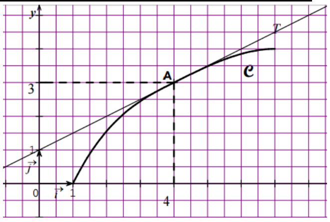
Chapitre : Dérivation (2) : Fonctions dérivées

Compétence : Rappel : Nombre dérivée et tangentes (lecture graphique).

Exercice 1 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse 4.

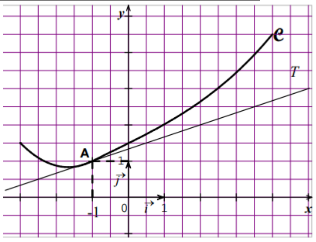


Donner la valeur de $f(4)$ et donner la valeur de $f'(4)$.

$\boldsymbol{f(4) = 3}$	$\boldsymbol{f'(4) = \frac{1}{2}}$

Exercice 2 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse -1.

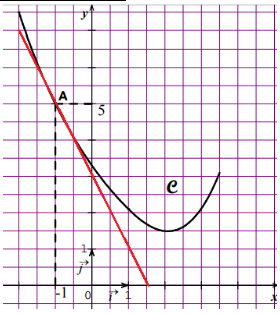


Donner la valeur de $f(-1)$ et donner la valeur de $f'(-1)$.

$\boldsymbol{f(-1) = 1}$	$\boldsymbol{f'(-1) = \frac{1}{3}}$

Exercice 3 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1.
On sait $f'(-1) = -2$



1. Donner $f(-1)$

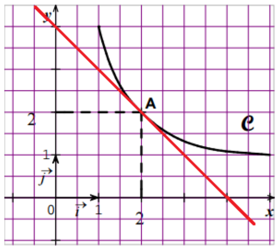
$\boldsymbol{f(-1) = 5}$

2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

$\boldsymbol{y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)}$
$\boldsymbol{y = -2(x + 1) + 5}$
$\boldsymbol{y = -2x + 3}$

Exercice 4 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2.
On sait $f'(2) = -1$



1. Donner $f(2)$

$\boldsymbol{f(2) = 2}$

2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

$\boldsymbol{y = f'(2)(x - 2) + f(2)}$
$\boldsymbol{y = -(x - 2) + 2}$
$\boldsymbol{y = -x + 4}$

Compétence : Dérivées des fonctions de référence, nombre dérivée et tangentes.

Exercice 5 : Nombre dérivée

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a pour :

1. $f(x) = x^2$ et $a = -5$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-5) = 2 \times (-5) = -10}$

2. $f(x) = x^3$ et $a = 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-5) = 3 \times 2^2 = 12}$

Exercice 6 : Equation de tangente

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = x^2$ et $a = 2$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(2) = 2 \times 2 = 4}$
$\boldsymbol{f(2) = 2^2 = 4}$
$\boldsymbol{y = f'(2)(x - 2) + f(2)}$
$\boldsymbol{y = 2(x - 2) + 2}$
$\boldsymbol{y = 4x - 2}$

2. $f(x) = x^3$ et $a = -1$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3}$
$\boldsymbol{f(-1) = (-1)^3 = -1}$
$\boldsymbol{y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)}$
$\boldsymbol{y = 3(x + 1) - 1}$
$\boldsymbol{y = 3x + 2}$

Compétence : Opération sur la dérivée

Exercice 7 : Produit par un réel

Dériver les fonctions suivantes définies par :

1. $f(x) = 6x$	2. $g(x) = -5x^3$	3. $h(x) = 7x$	4. $k(x) = -2x^2$
$\boldsymbol{f'(x) = 6}$	$\boldsymbol{g'(x) = -5 \times 3x^2}$ $\boldsymbol{g'(x) = -15x^2}$	$\boldsymbol{h'(x) = 7}$	$\boldsymbol{k'(x) = -2 \times 2x}$ $\boldsymbol{k'(x) = -4x}$

