Chapitre : Variables aléatoires discrètes et loi de probabilité

I. Variable aléatoire discrète

1) Notion de variable aléatoire

Définition 1 : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Définir une variable aléatoire X sur Ω c'est associer ______________________________ à chaque issue de Ω.
Autrement dit : une variable aléatoire X définie sur Ω est une fonction

$$X: \quad \Omega \to \mathbb{R}$$
$$e_i \mapsto x_i$$

Remarque : On précise variable aléatoire « discrète » lorsque la v.a. en question prend des valeurs bien séparées (sans intervalle). On distingue les v.a. discrètes des v.a. continues qui elles peuvent prendre toutes les valeurs d'un intervalle par exemple.

Application 1 : Un jeu de hasard se déroule selon le protocole suivant : Le joueur débourse 2€, puis lance deux dés tétraèdriques parfaits. Il lit les numéros sortis (entre 1 et 4) au sommet de chacun des dés. S'il obtient un « double », le joueur récupère sa mise et reçoit une somme en euros, égale au total des points marqués ; sinon il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

1. Donner l'univers de cette expérience. Et indiquer les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire X à l'aide d'un tableau à double entrée.

2) Evènements liés à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω.
L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \Omega' = \{x_1; x_2; \dots; x_r\}$, où les valeurs sont rangées par ordre croissant.
Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs issues de Ω.

Définition 2 :

1. L'évènement $(X = x_i)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.
2. L'évènement $(X \geq x_i)$ est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel supérieur ou égal à x_i.

Exercice 1 : Variable aléatoire

Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire les évènements « $X = 2$ » et « $X \geq 1$ ».

Exercice 2 : Variable aléatoire

On lance quatre dés à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de faces numérotées « 6 » obtenues.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. a. Décrire les évènements « $X \leq 2$ » et « $X > 3$ ».
   b. Que peut-on dire de ces événements ?

Exercice 3 : Variable aléatoire

On place dans un sac six cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase :

Le	hasard	fait	bien	les	choses

On tire un carton au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de voyelles du mot tiré.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Décrire l'évènement « $X = 2$ ».

Exercice 4 : Variable aléatoire

Un sac contient une boule marquée « 2 » et une boule marquée « 3 ». On tire une boule, on note son numéro, on la remet dans le sac, puis on effectue de même un second tirage.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le produit des numéros obtenus.

1. a. Déterminer l'ensemble Ω des issues possibles de cette expérience.
   b. En déduire les valeurs prises par X ?
2. Quel sont les événements de Ω correspondant à l'événement « $X = 6$ » ?

3) Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3 : La probabilité de l'évènement $(X = x_i)$ est la probabilité de la ______________________________ de toutes les issues associées au nombre x_i.

Application 1 (suite) :

2. Calculer $P(X = -2)$

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers fini Ω et Ω' l'ensemble des valeurs prises par X. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$, où x_i prend toutes les valeurs de Ω.

Autrement dit : Définir une loi de probabilité, c'est associer à chaque évènement du type $(X = x_i)$ sa probabilité p_i.

On présente souvent ces données sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_r

Propriété 1 :

$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_r) =$___________ ou $p_1 + p_2 + \cdots + p_r =$_________

Application 1 (suite) :

3. Représenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 5 :

On considère une variable aléatoire discrète X qui peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 7, dont voici la loi de probabilité :

Valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,223	0,335	0,251	0,126	0,047	0,014	0,003	0,001	1

Calculer :

a) $P(X = 0) =$ b) $P(X = 5) =$ c) $P(X > 5) =$

d) $P(X \leq 1) =$ e) $P(X < 7) =$ f) $P(3 \leq X \leq 5) =$

g) $P(3 < X < 5) =$ h) $P(X \leq 7) =$ i) $P(X = 8) =$

Exercice 6 :

On considère l'expérience suivante : on lance 10 fois successivement une pièce, et on appelle X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'on obtient « FACE ».

