Chapitre : Produit scalaire (2) - Applications

Dans tous les exercices, sauf mentions contraires, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Compétence : Déterminer une équation cartésienne à l'aide d'un vecteur directeur (révisions 2nd non faites en 2018-2019)

Exercice 1 : Vecteurs directeurs

Dire si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(1\,;2), B(3\,;7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\7-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$
$\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ ainsi les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

2. $A(-3\,;2), B(4\,;7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4+3\\7-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$
$5\times5-1\times7 = 25-7 = 18 \neq 0$
Ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires et $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de la droite (AB).

3. $A(-1\,;3), B(7\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7+1\\3-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$
$\vec{u} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ ainsi les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Exercice 2 : Déterminer une équation cartésienne

Soit (d) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x - 2$.

Identifier d'autres équations de (d) parmi celle-ci :

a) $x = 4y + 2$	b) $x - 4y - 2 = 0$
$4y = x - 2$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{2}{4}$ Ce n'est pas la même.	**$-4y = -x + 2$ $y = \frac{-x}{-4} + \frac{2}{-4}$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ Ce n'est pas la même.**
c) $x = 8$	d) $-x + 4y + 8 = 0$
Ce n'est pas la même.	**$4y = x - 8$ $y = \frac{1}{4}x - \frac{8}{4}$ $y = \frac{1}{4}x - 2$ C'est la même.**
e) $0{,}5x - 2y = 4$	f) $y + 6 = x$
$-2y = -0{,}5x + 4$ $y = \frac{-0{,}5x}{-2} + \frac{4}{-2}$ $y = \frac{1}{4}x - 2$ C'est la même.	**$y = x - 6$ Ce n'est pas la même.**

Exercice supplémentaire : Vecteurs directeurs

Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) dont on donne une équation.

$(d) : 5x + 4y + 1 = 0$	$(d) : x - 3 = 0$	$(d) : y = 7x - 5$	$(d) :\ -x + 2y = 0$
$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$	**$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$**	**$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$**	**$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$**

Exercice 3 : Déterminer une équation cartésienne

On donne un point A d'une droite (d) et un vecteur directeur de cette droite. Déterminer une équation de (d).

a) $A(-2\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow -(y-3) - 3(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -y + 3 - 3x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3x - y - 3 = 0$$

2ème méthode : (d) : $ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) ainsi

(d) a pour équation : $3x + y + c = 0$

$A(-2\,;\ 3) \in (d)$ donc $3x_A + y_A + c = 0$

$$3\times(-2) + 3 + c = 0$$
$$-6 + 3 + c = 0$$
$$c = 3$$

Conclusion :

(d) a pour équation : $3x + y + 3 = 0$

b) $A(-4\,;6)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-6\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow 7(y-6) - 0(x+4) = 0$$
$$\Leftrightarrow -y + 3 - 3x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7y - 42 = 0$$

2ème méthode : (d) : $ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) ainsi

(d) a pour équation : $-7y + c = 0$

Or $A(-4\,;6) \in (d)$ ainsi $-7y_A + c = 0$

$$-7\times6 + c = 0$$
$$c = 42$$

Conclusion :

(d) a pour équation : $-7y + 42 = 0$ (c'est à dire $y = 6$)

Exercice 4 : Déterminer une équation cartésienne

On donne deux points A et B. Déterminer une équation de la droite (AB).

$A(4\,;5)$ et $B(3\,;3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-4\\3-5\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$M(x\,;y)\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow -2(x-4)+1(y-5)=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+8+y-5=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+y+3=0$$

L'équation cartésienne de (d) a pour équation :

$$-2x+y+3=0$$

$A(-1\,;\,-1)$ et $B(11\,;3)$

Soit $M(x\,;y)$. On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$12(y+1)-4(x+1)=0$$
$$12y+12-4x-4=0$$
$$-4x+12y+8=0$$
$$-x+3y+2=0$$

$A(2\,;2)$ et $B(-2\,;\,-2)$

Soit $M(x\,;y)$. On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$-4(y-2)-(-4)(x-2)=0$$
$$-4y+8+4x-8=0$$
$$4x-4y=0$$
$$x-y=0$$

$A(3\,;7)$ et $B(3\,;\,-9)$

Soit $M(x\,;y)$. On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-16\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$0\times(y-7)-(-16)(x-3)=0$$
$$x-3=0$$
$$x=3$$

Exercice 5 : Déterminer une équation cartésienne

Déterminer une équation de la droite (d), parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(1\,;4), B(-1\,;4)$ et $C(0\,;0)$

Soit $M(x\,;y)\in(d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\4-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par $C\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow 0x+2y=0$$
$$\Leftrightarrow 2y=0$$
$$\Leftrightarrow y=0$$