Exercice 8 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 5x + 1$

$\boldsymbol{f'(x) = 5}$

b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$

$\boldsymbol{f'(x) = 6x - 5}$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 + 2x - 10}$

d) $f(x) = 7x^3 - x^2 - 1$

$\boldsymbol{f'(x) = 21x^2 - 2x}$

e) $f(x) = x - 9$

$\boldsymbol{f'(x) = 1}$

f) $f(x) = -5x^2 + 6x - 9$

$\boldsymbol{f'(x) = -10x + 6}$

g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{5}{2} \times 2x + \frac{1}{4}}$

$\boldsymbol{f'(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{4}}$

h) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 5x^2 - \frac{1}{8}x$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 10x - \frac{1}{8}}$

Exercice 9: Pour chacun de cas suivants, calculer la dérivée de f

1) $f(x) = x^3 - 24x^2 + 180x + 60$ sur [0 ;15]

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 48x + 180}$

2) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 80$ sur [0 ;10]

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 24x + 45}$

3) $f(x) = 2x^3 - 18x^2 + 57x$ sur [0 ;8]

$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 36x + 57}$

4) $f(x) = 0{,}1x^3 - 10{,}5x^2 + 300x + 150$ sur [0 ;60]

$\boldsymbol{f'(x) = 0{,}3x^2 - 21x + 300}$

Compétence : Du sens de variation au signe de la dérivée

Exercice 10 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable et croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[3\,;\,+\infty[$?

Pour tout $x \in [3\,;\,+\infty[$ on a $f'(x) \geq 0$

2. Soit f une fonction dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?

Pour tout réel x on a $f'(x) \leq 0$

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et croissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
   a. Quel est le signe de la dérivée de f sur $]-\infty\,;4]$?

$f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty\,;4]$.

   b. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[4\,;\,+\infty[$?

$f'(x) \geq 0$ sur $[4\,;\,+\infty[$.

Exercice 11 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est croissante sur $]-\infty - 5]$ et décroissante sur $[-5\,;\,+\infty[$. Recopier et compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

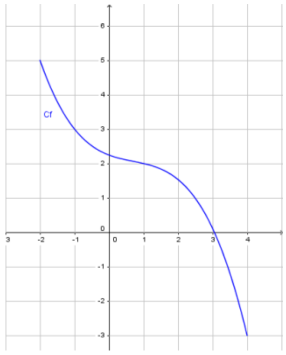
2. Soit f une fonction dérivable sur $[-8\,;8]$ et dont le tableau de variations est le suivant :

x	-8		-3		5		8
f	-1	↗	4	↘	0	↗	2

Quel est le signe de la dérivée de f sur :

a. $[-8\,;\,-3]$	b. $[-3\,;\,5]$	c. $[5\,;\,8]$
$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$	$\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$	$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$

Exercice 12 : Du sens de variation au signe de la dérivée



On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $[-2\,;4]$.

La fonction f est décroissante sur $[-2\,;4]$.

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

$f'(x)$ est négatif sur $[-2\,;4]$.

Compétence : Du signe de la dérivée au sens de variation

Exercice 13 : Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-7\,;\,+\infty[$ telle que $f'(x)$ est négatif pour tout réel $x \in [-7\,;\,+\infty[$.
   Quel est le sens de variation de f sur $[-7\,;\,+\infty[$?

La fonction f est décroissante sur $[-7\,;\,+\infty[$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = x^2 + 3$ tout réel x.
   Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?

Pour tout réel x, $f(x) > 0$ ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ est positif sur $]-\infty;\ 5]$ et négatif sur $[5\,;\,+\infty[$.
   a. Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty;\ 5]$?

La fonction f est croissante sur $]-\infty;\ 5]$.

   b. Quel est le sens de variation de f sur $[5\,;\,+\infty[$?

La fonction f est décroissante sur $[5\,;\,+\infty[$.

Exercice 14 : Du signe de la dérivée au sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $f'(x)$.

