Chapitre 8 - Fonction carré et cube (correction)

Compétence : Images, antécédents de nombres par la fonction carré

Exercice 1 : Images, antécédents de nombres par la fonction carré

Soit f la fonction carré.

1. Calculer les images par f des nombres réels suivants :

a. $\mathbf{8^2 = 64}$
b. $\mathbf{(-6)^2 = 36}$
c. $\mathbf{0^2 = 0}$
d. $\mathbf{0,4^2 = 0,16}$
e. $\mathbf{(-1,5)^2 = 2,25}$
f. $\mathbf{(11,3)^2 = 127,69}$
g. $\mathbf{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}}$
h. $\mathbf{\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}}$
i. $\mathbf{\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3}$
j. $\mathbf{\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 25 \times 2 = 50}$
k. $\mathbf{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}}$
l. $\mathbf{\left(10^{-4}\right)^2 = 10^{-4\times 2} = 10^{-8}}$
m. $\mathbf{\left(2 \times 10^3\right)^2 = 4 \times 10^6}$
n. $\mathbf{\left(3^5\right)^2 = 3^{5\times 2} = 3^{10}}$

2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par f

a. $4 > 0$
$\boldsymbol{S = \{-2\,;2\}}$
b. $-9 < 0$
$\boldsymbol{S = \emptyset}$
c. 0
$\boldsymbol{S = \{0\}}$
d. $0{,}49 > 0$
$\boldsymbol{S = \{-0,7\,;0,7\}}$
e. $\frac{9}{4} > 0$
$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}}$
f. $1 > 0$
$\boldsymbol{S = \{-1\,;1\}}$
g. $1{,}21 > 0$
$\boldsymbol{S = \{-1,1\,;1,1\}}$
h. $-1 < 0$
$\boldsymbol{S = \emptyset}$
i. $\frac{1}{25} > 0$
$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{1}{5}\,;\frac{1}{5}\right\}}$
j. $10^4 > 0$
$\boldsymbol{S = \left\{-10^2\,;10^2\right\}}$

Exercice 2 : Images, antécédents de nombres par la fonction carré

Recopier et compléter les phrases suivantes :

81 est le carré de $\mathbf{-9}$ **et** $\mathbf{9}$.

Le carré de $\sqrt{5}$ est $\mathbf{5}$.

$\mathbf{10,24}$ est le carré de 3,2

$\mathbf{3}$ est le carré de $-\sqrt{3}$

Compétence : Tableau de variations de la fonction carré

Exercice 3 : Tableau de variations de la fonction carré

1. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[2\,;5]$

x	2		5
x^2	4	↗	25

2. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-3\,;0]$

x	-3		0
x^2	9	↘	0

3. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-7\,;6]$

x	-7		0		6
x^2	49	↘	0	↗	36

Compétence : Extremums de fonction carré

Exercice 4 : Extremums de fonction carré

1. Quel est le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,-3]$?

x	-5		-3
x^2	25	$\searrow$	9

Le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,-3]$ est 25 atteint en $x=-5$.

2. Quel est le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[1\,;4]$

x	1		4
x^2	1	$\nearrow$	16

Le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[1\,;4]$ est 1 atteint en $x=1$

3. Déterminer deux intervalles où la fonction carré admet 1 pour minimum et 9 pour maximum.

Sur l'intervalle $[1\,;3]$ la fonction carré admet 1 pour minimum et 9 pour maximum.

x	1		3
x^2	1	$\nearrow$	9

Sur l'intervalle $[-3\,;-1]$ la fonction carré admet 1 pour minimum et 9 pour maximum.

x	-3		-1
x^2	9	$\searrow$	1

Exercice 5 : Extremums de fonction carré

1. Quel est le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,3]$?

x	-5		0		3
x^2	25	$\searrow$	0	$\nearrow$	9

Le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,3]$ est 25 atteint en $x=-5$.

2. Quel est le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[-5\,;3]$

Le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[-5\,;3]$ est 0 atteint en $x=0$.

