Chapitre : Second degré

Compétence : Fonction polynôme du second degré ou non ?

Exercice 1 : Fonction polynôme du second degré ou non ?

Dans chacun des cas suivants, on donne l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2. Si oui, préciser les coefficients a, b et c.

a. $f(x) = 4 - x^2 + x^3$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car il y a « x^3 ».

b. $f(x) = 7 - 2x$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car $a = 0$. C'est une fonction affine.

c. $f(x) = 3x - x^2$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = -1 \neq 0$; $b = 3$ et $c = 0$.

d. $f(x) = 5 - 2x^2 + 3x$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = -2 \neq 0$; $b = 3$ et $c = 5$.

e. $f(x) = 3(x+1)^2 - 4(2x-5)$

$\boldsymbol{f(x) = 3(x^2 + 2x + 1) - 8x + 20}$

$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 23}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 3 \neq 0$; $b = -2$ et $c = 23$.

f. $f(x) = (x+1)^2 + (x-2)^2$

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4}$

$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 2x + 5}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 2 \neq 0$; $b = -2$ et $c = 5$.

g. $f(x) = (2x+3)^2 - (2x-1)^2$

$\boldsymbol{f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 - 4x + 1)}$

$\boldsymbol{f(x) = 16x + 8}$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car $a = 0$. C'est une fonction affine.

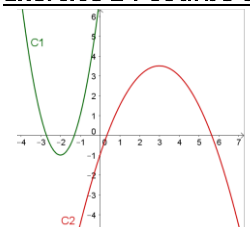
h. $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x, et

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 1 \neq 0$; $b = 0$ et $c = 1$.

Exercice 2 : Courbe et fonction trinôme



On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x^2 + 8x + 7$

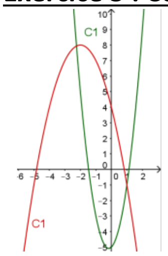
et celle de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 1$

Attribuer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative. Justifier.

$f(x) = 2x^2 + 8x + 7$ avec $a = 2 > 0$.
Donc la parabole est « tournée vers le haut ». f est donc représenté par C_1.
$g(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 1$ avec $a = -0{,}5 < 0$.
Donc la parabole est « tournée vers le bas ». g est donc représenté par C_2.

Exercice 3 : Courbe et fonction trinôme



On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x^2 - 5 + x$

et celle de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = -x^2 - 4x + 4$

Attribuer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative. Justifier.

$f(x) = 3x^2 - 5 + x$ avec $a = 3 > 0$.
Donc la parabole est « tournée vers le haut ». f est donc représenté par C_1.
$g(x) = -x^2 - 4x + 4$ avec $a = -1 < 0$.
Donc la parabole est « tournée vers le bas ». g est donc représenté par C_2.

Compétence : Forme canonique

Exercice 4 : Forme canonique

Ecrire sous forme canonique chacun des polynômes du second degré donnés.

a) $f(x) = 2x^2 + 12x - 5$

Méthode 1 :

$a = 2$; $b = 12$ et $c = -5$.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{4} = -3$

$\beta = f(-3)$
$= 2 \times (-3)^2 + 12 \times (-3) - 5$
$= -23$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = 2(x+3)^2 - 23.$

Méthode 2 :

On factorise par a les deux premiers termes :

$$f(x) = 2(x^2 + 6x) - 5$$

$x^2 + 6x$ est le début de l'identité remarquable :

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9.$

Ainsi :

$f(x) = 2\left((x+3)^2 - 9\right) - 5$

$f(x) = 2(x+3)^2 - 18 - 5$

$f(x) = 2(x+3)^2 - 23.$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

Méthode 1 :

$a = -1$; $b = -2$ et $c = 5$.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$

$\beta = f(-1)$
$= -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 5$
$= 6$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = -(x+1)^2 + 6.$

Méthode 2 :

On factorise par a les deux premiers termes :

$$f(x) = -(x^2 + 2x) + 5.$$

$x^2 + 2x$ est le début de l'identité remarquable :

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1.$

Ainsi :

$f(x) = -\left((x+1)^2 - 1\right) + 5$

$f(x) = -(x+1)^2 + 1 + 5$

$f(x) = -(x+1)^2 + 6.$

c) $f(x) = 7 - 2x - 8x^2$

Méthode 1 :

$a = -8$; $b = -2$ et $c = 7$.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$

$\beta = f\left(-\frac{1}{8}\right)$
$= -8 \times \left(-\frac{1}{8}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 7$
$= \frac{57}{8}$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = -8\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{57}{8}$

Méthode 2 :

On factorise par a les deux premiers termes :

$$f(x) = -8\left(x^2 + \frac{1}{4}x\right) + 7$$

$x^2 + \frac{1}{4}x$ est le début de l'identité remarquable :

$\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64}$

$x^2 + \frac{1}{4}x = \left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}.$

Ainsi :

$f(x) = -8\left(\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{64}\right) + 7$

$f(x) = -8\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} + \frac{56}{8}$

$f(x) = -8\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{57}{8}.$

d) $f(x) = x^2 + 6x$

Méthode 1 :

$a = 1$; $b = 6$ et $c = 0$.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3$

$\beta = f(-3)$
$= (-3)^2 + 6 \times (-3)$
$= -9$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = (x+3)^2 - 9$

Méthode 2 :

$x^2 + 6x$ est le début de l'identité remarquable :

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9.$

Ainsi :

$f(x) = (x+3)^2 - 9$

e) $f(x) = -x^2 + 2x + 16$

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
$\boldsymbol{a = -1}$; $\boldsymbol{b = 2}$ **et** $\boldsymbol{c = 16.}$ $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ $\beta = f(1)$ $\quad = -1^2 + 2 \times 1 + 16$ $\quad = 17$ $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $f(x) = -(x-1)^2 + 1$	**On factorise par a les deux premiers termes :** $f(x) = -(x^2 - 2x) + 16$ $x^2 - 2x$ **est le début de l'identité remarquable :** $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1.$ **Ainsi :** $f(x) = -\left((x-1)^2 - 1\right) + 16$ $f(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16$ $f(x) = -(x-1)^2 + 17.$

f) $f(x) = -x^2 - 2x - 17$

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
$\boldsymbol{a = -1}$; $\boldsymbol{b = -2}$ **et** $\boldsymbol{c = -17.}$ $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{-2} = -1$ $\beta = f(-1)$ $\quad = -(-1)^2 - 2 \times (-1) - 17$ $\quad = -16$ $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $f(x) = -(x+1)^2 - 16$	**On factorise par a les deux premiers termes :** $f(x) = -(x^2 + 2x) - 17$ $x^2 + 2x$ **est le début de l'identité remarquable :** $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1.$ **Ainsi :** $f(x) = -\left((x+1)^2 - 1\right) - 17$ $f(x) = -(x+1)^2 + 1 - 17$ $f(x) = -(x+1)^2 - 16.$

g) $f(x) = x^2 - 6x - 5$

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
$\boldsymbol{a = 1}$; $\boldsymbol{b = -6}$ **et** $\boldsymbol{c = -5.}$ $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$ $\beta = f(3)$ $\quad = 3^2 - 6 \times 3 - 5$ $\quad = -14$ $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $f(x) = (x-3)^2 - 14$	$x^2 - 6x$ **est le début de l'identité remarquable :** $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$ **Ainsi :** $f(x) = (x-3)^2 - 9 - 5$ $f(x) = (x-3)^2 - 14.$

h) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

On reconnait une identité remarquable : $f(x) = (x+3)^2$

i) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
$\boldsymbol{a = 1}$; $\boldsymbol{b = -6}$ **et** $\boldsymbol{c = 11.}$ $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$ $\beta = f(3)$ $\quad = 3^2 - 6 \times 3 + 11$ $\quad = 2$ $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $f(x) = (x-3)^2 + 2$	$x^2 - 6x$ **est le début de l'identité remarquable :** $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9.$ **Ainsi :** $f(x) = (x-3)^2 - 9 + 11$ $f(x) = (x-3)^2 + 2.$

Compétence : Coordonnées du sommet de la parabole d'une fonction polynôme du second degré et forme canonique

