Chapitre : Dérivation (2) : Fonctions dérivées

I. Rappels

Définition 1 :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a est ______________________
____

Propriété 1 : La tangente à la courbe représentative C_f au point A admet pour équation :
$$y =$$

Méthode : Lire graphiquement l'équation d'une droite d'équation $y = mx + p$:

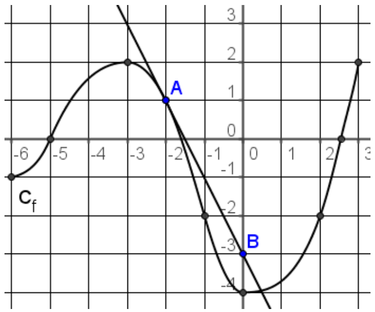
- p est l'ordonnée à l'origine, c'est donc l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.
- m est le coefficient directeur de la droite, pour le trouver on part d'un point quelconque de la droite.
  On compte le déplacement verticale entier V (+ vers le haut et – vers le bas) de telle sorte que le déplacement horizontale vers la droite H soit un entier. On a alors $m = \frac{V}{H}$.

Propriétés 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Pour tout x de I, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est ______________________ sur I.
- Pour tout x de I, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est ______________________ sur I.
- Pour tout x de I, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ La fonction f est ______________________ sur I.

Exercice 1 :
Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique C_f ci-dessous.
La droite (AB) est la tangente à C_f au point A d'abscisse -2.
De plus, la courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses -3 et 0.

1) Déterminer les valeurs des nombres suivants :

$f(-2) = \ldots$ $\quad f(0) = \ldots$ $\quad f'(-2) = \ldots$ $\quad f'(0) = \ldots$

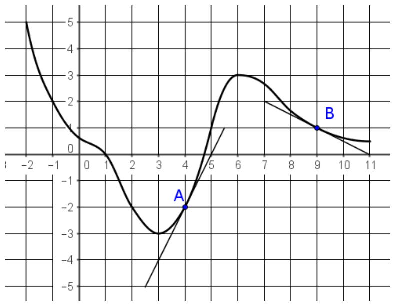


2) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = -2$: S = ...
b) $f(x) > -2$: S = ...
c) $f'(x) = 0$: S = ...
d) $f'(x) \leq 0$: S = ...

3) On sait que $f'(2) = 3$.
Tracer ci-contre la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 2 :
La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2 ; 11]$.
Les droites dessinées sont les tangentes à C_f aux points A et B d'abscisses 4 et 9.
De plus, C_f admet aux points d'abscisses 3 et 6 des tangentes horizontales.



1) Déterminer :

$f(4) = \ldots$ $\quad f(9) = \ldots$ $\quad f(3) = \ldots$ $\quad f(6) = \ldots$

$f'(4) = \ldots$ $\quad f'(9) = \ldots$ $\quad f'(3) = \ldots$ $\quad f'(6) = \ldots$

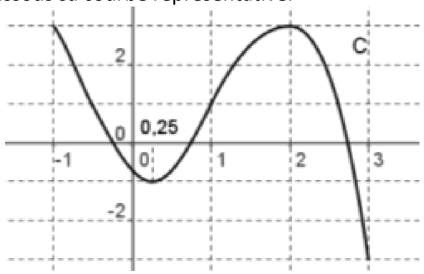
2) a) Déterminer une équation de la tangente au point A : ....

b) Déterminer une équation de la tangente au point B : ....

3) On sait que $f'(-1) = -2$ et $f'(1) = -1$.

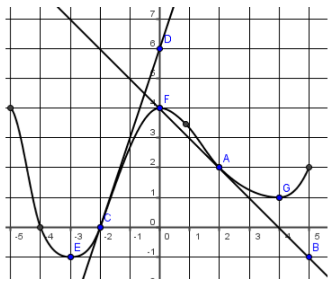
Tracer ci-dessus les tangentes T_{-1} et T_1 aux points C et D d'abscisses -1 et 1.

Exercice 3 : VRAI ou FAUX
f est une fonction définie sur [-1 ; 3]. On donne ci-dessous sa courbe représentative.