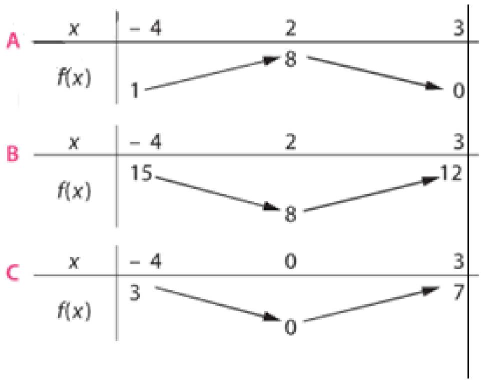
x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En déduire les variations de la fonction f.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty;\ -3]$ et sur $[4\,;\,+\infty[$.
La fonction f est croissante sur $[-3\,;\ 4]$.

Exercice 15 :

A chaque fonction A, B et C dont on a le tableau de variations, associer le tableau de signes 1, 2 ou 3 de sa dérivée $f'(x)$.



①

x	-4		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

②

x	-4		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

③

x	-4		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

A va avec 2 car sur $[-4\,;2]$ la fonction f est croissante (A) et $f'(x) \geq 0$. (2)
B va avec 1 car sur $[-4\,;2]$ la fonction f est décroissante (B) et $f'(x) \leq 0$. (1)
C va avec 3 car sur $[-4\,;0]$ la fonction f est décroissante (C) et $f'(x) \leq 0$. (3)

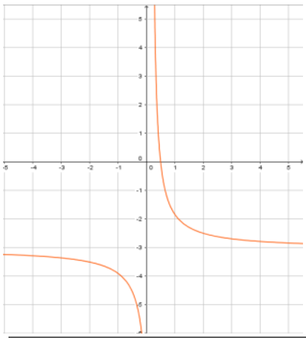
Exercice 16 : Associer à chaque courbe, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

Voici les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ et de leurs fonctions dérivées f', g', h' et k'.

La courbe représentant f, g, h et k sont donnés, respectivement, par le graphique 1, 2, 3 et 4.

Associer à chaque courbe numérotée de 1 à 4, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

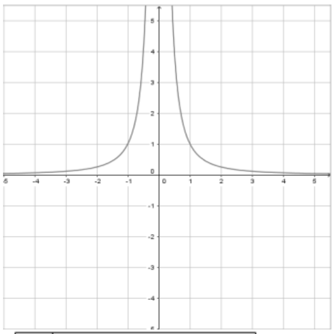
1.



x	$-\infty$		$\frac{9}{50}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	

$\mathbf{1 \rightarrow d}$

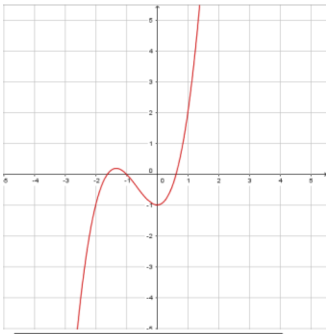
2.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

$\mathbf{2 \rightarrow c}$

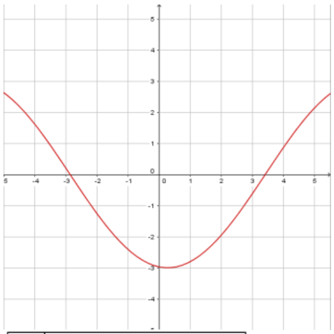
3.



x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\mathbf{3 \rightarrow a}$

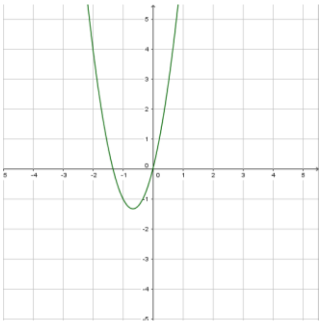
4.