Exercice 5 : Forme canonique et tableau de variations

Déterminer en justifiant la réponse les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f proposée ainsi que le tableau de variations de f.

a. $f(x) = (x-3)^2 - 4$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = 3$ et $\beta = -4$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S(3\ ;\ -4)$.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;3]$ et croissante sur $[3\ ;\ +\infty[$.

b. $f(x) = -(x+3)^2 + 1$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1 < 0$, $\alpha = -3$ et $\beta = 1$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S(-3\ ;\ 1)$.
La fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;-3]$ et décroissante sur $[-3\ ;\ +\infty[$.

c. $f(x) = x^2 - 5$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -5$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S(0\ ;\ -5)$.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d. $f(x) = 3 - (x+1)^2$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1 < 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = 3$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S(-1\ ;\ 3)$.
La fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;-1]$ et décroissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$.

e. $f(x) = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 5$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1 < 0$, $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = 5$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S\left(\frac{3}{2}\ ;\ 5\right)$.
La fonction f est croissante sur $]-\infty\ ;\frac{3}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$.

f. $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{4}{3}$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = \frac{1}{3} > 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = -\frac{4}{3}$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ainsi $S\left(2\ ;\ -\frac{4}{3}\right)$.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;2]$ et croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

Compétence : Forme développée, forme factorisée et forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Exercice 6

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x - 6$

1. Montrer que $f(x) = (x-1)(x+6)$. $(x-1)(x+6)$ est la forme factorisée de f.

$\boldsymbol{(x-1)(x+6) = x^2 + 6x - x - 6 = x^2 + 5x - 6 = f(x)}$

2. Montrer que $f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$. $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$ est la forme canonique de f

$\boldsymbol{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{49}{4} = x^2 + 5x - \frac{24}{4} = x^2 + 5x - 6 = f(x)}$

3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :

   a. Calculer l'image de -6, de 0 et de $-\frac{5}{2}$

Pour -6, on utilise la forme factorisée : $f(-6) = (-6-1)(-6+6) = 0$.
Pour 0, on utilise la forme développée : $f(0) = 0^2 - 5 \times 0 - 6 = -6$.
Pour $-\frac{5}{2}$, on utilise la forme canonique : $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = -\frac{49}{4}$.

   b. résoudre l'équation $f(x) = 0$

On utilise la forme factorisée : $(x-1)(x+6) = 0$.
Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
$x - 1 = 0$ ou $x + 6 = 0$ c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -6$
$S = \{-6\,;1\}$

   c. résoudre l'équation $f(x) = -6$

On utilise la forme développée : $x^2 + 5x - 6 = -6$.
$x^2 + 5x = 0$ donc $x(x+5) = 0$
$x = 0$ ou $x + 5 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -5$
$S = \{-5\,;0\}$

   d. résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{4}$

On utilise la forme canonique : $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \frac{15}{4}$.
$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{64}{4}$ donc $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = 16$
$x + \frac{5}{2} = -4$ ou $x + \frac{5}{2} = 4$ c'est-à-dire $x = -\frac{13}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$
$S = \left\{-\frac{13}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}$

4. Déterminer les variation de la fonction f.

On utilise la forme canonique : $f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$
Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = -\frac{5}{2}$ et $\beta = -\frac{49}{4}$.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;-\frac{5}{2}]$ et croissante sur $[\frac{5}{2}\,;+\infty[$.

Exercice 7

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

1. Montrer que $f(x) = 2(x-2)(x+1)$

$\mathbf{2(x-2)(x+1) = 2\left(x^2 + x - 2x - 2\right) = 2\left(x^2 - x - 2\right) = 2x^2 - 2x - 4 = f(x)}$

2. Montrer que $f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$\mathbf{-\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 2x^2 + 2x - \frac{8}{4} = 2x^2 + 2x - 4 = f(x)}$

3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :

   a. Calculer l'image de -3, de 2 et de $\frac{1}{2}$

Pour -3, on utilise la forme factorisée : $f(-3) = 2 \times (-3-2)(-3+1) = 2 \times (-5) \times (-2) = 20$.
Pour 2, on utilise la forme factorisée : $f(2) = 2 \times (2-2)(2+1) = 0$.
Pour $\frac{1}{2}$, on utilise la forme canonique : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2}$.

   b. Calculer l'image de $\sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{5}$

Pour $\sqrt{3}$, on utilise la forme développée : $f(\sqrt{3}) = 2 \times \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} - 4 = 2 \times 3 - 2\sqrt{3} - 4 = 2 - 2\sqrt{3}$.
Pour $1 - \sqrt{5}$, on utilise la forme développée :

$$\begin{aligned} f(1-\sqrt{5}) &= 2(1-\sqrt{5})^2 - 2(1-\sqrt{5}) - 4 = 2(1 - 2\sqrt{5} + 5) - 2 + 2\sqrt{5} - 4 \\ &= 2 - 4\sqrt{5} + 10 - 2 + 2\sqrt{5} - 4 = 6 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

   c. résoudre l'équation $f(x) = 0$

On utilise la forme factorisée : $2(x-2)(x+1) = \mathbf{0}$.
Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.
$x - 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$ c'est-à-dire $x = 2$ ou $x = -1$
$\boldsymbol{S = \{-1\,;2\}}$

   d. résoudre l'équation $f(x) = -4$

On utilise la forme développée : $2x^2 - 2x - 4 = \mathbf{-4}$.
$2x^2 - 2x = 0$ donc $2x(x-1) = 0$
$2x = 0$ ou $x - 1 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 1$
$\boldsymbol{S = \{0\,;1\}}$

   e. résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$

On utilise la forme canonique : $-\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.
$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{2}$ donc $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2$
$x - \frac{1}{2} = -\sqrt{2}$ ou $x - \frac{1}{2} = \sqrt{2}$ c'est-à-dire $x = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ ou $x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{S = \left\{-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\,;\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right\}}$

4. Déterminer les variation de la fonction f.

On utilise la forme canonique : $f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2 > 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{9}{2}$.
La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.

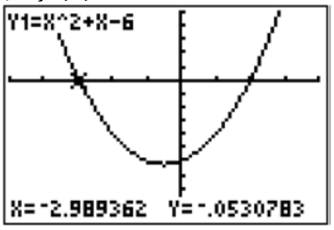
Compétence : Equation du second degré

Exercice 8 : Résolution graphique (calculatrice)

a

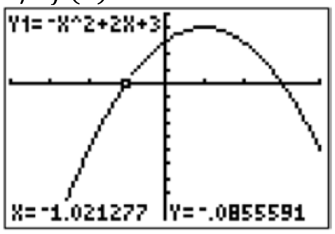
Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f, puis résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$.

a) $f(x)=x^2+x-6$



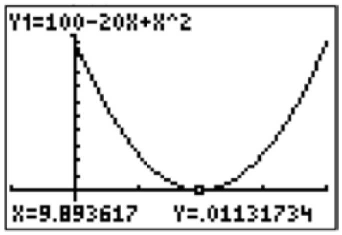
$\boldsymbol{S=\{-3\,;2\}}$.

b) $f(x)=-x^2+2x+3$



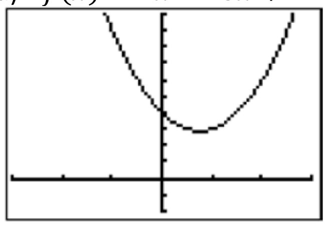
$\boldsymbol{S=\{-1\,;3\}}$.

c) $f(x)=100-20x+x^2$



$\boldsymbol{S=\{10\}}$.

d) $f(x)=2x^2-3x+4$



$\boldsymbol{S=\emptyset}$.

Exercice 9 : Sans discriminant

Dans chacun des cas, résoudre l'équation $f(x)=0$.

b) $f(x)=25-4x^2$

C'est une identité remarquable : $\boldsymbol{f(x)=(5-2x)(5+2x)}$ **Formule :** $\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$\boldsymbol{f(x)=0 \Leftrightarrow (5-2x)(5+2x)=0 \Leftrightarrow 5-2x=0}$ **ou** $\boldsymbol{5+2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}}$ **ou** $\boldsymbol{x=-\frac{5}{2}}$.

