Chapitre : Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Définition 1 : Une suite numérique u de nombres réels est une fonction définie sur l'ensemble des ____.

Notation : L'image par u d'un entier naturel n est notée ____________________ et se lit « *u* indice *n* ».
La suite des termes u_n s'appelle u et elle est notée ____________________.

	Fonction f	Suite (u_n)
Image		

Attention : On fera bien la distinction entre u_n qui représente le terme qui a un rang n quelconque et (u_n) qui représente tous les termes de la suite.

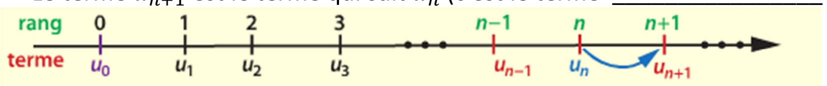
Définition 2 : Soient (u_n) une suite et n un entier naturel.
u_n est le ____ de la suite.
Le premier terme (souvent u_0) de la suite (u_n) est la ____________________ de la suite.

Remarque : Une suite (u_n) peut n'être définie qu'à partir du rang 1. Dans ce cas, la suite est définie dans $\mathbb{N}^*$ et sa valeur initiale est u_1 .
Quand on parle de suite, tous les indices doivent être des entiers positifs.

Exemples :

- 1, 2, 3, 4, ….est la suite des entiers naturels. (On passe d'un terme au suivant en ajoutant 1).
- Les six premiers termes de la suite des nombres impairs sont : 1, 3, 5, 7, 9 et 11 (On passe d'un terme au suivant en ajoutant 2).
- Les 5 premiers termes de la suite des puissances de 2 sont $2^0 = 1$, $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$ (On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2)

- Le terme u_{n-1} est le terme qui précède u_n (c'est le terme ____________________ u_n)
- Le terme u_{n+1} est le terme qui suit u_n (c'est le terme ____________________ u_n)



II. Modes de génération d'une suite numérique

1) Suite définie à l'aide d'une fonction $u_n = f(n)$

Définition 3 : Une suite peut être définie au moyen d'une ____________________ f de la variable n : $u_n =$ ____________________ où f est une fonction donnée définie sur ____________________

Application 1 :
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = n^2$. Donner les trois premiers termes et le 101ème.

L'**avantage** de cette méthode est qu'elle permet de **calculer directement la valeur** d'un terme sans avoir besoin de connaître tous les termes précédents.
L'**inconvénient** est qu'elle ne permet pas de mettre en évidence une relation entre les termes consécutifs, alors que c'est souvent la nature de cette relation qui intéresse…

Exercice 1 : Suite définie par une fonction

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 2$.
   Déterminer les termes u_0, u_1, u_2 et u_{15}.
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2}n + 3$.
   Déterminer les termes d'indices 2, 3 et 7.
3. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{n+1}$.
   Calculer les cinq premiers termes.
4. Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = (-1)^n$.
   Déterminer les termes a_0, a_1, a_2, a_{100} et u_{203}.

Exercice 2 : Suite définie par une fonction

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 3n^2 - 1$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   b. Calculer le cinquième terme de la suite.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = -5n^2 + 2$.
   a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).
   b. Calculer le huitième terme de la suite.

2) Suite définie à l'aide d'une relation de récurrence

Définition 4 : Une suite peut être définie au moyen d'une______________________________ : (u_n) est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir du précédent. La relation peut être donnée par une formule explicite ou par un algorithme.

On étudiera, plus spécialement, les suites définie à l'aide de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Application 2 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$, pour tout entier naturel.
Donner les 3 premiers termes.

Remarque : On peut aussi définir des relations de récurrence sur plusieurs termes.

Exemple : la suite de Fibonacci
Cette célèbre suite est définie comme suit : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence est : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Autrement dit, on additionne les deux derniers termes pour obtenir le suivant.
Le début de la suite est alors {0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34…}.

Exercice 3 : Suite définie par récurrence
1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
   Déterminer les termes u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 1 - v_n$.
   Déterminer les termes d'indices 1, 2, 3 et 5.
3. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 5, w_1 = \frac{13}{6}$ et $w_{n+2} = \frac{5}{6}w_{n+1} - \frac{1}{6}w_n$.
   Déterminer les termes w_2, w_3, w_4 et w_5.

