Fiche méthode : Droites

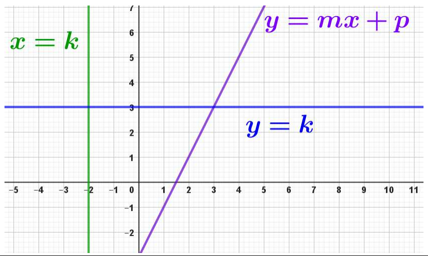
I. Différentes droites

Application 1 :
Déterminer l'équation réduite de chacune des droites suivantes, préciser si la droite a une particularité (horizontale ? verticale ? passe par l'origine ?).
En déduire, si possible, la valeur du coefficient directeur m et de l'ordonnée à l'origine p.

$D_1 : 2x + y - 3 = 0$	$D_2 : 5y - 10 = 0$
$y = -2x + 3$ Aucune particularité $m = -2$ et $p = 3$	$5y = 10$ $y = 2$ Droite horizontale $m = 0$ et $p = 2$
$D_3 : 9x + 3y = 0$	$D_4 : x - 5 = 0$
$3y = -9x$ $y = -3x$ Droite passant par l'origine $m = -3$ et $p = 0$	$x = 5$ Droite verticale Aucun coefficient directeur Aucune ordonnée à l'origine
$D_5 : 2x - 4y + 8 = 0$	$D_6 : x + 3y = 0$
$-4y = -2x - 8$ $y = \frac{1}{2}x + 2$ Aucune particularité $m = \frac{1}{2}$ et $p = 2$	$3y = -x$ $y = -\frac{1}{3}x$ Droite passant par l'origine $m = -\frac{1}{3}$ et $p = 0$

Différentes droites :

- Soient $m, p \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\boldsymbol{y = mx + p}$ est une droite **non parallèle à l'axe des ordonnées**
- Si une droite a pour équation, une équation de la forme $\boldsymbol{y = k}$ (avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$), alors c'est une droite **parallèle à l'axe des abscisses.**
- Si une droite a pour équation une équation de la forme $\boldsymbol{x = k}$ (avec $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$), alors c'est une droite **parallèle à l'axe des ordonnées.**



II. Trouver par le calcul une équation de droite

Application 2 :

1. Soit $A(2; -1)$ et $B(4; 3)$. Déterminer l'équation de la droite (AB)

$x_A \neq x_B$ (les abscisses des point A et B sont différentes) (et $y_A \neq y_B$) ainsi $(AB) : y = mx + p$.

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-1)}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$

Donc $(AB) : y = 2x + p$.

$A(2 ; -1) \in (AB)$ ainsi $y_A = 2x_A + p$

$2x_A + p = y_A$
$2 \times 2 + p = -1$
$4 + p = -1$
$p = -1 - 4$
$p = -5$

Conclusion : (AB) a pour équation : $y = 2x - 5$.

2. Soit $C(2 ; 5)$, déterminer l'équation de la droite (AC)

$A(2; -1)$ et $C(2 ; 5)$
$x_A = x_C = 2$ donc (AC) a pour équation : $x = 2$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

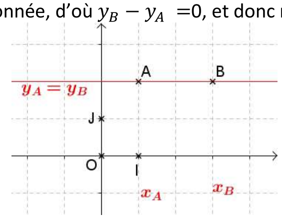
3. Soit $D(-1 ; 3)$, déterminer l'équation de la droite (BD)

$B(4; 3)$ et $D(-1 ; 3)$
$y_B = y_D = 3$ donc (BD) a pour équation : $y = 3$ (droite parallèle à l'axe des abscisses).

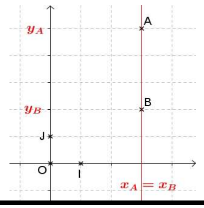
Coefficient directeur :
Dans un repère $(O; I; J)$, la droite d non parallèle à l'axe des ordonnées passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (A et B distincts) a pour coefficient directeur :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Si la droite d est horizontale, alors $\boldsymbol{m = 0}$ (d horizontale signifie que A et B ont même ordonnée, d'où $y_B - y_A = 0$, et donc m= 0).



- Si la droite d est verticale alors m n'existe pas !



III. Point appartenant à une droite

Application 3 :
Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$. Les points $A(2 ; 1)$ et $B(-1 ; -2)$ sont-ils sur (d) ?