L'équation cartésienne de (d) a pour équation :

$$y=0$$

2. $A(-1\,;\,-3), B(-2\,;\,-4)$ et $C(1\,;1)$

Soit $M(x\,;y)\in(d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2+1\\-4+3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par C ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$-(y-1)-(-1)\times(x-1)=0$$
$$-y+1+x-1=0$$
$$x-y=0$$

3. $A(1\,;1), B(3\,;3)$ et $C(2\,;7)$

Soit $M(x\,;y)\in(d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par C ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$2(y-7)-2(x-2)=0$$
$$2y-14-2x+4=0$$
$$-2x+2y-10=0$$

<u>Exercice 6 : Droites parallèles</u>

On donne une équation de deux droites (d_1) et (d_2).

Indiquer si ces droites sont parallèles. Donner les coordonnées du point d'intersection si les droites sont sécantes.

1. $(d_1) : 7x + y - 1 = 0$ et $(d_2) : x + 5y - 3 = 0$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ un vecteur de (d_1)

On note $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ un vecteur de (d_2)

$-1 \times 1 - 7 \times (-5) = -1 + 35 = 34 \neq 0$ ainsi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes en un point P. Le point P vérifie :

Méthode 1 : <u>Par substitution</u> (on isole y (ou x)) :

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\x+5y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x+5(-7x+1)-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x-35x+5-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\-34x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\-34x=-2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=-7x+1\\x=\frac{-2}{-34}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7\times\frac{1}{17}+1\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{7}{17}+\frac{17}{17}\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{10}{17}\\x=\frac{1}{17}\end{cases}$$

Ainsi $P\left(\frac{1}{17} ; \frac{10}{17}\right)$.

Méthode 2 : <u>Par combinaison :</u>

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\x+5y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\7x+35y-21=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\(7x+35y-21)-(7x+y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\34y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\y=\frac{20}{34}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+\frac{10}{17}-1=0\\y=\frac{10}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x-\frac{7}{17}=0\\y=\frac{10}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{17}\\y=\frac{10}{17}\end{cases}$$

Ainsi $P\left(\frac{1}{17} ; \frac{10}{17}\right)$.

2. $(d_1) : x - y - 1 = 0$ et $(d_2) : -2x + 2y - 3 = 0$

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_1) et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_2) et $\overrightarrow{u_2} = -2\,\overrightarrow{u_1}$.

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires ainsi les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

<u>Exercice 7 : Déterminer une équation cartésienne</u>

Déterminer une équation de la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.

1. $(d) : 4x + 2y - 5 = 0$ et $A(1 ; 1)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d).

Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.

Soit $M(x ; y) \in (d')$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$.

(d') est la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$-2(y-1) - 4(x-1) = 0$$
$$-2y + 2 - 4x + 4 = 0$$
$$-4x - 2y + 6 = 0$$

2ème méthode :

$(d)//(d)'$ alors $(d') : 4x + 2y + c = 0$

$A(1 ; 1) \in (d') : 4x_A + 2y_A + c = 0$

$4 + 2 + c = 0$

$c = -6$

$(d') : 4x + 2y - 6 = 0$

2. $(d) : x + 2y - 5 = 0$ et $A(0 ; 1)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d).

Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.

Soit $M(x ; y) \in (d')$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$.

(d') est la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$-2(y-1) - x = 0$$
$$-2y + 2 - x = 0$$
$$-x - 2y + 2 = 0$$

3. $(d) : x-5=0$ et $A(1\,;2)$.

On a $(d) : x=5$. C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.
Ainsi (d') est aussi une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Or $A(1\,;2) \in (d')$.
Ainsi $(d') : x=1$ (ou $x-1=0$ sous forme cartésienne).

<u>Exercice 8 : Equation de médianes</u>

Soit les points $A(1\,;-2), B(6\,;5)$ et $C(8\,;\,-6)$.

1. Déterminer une équation des médianes issues de A et de B dans le triangle ABC.

Calculons les coordonnées de A' milieu du segment $[BC]$. $A'\left(\frac{6+8}{2};\frac{5-6}{2}\right)$ soit $A'\left(7;-\frac{1}{2}\right)$.
La médiane issue de A est donc la droite (AA').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}7-1\\-\frac{1}{2}+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}6\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (AA')).
$M \in (AA')$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$12(y+2)-3(x-1)=0$$
$$12y+24-3x+3=0$$
$$-3x+12y+27=0$$

Calculons les coordonnées de B' milieu du segment $[AC]$. $B'\left(\frac{1+8}{2};\frac{-2-6}{2}\right)$ soit $B'\left(\frac{9}{2};-4\right)$.
La médiane issue de B est donc la droite (BB').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}-6\\-4-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-9\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (BB')).
$M \in (BB')$ ssi $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$(y-5)-6(x-6)=0$$
$$y-5-6x+36=0$$
$$-6x+y+31=0$$

2. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des médianes (deux suffisent).

