Chapitre : Produit scalaire (1)

Pour les exercices suivants, faire une figure avant de commencer, si nécessaire.

Attention beaucoup de « coquilles » sont présentes dans ce document. La correction en classe est donc prioritaire par rapport à ce document.

Compétence : Produit scalaire avec normes et angle

Exercice 1 : Produit scalaire avec normes et angle

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note θ une mesure en radian de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}.\vec{v}$:

a. $||\vec{u}|| = 4, ||\vec{v}|| = 7$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}}$$

b. $||\vec{u}|| = 8, ||\vec{v}|| = 5$ et $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}}$$

c. $||\vec{u}|| = 2, ||\vec{v}|| = 7$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 2 \times 7 \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\sqrt{2}}$$

d. $||\vec{u}|| = 6, ||\vec{v}|| = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 6 \times 3 \times cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9\sqrt{3}}$$

e. $||\vec{u}|| = 4, ||\vec{v}|| = 10$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = 4 \times 10 \times cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -20}$$

Exercice 2 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

a. $AB = 5, AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 0$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 7 \times cos(0) = 35}$$

b. $AB = 10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 10 \times 4 \times cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

c. $AB = 3, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 9 \times cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{27}{2}\sqrt{2}}$$

Exercice 3 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Calculer AB sachant que :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos(\widehat{BAC})}}$$

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

$$\boldsymbol{AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos(\widehat{BAC})} = \frac{40}{8 \times cos(60)} = 10}$$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\boldsymbol{AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos(\widehat{BAC})} = \frac{-10}{4 \times cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{15}{2}}$$

Exercice 4 : Produit scalaire avec normes et angle

On considère un triangle ABC.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\widehat{BAC}$ au centième de radian près.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

a. $AB = 3, AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{6}{3\times 7} = \frac{2}{7}$ **ainsi** $\widehat{BAC} \approx 1,28$ **rad.**

b. $AB = 4$ $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{7}{4\times 2} = \frac{7}{8}$ **ainsi** $\widehat{BAC} \approx 0,51$ **rad.**

c. $AB = 8, AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{12}{8\times 3} = \frac{1}{2}$ **ainsi** $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ **rad.**

Exercice 5 : Produit scalaire avec normes et angle

En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Sur un téléski, la perche exerce sur un skieur une force constante $\vec{F}$ d'intensité 400N lors d'un déplacement du point A au point B de longueur 100 m.

Une mesure de l'angle $(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$ est 30°.

Quel est le travail de la force $\vec{F}$ durant le déplacement $\overrightarrow{AB}$?

$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \lVert\vec{F}\rVert \times \lVert\overrightarrow{AB}\rVert \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = 400 \times 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20000\sqrt{3} \approx 34641$ **Joules**

Compétence : Propriété du produit scalaire

Exercice 6 : Propriété du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient :

$\lVert\vec{u}\rVert = 2, \lVert\vec{v}\rVert = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

Calculer les réels suivants : $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{v}$; $(\vec{u} + 3\vec{v}).(2\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v})^2$

$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 5 + 3^2 = 14$ $(\vec{u} + 3\vec{v}).(2\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u}^2 + \vec{u}.\vec{v} + 6\vec{v}.\vec{u} + 3\vec{v}^2 = 2 \times 2^2 + 5 + 6 \times 5 + 3 \times 3^2 = 70$ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = 2^2 + 2 \times 5 + 3^2 = 23$

Exercice supplémentaire : Propriété du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient :

$\lVert\vec{u}\rVert = 5, \lVert\vec{v}\rVert = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 4$.

Calculer les réels suivants :

$(6\vec{u} + \overrightarrow{3v}).(\vec{u} - 2\vec{v})$; $(-\vec{u} + 3\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v})$ et $(2\vec{u} + \vec{v})^2$

$(6\vec{u} + \overrightarrow{3v}).(\vec{u} - 2\vec{v}) = 90$ $(-\vec{u} + 3\vec{v}).(4\vec{u} + \vec{v}) = -44$ $(2\vec{u} + \vec{v})^2 = 120$

Exercice supplémentaire : Propriété du produit scalaire

1. Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -8$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 8$

2. Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 10$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5 + 10 = 15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 15$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA} = -15$

Exercice 7 : Propriété du produit scalaire

Soit ABC un triangle, I étant le milieu du côté $[BC]$.

On suppose que $BC = 8$ et $IA = 5$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}) = AI^2 + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = AI^2 + \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IB}^2 = 5^2 + 0 - 4^2 = 9$

Exercice 8 : Propriété du produit scalaire

Soit trois points A, B et C.

On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -4$.

