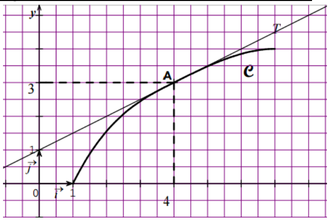
Chapitre 6 : Dérivation (2) : Fonctions dérivées (correction)

Compétence : Rappel : Nombre dérivée et tangentes (lecture graphique).

Exercice 1 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse 4.

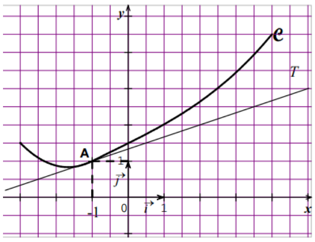


Donner la valeur de $f(4)$ et donner la valeur de $f'(4)$.

$\boldsymbol{f(4) = 3}$	$\boldsymbol{f'(4) = \frac{1}{2}}$

Exercice 2 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse -1.

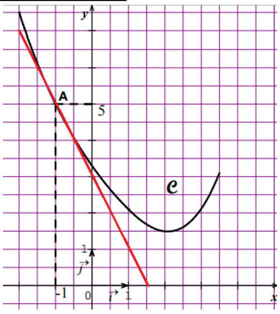


Donner la valeur de $f(-1)$ et donner la valeur de $f'(-1)$.

$\boldsymbol{f(-1) = 1}$	$\boldsymbol{f'(-1) = \frac{1}{3}}$

Exercice 3 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1.
On sait $f'(-1) = -2$



1. Donner $f(-1)$

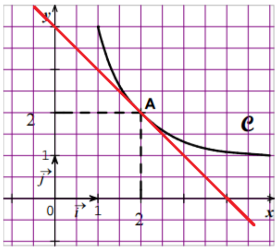
$\boldsymbol{f(-1) = 5}$

2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

$\boldsymbol{y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)}$
$\boldsymbol{y = -2(x + 1) + 5}$
$\boldsymbol{y = -2x + 3}$

Exercice 4 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2.
On sait $f'(2) = -1$



1. Donner $f(2)$

$\boldsymbol{f(2) = 2}$

2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

$\boldsymbol{y = f'(2)(x - 2) + f(2)}$
$\boldsymbol{y = -(x - 2) + 2}$
$\boldsymbol{y = -x + 4}$

Compétence : Dérivées des fonctions de référence, nombre dérivée et tangentes.

Exercice 5 : Nombre dérivée

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a pour :

1. $f(x) = x^2$ et $a = -5$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-5) = 2 \times (-5) = -10}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}}$

3. $f(x) = x^3$ et $a = 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-5) = 3 \times 2^2 = 12}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 3$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(3) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}}$

Exercice 6 : Equation de tangente

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$ et $a = 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(2) = 2 \times 2 = 4}$
$\boldsymbol{f(2) = 2^2 = 4}$
$\boldsymbol{y = f'(2)(x - 2) + f(2)}$
$\boldsymbol{y = 2(x - 2) + 2}$
$\boldsymbol{y = 4x - 2}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}}$
$\boldsymbol{f(9) = \sqrt{9} = 3}$
$\boldsymbol{y = f'(9)(x - 9) + f(9)}$
$\boldsymbol{y = \frac{1}{6}(x - 9) + 3}$
$\boldsymbol{y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}}$

3. $f(x) = x^3$ et $a = -1$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3}$
$\boldsymbol{f(-1) = (-1)^3 = -1}$
$\boldsymbol{y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)}$
$\boldsymbol{y = 3(x + 1) - 1}$
$\boldsymbol{y = 3x + 2}$

4. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 3$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(3) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}}$
$\boldsymbol{f(3) = \frac{1}{3}}$
$\boldsymbol{y = f'(3)(x - 3) + f(3)}$
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{9}(x - 3) + \frac{1}{3}}$
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}}$

Compétence : Opération sur la dérivée

Préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$, la fonction est dérivable et calculer sa fonction dérivée.