1) L'image de 3 par f est -1.
2) 1 a trois antécédents par f.
3) $f'(2) = 3$.
4) $f'(1) > 0$.
5) $f'(0) > 0$.
6) $f'(x) > 0$ sur $[1 ; 3]$.
7) $f(x) < 0$ sur $[-1 ; 0]$.
8) $f'(x) < 0$ sur $[-1 ; 0]$.
9) L'inéquation $f'(x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions [0,25 ; 2].

Exercice 4 :
On donne ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [-5 ; 5].
On admet que : - la droite (AB) est tangente à C_f au point A,
- la droite (CD) est tangente à C_f au point C
- les tangentes aux points E, F et G sont horizontales.



1) Déterminer par lecture graphique :

$f(-3) = \ldots$ $\quad f(-2) = \ldots$ $\quad f(0) = \ldots$ $\quad f(2) = \ldots$

$f'(-3) = \ldots$ $\quad f'(-2) = \ldots$ $\quad f'(0) = \ldots$ $\quad f'(2) = \ldots$

2) Résoudre graphiquement :

a) $f'(x) = 0$: S = ...
b) $f'(x) > 0$: S = ...
c) $f(x) < 0$: S = ...
d) $f'(x) \leq 0$: S = ...

II. Fonctions dérivées de référence (complément)

1) Rappel

Propriété 3 :

Fonction f	Fonction f'	f définie est dérivable sur
$f(x)=k\ \ (k\in\mathbb{R})$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax\ \ (a\in\mathbb{R})$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n\ \ (n\in\mathbb{N})$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$	$f'(x)=$	$]-\infty\,;0\,[\ ou\ ]0\,;\,+\infty[$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=$	$\mathbb{R}$

Application 1 : Dériver les fonctions f, g et h définie sur I par :

1. $f(x)=8x^4$ et $I=\mathbb{R}$

2. $g(x)=-\frac{3}{x}$ et $I=\mathbb{R}^*$

3. $h(x)=3\cos(x)$ et $I=\mathbb{R}$

Exercice 5 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x)=x^4$
b) $f(x)=\frac{1}{x}$
c) *c)* $f(x)=x^7$
d) $f(x)=-2x+5$
e) $f(x)=\frac{1}{3}$
f) $f(x)=1-5x$
g) $f(x)=\sqrt{3}$
h) $f(x)=\sqrt{3}\,x$
i) $f(x)=3x-1$

Exercice 6 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+4$
b) $f(x)=5+\frac{1}{x}$
c) $f(t)=t^3+t^2-t-4$
d) $f(x)=x+\frac{1}{x}-3$
e) $f(x)=-\sqrt{3}+x^2$
f) $f(t)=4t^3$
g) $f(t)=-\frac{1}{t}$
h) $f(x)=-2x^7$
i) $f(t)=\frac{1}{2}t^4$
j) $f(x)=\frac{x^2}{3}$
k) $f(x)=3x^4-4x^3+2x+9$
l) $f(x)=x^2+2x-\frac{3}{x}$
m) $f(x)=\frac{2x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x^2-x+3$

III. Dérivées et opérations (complément)

1) Dérivée d'un produit

Propriété 4 : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction uv définie par : $(uv)(x)=u(x)\times v(x)$, est dérivable sur I et pour tout $x\in I$,

$$(uv)'(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Application 2 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)(x^4-2x^2+1)$

Remarque : Ici, on pourrait tout simplement développer l'expression de f et dériver la fonction polynôme trouvée.

Exercice 7 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x)=(3x^2+4)(2x+1)$
b) $f(x)=(x^2-x+1)(3x^3-1)$
c) $f(x)=(-x+2)(2x^2+x)$
d) $f(x)=(x^3-4x)(5x-1)$

2) Dérivée de u^2

Propriété 5 : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Alors la fonction u^2 définie par : $u^2(x) = \left(u(x)\right)^2$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(u^2)'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Application 3 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-4x^3 - 2x + 5)^2$

Exercice 8 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x) = (3x-2)^2$

b) $f(x) = (-5x^2 + 6x + 2)^2$

c) $f(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^2$

d) $f(x) = (3x^2 + 1)(4x - 1)^2$

3) Dérivée d'un quotient

Propriété 6 : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{u}{v}$ définie par : $\frac{u}{v}(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) =$$

Attention : La dérivée d'un quotient ________________ le quotient des dérivées !!!