Exercice 4 : Suite définie par récurrence
1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3{u_n}^2 + 1$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le septième terme de la suite.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = 3v_n + 7$.
   a. Calculer les trois premiers termes de la suite (v).
   b. A l'aide de la calculatrice, déterminer le quinzième terme de la suite.

Exercice 5 : Suite définie par récurrence
1. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$, et telle qu'en multipliant un terme par 3, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes u_1, u_2 et u_3.
   b. Donner une relation reliant u_{n+1} et u_n.
2. Soit (v_n) la suite définie par son premier terme $v_0 = 5$, et telle qu'en ajoutant 2 à un terme, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes v_1, v_2 et v_3.
   b. Donner une relation reliant v_{n+1} et v_n.
3. Soit (w_n) la suite définie par son premier terme $w_0 = 2$, et telle qu'en multipliant un terme par 2 puis en luis ajoutant -1, on obtienne le terme suivant.
   a. Déterminer les termes w_1, w_2 et w_3.
   b. Donner une relation reliant w_{n+1} et w_n.

Exercice 6 : Algorithme et suite
La suite (u_n) est définie par $u_0 = A$ et l'algorithme suivant permettant d'afficher le terme d'indice N.

Variables	A est un réel, N et I sont des entiers.
Entrée	A ? et N ?
Traitement	Pour I allant de 1 à N faire $A \leftarrow 2 \times A - 1$
Sortie	Fin Pour Afficher A

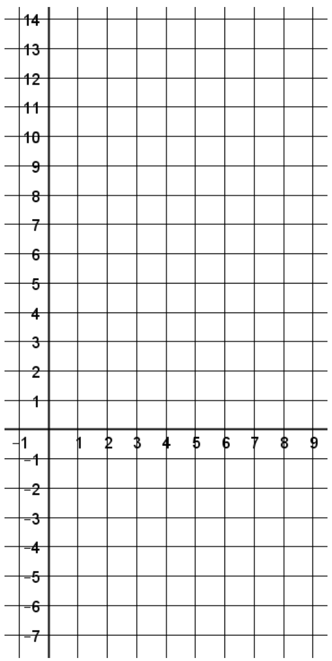
1. Quelle valeur de A sera affichée après exécution de l'algorithme :
   a. Si on saisit $A = 1$ et $N = 5$?
   b. Si on saisit $A = 2$ et $N = 3$?
2. Quelle valeur de N faut-il saisir pour obtenir le 3ème terme ?
3. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche les terme de u_1 à u_N.
4. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4 quand $A = 3$.
5. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

III. Représentation graphique d'une suite

1) Suite définie à l'aide d'une fonction $u_n = f(n)$

On peut placer les points de coordonnées ___________________________ dans un repère $(O\ ;\ I, J)$ du plan.

Application 3 : Donner la représentation graphique des neuf premiers termes de la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n par : $u_n = -n^2 + 7n + 1$.



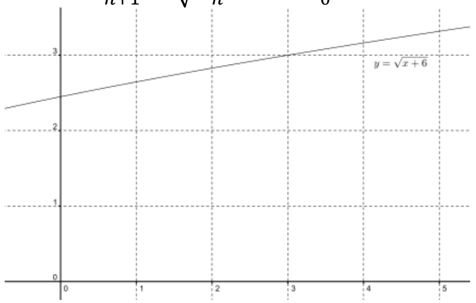
2) Suite définie à l'aide d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

On peut déterminer graphiquement les termes d'une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ en traçant le graphe de la fonction f. u_1 s'obtient en plaçant u_0 sur l'axe des abscisses et en lisant $f(u_0)$, u_2 s'obtient en plaçant u_1 sur l'axe des abscisses et en lisant $f(u_1)$…
On utilise ensuite la droite d'équation $y = x$ pour placer les valeurs lues sur l'axe des ordonnées sur l'axe des abscisses.

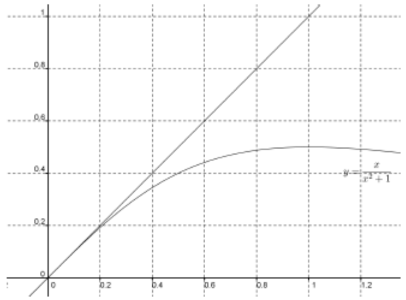
Application 4 :

Placer sur l'axe des abscisses, sans calcul, les 4 premiers termes de la suite.
Quelle conjecture peut-on faire quant à son sens de variation et sa convergence ?

