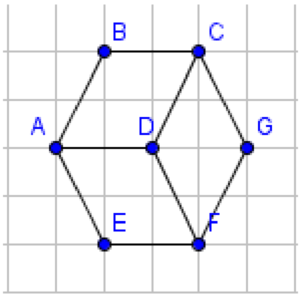
Chapitre : Vecteurs (1) (correction)

Compétence : Translation et vecteur

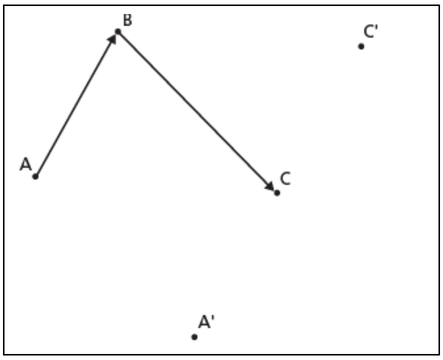
Exercice 1 :



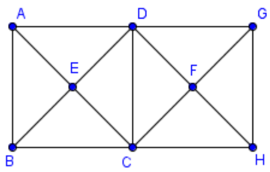
1. a. La translation qui transforme A en B, tranforme D en $\boldsymbol{C}$
   b. La translation qui transforme C en B, transforme D en $\boldsymbol{A}$
   c. La translation qui transforme A en B, transforme $\boldsymbol{E}$ en D
   d. La translation qui transforme $\boldsymbol{D}$ en B, tranforme F en D
   e. La translation qui transforme E en G, tranforme $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{C}$
2. a. La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, transforme C en $\boldsymbol{B}$
   b. La translation de vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{D}B}$, transforme E en A
   c. La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, transforme $\boldsymbol{D}$ en E
   d. La translation de vecteur $\overrightarrow{GB}$, transforme $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{A}$ **(ou $\boldsymbol{G}$ en $\boldsymbol{B}$).**

Exercice 2 : Image d'un point par une translation.

1. Construire un triangle ABC tel que : $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7$ cm.
2. Construire l'image C' de C par la translation qui transforme A en B.
3. Construire l'image A' de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.



Exercice 3 : Image d'un point par une translation.



1. Quelles sont les images de B, C, D et E par la translation qui transforme A en D ?

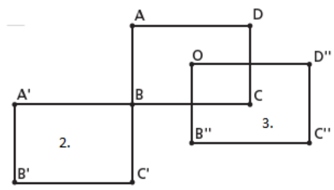
$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AD}}(B) = C}$	$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AD}}(C) = H}$	$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AD}}(D) = G}$	$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{AD}}(E) = F}$

2. Quelles sont les images de B, E et F par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$?

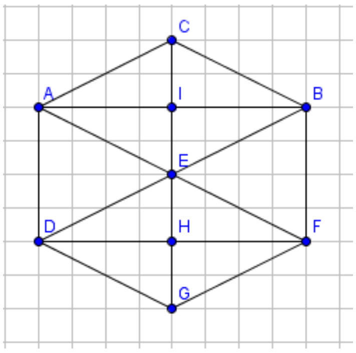
$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{CF}}(B) = E}$	$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{CF}}(E) = D}$	$\boldsymbol{t_{\overrightarrow{CF}}(F) = G}$

Exercice 4 : Image d'un rectangle par une translation.

1. Tracer un rectangle $ABCD$ de centre O.
2. Construire l'image de ce rectangle par la translation qui transforme D en B.
3. Construire l'image de ce rectangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.



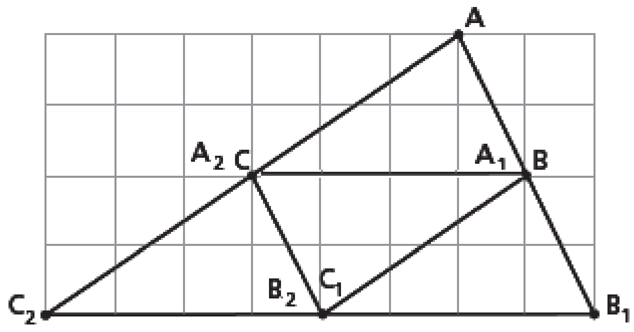
Exercice 5 : Image d'un point par une translation.



Compléter :

L'image de	par la translation de vecteur	est le point
A	$\overrightarrow{DE}$	$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{I}$	$\overrightarrow{GH}$	C
H	$\overrightarrow{\boldsymbol{HF}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{DH}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{AI}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{IB}}$	F
B	$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{FE}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{EA}}$ **ou** $\overrightarrow{\boldsymbol{GD}}$	C

Exercice 6 : Image d'un triangle par une translation.



1. Construire l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. Construire l'image $A_2B_2C_2$ du triangle $A_1B_1C_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
3. Quelle translation transforme le triangle ABC en $A_2B_2C_2$?

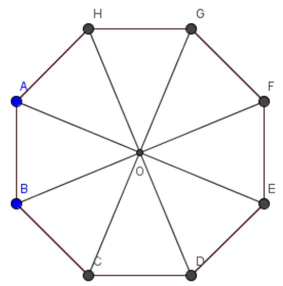
La translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ transforme le triangle ABC en $A_2B_2C_2$.

4. Quelle translation transforme le triangle $A_2B_2C_2$ en ABC ?

La translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ transforme le triangle $A_2B_2C_2$ en ABC.

Compétence : Egalité de vecteurs

Exercice 7 : Vecteurs égaux, vecteurs opposés



$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.

1. Compléter le tableau suivant en répondant par oui ou non.

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Oui**
ont le même sens	**Non**	**Oui**	**Oui**	**Non**
ont la même longueur	**Oui**	**Non**	**Oui**	**Oui**
sont égaux	**Non**	**Non**	**Oui**	**Non**
sont opposés	**Non**	**Non**	**Non**	**Oui**

2. Répondre par vrai ou faux. Justifier les réponses

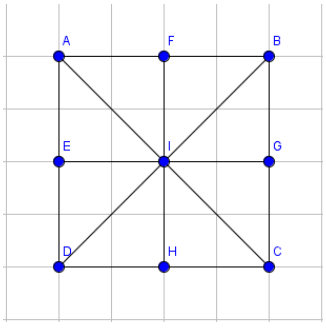
a. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux
b. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés
c. $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés
d. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés

FAUX
FAUX
VRAI
VRAI

e. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont égaux
f. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont opposés
g. $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont opposés
h. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont de sens opposés

FAUX
VRAI
VRAI
VRAI

Exercice 8 : Carré et vecteurs égaux



$ABCD$ est un carré de centre I, les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[DC]$.

Répondre par vrai ou faux. Justifier les réponses

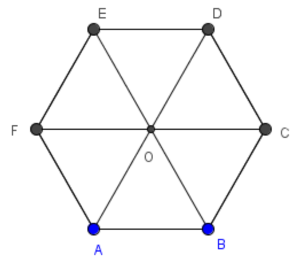
a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$
b. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
c. $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BD}$

VRAI
FAUX
FAUX

d. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EI}$
e. $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{DH}$
f. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BH}$

FAUX
VRAI
VRAI

Exercice 9 : Hexagone et vecteurs égaux



$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.

Répondre aux questions suivantes en utilisant uniquement les points de la figure.

1. Trouver tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{CD}$

Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{CD}$ sont $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{AF}$.

2. Trouver un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FD}$ est un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.

