Chapitre 11 : Fonction exponentielle (correction)

Compétence : Propriétés algébriques

Exercice 1 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $\exp(A(x))$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.

a) $\exp(x)\times\exp(x)$	b) $\exp(-1)\times\exp(x)$	c) $\exp(-x)\times\exp(x)$	d) $\exp(1)\times\exp(x)$
$= \boldsymbol{\exp(2x)}$ $= \boldsymbol{e^{2x}}$	$= \boldsymbol{\exp(x-1)}$ $= \boldsymbol{e^{x-1}}$	$= \boldsymbol{1}$	$= \boldsymbol{\exp(x+1)}$ $= \boldsymbol{e^{x+1}}$

Exercice 2 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire les réels donnés sous la forme e^k où k est un entier.

a) $e^{-7}\times e^3$	b) $e^{-1}\times e^{-5}$	c) $e^2\times e$
$= \boldsymbol{e^{-7+3}}$ $= \boldsymbol{e^{-4}}$	$= \boldsymbol{e^{-1-5}}$ $= \boldsymbol{e^{-6}}$	$= \boldsymbol{e^{3}}$
d) $\frac{1}{e}$	e) $\frac{1}{e^{-1}}$	f) $\frac{1}{e^2}$
$= \boldsymbol{e^{-1}}$	$= \boldsymbol{e}$	$= \boldsymbol{e^{-2}}$
g) $\frac{e^{-3}}{e^2}$	h) $\frac{e}{e^{-1}}$	i) $\frac{e^{-2}}{e}$
$= \boldsymbol{e^{-3-2}}$ $= \boldsymbol{e^{-5}}$	$= \boldsymbol{e^{2}}$	$= \boldsymbol{e^{-3}}$
j) $(e^2)^3$	k) $(e^3)^2$	l) $(e^{-1})^6$
$= \boldsymbol{e^{2\times 3}}$ $= \boldsymbol{e^{6}}$	$= \boldsymbol{e^{6}}$	$= \boldsymbol{e^{-6}}$
m) $\frac{e^2\times e^{-3}}{e^5}$	n) $e\times(e^{-1})^3$	
$= \boldsymbol{e^{2-3-5}}$ $= \boldsymbol{e^{-6}}$	$= \boldsymbol{e^{1-3}}$ $= \boldsymbol{e^{-2}}$	

Exercice 3 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, compléter avec le nombre qui convient.

a) $e^{\mathbf{12}}\times e^6 = e^{18}$ b) $e^{-1}\times e^{\mathbf{9}} = (e^4)^2$ c) $\frac{e^{\mathbf{14,5}}}{e^{1,5}\times e^3} = e^{10}$ d) $e\times\frac{1}{e^{\mathbf{1,5}}} = e^{-0,5}$

Exercice 4 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.

a) $e^x\times e^5$	b) $e^{-x}\times e^2$	c) $e^{-2x}\times e^{-1}$
$= \boldsymbol{e^{x+5}}$	$= \boldsymbol{e^{-x+2}}$	$= \boldsymbol{e^{-2x-1}}$
d) $e^x\times e^x$	e) $e^x\times e^{-x}$	f) $e^{1-x}\times e^{1-x}$
$= \boldsymbol{e^{2x}}$	$= \boldsymbol{1}$	$= \boldsymbol{e^{2-2x}}$
g) $(e^x)^4$	h) $(e^{2x})^{-1}$	i) $(e^{-x+1})^2$
$= \boldsymbol{e^{4x}}$	$= \boldsymbol{e^{-2x}}$	$= \boldsymbol{e^{2(-x+1)}}$ $= \boldsymbol{e^{-2x+2}}$
j) $\frac{e^x}{e^{0,1}}$	k) $\frac{e^x}{e^{0,1x}}$	l) $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-1}}$
$= \boldsymbol{e^{x-0,1}}$	$= \boldsymbol{e^{x-0,1x}}$ $= \boldsymbol{e^{0,9x}}$	$= \boldsymbol{e^{2x+1-(x-1)}}$ $= \boldsymbol{e^{x+2}}$

Exercice 5 : Propriétés algébriques

Dans chaque cas, écrire l'expression donnée sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression et x un réel.

a) $e^{1+x} \times e^x$

$= e^{2x+1}$

b) $e^{2-x} \times e^{3-x}$

$= e^{-2x+5}$

c) $(e^{1+x})^2 \times e^{-x}$

$= e^{2+2x-x}$
$= e^{x+2}$

d) $e \times e^{5-0,1x}$

$= e^{6-0,1x}$

e) $\dfrac{1}{e^{-7+0,2x}}$

$= e^{7-0,2x}$

f) $\dfrac{e^{2x-5}}{e^{x+5}}$

$= e^{2x-5-x-5}$
$= e^{x-10}$

g) $\dfrac{e^{-x+1}}{e^{x-3}}$

$= e^{-x+1-x+3}$
$= e^{-2x+4}$

h) $\dfrac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$

$= e^{1+3x-1-x-1}$
$= e^{2x-1}$

i) $\dfrac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$

$= e^{x+x+1-x+1}$
$= e^{x+2}$

j) $\dfrac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$

$= e^{2-x+6x+3+x+1-2x}$
$= e^{4x+6}$

Exercice 6 : Propriétés algébriques

t désigne un nombre réel.

Développer et réduire chaque expression.

1. $A = (e^t - 1)^2$

$\boldsymbol{A = (e^t)^2 - 2e^t + 1}$
$\boldsymbol{A = e^{2t} - 2e^t + 1}$

2. $B = e^{2t}(e^t - e^{-2t})$

$\boldsymbol{B = e^{2t}e^t - e^{2t}e^{-2t}}$
$\boldsymbol{B = e^{3t} - 1}$

3. $C = 3e^t(e^t - e^{-t}) - 5e^{2t}$

$\boldsymbol{C = 3(e^t)^2 - 3e^t e^{-t} - 5e^{2t}}$
$\boldsymbol{C = 3e^{2t} - 3 - 5e^{2t}}$
$\boldsymbol{C = -2e^{2t} - 3}$

Exercice 7 : Propriétés algébriques

Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x :

1. $3e^{2x} - 8e^x - 3 = (1 + 3e^x)(e^x - 3)$

$$(1 + 3e^x)(e^x - 3) = e^x - 3 + 3e^x \times e^x - 9e^x$$
$$= e^x - 3 + 3e^{2x} - 9e^x$$
$$= 3e^{2x} - 8e^x - 3$$

