Chapitre : Dérivation (3)

Activité :

On définit une fonction f sur $[0\,;7]$ par $f(x) = x^3 - 10\,x^2 + 25\,x + 2$. Calculer la fonction dérivée f' de f.

1. Tracer les deux fonctions sur votre calculatrice.
2. Emettre une conjecture sur un éventuel lien entre la fonction dérivée et les variations de la fonction.
3. Expliquer ce lien avec vos mots.
4. Vérifier votre conjecture sur f et sur un nouvel exemple : $g(x) = x^2 + 3x - 6$ définie sur $[-7; 5]$.

I. Variations d'une fonction dérivable

Propriétés 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est strictement croissante sur I alors ____________________ sur I.
- Si f est strictement décroissante sur I alors ____________________ sur I.
- Si f est constante sur I alors ____________________ sur I.

Exercice 1 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable et croissante sur $[3\,;+\infty[$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[3\,;+\infty[$?
2. Soit f une fonction dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et croissante sur $[4\,;+\infty[$.
   a. Quel est le signe de la dérivée de f sur $]-\infty\,;4]$?
   b. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[4\,;+\infty[$?

Exercice 2 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est croissante sur $]-\infty-5]$ et décroissante sur $[-5\,;+\infty[$.
   Recopier et compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$			0		

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-8\,;8]$ et dont le tableau de variations est le suivant :

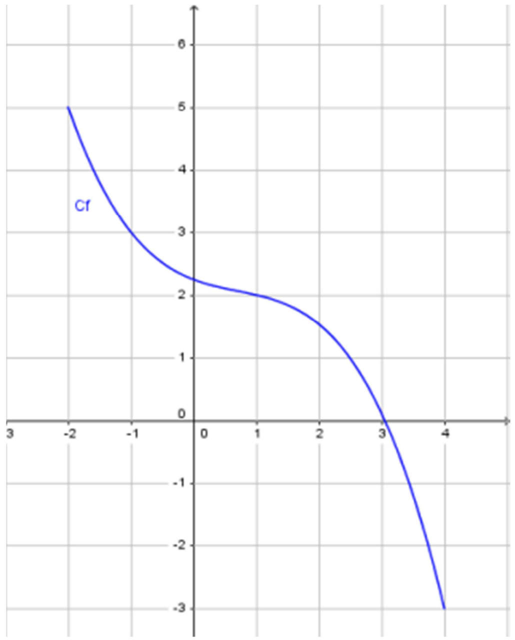
x	-8		-3		5		8
f	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Quel est le signe de la dérivée de f sur :
a. $[-8\,;-3]$ b. $[-3\,;5]$ c. $[5\,;8]$

Exercice 3 : Du sens de variation au signe de la dérivée

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $[-2\,;4]$.
2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.



Propriétés 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est ____________________ sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est ____________________ sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est ____________________ sur I.

Exercice 4 : Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-7\,;+\infty[$ telle que $f'(x)$ est négatif pour tout réel $x \in [-7\,;+\infty[$.
   Quel est le sens de variation de f sur $[-7\,;+\infty[$?
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = x^2 + 3$ tout réel x.
   Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?
3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ est positif sur $]-\infty; 5]$ et négatif sur $[5\,;+\infty[$.
   a. Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty; 5]$?
   b. Quel est le sens de variation de f sur $[5\,;+\infty[$?

Exercice 5 : Du signe de la dérivée au sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

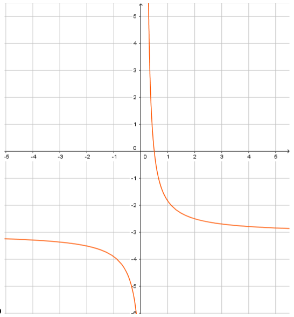
En déduire les variations de la fonction f.