<u>Méthode par combinaison :</u>

$$\begin{cases}-3x+12y+27=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+24y+54=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-6x+24y+54)-(-6x+y+31)=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}23y+23=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\-6x-1+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\-6x+30=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$$ **. Ainsi $G(5\,;-1)$.**

<u>Méthode par substitution :</u>

$$\begin{cases}-3x+12y+27=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+12(6x-31)+27=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+72x-372+27=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}69x-345=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}69x=345\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{345}{69}\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=6\times5-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$$ **. Ainsi $G(5\,;-1)$.**

<u>Exercice 9 : Equation de médianes</u>

Soit les points $A(-1\,;1), B(3\,;7)$ et $C(4\,;\,-2)$.

1. Déterminer les coordonnées des points A' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$.

Calculons les coordonnées de A' milieu du segment $[BC]$. $A'\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$
Calculons les coordonnées de C' milieu du segment $[AB]$. $C'(1;4)$.

2. Déterminer une équation des médianes issues de A et de C dans le triangle ABC.

La médiane issue de A est donc la droite (AA').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}+1\\\frac{5}{2}-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (AA')).
$M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$9(y-1)-3(x+1)=0$$
$$9y-9-3x-3=0$$
$$-3x+9y-12=0$$

La médiane issue de C est donc la droite (CC').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}1-4\\4+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (CC')).
$M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$-(y+2)-2(x-4)=0$$
$$-y-2-2x+8=0$$
$$-2x-y+6=0$$

3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des médianes (deux suffisent).

$$\begin{cases}-3x+9y-12=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+9y-12=0\\-18x-9y+54=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3x+9y-12)+(-18x-9y+54)=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-21x+42=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\-2\times 2-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$ **. Ainsi $G(2\,;2)$.**

Compétence : Déterminer une équation cartésienne à l'aide d'un vecteur normal

Exercice 10 : Equations de droite et vecteur normal

1. Proposer une équation d'une droite (d) dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

Toutes les équations du type : $5x+2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$ conviennent.

2. Proposer une équation d'une droite (d) dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.

Toutes les équations du type : $7x-3y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$ conviennent.

Exercice 11 : Equations de droite et vecteur normal

1. Pourquoi un vecteur normal de la droite (d) d'équation $3x-5y+7=0$ a-t-il pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$?

L'équation de la droite (d) est de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=3$; $b=-5$ et $c=7$.
Or un vecteur normale de la droite d'équation $ax+by+c=0$ est $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
Donc $3x-5y+7=0$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$.

2. Indiquer une équation d'une autre droite ayant le même vecteur normal.

Toutes les équations du type : $3x-5y+c=0$ avec $c\neq 7$ conviennent.

Exercice 12 : Equations de droite et vecteur normal

Donner une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

a) $A(1\,;2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

1[ère] méthode : Produit scalaire

$M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ **et** $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **sont orthogonaux**

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
$\Leftrightarrow 1(x-1)+(-1)(y-2)=0$
$\Leftrightarrow x-1-y+2=0$
$\Leftrightarrow x-y+1=0$

2[ème] méthode :

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **ainsi** $(d) : x-y+c=0$
Or $A(1\,;2)\in(d)$ **ainsi** $x_A-y_A+c=0$
$1-2+c=0$
$c=1$
Donc $(d) : x-y+1=0$

b) $A(-3\,;4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

1[ère] méthode : Produit scalaire

$M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}$ **et** $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ **sont ortho.**

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
$\Leftrightarrow 2(x+3)+(-3)(y-4)=0$
$\Leftrightarrow 2x+6-3y+12=0$
$\Leftrightarrow 2x-3y+18=0$

2[ème] méthode :

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ **ainsi** $(d) : 2x-3y+c=0$
Or $A(-3\,;4)\in(d)$ **ainsi** $2x_A-3y_A+c=0$
$-6-12+c=0$
$c=18$
Donc $(d) : 2x-3y+18=0$

c) $A(1\,;5)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **ainsi** $(d) : x+2y+c=0$
Or $A(1\,;5)\in(d)$ **ainsi** $x_A+2y_A+c=0$
$1+10+c=0$
$c=-11$
Donc $(d) : x+2y-11=0$

d) $A(5\,;-2)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ **ainsi** $(d) : -4x+y+c=0$
Or $A(5\,;-2)\in(d)$ **ainsi** $-4x_A+y_A+c=0$
$-20-2+c=0$
$c=22$
Donc $(d) : -4x+y+22=0$

Exercice 13 : Equations de droite et vecteur normal

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $2x+3y+4=0$.