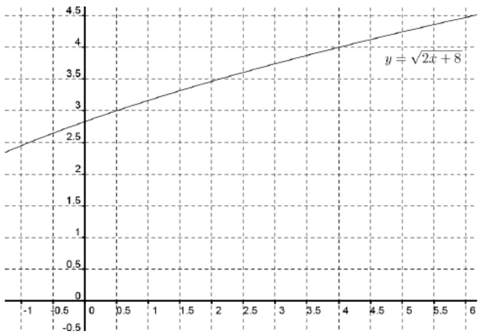
$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ et $u_0 = 0$



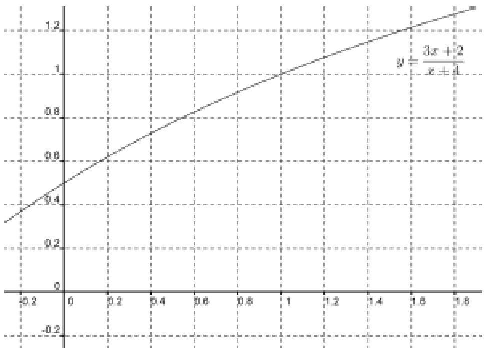
$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}$ et $u_0 = 1$



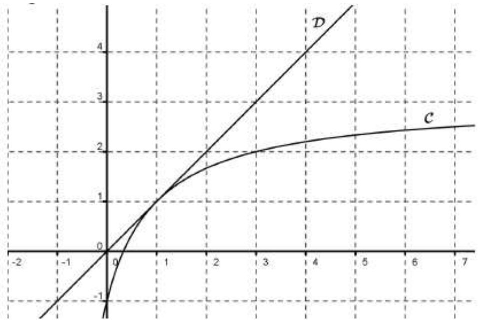
$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8}$ et $u_0 = 0$



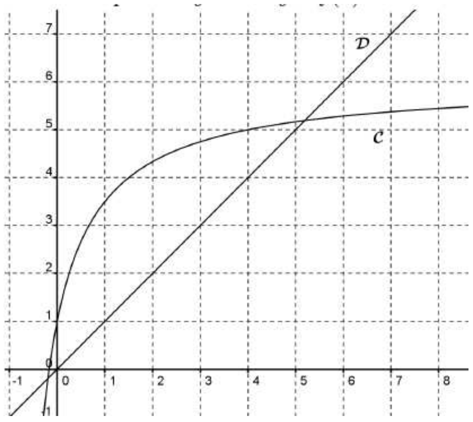
$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ et $u_0 = 0$



$u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+1}$ et $u_0 = 4$



$u_{n+1} = 6 - \frac{5}{u_n+1}$ et $u_0 = 0$



IV. Sens de variations d'une suite

Définitions 5 :
- Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel, ______________________________
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel, ____________________________
- Une suite (u_n) est **constante** si, pour tout entier naturel, ____________________________
- Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Méthode : Pour comparer les deux nombres u_n etu_{n+1}, nous pouvons étudier le signe de leur différence :
- $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à ____
- $u_{n+1} \leq u_n$ équivaut à ____

Si la suite n'est pas définie par récurrence :
Pour obtenir u_{n+1}, on remplace n par $n + 1$ dans l'expression de u_n en fonction de n

Application 5 :
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = v_n + 1$ et $v_0 = -2$. Donner son sens de variation.

Application 6 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$. Donner son sens de variation.

Propriété 1 (Méthode) : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

- Si f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ alors la suite (u_n) est strictement ____________________.
- Si f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ alors la suite (u_n) est strictement ___________________.

Application 7 : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.
Donner son sens de variation.

