Chapitre : Nombres complexes

Exercice 1 : Partie réelle et partie imaginaire

Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z = 5 + 3i$

$\boldsymbol{Re(z) = 5}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = 3}$

b) $z = 2 - 4i$

$\boldsymbol{Re(z) = 2}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -4}$

c) $z = -7 - 6i$

$\boldsymbol{Re(z) = -7}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -6}$

d) $z = -i$

$\boldsymbol{Re(z) = 0}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -1}$

e) $z = 12$

$\boldsymbol{Re(z) = 12}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = 0}$

f) $z = -\frac{3}{4}i + 5$

$\boldsymbol{Re(z) = 5}$ **et** $\boldsymbol{Im(z) = -\frac{3}{4}}$

Exercice 2 : Egalité de deux nombres complexes

Dans chaque cas, déterminer les nombres réels a et b tels que :

a) $(2a + 1) - 3i = 5 + (2 - b)i$

$\boldsymbol{\begin{cases} 2a + 1 = 5 \\ -3 = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}}$

b) $(-a + 1) + (2b + 1)i = -3i$

$\boldsymbol{\begin{cases} -a + 1 = 0 \\ 2b + 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}}$

c) $(a + 3) + (b - 3)i = 6$

$\boldsymbol{\begin{cases} a + 3 = 6 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}}$

d) $(-2a + 3) + (2 - 3b)i = 5 - 7i$

$\boldsymbol{\begin{cases} -2a + 3 = 5 \\ 2 - 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}}$

Exercice 3 : Sommes et produits dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 4 - 2i + (-2) - 5i = 2 - 7i}$
b)	$\boldsymbol{2z_1 - 4z_2 = 2(4 - 2i) - 4(-2 - 5i) = 8 - 4i + 8 + 20i = 16 + 16i}$
c)	$\boldsymbol{z_1 \times z_2 = (4 - 2i)(-2 - 5i) = -8 - 20i + 4i + 10i^2 = -18 - 16i}$ **(car** $\boldsymbol{i^2 = -1}$**)**
d)	$\boldsymbol{{z_2}^2 = (-2 - 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = -21 + 20i}$ **(car** $\boldsymbol{i^2 = -1}$**)**
e)	$\boldsymbol{z_1^3 = (4 - 2i)^3 = (4 - 2i)(16 - 16i + 4i^2) = (4 - 2i)(12 - 16i) = 48 - 64i - 24i + 32i^2 = 16 - 88i}$
f)	$\boldsymbol{(-2 - z_1)(3 - 4z_2) = (-2 - (4 - 2i))(3 - 4(-2 - 5i)) = (-6 + 2i)(11 + 20i)}$ $\boldsymbol{= -66 - 120i + 22i + 40i^2 = -106 - 98i}$

Exercice 4 : Développer

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i}$
b)	$\boldsymbol{(-4 - i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i}$
c)	$\boldsymbol{(4 - 2i)(4 + 2i) = 16 - 4i^2 = 16 + 4 = 20}$

Exercice 5 : Développer

Soit les nombres complexes $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, mettre sous la forme algébrique $a + bi$ le nombre complexe :

$$\boldsymbol{1 + z + z^2 = 1 + -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}i^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0}$$

Exercice 6 : Conjugué

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - i$

$\boldsymbol{\bar{z} = 1 + i}$

b) $z = i + 2$

$\boldsymbol{\bar{z} = -i + 2 = 2 - i}$

c) $z = 3i$

$\boldsymbol{\bar{z} = -3i}$

d) $z = 3 - 2i$

$\boldsymbol{\bar{z} = 3 + 2i}$

e) $z = 5i - 4$

$\boldsymbol{\bar{z} = -5i - 4 = -4 - 5i}$

f) $z = -12$

$\boldsymbol{\bar{z} = -12}$

Exercice 7 : Conjugué

On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - i$.

1. a) Donner la forme algébrique de $z_1 + z_2$, puis de $\overline{z_1 + z_2}$.

