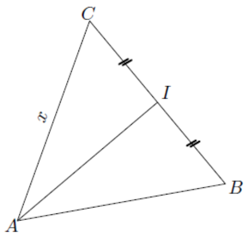
Chapitre : Trigonométrie (correction)

ATTENTION : Il est possible que des erreurs se soient incrustées dans ce document.

Compétence : Rappel de trigonométrie du collège

Exercice 1 : Rappel de trigonométrie du collège



Soit ABC un triangle équilatéral dont la mesure des côtés vaut x.
On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. Que représente la droite (AI) dans le triangle ABC ?

I est le milieu de $[BC]$ et le triangle ABC est équilatéral. Or dans un triangle équilatéral, la hauteur, la médiatrice, la médiane, la bissectrice, issues d'un même sommet sont toutes confondues.
On en déduit que (AI) est la médiane, médiatrice, bissectrice, hauteur issue de A.

2. Remplir le tableau ci- dessous :

	$\widehat{CIA}$	$\widehat{CAB}$	$\widehat{CAI}$	$\widehat{IAC}$
Mesure en degré	90	60	30	30

3. a. Donner la mesure du segment $[CI]$ en fonction de x.

$\boldsymbol{CI = \frac{1}{2}x}$

b. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la mesure du segment $[AI]$ en fonction de x.

Le triangle AIC est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, on a :

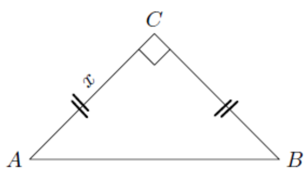
$$AC^2 = AI^2 + IC^2$$
$$x^2 = AI^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$AI^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$$
$$AI^2 = \frac{3}{4}x^2$$
$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

c. Dans le triangle AIC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ICA}$. Puis, remplir le tableau suivant :

$$\cos(\widehat{IAC}) = \frac{AI}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(\widehat{IAC}) = \frac{CI}{CA} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$
$$\cos(\widehat{ICA}) = \frac{IC}{AC} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$
$$\sin(\widehat{ICA}) = \frac{AI}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 2 : Rappel de trigonométrie du collège



On considère le triangle rectangle-isocèle en C ci-dessous.
On note x la mesure du côté AC.

1. Compléter le tableau suivant

	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré	90	45

2. a. A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la mesure du côté $[AB]$ en fonction de x.

Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$AB^2 = x^2 + x^2$$
$$AB^2 = 2x^2$$
$$AB = \sqrt{2}x$$

b. Dans le triangle rectangle ABC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$.

$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{CAB}) = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

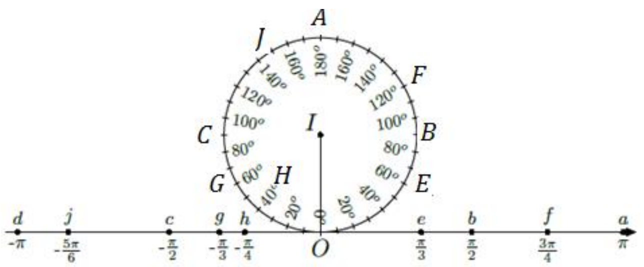
Compétence : Enroulement de la droite numérique

Exercice 3 : Enroulement de la droite numérique

On considère une droite graduée d'origine O sur laquelle est placé des points définis par leur abscisse :

$a(\pi)$ $b\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $c\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $d(-\pi)$ $e\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $h\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $j\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



On considère le cercle C de rayon 1 placé sur la droite graduée comme l'indique la figure précédente.

1. a. Soit M un point de C tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure π. Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$.
   b. Placer l'unique point A du cercle C tel que l'arc $\widehat{OA}$ ait pour longueur π.
2. a. Soit M un point de C tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure $\frac{\pi}{2}$. Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$.
   b. Placer les deux points B et C appartenant au cercle C tel que les arcs $\widehat{OB}$ et $\widehat{OC}$ aient pour longueur $\frac{\pi}{2}$.
3. De même, placer les points E, F, G, H, J tels que les arcs $\widehat{OE}$, $\widehat{OF}$, $\widehat{OG}$, $\widehat{OH}$, $\widehat{OJ}$ aient respectivement la même longueur que l'abscisse des points e, f, g, h, j.

Compétence : Conversion radian - degré

Exercice 4 : Conversion radian - degré

1. Convertir en degré les mesures d'angles suivantes données en radian :

Radian	π	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$
Degré	**180**	**18**	**54**	**60**	**240**	**36**	**75**	**210**	**22,5**

2. Convertir en radians les mesures d'angles suivantes données en degré :

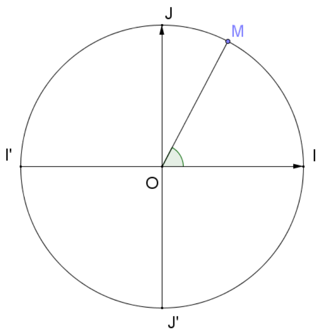
Radian	π	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{29\pi}{180}$
Degré	**180**	20	40	50	15	120	300	29

Degré	π	18	54	60	240	36	75	210	22,5	20	40	50	15	120	300	29
Radian	180	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{29\pi}{180}$

Exercice 5 :

1. Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, donner un réel associé aux points I, J, I' et J'.