Exercice 7 : Produit par un réel

1. $f(x) = 6x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{f'(x) = 6}$

2. $g(x) = -5x^3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{g'(x) = -5 \times 3x^2 = -15x^2}$

3. $h(x) = 7\sqrt{x}$

h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$\boldsymbol{h'(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}}}$

4. $k(x) = -\frac{3}{x}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$(à cause de « $\frac{1}{x}$ »),
$\boldsymbol{k'(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}}$

Exercice 8 : Somme

1. $f(x) = x^2 + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$

2. $g(x) = x^3 + x - 3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{g'(x) = 3x^2 + 1}$

3. $.h(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$

h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$\boldsymbol{h'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

4. $k(x) = x^5 + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$(à cause de « $\frac{1}{x}$ »),
$\boldsymbol{k'(x) = 5x^4 - \frac{1}{x^2}}$

Exercice 9 : Somme et produit par un réel

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{f'(x) = 10x - 3}$

2. $g(x) = -3x^3 + 5x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{g'(x) = -9x^2 + 5}$

3. $h(x) = 2x + 7$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{h'(x) = 2}$

4. $k(x) = 3\sqrt{x} + 2x + 1$

k est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$\boldsymbol{k'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2}$

5. $l(x) = x\sqrt{3} - \frac{7}{x} + x^2$

l est dérivable sur $\mathbb{R}^*$(à cause de « $\frac{1}{x}$ »),
$\boldsymbol{l'(x) = \sqrt{3} + \frac{7}{x^2} + 2x}$

6. $m(x) = \frac{-5x+7}{3}$

m est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{m'(x) = -\frac{5}{3}}$

7. $n(x) = \frac{x^3}{6} + 3x^2 - 2$

n est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{n'(x) = \frac{3x^2}{6} + 6x}$
$\boldsymbol{n'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x}$

8. $p(x) = \frac{x^4+5x^3-7}{3}$

p est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{p'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2}$

9. $q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x$

q est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$\boldsymbol{q'(x) = x^3 - \frac{1}{2}}$

Exercice 10 : Produit de deux fonctions

1. $f(x) = x\sqrt{x}$

f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$f(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1$ et v définie par $v(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2x}$ **(*)**

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

(*) : On a multiplié par $\sqrt{x}$ au num. et au dénom.

2. $g(x) = 4x(x-5)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$g(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = 4x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4$ et v définie par $v(x) = (x-5)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x) = 1$

$g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$g'(x) = 4(x-5) + 4x$

$g'(x) = 4x - 20 + 4x$

$g'(x) = 8x - 20$

Remarque : On aurait pu développer g et la dériver.

3. $h(x) = x^3(\sqrt{x} - x)$

h est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$h(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 3x^2$ et v définie par $v(x) = \sqrt{x} - x$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

$h'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$h'(x) = 3x^2 \times (\sqrt{x} - x) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \times x^3$

$h'(x) = 3x^2\sqrt{x} - 3x^3 + \frac{x^3}{2\sqrt{x}} - x^3$

$h'(x) = -4x^3 + 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3\sqrt{x}}{2x}$ **(*)**

$h'(x) = -4x^3 + 3x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2\sqrt{x}$

$h'(x) = -4x^3 + \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$

(*) : On a multiplié par $\sqrt{x}$ au num. et au dénom.

4. $k(x) = x^2(2x+4)$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$k(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et v définie par $v(x) = 2x + 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x) = 2$

$k'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$k'(x) = 2x(2x+4) + 2x^2$

$k'(x) = 4x^2 + 8x + 2x^2$

$k'(x) = 6x^2 + 8x$

Remarque : On aurait pu développer k et la dériver.

