# Fiche méthode : Probabilités

## I. Cas d'équiprobabilité

**Application 1 :** On lance un dé cubique équilibré et on note le numéro de la face supérieure.

1. Donner les issues de cette expérience.

Les issues de cette expérience sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

2. Décrire l'univers de cette expérience.

$\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

3. Quelle est la probabilité de chaque issue ?

On attribue à chaque issue la probabilité $\frac{1}{6}$.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

4. Soit $A$ l'évènement « Obtenir un nombre pair », décrire $A$.

$A = \{2\,;4\,;6\}$

5. Soit $B$ l'évènement « Obtenir un 5 », décrire $B$.

$B = \{5\}$ alors $B$ est un évènement élémentaire.

6. Si le résultat obtenu est 4. $A$ est réalisé ? Et $B$ ?

Si le résultat obtenu est 4 alors $A$ est réalisé mais $B$ ne l'est pas.

7. Soit $C$ l'évènement « Obtenir un nombre positif », décrire $C$.

$C = \Omega$ alors $C$ est l'évènement certain.

8. Soit $D$ l'évènement « Obtenir 7 », décrire $D$.

$D = \emptyset$ ainsi $D$ est l'évènement impossible.

9. Soit l'évènement $A$ « Obtenir un nombre pair ». Calculer $P(A)$.

$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$E$ : « le nombre choisi est inférieur ou égal à 4»
$F$ : « le nombre choisi est impair »

10. Décrire les enlèvements $E$ et $F$. En donner les probabilités.

$E = \{1\,;2\,;3\,;4\}$ ainsi $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$F = \{1\,;3\,;5\}$ ainsi $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

11. Décrire $E \cup F$ et $E \cap F$. En donner les probabilités.

$E \cup F = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ ainsi $P(E \cup F) = \frac{5}{6}$

$E \cap F = \{1\,;3\}$ ainsi $P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Remarque :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

12. Décrire le contraire de l'évènement $F$. En donner sa probabilité.

$\bar{F} = \{2\,;4\,;6\} = A$ donc :

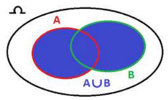
$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Cours :**

- Un **évènement** $\boldsymbol{A}$ est une partie (sous-ensemble) de l'univers $\Omega$.
- Un **évènement élémentaire** est un évènement constitué d'une seule issue.
- On dit qu'un évènement est **réalisé** lorsque l'issue de l'expérience aléatoire appartient à cet événement.
- Un évènement qui contient toutes les issues est l'évènement **certain**. Il est égal à $\Omega$.
- Un évènement qui ne contient aucune issue est l'évènement **impossible**. Il est noté $\emptyset$.
- La probabilité d'un évènement $A$, notée $\boldsymbol{P(A)}$ est la **somme** des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.
- Lorsqu'on est dans un cas d'équiprobabilité, si $A$ est un évènement de $\Omega$, alors :

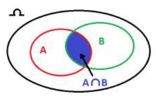
$$P(A) = \frac{nombre\ d'issues favorables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

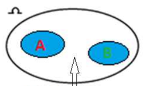
- La **réunion** de $A$ et $B$, notée $\boldsymbol{A \cup B}$ est l'évènement dont les issues réalisent $A$ **ou** $B$.




$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- L'**intersection** de $A$ et $B$, notée $\boldsymbol{A \cap B}$ est l'évènement dont les issues réalisent $A$ **et** $B$.

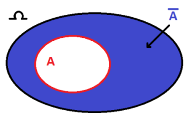



$A \cap B = \emptyset$

Si $\boldsymbol{A \cap B} = \emptyset$ alors $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$
On dit alors que $A$ et $B$ sont **incompatibles.**

- Le **contraire** (ou **complémentaire**) de $A$ dans $\Omega$, noté $\boldsymbol{\bar{A}}$ est l'évènement de $\Omega$ qui contient tous les éléments de $\Omega$ qui ne sont pas dans $A$.




$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

## II. Cas non équiprobable

**Application 2 : Utiliser les propriétés du cours**

On joue avec un **dé truqué** à 6 faces dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

| Face | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,15 | **0,05** | 0,1 |

1. Déterminer $P(5)$.

$P(5) = 1 - 0{,}2 - 0{,}1 - 0{,}4 - 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}05$

2. Soit l'événement $A = \{1\,;2\,;3\}$. Déterminer $P(A)$.

$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}7$

3. Soit l'événement $B$ : « obtenir un nombre pair ». Décrire $B$ et déterminer $P(B)$.

$B = \{2\,;4\,;6\}$ donc $P(B) = P(2) + P(4) + P(6) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}35$

**Attention : Ici le dé est truqué, nous ne sommes dans un cas équiprobable !!!!**

4. Définir par une phrase l'événement $\bar{B}$ et calculer sa probabilité.

$\bar{B}$ : « obtenir un nombre impair ». Ainsi $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

5. Décrire l'événement $A \cap B$ et calculer sa probabilité.

$A \cap B = \{2\}$ ainsi $P(A \cap B) = P(2) = 0{,}1$.

6. En déduire la probabilité de $A \cup B$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}35 - 0{,}1$
$P(A \cup B) = 0{,}95$

## III. Tableau croisé

**Application 3 : Utiliser un tableau croisé pour représenter une situation.**

Dans une classe de terminale de 25 élèves, chaque élève possède une calculatrice, et une seule, de marque C1, C2 ou C3. Deux filles et trois garçons ont une calculatrice de marque C1. 32% des élèves de la classe ont une calculatrice de marque C2. 56% des élèves de la classe sont des filles. La moitié des filles de la classe ont une calculatrice de marque C3.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

| | C1 | C2 | C3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Filles | **2** | $\boldsymbol{14 - 7 - 2 = 5}$ | $\boldsymbol{\frac{14}{2} = 7}$ | $\boldsymbol{\frac{56}{100} \times 25 = 14}$ |
| Garçons | **3** | $\boldsymbol{8 - 5 = 3}$ | **5** | $\boldsymbol{25 - 14 = 11}$ |
| Total | **5** | $\boldsymbol{\frac{32}{100} \times 25 = 8}$ | **12** | **25** |

3) On choisit maintenant au hasard une élève parmi les filles.
Quelle est la probabilité que cette élève possède une calculatrice de marque C1 ?

