité de C.

$\boldsymbol{p(C = 100) = p(D \cap \overline{E}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12}$
$\boldsymbol{p(C = 130) = p(D \cap E) = 0,6 \times 0,8 = 0,48}$
$\boldsymbol{p(C = 150) = p(U \cap \overline{E}) = 0,4 \times 0,2 = 0,08}$
$\boldsymbol{p(C = 180) = p(U \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32}$

D'où la loi de probabilité de C :

$\boldsymbol{k}$	**100**	**130**	**150**	**180**
$\boldsymbol{p(C = k)}$	**0,12**	**0,48**	**0,08**	**0,32**

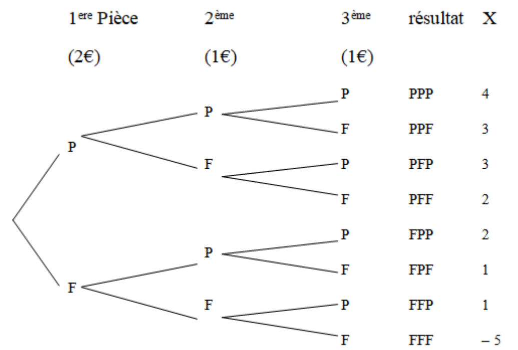
c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

$\boldsymbol{E(C) = 100 \times 0,12 + 130 \times 0,48 + 150 \times 0,08 + 180 \times 0,32}$
$\boldsymbol{E(C) = 144}$
En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le coût moyen du voyage est 144€

Exercice 24 :

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie :
une de2 euros et deux de 1 euro. Un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.

1) Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles.
   Combien y a-t-il de résultats possibles ?



Il y a 8 résultats possibles.

2) Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros, sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros. Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.

a)Quelles valeurs peut prendre X ?

X prend comme valeur -5 ; 1 ; 2 ; 3ou 4.

b) Donner la loi de probabilité de X.

Gain X	– 5	1	2	3	4
probabilité p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

c)Calculer la probabilité de l'évènement « X $\leq$2 ».

$$\boldsymbol{P(X \leq 2) = P(X = -5) + P(X = 1) + P(X = 2)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{5}{8}}$$

3)a)Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

$$\boldsymbol{E(X) = -5 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{11}{8}}$$

b) Ce jeu est-il équitable ?

Le jeu n'est pas équitable car $E(X) \neq 0$.
Remarque : Le jeu est favorable au joueur, car E(X) > 0.

c)Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

On note a la somme recherchée (on va remplacer le -5 par a)
Le jeu est équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow a \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{a}{8} + \frac{16}{8} = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow a + 16 = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow a = -16}$$

Le jeu sera équitable si le joueur perd 16€ quand il obtient face pour les 3 pièces.

Exercice 25 :

Un jeu consiste à tirer une boule d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

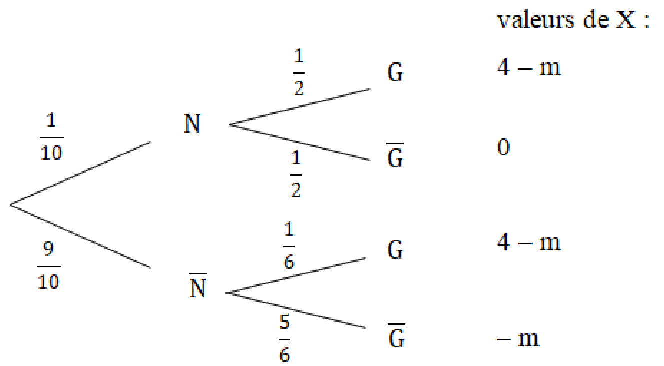
- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire est tirée » et G l'évènement « le joueur gagne ».

1) a) Déterminer la probabilité de l'évènement N.

$\boldsymbol{P(N) = \frac{1}{10}}$ **car il y a une boule noire pour 10 boules.**

b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{1}{5}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.



N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers ainsi d'après la formule des probabilités totales :

$$\boldsymbol{P(G) = P(N \cap G) + P(\overline{N} \cap G)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = P(N)P_N(G) + P(\overline{N})P_{\overline{N}}(G)}$$

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{1}{5}}$$

c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

$$\boldsymbol{P_{\overline{G}}(N) = \frac{P(\overline{G} \cap N)}{P(\overline{G})} = \frac{P(N) \times P_N(\overline{G})}{1 - P(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{16}}$$

2) Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

x_i	$-m$	0	$4-m$
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$

b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.

$$\boldsymbol{E(X) = -m \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{20} + (4 - m)\frac{1}{5} = \frac{-19m + 16}{20}}$$

c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable $\boldsymbol{\Leftrightarrow E(X) = 0}$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{-19m+16}{20} = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -19m + 16 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -19m = -16}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow m = \frac{16}{19}}$$

La valeur de m qui rend le jeu équitable est donc $\boldsymbol{m = \frac{16}{19} \approx 0,84}$ €

Exercice 26 :

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 %est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

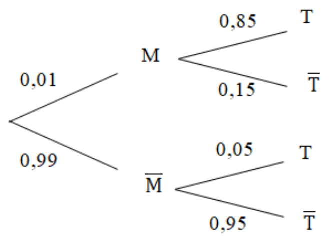
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2)Un animal est choisi au hasard.

a)Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

$P(M \cap T) = P(M)P_M(T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$

b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$P(T) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05$

$P(T) = 0,058$

La probabilité que son test soit positif est bien de 0,058.