$\boldsymbol{z_1 + z_2 = 1 + i + 3 - i = 4}$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = 4}$

b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ puis de $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.

$\boldsymbol{\overline{z_1} = 1 - i}$ **et** $\boldsymbol{\overline{z_2} = 3 + i}$
$\boldsymbol{\overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 - i + 3 + i = 4}$

c) Comparer les résultats obtenus.

$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

2. a) Donner la forme algébrique de $z_1 z_2$, puis de $\overline{z_1 z_2}$.

$\boldsymbol{z_1 z_2 = (1 + i)(3 - i) = 3 - i + 3i - i^2 = 4 + 2i}$
$\boldsymbol{\overline{z_1 z_2} = 4 - 2i}$

b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$\boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (1 - i)(3 + i) = 3 + i - 3i - i^2 = 4 - 2i}$

c) Comparer les résultats obtenus.

$\boldsymbol{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}}$

3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont quatre nombres réels.

$\boldsymbol{z_1 + z_2} = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2}} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1}} = a_1 - b_1 i$ **et** $\boldsymbol{\overline{z_2}} = a_2 - b_2 i$
$\boldsymbol{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2)$
$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z_1 z_2} &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
\boldsymbol{\overline{z_1 z_2}} &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
\boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2}} &= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) \\
&= a_1 a_2 - a_1 b_2 i - a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
\boldsymbol{\overline{z_1 z_2}} &= \boldsymbol{\overline{z_1}\,\overline{z_2}}
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -4 - i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

Méthode : On multiplie le numérateur et le dénominateur par le nombre complexe conjugué du dénominateur.
Rappel : Si $\boldsymbol{z = a \pm bi}$ **alors** $\boldsymbol{z\overline{z} = a^2 + b^2}$**.**

a)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i}$
b)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-4-i} = \frac{-4+i}{(-4)^2+1^2} = -\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i}$
c)	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{-4-i} = \frac{(2-3i)(-4+i)}{(-4)^2+1^2} = \frac{-8+2i+12i-3i^2}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i}$
d)	$\boldsymbol{\frac{1}{{z_1}^2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i\right)^2 = \frac{4}{169} + \frac{12}{169}i + \frac{9}{169}i^2 = -\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i}$
e)	$\boldsymbol{\frac{1}{{z_2}^2} = \left(\frac{1}{z_2}\right)^2 = \left(-\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i\right)^2 = \frac{16}{289} - \frac{8}{289}i + \frac{1}{289}i^2 = \frac{15}{289} - \frac{8}{289}i}$
f)	$\boldsymbol{\frac{1+z_1}{1-z_2} = \frac{3-3i}{-3-i} = \frac{(3-3i)(-3+i)}{(-3)^2+1^2} = \frac{-9+3i+9i-3i^2}{10} = -\frac{6}{10} + \frac{12}{10}i = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i}$

Exercice 9 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = -1 - 2i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a)	$\boldsymbol{\frac{1}{z_1} = \cdots = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i}$
b)	$\boldsymbol{\frac{-2}{z_2} = \cdots = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i}$
c)	$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \cdots = \frac{8}{5} + \frac{9}{5}i}$
d)	$\boldsymbol{\frac{1+z_1}{1-z_2} = \cdots = -\frac{1}{2} - 2i}$

Exercice 10 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique.

a)	$\boldsymbol{(1+3i)z+2-4i=0 \Leftrightarrow z=\frac{-2+4i}{1+3i} \Leftrightarrow z=\frac{(-2+4i)(1-3i)}{1^2+3^2} \Leftrightarrow z=\frac{-2+6i+4i-12i^2}{10} \Leftrightarrow z=1+i}$
b)	$\boldsymbol{(-4-i)z+3-5i \Leftrightarrow z=\frac{-3+5i}{-4-i} \Leftrightarrow z=\frac{(-3+5i)(-4+i)}{(-4)^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{12-3i-20i+5i^2}{17} \Leftrightarrow z=\frac{7}{17}-\frac{23}{17}i}$
c)	$\boldsymbol{7z-4i=-iz+5 \Leftrightarrow (7+i)z=5+4i \Leftrightarrow z=\frac{5+4i}{7+i} \Leftrightarrow z=\frac{(5+4i)(7-i)}{7^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{35-5i+28i-4i^2}{50} \Leftrightarrow z=\frac{39}{50}+\frac{23}{50}i}$