Traduire chaque phrase par une expression du type $P(X = 2)$ ou $P(X \leq 1)$…

a) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « FACE »
b) La probabilité d'obtenir au moins 2 lancers « FACE »
c) La probabilité d'obtenir plus de 7 lancers « FACE »
d) La probabilité d'obtenir 3, 4 ou 5 lancers « FACE »
e) La probabilité d'obtenir moins de 3 lancers « FACE »
f) La probabilité d'obtenir au plus 5 lancers « FACE »
g) La probabilité d'obtenir plus de 1 lancer « FACE »
h) La probabilité d'obtenir 5 à 9 lancers « FACE »
i) La probabilité d'obtenir au plus 8 lancers « FACE »
j) La probabilité d'obtenir exactement 4 lancers « PILE »

Exercice 7 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Une urne contient cinq boules : deux noires et trois blanches. On tire une boule. On gagne 2€ si la boule est blanche et on perd 1€ si elle est noire.

1. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une boule noire » ?
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Déterminer $P(X = -1)$ et $P(X = 2)$.

Exercice 8 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Roméo offre à Juliette un bouquet de 25 roses constitué de 10 fleurs ayant 28 pétales, de 8 fleurs ayant 31 pétales et de 7 fleurs ayant 34 pétales. Juliette tire au hasard une rose du bouquet.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de pétales que possède la fleur.

1. Déterminer $P(X = 31)$.
2. Décrire l'événement « $X \geq 30$ », puis déterminer $P(X \geq 30)$.

Exercice 9 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On lance deux dés tétraédriques, dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. On note les résultats sous forme de couples d'obtention équiprobable

- Si le premier nombre obtenu est strictement inférieur au deuxième, on les additionne.
- Sinon, on effectue la différence des eux.

On note R la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre obtenu par le calcul.

1. Donner le nombre de couples possibles.
2. Donner la loi de probabilité de R.

II. Esperance mathématique et variance

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.

Définition 5 : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_r$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_r$ est le nombre noté $E(X)$ donné par :
$E(X) =$

Remarque : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un très grand nombre de fois.

Application 1 (suite) :

4. Calculer l'espérance de gain lors du jeu présenté dans les exemples précédents.
Interpréter ce résultat.

Définition 6 : La variance d'une variable aléatoire X notée $V(X)$ est le nombre réel donné par :

$V(X) =$

Définition 7 :

L'écart type de la variable aléatoire X est le réel $\sigma(X) =$

Remarque : La variance est un indicateur de dispersion des valeurs prises par X, pondérées par leur probabilité.

Propriété 2 :

$$V(X) =$$

où X^2 est la variable aléatoire qui à chaque issue de Ω associe le même réel que X mais élevé au carré.

Preuve :

$V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + p_2\big(x_2 - E(X)\big)^2 + \cdots + p_r\big(x_r - E(X)\big)^2$
$V(X) = p_1(x_1^2 - 2x_1E(X) + [E(X)]^2) + p_2(x_2^2 - 2x_2E(X) + [E(X)]^2) + \cdots + p_r(x_r^2 - 2x_rE(X) + [E(X)]^2).$
$V(X) = p_1{x_1}^2 + p_2{x_2}^2 + \cdots + p_r{x_r}^2 - 2E(X)(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_rx_r) + [E(X)]^2(p_1 + p_2 + \cdots + p_r).$
$V(X) = E(X^2) - 2E(X) \times E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exercice 10 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Un jeu de 52 cartes est composé de douze "figures" : Valet, dame ou roi. Elles valent chacune un point. Les quatre AS valent chacun cinq points et les cartes restantes ne valent aucun point. On tire une carte au hasard.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de points obtenus.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.
3. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

Exercice 11 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets, 3 donnent droit à quatre places gratuites, 6 donnent droit à deux places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite, et les autres billets ne gagnent rien.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet, associe le nombre de places gratuites.

1. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
2. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat

Exercice 12 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0,5	1	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,15	0,05	a	0,32	0,18

1. Déterminer la valeur de a.
2. a. Calculer $P(X > 3)$.
   b. Calculer $P(X \geq 4)$.
   c. Calculer $P(X \leq 4)$.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.
4. Calculer l'écart-type de X. Arrondir au centième.

Exercice 13 :

Malik télécharge au plus cinq jeux par mois sur son smartphone.
On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre k de jeux téléchargés.
La loi N est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4	5
$P(N = k)$	0,13	0,28	...	0,07	0,3	0,1

1. Calculer la probabilité manquante.
2. Quelle est la probabilité qu'il télécharge :
   a. au moins 3 jeux ?
   b. au plus 4 jeux ?
3. Calculer l'espérance mathématique de N. Interpréter le résultat.

Exercice 14 :

Une association propose chaque jour un spectacle au prix de 20€. Pour en assurer la promotion, chaque client à l'entrée lance un dé cubique non truqué. Si le résultat est 6, l'entrée est gratuite ; si le résultat est 1, l'entrée est demi-tarif; dans les autres cas le client paie plein tarif.
Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat du lancer de dés, le prix payé par le client.

1. Détermine la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.
3. Que peut-on en déduire si la salle, composée de 2000 places, est pleine ?

Exercice 15 :

Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une. Si celle-ci est verte, le joueur gagne 50€ ; si elle est bleue, rien ne se passe, si elle est rouge, le joueur perd a€.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.
Calculer a pour que le jeu soit équitable.

Exercice 16 :

Une entreprise d'électronique fabriquant des multimètres constate lors d'un test de qualité que 8 % des appareils fabriqués présentent au moins un défaut D_1, 15 % présentent au moins un défaut D_2 et 5 % présentent les deux défauts. On choisit au hasard un appareil dans la production. Tous les tirages sont équiprobables.

1) a) Compléter le tableau ci-dessous par les pourcentages correspondants

	appareils présentant le défaut D_2	appareils ne présentant pas le défaut D_2	Total
appareils présentant le défaut D_1			8 %
appareils ne présentant pas le défaut D_1			
Total			100 %

b) Quelle est la probabilité P_1 que le multimètre présente un et un seul défaut ?

c) Quelle est la probabilité P_2 qu'il ne présente aucun défaut ?

2) Les appareils présentant deux défauts sont mis au rebut.
Les appareils présentant un seul défaut sont réparés.
Un appareil sera commercialisé s'il ne présente aucun défaut ou s'il est réparé.
Le bénéfice réalisé par l'entreprise sur un multimètre commercialisé est de 500 € s'il ne nécessite pas de réparation, de 300 € s'il nécessite une réparation. La perte engendrée par un appareil mis au rebut est de 300 € soit un « bénéfice » de – 300 €.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe le bénéfice, positif ou négatif, à tout appareil pris au hasard dans la production.

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat

c) Calculer une valeur approchée au centième près de l'écart type σ (X).

Propriété 3 : Soient a et b des réels. Alors :
$E(aX+b) =$ et $V(aX+b) =$

Vocabulaire : On dit que l'Espérance est linéaire.

Exercice 17 :

Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique -15 et Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = 3X - 18$$

Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 18 :

La variable aléatoire X a pour espérance mathématique 5 et pour variance 4.
Soit Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = -2X$ et $Z = 4X - 7$.
Calculer $E(Y), V(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice 19 :

On note X la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe le nombre de smartphones vendus dans un magasin donné. Une étude montre que l'espérance mathématique de X est 120 et son écart-type est 12.
Le prix d'un smartphone est de 250€
Soit R la variable aléatoire qui, à chaque mois, associe la recette du magasin. Déterminer $E(R)$ et $V(R)$.