3)Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$

4)Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le coût à engager par animal subissant le test.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

X_i	0	100	1000
P_i	0,9405	0,058	0,0015

b)Calculer l'espérance de X, et interpréter dans le contexte de l'exercice.

$E(X) = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$

Cela signifie que si l'éleveur a très un grand nombre de bêtes, en moyenne, cette maladie lui coûtera 7,3 € par animal.

c)Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

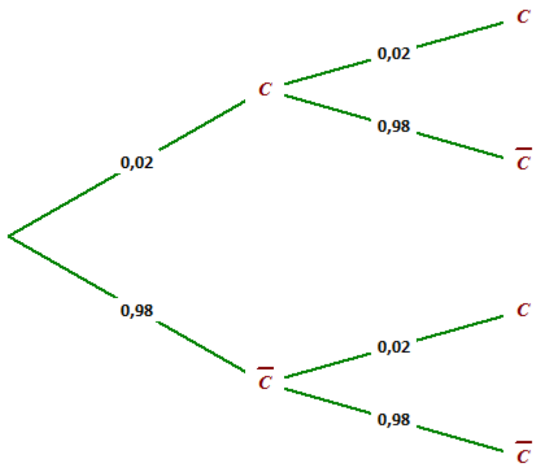
Pour 200 bêtes, on peut donc estimer que l'éleveur doit prévoir : $200 \times 7,3 = 1460$ €.

Compétences : Arbres pondérés et expériences à plusieurs épreuves

Exercice 27 :

Sur un VTT, la probabilité de crevaison de la roue avant et celle de la crevaison de la roue arrière sont égales à 0,02. On suppose que la crevaison d'un pneu n'a aucune influence sur l'autre pneu. Construire un arbre pondéré pour déterminer :

On note C l'événement " le pneu est crevé" de probabilité 0,02.
La situation est représentée par :



1) la probabilité d'avoir deux pneus crevés

$\boldsymbol{p(CC) = 0,02 \times 0,02 = 0,0004}$

2) la probabilité de ne pas avoir de crevaison.

$\boldsymbol{p(\overline{C}\overline{C}) = 0,98 \times 0,98 = 0,9604}$

<u>Exercice 28 :</u>

Une boite opaque contient 20 jetons : 3 rouges, 7 jaunes et 10 bleus.

On choisit au hasard un jeton et on appelle succès " obtenir un jeton rouge"

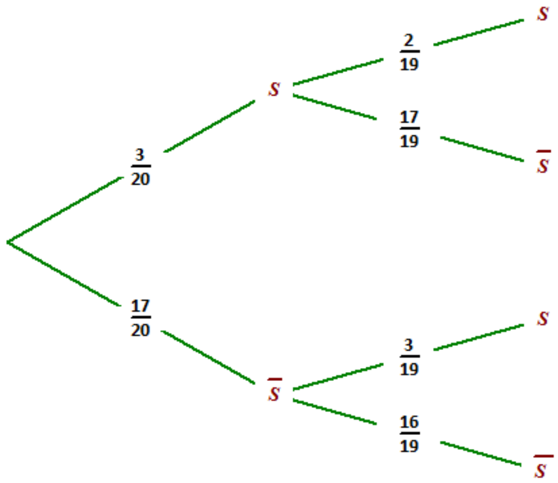
1) On ne remet pas le jeton tiré dans l'urne et on tire à nouveau un jeton.

a) Les deux épreuves sont-elles indépendantes ? Justifier.

Avant le tirage du deuxième jeton, la composition de la boite change en fonction de la couleur du 1er jeton tiré. Les deux épreuves ne sont pas indépendantes.

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.

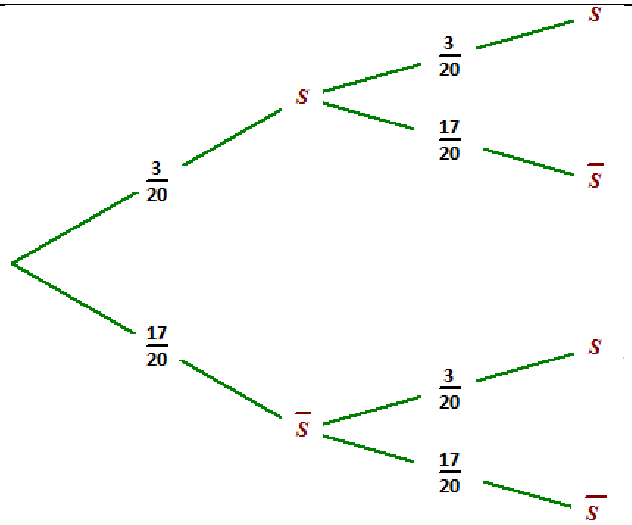
On note S le succès ("obtenir un jeton rouge") de probabilité $p = \frac{3}{20}$



c) Calculer la probabilité d'avoir exactement un jeton rouge.

$$p = p(S\overline{S}) + p(\overline{S}S) = \frac{3}{20} \times \frac{17}{19} + \frac{17}{20} \times \frac{3}{19} = \frac{51}{190}$$

2) On remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton. Représenter ce double tirage par un arbre pondéré et calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès.



