Chapitre 8 : Dérivation (3) : Fonctions dérivées et variations (correction)

Remarque : ***En règle générale, je ne me préoccuperai pas du domaine de dérivabilité des fonctions et supposerai qu'elle est dérivable sur l'intervalle donné.***

Compétence : Du sens de variation au signe de la dérivée

Exercice 1 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable et croissante sur $[3\,;\,+\infty[$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[3\,;\,+\infty[$?

Pour tout $\boldsymbol{x \in [3\,;\,+\infty[}$ on a $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$

2. Soit f une fonction dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}$. Quel est le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$?

Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ on a $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et croissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
   a. Quel est le signe de la dérivée de f sur $]-\infty\,;4]$?

$\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ sur $\boldsymbol{]-\infty\,;4]}$.

   b. Quel est le signe de la dérivée de f sur $[4\,;\,+\infty[$?

$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ sur $\boldsymbol{[4\,;\,+\infty[}$.

Exercice 2 : Du sens de variation au signe de la dérivée

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que f est croissante sur $]-\infty-5]$ et décroissante sur $[-5\,;\,+\infty[$. Recopier et compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

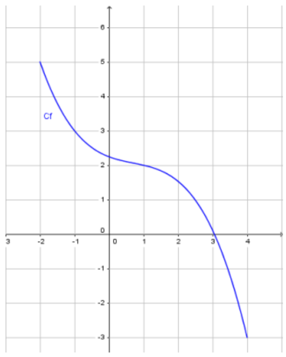
2. Soit f une fonction dérivable sur $[-8\,;8]$ et dont le tableau de variations est le suivant :

x	-8		-3		5		8
f	-1	↗	4	↘	0	↗	2

Quel est le signe de la dérivée de f sur :

a. $[-8\,;\,-3]$	b. $[-3\,;\,5]$	c. $[5\,;\,8]$
$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$	$\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$	$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$

Exercice 3 : Du sens de variation au signe de la dérivée



On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\,;4]$ dont on donne la représentation graphique ci-contre.

1. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de f sur $[-2\,;4]$.

La fonction $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $\boldsymbol{[-2\,;4]}$.

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.

$\boldsymbol{f'(x)}$ est négatif sur $\boldsymbol{[-2\,;4]}$.

Compétence : Du signe de la dérivée au sens de variation

Exercice 4 : Du signe de la dérivée au sens de variation

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-7\,;\,+\infty[$ telle que $f'(x)$ est négatif pour tout réel $x \in [-7\,;\,+\infty[$.
   Quel est le sens de variation de f sur $[-7\,;\,+\infty[$?

La fonction f est décroissante sur $[-7\,;\,+\infty[$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = x^2 + 3$ tout réel x.
   Quel est le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$?

Pour tout réel x, $f(x) > 0$ ainsi la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ est positif sur $]-\infty;\ 5]$ et négatif sur $[5\,;\,+\infty[$.
   a. Quel est le sens de variation de f sur $]-\infty;\ 5]$?

La fonction f est croissante sur $]-\infty;\ 5]$.

   b. Quel est le sens de variation de f sur $[5\,;\,+\infty[$?

La fonction f est décroissante sur $[5\,;\,+\infty[$.

Exercice 5 : Du signe de la dérivée au sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En déduire les variations de la fonction f.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty;\ -3]$ et sur $[4\,;\,+\infty[$.
La fonction f est croissante sur $[-3\,;\,4]$.

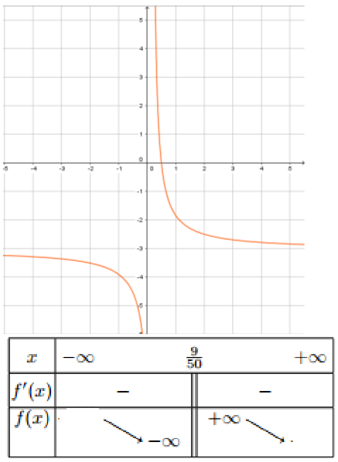
Exercice 6 : Associer à chaque courbe, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

Voici les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ et de leurs fonctions dérivées f', g', h' et k'.

La courbe représentant f, g, h et k sont donnés, respectivement, par le graphique 1, 2, 3 et 4.