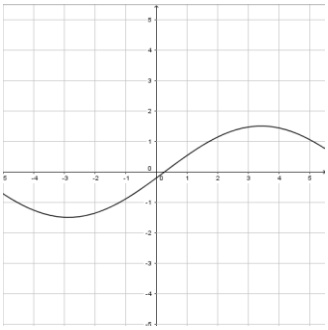
x		0,2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

$\mathbf{4 \rightarrow b}$

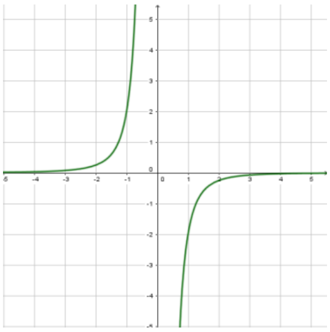
a.



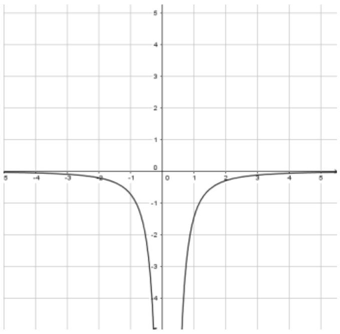
b.



c.



d.



Compétence : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Exercice 17 : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Donner le sens de variations des fonctions suivantes :

1. f définie sur $I = [-3\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\mathbf{f'(x) = 2x - 2}$
$\mathbf{f'(x) = 0}$
$\mathbf{2x - 2 = 0}$
$\mathbf{x = 1.}$

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

$\mathbf{m > 0.}$

2. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(x) = -3x^2 + x + 2$

$\mathbf{f'(x) = -6x + 1}$ **(fonction affine)**
$\mathbf{f'(x) = 0}$
$\mathbf{-6x + 1 = 0}$
$\mathbf{x = \frac{1}{6}}$

x	-3		$\frac{1}{6}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-28	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$	-8

$\mathbf{m < 0.}$

3. f définie sur $I = [0\,;4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

$\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 12x + 12}$ **(fonction trinôme)**
$\mathbf{f'(x) = 3(x^2 - 4x + 4)}$
$\mathbf{f'(x) = 3(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2)}$
$\mathbf{f'(x) = 3(x - 2)^2}$
On résout :
$\mathbf{f'(x) = 0}$
$\mathbf{3(x - 2)^2 = 0}$
$\mathbf{(x - 2)^2 = 0}$
$\mathbf{x - 2 = 0}$
$\mathbf{x = 2}$

x	0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\nearrow$	16

Un carré est toujours positif et 3>0 (ou $\mathbf{a = 3 > 0}$)

4. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(t) = -t^3 - 3t^2 + 9$

$f'(t) = -3t^2 - 6t$ (fonction trinôme)
$f'(t) = t(-3t - 6)$
On résout $f'(x) = 0$
$t(-3t-6) = 0$
$t = 0$ ou $-3t - 6 = 0$
$t = 0$ ou $-3t = 6$
$t = 0$ ou $t = -2$

t	-3		-2		0		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	$\searrow$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	-11

$a < 0$.

Exercice 18 :

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par
$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$
1) a) Calculer $f'(x)$.

$f'(x) = 2x - 2$

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

On résout $f'(x) = 0$
$2x - 2 = 0$
$2x = 2$
$x = 1$

Comme le coefficient directeur de f' est $m = 2 > 0$, on a :

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Voir plus haut.

d) Déterminer le minimum de la fonction f.

Le minimum de la fonction f sur $[-3\,;3]$ est -4 atteint en $x = 1$.

2) a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = (x+1)(x-3)$$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= x^2 - 3x + x - 3\\ &= x^2 - 2x - 3\\ &= f(x)\end{aligned}$$

2) b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

On cherche à résoudre $f(x) = 0$
$(x+1)(x-3) = 0$
$x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$x = -1$ ou $x = 3$

Ainsi les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont $A(-1\,;0)$ et $B(3\,;0)$.

Exercice 19 :

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par
$$f(x) = -x^2 - x + 2$$
1) a) Calculer $f'(x)$.

$f'(x) = -2x - 1$

b) Etudier le signe de $f'(x)$.