1ère méthode :

On repère les trois chemins pour obtenir au moins un succès (SS ; $S\overline{S}$ et $\overline{S}S$ **)**

$$p = \frac{3}{20} \times \frac{3}{20} + \frac{3}{20} \times \frac{17}{20} + \frac{17}{20} \times \frac{3}{20} = \frac{111}{400}$$

2ème méthode :

"Obtenir au moins un succès" est le contraire de l'événement " obtenir 0 succès"

donc la probabilité d'avoir au moins un succès est :

$$p = 1 - p(\overline{S}\,\overline{S}) = 1 - \frac{17}{20} \times \frac{17}{20} = \frac{111}{400}$$

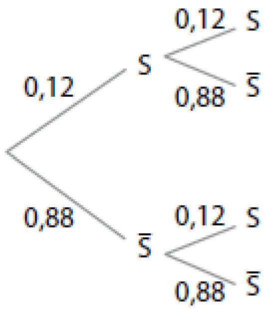
Compétence : Schéma de Bernoulli

Exercice 29 : Représenter un schéma de Bernoulli

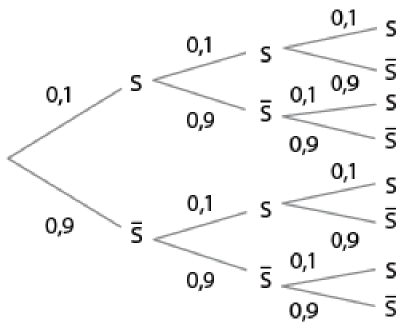
1. Proposer une expérience à deux issues dont l'une appelée « succès » a pour probabilité 0,25.

- **On choisit au hasard, dans un jeu de 32 cartes, un cœur. La probabilité d'avoir un cœur est $p = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,$ et celle de ne pas en avoir $\frac{3}{4} = 0,75$.**
- **On choisit au hasard, dans un QCM, une réponse parmi 4 propositions (une seule est bonne). La probabilité d'avoir la bonne réponse est $p = \frac{1}{4}$.**

2. Représenter un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètre 2 et 0,12

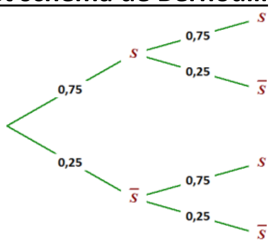


3. Représenter un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètre 3 et 0,1



Exercice 30 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

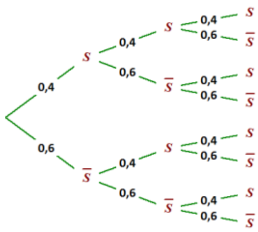
L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.
Donner les paramètres de ce schéma de Bernoulli.



$\boxed{n = 2 \text{ et } p = 0,75.}$

Exercice 31 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.
Donner les paramètres de ce schéma de Bernoulli.

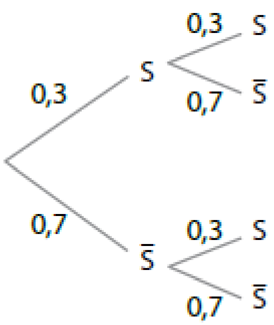


$\boxed{n = 3 \text{ et } p = 0,4.}$

Exercice 32 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie truquée pour laquelle la probabilité de tomber sur « PILE » est 0,3.
Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

On note S : « Tomber sur PILE ».



Exercice 33 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

On lance six fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
A chaque lancer, on note S l'issue « FACE » qu'on appelle « succès ».
Préciser les paramètres de ce schéma de Bernoulli.

Les paramètres de ce schéma sont $n = 6$ et $p = 0,5$.

Exercice 34 : Schéma de Bernoulli et variable aléatoire.

1. On considère le schéma de Bernoulli de paramètres 2 et 0,1. On note X le nombre de succès obtenus.
   Préciser les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

X prend les valeurs 0 ; 1 et 2.

2. On considère le schéma de Bernoulli de paramètres 4 et 0,7. On note X le nombre de succès obtenus.
   Préciser les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

Exercice 35 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

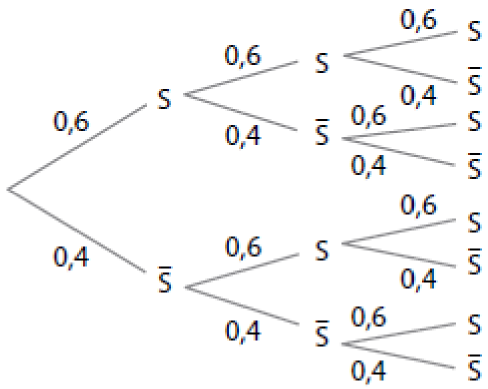
Une urne contient trois boules blanches et deux boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne.

On note S l'évènement « Obtenir une boule blanche ».