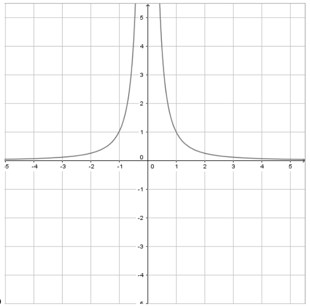
Exercice 6 : Associer à chaque courbe, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

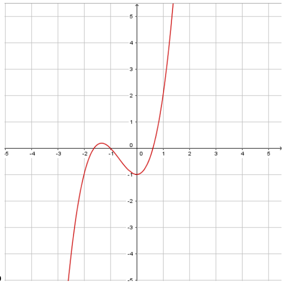
Voici les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ et de leurs fonctions dérivées f', g', h' et k'.

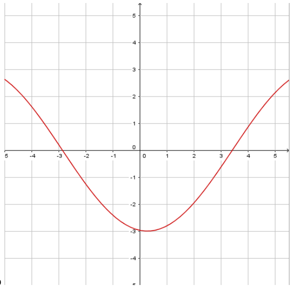
La courbe représentant f, g, h et k sont donnés, respectivement, par le graphique 1, 2, 3 et 4.

Associer à chaque courbe numérotée de 1 à 4, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

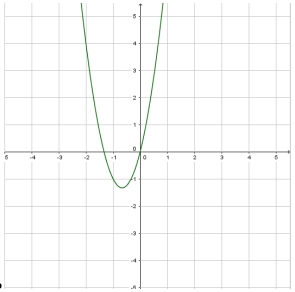
1. 

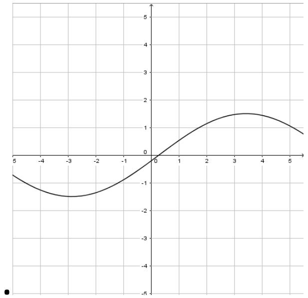
2. 

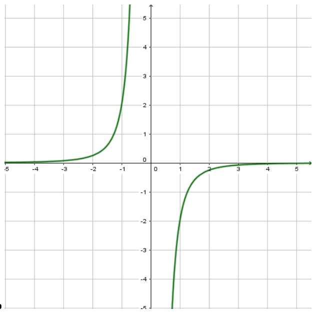
3. 

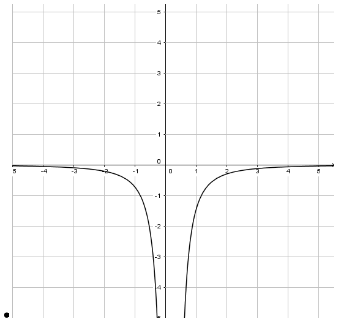
4. 

----

a. 

b. 

c. 

d. 

Application 1 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^2 - 5x + 1$.
   Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

4. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \frac{1}{3}\ x^3 + x^2 + x + 38$.
   Etudier les variations de k sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Donner le sens de variations des fonctions suivantes :

1. f définie sur $I = [-3\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$
2. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(x) = -3x^2 + x + 2$
3. f définie sur $I = [0\,;4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
4. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(t) = -t^3 - 3t^2 + 9$
5. f définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$
6. f définie sur $I = [0\,;10]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$
7. f définie sur $I = [-4\,;4]$ par $f(x) = \frac{4x}{x^2+x+1}$
8. f définie sur $I = \mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = x + 2 + \frac{1}{2x+4}$

Exercice 8 : Sens de variations et tangente.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 dans un repère $(O\,;I,J)$.
3. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T.

II. Extremums d'une fonction dérivable

Définitions 1 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux réels de I.

- Dire que $f(a)$ est un **minimum local** de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant a tel que, pour tout nombre réel x de J on a : $f(x)$
- Dire que $f(b)$ est un **maximum local** de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant b tel que, pour tout nombre réel x de J on a : $f(x)$
- On appelle **extremum local** un minimum local ou un maximum local.

Propriété 3 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$ (c'est à dire (x_0)) tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I, alors $f'(x_0)$.
La courbe C représentative de la fonction f admet une
____ au point d'abscisse x_0.