$\boldsymbol{I(0)}$	$\boldsymbol{J\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	$\boldsymbol{I'(\pi)}$	$\boldsymbol{J'\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$



2. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{IOM}$ quand le point M est associé au réel $\frac{\pi}{8}$?

$$\frac{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{8}} \times \boldsymbol{180}}{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{22,5°}$$

3. A quel réel le point M peut-il être associé lorsque l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 40° ?

$\frac{\boldsymbol{40 \times \pi}}{\boldsymbol{180}} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{9}}$ **(On peut ensuite ajouter ou soustraire un multiple de $\boldsymbol{2\pi}$)**

Exercice 6 :

Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, préciser pour chaque réel donné dans quel quart de cercle se trouve le point qui lui est associé.

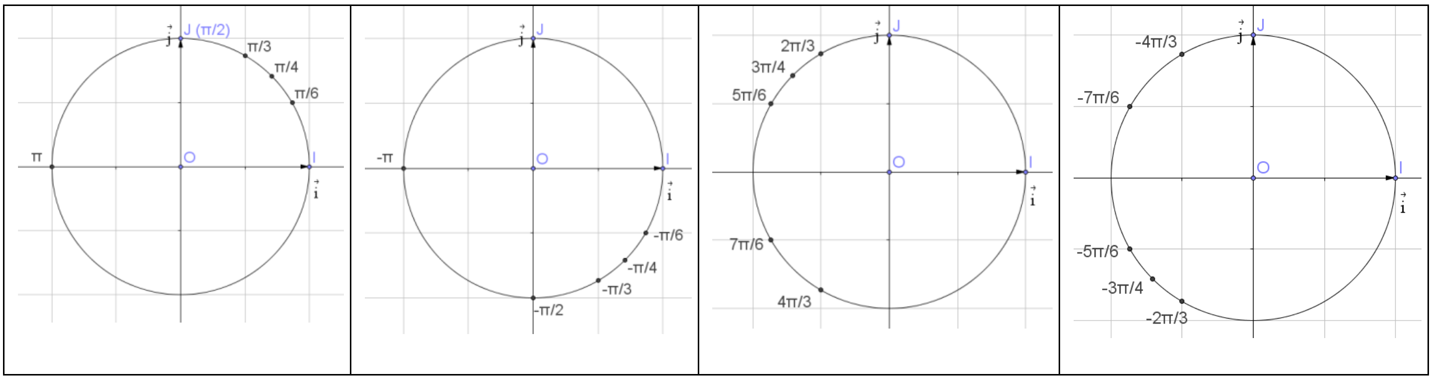
a. $\frac{3\pi}{7}$ $\overset{\frown}{IJ}$ b. $\frac{5\pi}{9}$ $\overset{\frown}{JI'}$ c. $\frac{18\pi}{11}$ $\overset{\frown}{J'I}$ d. $\frac{7\pi}{5}$ $\overset{\frown}{I'J'}$

e. $-\frac{23\pi}{9}$ $\overset{\frown}{I'J'}$ f. $\frac{32\pi}{7}$ $\overset{\frown}{JI'}$ g. $-\frac{29\pi}{11}$ $\overset{\frown}{I'J'}$ h. $\frac{68\pi}{5}$ $\overset{\frown}{J'I}$

Compétence : Placer des points sur le cercle trigonométrique

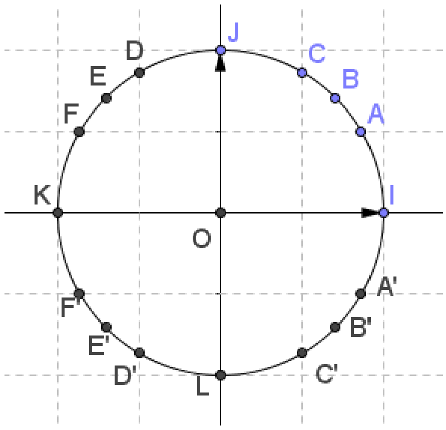
Exercice 7 : Placer des points sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points associés aux nombres réels suivants :



Exercice 8 : Points images sur le cercle trigonométrique et mesure d'angle

On se place sur le cercle trigonométrique ci-contre :



1. Quels sont les points images des réels suivants :

$$\pi ; \frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{6} ; -\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; -\pi ; -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{4\pi}{4}$$

$\boldsymbol{K(\pi)}$; $\boldsymbol{J\left(\frac{\pi}{2}\right)}$; $\boldsymbol{A\left(\frac{\pi}{6}\right)}$; $\boldsymbol{C'\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$; $\boldsymbol{D\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$; $\boldsymbol{K(-\pi)}$; $\boldsymbol{E'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$; $\boldsymbol{K\left(-\frac{4\pi}{4}\right)}$

2. Donner trois réels différents ayant pour image :
   a. le point J
   $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{2k\pi}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$
   b. le point K
   $\boldsymbol{\pi + 2k\pi}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$
   c. le point C
   $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{2k\pi}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$
   d. le point E
   $\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{2k\pi}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

3. Donner une mesure des angles : **Soit $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$,**
   a. $(\overrightarrow{OL} ; \overrightarrow{OK}) = -\frac{\pi}{2}(+\boldsymbol{2k\pi})$ b. $(\overrightarrow{OE'} ; \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4}(+\boldsymbol{2k\pi})$ c. $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{3}(+\boldsymbol{2k\pi})$

Compétence : Mesures d'angles orientés

Exercice 9 : Mesures (principales) d'angles orientés

Sans utiliser la calculatrice, indiquer, parmi les nombres réels suivants, ceux qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