Les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $2x+3y+4=0$ sont $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $3x-2y-5=0$.

Les coordonnées d'un vecteur normal de la droite d'équation $3x-2y-5=0$ sont $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 14 : Equations de droite et vecteur normal

Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation :

On notera $\vec{n}$ un vecteur normal et $\vec{u}$ un vecteur directeur. Rappel : $\vec{n}\binom{a}{b}$ et $\vec{u}\binom{-b}{a}$

a) $5x-3y+7=0$

$\vec{n}\binom{5}{-3}$	$\vec{u}\binom{3}{5}$

b) $y=-7x+3 \Leftrightarrow \boldsymbol{-7x-y+3=0}$

$\vec{n}\binom{-7}{-1}$	$\vec{u}\binom{1}{-7}$

c) $x=-5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x+5=0}$

$\vec{n}\binom{1}{0}$	$\vec{u}\binom{0}{1}$

d) $y=2 \Leftrightarrow \boldsymbol{y-2=0}$

$\vec{n}\binom{0}{1}$	$\vec{u}\binom{-1}{0}$

e) $-3x+5y-2=0$

$\vec{n}\binom{-3}{5}$	$\vec{u}\binom{-5}{-3}$

f) $y=4x-10 \Leftrightarrow \boldsymbol{4x-y-10=0}$

$\vec{n}\binom{4}{-1}$	$\vec{u}\binom{1}{4}$

Exercice 15 : Equations de droite et vecteur normal

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{5}{-2}$. Le vecteur $\vec{n}\binom{1}{2}$ est-il un vecteur normal de la droite (d) ?

Il suffit de calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$ et vérifier s'il est nul ou non.   **$\vec{u}.\vec{n}=5\times 1+(-2)\times 2=5-4=1\neq 0$ ainsi le vecteur $\vec{n}\binom{1}{2}$ n'est pas un vecteur normal de la droite (d).**

Exercice 16 : Equations de droite et vecteur normal

Soit les points $A(2\,;3)$ et $B(-2\,;8)$.

1. Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AB).

Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ sera un vecteur directeur de la droite (AB). Calculons simplement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.   **$\overrightarrow{AB}\binom{-2-2}{8-3}$ soit $\overrightarrow{AB}\binom{-4}{5}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).**

2. En déduire que le vecteur de coordonnées $\binom{5}{4}$ est un vecteur normal de la droite (AB).

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=(-4)\times 5+5\times 4=-20+20=0$ ainsi le vecteur $\vec{n}\binom{5}{4}$ est un vecteur normal de la droite (AB).

Exercice 17 : Equations de droite et vecteur normal

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{4}{5}$.

Parmi les vecteurs ci-dessous, indiquer ceux qui sont des vecteurs normaux de la droite (d).

a) $\vec{v}\binom{15}{-12}$	**$\vec{u}.\vec{v}=4\times 15+5\times(-12)=60-60=0.$** **$\vec{v}$ est un vecteur normal à la droite (d).**
b) $\vec{w}\binom{2}{8}$	**$\vec{u}.\vec{w}=4\times 2+5\times 8=8+40=48\neq 0.$** **$\vec{w}$ n'est pas un vecteur normal à la droite (d).**
c) $\vec{s}\binom{-4}{5}$	**$\vec{u}.\vec{s}=4\times(-4)+5\times 5=-16+25=9\neq 0.$** **$\vec{s}$ n'est pas un vecteur normal à la droite (d).**
d) $\vec{t}\binom{-5}{4}$	**$\vec{u}.\vec{t}=4\times(-5)+5\times 4=-20+20=0.$** **$\vec{t}$ est un vecteur normal à la droite (d).**

Exercice 18: Hauteurs et vecteur normal

1. Soit les points $A(-1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $C(2\,;-2)$.
   Donner une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C

Faire une figure pour vous aider!!!

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal d'une droite perpendiculaire à (AB). On notera (d) une telle droite.**

1ère méthode :

$M(x\,;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ **sont ortho**

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 4(x-2)+(-1)(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 4x-8-y-2=0$

$\Leftrightarrow 4x-y-10=0$

2ème méthode :

Ainsi (d) : $4x-y+c=0$ convient.

Or $C(2\,;-2) \in (d)$ ainsi $4x_C - y_C + c = 0$

$8+2+c=0$

$c=-10$

Donc (d) : $4x-y-10=0$

2. Soit les points $A(3\,;5)$, $B(6\,;-1)$ et $C(1\,;4)$.
   Donner une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Faire une figure pour vous aider!!!