Application 4 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

Remarque : Quand on peut factoriser le numérateur, il est conseillé de le faire.

Exercice 9 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{-2x+3}{5x-1}$

c) $f(t) = \dfrac{t}{2t^2 - 2t + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 3x + 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

f) $f(t) = \dfrac{t-3}{t^2 + 2t + 3}$

Propriété 7 (cas particulier) : Soient k un réel et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{k}{v}$ définie par : $\frac{k}{v}(x) = \frac{k}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{k}{v}\right)'(x) =$$

Application 5 : Dériver la fonction définie sur $]3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{-2}{3-x}$

Propriété 8 (cas particulier) : Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ définie par $\frac{1}{v}(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) =$$

Application 6 : Dériver la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercice 10 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^5}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{3x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+x-2}$

Résumé :

	Fonction	Dérivé
Produit d'une fonction par un nombre k (k constante)	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u \times v$	$u'v+v'u$
Puissance 2	u^2	$2u'u$
Quotient ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
Inverse ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$

Exercice 11 :

Dans chaque cas, justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$ donnée.

a) $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x + 25$ h) $f'(x) = 3(x-4)(x-12)$

b) $f(t) = -t^3 + 30t^2 - 153\,t$ i) $f'(t) = 3(t-3)(17-t)$

c) $f(x) = \dfrac{6}{4x+3}$ j) $f'(x) = \dfrac{-24}{(4x+3)^2}$

d) $f(t) = \dfrac{4000}{0{,}5t+1}$ k) $f'(t) = \dfrac{-2000}{(0{,}5t+1)^2}$

e) $f(x) = x + 60 + \dfrac{121}{x}$ l) $f'(x) = \dfrac{(x-11)(x+11)}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ m) $f'(x) = \dfrac{(-x+1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+7}{x-1}$ n) $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

IV. Composition

Propriété 9 : Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout réel x de J, $ax+b$ appartient à I, alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x de J on a :

$$f'(x) =$$

Application 7 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)^3$.

Exercice 12 :

Dériver les fonctions suivantes, sans se préoccuper des ensembles de définitions/dérivabilités.

a) $f(x) = (5-4x)^3$ | b) $f(x) = (2x+7)^5$ | c) $f(x) = (5+3x)^8$

Remarque 1 : La formule précédente est un cas particulier d'une formule plus générale :

Propriété 10 (hors programme) : Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout réel x de J, $u(x)$ appartient à I, alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(u(x))$, est dérivable sur J et pour tout x de J on a :

$$f'(x) =$$

Dans la propriété 9, u est la fonction définie par $u(x) = ax + b$ et $u'(x) = a$.

Remarque 2 : On peut grâce à cette formule trouver les dérivées des fonctions u^n :

Propriété 11 : Soient A, ω et ϕ trois réels.
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ sont dérivables et on a :
$f'(t) =$________________________ et $g'(t) =$ ______________________________

Application 8 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 13 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = x\cos(x)$

d) $f(t) = t\sin(2t)$

e) $f(t) = \frac{\cos(3t)}{t}$

f) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

g) $f(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

h) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

i) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

V. Etude de variations

Application 9 : Etudier le signe des fonctions définies par :

a) $f(x) = (2x^2 + 1)(2x - 8)(-x + 3)$

b) $f(x) = \frac{-10(3x + 7)}{1 - 6x}$

Exercice 14 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [-8 ; 8]$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$
1) Montrer que $f'(x) = 3(x - 1)(x + 5)$.
2) En déduire le tableau de variations sur D_f.

Exercice 15 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [-5 ; 5]$ par $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$
1) Montrer que $f'(x) = -4x(x - 1)(x + 1)$.
2) En déduire le tableau de variations sur D_f.

Exercice 16 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{3x-9}$
Dresser, en justifiant, le tableau de variations sur D_f.

Exercice 17 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [-4 ; 4]$ par : $f(x) = \frac{4x}{x^2 + x + 1}$
1) Montrer que $f'(x) = \frac{-4(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$
2) En déduire le tableau de variations sur D_f.

Exercice 18 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{3x^2}{x - 2} + 1$
f est représentée par la courbe C_f dans un repère du plan.
1) a) Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{3x(x - 4)}{(x - 2)^2}$
b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f
2) a) Déterminer l'équation de la tangente T_{-2} au point d'abscisse -2.
b) Etudier les positions relatives de C_f et de T_{-2} sur D_f.

