Fiche méthode : Polynômes

I. Polynôme du 2nd degré

Application 1 : On donne l'expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

On appelle cette forme : *forme **développée** du polynôme du second degré.*
La fonction f est représentée par la courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.

1) Démontrer que pour tout réel x,
$$f(x) = -2(x-1)(x+2)$$

$$\begin{aligned}-2(x-1)(x+2) &= -2(x^2+2x-x-2)\\ &= -2x^2-4x+2x+4\\ &= -2x^2-2x+4\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On appelle cette forme : *forme **factorisée** du polynôme du second degré.*

2) a) Donner l'allure de la courbe représentative, son sommet et son axe de symétrie.

$a = -2 < 0$ ainsi la courbe est « tournée vers la bas » par rapport à la courbe de la fonction carré.
Les racines de $f(x)$ sont $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$
$S(\alpha\,;\,\beta)$ avec :
$\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$
$\beta = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 =$
$-2\times\frac{1}{4} + 1 + 4 = -\frac{1}{2} + \frac{10}{2} = \frac{9}{2}$
Le sommet de C_f est le point $S\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{9}{2}\right)$

b) Donner le sens de variations de f.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{9}{2}$	↘

car $a < 0$

3) a) Déterminer les solutions de $f(x) = 0$.

$-2(x-1)(x+2) = 0$
$x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 1$ ou $x = -2$
$S = \{-2\,;1\}$

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

1ère méthode :

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	−	0	+	0	−

car $a < 0$ à l'extérieur des racines.

2ème méthode :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$	
-2		-		-		-		
x-1		-		-	0	+		car m=1>0
x+2		-	0	+		+		car m=1>0
$f(x)$		-	0	+	0	-		

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \le 0$.

$S =]-\infty\,; -2] \cup [1\,; +\infty[$

Fonction polynôme de degré n :

- On appelle **fonction polynôme de degré n** ($n \in \mathbb{N}$), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
où $a_0, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.

Différentes formes d'un polynôme du 2nd degré :

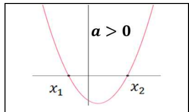
- **Forme développée :** $f(x) = ax^2 + bx + c$
La parabole **coupe l'axe des ordonnées au point M (0 ; c)**.

- **Forme factorisée :**
  - Si $f(x) = 0$ admet deux solutions notées x_1 et x_2 alors $\boldsymbol{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$.
  - Si $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$.
  - Si $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle alors $f(x)$ ne se factorise pas.

Courbe et variations :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction polynôme f du second degré est **une parabole.**
Son sommet est le point S de coordonnée $S(\alpha\,;\,\beta)$ avec $\boldsymbol{\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}}$ et $\boldsymbol{\beta = f(\alpha)}$

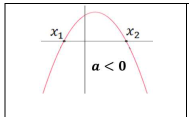
- **Si $a > 0$**



x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

La parabole est « **tournée vers le haut** »
La fonction f admet un minimum β atteint en $x = \alpha$

- **Si $a < 0$**



x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

La parabole est « **tournée vers le bas** »
La fonction f admet un maximum β atteint en $x = \alpha$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- On peut aussi faire le tableau de signe d'un produit (voir 2ème méthode).

II. Polynôme de degré 3

Application 2 : On donne l'expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -4x^3 - 24x^2 - 12x + 40$$
On appelle cette forme : *forme **développée** du polynôme de degré 3.*
La fonction f est représentée par la courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.

1) Montrer que f peut s'écrire :
$f(x) = -4(x-1)(x+2)(x+5)$.

$$\begin{aligned}-4(x-1)(x+2)(x+5) &= -4(x^2+2x-x-2)(x+5)\\ &= -4(x^2+x-2)(x+5)\\ &= -4(x^3+5x^2+x^2+5x-2x-10)\\ &= -4(x^3+6x^2+3x-10)\\ &= -4x^3-24x^2-12x+40\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On appelle cette forme : *forme **factorisée** du polynôme de degré 3.*

2) a) Déterminer les solutions de $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$
$-4(x-1)(x+2)(x+5) = 0$
$x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$
$x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = -5$

$S = \{-5\,; -2\,;1\}$

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$	
-4		-		-		-		-		
x-1		-		-		-	0	+		car m=1>0
x+2		-		-	0	+		+		car m=1>0
x+5		-	0	+		+		+		car m=1>0
f(x)		+	0	-	0	+	0	-		

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \le 0$.

$S = [-5\,; -2] \cup [1\,; +\infty[$

Différentes formes d'un polynôme de degré 3:

- **Forme développée :**
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
La courbe **coupe l'axe des ordonnées au point M (0 ; d)**.

- **Forme factorisée :**
Si $f(x) = 0$ admet trois solutions notées x_1,x_2 et x_3) alors :
$\boldsymbol{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$

Courbe :

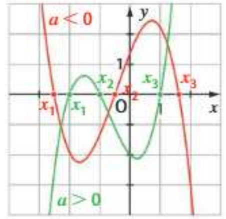
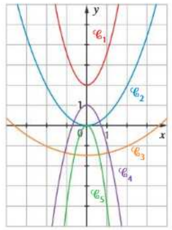


Tableau de signes :
On fait le tableau de signe d'un produit

III. Cas particuliers

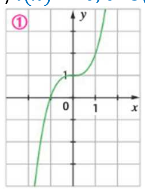
Application 3 :
Relier chacune des courbes aux fonctions données ci-dessous.

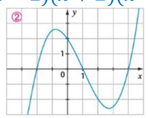
1. $f(x) = 0,5\,x^2$ $\quad C_2$
2. $g(x) = 1,5x^2 + 2$ $\quad C_1$
3. $h(x) = -4x^2$ $\quad C_5$
4. $j(x) = 0,1x^2 - 1,5$ $\quad C_3$
5. $k(x) = -2x^2 + 1$ $\quad C_4$

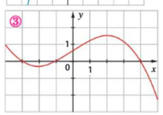


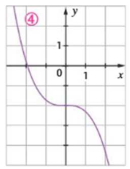
Application 4 :
On donne quatre courbes ci-contre et quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = -0,05\,(x+3)(x-4)(x+1)$ $\quad C_3$
b) $g(x) = x^3 + 1$ $\quad C_1$
c) $h(x) = -0,3x^3 - 2$ $\quad C_4$
d) $i(x) = 0,025(x-1)(x+2)(x-4)$ $\quad C_2$



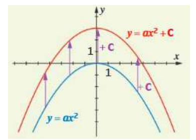






Cas particulier de fonctions du 2nd degré :

- Fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
$a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$
- Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$
- Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$

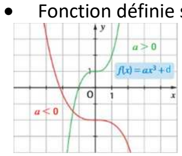


Courbe et variation :
Cela dépend du signe de a comme pour les fonctions polynôme du second degré.

Plus a est grand dans les positifs (ou a est petit dans les négatifs) plus la courbe se « rapproche » de l'axe des ordonnées.

Cas particulier de fonctions de degré 3 :

- Fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$
$a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$
- Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$
- Fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + d$



Courbe et variation :
Cela dépend du signe de a :
- Si $a > 0$ alors f est ↗
- Si $a < 0$ alors f est ↘