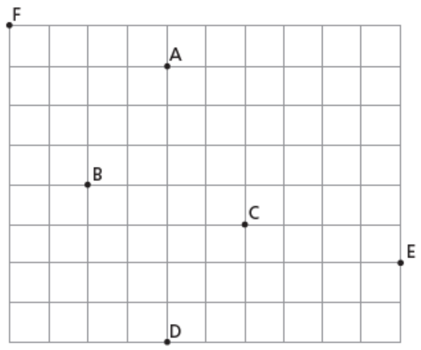
3. Peut-on trouver un vecteur égal au vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{BE}$

Non

4. Citer tous les vecteurs opposés à $\overrightarrow{AO}$.

Les vecteurs opposés à $\overrightarrow{AO}$ sont $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Exercice 10 : Vecteurs égaux



a. Reproduire la figure et placer les points D, E et F tel que :

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$

b. Trouver tous les vecteur égaux à $\overrightarrow{AF}$

Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AF}$ sont $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EC}$.

c. Trouver tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FB}$

Les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FB}$ sont $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Compétence : Translation et vecteur, égalité de vecteurs et démontrer.

Exercice 11 : Parallélogramme et vecteurs égaux

On considère le parallélogramme $ABCD$.
Construire ce parallélogramme, en prenant soin de représenter un parallélogramme quelconque.

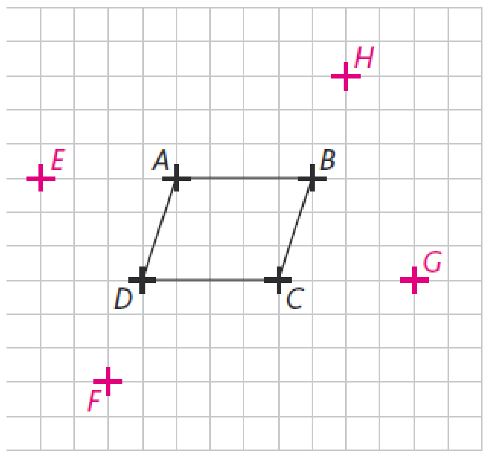
Construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$

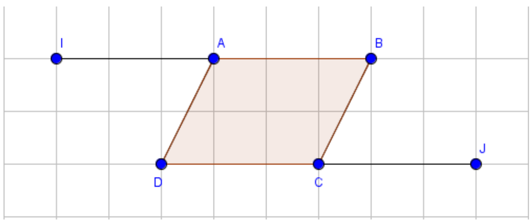
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB}$



Exercice 12 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère



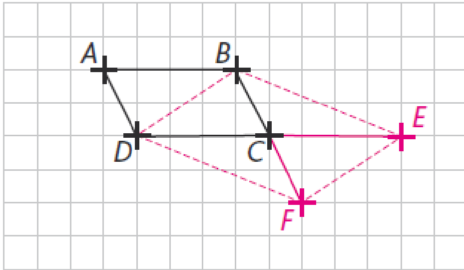
$ABCD$ est un parallélogramme. A est le milieu du segment $[IB]$ et C est le milieu du segment $[DJ]$

Quelle est la nature du quadrilatère $IAJC$? Le démontrer.

On sait que A est le milieu de $[IB]$ ainsi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI}$. **On sait que C est le milieu de $[DJ]$ ainsi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JC}$.** **On sait que $ABCD$ est un parallélogramme ainsi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.** **Par suite, on trouve $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JC}$ donc $IAJC$ est un parallélogramme.**

Exercice 13 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère

Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Construire ce parallélogramme, en prenant soin de représenter un parallélogramme quelconque.



1. Construire les points E et F, images respectives de B et de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que C est le milieu des segments $[DE]$ et $[BF]$.

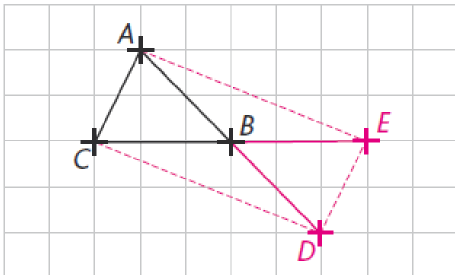
E est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ donc $ACEB$ est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
Or $ABCD$ est un parallélogramme ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$ d'où C est le milieu de $[DE]$.

F est l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ ainsi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ donc $ACFD$ est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CF}$.
Or $ABCD$ est un parallélogramme ainsi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BC}$ d'où C est le milieu de $[BF]$.

Exercice 14 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère

Soit ABC un triangle.
On considère le point D, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le point E, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ACDE$? Le démontrer.



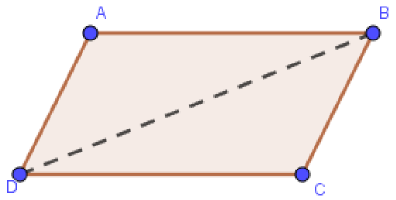
D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ d'où B est le milieu de $[AD]$.
E est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ ainsi $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BE}$ d'où B est le milieu de $[CE]$.
Les diagonales du quadrilatère $ACDE$ ont même milieu, donc $ACDE$ est un parallélogramme.

Exercice 15 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les pointsA, B, C et D suivants.

Montrer dans chaque cas, **de deux façons différentes**, que $ABCD$ est un parallélogramme :

Modèle :

$\overrightarrow{AB}(\quad)$ $\overrightarrow{AB}(\quad)$	$\overrightarrow{DC}(\quad)$ $\overrightarrow{DC}(\quad)$	**Soit M le milieu de $[AC]$,** $M\left(\frac{}{2}\,;\frac{}{2}\right)$ $M(\,;\,)$	**Soit N le milieu de $[BD]$,** $N\left(\frac{}{2}\,;\frac{}{2}\right)$ $N(\,;\,)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.** 		**Les points M et N sont confondus donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**	

1. $A(-1\,;2), B(5\,;3), C(4\,;\,0)$ et $D(-2\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5+1\\3-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4+2\\0+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$	**Soit M le milieu de $[AC]$,** $M\left(\frac{-1+4}{2}\,;\frac{2+0}{2}\right)$ $M\left(\frac{3}{2}\,;\,1\right)$	**Soit N le milieu de $[BD]$,** $N\left(\frac{5-2}{2}\,;\frac{3-1}{2}\right)$ $N\left(\frac{3}{2}\,;1\right)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**		**Les points M et N sont confondus donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**	

2. $A(1\,;1), B(7\,;2), C(6\,;\,-1)$ et $D(0\,;\,-2)$.