$p = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$

*Pour la suite, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.*

2) On choisit au hasard un élève de la classe.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « l'élève choisi est un garçon »

$P(A) = \frac{11}{25} = 0{,}44$

B : « l'élève choisi possède une calculatrice de marque C2 »

$P(B) = \frac{8}{25} = 0{,}32$

$C = A \cap B$ et $D = A \cup B$

$C$ : « l'élève choisi est un garçon ET possède une calculatrice de marque C2 » donc :

$$P(C) = \frac{3}{25} = 0{,}12$$

$D$ : « l'élève choisi est un garçon OU possède une calculatrice de marque C2 » donc :

$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(D) = 0{,}44 + 0{,}32 - 0{,}12$
$P(D) = 0{,}64$

**Application 4 : Dénombrer avec un tableau à double entrée et l'utiliser pour trouver des probabilités**

On lance deux dés cubiques équilibrés.

1. Déterminer un univers équiprobable de cette expérience.

$\Omega = \{(1\,;1); (1\,;2); \ldots ; (2\,;1); \ldots\}$

2. Le jeu consiste à faire la somme des deux nombres obtenus.
   Représenter un tableau à double entrée pour indiquer les sommes des nombres obtenus.

| dé 2 \ dé1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

3. (a) Quel est la probabilité de l'évènement $A$ : « obtenir une somme de 7 ».

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $\bar{A}$.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

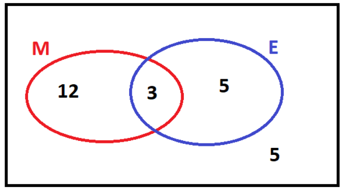
## IV. Diagramme de Venn

**Application 5 : Utiliser un diagramme à patate (de Venn) pour représenter une situation.**

Dans une classe de 25 élèves, 15 s'intéressent à la musique, 8 au jeu d'échecs et 3 à la fois à la musique et au jeu d'échecs.

On considère : $M$ : «L'élève s'intéresse à la musique » et $E$ : « L'élève s'intéresse aux échecs »

1. Construire un diagramme de Venn pour décrire la situation




**Méthode :**

- On place obligatoirement en premier l'effectif correspondant à l'intersection.
- On soustrait par l'effectif de l'intersection les autres effectifs.

2. Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique, ni au jeu d'échecs ?

Comme il y a $12 + 3 + 5 = 20$ élèves qui s'intéressent à la musique, aux échecs ou au deux.
Il reste $25 - 20 = 5$ élèves qui ne s'intéressent ni à la musique, ni au jeu d'échecs.

3. On choisit un élève au hasard parmi ceux de la classe.
   a) Quelle est la probabilité qu'un élève s'intéresse uniquement à la musique?

$p = \frac{12}{25}$

   b) Déterminer : $P(M), P(E), P(M \cap E), P(M \cup E)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P(M) = \frac{15}{25}$ $= \frac{3}{5}$ | $P(E) = \frac{8}{25}$ | $P(M \cap E) = \frac{3}{25}$ | $P(M \cup E) = \frac{15}{25} + \frac{8}{25} - \frac{3}{25}$ $= \frac{20}{25}$ $= \frac{4}{5}$ |

## V. Arbre

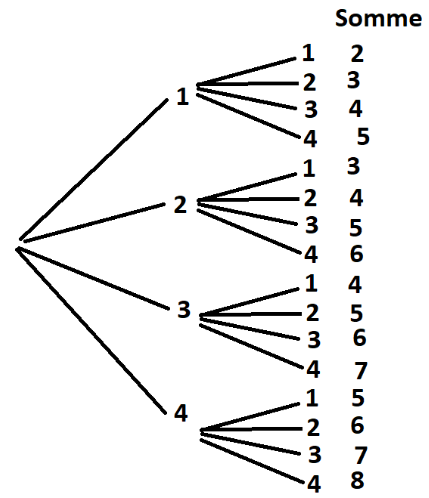
**Application 6 : Dénombrer avec un arbre et l'utiliser pour trouver des probabilités**

On lance successivement deux fois de suite un dé tétraédrique (quatre faces numérotées 1 à 4).

1) On s'intéresse aux résultats obtenus.

Ainsi, si le premier lancer donne un 3, et le second lancer un 1, le résultat sera noté ( 3 ; 1 ).

a) Déterminer les 16 résultats possibles. (On pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau).




b) Déterminer la probabilité des événements suivants :

$A$ : « les deux nombres obtenus sont pairs »

$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$B$ : « le premier nombre est inférieur ou égal au deuxième nombre ».

$P(B) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $P(A \cap B)$.

$A \cap B$ : « les deux nombres obtenus sont pairs et le premier nombre est inférieur ou égal au deuxième nombre »

$P(A \cap B) = \frac{3}{16}$

d) Définir par une phrase l'événement $A \cup B$, puis calculer $P(A \cup B)$.

$A \cup B$ : « les deux nombres obtenus sont pairs ou le premier nombre est inférieur ou égal au deuxième nombre »

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{16} + \frac{10}{16} - \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

2) On note $S$ la somme des nombres obtenus.

Déterminer la probabilité que $S$ soit un nombre impair.

$p = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$