Exercice 19 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$
1) Montrer que $f'(x) = (x - 3)^2$ et déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0
2) b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T.

Exercice 20 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [0 ; 2\pi]$ par $f(t) = \sin(2t)$.
1) Calculer $f'(t)$.
2) a) Si t varie dans $[0 ; 2\pi]$, dans quel intervalle varie $2t$?
b) Compléter le tableau suivant :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	...	...	2π
$2t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	...	...	4π
$\cos(2t)$		0	0	0	0	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

Exercice 21 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [\,0\,;2\pi\,]$ par $f(t) = 3\cos(2t)$.
1) Calculer $f'(t)$.
2) a) Si t varie dans $[\,0\,;2\pi\,]$, dans quel intervalle varie $2t$?
b) en vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

Exercice 22 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = [-\pi;\pi\,]$ par $f(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.
1) Calculer $f'(t)$.
2) a) Si t varie dans $[-\pi;\pi\,]$, dans quel intervalle varie $t + \frac{\pi}{4}$?
b) Compléter le tableau suivant :

t	$-\pi$	…	…	π
$t+\frac{\pi}{4}$	…	0	π	…
$\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$		0	0	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

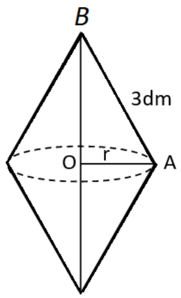
Exercice 23 :
Soit f la fonction définie sur $D_f = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.
1) Calculer $f'(t)$.
2) a) Montrer que si t varie dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $3t + \frac{\pi}{4}$ varie dans $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right]$
b) Compléter le tableau suivant :

t	0	…	$\frac{\pi}{2}$
$t+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$		0	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

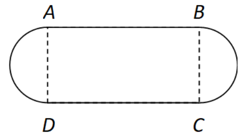
VI. Optimisation

Exercice 24 :
On veut construire une bouée ayant la forme d'un double cône.
Unité choisie : le décimètre (dm) pour tout l'exercice.
On désigne par h la hauteur OB du cône.
On désigne par r le rayon OA de base.
On fixe la longueur AB à 3 dm.



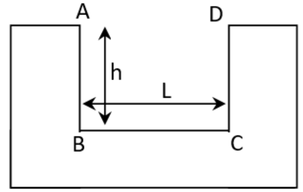
1) a) Exprimer le volume V de la bouée en fonction de r et de h.
b) En considérant le triangle OAB, déterminer une relation entre r et h.
c) En déduire que le volume peut s'écrire sous la forme :
$$V = \frac{2}{3}\pi(9h - h^3)$$
2) a) Etudier les variations de $V(h)$ sur $[\,0\,;3\,]$.
b) Pour quelle valeur h_0 le volume est-il maximal ? Que vaut alors ce volume V_0 ?
(on attend bien sûr des valeurs exactes)
c) Quel est le rayon r_0 correspondant à ce volume maximal ?

Exercice 25 :
Un terrain de jeux est formé d'un rectangle $ABCD$ et de deux demi-disques de diamètres respectifs $[AD]$ et $[BC]$.
On note x le rayon de chaque demi-disque et L la longueur AB, exprimée en mètres.



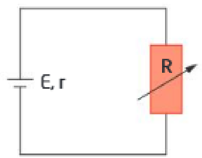
1) Calculer le périmètre du terrain, en fonction de x et de L.
2) Dans toute la suite de l'exercice, le périmètre du terrain est de 400 mètres.
a) Exprimer L en fonction de x.
b) Montrer que l'aire du terrain, en m², peut s'écrire :
$$400x - \pi x^2$$
3) Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = 400x - \pi x^2$.
a) Etudier les variations de f, et dresser le tableau de variations.
(avec des **valeurs exactes** dans le tableau de variations)
b) Quelle est l'aire maximale du terrain ? Pour quelle valeur exacte de x est-elle atteinte ?
Quelle est la valeur de L correspondante ? Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 26 :
On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section rectangulaire $ABCD$.
L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m².
On désigne par h la hauteur et par L la largeur (en mètres) de cette section intérieure.
On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $g(h) = AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimum.



