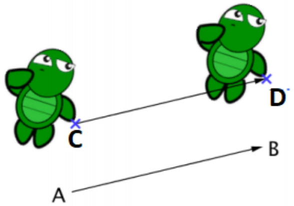
Fiche méthode : Vecteur

I. Translation

Translation :
Soient A et B deux points distincts du plan.
D est l'image de C par la translation qui envoie A en B signifie que : $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

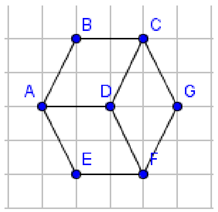


Cette translation est caractérisée par les 3 propriétés suivantes :
- Les **droites** (AB) et (CD) ont la même **direction (sont parallèles)** ;
- Les **segments** $[AB]$ et $[CD]$ ont la même **longueur,** appelée **norme** du vecteur ;
- Le **sens** de A (dit **origine**) vers B (**extrémité**) est le sens de C vers D (sens indiqué par la **flèche**).

On associe alors à cette translation le ***vecteur noté*** $\overrightarrow{AB}$

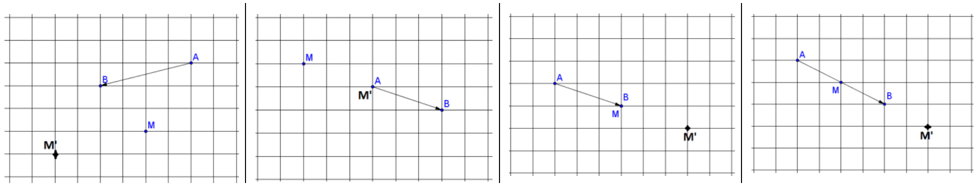
L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: Ces vecteurs **n'ont pas le même sens.**

Application 1 :



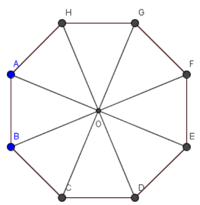
1. a. La translation qui transforme A en B, tranforme D en $\boldsymbol{C}$
   b. La translation qui transforme C en B, transforme D en $\boldsymbol{A}$
   c. La translation qui transforme A en B, transforme $\boldsymbol{E}$ en D
   d. La translation qui transforme $\boldsymbol{D}$ en B, tranforme F en D
   e. La translation qui transforme E en G, tranforme $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{C}$
2. a. La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, transforme C en $\boldsymbol{B}$
   b. La translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{D}B}$, transforme E en A
   c. La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, transforme $\boldsymbol{D}$ en E
   d. La translation de vecteur $\overrightarrow{GB}$, transforme $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{A}$ **(ou $\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{B}$).**

Application 2 : Construire le point M', image de M par la translation qui transforme A en B.



Application 3 : Vecteurs égaux, vecteurs opposés

$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.



Compléter le tableau suivant en répondant par oui ou non.

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
ont le même sens	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Non**
ont la même longueur	**Oui**	**Non**	**Oui**	**Oui**
sont égaux	**Non**	**Non**	**Oui**	**Non**
sont opposés	**Non**	**Non**	**Non**	**Oui**

II. Vecteurs et nature d'une figure

Formules :
Soient A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et B de coordonnées $(x_B; y_B)$, deux points du plan dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_B - x_A}\\ \boldsymbol{y_B - y_A}\end{pmatrix}$
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\boldsymbol{\frac{x_A+x_B}{2}}\,;\boldsymbol{\frac{y_A+y_B}{2}}\right)$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$

Application 4 : Nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(0\,;1)$, $B(2\,;1)$, $C(2\,;-1)$ et $D(0\,;-1)$.
Monter que $ABCD$ est un carré.

1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

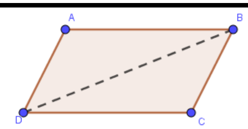
1ère méthode : Pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme : on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ et on remarque que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-0\\-1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème méthode : Pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme : on calcule les milieux des diagonales et on remarque les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu.

Soit M le milieu de $[AC]$,
$M\left(\frac{0+2}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)$
$M(1\,;\,0)$

Soit N le milieu de $[BD]$,
$N\left(\frac{2+0}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)$
$N(1\,;\,0)$

Les points M et N sont confondus donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)
Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{2^2 + 0^2}$
$AB = \sqrt{4}$
$AB = 2$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-0\\-1-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

Donc $AD = \sqrt{0^2 + (-2)^2}$
$AD = \sqrt{4}$
$AD = 2$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0-2\\-1-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

Donc $BD = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$
$BD = \sqrt{4+4}$
$BD = \sqrt{8}$

- $AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.
- $BD^2 = 8$
  $AB^2 + AD^2 = 4 + 4$
  Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après **la réciproque** du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

Application 5 : Nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(2\,;3)$, $B(-3\,;-1)$ et $C(7\,;\,-1)$

Donner la nature du triangle ABC.