$\frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \frac{3\pi}{2}$ $\qquad -\frac{2\pi}{3}$ $\qquad -\frac{7\pi}{6}$ $\qquad \frac{5\pi}{4}$ $\qquad \frac{7\pi}{3}$ $\qquad \frac{5\pi}{6}$

Exercice 10 : Points images et mesures d'angles orientés

On se place dans le cercle trigonométrique de l'exercice 7.
Repérer sur ce cercle les points images des réels suivants et donner pour chacun d'eux le réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ qui a même image :

Réel	Point image	$\in]-\pi\,;\,\pi]$
$\frac{3\pi}{2}$	L	$-\frac{\pi}{2}$
3π	K	π
$-\frac{5\pi}{2}$	L	$-\frac{\pi}{2}$
20π	I	0
$\frac{5\pi}{4}$	E'	$-\frac{3\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{7\pi}{6}$	F	$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{11\pi}{6}$	A'	$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{31\pi}{2}$	L	$-\frac{\pi}{2}$
-17π	K	π

Exercice 11 : Points images et mesures d'angles orientés

On se place dans le cercle trigonométrique de l'exercice 7.
Repérer sur ce cercle les points images des réels suivants et donner pour chacun d'eux le réel de $[0\,;\,2\pi[$ qui a même image :

Réel	Point image	$\in [0\,;\,2\pi[$
$-\frac{4\pi}{3}$	D	$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{2}$	J	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{6}$	A'	$\frac{11\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{4}$	B'	$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{3}$	C	$\frac{\pi}{3}$
$-\pi$	K	π
$-\frac{5\pi}{6}$	F'	$\frac{7\pi}{6}$
6π	I	0
$-\frac{3\pi}{4}$	E'	$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{25\pi}{6}$	A	$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{3\pi}{2}$	J	$\frac{\pi}{2}$
7π	K	π

Exercice 12 : Mesures principales d'angles orientés

Donner la mesure principale des angles mesure :

Une mesure principale appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Il suffit de trouver la valeur de k tel que $\theta = k \times \pm 2\pi + MP$

	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	-3π	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{2}$	25π	18π	-14π	$\frac{40\pi}{3}$	$-\frac{31\pi}{6}$	$\frac{25\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{4}$
MP	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	0	0	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$
k	1	1	1	2	1	1	3	12	9	7	7	3	3	2	2

Quelques exemples :

$$\frac{5\pi}{3} = 1 \times \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} = 1 \times \frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{2} = 1 \times \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{11\pi}{6} = 1 \times \left(-\frac{12\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{4} = 1 \times \left(-\frac{8\pi}{4}\right) + \frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{11\pi}{2} = 3 \times \left(-\frac{4\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$$

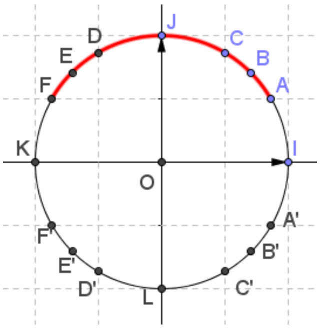
$$-3\pi = 2 \times (-2\pi) + \pi$$

$$18\pi = 9 \times 2\pi + 0$$

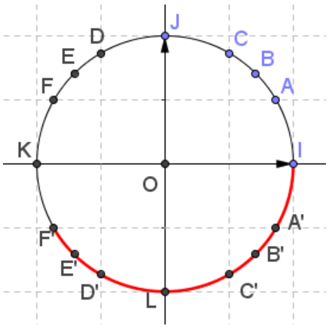
Exercice supplémentaire : Mesures (principales) d'angles orientés

Déterminer l'ensemble des réels de $]-\pi ; \pi]$ puis de $[0 ; 2\pi[$ dont les images forment l'arc rouge :

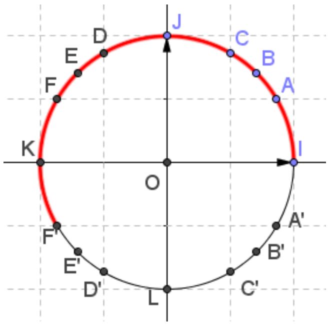
a.



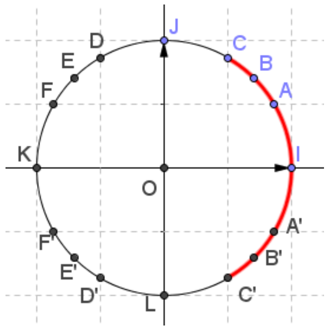
b.



c.



d.

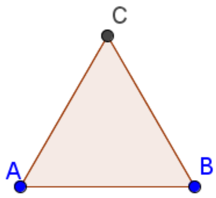


	a.	b.	c.	d.
Sur $]-\pi ; \pi]$	$\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right]$	$\left[-\frac{5\pi}{6} ; 0\right]$	$]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}] \cup [0 ; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$
Sur $[0 ; 2\pi[$	$\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right]$	$\{0\} \cup [\frac{7\pi}{6} ; 2\pi[$	$\left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right]$	$\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right] \cup [\frac{5\pi}{3} ; 2\pi[$

Exercice supplémentaire : Mesures d'angles orientés et triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral direct.

