Fiche méthode : Variable aléatoire

I. Variable aléatoire

Application 1 :

Un jeu de hasard se déroule selon le protocole suivant :
Le joueur débourse 2€, puis lance deux dés tétraèdriques parfaits. Il lit les numéros sortis (entre 1 et 4) au sommet de chacun des dés.
S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme en euros, égale au total des points marqués ; sinon il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Donner l'univers de cette expérience. Et indiquer les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau à double entrée.

	1	2	3	4
1	2	−2	−2	−2
2	−2	4	−2	−2
3	−2	−2	6	−2
4	−2	−2	−2	8

$\Omega = \{(1\,;1);(1\,;2);\dots;\ (2\,;1);\dots;(4\,;4)\}$
L'univers est l'ensemble des couples d'entiers $(x\,;y)$ avec $1 \le x \le 4$ et $1 \le y \le 4$.
D'après le tableau, la variable aléatoire X peut prendre comme valeur :$-2\,;2\,;4\,;6$ et 8.

2. Calculer $P(X=-2)$

Les dés étant équilibrés, chaque issue est équiprobable de probabilité $\frac{1}{16}$.
$P(X=-2)=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

3. Représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X

$Gain\ x_i$	-2	2	4	6	8
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

4. Calculer l'espérance de gain lors du jeu présenté dans les exemples précédents. Interpréter ce résultat.

$$E(X)=-2\times\frac{3}{4}+2\times\frac{1}{16}+4\times\frac{1}{16}+6\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{16}$$
$$=-0{,}25$$
En répétant un très grand nombre de fois cette expérience, le joueur perd en moyenne 25 centimes.

5. Calculer la variance et l'écart-type de la variable X.

$$E(X^2)=(-2)^2\times\tfrac{3}{4}+2^2\times\tfrac{1}{16}+4^2\times\tfrac{1}{16}+6^2\times\tfrac{1}{16}+8^2\times\tfrac{1}{16}$$
$$=10{,}5$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$
$$=10{,}5-(-0{,}25)^2$$
$$=10{,}4375$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$\approx 3{,}23$$

Variable aléatoire :
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire X sur Ω c'est associer **un nombre réel** à chaque issue de Ω.

Evènement liés à une variable aléatoire :
1. L'évènement $(X=x_i)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.
2. L'évènement $(X\ge x_i)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x_i.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire :
- La probabilité de l'évènement $(X=x_i)$ est la probabilité de la **réunion** de toutes les issues associées au nombre x_i.
- Définir une loi de probabilité, c'est associer à chaque évènement du type $(X=x_i)$ sa probabilité p_i.
- On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_r
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_r

- $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\cdots+P(X=x_r)=\mathbf{1}$

Espérance mathématique :
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1,x_2,\dots,x_r$ avec les probabilités $p_1,p_2,\dots,p_r$ est le nombre noté $E(X)$ donné par :
$$\boldsymbol{E(X)=\sum_{i=1}^{r}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_rp_r}$$

Remarque : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la valeur **moyenne** des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois.

Variance :
La variance d'une variable aléatoire X notée $V(X)$ est le nombre réel donné par :
- $$\boldsymbol{V(X)=\sum_{i=1}^{r}p_i\left(x_i-E(X)\right)^2}$$
$$\boldsymbol{=p_1\left(x_1-E(X)\right)^2+\ldots+p_r\left(x_r-E(X)\right)^2}$$
- $\boldsymbol{V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2}$
où X^2 est la variable aléatoire qui à chaque issue de Ω associe le même réel que X mais élevé au carré.

Ecart-type :
L'écart type de la variable aléatoire X est le réel :
$$\boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

Application 2 : Variable aléatoire
Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre les valeurs $0, 1, 2$ et 3.

2. Décrire les évènements « $X=2$ » et « $X\ge 1$ ».

« $X=2$ » signifie « on tire exactement 2 boules vertes ».
« $X\ge 1$ » signifie « on tire au moins 1 boule verte ».

Application 3 : Variable aléatoire
On lance quatre dés à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de faces numérotées « 6 » obtenues.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 3$ et 4

2. a. Décrire les évènements « $X\le 2$ » et « $X>3$ ».