Calculer la longueur du segment $[AB]$.

$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 5 + 4 = 9$ **ainsi** $AB = 3$.

Exercice 9 : Propriété du produit scalaire

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6, AD = 7$ et $BD = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$, puis $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\left\Vert\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right\Vert^2 - \left\Vert\overrightarrow{DA}\right\Vert^2 - \left\Vert\overrightarrow{DC}\right\Vert^2\right) = \frac{1}{2}\left(DB^2 - DA^2 - DC^2\right) = \frac{1}{2}\left(10^2 - 7^2 - 6^2\right) = 7,5$ $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 7,5 + 6^2 = 43,5$ **(car** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$**).**

2. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = -7,5$

3. Déterminer alors la longueur de la diagonale $[AC]$

$AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = AD^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} + DC^2 = 7^2 + 2\times(-7,5) + 6^2 = 70$ **ainsi** $AC = \sqrt{70}$. **Remarque : Pour utiliser la question 2 on peut remarquer que :** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right)$ **donc** $AC = \cdots$

Compétence : Expression analytique du produit scalaire

Exercice 10 : Expression analytique du produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans chacun des cas :

1. Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}.\vec{u}, (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}$ et $\vec{v}^2$.

a. $\vec{u}\binom{5}{6}$ et $\vec{v}\binom{2}{4}$	b. $\vec{u}\binom{-1}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{5}$	c. $\vec{u}\binom{10}{7}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$
$\vec{u}.\vec{v} = 5\times2+6\times4$ $= 10+24 = 34$ $\vec{u}.\vec{u} = 5^2+6^2$ $= 25+36 = 61$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 7\times5+10\times6$ $= 35+60 = 95$ $\vec{v}^2 = 2^2+4^2 = 4+16 = 20$	$\vec{u}.\vec{v} = (-1)\times2+3\times5$ $= -2+15 = 13$ $\vec{u}.\vec{u} = (-1)^2+3^2$ $= 1+9 = 10$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 1\times(-1)+8\times5$ $= -1+40 = 39$ $\vec{v}^2 = 2^2+5^2 = 4+25 = 29$	$\vec{u}.\vec{v} = 10\times3+7\times2$ $= 30+14 = 44$ $\vec{u}.\vec{u} = 10^2+7^2$ $= 100+49 = 149$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u} = 13\times10+9\times7$ $= 130+63 = 193$ $\vec{v}^2 = 3^2+2^2 = 9+4 = 13$

2. Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\binom{5}{3}$ et $\vec{v}\binom{10}{6}$	b. $\vec{u}\binom{21}{-7}$ et $\vec{v}\binom{2}{6}$	c. $\vec{u}\binom{8}{1}$ et $\vec{v}\binom{6}{7}$
$\vec{u}.\vec{v} = 5\times10+3\times6$ $= 50+18 = 68 \neq 0$ $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **ne sont pas orthogonaux**	$\vec{u}.\vec{v} = 21\times2+(-7)\times6$ $= 42-42 = 0$ $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux**	$\vec{u}.\vec{v} = 8\times6+1\times7$ $= 48+7 = 55 \neq 0$ $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **ne sont pas orthogonaux**

3. Déterminer le réel m de telle sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\binom{4}{6}$et $\vec{v}\binom{m}{-5}$	b. $\vec{u}\binom{7}{-2}$et $\vec{v}\binom{9}{m}$	c. $\vec{u}\binom{2}{m-3}$et $\vec{v}\binom{-1}{2m}$
$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux ssi** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $4m-30 = 0$ $m = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5.$	$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux ssi** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $63-2m = 0$ $m = \frac{63}{2} = 31,5.$	$\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux ssi** $\vec{u}.\vec{v} = 0$ $-2+(m-3)(2m) = 0$ $2m^2-6m-2 = 0.$ $m = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ **ou** $m = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

Exercice 11 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

1. $A(1\,;1), B(2\,;3), C(-2;1)$ et $D(2\,;\,-1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=1\times4+2\times(-2)=4-4=0$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.	

2. $A(-3\,;2), B(6\,;-1), C(3;4)$ et $D(1\,;\,-2)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-(-3)\\-1-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-3\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=9\times(-2)+(-3)\times(-6)=-18+18=0$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.	

Exercice 12 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle EFG.