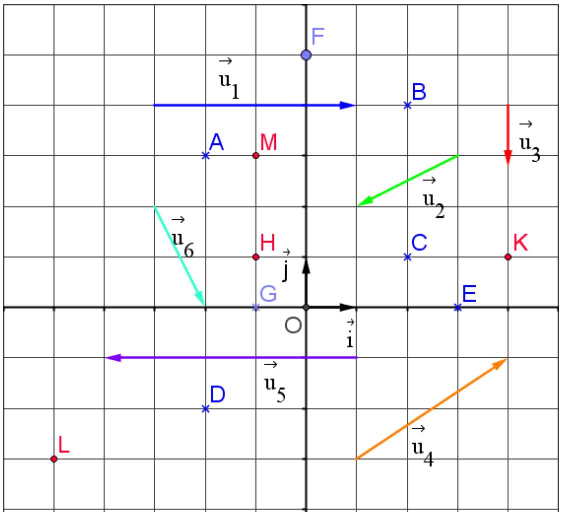
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-1\\2-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6-0\\-1+2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$	**Soit M le milieu de $[AC]$,** $M\left(\frac{1+6}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)$ $M\left(\frac{7}{2}\,;0\right)$	**Soit N le milieu de $[BD]$,** $N\left(\frac{7+0}{2}\,;\frac{2-2}{2}\right)$ $N\left(\frac{7}{2};\,0\right)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**		**Les points M et N sont confondus donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**	

3. $A(-1\,;1), B(3\,;1), C(2\,;\,-1)$ et $D(-2\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+1\\1-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2+2\\-1+1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$	**Soit M le milieu de $[AC]$,** $M\left(\frac{-1+2}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)$ $M\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$	**Soit N le milieu de $[BD]$,** $N\left(\frac{3-2}{2}\,;\frac{1-1}{2}\right)$ $N\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**		**Les points M et N sont confondus donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.**	

Compétence : Coordonnée de vecteur

Exercice 16 : Lecture graphique de coordonnées de vecteurs et construction de vecteurs



On se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$

1. Trouver, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{DA}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix},}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, \overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}, \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$ **et**
$\boldsymbol{\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}}$

2. Lire les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_6}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{u_6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}$

3. Placer les points H, K, L et M tels que :

a. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ b. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ c. $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ d. $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

Exercice 17 : Coordonnées de vecteurs et équation

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-5\,;4), B(2\,;6), C(-1\,;\ -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-5)\\6-4\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-5)\\-3-4\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}}$

2. Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AD} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = 4 \\ y_D - y_A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - (-5) = 4 \\ y_D - 4 = -1 \end{cases}}$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 - 5 \\ y_D = -1 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 3 \end{cases}.}$
Ainsi $\boldsymbol{D(-1\,;3)}$.

Exercice 18 : Coordonnées de vecteurs et équation

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $E(-10\,;5), F(0\,;-4), G(-7\,;\ -2)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GE}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0-(-10)\\-4-5\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10\\-9\end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-10-(-7)\\5-(-2)\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}}$

2. Calculer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HE} = \vec{v}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{HE} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_H = 7 \\ y_E - y_H = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 - x_H = 7 \\ 5 - y_H = 5 \end{cases}}$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} -x_H = 7 + 10 \\ -y_H = 5 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_H = 17 \\ -y_H = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -17 \\ y_H = 0 \end{cases}.}$
Ainsi $\boldsymbol{H(-17\,;0)}$.

Exercice 19 : Coordonnées de vecteurs et quadrilatère

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-2\,;5), B(6\,;1), C(\frac{5}{2}\,;\ -2)$ et $D(-\frac{11}{2}\,;2)$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-2)\\1-5\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-\left(-\frac{11}{2}\right)\\-2-2\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}}$

2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

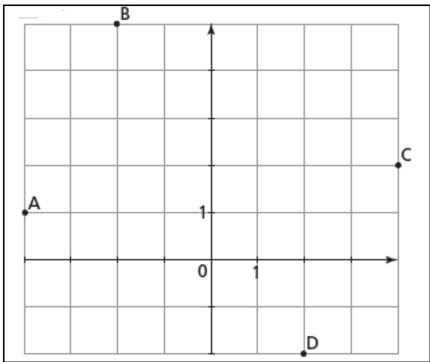
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$ **ainsi $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme.**

Exercice 20 : Coordonnées de vecteurs et parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-4\,;1), B(-2\,;5)$ et $C(4\,;\ 2)$

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-(-4)\\5-1\end{pmatrix}}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}}$

3. Placer le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer les coordonnées du point D.

$\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme$\boldsymbol{\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x_C - x_D \\ 4 = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 - 2 \\ y_D = 2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -2 \end{cases}.}$
Ainsi $\boldsymbol{D(2\,;\ -2)}$.

Exercice 21 : Cordonnées de vecteurs égaux

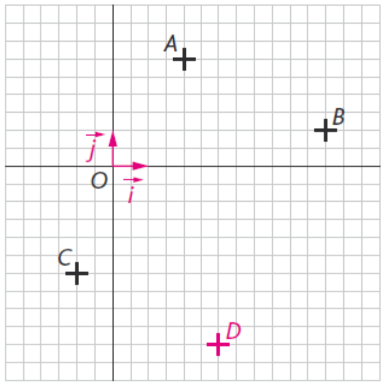
Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-1\,;2), B(1\,;4)$ et $C(x\,;\ 6)$.

Déterminer le réel x tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient égaux.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x-1\\2\end{pmatrix}}$ **donc $\boldsymbol{x-1=2}$ donc $\boldsymbol{x=3}$**

Exercice 22 : Coordonnées de vecteurs et parallélogramme



Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.
Soit $A(2\,;3)$, $B(6\,;1)$ et $C(-1\,;\ -3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-2\\1-3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

2. Construire le point D, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les coordonnées du point D.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-x_C=4\\y_D-y_C=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D-(-1)=4\\y_D-(-3)=-2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x_D=4-1\\y_D=-2-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=3\\y_D=-5\end{cases}$. **Ainsi** $D(3\,;\ -5)$.

4. Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ **donc** $ABDC$ **est un parallélogramme.**

5. Calculer les valeurs exactes des longueurs AD et BC.Que peut-on en déduire pour $ABDC$.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-2\\-5-3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}$ $AD=\sqrt{1^2+(-8)^2}=\sqrt{65}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-6\\-3-1\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$ $AD=\sqrt{(-7)^2+(-4)^2}=\sqrt{65}$
$ABDC$ **est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ainsi** $ABCD$ **est un rectangle.**	

Compétence : Milieu et parallélogramme sans utiliser les vecteurs

Exercice 22 : Milieu

Le plan est muni d'un repère (O,I,J).

Déterminer dans chaque cas :

1. Les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$.
2. Les coordonnées du point M', symétrique du point M par rapport au point A.

a. $A(0\,;0)$ et $B(1\,;1)$

$M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ $M\left(\frac{0+1}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	A **est donc le milieu de** $[M'M]$ **et vérifie :** $\begin{cases}x_A=\frac{x_{M'}+x_M}{2}\\y_A=\frac{y_{M'}+y_M}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x_{M'}=2x_A-x_M\\y_{M'}=2y_A-y_M\end{cases}}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=2\times0-\frac{1}{2}\\y_{M'}=2\times0-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=-\frac{1}{2}\\y_{M'}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ **Ainsi** $M'\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

b. $A(1\,;1)$ et $B(0\,;0)$

$M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$M'\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

c. $A(-5\,;3)$ et $B(-5\,;-10)$

$M\left(-5;-\frac{7}{2}\right)$	$M'\left(-5;\frac{19}{2}\right)$

d. $A(3\,;0)$ et $B(0\,;3)$

$M\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$	$M'\left(\frac{9}{2};-\frac{3}{2}\right)$

e. $A\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{3};\frac{1}{2}\right)$

$M\left(\frac{\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)}{2};\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{2}\right)$ $M\left(\frac{-\frac{3}{3}}{2};\frac{\frac{5}{4}}{2}\right)$ $M\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{8}\right)$	$\boxed{\begin{cases}x_{M'}=2x_A-x_M\\y_{M'}=2y_A-y_M\end{cases}}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=2\times\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\\y_{M'}=2\times\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\\y_{M'}=\frac{3}{2}-\frac{5}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=\frac{4\times2}{6}+\frac{1\times3}{6}\\y_{M'}=\frac{3\times4}{8}-\frac{5}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{M'}=\frac{11}{6}\\y_{M'}=\frac{7}{8}\end{cases}$ **Ainsi** $M'\left(\frac{11}{6};\frac{7}{8}\right)$

f. $A(2{,}5\,;0)$ et $B(-3\,;\ -5{,}2)$

$M(-0,25;-2,6)$	$M'(5,25;2,6)$

__Exercice 24 : Milieu et nature d'un quadrilatère__

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(1\,;3)$, $B(7\,;2)$, $C(4\,;\,-2)$ et $D(-2\,;\,-1)$.

1. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$.

Notons $\boldsymbol{M}$ le milieu de $[\boldsymbol{AC}]$. $\boldsymbol{M\left(\frac{1+4}{2};\frac{3-2}{2}\right)}$ **soit** $\boldsymbol{M\left(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$.	**Notons $\boldsymbol{N}$ le milieu de $[\boldsymbol{BD}]$.** $\boldsymbol{N\left(\frac{7-2}{2};\frac{2-1}{2}\right)}$ **soit** $\boldsymbol{N\left(\frac{5}{2}\,;\frac{1}{2}\right)}$.

2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

On remarque que les points $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont confondus et les segments $[\boldsymbol{AC}]$ et $[\boldsymbol{BD}]$ sont les diagonales du quadrilatère $\boldsymbol{ABCD}$.
Ainsi les diagonales se coupent en leur milieux et le quadrilatère $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme.

__Exercice 25 : Milieu et nature d'un quadrilatère__

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $E(-7\,;-1)$, $F(-2\,;1)$, $G(1\,;\,-1)$ et $H(-4\,;\,-3)$.
Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Pour montrer que $\boldsymbol{EFGH}$ est un parallélogramme il suffit de montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.
Notons $\boldsymbol{M}$ le milieu de $[\boldsymbol{EG}]$. $\boldsymbol{M\left(\frac{-7+1}{2};\frac{-1-1}{2}\right)}$ **soit** $\boldsymbol{M(-3\,;-1)}$.
Notons $\boldsymbol{N}$ le milieu de $[\boldsymbol{FH}]$. $\boldsymbol{N\left(\frac{-2-4}{2};\frac{1-3}{2}\right)}$ **soit** $\boldsymbol{N(-3\,;-1)}$.
On remarque que les points $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont confondus et les segments $[\boldsymbol{EG}]$ et $[\boldsymbol{FH}]$ sont les diagonales du quadrilatère $\boldsymbol{EFGH}$.
Ainsi les diagonales se coupent en leur milieux et le quadrilatère $\boldsymbol{EFGH}$ est un parallélogramme.

__Exercice 26 : Milieu et parallélogramme__

On considère trois points A, B et C dont on donne les coordonnées dans un repère (O, I, J) du plan.
Pour chacun des cas suivants ; déterminer les coordonnées d'un quatrième point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme :

a. $A(1\,;1)$, $B(5;2)$ et $C(3\,;4)$.

$\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme si et seulement si les diagonales $[\boldsymbol{AC}]$ et $[\boldsymbol{BD}]$ se coupent en leur milieu.
__1$^{\text{ère}}$ étape :__ On calcule le milieu $\boldsymbol{M}$ de $[\boldsymbol{AC}]$. $\boldsymbol{M\left(\frac{1+3}{2};\frac{1+4}{2}\right)}$ **soit** $\boldsymbol{M\left(2\,;\frac{5}{2}\right)}$.
__2$^{\text{ème}}$ étape :__ On suppose que $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme ainsi le point $\boldsymbol{M}$ est aussi le milieu de $[\boldsymbol{BD}]$ et donc le point $\boldsymbol{D}$ est le symétrique du point $\boldsymbol{B}$ par rapport au point $\boldsymbol{M}$ et vérifie :

$$\boxed{\begin{cases} x_D = 2x_B - x_M \\ y_D = 2y_B - y_M \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2\times 5 - 2 \\ y_D = 2\times 2 - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 10 - 2 \\ y_D = 4 - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = \frac{8}{2} - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Ainsi $\boldsymbol{D\left(5\,;\frac{3}{2}\right)}$

b. $A(-1\,;2)$, $B(5;-2)$ et $C(1\,;-5)$.

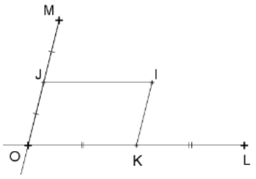
$\boldsymbol{M\left(0\,;\,-\frac{3}{2}\right)}$	$\boldsymbol{D\left(10\,;\,-\frac{5}{2}\right)}$

c. $A(-3\,;2)$, $B(2;0)$ et $C(-1\,;-1)$.

$\boldsymbol{M\left(-2\,;\frac{1}{2}\right)}$	$\boldsymbol{D\left(6\,;\,-\frac{1}{2}\right)}$

Exercice 27 : Milieu et repère quelconque

Sur la figure suivante, $OKIJ$ est un parallélogramme, J est le milieu du segment $[OM]$ et K celui du segment $[OL]$.



Le point I est-il le milieu du segment $[ML]$?

On se place dans le repère (O, K, J). Ainsi on a $(0 ; 0)$, $K(1 ; 0)$ et $J(0 ; 1)$.
Comme $OKIJ$ est un parallélogramme on obtient $I(1 ; 1)$.
J est le milieu de $[OM]$ ainsi $M(0 ; 2)$ et K est le milieu de $[OL]$ ainsi $L(2 ; 0)$.
Notons N le milieu de $[ML]$. $N\left(\frac{0+2}{2} ; \frac{2+0}{2}\right)$ soit $N(1 ; 1)$.
Ainsi les points N et I sont confondus et le point I est le milieu de $[ML]$.

Compétence : Distance et géométrie

Exercice 28 : Distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Calculer dans chaque cas la distance AB.

a. $A(0\,;0)$ et $B(1\,;1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$AB=\sqrt{1^2+1^2}$ $AB=\sqrt{1+1}$ $AB=\sqrt{2}$

b. $A(1\,;1)$ et $B(0\,;0)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$	$AB=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}$ $AB=\sqrt{1+1}$ $AB=\sqrt{2}$

c. $A(3\,;0)$ et $B(0\,;3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-3\\3-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$	$AB=\sqrt{(-3)^2+3^2}$ $AB=\sqrt{9+9}$ $AB=\sqrt{18}$ $AB=3\sqrt{2}$

d. $A(-1\,;5)$ et $B(3\,;-7)$

$AB=\sqrt{160}$

e. $A\left(\frac{2}{3}\,;\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$	$AB=\sqrt{\left(-\frac{7}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$ $AB=\sqrt{\frac{793}{144}}$

f. $A(2{,}5\,;0)$ et $B(-3\,;\,-5{,}2)$

$AB=\sqrt{57{,}29}$

g. $A(1-\sqrt{2}\,;1)$ et $B(1+\sqrt{2}\,;\,-1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})\\-1-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$	$AB=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+(-2)^2}$ $AB=\sqrt{8+4}$ $AB=\sqrt{12}$ $AB=2\sqrt{3}.$

Exercice 29 : Distance et nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé (O, U, V) du plan, donner la nature du triangle TRI pour chacun des cas suivants :

a. $T(3\,;3), R(2\,;\,-2)$ et $I(-8\,;0)$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{26}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{130}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{104}}$