« $X\le 2$ » signifie « on obtient au plus 2 faces 6 ».
« $X>3$ » signifie « on obtient 4 faces 6 ».

b. Que peut-on dire de ces événements ?

Ces événements sont incompatibles (disjoints).
En effet $P\big((X\le 2)\cap(X>3)\big)=0$.

Application 4 : Traduction de probabilité et calculs
On considère l'expérience suivante : on lance 10 fois successivement une pièce, et on appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on obtient « FACE ».
1. Traduire chaque phrase par une expression du type $P(X=2)$ ou $P(X\le 1)$…

a) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « FACE »	$P(X=4)$
b) La probabilité d'obtenir au moins 2 lancers « FACE »	$P(X\ge 2)$
c) La probabilité d'obtenir plus de 7 lancers « FACE »	$P(X\ge 7)$
d) La probabilité d'obtenir 3, 4 ou 5 lancers « FACE »	$P(3\le X\le 5)$
e) La probabilité d'obtenir moins de 3 lancers « FACE »	$P(X\le 3)$
f) La probabilité d'obtenir au plus 5 lancers « FACE »	$P(X\le 5)$
g) g) La probabilité d'obtenir au moins la moitié des lancers « FACE »	$P(X\ge 5)$
h) h) La probabilité d'obtenir plus de 1 lancer « FACE »	$P(X\ge 1)$
i) i) La probabilité d'obtenir 5 à 9 lancers « FACE »	$P(5\le X\le 9)$
j) j) La probabilité d'obtenir au plus 8 lancers « FACE »	$P(X\le 8)$
k) k) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « PILE »	$P(X=6)$

2. On admet que la loi de probabilité de l'expérience est la suivante :

Nombre de « FACE » : X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X = xᵢ)	0,001	0,010	0,044	0,117	0,205	0,246	0,205	0,117	0,044	0,010	0,001

Déterminer les probabilités suivantes :

a) $P(X=7)=0{,}117$ (lecture directe)
b) $P(X\ge 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$
$=0{,}044+0{,}010+0{,}001=0,055$
c) $P(X\le 3)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$
$=0{,}001+0{,}0010,+0{,}044+0{,}117=0{,}172$
d) $P(X=2)=0{,}044$ (lecture directe)
e) $P(X>7)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0{,}055$

Application 5 : Jeu équitable
Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une. Si celle-ci est verte, le joueur gagne 50€ ; si elle est bleue, rien ne se passe, si elle est rouge, le joueur perd a€.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.
Calculer a pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$
Le jeu est favorable si et seulement si $E(X)>0$

On cherche d'abord la loi de probabilité :

k	0	50	a
$P(X=k)$	$\frac{10}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X)=0$
$E(X)=0\times\dfrac{10}{20}+50\times\dfrac{2}{20}+\dfrac{8a}{20}=5+\dfrac{2}{5}a$
Ainsi :
$E(X)=0\Leftrightarrow 5+\frac{2}{5}a=0\Leftrightarrow\frac{2}{5}a=-5\Leftrightarrow a=-\frac{25}{2}=-12{,}5€$

II. Propriétés de l'espérance et de la variance

Application 6 :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre d'articles fabriqués par une entreprise.

On suppose que $E(X) = 1000$ et $\sigma(X) = 10$.

Le coût de fabrication de chaque article est de 50€ et les frais annuels de fabrication s'élèvent à 10000€.

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le coût total de fabrication. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$

$Y = 10000 + 50X$
$E(Y) = 10000 + 50E(X)$
$E(Y) = 10000 + 50000$
$E(Y) = 60000$

On sait que : $\sigma(X) = 10$
$V(X) = (\sigma(X))^2 = 100$
$V(Y) = 50^2 V(X)$
$V(Y) = 2500 \times 100$
$V(Y) = 250000$

Propriété de l'espérance et de la variance :

Soient a et b des réels.

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Vocabulaire : On dit que l'Espérance est linéaire.