2. $\dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$

$$\frac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \frac{(1+e^{2x}) \times e^{-x}}{(1+e^x) \times e^{-x}}$$
$$= \frac{e^{-x}+e^{2x} \times e^{-x}}{e^{-x}+e^x \times e^{-x}}$$
$$= \frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$$

3. $\dfrac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x}$

$$\frac{e^{1+2x} \times e^{-x}}{(1+e^{2x}) \times e^{-x}} = \frac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^{2x} \times e^{-x}}$$
$$= \frac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x}$$

4. $\dfrac{e^{x+1}}{e+e^{x+1}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$\frac{e^{x+1}}{e+e^{x+1}} = \frac{e^{x+1} \times e^{-1}}{(e+e^{x+1}) \times e^{-1}}$$
$$= \frac{e^x}{e \times e^{-1} + e^{(x+1)} \times e^{-1}}$$
$$= \frac{e^x}{1+e^x}$$

5. $1 - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$1 - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$= \frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$= \frac{1}{1+e^{-x}}$$
$$= \frac{1 \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+e^{-x}e^x}$$
$$= \frac{e^x}{1+e^x}$$

Compétence : Signe d'expressions avec des exponentielles

Exercice 8 : Signe

Déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

a) $A(x) = 0{,}5 + e^x$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^x > 0}$
$\boldsymbol{0,5 + e^x > 0,5 > 0}$
$\boldsymbol{A(x) > 0}$

b) $B(x) = 1 + 0{,}5e^x$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^x > 0}$
$\boldsymbol{0,5e^x > 0}$
$\boldsymbol{1 + 0,5e^x > 1 > 0}$
$\boldsymbol{B(x) > 0}$

c) $C(x) = -10e^x$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^x > 0}$
$\boldsymbol{-10e^x < 0}$ car $-10 < 0$
$\boldsymbol{C(x) < 0}$

d) $D(x) = -1 - e^x$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^x > 0}$
$\boldsymbol{-e^x < 0}$ car $-1 < 0$
$\boldsymbol{-1 - e^x < -1 < 0}$
$\boldsymbol{D(x) < 0}$

e) $E(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

Pour tout réel x :
$e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$
$E(x) > 0$ (quotient)

f) $F(x) = e^x(2 + e^x)$

Pour tout réel x :
$e^x > 0$ et $e^x + 2 > 0$
$F(x) > 0$ (produit)

g) $G(x) = -2e^{-x-1}$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^{-x-1} > 0}$
$\boldsymbol{-2e^{-x-1} < 0}$ car $-2 < 0$
$\boldsymbol{G(x) < 0}$

h) $H(x) = 0{,}3e^{1-0{,}7x}$

Pour tout réel x :
$\boldsymbol{e^{1-0,7x} > 0}$
$\boldsymbol{0,3e^{1-0,7x} > 0}$
$\boldsymbol{H(x) > 0}$

Exercice 9 : Signe

Déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

a) $A(x) = 5e^x - xe^x$

$\boldsymbol{A(x) = e^x(5 - x)}$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $A(x)$ est du signe de $5 - x$.

$\boldsymbol{5 - x = 0}$
$\boldsymbol{x = 5}$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	

Signe de $m = -1 < 0$ à droite du « zéro ».

b) $B(x) = x^2e^x - xe^x$

$\boldsymbol{B(x) = e^x(x^2 - x)}$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $B(x)$ est du signe de $x^2 - x$.

$\boldsymbol{x^2 - x = 0}$
$\boldsymbol{x(x - 1) = 0}$
$x = 0$ ou $x - 1 = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		$+$	0	$-$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines.

c) $C(x) = e^x - 2xe^x$

$\boldsymbol{C(x) = e^x(1 - 2x)}$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $C(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

$\boldsymbol{1 - 2x = 0}$
$\boldsymbol{-2x = -1}$
$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	

Signe de $m = -2 < 0$ à droite du « zéro ».

d) $D(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$\boldsymbol{D(x) = e^{-x}(x - x^2)}$
Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ alors $D(x)$ est du signe de $x - x^2$.

$\boldsymbol{x - x^2 = 0}$
$\boldsymbol{x(1 - x) = 0}$
$x = 0$ ou $1 - x = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines.

e) $E(x) = 4e^{-x} - x^2e^{-x}$

$\boldsymbol{E(x) = e^{-x}(4 - x^2)}$
Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ alors $E(x)$ est du signe de $4 - x^2$.

$\boldsymbol{4 - x^2 = 0}$
$\boldsymbol{x^2 = 4}$
$x = -2$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines.

f) $F(x) = xe^x - e^{x+2}$

$\boldsymbol{F(x) = xe^x - e^xe^2 = e^x(x - e^2)}$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $F(x)$ est du signe de $x - e^2$.

$\boldsymbol{x - e^2 = 0}$
$\boldsymbol{x = e^2}$

x	$-\infty$		e^2		$+\infty$
$x-e^2$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$-$	0	$+$	

Signe de $m = 1 < 0$ à droite du « zéro ».

g) $G(x) = x^2e^x - e^{x+2}$

$\boldsymbol{G(x) = x^2e^x - e^xe^2 = e^x(x^2 - e^2)}$

Comme pour tout réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e^x > 0}$ alors $\boldsymbol{G(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{x^2 - e^2}$.

$\boldsymbol{x^2 - e^2 = 0}$

$\boldsymbol{x^2 = e^2}$

$\boldsymbol{x = -\sqrt{e^2}}$ **ou** $\boldsymbol{x = \sqrt{e^2}}$

$\boldsymbol{x = -e}$ **ou** $\boldsymbol{x = e}$

x	$-\infty$		$-e$		e		$+\infty$
x^2-e^2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$G(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Signe de $\boldsymbol{a = 1 > 0}$ à l'extérieur des racines.

h) $H(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^x + 1}$

$H(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^x + 1} = \dfrac{e^x(1-x)}{e^x + 1}$

Comme pour tout réel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e^x > 0}$ et $\boldsymbol{e^x + 1 > 0}$ alors $\boldsymbol{H(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{1 - x}$.

$\boldsymbol{1 - x = 0}$

$\boldsymbol{x = 1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$H(x)$		$+$	0	$-$	

Signe de $\boldsymbol{m = -1 < 0}$ à droite du « zéro ».