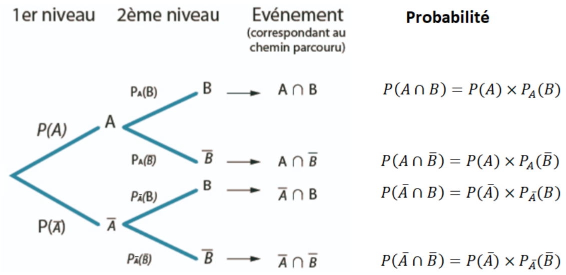
Exercice 20 :

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le nombre d'articles fabriqués par une entreprise. On suppose que $E(X) = 1000$.
Le coût de fabrication de chaque article est de 50€ et les frais annuels de fabrication s'élèvent à 10000€.
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque année, associe le coût total de fabrication. Déterminer $E(Y)$.

III. Arbres pondérés

1) Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.
Pour cela, on envisage deux niveaux de branches : le premier qui indique la probabilité de l'événement A et celle de l'événement $\bar{A}$ et le second qui permet d'indiquer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.



Remarque 1 : Sur chacun des niveaux, il est possible d'avoir plus de deux branches.

Remarque 2 : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

- Une **branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.
  Par exemple, la probabilité de la branche reliant A à B est $P_A(B)$.
- Un **chemin** est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
  Sa probabilité est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
- Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.

Propriété 4 (Règle du produit) : La probabilité d'un chemin est ______________________ des probabilités rencontrées le long du chemin.

Propriété 5 (Règle de la somme) : La probabilité d'un événement s'obtient en effectuant ______________________ des probabilités de tous les chemins menant à cet événement.

Exercice 21 :

On dispose de deux boîtes contenant chacune des boules vertes, des boules bleues, et des boules rouges, indiscernables au toucher. La répartition des couleurs dans chaque boîte est différente.
Dans la première boite, 10% des boules sont vertes et 70% sont rouges.
Dans la deuxième boite, 30% des boules sont bleues et 40% sont rouges.
On tire au hasard une boule dans la première boîte puis une boule dans la deuxième boîte.
On appelle :

- V_1 l'événement " la 1ère boule tirée est verte"
- V_2 l'événement " la deuxième boule est verte"

On définit de la même manière les événements R_1 et R_2 correspondant au tirage d'une boule rouge, les événements B_1 et B_2 correspondant au tirage d'une boule bleue.

1) a) Calculer la probabilité $p(B_1)$ de l'événement B_1.

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) a) Définir l'événement $V_1 \cap R_2$ à l'aide d'une phrase, puis calculer sa probabilité.

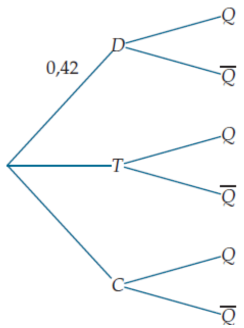
b) Calculer la probabilité que les deux boules soient vertes.

c) Justifier que $p(R_2) = 0{,}4$.

3) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur.

Exercice 22 :

Un prince charmant se doit de partir à l'aventure et d'affronter des périls. Dans 42 % des cas, il affronte un Dragon, dans 30 % ce sont des Trolls et dans les autres cas, c'est le Chevalier noir.
Lorsqu'il affronte un Dragon, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,6. Tuer un dragon lui rapporte 1 000 pièces d'or
Lorsqu'il affronte un Troll, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,8. Tuer un troll lui rapporte 500 pièces d'or.
Lorsqu'il affronte un chevalier noir, il réussit sa Quête avec une probabilité de 0,7. Tuer un chevalier noir lui rapporte 300 pièces d'or.



1) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2) Un prince part à l'aventure. Quelle est la probabilité...
   i. qu'il gagne 1 000 pièces d'or ?
   ii. qu'il gagne des pièces d'or ?
   iii. qu'il revienne bredouille (pour autant qu'il revienne) ?