3. Déterminer trois intervalles où la fonction carré admet 0 pour minimum et 25 pour maximum.

$[-5\,;0]$ $\qquad$ $[0\,;5]$ $\qquad$ $[-2\,;5]$

x	-2		0		5
x^2	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	25

Compétence : Variations de la fonction carré

Exercice 6 : Variations de la fonction carré et comparaisons

Indiquer quelle propriété du cours permet d'affirme sans calcul que :

1. Si $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ alors $2<\frac{9}{4}$

La fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Si $-0{,}8<-\frac{3}{4}$ alors $0{,}64>\frac{9}{16}$

La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

3. Si $1{,}5<a<1{,}6$ alors $2{,}25<a^2<2{,}56$

4. Si $a<-1$ alors $a^2>1$

Exercice 7 : Variations de la fonction carré et comparaisons

1. Comparer les carrés des nombres a et b suivants sans aucun calcul :

   a. $a = \sqrt{3}$ et $b = 2$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a < b}$ **et croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.

   b. $a = -0{,}34$ et $b = -0{,}27$

   $\boldsymbol{a^2 > b^2}$ **car** $\boldsymbol{a < b}$ **et décroissante sur** $]-\infty\ ;\mathbf{0}]$.

   c. $a = 1{,}28$ et $b = \frac{4}{3}$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a < b}$ **et croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.

   d. $a = -\sqrt{2}$ et $b = -1{,}5$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a > b}$ **et décroissante sur** $]-\infty\ ;\mathbf{0}]$.

   e. $a = \sqrt{7}$ et $b = 3$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a < b}$ **et croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.

   f. $a = 3$ et $b = \sqrt{10}$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a < b}$ **et croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.

   g. $a = -1{,}28$ et $b = -\frac{4}{3}$

   $\boldsymbol{a^2 < b^2}$ **car** $\boldsymbol{a > b}$ **et décroissante sur** $]-\infty\ ;\mathbf{0}]$.

   h. $a = 3 - \sqrt{3}$ et $b = 3 - \sqrt{5}$

   $\boldsymbol{a^2 > b^2}$ **car** $\boldsymbol{a > b}$ **et croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.

2. Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice

   a. $a = 3{,}456^2$ et $b = 3{,}546^2$

   $\mathbf{3,456 < 3,546}$ **et la fonction carre est strict. croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$ **ainsi** $\boldsymbol{a < b}$.

   b. $a = (-7{,}878)^2$ et $b = (-7{,}879)^2$

   $\mathbf{-7,879 < -7,878}$ **et la fonction carre est strict. décroissante sur** $]-\infty\ ;\mathbf{0}]$ **ainsi** $\boldsymbol{a < b}$.

   c. $a = 4\pi^2$ et $b = 5{,}987^2$

   $\mathbf{5,987 < 2\boldsymbol{\pi}}$ **et la fonction carre est strict. croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$ **ainsi** $\boldsymbol{a > b}$.

   d. $a = 2$ et $b = 2{,}1^2$

   $\mathbf{2 < 2,1^2}$

   e. $a = (-\pi + 2)^2$ et $b = (-\pi + 1)^2$

   $\boldsymbol{-\pi + 1 < -\pi + 2 < 0}$ **et la fonction carre est strict. décroissante sur** $]-\infty\ ;\mathbf{0}]$ **ainsi** $\boldsymbol{a < b}$.

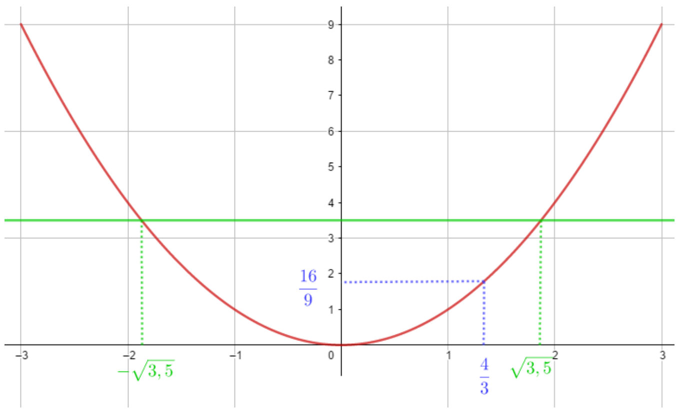
   f. $a = (3 - 2 \times 10^{-3})^2$ et $b = (2 + 7 \times 10^{-2})^2$

   $\mathbf{0 < 2 + 7 \times 10^{-2} < 3 - 2 \times 10^{-3}}$ **et la fonction carre est strict. croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$ **ainsi** $\boldsymbol{a > b}$.