Compétence : Equation ou inéquation

Exercice 10 : Equation

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{2x} = e^5$

$\boldsymbol{2x = 5}$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$

$\boldsymbol{S = \left\{\frac{5}{2}\right\}}$

b) $e^x = e$

$\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{S = \{1\}}$

c) $e^x = e^{-x}$

$\boldsymbol{x = -x}$

$\boldsymbol{2x = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

d) $e^x = 1$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

e) $e^{-x} = 1$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

f) $e^{2-x} = 1$

$\boldsymbol{e^{2-x} = e^0}$

$\boldsymbol{2 - x = 0}$

$\boldsymbol{x = 2}$

$\boldsymbol{S = \{2\}}$

g) $e^x = 0$

Impossible car $\boldsymbol{e^x > 0}$ pour tout réel.

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

h) $e^{x+1} = -1$

Impossible car $\boldsymbol{e^{x+1} > 0}$ pour tout réel.

$\boldsymbol{S = \emptyset}$

Exercice 11 : Equation

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $e^{x^2} = e^x$

$\boldsymbol{x^2 = x}$

$\boldsymbol{x^2 - x = 0}$

$\boldsymbol{x(x - 1) = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 1 = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{S = \{0\,;1\}}$

b) $e^{-2x} - 1 = 0$

$\boldsymbol{e^{-2x} = 1}$

$\boldsymbol{e^{-2x} = e^0}$

$\boldsymbol{-2x = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

c) $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$

$\boldsymbol{e^{5x+1} = e^{2x+1}}$

$\boldsymbol{5x + 1 = 2x + 1}$

$\boldsymbol{3x = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{S = \{0\}}$

d) $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

$e^x - e^2 = 0$ ou $e^{-x} + 5 = 0$

$\boldsymbol{e^x = e^2}$ **ou** $\boldsymbol{e^{-x} = -5 < 0}$

$\boldsymbol{x = 2}$ **ou impossible**

$\boldsymbol{S = \{2\}}$

e) $3e^{3x-42} + 1 = 4$

$\boldsymbol{3e^{3x-42} = 3}$

$\boldsymbol{e^{3x-42} = 1}$

$\boldsymbol{e^{3x-42} = e^0}$

$\boldsymbol{3x - 42 = 0}$

$\boldsymbol{3x = 42}$

$\boldsymbol{x = 14}$

$\boldsymbol{S = \{14\}}$

f) $e^{5x} = \dfrac{e^{-x}}{e}$

$\boldsymbol{e^{5x} = e^{-x-1}}$

$\boldsymbol{5x = -x - 1}$

$\boldsymbol{6x = -1}$

$\boldsymbol{x = -\frac{1}{6}}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}}$

Exercice 12 : Equation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$.

Posons $\boldsymbol{P(x)} = X^2 + 6X - 7$
$\boldsymbol{a = 1}$ **;** $\boldsymbol{b = 6}$ **et** $\boldsymbol{c = -7}$
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$
$\boldsymbol{= 6^2 - 4 \times 1 \times (-7)}$
$\boldsymbol{= 64}$
Et $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 8}$

$\boldsymbol{X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$	$\boldsymbol{X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
$\boldsymbol{X_1 = \frac{-6-8}{2}}$	$\boldsymbol{X_2 = \frac{-6+8}{2}}$
$\boldsymbol{X_1 = -7}$	$\boldsymbol{X_2 = 1}$

$$\boldsymbol{S = \{-7\,;1\}}$$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$$

Posons $\boldsymbol{X = e^x}$ **alors** $\boldsymbol{X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}}$
On remarque ainsi que :
$\boldsymbol{e^{2x} + 6e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 6X - 7 = 0}$
Ainsi on obtient :
$\boldsymbol{e^x = -7 < 0}$ **(impossible) ou** $\boldsymbol{e^x = 1}$
$\boldsymbol{e^x = -7}$ **(impossible) ou** $\boldsymbol{x = 0}$

$$\boldsymbol{S = \{0\}}$$

Exercice 13 : Equation

1. Démontrer que l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.

$\boldsymbol{e^x - 2e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{e^x(e^x - 2e^{-x} + 1) = e^x \times 0 \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + e^x = 0 \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{(e^x)^2 - 2 + e^x = 0 \Leftrightarrow}$
$\boldsymbol{(e^x)^2 + e^x - 2 = 0}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

Posons $\boldsymbol{X = e^x}$ **alors** $\boldsymbol{X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}}$
On remarque ainsi que :
$(e^x)^2 + e^x - 2 = \boldsymbol{0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0}$
Posons $\boldsymbol{P(x)} = X^2 + X - 2$
$\boldsymbol{a = 1}$ **;** $\boldsymbol{b = 1}$ **et** $\boldsymbol{c = -2}$
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$
$\boldsymbol{= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}$
$\boldsymbol{= 9}$
Et $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 3}$

$\boldsymbol{X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$	$\boldsymbol{X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
$\boldsymbol{X_1 = \frac{-1-3}{2}}$	$\boldsymbol{X_2 = \frac{-1+3}{2}}$
$\boldsymbol{X_1 = -2}$	$\boldsymbol{X_2 = 1}$
$\boldsymbol{e^{x_1} = -2 < 0}$	$\boldsymbol{e^{x_2} = 1}$
impossible	$\boldsymbol{x_2 = 0}$

$$\boldsymbol{S = \{0\}}$$

Exercice 14 : Inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{x+1} \leq e^5$

$x + 1 \leq 5$
$x \leq 4$
$S =]-\infty\,;4]$

b) $e^{3-x} > e^2$

$3 - x > 2$
$-x > -1$
$x < 1$
$S =]-\infty\,;1[$

c) $e^{-x} < e^4$

$-x < 4$
$x > -4$
$S =]-4\,;\,+\infty[$

d) $1 \leq e^{3x}$

$e^{3x} \geq e^0$
$3x \geq 0$
$x \geq 0$
$S = [0\,;\,+\infty[$

f) $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

$e^{x+3} \geq e^{-1}$
$x + 3 \geq -1$
$x \geq -4$
$S = [-4\,;\,+\infty[$

e) $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leq 0$

$e^{-x^2} - e^{7x-8} \leq 0$
$e^{-x^2} \leq e^{7x-8}$
$-x^2 \leq 7x - 8$
$-x^2 - 7x + 8 \leq 0$