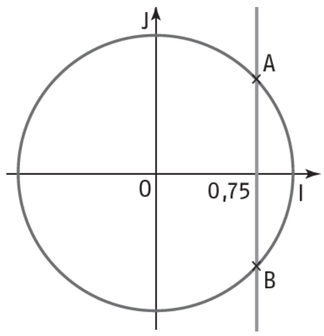
Lire graphiquement une mesure de chacun des angles orientés ci-dessous :



a. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$	b. $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$
c. $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}$	d. $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{AC}) = -\frac{2\pi}{3}$

Compétence : Sinus et cosinus d'un nombre réel

Exercice 13 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

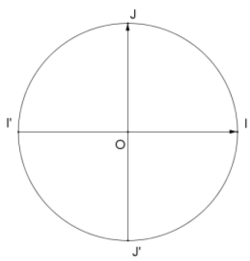


1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), tracer le cercle trigonométrique de centre O.
2. Marquer tous les points du cercle qui peuvent être associés au réel x sachant que $\cos x = 0{,}75$.
3. Si on sait que $\sin x$ est positif, où se trouve le point associé au réel x ?

C'est le point A.

Exercice 14 : Sinus et cosinus

Dans le cercle trigonométrique ci-contre, préciser dans chaque cas le signe du sinus et du cosinus d'un réel x associé au point M.



a. $M \in \widehat{IJ}$	$\cos x > 0$ **et** $\sin x > 0$
b. $M \in \widehat{JI'}$	$\cos x < 0$ **et** $\sin x > 0$
c. $M \in \widehat{I'J'}$	$\cos x < 0$ **et** $\sin x < 0$
d. $M \in \widehat{J'I}$	$\cos x > 0$ **et** $\sin x < 0$

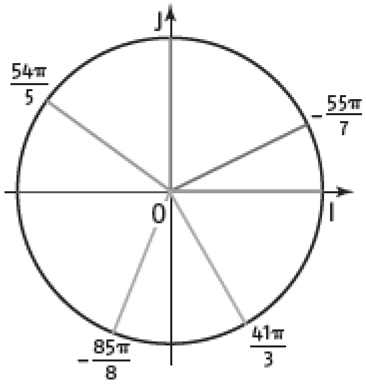
Exercice 15 : Sinus et cosinus

1. Placer approximativement sur un cercle trigonométrique les points associés aux réels suivants :

$-\dfrac{55\pi}{7} \qquad \dfrac{54\pi}{5} \qquad \dfrac{41\pi}{3} \qquad -\dfrac{85\pi}{8}$

2. En déduire le signe du sinus et du cosinus de chacun de ces réels.

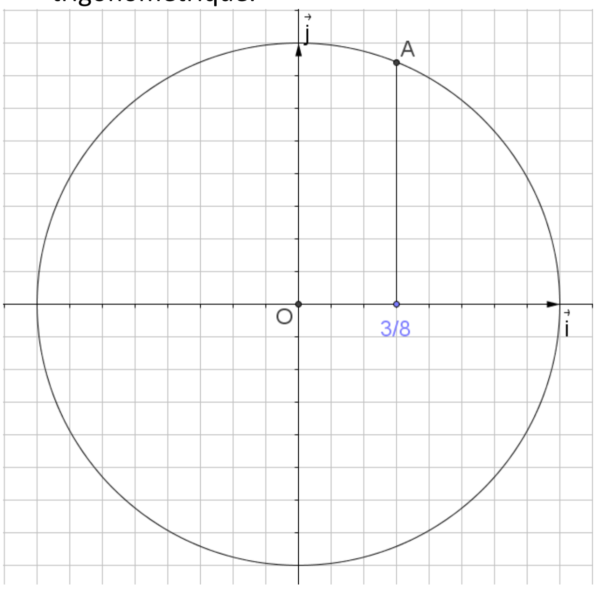
$sin\left(-\frac{55\pi}{7}\right) > 0$ et $cos\left(-\frac{55\pi}{7}\right) > 0$
$sin\left(\frac{54\pi}{5}\right) > 0$ et $cos\left(\frac{54\pi}{5}\right) < 0$
$sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) < 0$ et $cos\left(\frac{41\pi}{3}\right) > 0$
$sin\left(-\frac{85\pi}{8}\right) < 0$ et $cos\left(-\frac{85\pi}{8}\right) < 0$



Exercice 16 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

Soit a un réel tel que $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos a = \frac{3}{8}$.

1. Placer le point A associé au réel a sur un cercle trigonométrique.



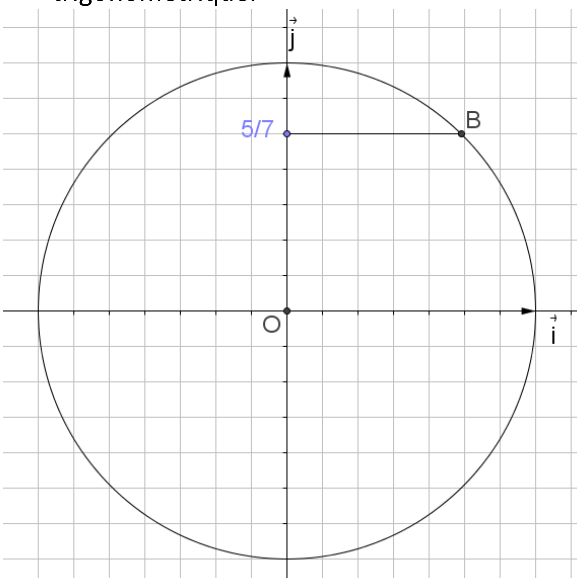
2. Calculer $\sin a$.

$cos^2(a) + sin^2(a) = 1$
$\frac{9}{64} + sin^2(a) = 1$
$sin^2(a) = \frac{64}{64} - \frac{9}{64}$
$sin^2(a) = \frac{55}{64}$
$\sin(a) = \frac{\sqrt{55}}{8}$ car $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 17 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

Soit b un réel tel que $b \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin b = \frac{5}{7}$.