Compétence : Représentation graphique de la fonction carré

Exercice 8 : Représentation graphique de la fonction carré, images et antécédents

1. Dans un repère orthogonal (unité graphique : 3 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées), représenter graphiquement la fonction carré sur $[-3\ ;3]$.
2. En laissant apparaître les traits de construction, indiquer graphiquement :
   a. comment déterminer l'image de $\frac{4}{3}$
   b. comment déterminer les antécédents de 3,5



3. a. Quelles sont les valeurs exactes des antécédents de 3,5 ?

Les antécédents de $\mathbf{3,5}$ **sont** $\mathbf{-\sqrt{3,5}}$ **et** $\mathbf{\sqrt{3,5}}$.

b. De quelle équation ces nombres sont-ils solutions ?

Chercher des antécédents par la fonction $\boldsymbol{f}$ **c'est résoudre l'équation** $\boldsymbol{f(x) = k}$
Ces nombres sont solutions de l'équation $\boldsymbol{x^2 = 3,5}$.

Compétence : Equations de la forme $x^2 = a$

Exercice 9 : Equations de la forme $x^2 = a$

Résoudre les équations suivantes

a. $x^2 = 25 > 0$

$\boldsymbol{S = \{-5\,;5\}}$

b. $x^2 = 2 > 0$

$\boldsymbol{S = \{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\}}$

c. $x^2 = -10 < 0$

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

d. $x^2 = 12 > 0$

$\boldsymbol{S = \{-\sqrt{12}\,;\sqrt{12}\}}$ **donc**

$\boldsymbol{S = \{-2\sqrt{3}\,;2\sqrt{3}\}}$

e. $x^2 + 1 = 0$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = -1 < 0}$

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

f. $x^2 - \frac{9}{4} = 0$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = \frac{9}{4}}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}}$

g. $x^2 - 1 = 81$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = 82 > 0}$

$\boldsymbol{S = \{-\sqrt{82}\,;\ \sqrt{82}\}}$

h. $x^2 + 6 = 127$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = 121 > 0}$

$\boldsymbol{S = \{-11\,;\ 11\}}$

i. $2x^2 - 1 = 1$

s'écrit $\boldsymbol{2x^2 = 2}$ **donc** $\boldsymbol{x^2 = 1 > 0}$

$\boldsymbol{S = \{-1\,;1\}}$

j. $3x^2 + 2 = 0$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = -\frac{2}{3} < 0}$

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

k. $\frac{9}{2}x^2 = 2$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = \frac{4}{9} > 0}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right\}}$

l. $9x^2 - 4 = 12$

s'écrit $\boldsymbol{9x^2 = 16}$ **donc** $\boldsymbol{x^2 = \frac{16}{9} > 0}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{4}{3}\,;\frac{4}{3}\right\}}$

m. $1 - 2x^2 = 1$

s'écrit $\boldsymbol{-2x^2 = 0}$ **donc** $\boldsymbol{x^2 = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