1. $E(8\,;4), F(4\,;-2)$, et $G(-2\,;\,2)$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-8\\-2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ $EF=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}$ $=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-2-8\\2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ $EG=\sqrt{(-10)^2+(-2)^2}$ $=\sqrt{100+4}=\sqrt{104}$	$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-2-4\\2-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ $FG=\sqrt{(-6)^2+4^2}$ $=\sqrt{36+16}=\sqrt{54}$
$EF=FG$ ainsi le triangle EFG est isocèle en F. $EG^2=EF^2+FG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore EFG est rectangle en F. Conclusion : Le triangle EFG est rectangle isocèle en F. Remarque : Si on place les points sur un repère, on conjecture facilement que EFG est rectangle isocèle en F et montrer que : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FG}=0$ et $EF=FG$ suffit.		

2. $E(1\,;2), F(9\,;-2)$, et $G(13\,;\,6)$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}9-1\\-2-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ $EF=\sqrt{8^2+(-4)^2}$ $=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}13-1\\6-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$ $EG=\sqrt{12^2+4^2}$ $=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}$	$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}13-9\\6-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$ $FG=\sqrt{4^2+8^2}$ $=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$
$EF=FG$ ainsi le triangle EFG est isocèle en F. $EG^2=EF^2+FG^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore EFG est rectangle en F. Conclusion : Le triangle EFG est rectangle isocèle en F.		

Exercice 13 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(3\,;5), B(-3\,;7), C(-1;1)$ et $D(5\,;\,-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5-(-3)\\-1-7\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-3\\1-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=8\times(-4)+(-8)\times(-4)=-32+32=0$ donc les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.	

2. Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-3\\7-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-5\\1-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ainsi le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. De plus ces diagonales sont perpendiculaires ainsi $ABCD$ est un losange. Attention : Il faut vérifier que $ABCD$ n'est pas un rectangle (il y a plusieurs méthodes). $BD=\sqrt{128}$ et $AC=\sqrt{32}$ donc les diagonales ne sont pas égales donc $ABCD$ n'est pas un rectangle donc n'est pas un carré.

Exercice 14 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A\left(\frac{3}{2}\,;-2\right), B\left(-\frac{3}{2}\,;4\right), C(2;2)$ et $D(-2\,;\,0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-3\times(-4)+6\times(-2)=12-12=0$ **donc les droites** (AB) **et** (CD) **sont perpendiculaires.**	

2. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$.

Attention : Nous ne pouvons rien conclure pour l'instant. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$ **ainsi** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ **donc** $ACBD$ **est un parallélogramme.**

De plus ces diagonales sont perpendiculaire donc $ACBD$ est un losange.

$AB=\sqrt{45}$ **et** $CD=\sqrt{20}$ **donc les diagonales ne sont pas égales,** $ACBD$ **n'est pas un rectangle donc n'est pas un carré.**

Exercice 15 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $E(2\,;20), F(10\,;-5)$ et $G(27\,;\,28)$.

1. Montrer que le triangle FEG est rectangle en E.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}10-2\\-5-20\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}8\\-25\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}27-2\\28-20\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}25\\8\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}=8\times25+(-25)\times8=200-200=0$. **Ainsi les droites** (EF) **et** (EG) **sont perpendiculaires donc le triangle** FEG **est rectangle en** E. **Remarque : On pourrait montrer facilement que** $EF=EG$ **et donc que le triangle** FEG **était rectangle isocèle en** E.	

2. Calculer les coordonnées du point H tel que $EFHG$ est un rectangle.

Comme (EF) et (EG) sont perpendiculaires $EFHG$ est un rectangle si $EFHG$ est un parallélogramme. Notons $H(x\,;y)$.

$EFHG$ **est un parallélogramme ssi** $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$ **ssi** $\begin{cases}8=x-27\\-25=y-28\end{cases}$ **ssi** $\begin{cases}x=35\\y=3\end{cases}$ **ainsi** $H(35\,;3)$.

Exercice 16 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(5\,;3)$ et $B(-3\,;\,1)$. Déterminer les coordonnées du point C de sorte que C appartiennent à l'axe des abscisses et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Soit $C(x\,;y)$. C **appartiennent à l'axe des abscisses donc** $C(x\,;0)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-5\\1-3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x-5\\-3\end{pmatrix}$

ABC **est rectangle en** A **ssi** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ **ssi** $-8(x-5)+(-2)\times(-3)=0$ **ssi** $-8x+40+6=0$ **ssi** $x=\frac{23}{4}$.

Ainsi $C\left(\frac{23}{4}\,;0\right)$.

Exercice 17 : Produit scalaire avec normes et angle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. On donne les points A, B et C.