On résout $f'(x) = 0$
$-2x - 1 = 0$
$-2x = 1$
$x = -\frac{1}{2}$

Comme le coefficient directeur de f' est : $m = -2 < 0$, on a :

x	-3		$-\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	-10

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Voir plus haut.

d) Déterminer le maximum de la fonction f.

Le maximum de la fonction f sur $[-3\,;3]$ est $\frac{9}{4}$ atteint en $x = -\frac{1}{2}$.

2) a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire :
$$f(x) = -(x-1)(x+2)$$

$$\begin{aligned}-(x-1)(x+2) &= -(x^2 + 2x - x - 2)\\ &= -(x^2 + x - 2)\\ &= -x^2 - x + 2\\ &= f(x)\end{aligned}$$

2) b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses, puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

On cherche à résoudre $f(x) = 0$
$-(x-1)(x+2) = 0$
$x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 1$ ou $x = -2$

Ainsi les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont $A(1\,;0)$ et $B(-2\,;0)$.

Exercice 20 :

La fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 20$$

a) Calculer $f'(x)$.

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 24x + 45}$

f' est une fonction polynôme du 2nd degré de la forme :
$f(x) = ax^2 + bx + c$

b) Montrer que $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$ sont des racines de $f'(x)$.

r est une racine d'un polynôme $P(x)$ lorsque $P(r) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(3) &= 3 \times 3^2 - 24 \times 3 + 45 \\ &= 3 \times 9 - 72 + 45 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi 3 est racine de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(5) &= 3 \times 5^2 - 24 \times 5 + 45 \\ &= 3 \times 25 - 120 + 45 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi 5 est racine de $f'(x)$.

c) En déduire la forme factorisée de $f'(x)$.

$\boldsymbol{f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$
$\boldsymbol{f'(x) = 3(x - 3)(x - 5)}$

d) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.

- **On résout $f'(x) = 0$ (inutile si l'on a déjà les racines)**

$\boldsymbol{3(x - 3)(x - 5) = 0}$
$\boldsymbol{x - 3 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 5 = 0}$
$\boldsymbol{x = 3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 5}$

x	0		3		5		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	20	↗	74	↘	70	↗	270

e) Dresser le tableau de variations de f

voir plus haut

Exercice 21 :

La fonction f est définie sur [0 ;30] par :

$$f(x) = 0{,}2x^3 - 2{,}1x^2 + 3{,}6x + 6$$

1) a) Calculer $f'(x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 0{,}6x^2 - 4{,}2x + 3{,}6}$

1) b) Vérifier que $f'(x) = 0{,}6\,(x - 1)(x - 6)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0{,}6\,(x - 1)(x - 6)} &= \boldsymbol{0{,}6(x^2 - 6x - x + 6)} \\ &= \boldsymbol{0{,}6(x^2 - 7x + 6)} \\ &= \boldsymbol{0{,}6x^2 - 4{,}2x + 3{,}6} \\ &= \boldsymbol{f'(x)} \end{aligned}$$

2) Donner le signe de $f'(x)$.

On cherche les racines de $f'(x)$
$\boldsymbol{f'(x) = 0}$
$\boldsymbol{0{,}6\,(x - 1)(x - 6) = 0}$
$\boldsymbol{x - 1 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 6 = 0}$
$\boldsymbol{x = 1}$ **ou** $\boldsymbol{x = 6}$

Comme $a = 0{,}6 > 0$ alors

x	0		1		6		30
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	6	↗	$\frac{77}{10}$	↘	$-\frac{24}{5}$	↗	3624

3) En déduire le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle [1 ;6]

Pour tout $x \in [1\,;6]$ $f'(x) \leq 0$ ainsi f est décroissante sur $[1\,;6]$.

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur [0 ;10] par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 80$$

1) Déterminer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = 3(x-3)(x-5)$$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 24x + 45}$

$\boldsymbol{3(x-3)(x-5) = 3(x^2 - 5x - 3x + 15)}$
$\boldsymbol{= 3(x^2 - 8x + 15)}$
$\boldsymbol{= 3x^2 - 24x + 45}$
$\boldsymbol{= f'(x)}$

2) Déterminer le tableau de variations de f.