n. $-x^2 + 2 = 5$

s'écrit $\boldsymbol{-x^2 = 3}$ **donc** $\boldsymbol{x^2 = -3 < 0}$

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

o. $\frac{1}{2}x^2 = 50$

s'écrit $\boldsymbol{x^2 = 100}$

$\boldsymbol{S = \{-10\,;10\}}$

p. $(x-1)^2 = 1 > 0$

$\boldsymbol{x - 1 = -1}$ **ou** $\boldsymbol{x - 1 = 1}$

$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 2}$

$\boldsymbol{S = \{0\,;2\}}$

q. $(x+2)^2 = 3 > 0$

$\boldsymbol{x + 2 = -\sqrt{3}}$ **ou** $\boldsymbol{x + 2 = \sqrt{3}}$

$\boldsymbol{x = -\sqrt{3} - 2}$ **ou** $\boldsymbol{x = \sqrt{3} - 2}$

$\boldsymbol{S = \{-\sqrt{3} - 2\ ;\sqrt{3} - 2\}}$

r. $(x-4)^2 = -1 < 0$

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

s. $(2x-3)^2 = 9 > 0$

$\boldsymbol{2x - 3 = -3}$ **ou** $\boldsymbol{2x - 3 = 3}$

$\boldsymbol{2x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{2x = 6}$

$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 3}$

$\boldsymbol{S = \{0; 3\}}$

t. $(1-2x)^2 = 7 > 0$

$\boldsymbol{1 - 2x = -\sqrt{7}}$ **ou** $\boldsymbol{1 - 2x = \sqrt{7}}$

$\boldsymbol{-2x = -\sqrt{7} - 1}$ **ou** $\boldsymbol{-2x = \sqrt{7} - 1}$

$\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{7}+1}{2}}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{-\sqrt{7}+1}{2}}$

$\boldsymbol{S = \left\{\frac{-\sqrt{7}+1}{2}; \frac{\sqrt{7}+1}{2}\right\}}$

Compétence : Encadrement de x^2

Exercice 10 : Encadrement de x^2

1. Proposer le meilleur encadrement possible de x^2 sachant que :

a. $x \in [2\,;2{,}5]$

x	2		2,5
x^2	4	↗	6,25

$\boldsymbol{x^2 \in [4\,;6,25]}$

$\boldsymbol{4 \leq x^2 \leq 6,25}$

b. $x \in]-1\,;\,-0{,}5[$

x	-1		-0,5
x^2	1	↘	0,25

$\boldsymbol{x^2 \in]0,25\,;1[}$

$\boldsymbol{0,25 < x^2 < 1}$

c. $x \in [3\,;\,+\infty[$

x	3		$+\infty$
x^2	9	↗	$+\infty$

$\boldsymbol{x^2 \in [9\,;\,+\infty[}$

$\boldsymbol{x^2 \geq 9}$

d. $x \leq -5$

x	$-\infty$		-5
x^2	$+\infty$	↘	25

$\boldsymbol{x^2 \in [25\,;\,+\infty[}$

$\boldsymbol{x^2 \geq 25}$

2. En s'aidant du tableau de variations de la fonction carré, proposer le meilleur encadrement possible de x^2 sachant que :

a. $x \in]-1\,;2]$

x	-1		0		2
x^2	1	↘	0	↗	4

$x^2 \in [0\,;4]$

$0 \leq x^2 \leq 4$

b. $x \in]-\infty\,;\,1]$

x	$-\infty$		0		1
x^2	$+\infty$	↘	0	↗	1

$\boldsymbol{x^2 \in [0\,;\,+\infty[}$

$\boldsymbol{x^2 \geq 0}$

c. $x \in [-3\,;2]$

x	-3		0		2
x^2	9	↘	0	↗	4

$x^2 \in [0\,;9]$

d. $x \in]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{5}[$

$x^2 \in [0\,;5[$

e. $x \in [-2\,;\,+\infty[$

x	-2		0		$+\infty$
x^2	4	↘	0	↗	$+\infty$

$\boldsymbol{x^2 \in [0\,;\,+\infty[}$

$\boldsymbol{x^2 \geq 0}$

f. $x \in]-10^{-1}\,;0{,}05]$

$x^2 \in [0\,;10^{-2}[$

g. $-2 < x \leq 4$

$x^2 \in [0\,;16]$

h. $-10^{-2} < x < 10^{-2}$

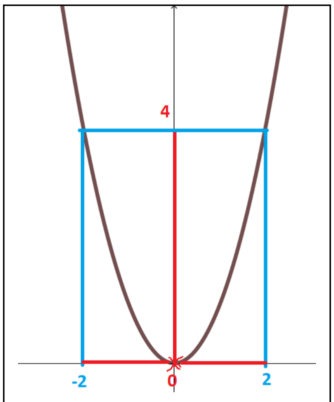
$x^2 \in [0\,;10^{-4}[$

Compétence : Inéquations avec la fonction carré

Exercice 11 : Inéquations avec la fonction carré

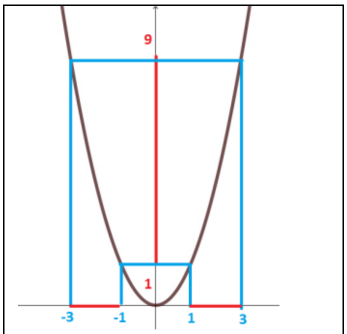
En s'aidant, de la parabole représentative de la fonction carré, résoudre chacune des inéquation (déterminer à quel intervalle ou réunion d'intervalle appartient x) :