5. $(x) = (x^2+3)(1-x)$

l est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$l(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = x^2 + 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et v définie par $v(x) = 1 - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x) = -1$

$l'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$l'(x) = 2x(1-x) - (x^2+3)$

$l'(x) = 2x - 2x^2 - x^2 - 3$

$l'(x) = -3x^2 + 2x - 3$

Remarque : On aurait pu développer k et la dériver.

6. $m(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

m est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ (à cause de « $\sqrt{x}$ »),
$m(x) = u(x)v(x)$ où u définie par $u(x) = \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et v définie par $v(x) = \sqrt{x} - 1$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$m'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$m'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$m'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$m'(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x}$

$m'(x) = 1 - \frac{\sqrt{x}}{x}$

Remarque : On aurait pu utiliser la formule (hors programme) : $(u^2)' = 2u'u$.

Exercice 11 : Quotient

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$,
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u définie par $u(x) = 2x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2$ et v définie par $v(x) = x - 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 4$ avec $v'(x) = 1$.
$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$f'(x) = \frac{2(x-4)-1\times(2x+1)}{(x-4)^2}$
$f'(x) = \frac{2x-8-2x-1}{(x-4)^2}$
$f'(x) = \frac{-9}{(x-4)^2}$

2. $g(x) = \frac{2x^2}{x+5}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-5\}$,
$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u définie par $u(x) = 2x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4x$ et v définie par $v(x) = x + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = -5$ avec $v'(x) = 1$.
$g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$g'(x) = \frac{4x(x+5)-2x^2}{(x+5)^2}$
$g'(x) = \frac{4x^2+20x-2x^2}{(x+5)^2}$
$g'(x) = \frac{2x^2+20x}{(x+5)^2}$

3. $h(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u définie par $u(x) = 2x^2 + 5x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4x + 5$ et v définie par $v(x) = x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais avec $v'(x) = 2x$.
$h'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$h'(x) = \frac{(4x+5)(x^2+1)-2x(2x^2+5x+1)}{(x^2+1)^2}$
$h'(x) = \frac{4x^3+4x+5x^2+5-4x^3-10x^2-2x}{(x^2+1)^2}$
$h'(x) = \frac{-5x^2+2x+5}{(x^2+1)^2}$

4. $k(x) = \frac{-2\sqrt{x}+5}{x^2}$

k est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$,
$k(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u définie par $u(x) = -2\sqrt{x} + 5$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ avec $u'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ et v définie par $v(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 0$ avec $v'(x) = 2x$.
$k'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$k'(x) = \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{x}}-2x(-2\sqrt{x}+5)}{x^4}$
$k'(x) = \frac{-x\sqrt{x}+4x\sqrt{x}-10x}{x^4}$
$k'(x) = \frac{3x\sqrt{x}-10x}{x^4}$

Exercice 12 : Inverse

1. $f(x) = \frac{1}{x-7}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{7\}$,
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$ où u définie par $u(x) = x - 7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 7$ avec $u'(x) = 1$.
$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$f'(x) = -\frac{1}{(x-7)^2}$

2. $g(x) = \frac{-1}{x^2-1}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$,
$g(x) = \frac{1}{u(x)}$ où u définie par $u(x) = x^2 - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = -1$ ou $x = 1$ avec $u'(x) = 2x$.
$g'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$g'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

3. $h(x) = \frac{2}{3x+1}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}$,
$h(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)}$ où u définie par $u(x) = 3x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = -\frac{1}{3}$ avec $u'(x) = 3$.
$f'(x) = 2 \times \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$
$f'(x) = \frac{-6}{(3x+1)^2}$

4. $k(x) = \frac{-5}{x^2+1}$

k est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$k(x) = -5 \times \frac{1}{u(x)}$ où u définie par $u(x) = x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais avec $u'(x) = 2x$.
$f'(x) = -5 \times \frac{-u'(x)}{u^2(x)}$
$f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$

Exercice 13 : Calculs en vrac

Les détails des calculs sont à rédiger…

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 4x - 5$

2. $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ on a : $g'(x) = -\frac{7}{(x-2)^2}$

