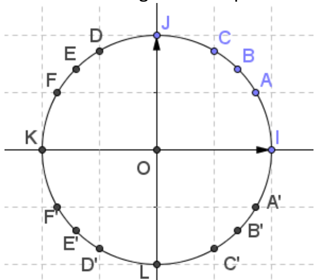
Fiche méthode : Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique

Application 1 : Points images sur le cercle trigonométrique et mesure d'angle

On se place sur le cercle trigonométrique ci-contre :



1. Quels sont les points images des réels suivants :

π $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6}$ $\quad -\frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{2\pi}{3}$ $\quad -\pi$ $\quad -\frac{3\pi}{4}$ $\quad -\frac{5\pi}{4}$

$K(\pi)$	$J\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$A\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$C'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
$D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$K(-\pi)$	$E'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$	$A\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

2. Donner trois réels différents ayant pour image :

a. le point J : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b. le point K : $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c. le point C : $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

d. le point E : $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3. Donner une mesure des angles : Soit $k \in \mathbb{Z}$,

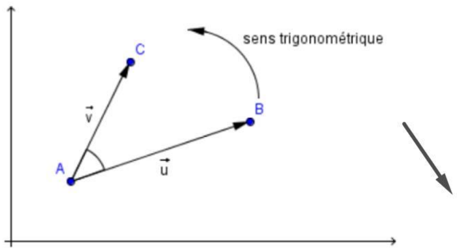
a) $(\overrightarrow{OL} ; \overrightarrow{OK}) = -\frac{\pi}{2}(+2k\pi)$

b) $(\overrightarrow{OE'} ; \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4}(+2k\pi)$

c) $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{3}(+2k\pi)$

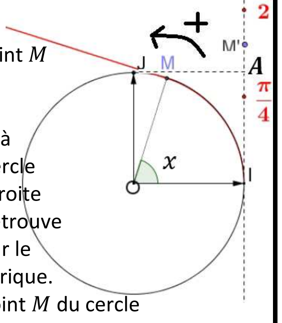
Application 2 : Conversion

Radian	$\boldsymbol{\pi}$	$\frac{25\pi}{180} = \frac{5\pi}{36}$	$\frac{38\pi}{180} = \frac{19\pi}{90}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
Degré	**180**	25	38	$\frac{3\times180}{4} = 135$	450



Cercle trigonométrique :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon **1** et sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé sens direct (ou positif) : c'est le sens contraire des aiguilles d'une montre.



- A chaque réel x correspond un point M du cercle trigonométrique.
- Réciproquement, à chaque tour de cercle effectué avec la droite des réels, on se retrouve au même point sur le cercle trigonométrique.

Ainsi, à chaque point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, différant tous d'un multiple de 2π.

Remarque : 2π est le **périmètre** du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1).

Radian :

- La mesure d'un angle en **radian** est égale à la **longueur de l'arc de cercle** que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.
- Soit x un réel. Lorsque le point M' d'abscisse x sur la droite des réels se superpose au point M sur le cercle trigonométrique, l'angle $\widehat{IOM}$ (pris dans le sens direct si x est positif, et dans le sens indirect si x est négatif) mesure x radians.

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π
Degré	0	30°	45°	60°	90°	**180°**	360°

Mesure d'un angle

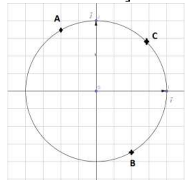
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On définit alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ si on tourne dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) pour passer de B à C, ou par $-\widehat{BAC}$ dans le cas contraire.

II. Mesure principale d'un angle orienté

Application 3 : Mesure principale

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Sur le cercle trigonométrique, on considère les point A, B et C tels que : l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$ mesure $\frac{4\pi}{6}$ rad,
l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\frac{5\pi}{3}$ rad,
l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ mesure $\frac{-7\pi}{4}$ rad.

1. Placer les points A, B et C sur le cercle trigonométrique.
2. Déterminer la mesure des angles qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.