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. On notera (h) une telle droite.**

Ainsi (h): $-2x-y+c=0$ convient.

Or $B(6\,;-1) \in (h)$ ainsi $-2x_B - y_B + c = 0$

$-12+1+c=0$

$c=11$

Donc (h) : $-2x-y+11=0$

Exercice 19 : Hauteurs et vecteur normal

Soit les points $A(0\,;2)$, $B(4\,;1)$ et $C(3\,;4)$.

1. Donner une équation de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

Faire une figure pour vous aider!!!

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On notera (h_A) une telle droite.**

Ainsi (h_A): $-x+3y+c=0$ convient.

Or $A(0\,;2) \in (h_A)$ ainsi $-x_A+3y_A+c=0$

$0+6+c=0$

$c=-6$

Donc (h_A) : $-x+3y-6=0$

Faire une figure pour vous aider!!!

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la hauteur issue de B dans le triangle ABC. On notera (h_B) une telle droite.**

Ainsi (h_B): $3x+2y+c=0$ convient.

Or $B(4\,;1) \in (h_B)$ ainsi $3x_B+2y_B+c=0$

$12+2+c=0$

$c=-14$

Donc (h_B) : $3x+2y-14=0$

2. a. Déterminer le point d'intersection H de ces deux hauteurs.

Par substitution :

$$\begin{cases}-x+3y-6=0\\3x+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-6\\3(3y-6)+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-6\\9y-18+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\times\frac{32}{11}-6\\y=\frac{32}{11}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{30}{11}\\y=\frac{32}{11}\end{cases}$$

Ainsi le point d'intersection H de ces deux hauteurs a pour coordonnées $\left(\frac{30}{11};\frac{32}{11}\right)$.

Par combinaison :

$$\begin{cases}-x+3y-6=0\\3x+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+9y-18=0\\3x+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow L1+L2\begin{cases}11y-32=0\\3x+2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{32}{11}\\3x+2\times\frac{32}{11}-14=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{30}{11}\\y=\frac{32}{11}\end{cases}$$

b. Calculer $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$. Qu'en déduit-on ?

$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}-\frac{3}{11}\\-\frac{12}{11}\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{11}\times4+\left(-\frac{12}{11}\right)\times(-1) = -\frac{12}{11}+\frac{12}{11} = 0.$

Donc (CH) est la hauteur issue de C.

Exercice 20 : Médiatrices et vecteur normal

1. Soit $A(1\,;\,2)$ et $B(-1\,;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

Faire une figure pour vous aider!!!
Une médiatrice à un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la médiatrice du segment** $[AB]$**. On notera** (d) **une telle droite.**
Ainsi $(d)\colon -2x+2y+c=0$ **convient.**
Notons I **le milieu de** $[AB]$ **ainsi** $I(0\,;3)$.
Or $I(0\,;3)\in(d)$ **ainsi** $-2x_I+2y_I+c=0$
$$6+c=0$$
$$c=-6$$
Donc $(d)\,:\,-2x+2y-6=0$

2. Soit $A(2\,;\,5)$ et $B(-1\,;-3)$. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

Faire une figure pour vous aider!!!
Une médiatrice à un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-8\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la médiatrice du segment** $[AB]$**. On notera** (d) **une telle droite.**
Ainsi $(d)\colon -3x-8y+c=0$ **convient.**
Notons I **le milieu de** $[AB]$ **ainsi** $I(\frac{1}{2}\,;1)$.
Or $I(\frac{1}{2}\,;1)\in(d)$ **ainsi** $-3x_I-8y_I+c=0$
$$-\frac{3}{2}-8=0$$
$$c=\frac{19}{2}$$
Donc $(d)\,:\,-3x-8y+\frac{19}{2}=0$

Exercice 21 : Médiatrices et vecteur normal

Soit $A(-1\,;2), B(0\,;\,-3)$ et $C(3\,;1)$.

1. Détermine une équation de la médiatrice de $[AB]$.

Faire une figure pour vous aider!!!
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la médiatrice du segment** $[AB]$**. On notera** (d_1) **une telle droite.**
Ainsi $(d_1)\colon x-5y+c=0$ **convient.**
Notons I **le milieu de** $[AB]$ **ainsi** $I(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2})$.
Or $I(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2})\in(d_1)$ **ainsi** $x_I-5y_I+c=0$
$$-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+c=0$$
$$c=-2$$
Donc $(d_1)\,:\,x-5y-2=0$

2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[AC]$.