3. $h(x) = (2 - x)\sqrt{x}$

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$ on a : $h'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{x}}$

4. $k(x) = \frac{-1}{x^2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $k'(x) = \frac{2}{x^3}$

5. $l(x) = \frac{1}{x^2+2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $l'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

6. $m(x) = (2x + 1)^2$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $m'(x) = 8x + 4$

7. $n(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + \frac{x}{5} - 3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $n'(x) = x^3 - 6x + \frac{1}{5}$

8. $p(x) = 2x - \frac{x}{x+6}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-6\}$ on a : $p'(x) = 2 - \frac{6}{(x+6)^2}$

9. $q(x) = \frac{1}{x^2} - 3x^2 + \frac{x+1}{x^2-3} - 5$

**Pour tout $x \in]-\infty\ ; -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}\ ; 0[\cup]0\ ;\ \sqrt{3}[\cup$
$]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$ on a :**
$q'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x^2+2x+3}{(x^2-3)^2} - 6x$

Compétence : Dérivées et tangentes.

Exercice 14 : Dérivées et tangentes

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ et $a = -1$

$f'(x) = \frac{7}{(1-2x)^2}$
$f'(-1) = \frac{7}{(1+2)^2} = \frac{7}{9}$
$f(-1) = \frac{-1+3}{1+2} = \frac{2}{3}$
$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$
$y = \frac{7}{9}(x + 1) + \frac{2}{3}$
$y = \frac{7}{9}x + \frac{13}{9}$

2. $g(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^3-1}$ et $a = 0$

$g'(x) = 2x - \frac{3x^2}{(x^3-1)^2}$
$g'(0) = 0$
$g(0) = -1$
$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
$y = -1$

3. $h(x) = 2(3x - 1)\sqrt{x}$ et $a = 1$

$h'(x) = \frac{9x-1}{\sqrt{x}}$
$h'(1) = \frac{9-1}{\sqrt{1}} = 8$
$h(1) = 2(3 - 1)\sqrt{1} = 4$
$y = h'(1)(x - 1) + h(1)$
$y = 8(x - 1) + 4$
$y = 8x - 4$

Exercice 15 : Dérivées et tangentes

La fonction f est défine sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 8$

1. Calculer $f'(x)$

$f'(x) = x^2 - 5$

2. Démontrer que la courbe représentative de f admet deux tangentes horizontales.
   Précisez les abscisses des points correspondants.

On résout $f'(x) = 0$.
$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$.
f admet deux tangentes horizontales en $x = -\sqrt{5}$ et $x = \sqrt{5}$.

Exercice 16 : Dérivées et tangentes

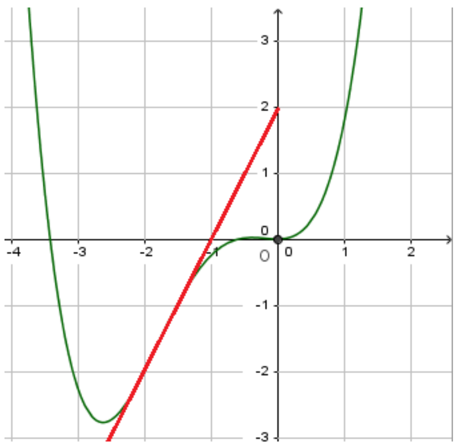
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6$

Démontrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse – 1 passe par le point $A(0\ ; 8)$.

$f'(x) = 8x^3 - 16x$
$f'(-1) = 8 \times (-1)^3 - 16 \times (-1) = -8 + 16 = 8$
$f(-1) = 2 \times (-1)^4 - 8 \times (-1)^2 + 6 = 2 - 8 + 6 = 0$
Cherchons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse – 1.
$y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$
$y = 8(x + 1) + 0$
$y = 8x + 8$
Or $8 \times 0 + 8 = 8$ ainsi $A \in T_{-1}$.