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. $A(1\,;2), B(3\,;-4)$ et $C(1\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\times0+(-6)\times(-3)=18$ $AB=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$ $AC=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{18}{\sqrt{40}\times3}=\frac{6}{\sqrt{40}}$. $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{40}}\right)\approx0{,}32$ **rad (ou 18,43°).**

2. $A(4\,;1), B(-3\,;1)$ et $C(1\,;\,5)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-7)\times(-3)+0\times4=21$ $AB=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$ $AC=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{21}{7\times5}=\frac{3}{5}$. $\widehat{BAC}=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx0{,}93$ **rad (ou 53,13°).**

3. $A(1\,;2), B(-1\,;2)$ et $C(3\,;\,2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)\times2+0\times0=-4$ $AB=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$ $AC=\sqrt{2^2+0^2}=2$	$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{-4}{2\times2}=-1$ $\widehat{BAC}=\pi$ **rad (ou 180°).**

Exercice 18 : Produit scalaire avec normes et angle

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;3)$, $B(-3\,;2)$ et $C(-5\,;\,-2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4\times 5+(-1)\times(-7) = -20+7 = -13$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 9\times 4+(-6)\times 1 = 36-6 = 30$

2. En déduire une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

$AB = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}\,;\ AC = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}\,;BC = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{-13}{\sqrt{17}\times\sqrt{74}}$ ainsi $\widehat{BAC} \approx 111,5°$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{30}{\sqrt{17}\times\sqrt{117}}$ ainsi $\widehat{ABC} \approx 47,7°$

$\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{BAC}+\widehat{ABC}) \approx 20,8°$

Compétence : Produit scalaire et projeté orthogonal

Exercice 19 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de A.

On suppose que $AB = 6, BH = 4$ et $HC = 5$. Calculer :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Faire un dessin pour s'aider !!! On a $BC = BH + HC = 4 + 5 = 9$.

D'après le théorème de Pythagore dans le, triangle AHB rectangle en H on a :

$AB^2 = AH^2 + HB^2$ **ainsi** $AH^2 = 6^2 - 4^2 = 20$ **donc** $AH = \sqrt{20}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BH\times BC = 4\times 9 = 36$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AH^2 = 20$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH} = AH^2 = 20$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CH\times CB = 5\times 9 = 45$

Exercice 20 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un carré de côté 5. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 25$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} = BA^2 = 25$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = BC^2 = 25$

Exercice 21 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que : $AB = AD = 5$ et $DC = 7$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ **car** $ABCD$ est un trapèze rectangle en A

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = -CD\times AB = -7\times 5 = -35$ **car** $\overrightarrow{CD}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **sont de sens contraire.**

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{Bh} = AB\times BH = 5\times 2 = 10$ **où H est le projeté orthogonal de C sur [AB).**

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CD^2 = 7^2 = 49$

Exercice 22 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle rectangle en B, avec $AB = 4$ et $BC = 6$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 16$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$ **car ABC est un triangle rectangle en B**

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB} = CB^2 = 6^2 = 36$

Exercice 23 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle équilatéral de côté 5.

Soit les points I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

ABC est un triangle équilatéral ainsi I, J et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points C, A et B sur les segments respectifs $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = AB \times AI = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BA} = BI \times BA = \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AC^2 = \frac{25}{2} - 25 = -\frac{25}{2}$

Exercice 24 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$.

On note O le centre de ce losange.

1. Calculer :

   a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Faire un dessin pour s'aider !!!

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ **car $ABCD$ est un losange et ces diagonales sont perpendiculaires.**

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = BO \times BD = 5 \times 10 = 50.$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AO.AC = 4 \times 8 = 32$

2. a. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AD} = AD^2 + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD}$

Or dans le triangle AOD rectangle en O, on a d'après le théorème de Pythagore : $AD^2 = AO^2 + OD^2 = 4^2 + 5^2 = 41.$

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AD} = -DB \times DO = -10 \times 5 = -50.$

Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 41 - 50 = -9.$

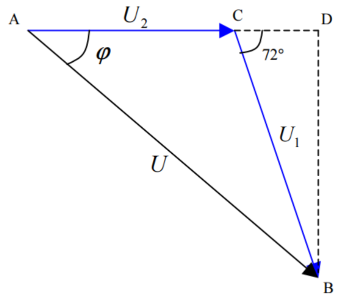
   b. De la même façon, calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = BA^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = BA^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 41 - 32 = 9$

Compétence : Calculs de longueurs, d'aires et d'angles

Exercice 25 : Electricité

Il est conseillé d'avoir un bon $\cos\varphi$, sur une installation électrique.
La figure est issue d'une situation rencontrée en électricité. On donne :
$\|\overrightarrow{BC}\| = U_1 = 25$, $\|\overrightarrow{AC}\| = U_2 = 20$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = -72°$.
Dans le triangle ABC, déterminer :



1. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $U = \|\overrightarrow{AB}\|$

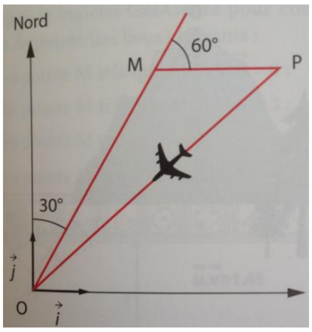
$\boldsymbol{U^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 - 2U_1U_2\cos(\widehat{C})}$ **or** $\boldsymbol{\widehat{C} = 180° - 72° = 108°}$
$\boldsymbol{U^2 \approx 1334,02}$ **ainsi** $\boldsymbol{U \approx 36,52.}$
Remarque : Dans cette formule, j'utilise un angle géométrique, car $\boldsymbol{cos(-a) = cos(a)}$ **ainsi l'orientation n'est pas importante.**

2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la mesure φ en degrés de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

$\boldsymbol{\frac{U}{\sin(\widehat{C})} = \frac{U_1}{\sin(\widehat{A})}}$ **ainsi** $\boldsymbol{\sin(\widehat{A}) = \frac{U_1\sin(\widehat{C})}{U} \approx 0,65}$ **ainsi** $\boldsymbol{\widehat{A} \approx 40,65°.}$
$\boldsymbol{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \approx -40,65°}$

Exercice 26 : Parcours d'un avion (En mécanique)

Un avion se déplace dans un plan horizontal à partir d'un point O situé à la verticale de sa base.

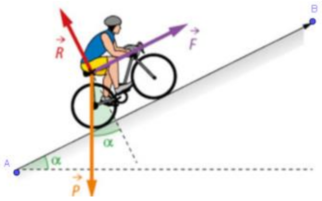


Il part en suivant une direction de 30° par rapport au nord, cap nord-est, parcourt 200 km et arrive en point M. Là il change de cap, suit la direction est, sur une distance de 100 km jusqu'au point P.
Quelle distance doit-il parcourir pour revenir au-dessus de sa base ?

$\boldsymbol{OM = 200}$ **et** $\boldsymbol{MP = 100}$**. On cherche** $\boldsymbol{PO}$.
On remarque assez facilement que $\boldsymbol{\widehat{M} = 180 - 60° = 120°.}$
$\boldsymbol{PO^2 = MP^2 + MO^2 - 2MP \times MO \times \cos(\widehat{M})}$
$\boldsymbol{PO^2 = 70000}$
$\boldsymbol{PO \approx 264,58}$ **km.**

Exercice 27 :

On considère un cycliste montant une côte, représenté sur le schéma suivant.



Données :

$\alpha = 15°$;
$m_{vélo+cycliste} = 80kg$;
$travail\ W = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$

a) Calculer le travail du poids pour une côte de 500m.

On note $\overrightarrow{AB}$ le déplacement (voir schéma ci-dessus). On a $AB = 500$

Le travail du poids $\vec{P}$ est :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \times AB \times \cos(\alpha + 90)$$
$$W_{AB}(\vec{P}) = mg \times AB \times \cos(15 + 90)$$
$$W_{AB}(\vec{P}) = 80 \times 9,81 \times 500 \times \cos(105°)$$
$$W_{AB}(\vec{P}) = -101\,561\,J$$

b) Le travail que doit fournir le cycliste doit compenser le travail du poids. Calculer la force F développée pendant la montée de la côte.

Puisque le travail de $\vec{F}$ doit compenser celui du poids, on a :

$$W_{AB}(\vec{F}) = 101\,561\,J$$
$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = 101\,561$$
$$F \times AB \times cos(0°) = 101\,516$$
$$F \times 500 = 101\,561$$
$$F = \frac{101561}{500}$$
$$F \approx 203\,N$$

c) Quel est le travail de la réaction pendant la montée du cycliste ?

La réaction est perpendiculaire au déplacement ($\vec{R}$ et $\vec{F}$ sont orthogonaux), donc son travail est nul.

Exercice 28 :

Une personne pousse sa voiture en exerçant une force de 200N suivant une direction qui fait un angle de 25° avec le niveau horizontal de la route.

Calculer le travail de $\vec{F}$ pour un trajet de 50m. On arrondira le résultat à l'unité.