1. Déterminer la probabilité de l'événement S.

$\boldsymbol{P(S) = \frac{3}{5} = 0,6.}$

2. On répète trois fois l'expérience décrite ci-dessus. Représenter le schéma de Bernoulli relatif à cette épreuve à l'aide d'un arbre pondéré.



Exercice 36 :

Marie est employée par une plate forme téléphonique. Elle a remarqué qu'elle traitait la demande d'un client en moins de 2 minutes avec une probabilité de 0,3 et cela indépendamment des clients précédents.

a) Un client appelle. Montrer que la situation peut se modéliser par une épreuve de Bernoulli. Présenter la loi de Bernoulli dans un tableau.

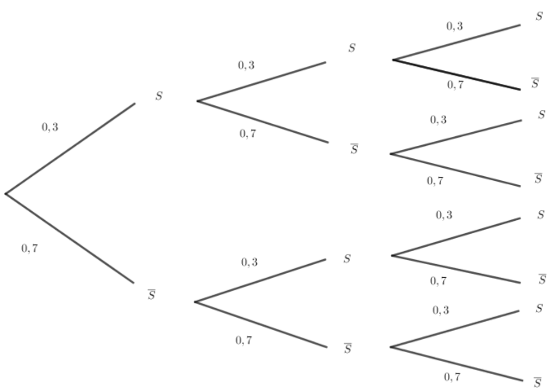
On considère l'épreuve de Bernoulli « Marie traite la demande d'un client » ayant deux issues :

- **Le succès S : « la demande est traitée en moins de deux minutes » de probabilité $\boldsymbol{p = 0,3}$.**
- **L'échec $\overline{S}$: « la demande est traitée en plus de deux minutes » de probabilité $\boldsymbol{q = 1 - p = 0,7}$**

La loi de Bernoulli est :

issue	Succès	Echec
Probabilité	0,3	0,7

b) Trois clients appellent successivement.
On traduit la situation par un arbre pondéré.
On note S le succès.
Compléter l'arbre pondéré ci contre.



On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès c'est-à-dire le nombre de demandes traitées en moins de deux minutes.

c) Calculer la probabilité de l'événement A : " Marie a traité chacune des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(A) = p(X = 4) = p(SSS) = 0,3^3 = 0,027}$

d) Calculer la probabilité de l'événement B : " Marie a traité exactement une des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(B) = p(X = 1) = p(S\overline{S}\overline{S}) + p(\overline{S}S\overline{S}) + p(\overline{S}\overline{S}S)}$
$\boldsymbol{p(B) = p(X = 1) = 0,3 \times 0,7 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,7 \times 0,3}$
$\boldsymbol{p(B) = p(X = 1) = 0,441}$

e) Calculer la probabilité de l'événement C : " Marie n'a traité aucune des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(C) = p(X = 0) = p(\overline{S}\overline{S}\overline{S}) = 0,7^3 = 0,343}$

f) Calculer la probabilité de l'événement D : " Marie a traité au moins une des trois demandes en moins de 2 minutes".

$\boldsymbol{p(D) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(C) = 1 - 0,7^3 = 0,657}$

Exercice 37 :

Pour vendre des produits d'entretien bio par téléphone, un commercial contacte trois clients importants. Le comportement d'un client est indépendant de celui des autres et la probabilité qu'un client soit intéressé par l'offre est de 0,2.

On note X la variable aléatoire associée au nombre de clients intéressés sur les trois individus contactés.

1) Préciser l'épreuve de Bernoulli répétée en indiquant la probabilité du succès S :" le client est intéressé" .

Pour la suite, on notera E l'échec de cette épreuve de Bernoulli.

Présenter la loi de Bernoulli dans un tableau.

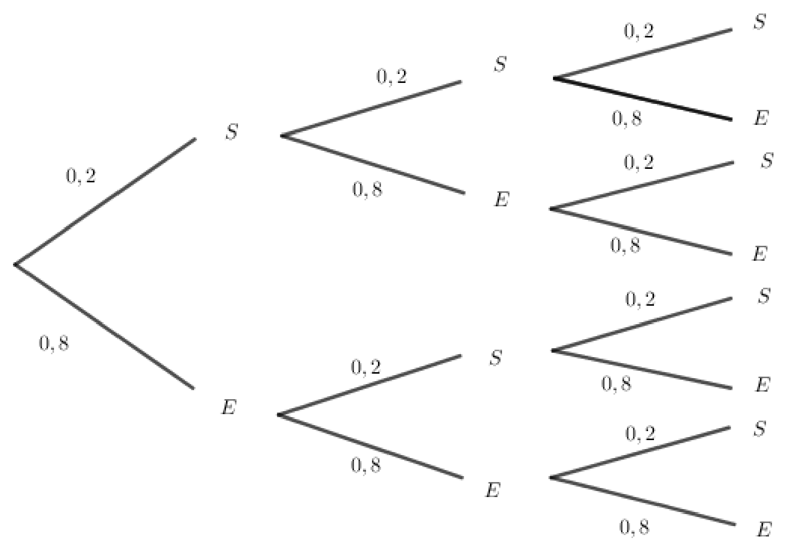
On considère l'épreuve de Bernoulli « un commercial contacte un client » ayant deux issues :

- **Le succès S : « le client est intéressé» de probabilité $p = 0,2$.**
- **L'échec E : « le client n'est pas intéressé » de probabilité $q = 1 - p = 0,8$**

La loi de Bernoulli est :

$issue$	Succès	Echec
$Probabilité$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{0,8}$

2) Représenter la situation par un arbre de probabilités.