Exercice 17 : Dérivées et tangentes

La courbe ci-dessous est une partie de la courbe représentative de g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2$



1. a. En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

g semble avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses en deux points (pour environ $x = -2,5$ et $x = 0$)

b. Par le calcul, trouver la valeur exacte des abscisses de ces points.

$\boldsymbol{g'(x) = x^3 + 3x^2 + x}$

$\boldsymbol{g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 1) = 0}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 3x + 1 = 0$

On résout $x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$.

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\boldsymbol{x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$ $\boldsymbol{x_1 \approx -2,62}$	$\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$ $\boldsymbol{x_2 \approx -0,38}$

Ainsi les solutions de $g'(x) = 0$ sont $x = 0$; $x \approx -2,62$ et $x \approx -0,38$.
g admet donc trois tangentes horizontales.

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $a = -2$. Tracer cette tangente.

$\boldsymbol{g(-2) = \frac{1}{4} \times (-2)^4 + (-2)^3 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 = \frac{16}{4} - 8 + \frac{4}{2} = 4 - 8 + 2 = -2}$

$\boldsymbol{g'(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 2 = -8 + 12 - 2 = 2}$

$\boldsymbol{y = g'(-2)(x - (-2)) + g(-2)}$

$\boldsymbol{y = 2(x + 2) - 2}$

$\boldsymbol{y = 2x + 2}$

Exercice 18 : Dérivées et tangentes

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

f est dérivable si $x+1 \neq 0$ c'est-à-dire si elle ne s'annule pas en -1.
f est donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.

b. Calculez $f'(x)$.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ où u définie par $u(x) = 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2$ et v définie par $v(x) = x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = -1$ avec $v'(x) = 1$.

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

2. Quels sont les points de C_f en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$?

On résout $f'(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2} = 4 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2+2x+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 4 \times 2 = 64 - 32 = 32$ et $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{-8-4\sqrt{2}}{8}$ $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **et** $f(x_1) = 2 + 2\sqrt{2}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-8+4\sqrt{2}}{8}$ $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **et** $f(x_2) = 2 - 2\sqrt{2}$

C_f admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 4x$ aux points $A\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} ; 2 + 2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} ; 2 - 2\sqrt{2}\right)$.

Remarque :* *On aurait pu remarquer que $f'(x) = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}$ (le discriminant n'est plus obligatoire).

3. Existe-t-il des tangentes à C_f passant par le point $A(0 ; 1)$?

$f(0) = 0$

$f'(0) = 2$

$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Pour que la tangente passe le point $A(0 ; 1)$ il faut que $1 = f'(a)(0-a) + f(a)$.

$1 = \frac{-2a}{(a+1)^2} + \frac{2a}{a+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{-2a+2a(a+1)}{(a+1)^2} \Leftrightarrow (a+1)^2 = -2a + 2a^2 + 2a \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2}$ $x_1 = 1 - \sqrt{2}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2}$ $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

Ainsi les tangentes aux points d'abscisses -1ou 3 passent par le point $A(0 ; 1)$.

Exercice 19 : Dérivées et tangentes

Soit g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ et C_g sa courbe représentative.

1. La courbe C_g admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

$\boldsymbol{g'(x) = 3x^2 + 4x + 3}$
$\boldsymbol{g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 3 = 0}$
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 3 = 16 - 36 < 0.}$
Donc $\boldsymbol{f'(x)}$ ne s'annule pas et $\boldsymbol{C_g}$ n'admet pas de tangentes horizontale.

2. La courbe C_g admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$? Si oui, précisez en quels points.

Dire que $\boldsymbol{C_g}$ admet des tangentes parallèles à la droite d'équation $\boldsymbol{y = 3x - 5}$ équivaut à dire que $\boldsymbol{g'(x) = 3}$.
$\boldsymbol{3x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}}$**.**
$\boldsymbol{C_g}$ admet donc des tangentes parallèles à la droite d'équation $\boldsymbol{y = 3x - 5}$ en $\boldsymbol{A(0\,;1)}$ et $\boldsymbol{B\left(-\frac{4}{3}\,;\,-\frac{49}{27}\right)}$.