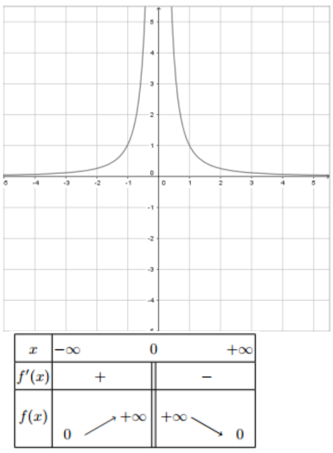
Associer à chaque courbe numérotée de 1 à 4, la courbe de la fonction dérivée correspondante.

1.



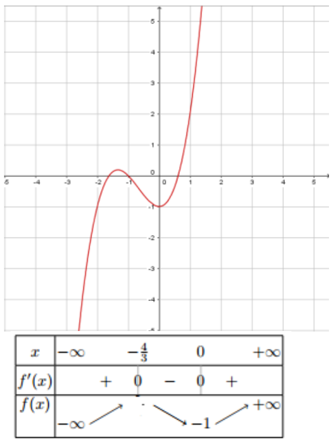
$1 \to d$

2.



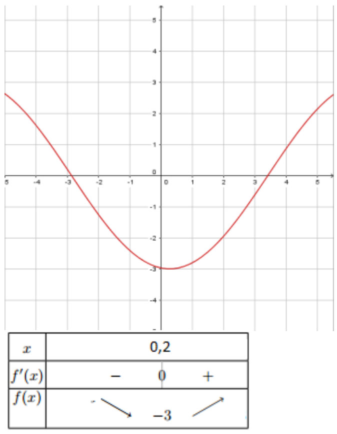
$2 \to c$

3.



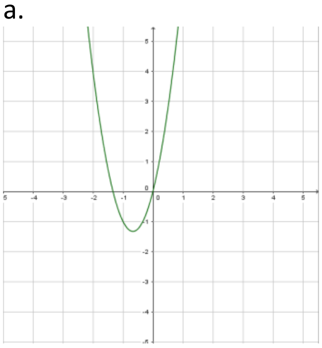
$3 \to a$

4.

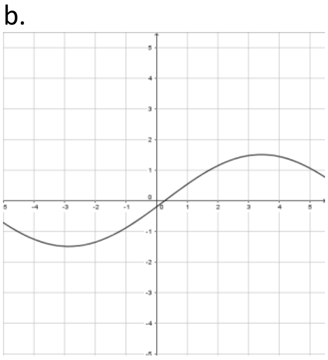


$4 \to b$

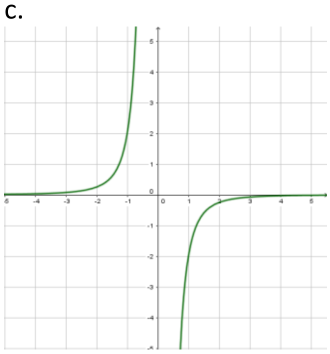
a.



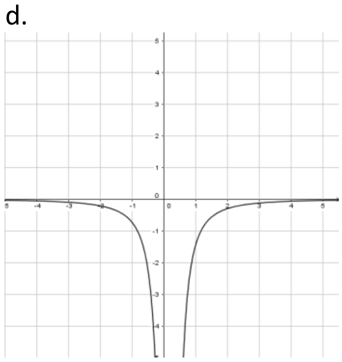
b.



c.



d.



Compétence : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Exercice 7 : Calculer la dérivée pour étudier le sens de variations

Donner le sens de variations des fonctions suivantes :

1. f définie sur $I = [-3\,;3]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x - 2}$

$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1.}$

Ou $\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1}$

x	-3		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↘	-4	↗	0

ou on utilise $\boldsymbol{m = 2 > 0.}$

2. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(x) = -3x^2 + x + 2$

$\boldsymbol{f'(x) = -6x + 1}$ **(fonction affine)**

$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6}.}$

Ou $\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}.}$

x	-3		$\frac{1}{6}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-28	↗	$\frac{25}{12}$	↘	-8

ou on utilise $\boldsymbol{m = -6 < 0.}$

3. f définie sur $I = [0\,;4]$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$ **(fonction trinôme)**

On résout $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{3x^2 - 12x + 9 = 0}$

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36}$ **et** $\boldsymbol{\sqrt{\Delta} = 6}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{12-6}{6}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{12+6}{6}}$