1) a) Ecrire L en fonction de h.
b) Montrer que $g(h) = 2h + \frac{1}{2h}$.
c) Démontrer que la dérivée de g est : $g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$
d) Etudier les variations de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2) Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de L permettant d'obtenir le frottement minimum.

Exercice 27 :
Un générateur de force électromotrice E (en Volts) a une résistance interne r (en ohms). Dans le circuit suivant, on branche ce générateur à une résistance variable R.
La puissance en watts dissipée dans ce circuit est
$$P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$$



Données :
$E = 12V\,; r = 4{,}5\Omega\,; 1\,\Omega \leq R \leq 10\Omega$

1) Montrer que la fonction puissance P est définie sur l'intervalle $[\,1\,;10\,]$ par :
$$P = \frac{144R}{(R+4{,}5)^2}$$
2) A l'aide d'une calculatrice (ou d'un logiciel permettant de visualiser la courbe d'une fonction), conjecturer la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale et la valeur de cette puissance maximale.
3) a) Montrer que $P'(R) = \frac{144(4{,}5-R)}{(R+4{,}5)^2}$
b) Dresser le tableau de signes de $P'(R)$ sur $[\,1\,;10\,]$.
c) En déduire le tableau de variation de la fonction P sur $[\,1\,;10\,]$.
d) Confirmer ou infirmer les conjectures faites au 2) .

VII. Approximation affine

Définition 2 (rappel) :
Le nombre dérivé de la fonction f en a est, si elle existe, la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 , on note ce nombre $\boldsymbol{f'(a)}$.
On écrit alors :

$$f'(a) =$$

Propriété 12 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en a (avec a un réel appartenant à I)
Soit C_f la courbe représentative de f.
Pour h proche de 0, la valeur approchée de $f(a+h)$ est :

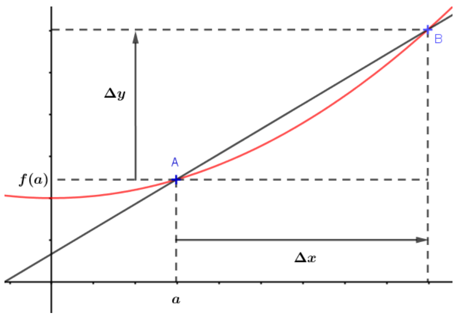
Exercice 28 :
Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
a) Calculer $f'(1)$.
b) A l'aide de l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0, montrer que

$$\frac{1}{1+h} \approx 1-h$$

c) Donner une valeur approchée de $\frac{1}{0{,}99}$ et $\frac{1}{1{,}02}$

VIII. Notation différentielle

Soit f une fonction et $A(a;f(a))$ un point de la courbe représentative de f.
Une variation de x, notée Δx, (à partir de a) produit une variation de $y=f(x)$ notée Δy.
Graphiquement, le point A "passera " en $B(\,a+\,\Delta x\,;f(a+\,\Delta x))$ et
$\Delta y = f(a+\Delta x) - \,f(a)$
Le coefficient directeur de la droite (AB) sera $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que l'on note aussi $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_a$ pour indiquer que c'est le taux de variation en a.



Si la variation de x est très petite, Δx se rapproche de 0 et on le note dx ; $\Delta\, y$ se notera lui dy.
La droite (AB) se rapproche de la tangente et son coefficient directeur se rapproche du nombre dérivé $f'(a)$
On a donc : $\boldsymbol{f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a)}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{f' = \frac{df}{dx}}$

Remarque : on a vu que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$ donc $\Delta y \approx f'(a)\Delta x$ ou $\Delta y \approx \frac{df}{dx}\Delta x$

Application 10 :
1) Soit S la surface d'un disque de rayon R. On a $S=\pi R^2$. S est donc une fonction de R.
a) Calculer $\frac{dS}{dR}$ et en déduire l'expression de dS en fonction de R et de dR .

b) Une machine fabrique des rondelles de 20 mm de rayon.
Si la machine commet une erreur de 1 mm sur la mesure de R, quelle sera l'erreur sur la valeur de la surface ?