1. Placer le point B associé au réel b sur un cercle trigonométrique.



2. Calculer $\cos b$.

$cos^2(b) + sin^2(b) = 1$
$cos^2(b) + \frac{25}{49} = 1$
$cos^2(b) = \frac{49}{49} - \frac{25}{49}$
$cos^2(b) = \frac{24}{49}$
$\cos(b) = \frac{\sqrt{24}}{7}$ car $b \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 18 : Angles associés et valeurs particulières

Utiliser les résultats relatifs aux valeurs particulières et aux angles associés pour déterminer les valeurs exactes des nombres réels suivants :

Enoncé	Réponse	Propriété utilisée
a. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos(-a) = \cos(a)$
b. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	
c. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
d. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$	$\sin(-a) = -\sin(a)$
e. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
f. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(a + 2k\pi) = \sin(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$
g. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-a) = \cos(a)$
h. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
i. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$
j. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(-a) = -\sin(a)$
k. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(\pi - a) = \sin(a)$
l. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
m. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$= 0$	
n. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$= -1$	

Exercice 19 : Système d'équation

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ ces systèmes :

a. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

b. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{6}}$

c. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{5\pi}{6}}$

d. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = -\frac{5\pi}{6}}$

e. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

f. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{4}}$

g. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{3\pi}{4}}$

h. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{-3\pi}{4}}$

i. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

j. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{3}}$

k. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$

l. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{-2\pi}{3}}$

m. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

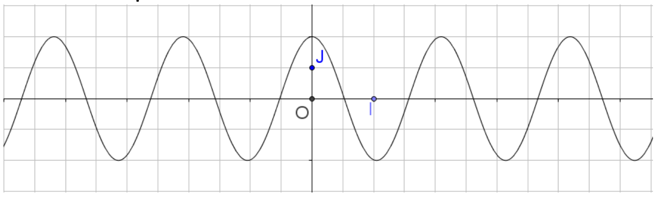
n. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases}$ $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{2}}$

o. $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ $\boxed{\theta = 0}$

p. $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ $\boxed{\theta = \pi}$

Exercice 20 : Courbes de fonctions sinusoïdales

Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Acos(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

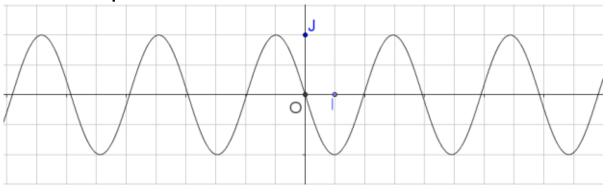
Le maximum de f est 2 donc $A = 2$.

2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ donc $T = 2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Exercice 21 : Courbes de fonctions sinusoïdales

Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Asin(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

Le maximum de f est 1 donc $A = 1$.

2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $4\overrightarrow{OI}$ donc $T = 4$ et $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22:

Lors de l'émission d'un son pur, la pression de l'air (en mP) est donné par une fonction f définie par :

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

où t est le temps exprimé en secondes.

1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω.

on a $T = 0,02s$ donc $\omega = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi$

2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.

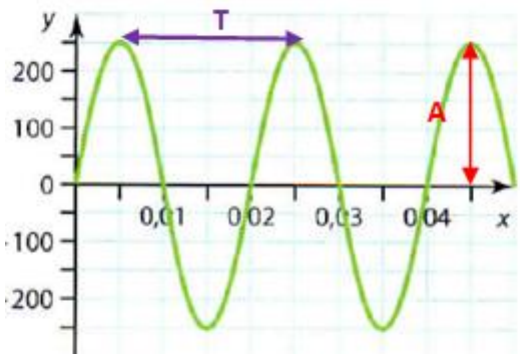
$A = 250$ (valeur maximale)

3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de f.

Avec les éléments ci dessus :
$f(t) = 250\,sin(100\pi\, t + \varphi)$
donc $f(0) = 250\sin(\varphi)$

Graphiquement : $f(0) = 0$
donc $250\sin(\varphi) = 0$
$\sin(\varphi) = 0$
$\varphi = 0$

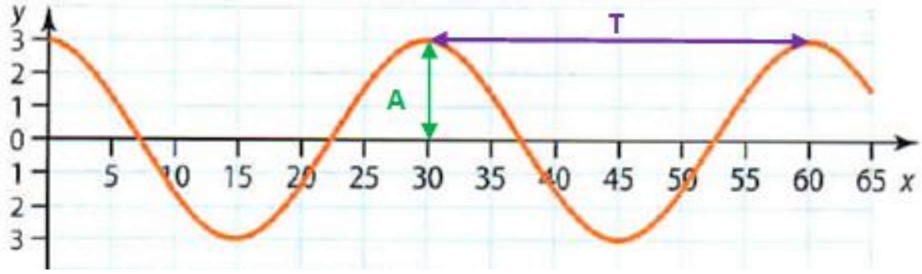
On a $f(t) = 250\,sin(100\pi\, t)$



Exercice 23:

La tension en Volts aux bornes d'un générateur très basse fréquence est définie par :

$U(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où t est le temps exprimé en secondes. La fonction U est représentée ci dessous.



1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω

on a $T = 30s$ donc $\omega = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.

$A = 3$ (valeur maximale)

3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de U.