Exercice 7 : Sens de variations d'une suite

1. Soit (u_n) une suite décroissante. Comparer u_4 et u_5.
2. Soit (v_n) une suite croissante. Déterminer le signe de $u_{11} - u_{10}$

Exercice 8 : Sens de variations d'une suite (récurrente)
Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

a. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = u_n - 7n \end{cases}$ d. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n + 3 \end{cases}$

Exercice 9 : Sens de variations d'une suite (explicite)
Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

a. $u_n = 2n$ b. $u_n = n^2$
c. $u_n = 1 - 5n$ d. $u_n = n^2 + 3n - 1$
e. $u_n = 3n^2 - 4$ f. $u_n = 5n - 8$
g. $u_n = -3n^2 - 2n + 1$ h. $u_n = 3 - 2n$

Exercice 10 : Recherche de seuils
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n - 0{,}25$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geq 5000$.
2. En déduire le plus petit entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, $u_n \geq 5000$.

Exercice 11 : Recherche de seuils
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n+1}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N, $0 < v_n \leq 0{,}001$.

Exercice 12 : Comportement d'une suite
Représenter la suite et conjecturer le sens de variation et le comportement de la suite lorsque n tend vers $+\infty$.

a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$
b) $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{10}$
c) $u_0 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
d) $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$
e) $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$

Exercice 13 : Cas d'une limite finie à l'infini
La suite (u_n) a pour limite L (à conjecturer à l'aide de la calculatrice) quand n tend vers $+\infty$.
Trouver un indice m tel que, lorsque $n > m$, les termes u_n appartiennent à l'intervalle I proposé.

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $I =]0\,;10^{-4}[$.
b) $u_n = \dfrac{1}{n+5}$ $I =]0\,;10^{-5}[$
c) $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2n}$ $I =]0{,}49\,;0{,}51[$
d) $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$ $I =]3 - 10^{-4}\,;3 + 10^{-4}[$

Exercice 14 : Cas d'une limite infinie à l'infini
Dans chacun des cas suivants :

- Donner, en justifiant, les variations de (u_n)
- Trouver un indice m tel que , lorsque $n \geq m$, les les termes u_n appartiennent à l'intervalle I donné.

a) $u_n = \sqrt{2n+1}$ $I = [10^5\,;\,+\infty[$
b) $u_n = \dfrac{2-n}{3}$ $I =]-\infty\,;-10^5]$
c) $u_n = \dfrac{2}{3}n^2$ $I = [10^6\,;\,+\infty[$
d) $u_n = \dfrac{5^n}{2^{n+1}}$ $I = [10^5\,;\,+\infty[$
e) $u_n = -2 \times 5^n$ $I =]-\infty\,;-10^6]$

Exercice 15 : Modélisation
Dans un étang, pendant l'hiver 2015, la population des gardons était estimée à 600 kg. Mais, chaque année la quantité de gardons diminue du quart de sa valeur.
Pour compenser cette diminution, on réintroduit chaque automne 200 kg de gardons.
On note u_n la quantité de gardons, exprimée en kg, au début de l'hiver de l'année $2015 + n$.
On a ainsi $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$$

1. Déterminer la quantité u_1 de gardons présents l'hiver 2016, puis la quantité de gardons u_2 l'hiver 2017.
2. A l'aide d'un tableur, ou d'une calculatrice, déterminer la quantité de gardons présents dans l'étang au début de l'hiver 2025.

V. Utilisation d'un tableur :

Points essentiels à ne pas oublier :
1) Une formule commence toujours par un « = ».
2) « fois » s'écrit « * », « divisé » s'écrit « / » et les puissances s'écrivent « ^ ».
3) Les opérations doivent être écrites : « = 4*B2 » fonctionne, mais il faut mettre le * !
4) Utilisation du $: il bloque une référence quand on recopie la formule... dans A2 : le A est bloqué, le 2 est bloqué ; dans $A2 : le A est bloqué, mais le 2 n'est pas bloqué ; dans A$2 : le 2 est bloqué, mais le A n'est pas bloqué.

Exercice 16 :

(u_n) est une suite définie par une relation explicite.
On construit le tableau excel ci-contre.

	A	B
1	rang n	terme U_n
2	0	
3	1	
4	2	

Dans chaque cas, trouver la formule qu'il faut mettre dans la cellule B2 pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent.

1) Pour $u_n = 2n + 3$: ....

2) Pour $u_n = n^2$: ....

3) Pour $u_n = n(n+1)$: ....

4) Pour $u_n = 2\times5^n$: ....