3) On appelle G la variable aléatoire représentant le gain en pièces d'or du prince.
Déterminer la loi de probabilité de G.

Gains (en pièces d'or)	1 000	500	300	0
Probabilité				

4) Combien un prince gagne-t-il de pièces d'or en moyenne pour une quête ?

Exercice 23 : Arbres pondérés

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Pour les employés inscrits à ce voyage, deux formules sont proposées :

- la formule n°1 : voyage en 1ère classe et hôtel pour un coût de 150€
- la formule n°2 : voyage en 2ème classe et hôtel pour un coût de 100€.

40% des employés inscrits choisissent la formule n°1
Le comité d'entreprise propose une excursion facultative pour un coût de 30€.
Indépendamment de la formule choisie, 80% des employés inscrits choisissent l'excursion facultative.
On interroge au hasard un employé inscrit à ce voyage. On note les évènements suivants :

- U : " l'employé inscrit choisit la formule n°1"
- D : " l'employé inscrit choisit la formule n°2"
- E : " l'employé inscrit choisit l'excursion facultative"

1) Construire l'arbre de probabilités correspondant à la situation.
2) Montrer que la probabilité que l'employé inscrit choisisse la formule n°2 et l'excursion facultative est égale à 0,48.
3) Soit C le coût total du voyage (excursion comprise)
   a) Déterminer les valeurs possibles que peut prendre C.
   b) Déterminer la loi de probabilité de C.
   c) Calculer l'espérance de cette loi. Interpréter le résultat.

Exercice 24 :

Un joueur lance successivement et dans cet ordre trois pièces de monnaie : une de 2 euros et deux de 1 euro.
Un résultat peut être considéré comme un triplet du type (P, F, P) par exemple, P désignant pile et F désignant face.
Chaque pièce est parfaitement équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité.
1) Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles.
Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2) Si les trois pièces présentent leur côté face, le joueur perd 5 euros, sinon il gagne la somme des euros figurant sur les pièces présentant leur côté pile.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque lancer des trois pièces, associe la somme d'argent gagnée en euros.
Lorsque le joueur perd, la variable X prend alors une valeur négative.
   a) Quelles valeurs peut prendre X ?
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer la probabilité de l'évènement « $X \leq 2$ ».
3) a) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
   b) Ce jeu est-il équitable ?
   c) Quelle somme le joueur devrait-il perdre lorsque les trois pièces présentent leur côté face pour que ce jeu soit équitable ?

Exercice 25 :

Un jeu consiste à tirer une boule d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner.
- Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.

On appelle N l'évènement « la boule noire est tirée » et G l'évènement « le joueur gagne ».
1) a) Déterminer la probabilité de l'évènement N.
   b) Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{1}{5}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?
2) Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.

- Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
- S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
- S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
   c) Déterminer m pour que le jeu soit équitable

Exercice 26 :

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :
M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2) Un animal est choisi au hasard.
 a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 €
et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie
est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le coût à engager par animal subissant le test.
 a) Déterminer la loi de probabilité de X.
 b) Calculer l'espérance de X, et interpréter dans le contexte de l'exercice.
 c) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

2) Cas d'épreuves indépendantes

Définition 8 : Des expériences sont ____ quand les résultats de l'une ____ les résultats de l'autre.

Exercice 27 :

Sur un VTT, la probabilité de crevaison de la roue avant et celle de la crevaison de la roue arrière sont égales à 0,02. On suppose que la crevaison d'un pneu n'a aucune influence sur l'autre pneu.
Construire un arbre pondéré pour déterminer :
1) la probabilité d'avoir deux pneus crevés
2) la probabilité de ne pas avoir de crevaison.