Si on note $\overrightarrow{AB}$ le déplacement, on a :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = 50$$

et le travail de $\vec{F}$ est : $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(25°)$

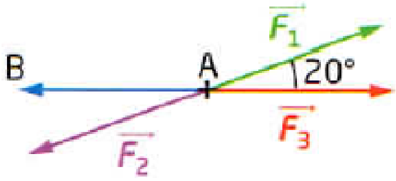
$$W_{AB}(\vec{F}) = 200 \times 50 \times \cos(25°) = 9063\,Joules$$

Exercice 29 :

Calculer le travail en joules de chacune des forces exercées lors d'un déplacement rectiligne de A vers B et préciser dans chaque cas si la force exerce un travail moteur ou résistant.

Les résultats seront arrondis à l'unité et on notera $F = \|\vec{F}\|$.

On donne $F_1 = 5N$;
$F_2 = 2{,}7\ N$;
$F_3 = 6\ N\ et$
$AB = 75m$



Le travail de $\vec{F_1}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_1}) = \vec{F_1} \cdot \vec{AB}$$
$$= F_1 \times AB \times \cos(180 - 20)$$
$$W_{AB}(\vec{F_1}) = 5 \times 75 \times \cos(160°) = -352\ J$$
Le travail est résistant

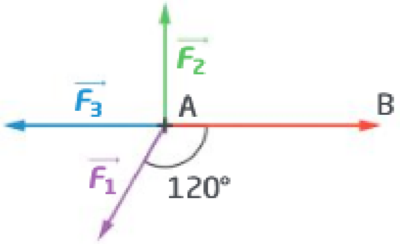
Le travail de $\vec{F_2}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_2}) = \vec{F_2} \cdot \vec{AB} = F_2 \times AB \times \cos(20°)$$
$$W_{AB}(\vec{F_2}) = 2,7 \times 75 \times \cos(20°) = 190\ J$$
Le travail est moteur

Le travail de $\vec{F_3}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_3}) = \vec{F_3} \cdot \vec{AB} = F_3 \times AB \times \cos(180)$$
$$W_{AB}(\vec{F_3}) = 6 \times 75 \times \cos(180°) = -450\ J$$
Le travail est résistant

Exercice 30 :

Même Exercice que le précédent avec :

On donne $F_1 = 3N$;
$F_2 = 10\ N$;
$F_3 = 7\ N\ et$
$AB = 0{,}2\ km$



Attention aux unités : le déplacement doit s'exprimer en mètres donc ici: $AB = 200m$

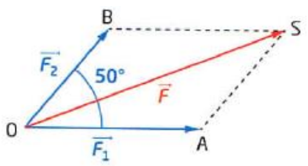
Le travail de $\vec{F_1}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_1}) = \vec{F_1} \cdot \vec{AB} = F_1 \times AB \times \cos(120°)$$
$$W_{AB}(\vec{F_1}) = 3 \times 200 \times \cos(120°) = -300\ J$$
Le travail est résistant

Le travail de $\vec{F_2}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_2}) = \vec{F_2} \cdot \vec{AB} = F_2 \times AB \times \cos(90°)$$
$$W_{AB}(\vec{F_2}) = 10 \times 200 \times 0 = 0\ J$$
Le travail est nul : la force ne travaille pas.

Le travail de $\vec{F_3}$ est :
$$W_{AB}(\vec{F_3}) = \vec{F_3} \cdot \vec{AB} = F_3 \times AB \times \cos(180)$$
$$W_{AB}(\vec{F_3}) = 7 \times 200 \times \cos(180°) = -1400\ J$$
Le travail est résistant

Exercice 31 :

On souhaite calcule la somme de deux forces. Soit $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ deux forces s'exerçant sur un même point O d'intensités respectives $F_1 = 40N$ et $F_2 = 30N$ en formant un angle de **50°** comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\vec{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

On souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.

a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.

Dans un parallélogramme,
• la somme des mesures des angles fait 360°
• les angles opposés sont égaux
donc $\widehat{OAS} = (360 - 2 \times 50) \div 2 = 130°$

b) En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.

D'après le théorème d'Al Kashi on :
Dans le triangle OAS, $OS^2 = OA^2 + AS^2 - 2 \times OA \times AS \times \cos(\widehat{OAS})$
avec $OA = F_1 = 40\ et\ AS = F_2 = 30$

$$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(130°)$$
$$OS^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos(130°)$$
$$OS^2 \approx 4043$$
Donc :
$$OS = \sqrt{4043} \approx 63,58$$

c) Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près .