On résout $f'(x) = 0$
$\boldsymbol{3(x-3)(x-5) = 0}$
$\boldsymbol{x - 3 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 5 = 0}$
$\boldsymbol{x = 3}$ **ou** $\boldsymbol{x = 5}$

Comme $a = 3 > 0$ on a :

x	0		3		5		10
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	80	↗	134	↘	130	↗	330

Exercice 23 :

f est la fonction définie par :
$f(x) = 0{,}1x^3 - 10{,}5x^2 + 300x + 150$ sur [0 ;60]

1) Montrer que $f'(x) = 0{,}3\,(x - 50)(x - 20)$

$\boldsymbol{f'(x) = 0{,}3x^2 - 21x + 300}$

$\boldsymbol{0{,}3\,(x - 50)(x - 20)}$
$\boldsymbol{= 0{,}3(x^2 - 20x - 50x + 1000)}$
$\boldsymbol{= 0{,}3(x^2 - 70x + 1000)}$
$\boldsymbol{= 0{,}3x^2 - 21x + 300}$
$\boldsymbol{= f'(x)}$

2) Déterminer le signe de $f'(x)$

On résout $f'(x) = 0$
$\boldsymbol{0{,}3\,(x - 50)(x - 20) = 0}$
$\boldsymbol{x - 50 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 20 = 0}$
$\boldsymbol{x = 50}$ **ou** $\boldsymbol{x = 20}$

3) Dresser le tableau de variations de f.

Comme $a = 0{,}3 > 0$ on a :

x	0		20		50		60
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	150	↗	2750	↘	1400	↗	1950

Exercice 24 :

On considère la fonction f définie sur [0 ;7] par

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

1) a) Calculer $f'(x)$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x - 6}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ;7]

On résout $f'(x) = 0$
$\boldsymbol{2x - 6 = 0}$
$\boldsymbol{2x = 6}$
$\boldsymbol{x = 3}$

c) En déduire la tableau de variations de la fonction f sur [0 ;7]

Comme le coefficient directeur de f' est $m = 2 > 0$, on a :

x	0		3		7
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	5	↘	−4	↗	12

2) La fonction f est représentée par la parabole appelée P.

a) Montrer que 1 et 5 sont racines de f.

$\boldsymbol{f(1) = 1^2 - 6 \times 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0}$
Donc 1 est racine de f.

$\boldsymbol{f(5) = 5^2 - 6 \times 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0}$
Donc 5 est racine de f.

b) Quelles sont les coordonées du sommet S de la parabole ? quel est l'axe de symétried la parabole P ?

<u>1ère méthode :</u> On utilise le tableau de variation :
$S(3\,;-4)$ donc l'axe de symétrie de la parabole P est la droite verticale d'équation : $x = 3$.

<u>2ème méthode :</u> Avec α et β
Rappel : $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$ $= \frac{1+5}{2} = 3$
$\boldsymbol{\beta = f(3) = -4}$
Le sommet de la parabole a pour coordonnées :
$S(\alpha\,;\,\beta)$
La parabole admet toujours pour axe de symétrie, la droite verticale d'équation $x = \alpha$

Exercice 25 :

On a établi que le coût horaire d'utilisation d'une machine, en fonction du temps t d'utilisation en heure, est donné en euros par : $f(t) = 0{,}4t^2 + 60t + 180$ pour t∈[20 ;100].

1) Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur [20 ;100]

$\boldsymbol{f'(t) = 0,8t + 60}$

On résout $\boldsymbol{f'(t) = 0}$

$\boldsymbol{0,8t + 60 = 0}$

$\boldsymbol{0,8t = -60}$

$\boldsymbol{t = -\frac{60}{0,8}}$

$\boldsymbol{t = -75 \notin [20\,;100]}$**.**

2) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur [20 ;100]

x	20		100
$f'(x)$		+	
$f(x)$	1540	↗	10180

3) Donner la valeur maximale et la valeur minimale du coût horaire d'utilisation de cette machine.