Exercice 28 :

Une boite opaque contient 20 jetons : 3 rouges, 7 jaunes et 10 bleus.
On choisit au hasard un jeton et on appelle succès " obtenir un jeton rouge"
1) On ne remet pas le jeton tiré dans l'urne et on tire à nouveau un jeton.
a) Les deux épreuves sont-elles indépendantes ? Justifier.
b) Représenter la situation par un arbre pondéré.
c) Calculer la probabilité d'avoir exactement un jeton rouge.
2) On remet le jeton dans l'urne et on retire un jeton. Représenter ce double tirage par un arbre pondéré et calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès.

IV. Schéma de Bernoulli

Définition 9 : Une **épreuve de ________________________________ de paramètre p** est une expérience aléatoire ayant deux issues :

- Le succès S, avec $P(S) =$_________________
- L'échec $E = \bar{S}$, avec $P(E) =$___________________________

Ainsi $\Omega = \{S\,;E\}$

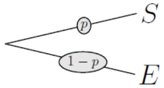
Exemple :

Le dé à 6 faces
S est l'événement « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 5 ».
Ainsi $P(S) = p$ et $P(E) = q$

La pièce de monnaie, S : « obtenir face » et E : « obtenir pile ».
Ainsi $P(S) =$

Définition 10 : La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, où p désigne la probabilité du succès.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p



Propriété 6 : Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

- l'espérance de X est $E(x) =$________________
- la variance de X est $V(x) =$________________
- l'écart-type de X est $\sigma(x) =$________________

Définition 11 : La répétition de n épreuves de Bernoulli, de paramètre p, identiques et indépendantes, est un **schéma de Bernoulli de paramètre n et p.**
Un schéma de Bernoulli se représente par un arbre pondéré ayant n niveaux

Méthode : reconnaitre une situation correspondant à un schéma de Bernoulli
1) On détermine le succès et l'échec de l'épreuve de Bernoulli, ainsi que leur probabilité respective
2) On détermine le nombre de répétitions de l'expérience en justifiant l'indépendance des épreuves.
3) On représente la situation par un arbre en écrivant les probabilités sur les branches

Application 2 : un QCM comporte trois questions indépendantes. A chaque question, il y a quatre propositions, dont une seule est exacte. Un élève décide de répondre au hasard aux trois questions.

1. Justifier que cette situation correspond à un schéma de Bernoulli.

2. Représenter le par un arbre pondéré.

Propriété 7 : Dans un schéma de Bernoulli, la probabilité d'une liste de résultats est le ______________________ des probabilités de chaque résultat.

Méthode : **calculer la probabilité d'un événement à l'aide d'un arbre pondéré**

1) On détermine le nombre N de chemins de l'arbre correspondant aux issues réalisant l'évènement (chemins favorables à l'évènement)

2) On calcule la probabilité d'un chemin « favorable » (chacun de ces chemins ayant la même probabilité) en multipliant les probabilités rencontrées sur chaque branche.

3) On multiplie par N la probabilité d'un chemin « favorable ».

Application 2 (suite) :

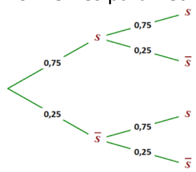
3. Quelle est la probabilité de l'événement A : « l'élève a exactement deux réponses exactes » ?

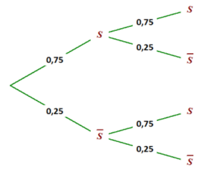
Exercice 29 : Représenter un schéma de Bernoulli

1. Proposer une expérience à deux issues dont l'une appelée « succès » a pour probabilité $0{,}25$.
2. Représenter un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètre 2 et 012
3. Représenter un arbre pondéré le schéma de Bernoulli de paramètre 3 et $0{,}1$

Exercice 30 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli **Exercice 31 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli**

L'arbre pondéré ci-dessous représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.
Donner les paramètres de ce schéma de Bernoulli.





Exercice 32 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie truquée pour laquelle la probabilité de tomber sur « PILE » est $0{,}3$.
Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre pondéré.

Exercice 33 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

On lance six fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
A chaque lancer, on note S l'issue « FACE » qu'on appelle « succès ».
Préciser les paramètres de ce schéma de Bernoulli.