On utilise à nouveau le théorème d'Al Kashi dans le triangle OAS

$$\boldsymbol{AS^2 = OA^2 + OS^2 - 2 \times OA \times OS \times \cos(\widehat{AOS})}$$

On isole $\cos(\widehat{AOS})$:

$$\boldsymbol{2 \times OA \times AS \times \cos(\widehat{AOS}) = OA^2 + OS^2 - AS^2}$$

$$\boldsymbol{\cos(\widehat{AOS}) = \frac{OA^2 + OS^2 - AS^2}{2 \times OA \times OS}}$$

$$\boldsymbol{\cos(\widehat{AOS}) = \frac{40^2 + 63,58^2 - 30^2}{2 \times 40 \times 63,58}}$$

$$\boldsymbol{\cos(\widehat{AOS}) \approx 0,932}$$

$$\boldsymbol{\widehat{AOS} \approx \cos^{-1}(0,932)}$$

$$\boldsymbol{\widehat{AOS} \approx 21,2°}$$

d) Conclure par rapport au problème posé.

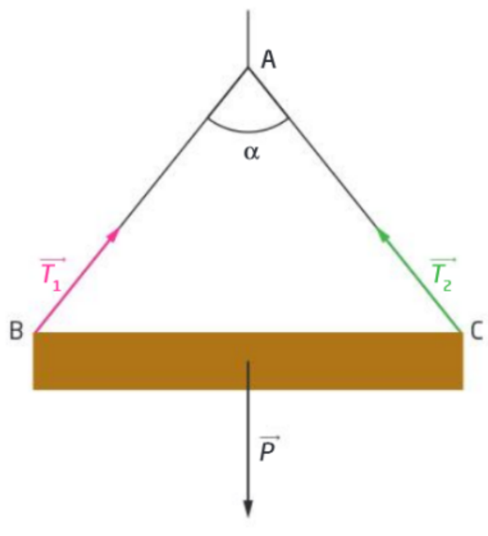
On souhaitait déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.

$\vec{F}$ pour intensité $F = AS = 63,58\ N$ et fait un angle de $21,2°$ avec la force $\overrightarrow{F_1}$.

Exercice 32 :

Une poutrelle de poids inconnu est soulevé par deux élingues [AB] et [AC] selon le schéma ci-contre.

1) On considère un repère orthonormé d'unité graphique 1cm, où 1cm représente 1000N.
$\overrightarrow{T_1}$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ de coordonnées $(4\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{T_2}$ par le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ de coordonnées $(-4\ ;\ 5)$. Placer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ dans ce repère.



2) *Etude du poids.*

a) Construire dans ce repère le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$.

b) Calculer les coordonnées du point M

c) Tracer le vecteur $\vec{P} = -\overrightarrow{OM}$ et donner ses coordonnées.

d) En déduire la valeur en Newton (N) du poids de la charge.

3) *Etude de la tension et de l'angle.*

a) Calculer $\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$, $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\|$.

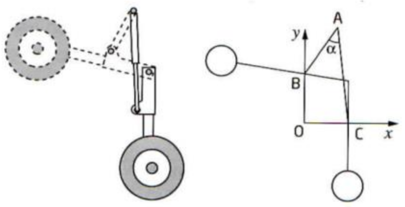
b) En déduire une valeur approchée à l'unité de la tension dans chaque élingue, exprimée en Newton.

c) Déterminer l'angle d'élingage α, arrondi au degré.

Exercice 33 :

Le train avant d'un avion A380 est représenté par le schéma ci contre (qui n'est pas à l'échelle).

Le segment [AC] représente le vérin en position "train sorti" et le segment [AB] le vérin en position "train rentré".



On se place dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont les vecteurs unitaires de (Ox) et (Oy) .

En prenant 1m comme unité graphique, on a repéré les points A, B et C de coordonnées respectives (0,8 ; 2, 2), (0; 1,2) et (1,1 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer l'allongement du vérin $\delta = AC - AB$ et le débattement α du vérin.

1a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 - 0,8 \\ 1,2 - 2,2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1,1 - 0,8 \\ 0 - 2,2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -0,8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0,3 \\ -2,2 \end{pmatrix}$$

1b) En déduire l'allongement du vérin, arrondi au millimètre près.

$\boldsymbol{\delta = AC - AB}$ **or :**

$$AB = \sqrt{(-0.8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1,64} \approx 1,281 \qquad AC = \sqrt{(0,3)^2 + (2,2)^2} = \sqrt{4,93} \approx 2,220$$

$$\delta = AC - AB = 2,220 - 1,281 = 0,939\ m$$

L'allongement du vérin est de 939 mm

2a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -0,8 \times 0,3 + (-1) \times (-2,2) = 1,96$$

2b) En déduire une mesure de α au dixième de degré près .