Posons $P(x) = -x^2 - 7x + 8$
$a = -1$; $b = -7$ et $c = 8$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\quad = (-7)^2 - 4 \times (-1) \times 8$
$\quad = 81$
Et $\sqrt{\Delta} = 9$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{7-9}{-2}$	$x_2 = \frac{7+9}{-2}$
$x_1 = 1$	$x_2 = -8$

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines
$S =]-\infty\,;\,-8] \cup [1\,;\,+\infty[$

g) $1 - e^{x^2-1} \geq 0$

$1 - e^{x^2-1} \geq 0$
$-e^{x^2-1} \geq -1$
$e^{x^2-1} \leq 1$
$e^{x^2-1} \leq e^0$
$x^2 - 1 \leq 0$

Posons $P(x) = x^2 - 1$
$P(x) = (x+1)(x-1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines
$S = [-1\,;1]$

Exercice 15 : Inéquation

1. Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.

$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$
$e^x \geq e^0$
$x \geq 0$
$S = [0\,;\,+\infty[$

3. En déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \geq 0$ on a d'après 2) : $e^x - 1 \geq 0$
Et d'après 1) on a : Pour $x \geq 0$, $e^{2x} - e^x \geq 0$.
De la même manière : Pour $x \leq 0$, $e^{2x} - e^x \leq 0$.

Exercice 16 : Inéquation

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x} - e^x > 0$.

$e^{-x} > e^x$
$-x > x$
$2x < 0$
$x < 0$
$S =]-\infty\,;0[$

2. En déduire le signe de $1 - \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

$1 - \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} - \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}-e^x}{1+e^{-x}}$

Comme sur $\mathbb{R}$, $1 + e^{-x} > 0$ alors $\frac{e^{-x}-e^x}{1+e^{-x}}$ est du signe de $e^{-x} - e^x$.
D'après 1) : Sur $]-\infty\,;0[$ on a : $e^{-x} - e^x > 0$.
Par déduction : Sur $[0\,;\,+\infty[$ on a : $e^{-x} - e^x \leq 0$.

Exercice 17 : Inéquation

1. Factoriser le polynôme du second degré :

$$-5X^2+3X+2$$

Posons $P(x)=-5X^2+3X+2$
$a=-5$; $b=3$ et $c=2$
$\Delta=b^2-4ac$
$=3^2-4\times(-5)\times 2$
$=49$
Et $\sqrt{\Delta}=7$

$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$X_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$X_1=\frac{-3-7}{-10}$	$X_2=\frac{-3+7}{-10}$
$X_1=1$	$X_2=-\frac{2}{5}$

$P(X)=-5(X-1)\left(X+\frac{2}{5}\right)$

2. En déduire une factorisation de $-5e^{2x}+3e^x+2$.

Posons $X=e^x$ ainsi $X^2=(e^x)^2=e^{2x}$
$-5e^{2x}+3e^x+2=-5(e^x-1)\left(e^x+\frac{2}{5}\right)$

3. Etudier le signe de $-5e^{2x}+3e^x+2$ sur $\mathbb{R}$.

- **Comme sur $\mathbb{R}$ on a $e^x+\frac{2}{5}>0$ alors :**
  $-5(e^x-1)\left(e^x+\frac{2}{5}\right)$ **est du signe de** $-5(e^x-1)$
- $-5<0$
- **Etudions le signe de e^x-1 :**
  $e^x-1>0$
  $e^x>1$
  $x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x+\frac{2}{5}$	$+$		$+$
-5	$-$		$-$
e^x-1	$-$	0	$+$
$-5e^{2x}+3e^x+2$	$+$	0	$-$

Sur $]-\infty\,;0]$ on a $-5e^{2x}+3e^x+2\geq 0$
Sur $[0\,;+\infty[$ on a $-5e^{2x}+3e^x+2\leq 0$

Exercice 18 : Inéquation

1. Démontrer que pour tout réel x,

$$-2e^{2x}+e^x+1=(2e^x+1)(1-e^x)$$

$(2e^x+1)(1-e^x)=2e^x-2e^xe^x+1-e^x$
$=e^x-2e^{2x}+1$
$=-2e^{2x}+e^x+1$

2. En déduire le signe de $-2e^{2x}+e^x+1$ sur $\mathbb{R}$.

Comme sur $\mathbb{R}$ on a $2e^x+1>0$ alors :
$-2e^{2x}+e^x+1$ **est du signe de** $1-e^x$
On résout alors :
$1-e^x>0$
$e^x<1$
$x<0$

Conclusion :

Sur $]-\infty\,;0[$ on a : $-2e^{2x}+e^x+1>0$
Par déduction : Sur $[0;+\infty[$ on a : $-2e^{2x}+e^x+1<0$

Compétence Dérivée et fonction exponentielle

Exercice 19 : Dérivée et fonction exponentielle

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=e^x+4$	b) $g(x)=2{,}7e^x+8$
$f'(x)=e^x$	$g'(x)=2{,}7e^x$
c) $h(x)=5e^x+x$	d) $k(x)=3x-3e^x$
$h'(x)=5e^x+1$	$k'(x)=3-3e^x$
e) $l(x)=5x^3-9e^x$	f) $m(x)=e-e^x$
$l'(x)=15x^2-9e^x$	$m'(x)=-e^x$

Exercice 20 : Dérivée et fonction exponentielle

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

Produit :

a) $f(x) = (2x-7)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = 2x - 7$ donc $u'(x) = 2$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$f'(x) = 2e^x + e^x(2x-7)$
$f'(x) = 2e^x + 2xe^x - 7e^x$
$f'(x) = 2xe^x - 5e^x$
$f'(x) = e^x(2x-5)$

b) $g(x) = (1-x)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = 1 - x$ donc $u'(x) = -1$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$g'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$g'(x) = -e^x + e^x(1-x)$
$g'(x) = -e^x + e^x - xe^x$
$g'(x) = -xe^x$

c) $h(x) = xe^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$h'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$h'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x$
$h'(x) = e^x + xe^x$
$h'(x) = e^x(1+x)$

d) $k(x) = (3x^2-2)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = 3x^2 - 2$ donc $u'(x) = 6x$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$k'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$k'(x) = 6x \times e^x + e^x \times (3x^2 - 2)$
$k'(x) = 6xe^x + 3x^2e^x - 2e^x$
$k'(x) = e^x(6x + 3x^2 - 2)$

e) $l(x) = (x^2-2x)e^x = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x^2 - 2x$ donc $u'(x) = 2x - 2$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$l'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$l'(x) = (2x-2) \times e^x + e^x \times (x^2 - 2x)$
$l'(x) = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x$
$l'(x) = e^x(x^2 - 2)$

f) $m(x) = e^x(e^x - 2) = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = e^x$ donc $u'(x) = e^x$
$v(x) = e^x - 2$ donc $v'(x) = e^x$
$m'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$
$m'(x) = e^x(e^x - 2) + e^x \times e^x$
$m'(x) = e^{2x} - 2e^x + e^{2x}$
$m'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$
$m'(x) = 2e^x(e^x - 1)$