$\boldsymbol{TI^2 = 130}$

$\boldsymbol{TR^2 + RI^2 = 26 + 104 = 130}$

Ainsi $TI^2 = TR^2 + RI^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TRI est rectangle en R.

b. $T(4\,;-6), R(2\,;\,0)$ et $I(5\,;-1)$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{40}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{26}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{10}}$

On remarque que $TR \neq TI \neq RI$ et $TR^2 \neq TI^2 + RI^2$ ainsi le triangle TRI est quelconque.

c. $T(-2\,;3), R(8\,;\,4)$ et $I(-1\,;-6)$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{101}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{82}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{181}}$

On remarque que $TR \neq TI \neq RI$ et $RI^2 \neq TI^2 + TR^2$ ainsi le triangle TRI est quelconque.

d. $T(3\,;5), R(-3\,;\,1)$ et $I(5\,;-\frac{9}{2})$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{52}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{94,25}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{94.25}}$

On remarque que $TI = RI$ ainsi le triangle TRI est isocèle en I et $RI^2 \neq TI^2 + TR^2$ ainsi le triangle TRI n'est pas rectangle.

e. $T(-2\,;-1), R(3\,;\,1)$ et $I(-\frac{7}{2}\,;10)$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{29}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{123,25}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{123.25}}$

On remarque que $TI = RI$ ainsi le triangle TRI est isocèle en I et $RI^2 \neq TI^2 + TR^2$ ainsi le triangle TRI n'est pas rectangle.

f. $T(1\,;-2), R(6\,;\,0)$ et $I(-1\,;9)$.

$\boldsymbol{TR = \sqrt{29}}$ $\boldsymbol{TI = \sqrt{125}}$ $\boldsymbol{RI = \sqrt{130}}$

On remarque que $TR \neq TI \neq RI$ et $RI^2 \neq TI^2 + TR^2$ ainsi le triangle TRI est quelconque.

g. $T(-1\,;1), R(\sqrt{2}+1\,;\,\sqrt{2}+1)$ et $I(\sqrt{2}+1\,;-\sqrt{2}+1)$.

$\boldsymbol{TR^2 = \left(\sqrt{2}+1+1\right)^2 + (\sqrt{2}+1-1)^2}$

$\boldsymbol{TR^2 = \left(\sqrt{2}+2\right)^2 + 2}$

$\boldsymbol{TR^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4 + 2}$

$\boldsymbol{TR^2 = 8 + 4\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{TR = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}}$

$\boldsymbol{TI^2 = \left(\sqrt{2}+1+1\right)^2 + (-\sqrt{2}+1-1)^2}$

$\boldsymbol{TI^2 = \left(\sqrt{2}+2\right)^2 + 2}$

$\boldsymbol{TI^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4 + 2}$

$\boldsymbol{TI^2 = 8 + 4\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{TI = \sqrt{8 + 4\sqrt{2}}}$

$\boldsymbol{RI^2 = 0^2 - \left(-2\sqrt{2}\right)^2}$

$\boldsymbol{RI^2 = 8}$

$\boldsymbol{RI = \sqrt{8}}$

$\boldsymbol{RI = 2\sqrt{2}}$

On remarque que $TR = TI$ ainsi le triangle TRIest isocèle en T et $TR^2 \neq TI^2 + RI^2$ ainsi le triangle TRI n'est pas rectangle.

h. $T(1\,;2), R(5\,;\ 2)$ et $I(3\,;3+2\sqrt{2})$.

$$\boldsymbol{TR = 4}$$

$$TI^2 = (3-1)^2 + (3+2\sqrt{2}-2)^2 \qquad RI^2 = (3-5)^2 + (3+2\sqrt{2}-2)^2$$

$$TI^2 = 4 + \left(1+2\sqrt{2}\right)^2 \qquad RI^2 = 4 + \left(1+2\sqrt{2}\right)^2$$

$$TI^2 = 4+1+4\sqrt{2}+8 \qquad RI^2 = 4+1+4\sqrt{2}+8$$

$$TI^2 = 13+4\sqrt{2} \qquad RI^2 = 13+4\sqrt{2}$$

$$TI = \sqrt{13+4\sqrt{2}} \qquad RI = \sqrt{13+4\sqrt{2}}$$

On remarque que $TI = RI$ ainsi le triangle TRI est isocèle en I et $RI^2 \neq TI^2 + TR^2$ ainsi le triangle TRI n'est pas rectangle.

Exercice 30 : Distance et triangle

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.
Soit les points $A(-5\,;\ -1), B(4\,;\ -1)$ et $M(x\,;2)$.
Déterminer dans chacun des cas suivants la ou les valeur(s) de x telle(s) que M vérifie :

a. le triangle ABM est isocèle en M.

ABM est isocèle en M si et seulement si $AM = BM$

$$AM^2 = BM^2$$

Calculons AM^2 et BM^2 :

$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \qquad BM^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2$$

$$AM^2 = (x+5)^2 + (2+1)^2 \qquad BM^2 = (x-4)^2 + (2+1)^2$$

$$AM^2 = x^2 + 10x + 25 + 9 \qquad BM^2 = x^2 - 8x + 1 + 9$$

$$AM^2 = x^2 + 10x + 34 \qquad BM^2 = x^2 - 8x + 10$$

ABM est isocèle en M si et seulement si $x^2 + 10x + 34 = x^2 - 8x + 10$

$$18x = -24$$

$$x = -\frac{24}{18}$$

$$x = -3$$

b. le triangle ABM est rectangle en A.

ABM est rectangle en A si et seulement si $BM^2 = AM^2 + AB^2$

On trouve $AB^2 = 81$.

ABM est rectangle en A si et seulement si $x^2 - 8x + 10 = x^2 + 10x + 34 + 81$

$$-18x = 105$$

$$x = -\frac{105}{18}$$

$$x = -\frac{35}{6}$$

c. le triangle ABM est rectangle en B.

ABM est rectangle en B si et seulement si $AM^2 = BM^2 + AB^2$

$$x^2 + 10x + 34 = x^2 - 8x + 10 + 81$$

$$18x = 57$$

$$x = \frac{57}{18}$$

$$x = \frac{19}{6}$$

Exercice 31 : Distance et alignement de points

Dans un repère orthonormé, dire si les points A, B et C sont alignés dans les cas suivants :

a. $A(-1\,;4), B(1\,;1)$ et $C(5\,;\,-5)$.

$\boldsymbol{AB=\sqrt{13}}$	$\boldsymbol{AC=\sqrt{117}=3\sqrt{13}}$	$\boldsymbol{BC=\sqrt{52}=2\sqrt{13}}$
On remarque que $AB+BC=AC$ ainsi d'après l'égalité triangulaire les points A, B et C sont alignés. ($B\in[AC]$)		

b. $A(4\,;-3), B(13{,}5\,;4)$ et $C(1\,;\,-1)$.

$\boldsymbol{AB=\sqrt{139{,}25}\approx 11{,}80}$	$\boldsymbol{AC=\sqrt{13}\approx 3{,}61}$	$\boldsymbol{BC=\sqrt{181{,}25}\approx 13{,}46}$
On remarque que $BC\neq AC+AB$ ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.		

c. $A(-3\,;6), B(3\,;2)$ et $C(16\,;\,-7)$.