a. $0 < x^2 \leq 4$



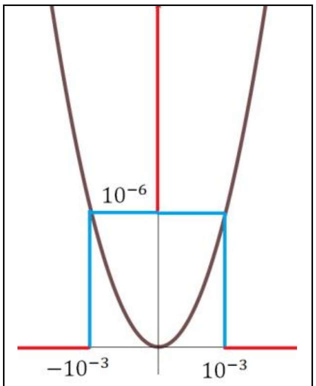
$\boldsymbol{x \in [-2\,;0[\cup]0\,;2]}$

b. $1 \leq x^2 \leq 9$



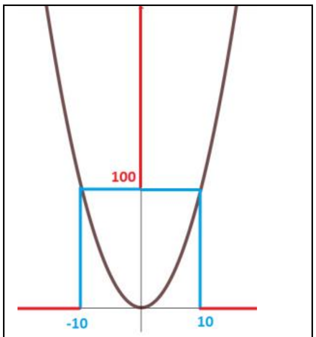
$\boldsymbol{x \in [-3;-1] \cup [1;3]}$

c. $x^2 \geq 10^{-6}$



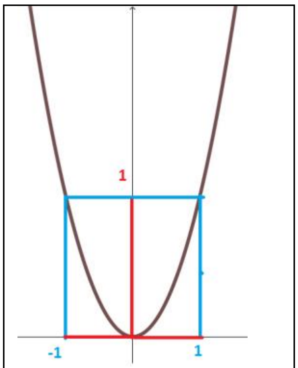
$x \in]-\infty;-10^{-3}] \cup [10^{-3}\,;\,+\infty[$

d. $x^2 > 100$



$x \in]-\infty;-10[\cup]10\,;\,+\infty[$

e. $x^2 < 1$



$x \in]-1\,;1[$

f. $x^2 \geq 64$

Voir c)

$x \in]-\infty;-8] \cup [8\,;\,+\infty[$

g. $x^2 \leq 10$

Voir e)

Attention crochet

$x \in \left[-\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\right]$

h. $4 < x^2 < 16$

Voir b)

Attention crochet

$\boldsymbol{x \in]-4\,;-2[\cup]2\,;4[}$

Compétence : Fonction cube

<u>Exercice 12 :</u> Compléter :

- L'image de 3 par la fonction cube est : 27
- L'image de 0 par l fonction cube est : 0
- L'image de -6 par la fonction cube est : -216
- L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction cube est : $2\sqrt{2}$

- L'antécédent de 2 par la fonction cube est : $\sqrt[3]{2}$
- L'antécédent de 125 par la fonction cube est : 5
- L'antécédent de -8 par la fonction cube est : -2
- L'antécédent de -5 par la fonction cube est : $-\sqrt[3]{5}$

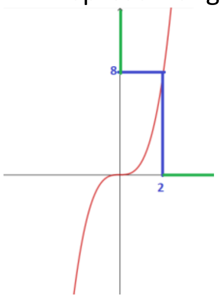
<u>Exercice 13 : Fonction cube</u>

On note f la fonction cube.

1. Donner le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Représenter graphiquement cette fonction.



3. Calculer l'image de 0,5, puis celle de 10^{-2} par f.

$\boldsymbol{f(0,5) = 0,5^3 = 0,125 = \frac{1}{8}}$

$\boldsymbol{f(10^{-2}) = (10^{-2})^3 = 10^{-6}}$

4. Déterminer l'antécédent de 27, puis celle de -125 par la fonction cube.

L'antécédent de 27 par la fonction f est 3.
L'antécédent de -125 par la fonction f est -5.

5. Résoudre $f(x) = 1$

$\boldsymbol{S = \{1\}}$

6. Résoudre graphiquement $f(x) = 8$.

$\boldsymbol{S = \{2\}}$

7. Résoudre graphiquement $x^3 > 8$.

$\boldsymbol{S =]2\,;\,+\infty[}$.