Quotient :

a) $f(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

Avec $u(x) = e^x$ donc $u'(x) = e^x$
$v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$f'(x) = \frac{e^x x - 1e^x}{x^2}$
$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $g(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)}$

Avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2}$
$g'(x) = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$

c) $h(x) = \frac{3x+1}{e^x}$

Avec $u(x) = 3x + 1$ donc $u'(x) = 3$
$v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$
$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$h'(x) = \frac{3e^x - e^x(3x+1)}{(e^x)^2}$
$h'(x) = \frac{3e^x - 3xe^x - e^x}{e^{2x}}$
$h'(x) = \frac{2e^x - 3xe^x}{e^{2x}}$
$h'(x) = \frac{e^x(2-3x)}{e^{2x}}$

d) $k(t) = \frac{1+e^t}{e^t}$

Avec $u(t) = 1 + e^t$ donc $u'(t) = e^t$
$v(t) = e^t$ donc $v'(t) = e^t$
$k'(t) = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v^2(t)}$
$k'(t) = \frac{e^te^t - e^t(1+e^t)}{e^{2t}}$
$k'(t) = \frac{e^te^t - e^t - e^te^t}{e^{2t}}$
$k'(t) = \frac{-e^t}{e^{2t}}$

Exercice 21 : Dérivées de $x \mapsto e^{ax+b}$

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = e^{2x+5}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{u(x) = 2x + 5}$
$\boldsymbol{u'(x) = 2}$
$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{f'(x) = 2e^{2x+5}}$

2. $f(x) = e^{-x}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{u(x) = -x}$
$\boldsymbol{u'(x) = -1}$
$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{f'(x) = -e^{-x}}$

3. $f(x) = 3e^{-2x}$

$\boldsymbol{f(x) = 3e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{u(x) = -2x}$
$\boldsymbol{u'(x) = -2}$
$\boldsymbol{f'(x) = 3u'(x)e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{f'(x) = 3 \times -2e^{-2x}}$
$\boldsymbol{f'(x) = -6e^{-2x}}$

4. $f(x) = 2x - e^{-5x}$

$\boldsymbol{f(x) = 2x - e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{u(x) = -5x}$
$\boldsymbol{u'(x) = -5}$
$\boldsymbol{f'(x) = 2 - u'(x)e^{u(x)}}$
$\boldsymbol{f'(x) = 2 - \left(-5e^{-5x}\right)}$
$\boldsymbol{f'(x) = 2 + 5e^{-5x}}$

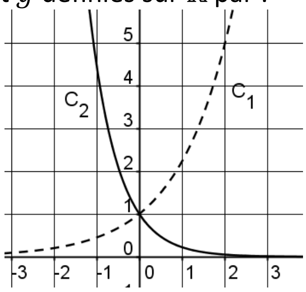
Compétence : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

Exercice 22 : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{0,8x}$ et
$g(x) = e^{-1,5x}$.

On a représenté ci-contre ces deux fonctions. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.



$0,8 > 0$ ainsi la fonction f est croissante : C_1.
$-1,5 < 0$ ainsi la fonction g est décroissante : C_2.

Exercice 23 : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2,2x}$ et C_f sa courbe représentative.
   a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

$\boldsymbol{f'(x) = 2,2e^{2,2x}}$

   b) Déterminer le sens de variation de la fonction f.

Comme pour tout réel, $e^{2,2x} > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $2,2 > 0$ ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c) Dans un repère, tracer la courbe C_f.

2. Reprendre la question précédente avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-0,3x}$.

$\boldsymbol{f'(x) = -0,3e^{-0,3x}}$
Comme pour tout réel, $e^{-0,3x} > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de$-0,3 < 0$ ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Compétence : Suite géométrique

Exercice 24 : Suite géométrique

(u_n) est la suite définie, pour nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = -3e^{1,1n}$.
Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Préciser sa raison et son premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a :
$\boldsymbol{u_n = -3e^{1,1n} = -3 \times \left(e^{1,1}\right)^n = u_0 q^n}$
Ainsi (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = e^{1,1}$

Exercice 25 : Suite géométrique

(v_n) est la suite définie, pour nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = \frac{1}{3}e^{5-0,6n}$.
La suite (v_n) est-elle géométrique ?
Justifier.

Pour tout entier naturel n, on a :
$v_n = \frac{1}{3}e^{5-0,6n} = \frac{1}{3}e^{5}e^{-0,6n} = \frac{e^5}{3}\left(e^{-0,6}\right)^n = \boldsymbol{v_0 q^n}$
.Ainsi (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{e^5}{3}$ et de raison $q = e^{-0,6}$

Exercice 26 : Etude de fonction exponentielle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^x$$

Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout réel x,

$f(x) = u(x)v(x)$

Avec $u(x) = x^2 - 4$ ainsi $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ ainsi $v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2 - 4)$

$f'(x) = e^x(2x + x^2 - 4)$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

Comme pour tout réel $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 4$

$a = 1$; $b = 2$ et $c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 1 \times -4$

$= 20 > 0$

Et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2}$	$x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2}$
$x_1 = -1 - \sqrt{5}$	$x_2 = -1 + \sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}-1$		$\sqrt{5}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\cdot\sqrt{5}\cdot e^{-\sqrt{5}-1} + 2\cdot e^{-\sqrt{5}-1}$	$\searrow$	$2\cdot e^{\sqrt{5}-1} - 2\cdot\sqrt{5}\cdot e^{\sqrt{5}-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 28 : Etude de fonction exponentielle

f est la fonction définie sur $[1\,;3]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{2x}$$

Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout réel x appartenant à $[1\,;3]$,

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Avec $u(x) = e^x$ ainsi $u'(x) = e^x$

$v(x) = 2x$ ainsi $v'(x) = 2$

$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \frac{e^x 2x - 2e^x}{(2x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x(2x-2)}{(2x)^2}$

Comme pour tout réel appartenant à $[1\,;3]$, $e^x > 0$ et $(2x)^2 > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $2x - 2$.