$\boldsymbol{AB=\sqrt{52}\approx 7{,}21}$	$\boldsymbol{AC=\sqrt{530}\approx 23{,}02}$	$\boldsymbol{BC=\sqrt{250}\approx 15{,}81}$
Attention : Ne pas se faire piéger avec les arrondis. **A la calculatrice, on trouve : $AB+BC\approx 23{,}0224$ et $AC\approx 23{,}0217$.** **On remarque donc que $AC\neq AB+BC$, ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.**		

d. $A(-3\,;-5), B(4\,;-4)$ et $C(38\,;\,1)$.

$\boldsymbol{AB=\sqrt{50}\approx 7{,}07}$	$\boldsymbol{AC=\sqrt{1717}\approx 41{,}44}$	$\boldsymbol{BC=\sqrt{1181}\approx 34{,}37}$
Attention : Ne pas se faire piéger avec les arrondis. **A la calculatrice, on trouve : $AB+BC\approx 41{,}43675$ et $AC\approx 41{,}436699$.** **On remarque donc que $AC\neq AB+BC$, ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.**		

Exercice 32 : Distance et quadrilatère

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.

Soit les points $A(3;2)$, $B(2;0)$, $C(4;-1)$ et $D(5;1)$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Pour montrer que $ABCD$ est un parallélogramme il suffit de montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.
Notons M le milieu de $[AC]$. $M\left(\frac{3+4}{2};\frac{2-1}{2}\right)$ soit $M\left(\frac{7}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
Notons N le milieu de $[BD]$. $N\left(\frac{2+5}{2};\frac{0+1}{2}\right)$ soit $N\left(\frac{7}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
On remarque que les points M et N sont confondus et les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du quadrilatère $ABCD$.
Ainsi les diagonales se coupent en leur milieux et le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle

Pour montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle il suffit de montrer qu'il admet un angle droit.
Calculons AB^2, AC^2 et BC^2 .
$\boldsymbol{AB^2=5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{AC^2=10}$ $\qquad$ $\boldsymbol{BC^2=5}$
On remarque que $AC^2=AB^2+BC^2$ ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B et donc le parallélogramme $ABCD$ admet en angle droit.
$ABCD$ est donc un rectangle.

3. Montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

Pour montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un losange il suffit de montrer que deux côtés consécutifs sont de même longueur.
On remarque que $AB=BC=\sqrt{5}$ ainsi le triangle ABC est isocèle en B et donc le parallélogramme $ABCD$ admet deux côtés consécutifs de même longueur.
$ABCD$ est donc un losange.

4. En déduire la nature de $ABCD$.

$ABCD$ est à la fois un rectangle et un losange, c'est donc un carré.

Exercice 33 : Distance et losange

Dans un repère orthonormé, on considère les points

$A(-1; 4)$, $B(4; 5)$, $C(3 ; 0)$ et $D(-2; -1)$.

Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme : **Notons M le milieu de $[AC]$. $M\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{4+0}{2}\right)$ soit $M(1 ; 2)$.** **Notons N le milieu de $[BD]$. $N\left(\frac{4-2}{2}; \frac{5-1}{2}\right)$ soit $N(1 ; 2)$.** **On remarque que les points M et N sont confondus et les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du quadrilatère $ABCD$.** **Ainsi les diagonales se coupent en leur milieux et le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.** **2ème étape : On montre que le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur :** $AB^2 = 26$ $\quad$ $AC^2 = 32$ $\quad$ $BC^2 = 26$ **On remarque que $AB = BC = \sqrt{26}$ ainsi le triangle ABC est isocèle en B et donc le parallélogramme $ABCD$ admet deux côtés consécutifs de même longueur.** **$ABCD$ est donc un losange.**

Exercice 34 : Distance et cercle

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.

Soit les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 4)$ et $C(3; -1)$.

1. Calculer JA, JB et JC.

On a d'après le repère $J(0 ; 1)$.

$JA = \sqrt{13}$	$JB = \sqrt{13}$	$JC = \sqrt{13}$

2. Que représente le point $J(0 ; 1)$ pour le triangle ABC ?

On remarque que $JA = JB = JC$ ainsi le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 35 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les pointsA, B, C et D suivants.

Montrer dans chaque cas, que $ABCD$ est un carré :

Modèle :

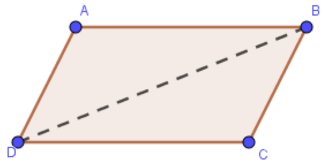
<u>1ère étape :</u> On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}(\quad)$

$\overrightarrow{AB}(\quad)$

$\overrightarrow{DC}(\quad)$

$\overrightarrow{DC}(\quad)$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

<u>2ème étape :</u> On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)

Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}(\quad)$

Donc $AB = \sqrt{\quad}$

$AB = \sqrt{\quad}$

$\overrightarrow{AD}(\quad)$

$\overrightarrow{AD}(\quad)$

Donc $AD = \sqrt{\quad}$

$AD = \sqrt{\quad}$

$\overrightarrow{BD}(\quad)$

$\overrightarrow{BD}(\quad)$

Donc $BD = \sqrt{\quad}$

$BD =$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

$BD^2 =$

$AB^2 + AD^2 =$

Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

1. $A(0\,;1)$, $B(2\,;1)$, $C(2\,;\,-1)$ et $D(0\,;\,-1)$.

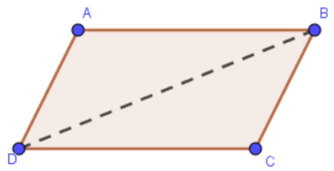
<u>1ère étape :</u> On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -1+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

<u>2ème étape :</u> On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)

Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{2^2 + 0^2}$

$AB = \sqrt{4}$

$AB = 2$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0-2 \\ -1+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $AD = \sqrt{(-2)^2 + 0^2}$

$AD = \sqrt{4}$

$AD = 2$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0-2 \\ -1-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $BD = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$

$BD = \sqrt{4+4}$

$BD = \sqrt{8}$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

$BD^2 = 8$
$AB^2 + AD^2 = 4 + 4$
Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

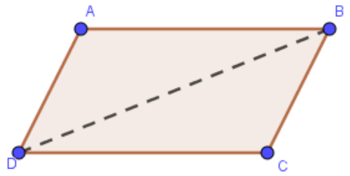
$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

2. $A(-1\,;1), B(2\,;1), C(2\,;\,-2)$ et $D(-1\,;\,-2)$.

1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2+1\\1-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2+1\\-2+2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)
Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{3^2 + 0^2}$
$AB = \sqrt{9}$
$AB = 3$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1+1\\-2-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

Donc $AD = \sqrt{0^2 + (-3)^2}$
$AD = \sqrt{9}$
$AD = 3$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1-2\\-2-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

Donc $BD = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$
$BD = \sqrt{9+9}$
$BD = \sqrt{18}$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

$BD^2 = 18$
$AB^2 + AD^2 = 9 + 9 = 18$
Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

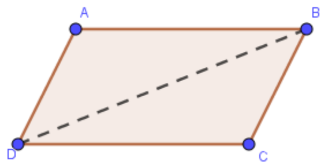
$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

3. $A(-3\,;5), B(1\,;5), C(1\,;\,1)$ et $D(-3\,;\,1)$.