3) Calculer la probabilité des listes de réponses suivantes :

a) S - S - E　　　　b) E - S - S　　　　c) S - E - S

a) La probabilité de S - S - E est : $p = 0,2 \times 0,2 \times 0,8 =$ 0,032

b) La probabilité de E - S - S est : $p = 0,8 \times 0,2 \times 0,2 =$ 0,032

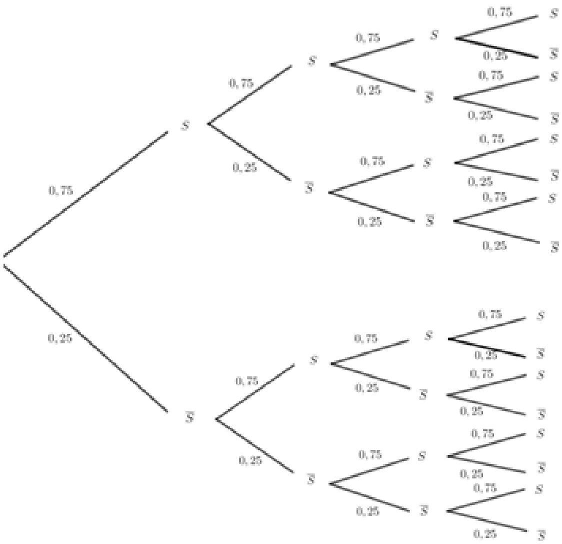
c) La probabilité de S - E - S est : $p = 0,2 \times 0,2 \times 0,8 =$ 0,032

Les 3 probabilités sont identiques.

Exercice 38 :

Un client appelle à quatre reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'appels du client sans attente.

1) Représenter cette expérience par un arbre pondéré.



2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$\boldsymbol{X}$ **prend les valeurs** $\boldsymbol{0; 1; 2; 3}$ ***et*** $\boldsymbol{4}$

$p(X = 0) = 0,25^4 \approx 0,004$

pour $(X = 1)$ **, il y a 4 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité**

$p(X = 1) = 4 \times 0,75 \times 0,25^3$

$p(X = 1) \approx 0,047$

pour $(X = 2)$ **, il y a 6 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité**

$p(X = 2) = 6 \times 0,75^2 \times 0,25^2$

$p(X = 2) \approx 0,211$

pour $(X = 3)$ **, il y a 4 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité**

$p(X = 3) = 4 \times 0,75^3 \times 0,25$

$p(X = 3) \approx 0,422$

$p(X = 4) = 0,75^4 \approx 0,316$

La loi de X est donc donnée par :

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$p(X = k)$	$0,25^4$	$4 \times 0,75 \times 0,25^3$	$6 \times 0,75^2 \times 0,25^2$	$4 \times 0,75^3 \times 0,25$	$0,75^4$

3) Calculer l'espérance de la variable X.

$E(X) = 0 \times 0,25^4 + 1 \times 4 \times 0,75 \times 0,25^3 + 2 \times 6 \times 0,75^2 \times 0,25^2 + 3 \times 4 \times 0,75^3 \times 0,25 + 4 \times 0,75^4$

$E(X) = 3$

En répétant u très grand nombre de fois cette expérience, il y a en moyenne 3 appels sans attente ...

4) Calculer la probabilité de l'évènement « Le client a subi au moins une attente »

L'évènement « Le client a subi au moins une attente » est le contraire de l'événement "le client n'a subi aucune attente" c'est-à-dire le contraire de "le client a eu 4 appels sans attente"

donc la probabilité que le client ait subi au moins une attente est :