$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$

Application 4 : Donner la mesure principale des angles orientés dont une mesure en radians est :

a)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$ ainsi la mesure principale de $-\frac{\pi}{2}$ est $-\frac{\pi}{2}$
b)	$\frac{38\pi}{5}$	$\frac{38\pi}{5} = \mathbf{4} \times \frac{\mathbf{10\pi}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{5}}$ ainsi la mesure principale de $\frac{38\pi}{5}$ est $-\frac{2\pi}{5}$.
c)	$-\frac{19\pi}{7}$	$-\frac{19\pi}{7} = \mathbf{1} \times \left(-\frac{\mathbf{14\pi}}{\mathbf{7}}\right) - \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{7}}$ ainsi la mesure principale de $-\frac{19\pi}{7}$ est $-\frac{5\pi}{7}$.
d)	$-\frac{127\pi}{3}$	$-\frac{127\pi}{3} = \mathbf{21} \times \left(-\frac{\mathbf{6\pi}}{\mathbf{3}}\right) - \frac{\mathbf{\pi}}{\mathbf{3}}$ ainsi la mesure principale de $-\frac{127\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$

Application 5 : Sinus d'un angle orienté non remarquable

Soit a un réel tel que $a \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos a = \frac{3}{8}$.
Placer le point A associé au réel a sur un cercle trigonométrique puis calculer $\sin a$.

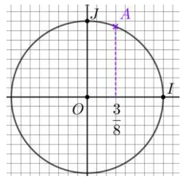
$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$

$\frac{9}{64} + sin^2(a) = 1$

$sin^2(a) = \frac{64}{64} - \frac{9}{64}$

$sin^2(a) = \frac{55}{64}$

$\sin(a) = \frac{\sqrt{55}}{8}$ car $a \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.



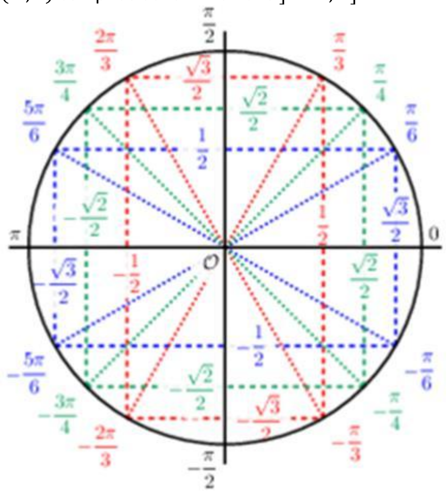
Application 6 : Cosinus et sinus d'un angle orienté

En utilisant le cercle trigonométrique et le tableau des valeurs remarquables, déterminer la valeur exacte de :

a) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	b) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$	d) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\sin(2\pi) = 0$	f) $\cos(2\pi) = 1$
g) $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	h) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
i) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	j) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Mesure principale d'un angle orienté

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ l'unique mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ comprise dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.



Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soit x une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où M est un point du cercle trigonométrique.

- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de $\boldsymbol{M}$.
- Le sinus de x, noté $\sin x$, est **l'ordonnée** de M.

Ainsi on a : $M(\cos(x) ; \sin(x))$

Valeurs remarquables du sinus et du cosinus :

x (mesure en degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
x (mesure en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés :

Pour tout réel x on a :

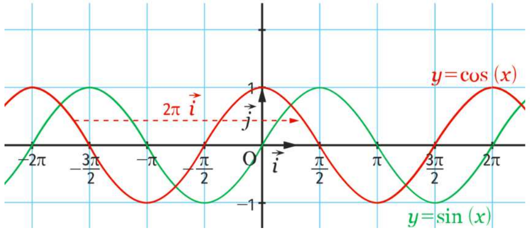
- $-1 \le \cos x \le 1$ et $-1 \le \sin x \le 1$.
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel, alors :

$\cos(-a) = \cos(a)$	$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(a+\pi) = -\cos(a)$	$\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$	$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

III. Fonction circulaire

Courbe :

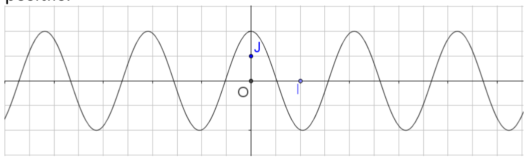


Période :
Les courbes représentatives sont inchangées par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$

Lien entre les courbes de la fonction cos et sin :
La courbe représentative de la fonction cosinus et de la fonction sinus est une sinusoïde. La courbe de la fonction cosinus est translatée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport à la courbe de la fonction sinus.

Application 7 : Courbes et fonction cosinus

Dans le repère orthogonal (O,I,J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

Le maximum de f est 2 donc $A = 2$.