1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+3\\5-5\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1+3\\1-1\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)
Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3+3\\1-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3-1\\1-5\end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{4^2 + 0^2}$ $AB = \sqrt{16}$ $AB = 4$	$\overrightarrow{AD}\binom{0}{-4}$ Donc $AD = \sqrt{0^2 + (-4)^2}$ $AD = \sqrt{16}$ $AD = 4$	$\overrightarrow{BD}\binom{-4}{-4}$ Donc $BD = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$ $BD = \sqrt{16 + 16}$ $BD = \sqrt{32}$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

$BD^2 = 32$
$AB^2 + AD^2 = 16 + 16$
Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

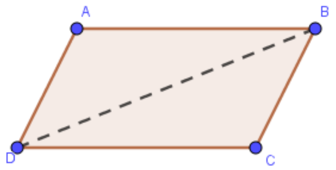
Exercice 36 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les pointsA, B, C et D suivants.

Donner dans chaque cas, la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

Modèle :

1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}(\ )$ $\overrightarrow{AB}(\ )$	$\overrightarrow{DC}(\ )$ $\overrightarrow{DC}(\ )$	

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)
Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}(\ )$ Donc $AB = \sqrt{\ }$	$\overrightarrow{AD}(\ )$ $\overrightarrow{AD}(\ )$ Donc $AD = \sqrt{\ }$	$\overrightarrow{BD}(\ )$ $\overrightarrow{BD}(\ )$ Donc $BD = \sqrt{\ }$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.
OU
$AB \neq AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ n'est pas un losange.

$BD^2 =$
$AB^2 + AD^2 =$
Donc $BD^2 = AB^2 + AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.
OU
Donc $BD^2 \neq AB^2 + AD^2$, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ n'a pas d'angle droit en A ainsi $ABCD$ n'est pas un rectangle.

$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

1. $A(-4\,;2), B(1\,;2), C(1\,;\,-1)$ et $D(-4\,;\,-1)$.

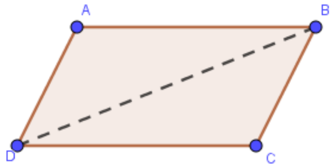
<u>1</u> **1ère étape :** **On montre que $ABCD$ est un parallélogramme**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+4\\2-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1+4\\-1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)

Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

Donc $AB=\sqrt{5^2+0^2}$

$AB=\sqrt{25}$

$AB=5$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4+4\\-1-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

Donc $AD=\sqrt{0^2+(-3)^2}$

$AD=\sqrt{9}$

$AD=3$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4-1\\-1-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

Donc $BD=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2}$

$BD=\sqrt{25+9}$

$BD=\sqrt{34}$

$AB\neq AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ n'est pas un losange. (on n'est pas obligé de le remarquer)

$BD^2=34$

$AB^2+AD^2=25+9=34$

Donc $BD^2=AB^2+AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

2. $A(-3\,;1), B(1\,;1), C(1\,;\,-3)$ et $D(-3\,;\,-3)$.

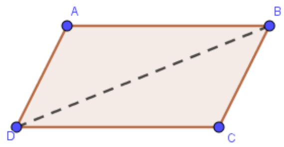
1ère étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+3\\1-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1+3\\-3+3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

2ème étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)

Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

Donc $AB=\sqrt{4^2+0^2}$

$AB=\sqrt{16}$

$AB=4$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3+3\\-3-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

Donc $AD=\sqrt{0^2+(-4)^2}$

$AD=\sqrt{16}$

$AD=4$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3-1\\-3-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

Donc $BD=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}$

$BD=\sqrt{16+16}$

$BD=\sqrt{32}$

$AB=AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

$BD^2=32$

$AB^2+AD^2=16+16=32$

Donc $BD^2=AB^2+AD^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit en A ainsi $ABCD$ est un rectangle.

$ABCD$ est un losange et un rectangle c'est donc un carré.

3. $A(-1\,;3), B(1\,;-1), C(-1\,;\ -5)$ et $D(-3\,;-1)$.

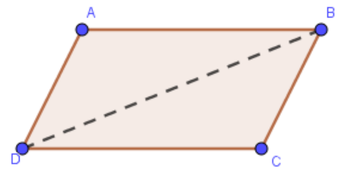
$1^{\text{ère}}$ étape : On montre que $ABCD$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+1\\-1-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1+3\\-5+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi $ABCD$ est un parallélogramme.

$2^{\text{ème}}$ étape : On calcule les longueurs AB et AD (côtés consécutifs) et BD (diagonale)
Conseil : On peut calculer d'abord les coordonnées des vecteurs avant de calculer les distances.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

Donc $AB = \sqrt{2^2+(-4)^2}$

$AB = \sqrt{4+16}$

$AB = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3+1\\-1-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

Donc $AD = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2}$

$AD = \sqrt{4+16}$

$AD = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3-1\\-1+1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

Donc $BD = \sqrt{(-4)^2+0^2}$

$BD = \sqrt{16}$

$BD = 4$

$AB = AD$ ainsi le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur donc $ABCD$ est un losange.

On remarque rapidement qu'il est impossible d'avoir un angle droit en A puisque BD n'est même pas le plus grand côté.

Compétence : Relation de Chasles

<u>Exercice 37 : Relation de Chasles</u>

Compléter les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles.

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\overrightarrow{AD}}$
b. $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$
c. $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}$
d. $\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{\overrightarrow{CA}}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{\overrightarrow{BF}}$
e. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}=\boldsymbol{\overrightarrow{BF}}$
f. $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
g. $\overrightarrow{EG}+\boldsymbol{\overrightarrow{GO}}=\overrightarrow{EO}$
h. $\overrightarrow{VR}+\boldsymbol{\overrightarrow{RS}}+\boldsymbol{\overrightarrow{SN}}=\overrightarrow{VN}$

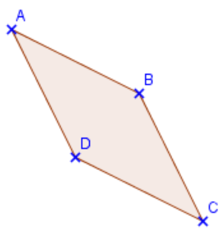
<u>Exercice 38 : Somme et différence de vecteurs</u>

Compléter les égalités suivantes :

a. $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}+\boldsymbol{\overrightarrow{CA}}=\vec{0}$
b. $\overrightarrow{DF}-\boldsymbol{\overrightarrow{DF}}=\vec{0}$
c. $\overrightarrow{B\boldsymbol{H}}+\overrightarrow{HD}+\boldsymbol{\overrightarrow{DB}}=\vec{0}$
d. $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}+\boldsymbol{\overrightarrow{CA}}=\vec{0}$

<u>Exercice 39 : Règle du parallélogramme</u>

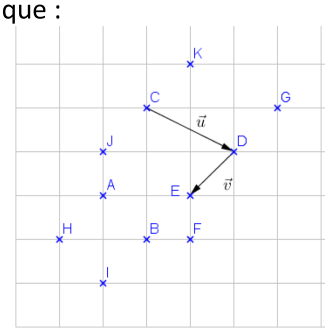
A l'aide du parallélogramme $ABCD$, compléter les égalités suivantes :



a. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{\overrightarrow{AD}}$
b. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$
c. $\overrightarrow{BA}+\boldsymbol{\overrightarrow{AD}}=\overrightarrow{BD}$
d. $\boldsymbol{\overrightarrow{AA}}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}$

<u>Exercice 40 : Somme et différence de vecteurs</u>

Soit A et B deux points du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Sur la figure ci-dessous, identifier les points M, NP et Q tels que :



a. $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$

M est la point F.

b. $\overrightarrow{BN}=-\vec{v}$

N est la point E.

c. $\overrightarrow{CP}=\vec{u}+\vec{v}$

M est la point E.

d. $\overrightarrow{DQ}=-\vec{u}+\vec{v}$

M est la point J.