Propriété 4 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ tel que x_0 ne soit pas une borne de l'intervalle I
Si la dérivée f' ____
en x_0 alors f présente un extremum local en x_0.

Application 2 : Etude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $[-2\,;4]$.

2. Déterminer les extremums de f sur $[-2\,;4]$.

3. Déterminer un encadrement de f sur $[-2\,;4]$.

Exercice 9 : Extremums d'une fonction polynôme.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x$$

1. a. Tracer la courbe de f sur la calculatrice.

   b. Par lecture graphique, quel semble être le minimum de la fonction f sur $[-4\,;4]$?
   En quelle valeur de x semble-t-il atteint ?
2. a. Etudier le sens de variations de f sur $[-4\,;4]$.

   b. Déterminer le minimum de f sur $[-4\,;4]$.

Exercice 10 : Extremums d'une fonction quotient

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x + 2}$$

1. Etudier le sens de variations de f sur $[-1\,;1]$.
2. En déduire les extremums de f sur ce même intervalle.

Exercice 11 :

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3

1. Indiquer si f admet un extremum sur $[0\,;4]$. Si oui, pour quelle valeur de x ?
2. Quel est le signe de $f(x)$ sur $[0\,;1]$?
3. On admet que $f(2) = 0$.

   a. Compléter le tableau de variation avec 2 et $f(2) = 0$.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;4]$.
4. a. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$ sur $[0\,;4]$.

   b. Même question avec $f(x) = 0$.

Exercice 12 :

Soit f une fonction dérivable sur $[-4\,;3]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4		-2		0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction f admet-elle :

   a. un maximum ? b. un minimum ?
2. Peut-on donner le signe de $f(x)$ sur $[-4\,;3]$?
3. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-4\,;3]$.
4. On admet maintenant que $f(-3) = 0$, $f(-1{,}5) = 0$ et $f(1) = 0$.
   En déduire l'ensemble des solutions sur $[-4\,;3]$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-1\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout réel x de I.
3. Tracer C_f et ses tangentes horizontales.
4. a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$?

   b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus petite des solutions.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-10\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 2$$

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$
2. En déduire le sens de variation de f.
3. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$?
4. Discuter, suivant la valeur du réel m, du nombre de solutions de l'équations $f(x) = m$.

Exercice 15 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x + 18$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer le signe de f sur $]-\infty\,;1]$.
3. a. Vérifier que $f(3) = 0$.

   b. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1\,;+\infty[$.

   c. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x^3 \leq 3x + 18$?

Exercice 16 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $I = [0\,;4]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} - \left(1 + \frac{1}{4}x\right)$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. En déduire que pour tout $x \in I$:

$$\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$$

3. Développer $(0{,}5\sqrt{x} - 1)^2$, puis redémontrer que :

$$\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$$

Exercice 17 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - x^2$$

1. Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

   a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

   b. En utilisant le minimum de g sur $[2\,;+\infty[$, démontrer que $g(x)$ est positif sur $[2\,;+\infty[$.

   c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T sur $[0\,;+\infty[$.

III. Preuve des variations d’une fonction polynôme du second degré.

Propriété 3 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$
Son tableau de variation est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0
f	

Une fonction polynôme du degré 2 admet

un ________________________________

atteint en $x =$

Si $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0
f	

Une fonction polynôme du degré 2 admet

un ________________________________

atteint en $x =$

La parabole de sommet $S($ $\qquad$; $\qquad$ $)$, admet un axe vertical de symétrie

d’équation $x =$

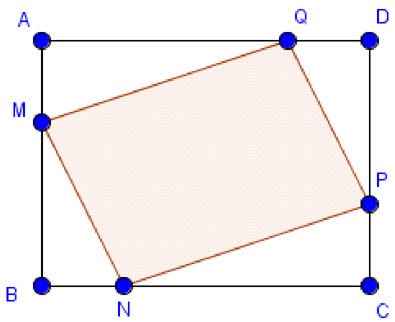
Preuve : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Soit la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2ax + b$$

Cette fonction dérivée est une fonction affine avec comme du coefficient directeur :
$m = 2a$.
Comme $2 > 0$, le signe du coefficient directeur ne dépend que de a.
Le signe d’une fonction affine permet de donner le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de a.
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$
$f'(x)$ s’annule en $-\frac{b}{2a}$ en changeant de signe, donc f admet un extremum en $-\frac{b}{2a}$.