$\boldsymbol{S=\left\{-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right\}}$.

c) $f(x)=2x^2-8x$

On factorise par $\boldsymbol{x}$ **:** $\boldsymbol{f(x)=2x(x-4)}$

$\boldsymbol{f(x)=0 \Leftrightarrow 2x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0}$ **ou** $\boldsymbol{x-4=0 \Leftrightarrow x=0}$ **ou** $\boldsymbol{x=4}$. $\boldsymbol{S=\{0\,;4\}}$.

d) $f(x)=(x-2)^2-49$

$\boldsymbol{f(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-49=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=49 \Leftrightarrow x-2=-7}$ **ou** $\boldsymbol{x-2=7 \Leftrightarrow x=-5}$ **ou** $\boldsymbol{x=9}$.

$\boldsymbol{S=\{-5\,;9\}}$.

e) $f(x)=(x+3)^2$

L'équation $\boldsymbol{(x+3)^2=0}$ **a pour solution** $\boldsymbol{x=-3}$. $\boldsymbol{S=\{-3\}}$.

f) $f(x)=(x+1)(2x+3)$

$(x+1)(2x+3)=\boldsymbol{0 \Leftrightarrow x=-1}$ **ou** $\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$. $\boldsymbol{S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,-1\right\}}$.

Exercice 10 : Discriminant

Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	c	ax^2+bx+c	$\Delta=b^2-4ac$	$(*)$
1	4	3	$\boldsymbol{x^2+4x+3}$	$\boldsymbol{\Delta=4^2-4\times1\times3=4>0}$	**2 solutions réelles**
3	-2	1	$\boldsymbol{3x^2-2x^2+1}$	$\boldsymbol{\Delta=(-2)^2-4\times3\times1=-8<0}$	**Aucune solution réelle**
-2	1	3	$\boldsymbol{-2x^2+x+3}$	$\boldsymbol{\Delta=1^2-4\times(-2)\times3=25>0}$	**2 solutions réelles**
3	0	1	$\boldsymbol{3x^2+1}$	$\boldsymbol{\Delta=0^2-4\times3\times1=-12<0}$	**Aucune solution réelle**
2	1	0	$\boldsymbol{2x^2+x}$	$\boldsymbol{\Delta=1^2-4\times2\times0=1>0}$	**2 solutions réelles**
0	2	-1	$\boldsymbol{2x-1}$	**Fonction affine.**	

Exercice 11 : Discriminant

Compléter le tableau ci-dessous :

ax^2+bx+c	a	b	c	$\Delta=b^2-4ac$	$(*)$
x^2+3x+5	**1**	**3**	**5**	$\boldsymbol{\Delta=3^2-4\times1\times5=-11<0}$	**Aucune solution réelle**
$-3x^2+x-1$	$\boldsymbol{-3}$	**1**	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{\Delta=1^2-4\times(-3)\times(-1)=-11<0}$	**Aucune solution réelle**
$-x^2-2x+5$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-2}$	**5**	$\boldsymbol{\Delta=(-2)^2-4\times(-1)\times5=24>0}$	**2 solutions réelles**
$2x^2+8x-1$	**2**	**8**	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{\Delta=8^2-4\times2\times(-1)=72>0}$	**2 solutions réelles**
$2x^2-7$	**2**	**0**	$\boldsymbol{-7}$	$\boldsymbol{\Delta=0^2-4\times2\times(-7)=56>0}$	**2 solutions réelles**
$-3x^2+2x$	$\boldsymbol{-3}$	**2**	**0**	$\boldsymbol{\Delta=2^2-4\times(-3)\times0=4>0}$	**2 solutions réelles**

Exercice 12 : Equation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$

$a = 5$; $b = -4$ et $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 36 > 0$

L'équation admet donc deux solutions réelles et :

$\sqrt{\Delta} = 6$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 = \frac{4-6}{10}$; $x_1 = \frac{-2}{10}$; $x_1 = -\frac{1}{5}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{4+6}{10}$; $x_2 = \frac{10}{10}$; $x_2 = 1$

$$S = \left\{-\frac{1}{5} ; 1\right\}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x - 1)$$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

$a = 1$; $b = 6$ et $c = 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$

L'équation admet donc deux solutions réelles et :

$\sqrt{\Delta} = 4$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 = \frac{-6-4}{2}$; $x_1 = \frac{-10}{2}$; $x_1 = -5$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-6+4}{2}$; $x_2 = \frac{-2}{2}$; $x_2 = -1$

$$S = \{-5 ; -1\}$$

$$f(x) = (x + 5)(x + 1)$$

c) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

$a = -1$; $b = -3$ et $c = 4$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 25 > 0$

L'équation admet donc deux solutions réelles et :

$\sqrt{\Delta} = 5$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 = \frac{3-5}{-2}$; $x_1 = \frac{-2}{-2}$; $x_1 = 1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{3+5}{-2}$; $x_2 = \frac{8}{-2}$; $x_2 = -4$

$$S = \{-4 ; 1\}$$

$$f(x) = -(x + 4)(x - 1)$$

d) $f(x) = x^2 - 6x$

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x - 6) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 6.$$

$S = \{0 ; 6\}$.

$$f(x) = x(x - 6)$$

e) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Méthode 1 :

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x + 3)^2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

$S = \{-3\}$.

$$f(x) = (x + 3)^2$$

Remarque : on reconnait une identité remarquable.

Méthode 2 :

$\Delta = \cdots = 0$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$
$$\alpha = -\frac{6}{2}$$
$$\alpha = -3$$

On retrouve $S = \{-3\}$.

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$
$$f(x) = (x + 3)^2$$

f) $f(x) = 5x^2 + 6x + 1$

$a = 5$; $b = 6$ et $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 5 \times 1 = 16 > 0$

L'équation admet donc deux solutions réelles et :

$\sqrt{\Delta} = 4$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 = \frac{-6-4}{10}$; $x_1 = \frac{-10}{10}$; $x_1 = -1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-6+4}{10}$; $x_2 = \frac{-2}{10}$; $x_2 = -\frac{1}{5}$

$$S = \left\{-1 ; -\frac{1}{5}\right\}$$

$$f(x) = 5(x + 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$$

g) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

Méthode 1 :

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$-(x - 2)^2 = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

$S = \{2\}$.

$$f(x) = -(x - 2)^2$$

Méthode 2 :

$\Delta = \cdots = 0$

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$
$$\alpha = -\frac{4}{-2}$$
$$\alpha = 2$$

On retrouve $S = \{-3\}$.

$$f(x) = a(x - \alpha)^2$$
$$f(x) = -(x - 2)^2$$

h) $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$

Méthode 1 : **On reconnait une identité remarquable :**

$$-4x^2 + 12x - 9 = 0$$
$$-(2x-3)^2 = 0$$
$$2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Méthode 2 : $\Delta = \cdots = 0$

$$\alpha = \frac{-b}{2a}$$
$$\alpha = \frac{-12}{-8}$$
$$\alpha = \frac{3}{2}$$
$$f(x) = a(x-\alpha)^2$$
$$f(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

i) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

$a = 1$; $b = -3$ et $c = 4$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$
L'équation n'admet pas de solution réelle.
$f(x)$ ne peut pas se factoriser.

j) $f(x) = x^2 - 9$

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x-3)(x+3) = 0$$
$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

$S = \{-3\,;3\}$.

$$f(x) = (x+3)(x-3)$$

k) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$

$a = 2$; $b = -3$ et $c = 7$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 7 = -47 < 0$
L'équation n'admet pas de solution réelle.
$f(x)$ ne peut pas se factoriser.

l) $f(x) = x^2 - x$

$$x^2 - x = 0$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$S = \{0\,;1\}$.

$$f(x) = x(x-1)$$

m) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Déjà fait dans le e)

n) $f(x) = 4x^2 + 8x$

$$4x^2 + 8x = 0$$
$$4x(x+2) = 0$$
$$4x = 0 \text{ ou } x + 2 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = -2$$
$$S = \{-2\,;0\}$$

$$f(x) = 4x(x+2)$$

o) $f(x) = 16x^2 - 25$

On reconnait une identité remarquable :

$$f(x) = (4x-5)(4x+5)$$
$$f(x) = 16\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right)$$

Ainsi $x_1 = \frac{5}{4}$ **et** $x_2 = -\frac{5}{4}$.