Compétence : Somme de vecteurs et construction

Exercice 41 : Coordonnées de somme et différence de vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}\mathbf{2+5}\\\mathbf{-3+7}\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}}$
2. $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}\mathbf{2-5}\\\mathbf{-3-7}\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix}}$
3. $-\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}\mathbf{-2-6}\\\mathbf{3+4}\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{-\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}}$
4. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}\mathbf{2+5-6}\\\mathbf{-3+7+4}\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}}$
5. $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\begin{pmatrix}\mathbf{2+5+6}\\\mathbf{-3+7-4}\end{pmatrix}$ **soit** $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\begin{pmatrix}13\\0\end{pmatrix}}$

Exercice 42 : Coordonnées de somme et différence de vecteurs et équation

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-5\,;6)$, $B(7\,;4)$ et $C(-4\,;\ -1)$.

1. Calculer les coordonnées du point D vérifiant :

$\boldsymbol{\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_B \\ y_D = y_A + y_B \end{cases}}$ **(car** $\boldsymbol{x_O = y_O = 0}$**)** $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -5+7 \\ y_D = 6+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 10 \end{cases}}$.

Ainsi $\boldsymbol{D(2\,;10)}$

2. Calculer les coordonnées du point E vérifiant :

$\boldsymbol{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_A = x_A + x_B \\ y_E - y_A = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E-(-5) = -5+7 \\ y_E - 6 = 6+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2-5 \\ y_E = 10+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3 \\ y_E = 16 \end{cases}}$.

Ainsi $\boldsymbol{E(-3\,;16)}$

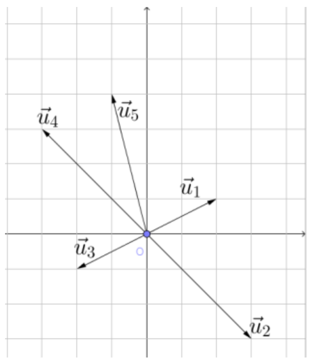
3. Calculer les coordonnées du point F vérifiant :

$\boldsymbol{\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F - x_A = x_B - x_A + x_C - x_A \\ y_F - y_A = y_B - y_A + y_C - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F + 5 = 7+5-4+5 \\ y_F - 6 = 4-6-1-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 8 \\ y_F = -3 \end{cases}}$.

Ainsi $\boldsymbol{F(-3\,;16)}$

Exercice 43 : Somme de vecteurs

Compléter les égalités suivantes à l'aide de la figure.

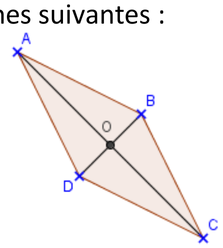


a. $\vec{u}_2+\vec{u}_5 = \boldsymbol{\vec{u}_1}$
b. $\vec{u}_1+\boldsymbol{\vec{u}_4} = \vec{u}_5$
c. $\boldsymbol{\vec{u}_5}+\vec{u}_3 = \vec{u}_4$
d. $\vec{u}_3+\vec{u}_1 = \boldsymbol{\vec{0}}$

Exercice 44 : Somme de vecteurs et parallélogramme

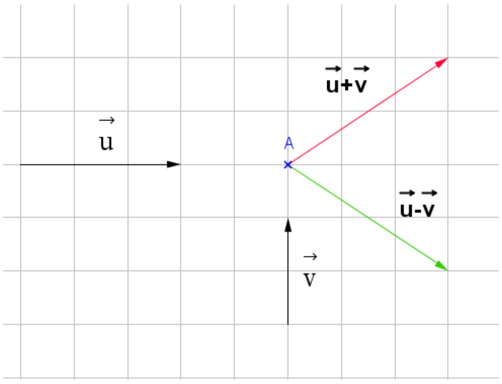
1. Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
2. En utilisant uniquement les points de la figure, trouver un vecteur égal aux sommes suivantes :

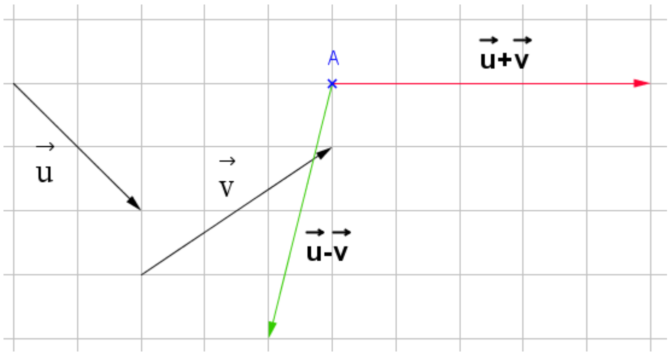
a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$
b. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO} = \boldsymbol{\overrightarrow{AD}}$
c. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$
d. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\vec{0}}$
e. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$

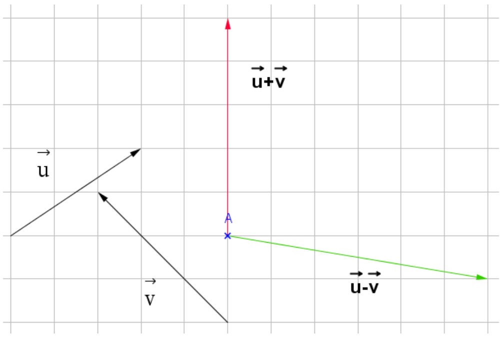


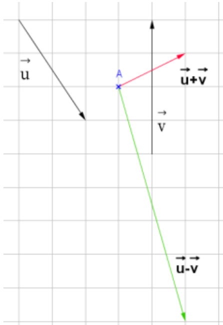
Exercice 45 : Construction de sommes et différences de vecteurs

1. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u} + \vec{v}$.
2. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u} - \vec{v}$.







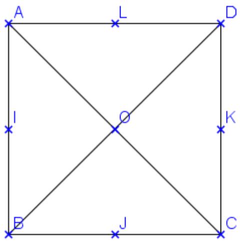


Exercice 46 : Carré et somme de vecteurs

$ABCD$ est un carré de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Compléter les égalités suivantes :

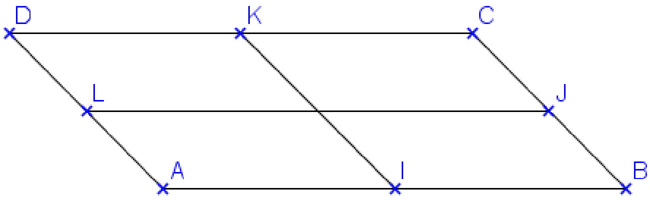


a. $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{\overrightarrow{LJ}}$
b. $\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK} = \boldsymbol{\overrightarrow{OD}}$
c. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{BK} = \boldsymbol{\overrightarrow{AK}}$
d. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{\overrightarrow{KI}}$
e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL} = \boldsymbol{\overrightarrow{AJ}}$
f. $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{JO} = \boldsymbol{\overrightarrow{CO}}$

Exercice 47 : Parallélogramme et somme de vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Compléter les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{KJ} = \boldsymbol{\overrightarrow{AI}}$
b. $\overrightarrow{LJ} - \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{\overrightarrow{DA}}$
c. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CJ} = \boldsymbol{\overrightarrow{JD}}$
d. $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{BI} = \boldsymbol{\overrightarrow{JC}}$