IV. Problèmes

Exercice 18 : Aire et dérivée



$ABCD$ est un rectangle de dimensions :
$AB = 3\ cm$ et $BC = 4\ cm$.

M, N, P et Q sont quatre points tels que :
$AM = BN = CP = DQ = x$.

1. On admet que $MNPQ$ est un parallélogramme.
   On désigne par $A(x)$ l’aire du parallélogramme$MNPQ$.
   Déterminer $A(x)$ en fonction de x.
2. a. Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ; 3] par $f(x) = 2x^2 - 7x + 12$.
   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l’aire $A(x)$ est minimale.

Exercice 19 : Bénéfice et dérivée

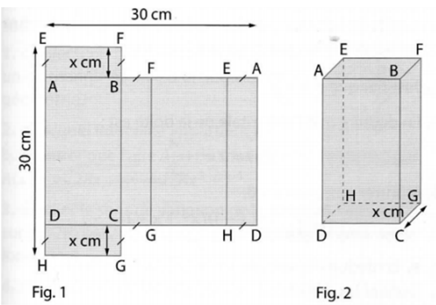
Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 80 tonnes de produit chimique. Le coût de fabrication de x tonnes, exprimé en centaines d’euros, est donné par la fonction C définie par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}05x^2 + 37x + 40$$

où $x \in [0\,;80]$. Chaque tonne est vendue 19 centaines d’euros. On note $R(x)$, la recette en centaines d’euros, obtenue pour la vente de x tonnes de produit.

1. Montrer que le bénéfice mensuel, en centaines d’euros, est donné par la fonction B définie par :
   $$B(x) = -0{,}01x^3 + 1{,}05x^2 - 18x - 40$$
2. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;\,80]$.
3. Déduire de la question précédente le nombre de tonnes que doit vendre l’entreprise pour que son bénéfice mensuel soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice ?

Exercice 20 : Volume et dérivée



La figure 1 ci-dessous représente un patron du parallélépipède rectangle de la figure 2.
Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée carrée de 30 cm de côté.
Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait

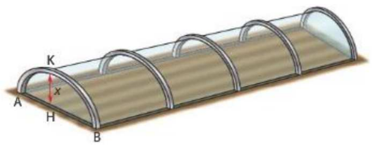
1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède $ABCDEFGH$ s'exprime en cm^3 pour $x \in [0\,;15]$ par
   $$V(x) = 2x(15 - x)^2$$
2. Dresser le tableau de variations de V sur [0 ; 15].
3. Pour quelle valeur de x le volume de cette boîte est-il maximal ? Calculer ce volume maximal.
4. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	0	1	...	15
$f(x)$				

5. Tracer la courbe représentative de V dans le plan muni d'un repère orthogonal, 1cm représentant en abscisses 1cm, et en ordonnée 100 cm^3.
6. Le fabriquant voudrait que le volume de cette boîte soit de 0,5 Litres, c'est à dire 500 cm^3.
   a. Combien de valeurs de x permettent de fabriquer des boîtes de 0,5 Litre? Les faire figurer sur le graphique.
   b. En déterminer des valeurs approchées à 0,1 près à l'aide de la calculatrice.
   c. Parmi ces valeurs, laquelle retiendra le fabriquant?