Faire une figure pour vous aider!!!
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la médiatrice du segment** $[AC]$**. On notera** (d_2) **une telle droite.**
Ainsi $(d_2)\colon 4x-y+c=0$ **convient.**
Notons J **le milieu de** $[AC]$ **ainsi** $J(1\,;-\frac{3}{2})$.
Or $J\left(1;\frac{3}{2}\right)\in(d_2)$ **ainsi** $4x_J-y_J+c=0$
$$4-\frac{3}{2}+c=0$$
$$c=-\frac{5}{2}$$
Donc $(d_2)\,:\,4x-y-\frac{5}{2}=0$

3. Déterminer le centre du cercle circonscrit à ABC

$$\begin{cases}x-5y-2=0\\4x-y-\frac{5}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5y+2\\4(5y+2)-y-\frac{5}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5y+2\\20y+8-y-\frac{5}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\times\frac{-11}{38}-6\\y=\frac{-11}{38}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{21}{38}\\y=\frac{-11}{38}\end{cases}$$
Ainsi le centre du cercle circonscrit à ABC **a pour coordonnées** $\left(\frac{31}{38};-\frac{11}{38}\right)$.

Exercice 22 : Tangente à un cercle et vecteur normal

Soit le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,-2)$ et passant par l'origine O du repère.
Déterminer une équation de la tangente à ce cercle passant par O, puis tracer le cercle et cette tangente.

La tangente en O **est la droite passant par** O **et perpendiculaire au rayon** $[O\Omega]$.
$\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la tangente en** O.
On notera (T) **une telle droite.**
Ainsi $(T)\colon x+2y+c=0$ **convient.**
Or $O(0\,;0)\in(T)$ **ainsi** $x_O+2y_O+c=0$
$$c=0$$
Donc $(T)\,:\,x+2y=0$

Exercice 23 : Tangente à un cercle et vecteur normal

Soit C le cercle de centre $\Omega(4\,;\,-2)$ et de rayon $r=10$.

1. Vérifier que le point $M(-2\,;6)$ appartient à C.

Il suffit de vérifier que $\Omega M=10$.
$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ **ainsi** $\Omega M=\sqrt{36+64}=10$.

2. Déterminer une équation de la tangente en M au cercle C.

La tangente en M **est la droite passant par** M **et perpendiculaire au rayon** $r=\ \Omega M$.
$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}$ **est un vecteur normal de la tangente en** M**. On notera** (T) **une telle droite.**
Ainsi $(T)\colon -6x+8y+c=0$ **convient.**
Or $M(-2\,;6)\in(T)$ **ainsi** $-6x_M+8y_M+c=0$
$$12+48+c=0$$
$$c=-60$$
Donc $(T)\,:\,-6x+8y-60=0$

Compétence : Formule de la médiane

Exercice 24 : Formule de la médiane

Soit un triangle ABC tel que $AB = 6, AC = 5$ et $BC = 7$.

En utilisant le théorème de la médiane, calculer les longueurs des médianes de ce triangle.

Soit I est le milieu de $[AB]$, J milieu de $[AC]$ et K milieu de $[BC]$.

$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ **ainsi** $CI^2 = \frac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2\right) = \frac{1}{2}(25 + 49 - 18) = \frac{56}{2} = 28$ **ainsi** $CI = \sqrt{28}$.

$BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$ **ainsi** $BJ^2 = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(36 + 49 - \frac{25}{2}\right) = \frac{145}{4}$ **ainsi** $BJ = \sqrt{\frac{145}{4}}$.

$AB^2 + AC^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BC^2$ **ainsi** $AK^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(36 + 25 - \frac{49}{2}\right) = \frac{73}{4}$ **ainsi** $K = \sqrt{\frac{73}{4}}$.

Compétence : Equations de cercles

Exercice 25 : Equations de cercles

1. Déterminer le rayon du cercle d'équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

$$r = 2$$

2. Déterminer les coordonnées du centre du cercle d'équation $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 14$.

$$(5\,;7)$$

3. Déterminer une équation du cercle de centre $A(1\,;0)$ et de rayon 2.

$M(x\,;y) \in C \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$

4. Déterminer une équation du cercle de centre $O(\mathbf{0}\,;\mathbf{0})$ et de rayon 3.

$M(x\,;y) \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9 = 0$

5. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $A(1\,;9)$ et $B(4\,;3)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-9 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix}$

$M(x\,;y) \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) + (y-9)(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - x + 4 + y^2 - 3y - 9y + 27 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 12y + 31 = 0$

6. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ tel que $A(-3\,;5)$ et $B(2\,;-1)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-5 \end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}$

$M(x\,;y) \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) + (y-5)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3x - 6 + y^2 + y - 5y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 4y - 11 = 0$

7. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 5 = 0$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 - 5 = 0$

$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$

L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ est un cercle de centre $\Omega(3\,;\,-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 26 : Intersection d'un cercle et d'une droite.

1. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'interception de la droite (d) d'équation $2x - y + 1 = 0$ et du cercle C d'équation $x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0$.

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 - 4x + (2x+1)^2 - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x^2 - 20 = 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

Ainsi on obtient deux points d'intersection $A(-2\ ;\ -3)$ et $B(2\ ; 5)$.

2. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'interception de la droite (d) d'équation $6x + 2y - 10 = 0$ et du cercle C de centre $A(-1\ ;\ -1)$ et de rayon 5.

Le cercle C de centre $A(-1\ ;\ -1)$ et de rayon 5 a pour équation :

$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$

$$\begin{cases} 6x + 2y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 5 \\ x^2 + (-3x+5)^2 + 2x + 2(-3x+5) - 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 5 \\ 10x^2 - 34x + 12 = 0 \end{cases}$$

Il faut résoudre $10x^2 - 34x + 12 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = \cdots = 676 > 0$.

Ce trinôme a deux racines $x_1 = 0,4$ et $x_2 = 3$.

Pour $x = 0,4$ on a $y = -3 \times 0,4 + 5 = 3,8$

Pour $x = 3$ on a $y = -3 \times 3 + 5 = 4$

Ainsi on obtient deux points d'intersection $A(0,4\ ;\ 3,8)$ et $B(3\ ; -4)$.

Compétence : Calculs de longueurs, d'aires et d'angles

Exercice 27 : Calculs de longueurs et d'angles

Dans chacun des cas suivants on demande de trouver pour un triangle ABC une mesure des trois angles $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ et les longueurs $a = BC, b = AC, c = AB$. Tous les résultats sont à arrondir à 10^{-2}.

Attention : Il est indispensable d'utiliser la touche ANS de la calculatrice pour perdre le moins de précision possible.

1. $a = 125$; $\hat{A} = 54°$; $\hat{B} = 65°$

$\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 61°$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})}$ **ainsi** $b = \frac{a\sin(\widehat{B})}{\sin(\widehat{A})} \approx 140,03.$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ **ainsi** $c = \frac{a\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{A})} \approx 135,14.$

2. $a = 512$; $b = 426$; $\hat{A} = 48{,}50°$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})}$ **ainsi** $\sin(\widehat{B}) = \frac{b\sin(\widehat{A})}{a}$ **ainsi** $\sin(\widehat{B}) \approx 0,62$ **ainsi** $\widehat{B} \approx 38,55°$

$\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 92,95°$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ **ainsi** $c = \frac{a\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{A})} \approx 682,71$ **(attention ici on perd de la précision en utilisant l'angle $\widehat{C}$.)**

3. $a = 6{,}34$; $b = 7{,}30$; $c = 9{,}98$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$ **ainsi** $cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{112,6948}{145,708} \approx 0,77$ **ainsi** $\widehat{A} \approx 39,34°.$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{A})$ **ainsi** $cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{86.506}{126,5464} \approx 0,68$ **ainsi** $\widehat{A} \approx 46,88°.$

$\widehat{C} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) \approx 93,78°$

4. $b = 215$; $c = 150$; $\hat{B} = 42°$

$\frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ **ainsi** $\sin(\widehat{C}) = \frac{c\sin(\widehat{B})}{b} \approx 0,47$ **ainsi** $\widehat{C} \approx 27,83$

$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) \approx 110.17°$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})}$ **ainsi** $a = \frac{b\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{B})} \approx 301,11$

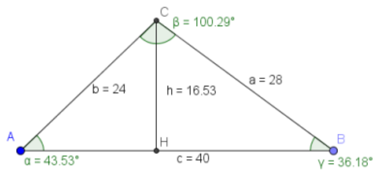
5. $\hat{B} = 50{,}29°$; $\hat{C} = 88{,}36°$; $a = 48{,}17$

$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 41,35°$

$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})}$ **ainsi** $b = \frac{a\sin(\widehat{B})}{\sin(\widehat{A})} \approx 56,09.$ **De même** $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$ **ainsi** $c = \frac{a\sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{A})} \approx 72,88.$

Exercice 28 : Calculs d'angles et d'aires

On considère le triangle ABC tel que $AC = 24\ cm, BC = 28\ cm$ et $AB = 40\ cm$.



1. Faire un dessin à l'échelle $\frac{1}{4}$.
2. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ACB}$ du triangle ABC. Arrondir à 10^{-1}.