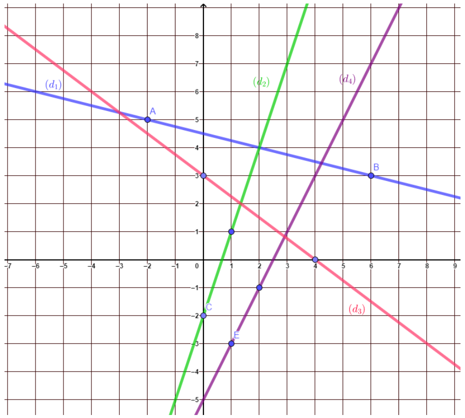
$2x_A - 3 = 2 \times 2 - 3$ $= 1$ $= y_A$ Donc $A \in (d)$	$2x_B - 3 = 2 \times (-1) - 3$ $= -5$ $\neq y_B$ Donc $B \notin (d)$

Point appartenant à une droite :
Pour vérifier qu'un point $M(x_M; y_M)$ appartient à une droite :

- Si l'équation est du type $y = mx + p$:
  Il suffit de vérifier si $mx_M + p = y_M$.
- Si l'équation est du type $y = k$: il suffit de vérifier si $y_M = k$.
- Si l'équation est du type $x = k$: il suffit de vérifier si $x_M = k$.

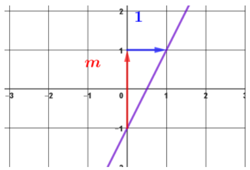
IV. Tracer et lire graphiquement une équation de droite

Application 4: Méthode pour tracer une droite :



Avec la méthode 1 pour $(d_2): y = 3x - 2$

- $y = 3 \times 0 - 2 = -2$ donc $C(0 ; -2)$
- $y = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4$ donc $D(2 ; 4)$



a) Tracer la droite $(\boldsymbol{d_1})$ **passant par les points** $\boldsymbol{A(-2; 5)}$ **et** $\boldsymbol{B(6; 3)}$

Méthode : En connaissant deux points appartenant à la droite : on place les deux points connus et on trace la droite passant par ces deux points.

b) Tracer les droites d'équation $(\boldsymbol{d_2}) : \boldsymbol{y = 3x - 2}$ et $(\boldsymbol{d_3}) : \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + 3}$

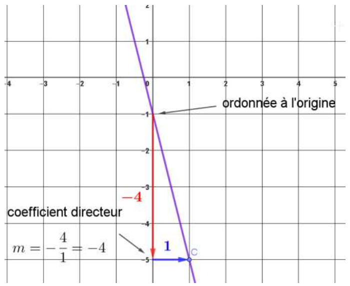
Méthode 1 : En connaissant l'équation réduite de la droite $y = mx + p$: on donne deux valeurs particulières à x pour obtenir deux points appartenant à la droite.

Méthode 2 : On obtient le premier point grâce à l'ordonnée à l'origine puis on obtient un second point avec le coefficient directeur (en se déplaçant de m unités verticalement et d'une unité (horizontalement) vers la droite).

c) Tracer la droite $(\boldsymbol{d_4})$ **passant par le point** $\boldsymbol{E(1;\ -3)}$ **de coefficient directeur 2**

Méthode : En connaissant un point appartenant à la droite et le coefficient directeur de la droite m : on place le point connu, on obtient un second point avec le coefficient directeur (en se déplaçant de m unités verticalement et d'une unité (horizontalement) vers la droite).

Application 5 : Méthode pour obtenir l'équation réduite d'une droite :
Soit (d) la droite d'équation $y = mx + p$



Trouver l'équation de la droite ci-contre : $y = -4x - 1$

Méthode 1 :

- p est l'ordonnée à l'origine, c'est donc l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 0.
- m est le coefficient directeur de la droite, pour le trouver on place un point (si possible avec abscisse et ordonnée entières) sur la droite. Puis on remplace x et y par les coordonnées de ce point dans l'équation.

Méthode 2 : on peut trouver m par lecture graphique :
On part d'un point quelconque de la droite. On compte le déplacement vertical entier V (+ vers le haut et – vers le bas) de telle sorte que le déplacement horizontal vers la droite H soit un entier. On a alors $m = \frac{V}{H}$.

V. Droites parallèles et alignement

Application 6 :

Parmi les droites dont on donne l'équation, identifier celle qui sont parallèles.

$(d_1) : x = -3$	$(d_6) : x = 15$
$(d_2) : y = x + 7$	$(d_7) : y = 3x + 1$
$(d_3) : y = 1{,}2$	$(d_8) : y = -23$
$(d_4) : y = -3x + 1$	$(d_9) : y = -3x - 3$
$(d_5) : y = x$	

- $(d_1) \mathbin{/\!/} (d_6)$: ce sont des droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = k$.
- $(d_3) \mathbin{/\!/} (d_8)$: ce sont des droites parallèles à l'axe des abscisses d'équation $y = k$.
- $(d_2) \mathbin{/\!/} (d_5)$: ce sont des droites avec le même coefficient directeur $m = 1$.
- $(d_4) \mathbin{/\!/} (d_9)$: ce sont des droites avec le même coefficient directeur $m = -3$.