Exercice 11 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation :

a) $\frac{z+1}{z-1}=1+i$ b) $\frac{z-2i}{z+3}=2-i$

Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}-\{1\}$ on a : $\boldsymbol{\frac{z+1}{z-1}=1+i \Leftrightarrow z+1=(1+i)(z-1)}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow z+1=z-1+iz-i \Leftrightarrow -iz=-2-i}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow z=-2i-i^2 \Leftrightarrow z=1-2i}$	**Pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}-\{3\}$ on a :** $\boldsymbol{\frac{z-2i}{z+3}=2-i \Leftrightarrow z-2i=(2-i)(z+3)}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow z-2i=2z+6-iz-3i \Leftrightarrow (-1+i)z=6-i}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow z=\frac{6-i}{-1+i} \Leftrightarrow z=\frac{(6-i)(-1-i)}{(-1)^2+1^2} \Leftrightarrow z=\frac{-6-6i+i+i^2}{2}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow z=-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}i}$

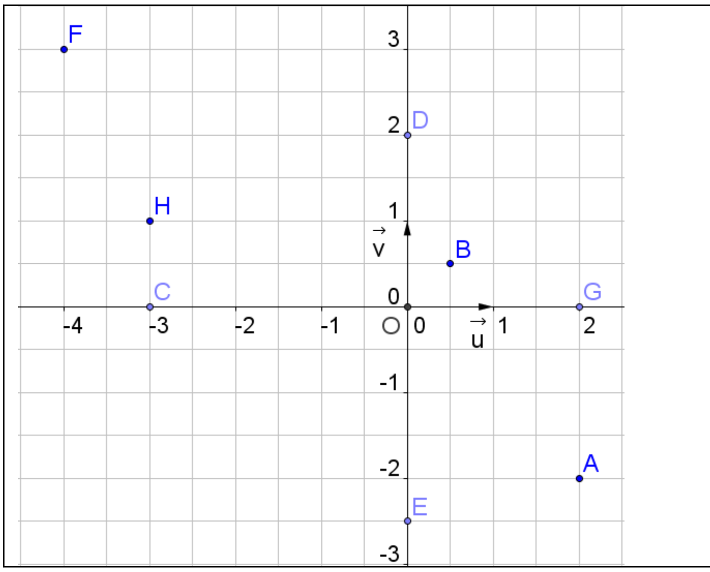
Exercice 12 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer les solutions complexes z_1 et z_2 tels que :

a) $\begin{cases} 2z_1+z_2=4 \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z_1+z_2=i \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ -2iz_1+4-2z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ (-2-2i)z_1=-4 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{-4}{-2-2i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{-4(-2+2i)}{(-2)^2+2^2} \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2z_1 \\ z_1=\frac{8}{8}-\frac{8}{8}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=4-2(1-i) \\ z_1=1-i \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_2=2+2i \\ z_1=1-i \end{cases}}$	$\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+z_2=i \\ -2iz_1+z_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+2iz_1=i \\ z_2=2iz_1 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} (2+2i)z_1=i \\ z_2=2iz_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{i}{(2+2i)} \\ z_2=2iz_1 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{i(2-2i)}{8} \\ z_2=2iz_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ z_2=2i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right) \end{cases}}$ $\boldsymbol{\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \end{cases}}$