2) Un dipôle de résistance de 50Ω est parcouru par un courant continu d'intensité 2A.
a) On rappelle que la puissance dissipée est $P = \,U\,I$.
A l'aide de la loi d'Ohm, donner la formule de la puissance en fonction de R et I et calculer $\frac{dP}{dI}$.

b) Calculer la puissance dissipée P par ce dipôle.

c) L'incertitude indiquée sur l'appareil est $\Delta I = 0{,}05\ A$. En vous aidant de $\frac{dP}{dI}$, calculer ΔP , l'incertitude du résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 29 :

L'énergie cinétique d'un objet de masse m se déplaçant à une vitesse v est égale à $E_C = \frac{1}{2} m\, v^2$. (avec m en kg et v en $\frac{m}{s}$)

a) Calculer l'énergie cinétique d'un véhicule d'une tonne allant à 90 $\frac{km}{h}$.

b) Calculer $\frac{dE_C}{dv}$

c) En réalisant une approximation affine, exprimer la variation d'énergie cinétique ΔE_c en fonction de la variation de vitesse Δv.

d) En déduire une estimation de ΔE_C pour le véhicule d'une tonne si $\Delta v = 5\ km/h$.

E) Calculer la valeur réelle de E_C lorsque le véhicule roule à 95 km/h et comparer la variation réelle avec l'approximation.

Exercice 30 :

Dans un circuit électrique, l'intensité I et la tension U aux bornes d'une résistnce sont liées par la relation $U = RI$. On applique une tension de 220V.

a) Exprimer I en fonction de R.

b) On fait varier la résistance R. En utilisant une approximation affine, exprimer la variation d'intensité ΔI lorsque la résistance varie de ΔR.

c) Calculer une approximation de ΔI lorque R passe de 50 à 51 Ω.

Exercice 31 :

L'abscisse x d'un point sur un axe horizontal est donnée pa l'équation $x = 3t^2 + 2t + 5$ avec x en mètres et t en secondes.

a) Quelle est l'abscisse du point à l'instant $t = 0$? à $t = 5$?

b) Exprimer la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ en fonction de t.

Quelle est la vitesse de ce point à l'instant $t = 1$?

c) Montrer que l'accélération $a = \frac{dv}{dt}$ est constante.

Exercice 32 :

Un point est mobile dans le plan muni d'un repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Les coordonnées $(x; y)$ variant en fonction du temps t en suivant les équations suivantes :

$$x(t) = 3t + 1 \quad et \quad y(t) = 2t^2 - 4$$

a) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ et $v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t)$.

b) En dérivant les coordonnées du vecteur vitesse par rapport au temps, déterminer les coordonnées du vecteur accélération.

Exercice 33 :

Une moto accélère de 50 à 80 km/h en 8 secondes. On admet que durant l'intervalle de temps [0 ; t] son moteur fournit une énergie $E(t) = 50t + 0{,}1t^2$ en kJ.

La puissance moyenne, en kW, développée par le moteur pendant un intervalle de temps Δt est $P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

a) Calculer la puissance moyenne entre les instants $t = 0$ et $t = 8$; puis entre les instants $t = 5$ et $t = 6$.

b) Exprimer, en fonction de dt, la puissance moyenne $P_m(5\,;5 + dt)$ entre les instants $t = 5$ et $t = 5 + dt$.

c) Déterminer la limite de $P_m(5\,;5 + dt)$ quand dt tend vers 0. Ce résultat donne la puissance instantanée à l'instant $t = 5$.

d) Déterminer la fonction dérivée E' de la fonction E puis calculer $E'(5)$. Commenter le résultat obtenu.

e) Déterminer la puissance instantanée à l'instant $t = 8$.

Exercice 34 :

Soit f la fonction dépendant de deux variables x et y définie par:

$$f(x; y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$$

a) Calculer $\frac{df}{dx}(x; y)$.

b) Calculer $\frac{df}{dy}(x; y)$.

Exercice 35 :

1) Soit u la fonction définie pour tous réels x et y par $u(x;\ y) = y - 2x$.

Calculer $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$.

2) On considère l'équation(E): $\frac{du}{dx} + 2\frac{du}{dy} = 0$

(appelée équation aux dérivées partielles)

a) Vérifier que u est solution de l'équation aux dérivées partielles (E).

b) Soit v la fonction définie par $v(x; y) = \sin(y - 2x)$. Est-elle solution de l'équation aux dérivées partielles (E) ?

3) Proposer une fonction solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$3\frac{du}{dx} - 4\frac{du}{dy} = 0$$