Exercice 13 : Equation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 3x = -3$

$$x^2 - 3x = -3$$
$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$a = 1$; $b = -3$ et $c = 3$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$
L'équation n'admet pas de solution réelle.

b) $(x-5)(2+x) = 15$

$$(x-5)(2+x) = 15$$
$$2x + x^2 - 10 - 5x = 0$$
$$x^2 - 3x - 10$$

$a = 1$; $b = -3$ et $c = -10$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) = 49 > 0$
L'équation admet donc deux solutions réelles et :
$\sqrt{\Delta} = 7$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{3-7}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{3+7}{2}$

$x_1 = \frac{-4}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{10}{2}$

$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = 5$

$$S = \{-2; 5\}$$

c) $7x^2 = 2x$

$7x^2 = 2x \Leftrightarrow 7x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(7x-2) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0$ **ou** $x = \frac{2}{7}$.
$S = \left\{0\,;\frac{2}{7}\right\}$.

d) $x^2 = 3x$

$x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ou $x = 3$.
$S = \{0\,;3\}$.

Compétence : Factorisation

Exercice supplémentaire : Factorisation

Donner les racines du polynôme du second degré donné, puis le factoriser.

a) $A(x) = -x^2 + 2x + 15$

$\boldsymbol{a = -1}$; $\boldsymbol{b = 2}$ **et** $\boldsymbol{c = 15}$.

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64 > 0}$

$\boldsymbol{C}$ **admet donc deux racines réelles et :**

$\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 8.}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-2-8}{-2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-2+8}{-2}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-10}{-2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{6}{-2}}$

$\boldsymbol{x_1 = 5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = -3}$

$\boldsymbol{C(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

$\boldsymbol{C(x) = -(x - 5)(x + 3)}$

b) $B(x) = x^2 + 18x + 77$

$\boldsymbol{a = 1}$; $\boldsymbol{b = 18}$ **et** $\boldsymbol{c = 77}$.

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \times 1 \times 77 = 16 > 0}$

$\boldsymbol{D}$ **admet donc deux racines réelles et :**

$\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 4.}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-18-4}{2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-18+4}{2}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-22}{2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-14}{2}}$

$\boldsymbol{x_1 = -11}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = -7}$

$\boldsymbol{C(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

$\boldsymbol{C(x) = (x + 11)(x + 7)}$

c) $C(x) = 2x^2 - 7x + 8$

$\boldsymbol{a = 2}$; $\boldsymbol{b = -7}$ **et** $\boldsymbol{c = 8}$.

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 8 = -15 < 0}$

$\boldsymbol{E}$ **n'admet pas de racine réelle.**

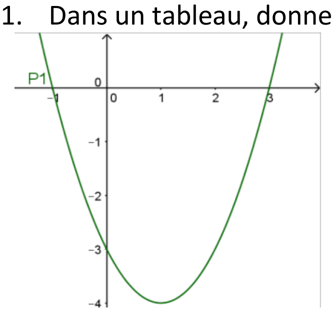
$\boldsymbol{E}$ **ne peut donc pas se factoriser.**

Compétence : Signe de $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$

Exercice 14 : Lecture graphique du signe

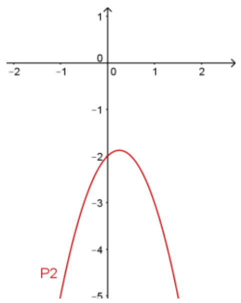
f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.

1. Dans un tableau, donner le signe de $f(x)$.



x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Dans un tableau donner le signe de $g(x)$



x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	

Exercice 15 : Application du cours

1. Le polynôme $x^2 + 2x - 35$ a pour racines 5 et -7. Donner le signe de $x^2 + 2x - 35$.

x	$-\infty$		-7		5		$+\infty$
$x^2+2x-35$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{a > 0}$

2. Le polynôme $x^2 + 2x + 11$ n'a pas de racine. Donner le signe de $x^2 + 2x + 11$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2+2x+11$		$+$	

$\boldsymbol{a > 0}$

3. Le polynôme $-6x^2 - 24x + 270$ a pour racines -9 et 5. Donner le signe de $-6x^2 - 24x + 270$.

x	$-\infty$		-9		5		$+\infty$
$-6x^2-24x+270$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{a < 0}$

4. Le polynôme $-7x^2 - 14x - 7$ a pour unique racine -1. Donner le signe de $-7x^2 - 14x - 7$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-7x^2-14x-7$		$-$	0	$-$	

$\boldsymbol{a < 0}$

Exercice 16 : Signe d'un produit

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$.

a) $f(x) = (x-2)(x+3)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = 2x(x-5)$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $f(x) = (7-x)(1+x)$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$7-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $f(x) = (x+5)(3-x)$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 17 : Signe de $ax^2 + bx + c$

Etudier le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$ selon les valeurs de x.

a) $f(x) = -x^2 - 5x + 14$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = 81 > 0$

Les racines sont 2 et -7.

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = -4 < 0$

Il n'y a pas de racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

c) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

$a = 9 > 0$ et $\Delta = 0$

L'unique racine double est $\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = 1 > 0$

Les racines sont 2 et 1.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = 0$

L'unique racine double est 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

f) $f(x) = -x^2 + x - 2$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = -7 < 0$

Il n'y a pas de racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

g) $f(x) = x - x^2 + 2$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = 9 > 0$

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 2.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

h) $f(x) = -100x^2 - 20x - 1$

$a = -100 < 0$ et $\Delta = 0$

L'unique racine double est $-\frac{1}{10}$.

x	$-\infty$		$-0{,}1$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

i) $f(x) = 5x^2 - 4x$

$a = 5 > 0$ et $f(x) = x(5x-4)$

Les racines sont 0 et $\frac{4}{5}$.

x	$-\infty$		0		$0{,}8$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

j) $f(x) = -x^2 + 121$

$a = -1 < 0$ et

$f(x) = (11-x)(11+x)$

Les racines sont 11 et -11.

x	$-\infty$		-11		11		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

k) $f(x) = x(1-x) - 2$

$f(x) = -x^2 + x - 2$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = -7 < 0$

Il n'y a pas de racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

l) $f(x) = -3x - (x^2 - 4)$

$f(x) = -x^2 - 3x + 4$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = 25 > 0$

Les racines sont -4 et 1.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice supplémentaire :

m) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$

$a = 5 > 0$ et $\Delta = 36 > 0$

Les racines sont $-\frac{1}{5}$ et 1.

x	$-\infty$		$-0{,}2$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

n) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

$a = -1 < 0$ et $\Delta = 1 > 0$

Les racines sont 3 et 4.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

o) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = 9 > 0$

Les racines sont 1 et 4.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

p) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

$a = 2 > 0$ et $\Delta = 9 > 0$

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 1.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

q) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

$a = 2 > 0$ et $\Delta = -7 < 0$

Il n'y a pas de racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

r) $f(x) = 2x^2 - 9x - 5$

$a = 2 > 0$ et $\Delta = 121 > 0$

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 5.

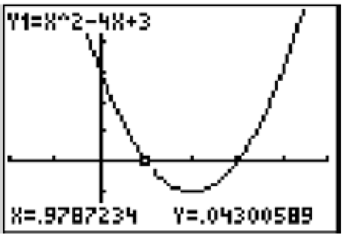
x	$-\infty$		$-0{,}5$		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Compétence : Inéquations du second degré

Exercice 18 : Inéquation et calculatrice

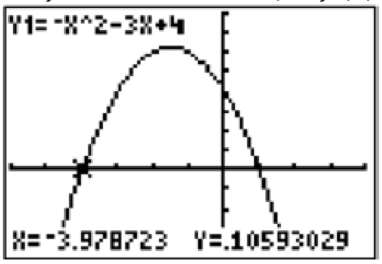
Avec la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f, puis donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.