La valeur minimale du coût horaire est de 1 540€ pour 20h d'utilisation.
La valeur maximale du coût horaire est de 10 180€ pour 100h d'utilisation.

Exercice 26 :

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre.
La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 15.
Pour l'entreprise, le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles est $B(x) = -0{,}1\,x^3 + 1{,}2x^2 + 6x - 5$.

1) Montrer que $B'(x) = -0{,}3(x - 10)(x + 2)$

$\boldsymbol{B'(x) = -0,3x^2 + 2,4x + 6}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{-0,3(x-10)(x+2)} &= \boldsymbol{-0,3(x^2 + 2x - 10x - 20)}\\ &= \boldsymbol{-0,3(x^2 - 8x - 20)}\\ &= \boldsymbol{-0,3x^2 + 2,4x + 6}\\ &= \boldsymbol{B'(x)}\end{aligned}$$

2) Combien de tonnes de bouteilles en verre doit produire quotidiennement l'entreprise pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

On cherche à dresser le tableau de variation de la fonction B.

On résout $\boldsymbol{B'(x) = 0}$

$\boldsymbol{-0,3(x-10)(x+2) = 0}$

$\boldsymbol{x - 10 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x + 2 = 0}$

$\boldsymbol{x = 10}$ **ou** $\boldsymbol{x = -2 \notin [0\,;15]}$

Comme $a = -0,3 < 0$, on met le signe de a à « l'extérieur des racines ».
10 est la deuxième racine donc l'extérieur est « à droite du zéro ».

x	0		10		15
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−5	↗	75	↘	$\frac{35}{2}$

Pour avoir un bénéfice maximal, l'entreprise doit produire quotidiennement 10 tonnes de bouteilles. Le bénéfice maximal sera de 75000€

Exercice 27 :

Une entreprise fabrique et vend une quantité de x objets. La capacité maximale de production de l'entreprise est de 21 objets. Le coût total de fabrication de x objets, exprimé en euros est donné par :

$$C(x) = 2x^3 - 54x^2 + 470x + 80$$

Chaque objet est vendu 200€.

1) Pour 12 objets fabriqués et vendus, calculer le coût de fabrication, la recette et le bénéfice.

Coût de fabrication :

$$\boldsymbol{C(12) = 2 \times 12^3 - 54 \times 12^2 + 470 \times 12 + 80}$$
$$\boldsymbol{= 1400€}$$

Recette :

$$\boldsymbol{R(12) = 200 \times 12 = 2400€}$$

Bénéfice :

$$\boldsymbol{B(12) = R(12) - C(12)}$$
$$\boldsymbol{= 2400 - 1400}$$
$$\boldsymbol{= 1000€}$$

2) $R(x)$ et $B(x)$ désignent le recette et le bénéfice pour x objets vendus.

a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

Chaque objet est vendu 200€ donc :

$$\boldsymbol{R(x) = 200x}$$

b) Montrer que le bénéfice pour x objets vendus est :

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

$$\boldsymbol{B(x) = R(x) - C(x)}$$
$$\boldsymbol{= 200x - (2x^3 - 54x^2 + 470x + 80)}$$
$$\boldsymbol{= 200x - 2x^3 + 54x^2 - 470x - 80}$$
$$\boldsymbol{= -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80}$$

3) On considère la fonction B définie sur [0 ;221] par

$$B(x) = -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$$

a) Calculer $B'(x)$ et montrer que 15 et 3 sont racines de $B'(x)$

Pour tout $x \in [0\,;21]$ on a :

$$\boldsymbol{B'(x) = -6x^2 + 108x - 270}$$

$$\boldsymbol{B'(15) = -6 \times 15^2 + 108 \times 15 - 270 = 0}$$
$$\boldsymbol{B'(3) = -6 \times 3^2 + 108 \times 3 - 270 = 0}$$

Ainsi 15 et 3 sont racines de $B'(x)$.

$$\boldsymbol{B'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$
$$\boldsymbol{= -6(x - 3)(x - 15)}$$

b) Etudier le signe de $B'(x)$sur [0 ;21].