Exercice 34 : Schéma de Bernoulli et variable aléatoire.

1. On considère le schéma de Bernoulli de paramètres 2 et $0{,}1$. On note X le nombre de succès obtenus. Préciser les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.
2. On considère le schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $0{,}7$. On note X le nombre de succès obtenus. Préciser les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

Exercice 35 : Arbre pondéré et schéma de Bernoulli

Une urne contient trois boules blanches et deux boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur et on remet la boule dans l'urne.

On note S l'évènement « Obtenir une boule blanche ».

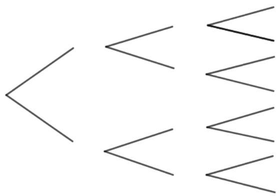
1. Déterminer la probabilité de l'événement S.
2. On répète trois fois l'expérience décrite ci-dessus.
   Représenter le schéma de Bernoulli relatif à cette épreuve à l'aide d'un arbre pondéré.

Exercice 36 :

Marie est employée par une plateforme téléphonique. Elle a remarqué qu'elle traitait la demande d'un client en moins de 2 minutes avec une probabilité de 0,3 et cela indépendamment des clients précédents.

1) Un client appelle. Montrer que la situation peut se modéliser par une épreuve de Bernoulli. Présenter la loi de Bernoulli dans un tableau.

2) Trois clients appellent successivement.
On traduit la situation par un arbre pondéré.
On note S le succès.
Compléter l'arbre pondéré ci-contre.



3) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : " Marie a traité chacune des trois demandes en moins de 2 minutes".

b) B : " Marie a traité exactement une des trois demandes en moins de 2 minutes".

c) C : " Marie n'a traité aucune des trois demandes en moins de 2 minutes".

d) D : " Marie a traité au moins une des trois demandes en moins de 2 minutes".

Exercice 37 :

Pour vendre des produits d'entretien bio par téléphone, un commercial contacte trois clients importants. Le comportement d'un client est indépendant de celui des autres et la probabilité qu'un client soit intéressé par l'offre est de 0,2.

On note X la variable aléatoire associée au nombre de clients intéressés sur les trois individus contactés.

1) Préciser l'épreuve de Bernoulli répétée en indiquant la probabilité du succès S :" le client est intéressé" .
Pour la suite, on notera E l'échec de cette épreuve de Bernoulli.
Présenter la loi de Bernoulli dans un tableau.

2) Représenter la situation par un arbre de probabilités.

3) Calculer la probabilité des listes de réponses suivantes :
a) S - S - E b) E - S - S c) S - E - S

Exercice 38 :

Un client appelle à quatre reprises un service de dépannage. Les appels sont indépendants et la probabilité que chaque appel soit pris sans attente est de 0,75. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'appels du client sans attente.

1) Représenter cette expérience par un arbre pondéré.
2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3) Calculer l'espérance de la variable X.
4) Calculer la probabilité de l'évènement « Le client a subi au moins une attente »

Exercice 39 :

Une entreprise produit en grande quantité des appareils à gaufres. A la suite de contrôles, on s'est aperçu que 3% des appareils fabriqués pouvaient présenter un défaut. Le comité d'entreprise d'une petite société décide d'acheter 4 de ces appareils.

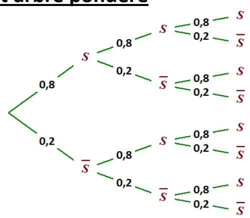
1) Représenter la situation par un arbre de probabilité.

2) a) Quelle est la probabilité qu'aucun des 4 appareils achetés ne présente de défaut ?
b) Quelle est la probabilité que les 4 appareils achetés présentent un défaut ?
c) Quelle est la probabilité qu'au moins un appareil acheté présente un défaut ?

3) Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 4 appareils dans la production, compte le nombre d'appareils présentant un défaut.
a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.
Interpréter, dans le contexte de l'exercice, cette espérance.