Exercice 20 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 2ax + b}$

2. Déterminer a, b, c sachant que C_f vérifie les hypothèses suivantes :
   H_1 : C_f passe par l'origine du repère O.
   H_2 : C_f passe par le point $A(1\,;\,-3)$
   H_3 : la tangente en O à C_f a pour équation réduite $y = -4x$.

$\boldsymbol{H_1}$ se traduit par $\boldsymbol{f(0) = 0}$
$\boldsymbol{H_2}$ se traduit par $\boldsymbol{f(1) = -3}$
$\boldsymbol{H_3}$ se traduit par $\boldsymbol{f'(0) = -4}$

$$\boldsymbol{\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = -3 \\ f'(0) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = -3 \\ 2a \times 0 + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = -3 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - 4 + 0 = -3 \\ b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \\ b = -4 \end{cases}}$$

Exercice 21 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$

2. Déterminer a, b, c sachant que C_f vérifie les hypothèses suivantes :

   H_1 : C_f coupe l'axe (Oy) au point d'ordonnée 20.

   H_2 : C_f passe par le point $A(-1\ ;\ 18)$

   H_3 : $C_f$admet une tangente en A de coefficient directeur 3.

   H_4 : $C_f$admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

$\boldsymbol{H_1}$ **se traduit par** $\boldsymbol{f(0) = 20}$

$\boldsymbol{H_2}$ **se traduit par** $\boldsymbol{f(-1) = 18}$

$\boldsymbol{H_3}$ **se traduit par** $\boldsymbol{f'(-1) = 3}$

$\boldsymbol{H_4}$ **se traduit par** $\boldsymbol{f'(0) = 0}$

$$\begin{cases} f(0) = 20 \\ f(-1) = 18 \\ f'(-1) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ -a + b - c + d = 18 \\ 3a - 2b + c = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ -a + b + 20 = 18 \\ 3a - 2b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ b = -2 + a \\ 3a - 2(-2 + a) = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} d = 20 \\ b = -2 + a \\ 3a + 4 - 2a = 3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ b = -2 - 1 \\ a = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20 \\ b = -3 \\ a = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Exercice 22 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{ax^2+b}{3x-2}$

et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **où** $\boldsymbol{u}$ **définie par** $\boldsymbol{u(x) = ax^2 + b}$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **avec** $\boldsymbol{u'(x) = 2ax}$ **et** $\boldsymbol{v}$ **définie par** $\boldsymbol{v(x) = 3x - 2}$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et ne s'annule que pour** $\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$ **avec** $\boldsymbol{v'(x) = 3}$**.**

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2ax(3x-2) - 3(ax^2+b)}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6ax^2 - 4ax - 3ax^2 - 3b}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3ax^2 - 4ax - 3b}{(3x-2)^2}$$

2. Déterminer a et b sachant que C_f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0\ ;1)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{-2} = 1 \\ 3a - 4a - 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -a - 3 \times (-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 6 \end{cases}$$

Exercice supplémentaire : Dérivées et tangentes

Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à C_f au point A indiqué.

1. $f(x)=\frac{2x+5}{x^2+x+1}$. A est le point de C_f d'abscisse 1.

$\boldsymbol{f'(x)=-\frac{2x^2+10x+3}{(x^2+x+1)^2}}$

$\boldsymbol{f'(1)=-\frac{2+10+3}{(1+1+1)^2}=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}}$

$\boldsymbol{f(1)=\frac{2+5}{1+1+1}=\frac{7}{3}}$

$\boldsymbol{y=f'(1)(x-1)+f(1)}$

$\boldsymbol{y=-\frac{5}{3}(x-1)+\frac{7}{3}}$

$\boldsymbol{y=-\frac{5}{3}x+4}$

2. $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ A est le point de C_f d'abscisse 4.