Exercice 13 : Affixe



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, placer les points d'affixes :

a) $z_A=2-2i$

b) $z_B=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

c) $z_C=-3$

d) $z_D=2i$

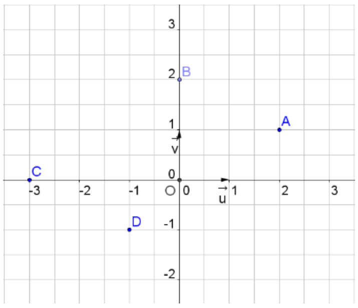
e) $z_E=-\frac{5}{2}i$

f) $z_F=-4+3i$

g) $z_G=2$

h) $z_H=-3+i$

Exercice 14 : Affixe de points

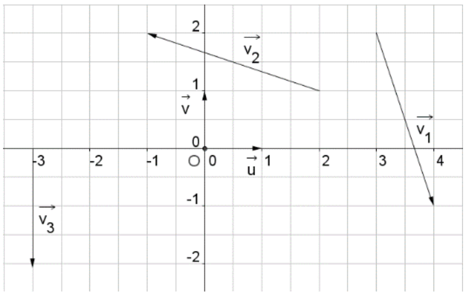


Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D représentés.

$\boldsymbol{z_A = 2 + i}$ **car** $\boldsymbol{A(2\,;1)}$
$\boldsymbol{z_B = 2i}$ **car** $\boldsymbol{B(0\,;2)}$
$\boldsymbol{z_C = -3}$ **car** $\boldsymbol{C(-3\,;0)}$
$\boldsymbol{z_D = -1 - i}$ **car** $\boldsymbol{D(-1\,;\,-1)}$

Exercice 15 : Affixe de vecteurs



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives z_1, z_2 et z_3 des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ représentés.

$\boldsymbol{z_1 = 1 - 3i}$ **car** $\boldsymbol{A(1\,;-3)}$
$\boldsymbol{z_2 = -3 + i}$ **car** $\boldsymbol{B(-3\,;1)}$
$\boldsymbol{z_C = -2i}$ **car** $\boldsymbol{C(0\,;-2)}$

Exercice 16 : Affixes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

1. On considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 + i, z_B = 4i, z_C = \frac{7}{2} + 2i$ et $z_D = \frac{3}{2} - i$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

On conjecture en faisant une figure que $\boldsymbol{ABCD}$ semble être un parallélogramme.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 4i - (-2 + i) = 4i + 2 - i = 2 + 3i}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = \frac{7}{2} + 2i - \left(\frac{3}{2} - i\right) = \frac{7}{2} + 2i - \frac{3}{2} + i = 2 + 3i}$
Ainsi $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}}$ donc $\boldsymbol{ABCD}$ est un parallélogramme.

2. On considère les quatre points P, Q, R et S d'affixes respectives $z_P = -1 + 2i, z_Q = -2 + 5i, z_R = 2 + 4i$ et $z_S = 3 + i$. Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$?

On conjecture en faisant une figure que $\boldsymbol{PQRS}$ semble être un parallélogramme.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{PQ}} = z_Q - z_P} = -2 + 5i - (-1 + 2i) = \boldsymbol{-2 + 5i + 1 - 2i = -1 + 3i}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{SR}} = z_R - z_S} = 2 + 4i - (3 + i) = \boldsymbol{2 + 4i - 3 - i = -1 + 3i}$
Ainsi $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{PQ}} = z_{\overrightarrow{SR}}}$ donc $\boldsymbol{PQRS}$ est un parallélogramme.

3. On considère les trois points E, F et G d'affixes respectives $z_E = 2 + 2i, z_F = 4 + i$, et $z_G = -4 + 5i$. Que peut-on dire des points E, F et G ?

On conjecture en faisant une figure que les points $\boldsymbol{E, F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont alignés.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = 4 + i - (2 + 2i) = 4 + i - 2 - 2i = 2 - i}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{EG}} = z_G - z_E = -4 + 5i - (2 + 2i) = -6 + 3i = -3z_{\overrightarrow{EF}}}$
Ainsi les vecteurs $\boldsymbol{\overrightarrow{EF}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{EG}}$ sont colinéaires donc les points $\boldsymbol{E, F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont alignés.