2. a) Déterminer graphiquement la période T de f.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ donc $T = 2$

b) En déduire la valeur de ω.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ainsi :

$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{2} \approx \pi$

Fonction cosinus :
La fonction cosinus est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(x)$$

Période :
La fonction cosinus est périodique de **période 2π**

__Autrement dit :__
Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a :
$$\mathbf{\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)}$$

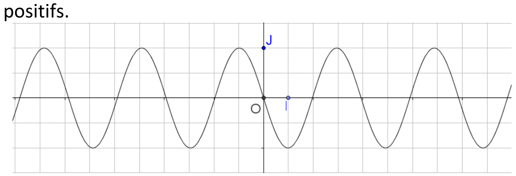
Parité :
La fonction cosinus est **paire**

__Autrement dit :__
Pour tout réel x, on a :
$$\mathbf{\cos(-x) = \cos x}$$

En Physique :
Soient ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.
On utilise la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$$
Elle est de période :
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Application 8 : Courbes et fonction sinus

Dans le repère orthogonal (O,I,J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

Le maximum de f est 1 donc $A = 1$.

2. a) Déterminer graphiquement la période T de f.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $4\overrightarrow{OI}$ donc $T = 4$.

b) En déduire la valeur de ω.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ ainsi :

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Fonction sinus :
La fonction sinus est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \sin(x)$$

Période :
La fonction sinus est périodique de **période 2π**

__Autrement dit :__
Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a :
$$\mathbf{\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)}$$

Parité :
La fonction sinus est **impaire**

__Autrement dit :__
Pour tout réel x, on a :
$$\mathbf{\sin(-x) = -\sin x}$$

En Physique :
Soient ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.
On utilise la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$
Elle est de période :
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

IV. Formules d'additions et de duplication

Formules d'additions et de duplication :
Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $\mathbf{\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$
2) $\mathbf{\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$
3) $\mathbf{\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$
4) $\mathbf{\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$
5) $\mathbf{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)}$
6) $\mathbf{\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$

Application 9 : Formule d'addition

La tension u (exprimée en volt) aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t (exprimé en seconde) est donnée par :
$$u(t) = \frac{11}{4}\cos(200t) + \frac{11\sqrt{3}}{4}\sin(200t)$$

a. Montrer que pour tout t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $u(t) = \frac{22}{4}\cos\left(200t - \frac{\pi}{3}\right)$

1ère méthode :
$$\begin{aligned}\frac{22}{4}\cos\left(200t - \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{22}{4}\left(\cos(200t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(200t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= \frac{22}{4}\left(\cos(200t)\frac{1}{2} + \sin(200t)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{11}{4}\cos(200t) + \frac{11\sqrt{3}}{4}\sin(200t)\end{aligned}$$

2ème méthode :
$$u(t) = \frac{11}{4}\cos(200t) + \frac{11\sqrt{3}}{4}\sin(200t)$$

$a = \frac{11}{4}$ et $b = \frac{11\sqrt{3}}{4}$

$A = \sqrt{\left(\frac{11}{4}\right)^2 + \left(\frac{11\sqrt{3}}{4}\right)^2}$

$A = \sqrt{\left(\frac{11}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{11}{4}\right)^2}$

$A = \sqrt{4\left(\frac{11}{4}\right)^2}$

$A = 2 \times \frac{11}{4}$

$A = \frac{22}{4}$

ϕ est tel que :
$$\begin{cases}\cos(\phi) = \dfrac{a}{A} = \dfrac{\frac{11}{4}}{\frac{22}{4}} = \dfrac{11}{4} \times \dfrac{4}{22} = \dfrac{11}{22} = \dfrac{1}{2}\\ \sin(\phi) = \dfrac{-b}{A} = \dfrac{-\frac{11\sqrt{3}}{4}}{\frac{22}{4}} = -\dfrac{11\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{4}{22} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Par lecture du cercle trigo on a : $\phi = -\frac{\pi}{3}$

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$u(t) = \frac{22}{4}\cos\left(200t - \frac{\pi}{3}\right)$$

b. En déduire la fréquence $= \frac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le dipôle, où ω désigne la pulsation. On arrondira le résultat à l'unité.

$f = \frac{200}{2\pi} \approx 32$ Hz

V. Formules de linéarisation

Application 10 : Linéarisation

Linéariser $\cos^2\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin^2\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

$\cos^2\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

$\sin^2\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$

Formule de linéarisation :
Pour tous nombres réels a et b, on a :

1) $\mathbf{\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)}$
2) $\mathbf{\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)}$