On résout $2x - 2 = 0$

$x = 1$

x	1		3
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$\frac{e^3}{6}$

Exercice 27 : Etude de fonction exponentielle

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 5e^{-4,5x} + 6$$

Démontrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$g(x) = 5e^{u(x)} + 6$

Avec $u(x) = -4,5x$ ainsi $u'(x) = -4,5$

$g'(x) = 5u'(x)e^{u(x)} + 0$

$g'(x) = 5 \times -4,5e^{-4,5x}$

$g'(x) = -22,5e^{-4,5x}$

Comme pour tout réel, $e^{-4,5x} > 0$ ainsi $g'(x)$ est du signe de $-22,5 < 0$ ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29: Etude de fonction exponentielle

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

Dresser le tableau de variations de g.

Pour tout réel x,

$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

Avec $u(x) = x^2 + 2x$ ainsi $u'(x) = 2x + 2$

$v(x) = e^x$ ainsi $v'(x) = e^x$

$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$

$g'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x)}{(e^x)^2}$

$g'(x) = \frac{e^x\left(2x+2-(x^2+2x)\right)}{e^{2x}}$

$g'(x) = \frac{e^x(2x+2-x^2-2x)}{e^{2x}}$

$g'(x) = \frac{e^x(2-x^2)}{e^{2x}}$

Comme pour tout réel, $e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$ ainsi $g'(x)$ est du signe de $2 - x^2$.

On résout $2 - x^2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\cdot e^{\sqrt{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$2^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\sqrt{2}} + 2\cdot e^{-\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

Exercice 30 : Etude de fonction exponentielle et courbe

f est la fonction définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x) = e^{0{,}82x}$$

1. Dresser le tableau de variations de f.

Méthode 1 :
Comme $0{,}82 > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $[-3\,;3]$.

Méthode 2 :
$\boldsymbol{f'(x) = 0{,}82e^{0{,}82x} > 0}$

x	-3		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$e^{-2{,}46}$	$\nearrow$	$e^{2{,}46}$

2. A l'aide d'un tableau de valeur allant de -3 à 3 avec un pas de 1, tracer la courbe représentative de f.

Exercice 31 : Etude de fonction exponentielle et courbe

f est la fonction définie sur $[-3\,;1]$ par :

$$f(x) = (5-4x)e^{x}$$

1. Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout réel x,
$\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$
Avec $u(x) = 5-4x$ ainsi $u'(x) = -4$
$v(x) = e^{x}$ ainsi $v'(x) = e^{x}$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$\boldsymbol{f'(x) = -4e^{x} + e^{x}(5-4x)}$
$\boldsymbol{f'(x) = e^{x}(-4+5-4x)}$
$\boldsymbol{f'(x) = e^{x}(-4x+1)}$

Comme pour tout réel appartenant à $[-3\,;1]$ $e^{x} > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-4x+1$

On résout
$\boldsymbol{-4x+1 = 0}$
$\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$

x	-3		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$17\cdot e^{-3}$	$\nearrow$	$4\cdot e^{\frac{1}{4}}$	$\searrow$	e

2. A l'aide d'un tableau de valeur allant de -3 à 1 avec un pas de 1, tracer la courbe représentative de f.

Compétence : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle (après le chapitre 10 : Dérivation (3) – Variations)

Exercice 32 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (2+x)e^{x}$ et $g(x) = 2x\,e^{x}$.

On a tracé, ci-contre, trois courbes C_1, C_2 et C_3.
Parmi elles figure la représentation graphique de chacune des fonctions f et g.

1) $f(0)$ est égal à :

a) 0 **b) 2**   c) -2

$\boldsymbol{f(0) = (2+0)e^{0} = 2\times 1 = 2}$

2) La représentation graphique de la fonction g est :

a) C_1   b) C_2 c) C_3

La représentation graphique n'est pas une droite ; la seule courbe contenant le point O est C1. ($g(0) = 0$)

3) Pour tout nombre réel x, $g'(x)$ est égal à :

a) $2\,e^{x}$ **b) $(2x+2)\,e^{x}$**   c) $2+e^{x}$

D'après la formule, dérivée d'un produit : $g(x) = 2xe^{x} = u(x)v(x)$
avec $u(x) = 2x$ ainsi $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{x}$ ainsi $v'(x) = e^{x}$ donc :
$\boldsymbol{g'(x) = 2e^{x} + e^{x}2x = (2+2x)e^{x}}$

4) La fonction f est :

a) croissante sur $\mathbb{R}$ b) décroissante sur $\mathbb{R}$ **c) ni décroissante ni croissante sur $\mathbb{R}$**

D'après la formule, dérivée d'un produit : $f(x) = (2+x)e^{x} = u(x)v(x)$
avec $u(x) = 2+x$ ainsi $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{x}$ ainsi $v'(x) = e^{x}$ donc :
$\boldsymbol{f'(x) = 1e^{x} + e^{x}(2+x) = (3+x)e^{x}}$ **est du signe de $3+x$**

Pour $x < -3$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante ;
Pour $x > -3$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante.

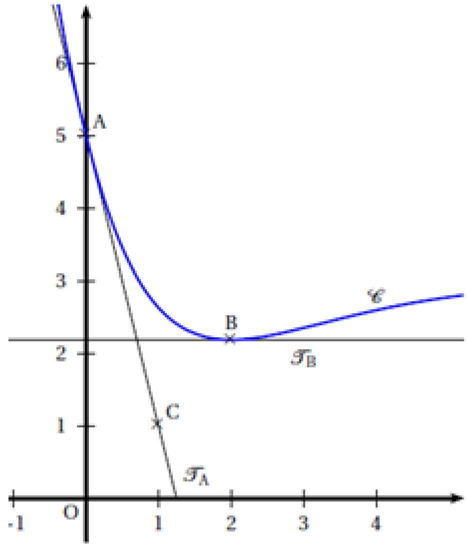
Exercice 33 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Dans tout l'exercice, on désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-contre une petite partie de la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthonormé du plan.