L'angle α est l'angle $\widehat{BAC}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

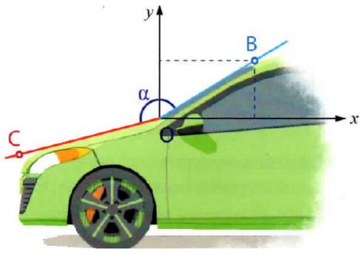
$$\cos(\alpha) = \frac{1,96}{1,281 \times 2,220}$$

$$\alpha \approx \cos^{-1}\left(\frac{1,96}{1,281 \times 2,220}\right)$$

$$\alpha \approx 45,9°$$

Exercice 35 :

Afin de réduire les pertes aérodynamiques, les concepteurs de véhicules s'imposent une contrainte : la mesure de l'angle "capot /pare-brise" soit être supérieure à 150°.



En considérant que les points O; B et C sont dans un même plan vertical muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox) et (Oy), on a obtenu les coordonnées suivantes:

$$B(67{,}9; 37) et\ C\ (-92{,}7\ ;\ -24{,}7\ )$$

La contrainte imposée est-elle vérifiée ?

L'angle α est l'angle $\widehat{BOC}$

$$cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{OB \times OC}$$

Puisque O est l'origine du repère :

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}67,9\\37\end{pmatrix}$ $OB = \sqrt{67,9^2 + 37^2}$ $OB \approx 77,33$	$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-92,7\\-24,7\end{pmatrix}$ $OC = \sqrt{(-92,7)^2 + (-24,7)^2}$ $OC \approx 95,93$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 67,9 \times (-92,7) + \ 37 \times (-24,7) = -7208,23$$

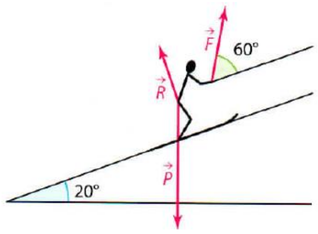
$$\alpha \approx \cos^{-1}\left(-\frac{7208,23}{77,33 \times 95,93}\right)$$

$$\alpha \approx 166,3\ °$$

$\alpha > 150°$ **; la contrainte est donc respectée**

Exercice 36 :

Un skieur de masse $m = 80kg$ est tracté, à vitesse constante v, sur une piste faisant un angle de 20° avec l'horizontale.



Le skieur est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$, la force $\vec{F}$ exercée par la perche et la réaction $\vec{R}$ du sol, de direction perpendiculaire au sol. Il parcourt une distance de 250m.

1) Quel est le travail de la force $\vec{R}$? Justifier.

La réaction $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement, donc son travail est nul.

2) Calculer le travail du poids $\vec{P}$ .Arrondir à l'unité.

On note $\overrightarrow{AB}$ le déplacement (voir schéma ci-dessus). On a $AB = 250$

Le travail du poids $\vec{P}$ est :

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = P \times AB \times \cos(\alpha + 90)$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg\ \times AB \times \cos(20 + 90)$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = 80 \times 9,81\ \times 250 \times \cos(110°)$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = \ -67\ 104\ J$$

3) Exprimer en fonction de F le travail de la force $\vec{F}$.

Le travail de la force $\vec{F}$ est :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \times AB \times \cos(60°)$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = F\ \times 250 \times \frac{1}{2}$$

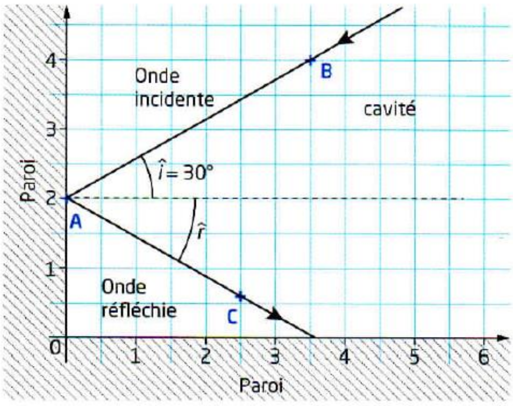
$$W_{AB}(\vec{F}) = 125\ F$$

4) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer F. Arrondir à l'unité.

Théorème de l'énergie cinétique :

$$E_C(B) - \ E_c(A) = \sum W\ \ (somme\ des\ travaux)$$

Exercice 37 :



Les micro-ondes sont générées dans un magnétron, cavité métallique cylindrique dont la dimension permet d'accueillir un champ électromagnétique à la fréquence de 2,45GHz, propre à ces fours.
Rapporté à un repère orthonormé du plan, le parcours d'une onde est donné par le schéma ci-contre.

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré près.

c) Que peut-on conjecturer concernant les mesures de l'angle incident $\hat{\imath}$ et de l'angle réfléchi $\hat{r}$?