Exercice 40 : Loi binomiale et arbre pondéré

L'arbre pondéré ci-contre représente un schéma de Bernoulli pour lequel le succès est noté S.
On note X le nombre de succès obtenus.



1.

1. Préciser la loi suivie par la variable aléatoire X.
2. Compléter l'arbre avec les valeurs de X correspondantes.
3. En vous aidant de l'arbre pondéré ci-dessus, déterminer les probabilités :
$P(X=0)$ $P(X=1)$,
$P(X=2)$ $P(X=3)$

Exercice 41 : Loi binomiale et arbre pondéré (problème)

Un archer réussit une volée (deux tirs successifs d'une flèche) avec une probabilité égale à 0,35. Cet archer tire trois volées successives, que l'on suppose indépendantes. On considère la variable aléatoire X correspondant au nombre de volées réussies parmi les trois tirées.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer, à 10^{-3} près la probabilité de l'événement « $X = 2$ » .
3. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité que l'archer réussisse au moins deux volées ? Au plus deux volées ?

Exercice 42 :

Une usine produit de l'eau minérale en bouteille.
L'eau provient de deux sources.
Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau est calcaire.
On a effectué des tests pendant une journée et on constate que :
• 16% des bouteilles d'eau issues de la source 1 contiennent de l'eau calcaire.
• 10 % des bouteilles d'eau issues de la source 2 contiennent de l'eau calcaire.
La source 1 fournit 70% de la production totale des bouteilles d'eau.

1) Compléter le tableau des fréquences (en pourcentages) ci-après :

	Source 1	Source 2	Total
Eau calcaire			
Eau non calcaire			
Total			100

2) On prélève au hasard une bouteille dans la production de cette journée. toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirée. On considère les événements suivants :

- A : " la bouteille d'eau provient de la source 1";
- B : " la bouteille d'eau provient de la source 2";
- C : " l'eau contenue dans la bouteille est calcaire".

a) Calculer $P(A)$; $P(C)$; $P(A \cap C)$et $P(B \cap C)$.
b) Calculer la probabilité que l'au contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

3) L'usine fait des packs de quatre bouteilles d'eau. Soit X la variable aléatoire qui associe à tout pack de 4 bouteilles d'eau le nombre de bouteilles d'eau calcaire.
a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucune bouteille avec de l'eau calcaire ?
b) Quelle est la probabilité qu'un pack contienne au moins une bouteille d'eau calcaire ?

Exercice 43 :

Une étude statistique a été réalisée sur une population de 1000 souris de laboratoire.
Chaque souris a été observée afin de déceler la présence d'une certaine bactérie dans son organisme. Dans cette population de souris :
• 60% des souris sont des mâles ;
• Parmi les souris mâles, 20% sont porteuses de la bactérie ;
• 10% des souris de la population sont des femelles porteuses de la bactérie.

1) Compléter le tableau suivant :

	Souris Femelle	Souris mâle	Total
Souris porteuse de la bactérie			
Souris non porteuse de la bactérie			
Total			1000

2) On prélève au hasard une souris de la population et on l'examine afin de déterminer son sexe et de détecter l'éventuelle présence de la bactérie.
Soit les événements suivants :
F : "la souris prélevée est une femelle"
B : "la souris prélevée est porteuse de la bactérie"
a) A l'aide des données de l'énoncé, déterminer $p(F)$et $p(F \cap B$).
b) Calculer la probabilité qu'une souris soit porteuse de la bactérie sachant que c'est une femelle.
c) Démontrer que la probabilité de B est égale à 0,22.

3) On prélève dans la population, au hasard et successivement, 3 souris. La population est suffisamment grande pour pouvoir assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de souris porteuses de la bactérie parmi les 3 souris prélevées.
Calculer la probabilité de prélever exactement 2 souris porteuses de la bactérie (on arrondira au centième)