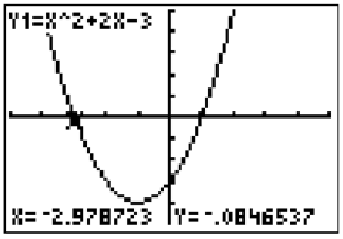
$\boldsymbol{S =]-\infty\,;1[\cup]3\,;\,+\infty[}$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.



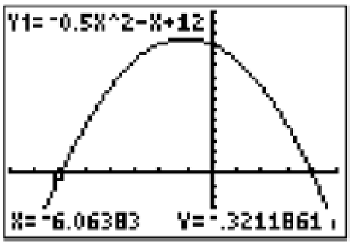
$\boldsymbol{S =]-4\,;1[}$

3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



$\boldsymbol{S =]-\infty\,;-3[\cup]1\,;\,+\infty[}$

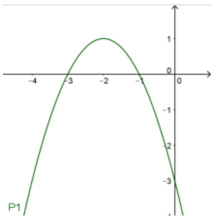
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 12$.

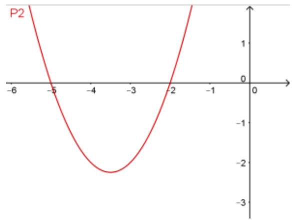


$\boldsymbol{S =]-6\,;4[}$

Exercice 19 : Lecture graphique

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.





1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x) > 0$	$\boldsymbol{S =]-3\,;\,-1[}$
$f(x) \geq 0$	$\boldsymbol{S = [-3\,;\,-1]}$
$f(x) < 0$	$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-3[\cup]-1\,;\,+\infty[}$
$f(x) \leq 0$	$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-3] \cup [-1\,;\,+\infty[}$

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$g(x) > 0$	$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-5[\cup]-2\,;\,+\infty[}$
$g(x) \geq 0$	$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-5] \cup [-2\,;\,+\infty[}$
$g(x) < 0$	$\boldsymbol{S =]-5\,;\,-2[}$
$g(x) \leq 0$	$\boldsymbol{S = [-5\,;\,-2]}$

Exercice 20 (supplémentaire) : Inéquations du second degré

Etudier le signe de $f(x)$. En déduire l'ensemble des solution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

$a = 2 > 0$ et $\Delta = 64 > 0$. Les racines sont -3 et 1.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{S = [-3\,;1]}$

2. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

$a = -1 < 0$ et $f(x) = -(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

$\boldsymbol{S = \mathbb{R}}$

3. $f(x) = -4x^2 + 49$

$a = -4 < 0$ et $f(x) = (7-2x)(7+2x)$

x	$-\infty$		$-3{,}5$		$3{,}5$		$+\infty$
$7-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$7+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{S =]-\infty\,;-\frac{7}{2}] \cup [\frac{7}{2}\,;\,+\infty[}$

Exercice 21 : Inéquations du second degré

Etudier le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$ selon les valeurs de x.

a) $(-3x+1)(x-2) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-3x+1$		+	0	−		−	
$x-2$		−		−	0	+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	

$S =]\frac{1}{3}\,;2[$

b) $(2+5x)(1-x) \geq 0$

x	$-\infty$		$-0{,}4$		1		$+\infty$
$1-x$		+		+	0	−	
$2+5x$		−	0	+		+	
$(2+5x)(1-x)$		−	0	+	0	−	

$S = \left[-\frac{2}{5}\,;1\right]$

c) $x^2+12x+35 < 0$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = 4 > 0$.

Les racines sont -7 et -5.

x	$-\infty$		-7		-5		$+\infty$
$x^2+12x+35$		+	0	−	0	+	

$S =]-7\,;\,-5[$

d) $-2x^2+x+15 \leq 0$

$a = -2 < 0$ et $\Delta = 121 > 0$.

Les racines sont 3 et $-\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$-2{,}5$		3		$+\infty$
$-2x^2+x+15$		−	0	+	0	−	

$S =]-\infty\,;\,-\frac{5}{2}] \cup [3\,;\,+\infty[$

e) $5x^2-25x \geq 0$

$5x^2-25x \geq 0 \Leftrightarrow 5x(x-5) \geq 0$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5x$		−	0	+		+	
$x-5$		−		−	0	+	
$5x^2-25x$		+	0	−	0	+	

$S =]-\infty\,;0] \cup [5\,;\,+\infty[$

f) $x^2-14x+49 \geq 0$

$x^2-14x+49 \geq 0 \Leftrightarrow (x+7)^2 \geq 0$

C'est toujours vrai, ainsi $S = \mathbb{R}$.

g) $x^2-3x < 0$

$x^2-3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		−	0	+		+	
$x-3$		−		−	0	+	
$x(x-3)$		+	0	−	0	+	

$S =]0\,;3[$

h) $-2x^2-2x+12 > 0$

$a = -2 < 0$ et $\Delta = 100 > 0$.

Les racines sont 2 et -3.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$-2x^2-2x+12$		−	0	+	0	−	

$S =]-3\,;\,2[$

i) $3x^2-5x \geq -2$

$3x^2-5x \geq -2 \Leftrightarrow 3x^2-5x+2 \geq 0$

$a = 3 > 0$ et $\Delta = 1 > 0$.

Les racines sont 1 et $\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		+	0	−	0	+	

$S =]-\infty\,;\frac{2}{3}] \cup [1\,;\,+\infty[$

j) $(1+x)(x-2) < 4$

$(1+x)(x-2) < 4 \Leftrightarrow x^2-x-6 < 0$

$a = 1 > 0$ et $\Delta = 25 > 0$.

Les racines sont -2 et 3.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	0	−	0	+	

$S =]-2\,;3[$

k) $13x-(9x^2+4) \geq 0$

$13x-\left(9x^2+4\right) \geq 0 \Leftrightarrow -9x^2+13x-4 \geq 0$

$a = -9 < 0$ et $\Delta = 25 > 0$.

Les racines sont 1 et $\frac{4}{9}$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{9}$		1		$+\infty$
$-9x^2+13x-4$		−	0	+	0	−	

$S = \left[\frac{4}{9}\,;1\right]$

l) $x(x-3) < 9-3x$

$x(x-3) < 9-3x \Leftrightarrow x^2-3x < 9-3x \Leftrightarrow x^2 < 9$

$S = [-3\,;3]$ (voir cours de seconde).

m) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x+2}\geq -1$

Pour tout $x\neq 3$ et $x\neq -2$:

$$\frac{2(x+2)}{(x-3)(x+2)}-\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+2)}\geq -1$$

$$\frac{2x+4-3x+9}{x^2+2x-3x-6}+1\geq 0$$

$$\frac{-x+13}{x^2-x-6}+\frac{x^2-x-6}{x^2-x-6}\geq 0$$

$$\frac{x^2-2x+7}{x^2-x-6}\geq 0$$

Il faut étudier le signe du numérateur et du dénominateur…

- **On étudie le signe de x^2-2x+7**
  $\Delta=b^2-4ac=\cdots=-24<0$
  $x^2-2x+7>0$ **(signe de $a>0$)**
- **Pour tout $x\neq 3$ et $x\neq -2$:**
  On étudie le signe de x^2-x-6
  On sait que $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$
  Les racines sont donc $x_1=-2$ et $x_2=3$
  (valeurs interdites !!!)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-2x+7				$+$			
$x+2$		$-$	0	$+$			
$x-3$				$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-2x+7}{x^2-x-6}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

n) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x}\leq\frac{3x^2-1}{x^2-x}$

On travaille à priori pour tout $x\neq 0$ et $x\neq 1$:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x}\leq\frac{3x^2-1}{x^2-x}$$

$$\frac{2x}{x(x-1)}+\frac{3(x-1)}{x(x-1)}-\frac{3x^2-1}{x^2-x}\leq 0$$

$$\frac{2x+3x-3-3x^2+1}{x^2-x}\leq 0$$

$$\frac{-3x^2+5x-2}{x^2-x}\leq 0$$

- **On étudie le signe de $-3x^2+5x-2$**
  $\Delta=b^2-4ac=25-24=1>0$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-5-1}{-6}$ $\qquad$ $x_2=\frac{-5+1}{-6}$

$x_1=1$ $\qquad$ $x_2=\frac{2}{3}$

On remarque que :

$$-3x^2+5x-2=-3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

Ainsi $P(x)=\frac{-3x^2+5x-2}{x^2-x}=\frac{-3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x(x-1)}=\frac{-3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{x}$

1 qu'on avait exclu du domaine de solution de l'équation n'est finalement plus une valeur interdite…

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\left(x-\frac{2}{3}\right)$			$+$		0	$-$	
x		$-$	0	$+$			
$-\frac{3x-2}{x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

<u>**Inéquation supplémentaire :**</u>

n) $-3x^2+2x+1>0$

$a=-3<0$ et $\Delta=16>0$.