$\boldsymbol{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}}$

$\boldsymbol{f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}}$

$\boldsymbol{f(4)=\sqrt{4}-\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}}$

$\boldsymbol{y=f'(4)(x-4)+f(4)}$

$\boldsymbol{y=\frac{5}{16}(x-4)+\frac{7}{4}}$

$\boldsymbol{y=\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}}$

3. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ A est le point de C_f d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$\boldsymbol{f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$

$\boldsymbol{f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{2}{\frac{1}{8}}=-4+16=12}$

$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2-4=-2}$

$\boldsymbol{y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f(\frac{1}{2})}$

$\boldsymbol{y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)-2}$

$\boldsymbol{y=12x-8}$

Exercice 23 :

Dériver les fonctions suivantes, sans se préoccuper des ensembles de définitions/dérivabilités.

1. $f(x) = (5-4x)^3$

$f(x) = u^3(x)$ **avec :**
$u(x) = 5 - 4x$
$u'(x) = -4$

$f'(x) = 3u^2(x)u'(x)$
$f'(x) = 3(5-4x)^2 \times (-4)$
$f'(x) = -12(5-4x)^2$

2. $f(x) = (2x+7)^5$

$f(x) = u^5(x)$ **avec :**
$u(x) = 2x + 7$
$u'(x) = 2$

$f'(x) = 5u^4(x)u'(x)$
$f'(x) = 5(2x+7)^4 \times 2$
$f'(x) = 10(2x+7)^4$

3. $f(x) = \sqrt{5+3x}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ **avec :**
$u(x) = 5 + 3x$
$u'(x) = 3$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{5+3x}}$

4. $f(x) = \sqrt{-2x-1}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ **avec :**
$u(x) = -2x - 1$
$u'(x) = -2$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{-2x-1}}$
$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{-2x-1}}$

5. $f(x) = 3(x-5)^7$

$f(x) = 3u^7(x)$ **avec :**
$u(x) = x - 5$
$u'(x) = 1$

$f'(x) = 3 \times 7u^6(x)u'(x)$
$f'(x) = 21(x-5)^6 \times 1$
$f'(x) = 21(x-5)^6$

6. $f(x) = -2\sqrt{5x+3}$

$f(x) = -2\sqrt{u(x)}$ **avec :**
$u(x) = 5x + 3$
$u'(x) = 5$

$f'(x) = -2\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f'(x) = -\dfrac{5}{\sqrt{5x+3}}$
$f'(x) = \dfrac{-5}{\sqrt{5x+3}}$

7. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^3$

$f(x) = u^3(x)$ **avec :**
$u(x) = 3x^2 - 2x + 1$
$u'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 3u^2(x)u'(x)$
$f'(x) = 3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)$

8. $f(x) = 3(-x^5 + 2x^3 - 9)^7$

$f(x) = 3u^7(x)$ **avec :**
$u(x) = -x^5 + 2x^3 - 9$
$u'(x) = -5x^4 + 6x^2$

$f'(x) = 3 \times 7u^6(x)u'(x)$
$f'(x) = 21\left(-x^5 + 2x^3 - 9\right)^6\left(-5x^4 + 6x^2\right)$

9. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4}$

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ **avec :**
$u(x) = 2x^2 + 7x - 4$
$u'(x) = 4x + 7$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f'(x) = \dfrac{4x+7}{2\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}$

10. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{u(x)}}$ **avec :**

$\boldsymbol{u(x)} = \frac{1}{x}$

$\boldsymbol{u'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-\sqrt{x}}{2x^2}}$

11. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^5$

$\boldsymbol{f(x) = u^5(x)}$ **avec :**

$\boldsymbol{u(x) = \frac{1}{x}}$

$\boldsymbol{u'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

$\boldsymbol{f'(x) = 5u^4(x)u'(x)}$

$\boldsymbol{f'(x) = 5\left(\frac{1}{x}\right)^4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)}$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{5}{x^6}}$