On résout $B'(x) = 0$ (ou on se sert des racines).

$$\boldsymbol{-6(x - 3)(x - 15) = 0}$$
$$\boldsymbol{x - 3 = 0 \text{ ou } x = 15}$$
$$\boldsymbol{x = 3 \text{ ou } x = 15}$$

c) En déduire le tableau de variations de la fonction B sur [0 ;21]

x	0		3		15		21
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-80	↘	-458	↗	1270	↘	-458

$a = -6 < 0$

3) Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

Pour 15 objets fabriqués et vendus le bénéfice est maximal. Ce bénéfice est de 1270€.

Exercice 28 :

Une entreprise produit et commercialise chaque mois q milliers de réveils, pour q appartenant à [0 ;72]. On appelle $C(q)$ le coût total mensuel de production et $R(q)$ le chiffre d'affaires mensuel réalisé pour la vente de q milliers de réveils, $C(q)$ et $R(q)$ étant exprimés en milliers d'euros.

On admet que toute la production est vendue chaque mois.

On admet que la fonction C est définie par :

$$C(q) = 0{,}1q^2 + q + 40$$

et le prix de vente unitaire $P(q)$ par :

$$P(q) = 11{,}2 - 0{,}05q$$

pour toute quantité q en milliers dans [0 ;72].

1) a) Vérifier que le chiffre d'affaires mensuel pour le vente de 10 milliers de réveils est de 107 milliers d'euros.

$$\boldsymbol{R(10) = 10 \times P(10)}$$
$$\boldsymbol{= 10(11{,}2 - 0{,}05 \times 10)}$$
$$\boldsymbol{= 10 \times 10{,}7}$$
$$\boldsymbol{= 107}$$

b) Déterminer le chiffre d'affaires mensuel $R(q)$ réalisé pour le vente de q milliers d'objets.

$$\boldsymbol{R(q) = q \times P(q)}$$
$$\boldsymbol{= q(11{,}2 - 0{,}05q)}$$
$$\boldsymbol{= 11{,}2q - 0{,}05q^2}$$
$$\boldsymbol{= -0{,}05q^2 + 11{,}2q}$$

2) a) Montrer que le bénéfice mensuel $B(q)$ exprimé en millier d'euros, réalisé pour la production et la vente de q milliers de réveils est défini par :

$$B(q) = -0{,}15q^2 + 10{,}2q - 40$$

$$\boldsymbol{B(q) = R(q) - C(q)}$$
$$\boldsymbol{= -0{,}05q^2 + 11{,}2q - (0{,}1q^2 + q + 40)}$$
$$\boldsymbol{= -0{,}05q^2 + 11{,}2q - 0{,}1q^2 - q - 40}$$
$$\boldsymbol{= -0{,}15q^2 + 10{,}2q - 40}$$

b) Calculer $B'(q)$ et étudier son signe sur [0 ;72].

$$\boldsymbol{B'(q) = -0{,}3q + 10{,}2}$$

On résout $B'(q) = 0$

$$\boldsymbol{-0{,}3q + 10{,}2 = 0}$$
$$\boldsymbol{-0{,}3q = -10{,}2}$$
$$\boldsymbol{q = \frac{-10{,}2}{-0{,}3}}$$
$$\boldsymbol{q = 34}$$

c)En déduire les variations de la fonction B sur [0 ;72]

x	0		34		72
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-40	↗	$\frac{667}{5}$	↘	$-\frac{416}{5}$

$m = -0{,}3 < 0$

d) Déterminer la production mensuelle de l'entreprise qui correspond au bénéfice maximal et calculer le montant de ce bénéfice.

Il faut produire 34000 réveils mensuellement pour obtenir un bénéfice maximal. Ce bénéfice est de 133400€