$p = 1 - p(X = 4)$

$p = 1 - 0,75^4$

$p \approx 0,684$

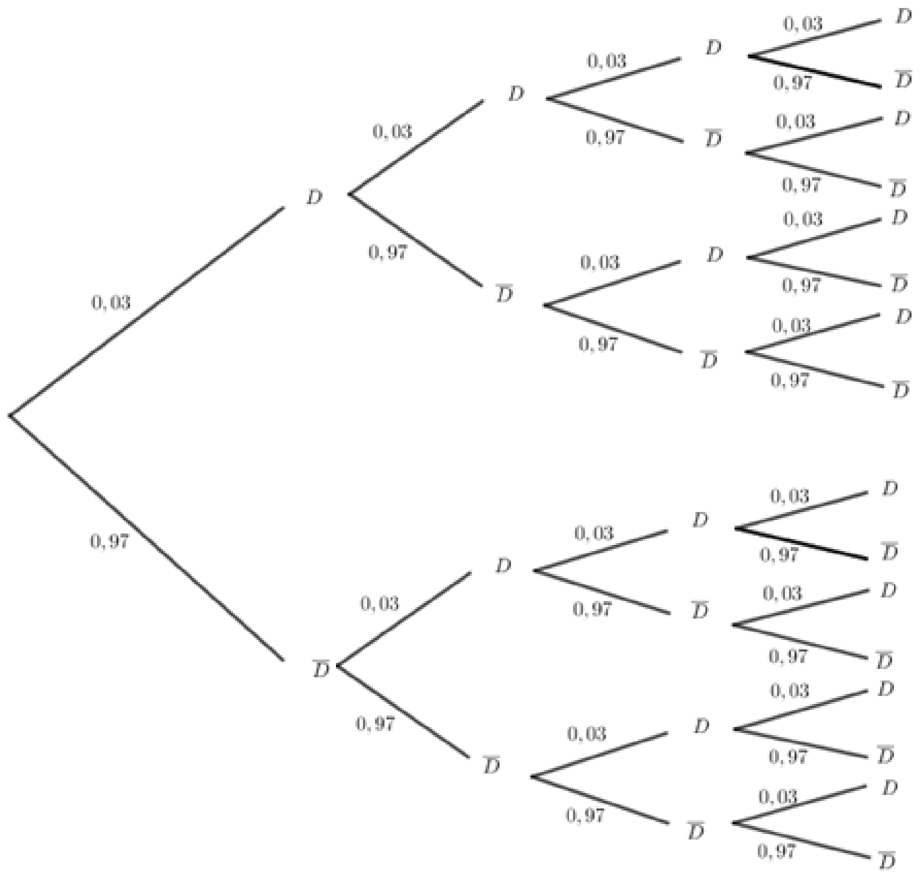
Exercice 39 :

Une entreprise produit en grande quantité des appareils à gaufres. A la suite de contrôles, on s'est aperçu que 3% des appareils fabriqués pouvaient présenter un défaut. Le comité d'entreprise d'une petite société décide d'acheter 4 de ces appareils.

1) Représenter la situation par un arbre de probabilité.

On note D l'événement " l'appareil a un défaut"

La situation peut être modélisée par l'arbre suivant : voir ci - contre



2) a) Quelle est la probabilité qu'aucun des 4 appareils achetés ne présente de défaut ?

$P(\overline{D}\overline{D}\overline{D}\overline{D}) = 0,97^4 \approx 0,885$

La probabilité qu'aucun des 4 appareils achetés ne présente de défaut est d'environ 0,885

b) Quelle est la probabilité que les 4 appareils achetés présentent un défaut ?

$P(DDDD) = 0,03^4 \approx 0$

La probabilité que les 4 appareils achetés présentent un défaut est presque nulle.

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un appareil acheté présente un défaut ?

L'événement " au moins un appareil a un défaut" est le contraire de " aucun appareil n'a de défaut"

$1 - P(\overline{D}\overline{D}\overline{D}\overline{D}) = 1 - 0,97^4 \approx 0,115$

La probabilité qu'au moins un appareil acheté présente un défaut est d'environ 0,115

3) Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 4 appareils dans la production, compte le nombre d'appareils présentant un défaut.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

X prend les valeurs $0; 1; 2; 3$ *et* 4

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

$p(X = 0) = 0,97^4 \approx 0,885$

pour $(X = 1)$, il y a 4 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité

$p(X = 1) = 4 \times 0,03 \times 0,97^3 = 0,12 \times 0,97^2$

$p(X = 1) \approx 0,110$

pour $(X = 2)$, il y a 6 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité

$p(X = 2) = 6 \times 0,03^2 \times 0,97^2$

$p(X = 2) \approx 0,005$

pour $(X = 3)$, il y a 4 chemins, chaque chemin ayant la même probabilité
$\boldsymbol{p(X=3\,)=\ 4\times 0,03^3\times 0,97}$
$\boldsymbol{p(X=3)\approx 0,0001}$

$\boldsymbol{p(X=4\,)=\ P(\,DDDD\,)=\ 0,03^4\approx 0}$

$\boldsymbol{k}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{p(X=k)}$	$\boldsymbol{0,97^4}$	$\boldsymbol{0,12\times 0,97^2}$	$\boldsymbol{6\times 0,03^2\times 0,97^2}$	$\boldsymbol{4\times 0,03^3}$ $\boldsymbol{\times 0,97}$	$\boldsymbol{0,03^4}$

c) Calculer l'espérance mathématique de X.
Interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette espérance.

$\boldsymbol{E(X)=0\times 0,97^4+\ 1\times\ 4\times 0,03\times 0,97^3+\ 2\times 6\times 0,03^2\times 0,97^2+3\times 4\times 0,03^3\times 0,97+4\times 0,03^4}$
$\boldsymbol{E(X)=\ 0,12}$

En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, si on achète 4 appareils à gaufres, il y a en moyenne 0,12 appareil avec un défaut ...

Compétence : Loi binomiale et arbre pondéré (hors programme)

Exercice 40 : Loi binomiale et arbre pondéré

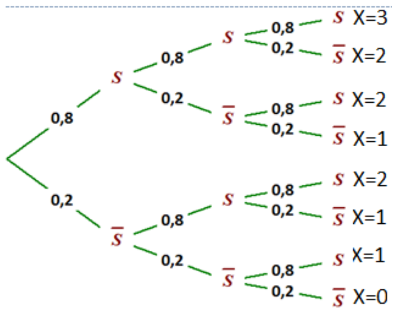
L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S. On note X le nombre de succès obtenus.