III. Exercices type

Application 7 : Avec probabilités conditionnelles

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

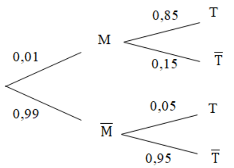
a. si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
b. si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note les évènements :

- M : « l'animal est porteur de la maladie » ;
- T : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2) Un animal est choisi au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

$P(M \cap T) = P(M)P_M(T)$
$= 0,01 \times 0,85$
$= 0,0085$

b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers,
donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$
$P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)$
$P(T) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05$
$P(T) = 0,058$
La probabilité que son test soit positif est bien de 0,058.

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.

Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$

4) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le coût à engager par animal subissant le test.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

X_i	0	100	1000
P_i	0,9405	0,058	0,0015

b) Calculer l'espérance de X, et interpréter dans le contexte de l'exercice.

$E(X) = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 = 7,3$
Cela signifie que si l'éleveur a très un grand nombre de bêtes, en moyenne, cette maladie lui coûtera 7,3 € par animal.

c) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Pour 200 bêtes, on peut donc estimer que l'éleveur doit prévoir : $200 \times 7,3 = 1460$ €.

Application 8 : Tableau et loi binomiale

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille. L'eau provient de deux sources.
Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau est calcaire.
On a effectué des tests pendant une journée et on constate que :

- 16% des bouteilles d'eau issues de la source 1 contiennent de l'eau calcaire.
- 10 % des bouteilles d'eau issues de la source 2 contiennent de l'eau calcaire.
- La source 1 fournit 70% de la production totale des bouteilles d'eau.

1) Compléter le tableau des fréquences (en pourcentages) ci-après :

	Source 1	Source 2	Total
Eau calcaire	11,2	3	14,2
Eau non calcaire	58,8	27	85,8
Total	70	30	100

1) On prélève au hasard une bouteille dans la production de cette journée. Toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirée. On considère les événements suivants :

- A : " la bouteille d'eau provient de la source 1";
- B : " la bouteille d'eau provient de la source 2";
- C : " l'eau contenue dans la bouteille est calcaire".

a) Calculer $P(A)$; $P(C)$; $P(A \cap C)$et $P(B \cap C)$.

La source 1 fournit 70% de la production totale donc $P(A) = \frac{70}{100} = 0,70$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire est 14,2% donc $P(C) = 0,142$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 11,2% donc $P(A \cap C) = 0,112$
La fréquence de bouteilles avec de l'eau calcaire et qui provient de la source 1 est 3% donc $P(B \cap C) = 0,03$.

b) Calculer la probabilité que l'au contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

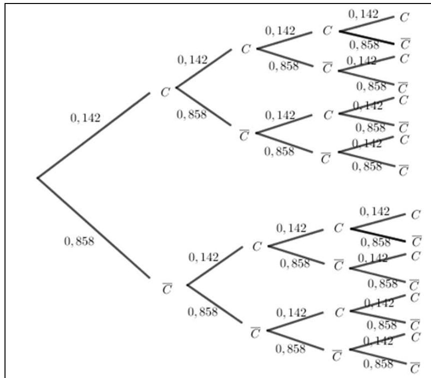
$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0,112}{0,142} = \frac{56}{71}$

3) L'usine fait des packs de quatre bouteilles d'eau. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout pack de 4 bouteilles d'eau le nombre de bouteilles d'eau calcaire.

a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucune bouteille avec de l'eau calcaire ?

$P(X = 0) = 0,858^4 \approx 0,542$

b) Quelle est la probabilité qu'un pack contienne au moins une bouteille d'eau calcaire ?



$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$
$p(X \geq 1) = 1 - 0,858^4$
$p(X \geq 1) \approx 0,458$

Epreuve de Bernoulli :
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p (réel compris entre 0 et 1) est une expérience aléatoire (c'est-à-dire soumise au hasard) comportant deux issues, le succès ou l'échec.

Schéma de Bernoulli :
On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Loi binomiale :
La loi binomiale, de paramètres n et p, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de *succès* dans chacune d'entre elles.

Remarque :
X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ (4 répétitions) et $p = 0,142$ (probabilité du succès).