<u>Exercice 14 : Fonction cube</u>

Pour chacun des points suivants, dire s'il appartient ou non à la représentation graphique de la fonction cube :

$A(2\,;8)$	$B(-1\,;\,-1)$	$C(0\,;0)$	$D(-3\,;27)$
$\boldsymbol{2^3 = 8 = y_A}$ $\boldsymbol{A \in C}$	$\boldsymbol{(-1)^3 = -1 = y_B}$ $\boldsymbol{B \in C}$	$\boldsymbol{0^3 = 0 = y_C}$ $\boldsymbol{C \in C}$	$\boldsymbol{(-3)^3 = -27 \neq y_D}$ $\boldsymbol{D \notin C}$

<u>Exercice 15 : Fonction cube</u>

Construire le tableau de variation de la fonction cube sur chacun des intervalles suivants :

$I = [1\,;4]$

x	1	4
x^3	1 ↗	64

$J = [-2\,;\,-1]$

x	-2	-1
x^3	-8 ↗	-1

$K = [-3\,;3]$

x	-3	3
x^3	-27 ↗	27

<u>Exercice 16 :</u> Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $x^3 = 0$ $\quad \boldsymbol{S = \{0\}}$

b) $x^3 = 7$ $\quad \boldsymbol{S = \{\sqrt[3]{7}\}}$

c) $3x^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3}$ $\quad \boldsymbol{S = \left\{\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right\}}$

d) $x^3 = -1$ $\quad \boldsymbol{S = \{-1\}}$

e) $x^3 = -16$ $\quad \boldsymbol{S = \{-\sqrt[3]{16}\}}$

f) $2x^3 = 24 \Leftrightarrow x^3 = 12$ $\quad \boldsymbol{S = \{\sqrt[3]{12}\}}$

g) $x^3 > 2$ $\quad \boldsymbol{S =]\sqrt[3]{2}\,;\,+\infty[}$

h) $x^3 < 6$ $\quad \boldsymbol{S =]-\infty\,;\,\sqrt[3]{6}[}$

i) $x^3 \geq -2$ $\quad \boldsymbol{S = [-\sqrt[3]{2}\,;\,+\infty[}$

j) $x^3 \leq 8$ $\quad \boldsymbol{S =]-\infty\,;\,2]}$

k) $x^3 \geq 27$ $\quad \boldsymbol{S = [3\,;\,+\infty[}$

l) $x^3 < -4$ $\quad \boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-\sqrt[3]{4}[}$

m) $x^3 > -1$ $\quad \boldsymbol{S =]-1\,;\,+\infty[}$

n) $x^3 \leq 64$ $\quad \boldsymbol{S =]-\infty\,;\,4]}$

Exercice 17 : Donner un encadrement de x^3 dans chaque cas :

a) $4 \leq x < 6$

x	4		6
x^3	64	↗	216

$64 \leq x^3 < 216$

b) $-8 \geq x > -10$

x	-10		-8
x^3	-1000	↗	-512

$-1000 < x^3 \leq -512$

c) $-3 < x \leq 4$

x	-3		4
x^3	-27	↗	64

$-27 < x^3 \leq 64$

Pour les exercices 18 à 22 : Ecrire sous la forme a^n, où a et n sont des entiers relatifs.

Exercice 18 :

1) $A = 5 \times 5^{-3} = \mathbf{5^{1-3}} = \mathbf{5^{-2}}$
2) $B = (2^3)^5 = \mathbf{2^{3\times5}} = \mathbf{2^{15}}$
3) $C = 7 \times 7^2 = \mathbf{7^{1+2}} = \mathbf{7^3}$
4) $D = (3^2)^{-5} = \mathbf{3^{2\times(-5)}} = \mathbf{3^{-10}}$

Exercice 19 :

1) $A = (-5)^3 \times (-5)^7 = \mathbf{(-5)^{3+7}} = \mathbf{(-5)^{10}}$
2) $B = (-3)^{-2} \times (-3)^{-6} = \mathbf{(-3)^{-2-6}} = \mathbf{(-3)^{-8}}$
3) $C = (-2)^{-3} \times (-2)^4 = (-2)^{-3+4} = (-2)^1 = -2$
4) $D = (3^2)^5 \times (-2)^5 = \left(3^2 \times (-2)\right)^5 = (-18)^5$

Exercice 20 :