1. Préciser la loi suivie par la variable aléatoire X.

$\boldsymbol{X}$ **suit une loi binomaile de paramètre** $\boldsymbol{n=3}$ **et** $\boldsymbol{p=0,8.}$

2. Compléter l'arbre avec les valeurs de X correspondantes.

En vous aidant de l'arbre pondéré ci-dessus, déterminer les probabilités $P(X=0), P(X=1),\ P(X=2)$ et $P(X=3)$.



$\boldsymbol{k}$	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{P(X=k)}$	$\boldsymbol{0,2^3=0,008}$	$\boldsymbol{3\times 0,2^2\times 0,8=0,096}$	$\boldsymbol{3\times 0,2\times 0,8^2=0,384}$	$\boldsymbol{0,8^3=0.512}$

Exercice 41 : Loi binomiale et arbre pondéré

Un archer réussit une volée (deux tirs successifs d'une flèche) avec une probabilité égale à 0,35. Cet archer tire trois volées successives, que l'on suppose indépendantes. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre de volées réussies parmi les trois tirées.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On considère l'épreuve de Bernoulli : « Un archer tire une volée» ayant deux issues :
Le succès $\boldsymbol{S}$: « La volée est réussie » de probabilité $\boldsymbol{p=0,35}$.
L'échec $\boldsymbol{\overline{S}}$: « La volée n'est pas réussie » de probabilité $\boldsymbol{q=1-p=0,65}$.
Cette épreuve est répétée 3 fois de façon identique et indépendante.
$\boldsymbol{X}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Ainsi $\boldsymbol{X}$ suit une loi binomiale de paramètre $\boldsymbol{n=3}$ et $\boldsymbol{p=0,35}$.

2. Calculer, à 10^{-3} près la probabilité de l'événement « $X\ =\ 2$ » .

$\boldsymbol{P(X=2)=3\times 0,65\times 0,35^2\approx 0,239}$. **(On peut faire un arbre pondéré pour le prouver).**

3. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité que l'archer réussisse au moins deux volées ? Au plus deux volées ?

$\boldsymbol{P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)\approx 0,282}$
avec $\boldsymbol{P(X=3)=0,35^3\approx 0,043}$.
La probabilité que l'archer réussisse au moins deux volées est environ $\boldsymbol{0,282}$.

$\boldsymbol{P(X\leq 2)=1-P(X=3)\approx 0,957}$.
La probabilité que l'archer réussisse au plus deux volées est environ $\boldsymbol{0,957}$.

Exercice 42 :

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille. L'eau provient de deux sources.
Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau est calcaire.
On a effectué des tests pendant une journée et on constate que :

- 16% des bouteilles d'eau issues de la source 1 contiennent de l'eau calcaire.
- 10 % des bouteilles d'eau issues de la source 2 contiennent de l'eau calcaire.

La source 1 fournit 70% de la production totale des bouteilles d'eau.

1) Compléter le tableau des fréquences (en pourcentages) ci-après :

	Source 1	Source 2	Total
Eau calcaire	11,2	3	14,2
Eau non calcaire	58,8	27	85,8
Total	70	30	100

2) On prélève au hasard une bouteille dans la production de cette journée. toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirée. On considère les événements suivants :
A : " la bouteille d'eau provient de la source 1";
B : " la bouteille d'eau provient de la source 2";
C : " l'eau contenue dans la bouteille est calcaire".
a) Calculer $P(A)$; $P(C)$; $P(A \cap C)$ et $P(B \cap C)$.

La source 1 fournit 70% de la production totale donc $P(A) = \frac{70}{100} = 0,70$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire est 14,2% donc $P(C) = 0,142$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 11,2% donc $P(A \cap C) = 0,112$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 3% donc $P(B \cap C)$ = 0,03.

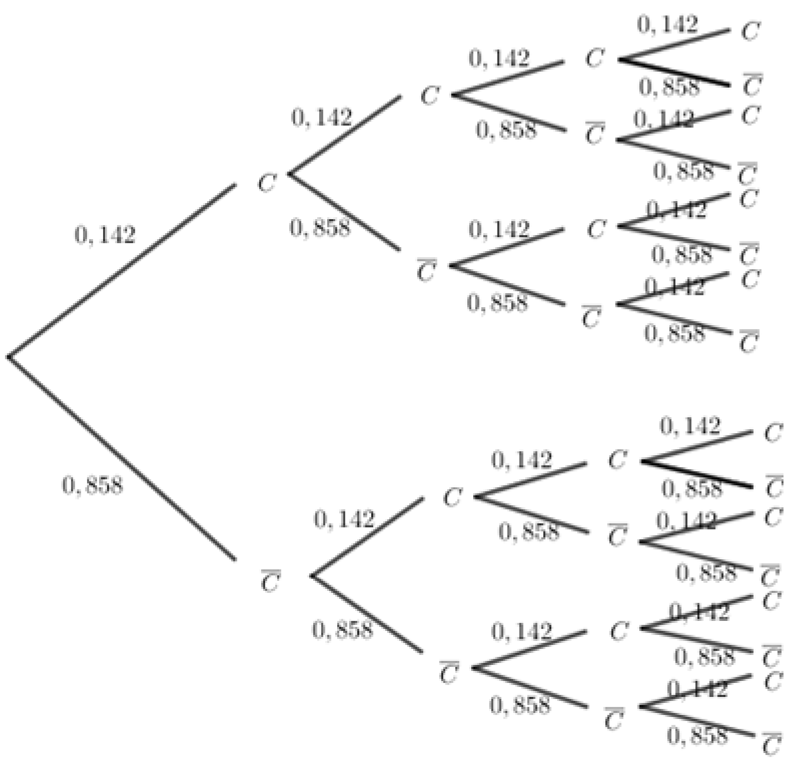
b) Calculer la probabilité que l'au contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