Avec les éléments ci dessus : $U(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{15}t + \varphi\right)$

donc $U(0) = 3\cos(\varphi)$

Graphiquement : $U(0) = 3$

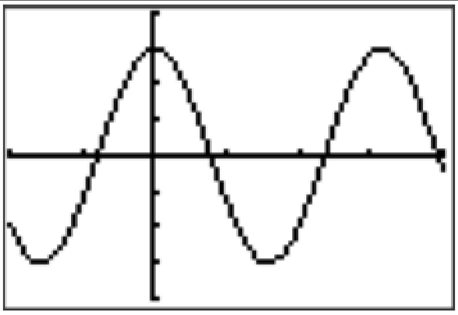
donc $3\cos(\varphi) = 3$

$\cos(\varphi) = 1$

$\varphi = 0$ **On a** $U(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$

Exercice 24 : Courbes de fonctions sinusoïdales

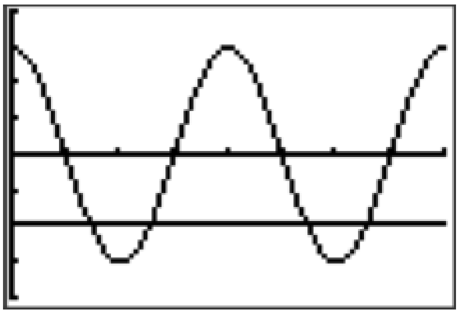
1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x)$.
   Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.



Graphiquement, la période semble être un peu plus de 3.

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $3\cos(2x) = -2$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.



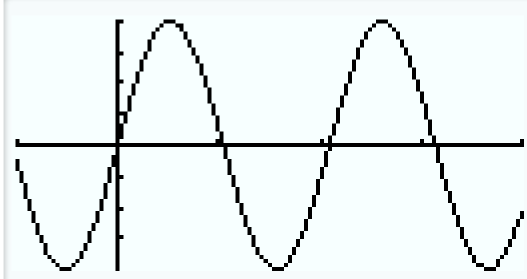
Il y a 4 solutions.

2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\cdot\pi}{2}$		$2\cdot\pi$
$f(x)$	3	↘	-3	↗	3	↘	-3	↗	3

Exercice 25 : Courbes de fonctions sinusoïdales

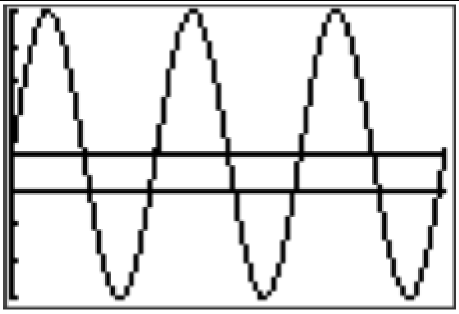
1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin(3x)$.
   Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.



Graphiquement, la période semble être un peu plus de 2.

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}}$$

   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $4\sin(3x) = -1$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.



Il y a 6 solutions.

2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\cdot\pi}{6}$		$\frac{7\cdot\pi}{6}$		$\frac{3\cdot\pi}{2}$		$\frac{11\cdot\pi}{6}$		$2\cdot\pi$
$f(x)$	0	↗	4	↘	-4	↗	4	↘	-4	↗	4	↘	-4	↗	0

Exercice 11 :

Suite à un tremblement de terre, le Japon est touché par un tsunami. On modélise la hauteur de l'eau par la fonction h, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$h(t) = a\cos(bt)$ avec h en mètres et t en secondes.

Déterminer les nombres a et b dans le cas d'un tsunami où les vagues mesurent 12 mètres de haut et présentent une période de 20 minutes.

La période est de 20 minutes soit $\boldsymbol{T = 1200s}$ donc $\boldsymbol{b = \frac{2\pi}{1200} = \frac{\pi}{600}}$
Les vagues mesurent 12 mètres de haut donc $\boldsymbol{a = 12}$
On a donc $\boldsymbol{h(t) = 12\cos\left(\frac{\pi}{600}t\right)}$

Exercice 26:

On modélise la température d'un ville par la fonction $\theta(t) = 15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$

où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

a) Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?

Pour le 1er février, on a $t = 1$: $$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(1-3)\right) + 9$$ $$\theta(1) == 15,7\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + 9$$ $$\theta(1) = 15,7\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 9$$ $$\theta(1) = -\frac{15,7\sqrt{3}}{2} + 9$$ $$\theta(1) \approx -4,6$$ **La température le 1er février est $-4,6$ °**	**Pour le 1er décembre , on a** $t = 1$ ($ou\ t = -1$ ...) $$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(11-3)\right) + 9$$ $$\theta(1) == 15,7\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) + 9$$ $$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 9$$ $$\theta(1) = -\frac{15,7\sqrt{3}}{2} + 9$$ $$\theta(1) \approx -4,6$$ **La température le 1er décembre est $-4,6$ °**

b) A quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues?

La période de la fonction est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = 12$$

c) Quelles sont les température extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles?

1ère méthode :

on étudie les variations de la fonction θ sur une période par exemple [0 ; 12]

$$\theta(t) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9 = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta'(t) = 15,7 \times \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

comme $15,7 \times \frac{\pi}{6} > 0$, le signe de $\theta'(t)$ est celui de cos $\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$

t	0		6		12
$\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$
$cos(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2})$	0	$+$	0	$-$	0

t	0		6		12
$cos(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2})$	0	$+$	0	$-$	0
$\theta(t)$	$-6,7$	$\nearrow$	$24,7$	$\searrow$	$-6,7$

La température est minimale pour $t = 0$ et $t = 12$, c'est à dire pour les mois de janvier.