On note $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$ **ainsi** $cos(\widehat{C}) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{-240}{1344} \approx -0,18$ **ainsi** $\widehat{C} \approx 100,3°.$

3. Calculer l'aire S du triangle ABC. Arrondir à 10^{-1}.

$S = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C}) \approx 330,6cm^2.$

4. Calculer l'aire S' du triangle dessiné à la première question.

$S' = \frac{S}{16} \approx 20,7 = cm^2$

5. On appelle H le pied de la hauteur issue du point C. Placer H sur le dessin.
   Donner l'expression de l'aire du triangle ABC en fonction de CH. En déduire CH.

$S = \frac{base \times h}{2} = \frac{c \times CH}{2}.$ **Ainsi** $CH = \frac{2S}{c} = 16,53$

6. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$. Arrondir à 10^{-1}.

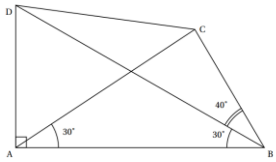
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$ **ainsi** $cos(\widehat{A}) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1392}{1920} = 0,725$ **ainsi** $\widehat{A} \approx 43,5°.$

7. Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

$\widehat{B} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 36,2°$

Exercice suppémentaire : Calculs d'angles et d'aires

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que $AB = 10\ cm$, $\widehat{BAD} = 90°$, $\widehat{CAB} = 30°$, $\widehat{ABD} = 30°$ et $\widehat{DBC} = 40°$.



1. Calculer AD et BD : donner les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.

$\tan \widehat{ABD} = \frac{AD}{AB}$ ainsi $AD = 10\tan(30) = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,8$ cm.
Dans le triangle DAB rectangle en A on a :
$DB^2 = AD^2 + AB^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10^2 = \frac{100}{3} + 100 = \frac{400}{3}$ ainsi $BD = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11,5$ cm
Remarque : On aurait pu en utilisant des calculs de mesure d'angles de collège, montrer que si on note O le centre du quadrilatère $ABCD$ que AOB et AOD sont isocèles en O ainsi $BD = 2AD = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

2. Calculer AC et BC : donner les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.

On se place dans le triangle ABC.
$\frac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{C})}$ ainsi $AC = \frac{AB\sin(\widehat{B})}{\sin(\widehat{C})} = \frac{10sin(70)}{sin(80)} \approx 9,5$ cm.
$\frac{BC}{\sin(\widehat{A})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{C})}$ ainsi $BC = \frac{BC\sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{C})} = \frac{10sin(30)}{sin(80)} = \frac{5}{sin(80)} \approx 5,1$ cm.

3. En déduire DC : préciser la formule utilisée et donner la valeur approchée arrondie au millimètre.

On se place dans le triangle DCB.
$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \times BC \times \cos(\widehat{B}) \approx 68,89$ ain $DC \approx 8,3$. (Utiliser les valeurs exactes).

4. Calculer l'aire S du quadrilatère $ABCD$: préciser la méthode utilisée et donner la valeur approchée arrondie au millimètre carré.

$S = A(ABD) + A(BCD) = \frac{1}{2}AD \times AB + \frac{1}{2}BC \times BDsin(40) \approx 58,18$ cm².

Remarque : La méthode utilisée dans cet exercice pour le calcul de DC peut être utilisée pour calculer, à partir de deux points A et B situés sur une côte, la distance séparant deux points D et C situés en mer.

Compétence : Formules d'addition et de duplication

Exercice 29 : Formules d'addition

1. a. Quelle est la valeur exacte des nombres :

$\cos\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{4}$
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$.

$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2. a. Quelle est la valeur exacte des nombres :

$\cos\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{4}$	$\sin\frac{\pi}{4}$
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. En déduire $\sin\frac{5\pi}{12}$.

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 30 : Formules de duplication

1. On sait que $\cos a = 0{,}6$. Déterminer $\cos(2a)$.

$\boldsymbol{\cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 = 2 \times 0,6^2 - 1 = -0,28}$

2. On sait que $\sin a = 0{,}3$. Déterminer $\cos(2a)$.

$\boldsymbol{\cos(2a) = 1 - 2sin^2(a) = 1 - 2 \times 0,3^2 = 0,82}$

3. On sait que $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer $\sin(2a)$.

$\boldsymbol{\sin(2a) = 2sin(a)cos(a) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1}$

4. Soit a le réel tel que $\cos a = \frac{2}{3}$ et $\sin a = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\cos(2a)$ et de $\sin(2a)$.

$\boldsymbol{\cos(2a) = 2cos^2(a) - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}}$

$\boldsymbol{\sin(2a) = 2sin(a)cos(a) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}}$