Les racines sont 1 et $\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$-3x^2+2x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left]-\frac{1}{3}\,;1\right[$$

o) $-3x^2+7x-4<0$

$a=-3<0$ et $\Delta=1>0$.

Les racines sont $\frac{4}{3}$ et 1.

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x^2+7x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=]-\infty\,;\,1[\cup]\frac{4}{3}\,;\,+\infty[$$

Exercice 22 : Inéquations

a) Etudier le signe de $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

$\boldsymbol{\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0}$

Le polynôme admet deux racines réelles : -3 et $\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de P(x)		+	0	−	0	+	

Signe de $a = 2 > 0$ à l'extérieur des racines.

b) Etudier le signe de $Q(x) = -x^2 + 4x - 15$.

$\boldsymbol{\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-15) = 16 - 60 = -44 < 0}$

Le polynôme n'admet aucune racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de Q(x)		−	

Signe de $a = -1 < 0$ sur tous les réels.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(2x^2 + 5x - 3)(x+5)}{(-x^2 + 4x - 15)} \geq 0$$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$x+5$		−	0	+	

Il suffit ensuite de « superposer » les 3 tableaux dans l'ordre suivant : $P(x)$ puis $(x+5)$ puis $Q(x)$, on obtient à la fin (voir exemple d'inéquations quotients) :

x	$-\infty$		-5		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\frac{(x+5)(2x^2+5x-3)}{-x^2+4x-15}$		+	0	−	0	+	0	−	

$$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-5] \cup [-3\,;\,\tfrac{1}{2}]}$$

Exercice 23 : Positions relatives

Déterminer les positions relatives des paraboles $\mathcal{P}_f$ et $\mathcal{P}_g$ représentant les fonctions f et g définies par :

$f(x) = x^2 + 5x + 4$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 20$

On étudie le signe de $f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 + 5x + 4 - (-2x^2 - 3x + 20) \\ &= x^2 + 5x + 4 + 2x^2 + 3x - 20 \\ &= 3x^2 + 8x - 16 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times (-16) = 64 + 192 = 256 > 0}$ **et** $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 16}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f(x)-g(x)		+	0	−	0	+	

Signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

Ainsi $f(x) - g(x) < 0$ sur $]-4\,;\frac{4}{3}[$ c'est-à-dire $f(x) < g(x)$ sur $]-4\,;\frac{4}{3}[$ ainsi $\mathcal{P}_f$ est en dessous de $\mathcal{P}_g$ sur $]-4\,;\frac{4}{3}[$ et au-dessus sur $]-\infty\,;\,-4[\cup]\frac{4}{3}\,;\,+\infty[$.

Exercice 24 :

1) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, $B(-3\ ;\ 0)$ et $C\left(\frac{5}{2} ;\ 22\right)$.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$
D'après les points A et B : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -3$ sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
On obtient donc : $f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$
$f(x) = a\left(x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)$
$f(x) = a\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$
$f(x) = ax^2 + \frac{5}{2}ax - \frac{3}{2}a$
$C \in \mathscr{P}$ ainsi $f\left(\frac{5}{2}\right) = 22$
$a \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}a \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2}a = 22$
$\frac{25}{4}a + \frac{25}{4}a - \frac{6}{4}a = 22$
$\frac{44}{4}a = 22$
$11a = 22$
$a = 2$
Ainsi $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

Ainsi la parabole passant par les points A, B et C a pour unique équation $y = 2x^2 + 5x - 3$.

2) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $D\ (\ 0\ ;\ 1\ )$, $E\ (\ 2\ ;\ 1\ )$ et $F\ (\ -3\ ;\ 31\ )$.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$
$D\ (\ 0\ ;\ 1\ )$donc $c = 1$
$E\ (\ 2\ ;\ 1\ )$ donc $1 = a \times 2^2 + b \times 2 + 1$ ainsi $4a + 2b + 1 = 1$ ainsi $4a + 2b = 0$
$F\ (\ -3\ ;\ 31\ )$.donc $31 = a \times (-3)^2 + b \times (-3) + 1$ ainsi $9a - 3b + 1 = 31$ ainsi $9a - 3b = 30$
Il faut donc résoudre le système suivant :
$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 9a - 3b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 9a - 3 \times (-2a) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 9a + 6a = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 15a = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \times 2 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 2 \end{cases}$
Ainsi la parabole admet une équation de la forme $y = 2x^2 - 4x + 1$.

3) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui coupe l'axe des abscisses en $M\ (\ 1\ ;\ 0\ )$ et $N\ (\ 3\ ;\ 0\ )$ et qui a pour sommet un point d'ordonnée 3.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$
D'après les points A et B : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
On obtient donc : $f(x) = a(x - 1)(x - 3)$
$f(x) = a(x^2 - 3x - x + 3)$
$f(x) = a(x^2 - 4x + 3)$
$f(x) = ax^2 - 4ax + 3a$
Par identification, on obtient $b = -4a$ et $c = 3a$.
Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = \frac{4a}{2a} = 2$.
$S(2\ ; 3) \in \mathscr{P}$ ainsi $f(2) = 3$
$a \times (2)^2 - 4a \times 2 + 3a = 3$
$4a - 8a + 3a = 3$
$-a = 3$
$a = -3$
Ainsi $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.
Ainsi la parabole passant par les points A, B et C a pour unique équation $y = -3x^2 + 12x - 9$.

4) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui est tangente à l'axe des abscisses en $Q\ (\ 2\ ;\ \ 0\ )$ et qui passe par $R\ (\ 1\ ;\ -2\ )$.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$
La parabole est tangente à l'axe des abscisses en $Q\ (\ 2\ ;\ \ 0\ )$ ainsi Q est le sommet de la parabole et 2 est l'unique solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On aura donc $\Delta = 0$.
On obtient donc : $f(x) = a(x-2)^2$
$f(x) = a(x^2 - 4x + 4)$
$f(x) = ax^2 - 4ax + 4a$
$R(1\,;-2) \in \mathscr{P}$ ainsi $f(1) = -2$
$a \times 1^2 - 4a \times 1 + 4a = -2$
$a - 4a + 4a = -2$
$a = -2$
Ainsi $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$.
Ainsi la parabole passant par les points M, N et S a pour unique équation $y = -2x^2 + 8x - 8$.

Compétence : Problème du second degré

Exercice 25 : Aire et trinôme

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$.

Remarque : $x \in [0\,;4]$.
En effet une longueur est toujours positive et la longueur x ne peut pas dépasser la longueur AB.

1. On note A_C, l'aire de la croix. Donner en fonction de x, l'aire de la croix $A_C(x)$.

$$\boldsymbol{A_C(x) = 4x + 6x - x^2 = -x^2 + 10x}$$

2. On note A_R, l'aire de la partie restante. Donner en fonction de x, l'aire de la partie restante $A_R(x)$.

$$\boldsymbol{A_R(x) = A_{ABCD} - A_C(x) = 24 - \left(-x^2 + 10x\right) = x^2 - 10x + 24}$$

3. Trouver x pour que l'aire de la croix soit égale à l'aire de la partie restante.

$\boldsymbol{A_C(x) = A_R(x) \Leftrightarrow -x^2 + 10x = x^2 - 10x + 24 \Leftrightarrow -2x^2 + 20x - 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10 + 12 = 0}$

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 100 - 48 = 52 > 0}$ **et** $\boldsymbol{\sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$.