On note f ' la fonction dérivée de f.
La courbe C_f passe par le point $A\ (0\ ;\ 5)$ et par le point B d'abscisse 2.

La tangente T_A à la courbe au point A passe par le point $C\ (1\ ;\ 1)$ et la tangente T_B au point B est horizontale.



PARTIE A :

Dans ce questionnaire à choix multiples, aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La valeur de $f(0)$ est :

a) -4 b) 4 c) 1,2 **d) autre réponse**

$\boldsymbol{A(0\,;5)}$

2) La valeur de $f\,'(0)$ est :

a) -4 b) 4 c) 1,2 d) autre réponse

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite T_A (tangente en 0 de la courbe).
Par lecture graphique on lit : $f'(0) = -4$

3) La valeur de $f\,'(2)$ est :

a) 0 b) 2,1 c) 3 d) autre réponse

$f'(2)$ est le coefficient directeur de la droite T_B (tangente en 2 de la courbe).
Par lecture graphique on lit : $f'(2) = 0$ (droite horizontale)

PARTIE B : La fonction f représentée dans la PARTIE A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^{-x} + 3$$

On désigne par f ' la fonction dérivée de la fonction f et on admet que pour tout nombre réel x appartenant à $\mathbb{R}$, :

$$f'(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

1. Étudier le signe de $f\,'(x)$ suivant les valeurs de x.

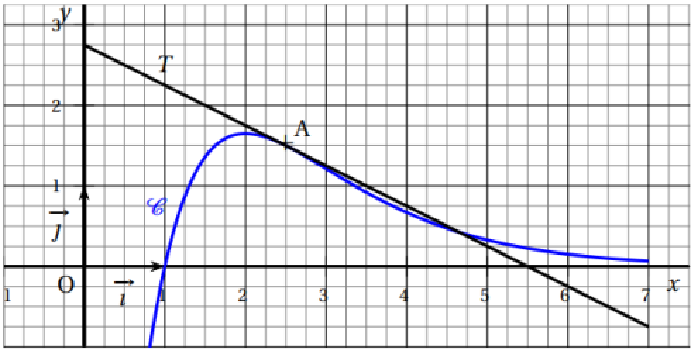
Sur $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 4$.
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$
On met le signe de "a" $= 1$ à l'extérieur des racines.

2. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$-\infty$	↗	$2e^2+3$	↘	$3-6e^{-2}$	↗	3

Exercice 34 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Sur le graphique ci-dessous, C_f est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Étude graphique

La droite T est tangente à C_f au point $A(2{,}5;\ 1{,}5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75.
Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$

$\boldsymbol{f(1) = 0}$

2. $f'(2{,}5)$

$f'(2,5)$ est le coefficient directeur de la droite T_A (tangente en 2,5 de la courbe).
Par lecture graphique on lit : $f'(2,5) = -\frac{1}{2}$

3. Une équation de la tangente T ;

On lit par lecture graphique que l'ordonnée à l'origine vaut : 2,75
Le coefficient directeur de T vaut $-0,5$ (voir question précédente).
$\boldsymbol{T : y = -0,5x + 2,75}$

Partie B - Étude algébrique

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)e^{-x+2{,}5}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = e^{2{,}5}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$.

$$e^{2,5}\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{xe^{2,5}}{e^x} - \frac{e^{2,5}}{e^x} = xe^{2,5-x} - e^{2,5-x} = (x-1)e^{-x+2,5} = f(x)$$

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

$\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$
Avec $u(x) = x - 1$ donc $u'(x) = 1$
Et $v(x) = e^{-x+2,5}$ donc $v'(x) = -e^{-x+2,5}$ (il faut penser à dériver $x \mapsto -x + 2,5$)
$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$\boldsymbol{f'(x) = 1e^{-x+2,5} - e^{-x+2,5}(x-1)}$
$\boldsymbol{f'(x) = e^{-x+2,5}(1-(x-1))}$
$\boldsymbol{f'(x) = e^{-x+2,5}(1-x+1)}$
$\boldsymbol{f'(x) = e^{-x+2,5}(-x+2)}$

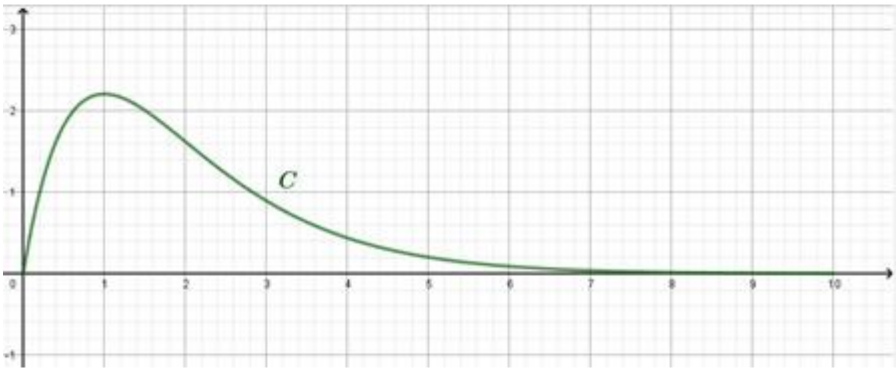
b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f.

$e^{-x+2,5} > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-x + 2$.
$-x + 2 > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{0,5}$	$\searrow$	0

Exercice 35 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L = milligramme par litre) peut être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :



$f(x) = \frac{6x}{e^x}$ où x est le temps exprimé en heure.

Sa courbe représentative ***C*** est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que pour tout $x \in [0; 10]$, la fonction dérivée de f, notée f', a pour expression :

$$f'(x) = \frac{6 - 6x}{e^x}.$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$$

$\boldsymbol{u(x) = 6x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = e^x}$

$\boldsymbol{u'(x) = 6}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = e^x}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6e^x - e^x \times 6x}{(e^x)^2}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x(6 - 6x)}{(e^x)^2}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{6 - 6x}{e^x}}$$

2. Étudier le signe de f' sur $[0; 10]$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.

Sur $[0\,;10]$, $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $6 - 6x$.

$\boldsymbol{6 - 6x = 0}$

$\boldsymbol{6x = 6}$

$\boldsymbol{x = 1}$

x	0		1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{6}{e}$	↘	$\frac{60}{e^{10}}$

3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

La concentration maximale du médicament dans le sang est $\frac{6}{e} \approx 2,2$ mg/L.