1) $A = \frac{2^7}{2^3} = \mathbf{2^{7-3}} = \mathbf{2^4}$
2) $B = \frac{2^3}{2^5} = \mathbf{2^{3-5}} = \mathbf{2^{-2}}$
3) $C = \frac{15^{-5}}{3^{-5}} = \left(\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{-5}} = \mathbf{5^{-5}}$
4) $D = (2^3)^4 \times \frac{2}{2^{-7}} = \mathbf{2^{3\times4+1+7}} = \mathbf{2^{20}}$

Exercice 21 :

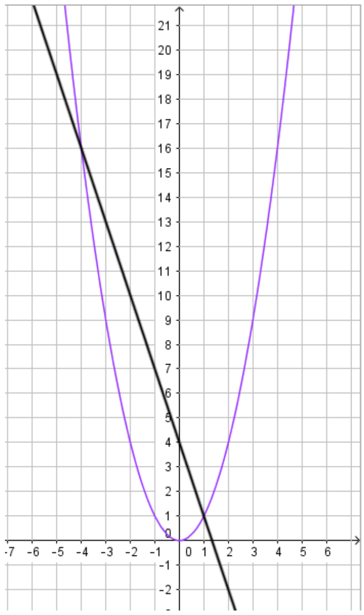
1) $A = \frac{3^5\times3^2}{(3\times3^{-2})^{-1}} = \frac{\mathbf{3^{5+2}}}{\mathbf{(3^{1-2})^{-1}}} = \frac{\mathbf{3^7}}{\mathbf{(3^{-1})^{-1}}} = \mathbf{3^7 \times 3^{-1}} = \mathbf{3^{7-1}} = \mathbf{3^6}$
2) $B = \frac{7\times7^{-3}}{7^{-1}\times(7^2)^{-3}} = \frac{\mathbf{7^{1-3}}}{\mathbf{7^{-1+2\times(-3)}}} = \frac{\mathbf{7^{-2}}}{\mathbf{7^{-7}}} = \mathbf{7^{-2+7}} = \mathbf{7^5}$
3) $C = \frac{12^2\times3^2}{9^2} = \left(\frac{\mathbf{12\times3}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{2}} = \left(\frac{\mathbf{3\times4\times3}}{\mathbf{3\times3}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{4^2}$
4) $D = \frac{5^7\times3^7}{15^7} = \left(\frac{\mathbf{5\times3}}{\mathbf{15}}\right)^{\mathbf{7}} = \mathbf{1^7} = \mathbf{1}$

Exercice 22 :

1) $10^5 \times 10^{-1} = \mathbf{10^{5-1}} = \mathbf{10^4}$
2) $10^{-2} \times 10^2 = \mathbf{10^{-2+2}} = \mathbf{10^0} = \mathbf{1}$
3) $10^{-6} \times (10^2)^4 = \mathbf{10^{-6+2\times4}} = \mathbf{10^2}$
4) $\frac{10^3}{10^{-2}} = 10^{3+2} = \mathbf{10^5}$

Compétence : Position relative et comparaison

Exercice supplémentaire : Position relative et comparaison



Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2$ et $g(x) = -3x + 4$.
On appelle P et D leurs représentations graphiques respectives dans un repère (O, I, J) du plan.

1. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.

$\boldsymbol{f(x) - g(x) = x^2 - (-3x + 4) = x^2 + 3x - 4}$

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0}$ **et** $\boldsymbol{\sqrt{25} = 5}$**.**

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{-3-5}{2}$	$x_2 = \frac{-3+5}{2}$
$x_1 = -\frac{8}{2}$	$x_2 = \frac{2}{2}$
$x_1 = -4$	$x_2 = 1$

La fonction $f - g$ est du signe de $a > 0$ à l'extérieur des racines.
Pour $x \in]-\infty; -4] \cup [1 ; +\infty[$ on a $f(x) - g(x) \geq 0$ c'est-à-dire $f(x) \geq g(x)$.
Pour $x \in [-4 ; 1]$ on a $f(x) - g(x) \leq 0$ c'est-à-dire $f(x) \leq g(x)$.

2. En déduire la position de P par rapport à D.

Pour $x \in]-\infty; -4] \cup [1 ; +\infty[$, P est au-dessus de D.
Pour $\in [-4 ; 1]$, P est en dessous de D.

3. Tracer P et D.