L'équation admet deux solutions réelles :

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{10-2\sqrt{13}}{2}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{10+2\sqrt{13}}{2}}$

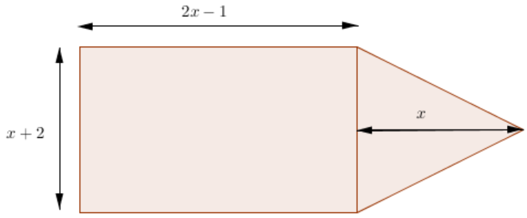
$\boldsymbol{x_1 = 5 - \sqrt{13} \in [0\,;4]}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = 5 + \sqrt{13} \notin [0\,;4]}$

Ainsi l'unique solution pour que l'aire de la croix soit égale à l'aire de la partie restante est $5 - \sqrt{13}$.

Exercice 26 : Aire et trinôme

On considère la figure ci-dessous, constituée d'un rectangle auquel est juxtaposé un triangle isocèle.

Les dimensions sont en centimètres.



Déterminer x pour que l'aire de cette figure soit égale à 126 cm².

$\boldsymbol{A(x) = A_{Rectangle} + A_{Triangle} = (2x-1)(x+2) + \frac{x(x+2)}{2} = 2x^2 + 4x - x - 2 + \frac{x^2}{2} + x = \frac{5}{2}x^2 + 4x - 2}$

On résout enfin $A(x) = 126$:

$\boldsymbol{\frac{5}{2}x^2 + 4x - 2 = 126 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x^2 + 4x - 128 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 8x - 256 = 0}$

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 5 \times (-256) = 64 + 5120 = 5184 > 0}$ **et** $\boldsymbol{\sqrt{5184} = 72}$.

L'équation admet deux solutions réelles :

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-8-72}{10}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-8+72}{10}}$

$\boldsymbol{x_1 = -8 < 0}$ **impossible** $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{32}{5}}$

Pour que l'aire de cette figure soit égale à 126 cm² x doit mesurer $6{,}4$cm.

Exercice 27 : Bénéfice et second degré

Un artisan fabrique des chaises.

Le coût de la fabrication de n chaises est donnée en euros par $C(n) = -0{,}2n^2 + 50n + 2000$ pour n appartenant à $[0\,;90]$.

De plus, chaque chaise est vendue 80€.

1. Quel est le montant $R(n)$, en euros, que rapportera la vente de n chaises?

Pour tout $n \in [0\,;90]$, on a : $R(n) = 80n$

La droite représentative R de $R(n)$ est tracée sur le même graphique que la courbe C, représentative de $C(n)$.

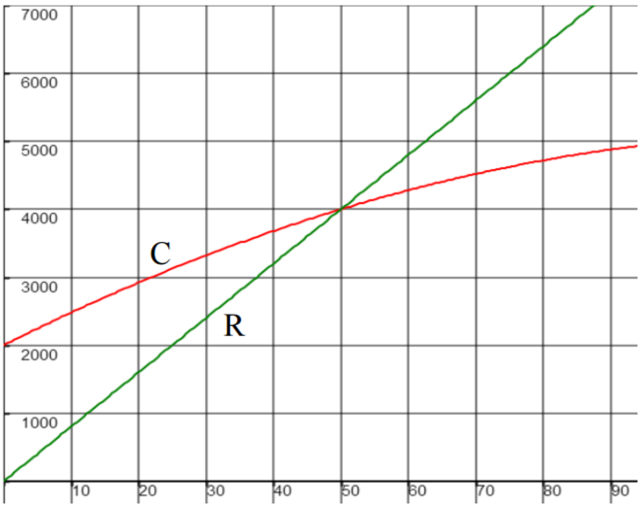
2. Que représente l'intersection des deux courbes ?

L'intersection des deux courbes représente pour combien de chaises le bénéfice est nul.

3. Lire graphiquement pour quelles valeurs de n l'artisan réalise un bénéfice.

L'artisan réalise un bénéfice lorsque R est au-dessus de C, c'est-à-dire lorsqu'il vend plus de 50 chaises.

4. Vérifier cette réponse par le calcul.



$$\begin{aligned} B(n) &= R(n) - C(n) \\ &= 80n - \left(-0{,}2n^2 + 50n + 2000\right) \\ &= 0{,}2n^2 + 30n - 2000 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \times 0{,}2 \times (-2000) = 2500 > 0$

et $\sqrt{\Delta} = 50$

L'équation admet deux solutions réelles :

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{-30-50}{0{,}4}$ $\qquad$ $n_2 = \frac{-30+50}{0{,}4}$

$n_1 = \frac{-80}{0{,}4}$ $\qquad$ $n_2 = \frac{20}{0{,}4}$

$n_1 = -200 \notin [0\,;90]$ $\qquad$ $n_2 = 50$

n	0		50		90
$B(n)$		−	0	+	

$B(n) > 0$ **pour** $n > 50$.

Exercice 28 : Bénéfice et second degré

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village.

Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.

On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes) avec $0 < q < 60$.

Charlie sait que le cout de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.

Son objectif est de rendre la production rentable.

Les formules donnant le cout $C(q)$ et la recette $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées :

$$C(q) = q^2 + 30q + 1000 \text{ et } R(q) = 100q$$

1. Justifier que $B(q) = -q^2 + 70q - 1000$

$\boldsymbol{B(q) = R(q) - C(q) = 100q - \left(q^2 + 30q + 1000\right) = 100q - q^2 - 30q - 1000 = -q^2 + 70q - 1000}$

2. a. Résoudre $B(q) > 0$

$B(q) > 0 \Leftrightarrow -q^2 + 70q - 1000 > 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 70^2 - 4 \times (-1) \times (-1000) \\ &= 4900 - 4000 = 900 > 0 \end{aligned}$$

et $\sqrt{900} = 30$.

L'équation admet deux solutions réelles :

$q_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$q_1 = \frac{-70-30}{-2}$ $\qquad$ $q_2 = \frac{-70+30}{-2}$

$q_1 = 50$ $\qquad$ $q_2 = 20$

q	0		20		50		60
$B(q)$		−	0	+	0	−	

b. En déduire les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait du bénéfice.

La chocolaterie de Charlie fait des bénéfices quand elle produit entre 20 et 50 tonnes de chocolats.

Exercice 29 : Bénéfice et second degré

Une entreprise produit des téléviseurs 3D.
Le coût de production $C(n)$, exprimé en milliers d'euros, pour n articles, est donné par le fonction C telle que $C(n) = 0{,}02n^2 - 2n + 98$ pour n appartenant à l'intervalle $[0; 150]$.

1. Chaque article étant vendu 1 500€, calculer le montant $V(n)$, exprimé en milliers d'euros, pour la vente de n articles.

Pour tout $n \in [0\,;150]$, on a : $R(n) = 1,5n$

2. On note $B(n)$ le bénéfice pour n articles vendus en milliers d'euros.
   a. Pour quelle quantité de téléviseurs vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice.

$$B(n) = R(n) - C(n)$$
$$= 1,5n - (0,02n^2 - 2n + 98)$$
$$= -0,02n^2 + 3,5n - 98$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3,5^2 - 4 \times (-0,02) \times (-98) = 4,41 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 2,1$

L'équation admet deux solutions réelles :

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{-3,5-2,1}{-0,04}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-3,5+2,1}{-0,04}$

$n_1 = \frac{-5,6}{-0,04}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-1,4}{-0,04}$

$n_1 = 140$ $\quad$ $n_2 = 35$

n	0		35		140		150
B(n)		–	0	+	0	–	

L'entreprise fait un bénéfice (positif ou nul) lorsqu'elle vend entre 35 et 140 téléviseurs.

   b. Pour quelle quantité de téléviseurs vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice de 40000€ ?

Cela revient à résoudre $B(n) = 40$ donc $-0,02n^2 + 3,5n - 98 = 40$ donc $0,02n^2 - 3,5n + 138 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = (-3,5)^2 - 4 \times 0,02 \times 138 = 1,21 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 1,1.$

L'équation admet deux solutions réelles :

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$n_1 = \frac{3,5-1,1}{0,04}$ $\quad$ $n_2 = \frac{3,5+1,1}{0,04}$

$n_1 = \frac{2,4}{0,04}$ $\quad$ $n_2 = \frac{4,6}{0,04}$

$n_1 = 60$ $\quad$ $n_2 = 115$

L'entreprise fait un bénéfice de 40 000 € lorsqu'elle vend 115 ou 60 téléviseurs.