La température est maximale pour $t = 6$, c'est à dire pour les mois de juillet.

2ème méthode :

$$\theta(t) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$$

• Comme 15,7 > 0 ,

θ **est maximale quand** $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$ **est maximal donc quand** $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 1$

donc $\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t - 3 = 3 + 12k$

$t = 6 + 12k$ **avec** k **entier**

or $6 + 12k$ **appartient à** $[0\ ;\ 12]$ **si**

$$0 \leq 6 + 12k \leq 12$$
$$-6 \leq 12k \leq 6$$
$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{k} \leq \frac{1}{2}$$

or k est entier donc la seule valeur possible est $k = 0$

on a donc $t = 6$

• Comme 15,7 > 0 ,

θ **est minimale quand** $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$ **est minimal donc quand** $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = -1$

donc $\frac{\pi}{6}(t-3) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t - 3 = -3 + 12k$

$t = 12k$ **avec** k **entier**

or $12k$ **appartient à** $[0\ ;\ 12]$ **si**

$$0 \leq 12k \leq 12$$
$$0 \leq k \leq 1$$

or k est entier donc les seules valeurs possibles sont $k = 0$ **et** $k = 1$

on a donc $t = 0$ **ou** $t = 12$

Exercice 27 :

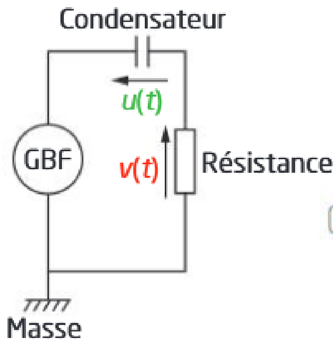
On réalise un montage en branchant en série une résistance ($R = 100\ \Omega$) et un condensateur à un GBF qui génère une tension sinusoïdale. On branche sur ce circuit un oscilloscope bi-courbe.

La tension aux bornes du condensateur est

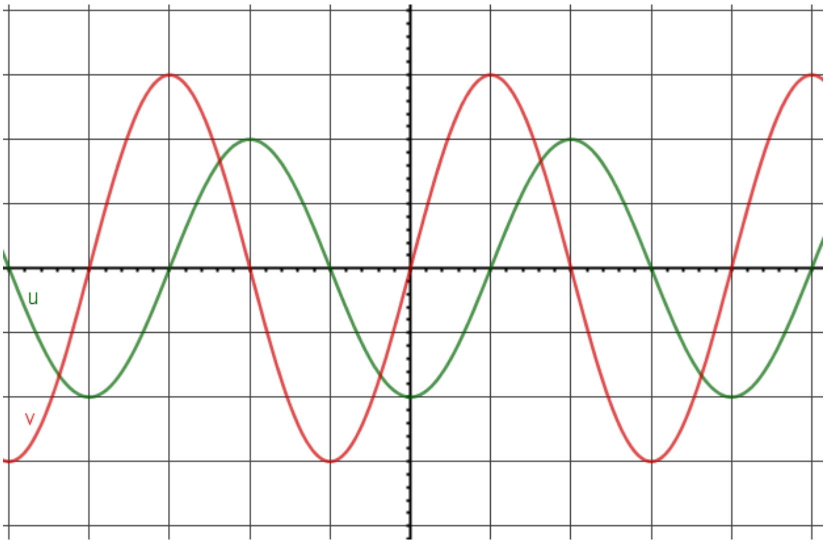
$$u(t) = U\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

La tension aux bornes de la résistance est

$$v(t) = V\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$



1) En utilisant l'oscillogramme ci-dessous, identifier $U,\ \omega_1, \varphi_1, V,\ \omega_2, \varphi_2$.



Le réglage de l' oscilloscope est :

- sensibilité verticale : $1V/div$.
- sensibilité horizontale : 0,25 $ms\ /div$.

Pour $u(t)$ [courbe verte]
$\boldsymbol{U = 2\ (Volts\ )}$
$\boldsymbol{\omega_1 = 4 \times 0,25 = 1\ ms = 0,001}$

à $t = 0$:
$\boldsymbol{u(0) = U\sin(\varphi_1) = 2\ \sin(\varphi_1)}$ **et graphiquement $u(0) = -2$**
donc $\sin(\varphi_1) = -1$ d'où $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

Pour $v(t)$ [courbe rouge]
$\boldsymbol{V = 3\ volts}$
$\boldsymbol{\omega_2 = 4 \times 0,25 = 1\ ms = 0,001}$

à $t = 0$: $v(0) = V\sin(\varphi_2) =$ $3\ \sin(\varphi_2)$ et graphiquement $v(0) = 0$
donc $\sin(\varphi_2) = 0$ d'où $\varphi_2 = 0$

2) Le déphasage entre les signaux $s_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ est $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Deux signaux sont :

- en phase si les signaux sont proportionnels
- en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.

Traduire ces informations en termes de déphasage.

Que peut on en déduire sur φ_1 et φ_2?

Deux signaux sont en phase si les signaux sont proportionnels
donc on doit avoir $\varphi_2 = \varphi_1$
soit $\Delta\varphi = 0$

• Deux signaux sont en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre. (l'un est au maximum quand l'autre est minimum)
Il faut donc que $\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $\sin(\omega t + \varphi_2)$ soient opposés
comme on sait que :
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ on a $\omega t + \varphi_1 + \pi = \omega t + \varphi_2$
Donc $\varphi_1 + \pi = \varphi_2$
soit $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$
ou $\Delta\varphi = \pi$

3) Deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le déphasage est $\frac{\pi}{2}$. Comment traduire cette information à l'aide des représentations graphiques des signaux ?