$$P_C(A) = \frac{Card(A \cap C)}{Card(C)} = \frac{11,2}{14,2} = \frac{56}{71}$$

3) L'usine fait des packs de quatre bouteilles d'eau. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout pack de 4 bouteilles d'eau le nombre de bouteilles d'eau calcaire.
a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucune bouteille avec de l'eau calcaire ?

$$P(X = 0) = 0,858^4 \approx 0,542$$

b) Quelle est la probabilité qu'un pack contienne au moins une bouteille d'eau calcaire?



$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$P(X \geq 1) = 1 - 0,858^4$$
$$P(X \geq 1) \approx 0,458$$

Exercice 43 :
Une étude statistique a été réalisée sur une population de 1000 souris de laboratoire.
Chaque souris a été observée afin de déceler la présence d'une certaine bactérie dans son organisme. Dans cette population de souris :
- 60% des souris sont des mâles ;
- parmi les souris mâles, 20% sont porteuses de la bactérie ;
- 10% des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie.

1) Compléter le tableau suivant:

	Souris Femelle	Souris mâle	Total
Souris porteuse de la bactérie	**100**	**120**	**220**
Souris non porteuse de la bactérie	**300**	**480**	**780**
Total	**400**	**600**	1000

- 60% des souris sont des mâles donc on calcule 60% de 1000 : $1000 \times \frac{60}{100} = 600$
- parmi les souris mâles, 20% sont porteuses de la bactérie donc on calcule 20% de 600 : $600 \times \frac{20}{100} = 120$
- 10% des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie donc on calcule 10% de 1000 : $100 \times \frac{10}{100} = 100$

Les autres valeurs s'obtiennent par addition et soustraction.

2) On prélève au hasard une souris de la population et on l'examine afin de déterminer son sexe et de détecter l'éventuelle présence de la bactérie.
Soit les événements suivants :
F : "la souris prélevée est une femelle"
B : "la souris prélevée est porteuse de la bactérie"
a) A l'aide des données de l'énoncé, déterminer $p(F)$ et $p(F \cap B)$.

Il y a 400 femelles sur les 1000 souris : $p(F) = \frac{400}{1000} = 0,4$	**Il y a 100 femelles porteuse de la bactérie sur les 1000 souris :** $p(F \cap B) = \frac{100}{1000} = 0,1$

b) Calculer la probabilité qu'une souris soit porteuse de la bactérie sachant que c'est une femelle.

On cherche $p_F(B)$

Parmi les 400 femelles, 100 sont porteuse de la maladie, donc $p_F(B) = \frac{100}{400} = 0,25$

Autre méthode :

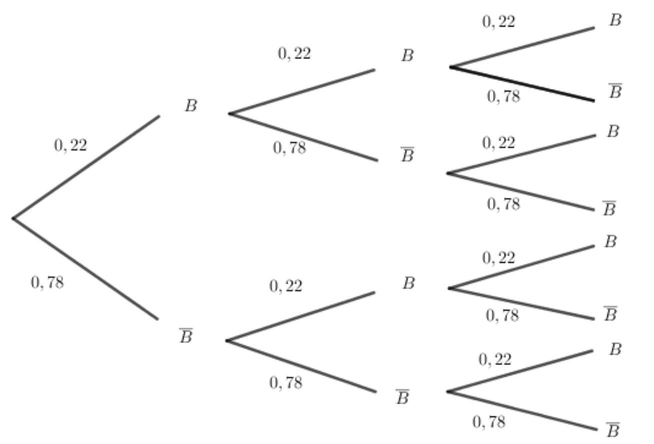
$$p_F(B) = \frac{p(F \cap B)}{p(F)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

c) Démontrer que la probabilité de B est égale à 0,22.

Il y a 220 souris malades sur les 1000 donc :

$$p(B) = \frac{220}{1000} = 0,22$$

3) On prélève dans la population, au hasard et successivement, 3 souris. La population est suffisamment grande pour pouvoir assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de souris porteuses de la bactérie parmi les 3 souris prélevées.
Calculer la probabilité de prélever exactement 2 souris porteuses de la bactérie (on arrondira au centième)

	**On cherche $p(X=2)$** **Il y a trois chemins qui conviennent : $BB\overline{B} - B\overline{B}B - \overline{B}BB$** $p(X=2) = 3 \times 0,22 \times 0,22 \times 0,78$ $p(X=2) \approx 0,11$ **La probabilité de prélever exactement 2 souris porteuses de la bactérie est d'environ 0,11**