<u>Exercice 30 : Problème du second degré</u>

La trajectoire d'un projectile est donnée par :

$$h(x) = -0{,}1x^2 + 2x + 1$$

où $h(x)$ désigne la hauteur en mètre du projectile et x (un réel positif) la distance en mètres du projectile par rapport au point de lancer.

a) Déterminer la hauteur du projectile au moment du lancer.

$h(0) = \cdots = 1$ ainsi le projectile était à 1m au moment du lancer.

b) A quelle distance le projectile retombe-t-il (on donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée au millimètre) ?

Il faut résoudre $h(x) = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times (-0,1) \times 1 = 4 + 0,4 = 4,4 > 0$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{4,4}}{-0,2} \approx 20,488$ $\quad$ | $x_2 = \frac{-2+\sqrt{4,4}}{-0,2} \approx -0,488 < 0$ **impossible sur $\mathbb{R}$.**

Ainsi le projectile retombe à environ 20,488 m.

c) Déterminer la hauteur maximale du projectile. A quelle distance est-elle atteinte ?

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-0,2} = 10$$
$$h(10) = -0,1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 = 11$$

La hauteur maximale du projectile sera de 11 m atteinte au bout de 10 mètre.

<u>Exercice 31 : Problème du second degré</u>

Résoudre (en justifiant) l'équation suivante :

$$3x^4 - 6x^2 - 9 = 0$$

Posons $X = x^2 \geq 0$ ainsi on obtient $3X^2 - 6X - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 36 + 108 = 144 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 12$.

$X_1 = \cdots = -1 < 0$ impossible sur $\mathbb{R}$.	**$X_2 = \cdots = 3$** **$x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$**

$$S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$$

<u>Exercice supplémentaire :</u>

Une salle de spectacle peut contenir jusqu'à 5000 personnes. Pour organiser un concert, le gestionnaire de cette salle doit remplir cette salle à au moins 80%.

D'après une étude, il estime que le nombre de spectateurs est donné par :

$$g(x) = -x^2 + 30x + 5000$$

où x est le prix d'une place de spectacle et $g(x)$ le nombre de places achetées.

Il veut alors exploiter cette étude pour déterminer les différents prix de la place qui lui permettront de remplir sa salle à au moins 80% de sa capacité maximale et ainsi pouvoir organiser le concert.

1. Quel est le nombre de places achetées par les clients si le prix de la place est fixé à 10€ ? 30 € ?

$g(10) = -10^2 + 30 \times 10 + 5000$ $= -100 + 300 + 5000 = 5200$	$g(30) = -30^2 + 30 \times 30 + 5000$ $= -900 + 900 + 5000 = 5000$

2. Résoudre l'inéquation $g(x) > 4000$ puis répondre au problème posé.

$g(x) > 4000 \Leftrightarrow -x^2 + 30x + 5000 > 4000 \Leftrightarrow -x^2 + 30x + 1000 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 30^2 - 4 \times (-1) \times 1000$
$= 900 + 4000 = 4900 > 0$
et $\sqrt{4900} = 70$.

L'équation admet deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-30-70}{-2}$ $\quad$ $x_2 = \frac{-30+70}{-2}$

$x_1 = 50$ $\quad$ $x_2 = -20$

x	$-\infty$		-20		0		50		$+\infty$
g(x)-4000		$-$	0		$+$		0	$-$	

Pour des prix de la place allant de 0 à 50 € sa salle sera remplie à au moins 80% de sa capacité maximale.

<u>Exercice 24 (autre méthode de résolution):</u>

1) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B(-3\ ;\ 0)$ et $C\left(\frac{5}{2};\ 22\right)$.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$

$A\left(\frac{1}{2};0\right)$ donc $0 = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \times \frac{1}{2} + c$ ainsi $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 0$ ainsi $a + 2b + 4c = 0$

$B(-3\ ;\ 0)$ donc $0 = a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c$ ainsi $9a - 3b + c = 0$

$C\left(\frac{5}{2};\ 22\right)$ donc $22 = a \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + b \times \frac{5}{2} + c$ ainsi $\frac{25}{4}a + \frac{5}{2}b + c = 22$ ainsi $25a + 10b + 4c = 88$

Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + 2b + 4c = 0 \\ 9a - 3b + c = 0 \\ 25a + 10b + 4c = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ 9(-2b - 4c) - 3b + c = 0 \\ 25(-2b - 4c) + 10b + 4c = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ -18b - 36c - 3b + c = 0 \\ -50b - 100c + 10b + 4c = 88 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -2b - 4c \\ -21b - 35c = 0 \\ -40b - 96c = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ -3b - 5c = 0\ (on\ a\ divisé\ par\ 7) \\ -5b - 12c = 11\ (on\ a\ divisé\ par\ 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ b = -\frac{5}{3}c \\ -5 \times (-\frac{5}{3}c) - 12c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ b = -\frac{5}{3}c \\ \frac{25}{3}c - \frac{36}{3}c = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ b = -\frac{5}{3}c \\ -\frac{11}{3}c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - 4c \\ b = -\frac{5}{3} \times (-3) \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \times 5 - 4 \times (-3) \\ b = 5 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -3 \end{cases}$$

Ainsi la parabole admet une équation de la forme $y = 2x^2 + 5x - 3$.

ou

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$

D'après les points A et B : $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -3$ sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On sait que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2} \times (-3) = -\frac{3}{2}$$

Par identification : <u>il existe un entier non nul k tel que</u> $a = 2k$; $b = 5k$ et $c = -3k$

Le point $C\left(\frac{5}{2};22\right)$ appartient à la parabole d'équation $y = 2kx^2 + 5kx - 3k$.

$$2k \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5k \times \frac{5}{2} - 3k = 22$$

$$2k \times \frac{25}{4} + \frac{25}{2}k - 3k = 22$$

$$\frac{25}{2}k + \frac{25}{2}k - 3k = 22$$

$$25k - 3k = 22$$

$$k = 1.$$

Ainsi la parabole passant par les points A, B et C a pour unique équation $y = 2x^2 + 5x - 3$.

3) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui coupe l'axe des abscisses en $M\ (\ 1\ ;\ 0\ )$ et $N\ (\ 3\ ;\ 0\ )$ et qui a pour sommet un point d'ordonnée 3.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$

D'après les points A et B : $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ sont solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On sait que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$$

$$x_1 x_2 = 1 \times 3 = 3$$

Par identification : <u>il existe un entier non nul k tel que</u> $a = k$; $b = -4k$ et $c = 3k$

Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = \frac{4k}{2k} = 2$.

Le sommet $S(2;3)$ appartient à la parabole d'équation $y = kx^2 - 4kx + 3k$.
$k \times 2^2 - 4k \times 2 + 3k = 3$
$4k - 8k + 3k = 3.$
$k = -3$
Ainsi la parabole passant par les points M, N et S a pour unique équation $y = -3x^2 + 12x - 9$.

4) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui est tangente à l'axe des abscisses en $Q\ (\ 2\ ;\ 0\ )$ et qui passe par $R\ (\ 1\ ;\ -2\ )$.

Une équation de parabole est de la forme $y = ax^2 + bx + c$
La parabole est tangente à l'axe des abscisses en $Q\ (\ 2\ ;\ 0\ )$ ainsi Q est le sommet de la parabole et 2 est l'unique solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On aura donc $\Delta = 0$.
Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$.
Et $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ainsi $4ac = b^2$ ainsi $c = \frac{b^2}{4a}$
Par identification on <u>il existe un entier non nul k tel que</u> $a = k$; $b = -4k$ et $c = \frac{16k^2}{4k} = 4k$

Le point $R(1;-2)$ appartient à la parabole d'équation $y = kx^2 - 4kx + 4k$.
$k \times 1^2 - 4k \times 1 + 4k = -2$
$k - 4k + 4k = -2.$
$k = -2$
Ainsi la parabole passant par les points M, N et S a pour unique équation $y = -2x^2 + 8x - 8$.