Si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ alors les signaux s'écrivent :

$\boldsymbol{s_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}$ **et** $\boldsymbol{s_2(t) = A_2 \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)}$

soit $\boldsymbol{s_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}$ **et** $\boldsymbol{s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1)}$

donc lorsque l'un des deux signaux est à son maximum (ou minimum) , l'autre signal s'annule.

4) Si $\Delta\varphi$ est positif, le signal 2 est en avance de phase par rapport au signal 1.
Si $\Delta\varphi$ est négatif, le signal 2 est en retard de phase par rapport au signal 1.
Que peut-on dire sur les signaux u et v ?

$\boldsymbol{\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\varphi_2 = 0}$

$\boldsymbol{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}}$

donc le signal 2 (courbe rouge) - celui de v - est en avance (ou u est en retard ...)

5) La loi d'Ohm s'applique sur les valeurs instantanées en régime sinusoïdal. Ainsi $v(t) = R\, i(t)$.
En déduire l'expression de $i(t)$.
i et u sont-elles en phase, en opposition de phase ou en quadrature de phase ?

on a $\boldsymbol{v(t) = 3 \sin(0,001\, t)}$

donc $\boldsymbol{i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{3}{100} \sin(0,001 t) = 0,03 \sin(0,001 t)}$

comme $\boldsymbol{u(t) = 2\, sin\left(0,001\, t - \frac{\pi}{2}\right)}$

Le déphasage est de $\boldsymbol{\pm\frac{\pi}{2}}$

donc les signaux sont en quadrature de phase.

Exercices bonus (hors programme ???)

Compétence : Equations $cos\ t = cos\ a$ et $sin\ t = sin\ a$

Exercice supplémentaire : Equations $cos\ t = cos\ a$ et $sin\ t = sin\ a$

Pour chacune des équations suivantes :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation.
2. Représenter les solutions de l'équation précédente par des points du cercle trigonométrique.

	Solutions (avec $k \in \mathbb{Z}$)
a. $\cos t = \cos\frac{2\pi}{3}$	$t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **Deux points images.**
b. $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **Deux points images.**
c. $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **Deux points images.**
d. $\sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$ $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ **Deux points images.**
e. $\cos t = \cos\frac{7\pi}{6}$	$t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **Deux points images.**
f. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$	$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **ou** $x = -\frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **Trois points images plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**
g. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	$2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3x = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **Un point image ($k = 0$) plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**
h. $\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$	$3t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3t - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $3t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $3t = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $3t = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3t = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ $t = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **ou** $t = \frac{13\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **Trois points images plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**
i. $\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(t + \frac{5\pi}{6}\right)$	$2t - \frac{\pi}{3} = t + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $2t - \frac{\pi}{3} = -\left(t + \frac{5\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $t = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $3t = -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $3t = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi$ $t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$ **Un point image ($k = 0$) plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**

<u>Exercice supplémentaire : Equations $cos\ t = cos\ a$ et $sin\ t = sin\ a$</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ et enfin dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation :

	Dans $\mathbb{R}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)	**Dans $]-\pi\ ;\pi]$**	**Dans $[0\ ;\ 2\pi[$**
a. $\cos t = \frac{1}{2}$	$t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$S = \left\{-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right\}$	$S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$
b. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$	$S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$	$S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$
c. $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$S = \left\{-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3}\right\}$	$S = \left\{\frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$
d. $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$	$S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$
e. $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$S = \left\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right\}$	$S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right\}$
f. $\cos t = -1$	$t = \pi + 2k\pi$	$S = \{\pi\}$	$S = \{\pi\}$
g. $\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{2}$	$S = \emptyset$ **car** $-\frac{\sqrt{5}}{2} < -1$	$S = \emptyset$	$S = \emptyset$
h. $\sin t = -\frac{1}{2}$	$t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	$S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right\}$	$S = \left\{\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$
i. $\sin t = 0$	$t = k\pi$	$S = \{0 ; \pi\}$	$S = \{0 ; \pi\}$
j. $\cos 4t = \frac{1}{2}$	$4t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $4t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $t = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi$ **ou** $t = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi$	**8 points images.**	**8 points images.**
k. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$	$2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ **ou** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	**4 points images.**	**4 points images.**
l. $\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $3t + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ $3t = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3t = -\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ $t = -\frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **ou** $t = -\frac{13\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$	**6 points images**	**6 points images**

<u>Exercice supplémentaire : Inéquation avec $sin\ t$ ou $cos\ t$</u>

Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis de $[0\ ;\ 2\pi[$ tels que :

	Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$	**Sur $[0\ ;\ 2\pi[$**
a. $\cos t \geq \frac{1}{2}$	$\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$	$[0 ; \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3} ; 2\pi[$
b. $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$	$]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}[$	$]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}[$
c. $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4} ; \pi]$	$]\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}[$
d. $-\frac{1}{2} \leq \sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	$]-\pi ; -\frac{5\pi}{6}] \cup [-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \pi]$	$[0 ; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6} ; 2\pi[$
e. $\cos t \leq 0$	$]-\pi ; -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2} ; \pi]$	$\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$
f. $1 - 2\sin t > 0$	$]-\pi ; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6} ; \pi]$	$[0 ; \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{6} ; 2\pi[$