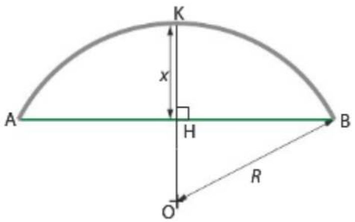
Exercice 21 : Rayon de cintrage minimal

Un jeune agriculteur bio veut fabriquer une serre pour protéger ses cultures de tomates dont les dimensions sont :



$$AB = 400\ cm$$
$$100\ cm \leq x \leq 300\ cm$$

La distance $HK = x$ avec H milieu de $[AB]$ est appelé la flèche.
Le rayon de cintrage est noté R.
Ainsi $R = OA = OB = OK$.

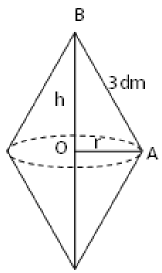


On veut déterminer pour quelle valeur de x le rayon R de cintrage est minimal.

1. a. Exprimer, de deux façons différentes, R en fonction de x et de OH.
   b. En déduire que $OH = \frac{40000-x^2}{2x}$
2. c. Exprimer alors R en fonction de x. Soit f la fonction définie sur $[100\,;300]$ par $f(x) = \frac{20000}{x} + \frac{x}{2}$.
   a. Etudier les variations de f sur $[100\,;300]$
   b. Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum.
3. a. Pour quelle valeur de la flèche x, le rayon est-il minimal ?
4. b. Quelle est alors la particularité de l'arc AB ?

Exercice 22 :

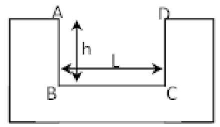
On veut construire une bouée ayant la forme d'un double cône.
Unité choisie : le décimètre (dm) pour tout l'exercice.
On désigne par h la hauteur OB du cône.
On désigne par r le rayon OA de base.
On fixe la longueur AB à 3 dm.



1. a) Exprimer le volume V de la bouée en fonction de r et de h.
   b) En considérant le triangle OAB, déterminer une relation entre r et de h.
   c) En déduire que le volume peut s'écrire sous la forme : $V = \frac{2}{3}\pi\left(9h - h^3\right)$
2. a) Etudier les variations de $V(h)$ sur $[\,0\,;\,3\,]$.
   b) Pour quelle valeur h_0 le volume est-il maximal ? Que vaut alors ce volume V_0?
   (on attend des valeurs exactes)
   c) Quel est le rayon r_0 correspondant à ce volume maximal ?

Exercice 23 :

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois
d'un canal ouvert, de section rectangulaire $ABCD$.
L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m².
On désigne par h la hauteur et par L la largeur (en mètres)
de cette section intérieure. On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $g\,(h) = AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimum.



1) a) Ecrire L en fonction de h.
b) Montrer que $(h) = 2h + \frac{1}{2h}$.
c) Démontrer que la dérivée de g est : $g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$.
d) Etudier les variations de g sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
2) Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de L permettant d'obtenir le frottement minimum.

Exercice 24 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \frac{3x^2}{x-2} + 1$
f est représentée par la courbe C_f dans un repère du plan.
1) a) Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}$
b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f .
c) Préciser s'il y a un maximum local ou un minimum local (ou plusieurs).
2) a) Déterminer l'équation de la tangente T_{-2} au point d'abscisse -2.
b) Etudier les positions relatives de C_f et de T_{-2} sur D_f.
3) Démontrer qu'il existe deux points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$. On donnera leurs abscisses simplifiées *(on trouve des valeurs assez compliquées…)* mais leurs ordonnées ne sont pas demandées.
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Exercice 25 :

Pour chacune des fonctions données, déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations de f sur cet ensemble, et préciser les extremums locaux.

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$
2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
3) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 2$
4) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-9}$
5) $f(x) = \sqrt{x}(x+3)$
6) $f(x) = 3 - \frac{5}{2x-1}$
7) $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{-\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} - 8}$
8) $f(x) = \sqrt{x}(2 - 3x)$
9) $f(x) = (2x+1)^5$
10) $f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x+1}$