> **Nature d'un triangle :** Un triangle peut être :
> - Quelconque
> - Isocèle (deux côtés de même longueur)
> - Equilatéral (trois côtés de même longueur)
> - Rectangle (il faudra utiliser la réciproque/contraposée du théorème de Pythagore)
> - Isocèle rectangle

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\-1-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{(-5)^2+(-4)^2}$

$AB = \sqrt{25+16}$

$AB = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7-2\\-1-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$

Donc $AC = \sqrt{5^2+(-4)^2}$

$AC = \sqrt{25+16}$

$AC = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7+3\\-1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

Donc $BC = \sqrt{10^2+0^2}$

$BC = \sqrt{100}$

$BC = 10$

- $AB = AC$ ainsi le triangle ABC est isocèle en A.
- $BC^2 = 100$

  $AB^2 + AC^2 = 41 + 41 = 82$

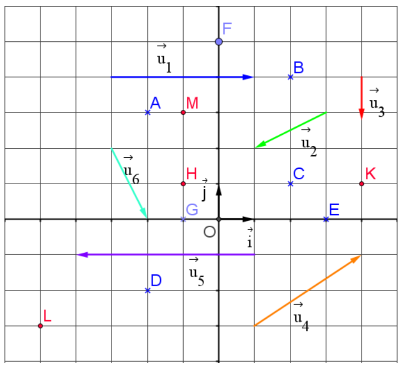
  Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, d'après **la contraposée** du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle en A

Conclusion : Le triangle ABC est isocèle en A.

III. Lecture graphique de coordonnées de vecteurs et construction de vecteurs

> **Méthode :** Pour lire les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou placer un point B tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$:
> - On part du point A, on compte le nombre x d'unité horizontalement (« + » vers la droite et « − » vers la gauche) pour être au niveau du point B, ce nombre est **l'abscisse** du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\ \end{pmatrix}$.
> - On compte ensuite le nombre y d'unité verticalement (« + » vers la haut et « − » vers la bas) pour arriver au point B, ce nombre est **l'ordonnée** du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Application 6 : Lecture graphique de coordonnées de vecteurs et construction de vecteurs



On se place dans un repère $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Trouver, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{DA}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

2. Lire les coordonnés des vecteurs $\vec{u}_1$ à $\vec{u}_6$.

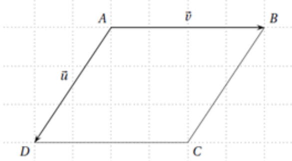
$\vec{u}_1\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$	$\vec{u}_2\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{u}_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{u}_4\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\vec{u}_5\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$	$\vec{u}_6\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

3. Placer les points H, K, L et M tels que :

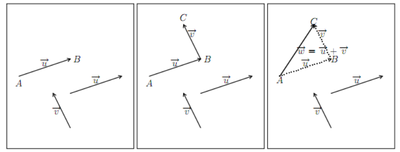
   a. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ b. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ c. $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ d. $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

IV. Somme de vecteurs

Application 7 : Etant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



$\overrightarrow{BA} = -\vec{v}$	$\overrightarrow{BC} = \vec{u}$	$\overrightarrow{DA} = -\vec{u}$
$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$	$\overrightarrow{CD} = -\vec{v}$	$\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$
$\overrightarrow{DB} = -\vec{u} + \vec{v}$	$\overrightarrow{BD} = \vec{u} - \vec{v}$	$\overrightarrow{CB} = -\vec{u}$

> **Somme de vecteurs :**
> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
> La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchainement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
>
> 
>
>
> **Relation de Chasles :**
> Quels que soient les points A, B, C du plan,
> $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Application 8 : Relation de Chasles :

a) $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GE}$

c) $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{LK}$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

Application 9 : Coordonnées de somme et différence de vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

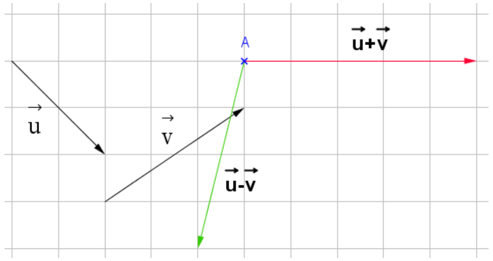
1. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2+5\\-3+7\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}2-5\\-3-7\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix}$
3. $-\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}-2-6\\3+4\end{pmatrix}$ soit $-\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}2+5-6\\-3+7+4\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

$\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\begin{pmatrix}2+5+6\\-3+7-4\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}$

> **Coordonnées de somme et différence :**
> Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.
> Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
> - La **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de coordonnées : $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
> - L'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$ de coordonnées : $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$
> - La **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ de coordonnées : $\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

Application 10 : Construction de vecteurs

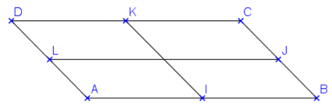
1. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u} - \vec{v}$.



Application 11 : Somme de vecteurs et figure

$ABCD$ est un parallélogramme.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.



Compléter les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LI} = \boldsymbol{\overrightarrow{AI}}$

b. $\overrightarrow{LJ} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{\overrightarrow{DA}}$

c. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{BL} = \boldsymbol{\overrightarrow{JD}}$

d. $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BI} = \boldsymbol{\overrightarrow{JC}}$