Position relative de deux droites :

Soient d_1 une droite d'équation $y = m_1 x + p_1$ et d_2 une droite d'équation $y = m_2 x + p_2$ deux droites du plan non parallèles à l'axe des ordonnées.

- d_1 et d_2 sont **parallèles** si et seulement si **elles ont le même coefficient directeur ($\boldsymbol{m_1 = m_2}$)**.
- d_1 et d_2 sont **sécantes** si et seulement si **elles n'ont pas le même coefficient directeur ($\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$)**

Points alignés :

A, B et C sont des points deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si, les droites $(\boldsymbol{AB})$ et $(\boldsymbol{AC})$ (ou $(\boldsymbol{BC})$) ont le **même coefficient directeur.**

Application 7 : Points et droites parallèles

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont ou ne sont pas parallèles :

1. $A(1\,;1), B(3\,;3), C(-5\,;12)$ et $D(10\,;27)$.

$m_1 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{3-1} = 1$	$m_2 = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{27-12}{10-(-5)} = \dfrac{15}{15} = 1$

$m_1 = m_2$ ainsi $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$

2. $A(-2\,;6), B(6\,;0), C(10\,;-12)$ et $D(-10\,;-3)$.

$m_1 = \dfrac{0-6}{6+2} = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4}$	$m_2 = \dfrac{-3+12}{-10-10} = \dfrac{9}{-20} \neq -\dfrac{3}{4}$

$m_1 \neq m_2$ ainsi (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

Application 8 : Points alignés

Les points A, B et C sont-ils, ou non, alignés ?

1. $A(-2\,;2)$, $B(1\,;1)$ et $C(4\,;0)$

$m_{(AB)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-2}{1-(-2)} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$	$m_{(AC)} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{4-(-2)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

(AB) et (AC) ont le même coefficient directeur ainsi les points A, B et C sont alignés.

2. $A(-2\,;6), B(6\,;0)$ et $C(10\,;-12)$

$m_{(AB)} = \dfrac{0-6}{6+2} = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4}$	$m_{(AC)} = \dfrac{-12-6}{10+2} = \dfrac{-18}{12} = -\dfrac{3}{2} \neq -\dfrac{3}{4}$

(AB) et (AC) n'ont pas le même coefficient directeur ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.

VI. Système d'équations

Application 9 : Droites sécantes et système

Soit $d_1 : y = -3x + 4$ et $d_2 : y = 2x + 1$ deux droites sécantes.

Soit P le point d'intersection des droites d_1 et d_2. Donner les coordonnées de ce point.

Méthode par substitution :

$$\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ -3x + 4 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ -3x - 2x = 1 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ -5x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 \times \frac{3}{5} + 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{6}{5} + \frac{5}{5} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{11}{5} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \text{ ainsi } P\left(\frac{3}{5}\,;\frac{11}{5}\right).$$

Application 10 : Méthode par substitution

Résoudre les systèmes d'équations proposés

1.

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 2(11 + 3y) + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 22 + 6y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 7y = -21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3 \times (-3) \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 3 \times (-2y) + 7y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -6y + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 2x \\ 4x + (1 - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 2x \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - (-1) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Méthode par substitution :

1ère étape :
On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations.

2ème étape :
On remplace l'inconnue dans l'autre équation. Elle devient une équation du premier degré à une seule inconnue : on conserve l'écriture en système !

3ème étape :
On développe la nouvelle équation.

4ème étape :
On résout la 2ème équation.

5ème étape :
On remplace « l'inconnue connue » dans la première équation, puis on calcule.

Application 11 : Méthode par combinaison

Résoudre les systèmes d'équations proposés

1.

$$\begin{cases} 8x - 6y = 3 \\ -4x + 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 3 \\ 8x - 8y = 6 \ (\boldsymbol{L_2 \leftarrow -2L_2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 3 \\ 2y = -3 \ (\boldsymbol{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9 = 3 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = -6 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{8} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -6x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ -12x + 4y = 18 \ (\boldsymbol{L_2 \leftarrow 2L_2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ 15x = -20 \ (\boldsymbol{L_2 \leftarrow L_1 - L_2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -2 \\ x = -\frac{20}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 4y = -2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -2 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -2 + 4 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{4} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Méthode par combinaison :

1ère étape : **Éliminer $\boldsymbol{x}$ (ou $\boldsymbol{y}$)**

- On multiplie chaque équation par un nombre afin que les coefficients de x soient les mêmes (on notera les changements comme dans els exemples) :
  On obtient un nouveau système *équivalent*.
- On **soustrait** « terme à terme » les deux équations, pour éliminer x.
  On obtient une équation du premier degré à une inconnue et on garde l'une des deux équations du départ.

2ème étape : On résout la deuxième équation pour trouver y.

3ème étape : On remplace la valeur du y trouvée pour avoir la valeur de x.