Exercice 17 : Affixes et équations

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + 2i\ ;\ z_B = 1 + 4i$ et $z_C = a + 6i$.

Déterminer le réel a tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient égaux.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{BC}}}$
$\boldsymbol{z_B - z_A = z_C - z_B}$
$\boldsymbol{1 + 4i - (-1 + 2i) = a + 6i - (1 + 4i)}$
$\boldsymbol{1 + 4i + 1 - 2i = a + 6i - 1 - 4i}$
$\boldsymbol{2 + 2i = a - 1 + 2i}$
$\boldsymbol{a = 3}$

Exercice 18 : Affixes et parallélogrammes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2-\frac{3}{4}i, z_B = -1+2i$ et $z_C = 5+\frac{1}{2}i$.

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Vérifier sur un graphique.

$\boldsymbol{ABCD}$ **est un parallélogramme** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

$\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = z_C + z_A - z_B$

$\Leftrightarrow z_D = 5+\frac{1}{2}i+2-\frac{3}{4}i-(-1+2i)$

$\Leftrightarrow z_D = 8-\frac{9}{4}i$

Exercice 19 : Affixes et équation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -5+4i$; $z_B = 2+6i$ et $z_C = -1-3i$.

On considère aussi le vecteur $\vec{u}$ d'affixes : $z = 4-i$

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $= 2+6i-(-5+4i)$ $= 2+6i+5-4i$ $= 7+2i$	$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$ $= -1-3i-(-5+4i)$ $= -1-3i+5-4i$ $= 4-7i$

2. Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$.

$z_{\overrightarrow{AD}} = z$

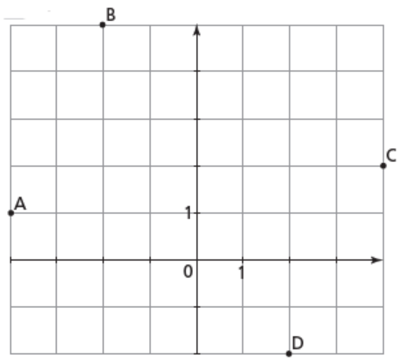
$z_D - z_A = z$

$z_D = z + z_A$

$z_D = 4-i-5+4i$

$z_D = -1+3i$

Exercice 20 : Affixes et parallélogramme



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -4+i$; $z_B = -2+5i$ et $z_C = 4+2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

$= -2+5i-(-4+i)$

$= -2+5i+4-i$

$= 2+4i$

3. Placer le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
   En déduire l'affixe du point D.

$\boldsymbol{ABCD}$ **est un parallélogramme** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$

$\Leftrightarrow 2+4i = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow z_D = 4+2i-2-4i$

$\Leftrightarrow z_D = 2-2i$

Exercice 21 : Milieu

1. Soit les points A et B d'affixes respectives $2+3i$ et $-1+2i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?

On note M le milieu de $[AB]$ ainsi $z_M = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2+3i-1+2i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}i.$

2. Soit les points A et B d'affixes respectives $3-2i$ et $4+5i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?

On note M le milieu de $[AB]$ ainsi $z_M = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3-2i+4+5i}{2} = \frac{7}{2}+\frac{3}{2}i.$

Exercice 22 : Droites parallèles

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont ou ne sont pas parallèles sachant que les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

1. $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + 3i$; $z_C = -5 + 12i$ et $z_D = 10 + 27i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 3 + 3i - (1 + i)}$ $\boldsymbol{= 3 + 3i - 1 - i}$ $\boldsymbol{= 2 + 2i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C}$ $\boldsymbol{= 10 + 27i - (-5 + 12i)}$ $\boldsymbol{= 10 + 27i + 5 - 12i}$ $\boldsymbol{= 15 + 15i}$
On remarque $z_{\overrightarrow{CD}} = 7,5 z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc (AB) et (CD) sont parallèles.	