Exercice 17 :

(u_n) est une suite définie par son 1er terme $u_0 = 3$ et une relation de récurrence (donnée ci-dessous). On construit le tableau excel ci-contre.

	A	B
1	rang n	terme U_n
2	0	3
3	1	
4	2	

Dans chaque cas, trouver la formule qu'il faut mettre dans la cellule B3 pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent.

1) Pour $u_{n+1} = 1{,}3u_n$: ....

2) Pour $u_{n+1} = u_n + 5$: ....

3) Pour $u_{n+1} = 2u_n - 1$: ....

4) Pour $u_{n+1} = u_n^3$: ....

5) Pour $u_{n+1} = 2u_n + n$ ....

Exercice 18 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n + 8$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
On construit le tableau excel ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
2	valeur de u_n	4	16	40	88	184	376	760

a) Quelle formule faut-il mettre dans la cellule C2 pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite ? ....

b) Que devient cette formule dans la cellule H2 ? ....

Exercice 19 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n$ pour tout entier naturel n.
On construit le tableau excel ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme U_n	somme: $U_0 + ... + U_n$
2	0	100	100
3	1	50	150
4	2	25	175
5	3	12,5	187,5

a) Quelle formule faut-il mettre dans la cellule B3 pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent ?

....

b) Que deviendrait cette formule dans la cellule B6 ?

....

c) Quelle formule faut-il mettre dans la cellule C3 pour que, quand on la recopie vers le bas, les sommes des termes de la suite se calculent ?

....

Exercice 20 :

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
On construit le tableau excel ci-contre.

	A	B	C
1	rang n	terme U_n	somme: $U_0 + ... + U_n$
2	0	5	5
3	1	7	12
4	2	9	21
5	3	11	32

a) Quelle formule faut-il mettre dans la cellule B3 pour que, quand on la recopie vers le bas, les termes de la suite se calculent ?

....

b) Que deviendrait cette formule dans la cellule B6 ?

....

c) Que deviendrait cette formule dans la cellule B50 ?

....

d) On cherche une formule à mettre dans la cellule C3, pour que, quand on la recopie vers le bas, les sommes des termes de la suite se calculent.
Entourer les formules qui conviennent :

formule 1 : = B2+B3
formule 2 : = C2+B3
formule 3 : = C2+C3
formule 4 : = SOMME(B2:B3)
formule 5 : = SOMME(B2:B3)
formule 6 : = SOMME(C2;B3)

VI. Utilisation d'algorithmes :

Exercice 21 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et l'algorithme suivant permet d'afficher le terme d'indice N.

On donne ci-dessous cet algorithme :

U ← 3
Pour K allant de 1 à N :
    U ← 2U – 5
Afficher U

Traduction Python :

1) Faire tourner cet algorithme pour N = 3, en écrivant les étapes.

N				
U				

2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Exercice 22 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} = u_n + n$

1) Donner les quatre premiers termes

2) Compléter cet algorithme :

U ←
Pour K allant de 1 à N :
    U ←
Afficher

Traduction Python :

3) Proposer une modification de l'algorithme précédent pour qu'il calcule et affiche, en plus du terme u_N, la somme : $S_N = u_0 + u_1 + \cdots u_N$

Exercice 23 :

On considère l'algorithme suivant :

N ← 0
d ← 400
Tant que d > 374
    N ← N + 1
    d ← 0,985d
Fin Tant que
Afficher N

Traduction Python :

1) Faire fonctionner cet algorithme, en détaillant bien toutes les étapes.

2) On considère la suite (d_n) définie par $d_0 = 400$ et $d_{n+1} = 0{,}985d_n$ pour tout entier naturel n.
Expliquer ce que fait cet algorithme.

Exercice 24 :

On considère l'algorithme suivant :

N ← 0
U ← 2
Tant que U < 100
    N ← N + 1
    U ← 3U+4
Fin Tant que
Afficher N

Traduction Python :

1) Faire fonctionner cet algorithme, en détaillant bien toutes les étapes.

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 4$ pour tout entier naturel n.
Expliquer ce que fait cet algorithme.

3) On cherche la plus petite valeur N à partir de laquelle les termes de la suite dépassent 10 000.
a) Expliquer comment modifier l'algorithme précédent pour obtenir cette valeur.

b) Déterminer cette valeur à l'aide de votre calculatrice.