Elle est atteinte au bout d'une heure.

4. Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L.
   Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe *C*.

On a $f(1) > 2$. Le sportif peut donc être en infraction.

Graphiquement, on constate que $f(x) > 2$ sur l'intervalle $[0,6; 1,5]$ (valeurs approchées).

Le sportif ne peut donc pas être contrôle à tout moment.

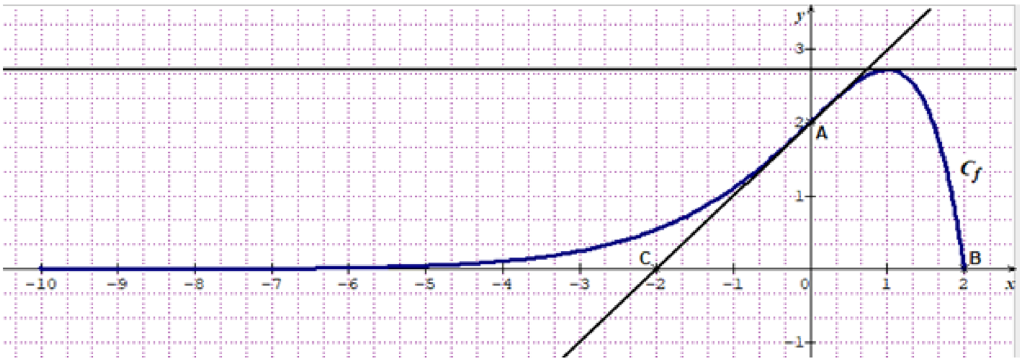
Exercice 36 : Modélisation à l'aide d'une fonction exponentielle

Dans le repère ci-dessous, on note C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;2]$.

On a placé dans ce repère les points $\mathrm{A}(0\,;2)$, $\mathrm{B}(2\,;0)$ et $\mathrm{C}(-2\,;0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe C_f.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer la valeur de $f'(1)$.

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale. donc $f'(1) = 0$

2. Donner une équation de la tangente à la courbe C_f au point A.

Graphiquement on lit : $y = x + 2$

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10\,;2]$ par $f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$.

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-10\,;2]$,
   $f'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^x$.

$$\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$$

$$\boldsymbol{u(x) = 2 - x} \qquad \boldsymbol{v(x) = e^x}$$

$$\boldsymbol{u'(x) = -1} \qquad \boldsymbol{v'(x) = e^x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = -e^x + e^x(2-x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = e^x(-1+2-x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = (-x+1)\mathrm{e}^x}$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;2]$.

Sur $[-10\,;2]$, $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-x+1$

$$\boldsymbol{-x+1 = 0}$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

x	-10		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$12\mathrm{e}^{-10}$	↗	e	↘	0

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point B.

$$\boldsymbol{f(2) = 0}$$

$$\boldsymbol{f'(2) = (-2+1)e^2 = -e^2}$$

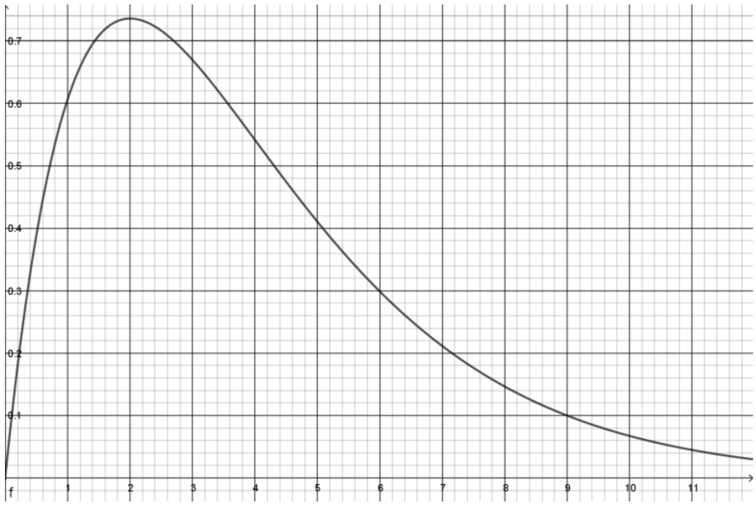
$$\boldsymbol{T : y = f'(2)(x-2) + f(2)}$$

$$\boldsymbol{y = -e^2(x-2)}$$

$$\boldsymbol{y = -e^2 x + 2e^2}$$

Exercice 37 : Modélisation à l’aide d’une fonction exponentielle

La concentration d’un médicament dans le sang en mg.L^{-1} au cours du temps t, exprimé en heure, est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=t\mathrm{e}^{-0,5t}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Calculer la valeur exacte de $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l’exercice.

$\boldsymbol{f(4)=4\mathrm{e}^{-0,5\times 4}=4e^{-2}}$	**La concentration du médicament dans le sang au bout de 4 heures est égale à $\boldsymbol{4e^{-2}\ mg\,.L^{-1}}$**

2. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $t\in[0;+\infty[$, $f'(t)=(1-0,5t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

$\boldsymbol{f(t)=u(t)v(t)}$

$\boldsymbol{u(t)=t}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v(t)=e^{-0,5t}}$

$\boldsymbol{u'(t)=1}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v'(t)=-0,5e^{-0,5t}}$

$\boldsymbol{f'(t)=u'(t)v(t)+v'(t)u(t)}$

$\boldsymbol{f'(t)=e^{-0,5t}-0,5e^{-0,5t}t}$

$\boldsymbol{f'(t)=(1-0,5t)e^{-0,5t}}$

3. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0;+\infty[$.

Sur $[0;+\infty[$ on a : $\boldsymbol{e^{-0,5t}>0}$ ainsi $\boldsymbol{f'(t)}$ est du signe de $\boldsymbol{1-0,5t}$

On résout $\boldsymbol{1-0,5t=0}$ et on sait que $\boldsymbol{f'(t)}$ sera du signe de $\boldsymbol{m=-0,5<0}$ à droite de la solution de l’équation.

$\boldsymbol{1-0,5t=0}$

$\boldsymbol{0,5t=1}$

$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{0,5}}$

$\boldsymbol{t=2}$

4. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	

5. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

La concentration maximale est atteinte au bout de 2 heures et vaut $2e^{-1}\approx\boldsymbol{0,74\ mg.L-1}$.