2. $z_A = -2 + 6i$; $z_B = 6$; $z_C = 10 - 12i$ et $z_D = -10 - 3i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 6 - (-2 + 6i)}$ $\boldsymbol{= 6 + 2 - 6i}$ $\boldsymbol{= 8 - 6i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C}$ $\boldsymbol{= -10 - 3i - (10 - 12i)}$ $\boldsymbol{= -10 - 3i - 10 + 12i}$ $\boldsymbol{= -20 + 9i}$
$\frac{-20}{8} = -\frac{5}{2}$ **et** $\frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$ **Il n'y a aucune relation entre $z_{\overrightarrow{CD}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.**	

3. $z_A = 0{,}8 + i$; $z_B = 1{,}3 + 3i$; $z_C = 5 + 1{,}9i$ et $z_D = 5{,}3 + 3{,}1i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 1,3 + 3i - (0,8 + i)}$ $\boldsymbol{= 1,3 + 3i - 0,8 - i}$ $\boldsymbol{= 0,5 + 2i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C}$ $\boldsymbol{= 5,3 + 3,1i - (5 + 1,9i)}$ $\boldsymbol{= 5,3 + 3,1i - 5 - 1,9i}$ $\boldsymbol{= 0,3 + 1,2i}$
$\frac{0,5}{0,3} = \frac{5}{3}$ **et** $\frac{2}{1,2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ **On remarque $z_{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{3} z_{\overrightarrow{CD}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc (AB) et (CD) sont parallèles.**	

Exercice 23 : Points alignés

Démontrer que les points A, B et C sont, ou non, alignés sachant que les points A, B et C ont pour affixes respectives :

1. $z_A = 6 + 2i$; $z_B = 5i$; $z_C = -2 + 6i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 5i - (6 + 2i)}$ $\boldsymbol{= 5i - 6 - 2i}$ $\boldsymbol{= -6 + 3i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A}$ $\boldsymbol{= -2 + 6i - (6 + 2i)}$ $\boldsymbol{= -2 + 6i - 6 - 2i}$ $\boldsymbol{= -8 + 4i}$
$\frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$ **On remarque $z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{4}{3} z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés.**	

2. $z_A = -1$; $z_B = 1 + 5i$; $z_C = -1 - i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 1 + 5i - (-1)}$ $\boldsymbol{= 1 + 5i + 1}$ $\boldsymbol{= 2 + 5i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A}$ $\boldsymbol{= -1 - i - (-1)}$ $\boldsymbol{= -1 - i + 1}$ $\boldsymbol{= -i}$
Il n'y 'a pas de relation entre $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.	

3. $z_A = 7 - 2i$; $z_B = 7 + 3i$; $z_C = 7 - 9i$

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ $\boldsymbol{= 7 + 3i - (7 - 2i)}$ $\boldsymbol{= 7 + 3i - 7 + 2i}$ $\boldsymbol{= 5i}$	$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A}$ $\boldsymbol{= 7 - 9i - (7 - 2i)}$ $\boldsymbol{= 7 - 9i - 7 + 2i}$ $\boldsymbol{= -7i}$
On remarque $z_{\overrightarrow{AC}} = -\frac{7}{5} z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés.	

4. $z_A = -186 + 17i$; $z_B = -45i$; $z_C = 78 - 71i$

<table>
<tr>
<td>$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
$= -45i - (-186 + 17i)$
$= -45i + 186 - 17i$
$= 186 - 62i$</td>
<td>$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$
$= 78 - 71i - (-186 + 17i)$
$= 78 - 71i + 186 - 17i$
$= 264 - 88i$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\frac{264}{186} = \frac{44}{31}$ et $\frac{-88}{-62} = \frac{44}{31}$
On remarque $z_{\overrightarrow{AC}} = \frac{44}{31} z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc A, B et C sont alignés.</td>
</tr>
</table>