$\boldsymbol{x_1 = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{x_2 = 3}$

x	0		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗	4

on utilise $\boldsymbol{a = 3 > 0.}$

4. f définie sur $I = [-3\,;2]$ par $f(t) = -t^3 - 3t^2 + 9$

$\boldsymbol{f'(t) = -3t^2 - 6t}$ **(fonction trinôme)**

On résout $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{-3t^2 - 6t = 0}$

$\boldsymbol{-3t(t + 2) = 0 \Leftrightarrow -3t = 0}$ **ou** $\boldsymbol{t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 0}$ **ou** $\boldsymbol{t = -2}$

t	-3		-2		0		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	9	↘	5	↗	9	↘	-11

$\boldsymbol{a = -3 < 0.}$

5. f définie sur $I =]0\,; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$

$\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$ **avec** $\boldsymbol{u(x) = x^2 - 1}$ **donc** $\boldsymbol{u'(x) = 2x}$ **et**

$\boldsymbol{v(x) = \sqrt{x}}$ **donc** $\boldsymbol{v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$

$\boldsymbol{f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2+x^2-1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}.}$

Comme $\boldsymbol{2\sqrt{x} > 0}$ **alors** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{5x^2 - 1.}$

$\boldsymbol{5x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{5}}.}$

Or $\boldsymbol{x > 0}$ **donc** $\boldsymbol{x = \frac{1}{\sqrt{5}}.}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{5}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$-\frac{4}{5\sqrt{5}}$	↗	

$\boldsymbol{a = 5 > 0}$

$$2x\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} = 4x \times x = 4x^2$$

6. f définie sur $I = [0\,;10]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec** $\boldsymbol{u(x) = 2x + 1}$ **donc** $\boldsymbol{u'(x) = 2}$ **et**

$\boldsymbol{v(x) = x + 1}$ **donc** $\boldsymbol{v'(x) = 1}$ **avec** $\boldsymbol{v(x) \neq 0}$ **sur** $\boldsymbol{[0\,;10]}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0}$

x	0		10
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{21}{11}$

7. f définie sur $I = [-4\,;4]$ par $f(x) = \frac{4x}{x^2+x+1}$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec** $\boldsymbol{u(x) = 4x}$ **donc** $\boldsymbol{u'(x) = 4}$ **et** $\boldsymbol{v(x) = x^2 + x + 1}$ **donc**

$\boldsymbol{v'(x) = 2x + 1}$ **avec** $\boldsymbol{v(x) \neq 0}$ **sur** $\boldsymbol{[-4\,;4]}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$

$\boldsymbol{f'(x) = \frac{4(x^2+x+1)-(2x+1)(4x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4x^2+4x+4-8x^2-4x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-4x^2+4}{(x^2+x+1)^2}}$

Comme sur $[-4\,;4]$, $\boldsymbol{(x^2 + x + 1)^2 > 0}$ **alors** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{-4x^2 + 4}$**.**

$\boldsymbol{-4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1}$ **ou** $\boldsymbol{x = 1}$**.**

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{16}{13}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{16}{21}$

$a = -4 < 0$

8. f définie sur $I = \mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = x + 2 + \frac{1}{2x+4}$

$\boldsymbol{f(x) = x + 2 + \frac{1}{v(x)}}$

Avec $\boldsymbol{v(x) = 2x + 4}$ **donc** $\boldsymbol{v'(x) = 2}$**.**

$\boldsymbol{f'(x) = 1 + 0 - \frac{v'(x)}{v^2(x)}}$

$\boldsymbol{f'(x) = 1 - \frac{2}{(2x+4)^2}}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{(2x+4)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{(2x+4)^2}}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow (2x + 4)^2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 - 2 = 0}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 14 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 7 = 0}$

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 2 \times 7 = 8 \; et \; \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4}}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4}}$

$\boldsymbol{x_1 = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$ $\quad$ $\boldsymbol{x_2 = -2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$		-2		$\frac{1}{\sqrt{2}} - 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boldsymbol{a > 0}$

<u>**Deuxième méthode**</u> **pour résoudre :** $\boldsymbol{(2x + 4)^2 = 2}$

$\boldsymbol{2x + 4 = -\sqrt{2}}$ **ou** $\boldsymbol{2x + 4 = \sqrt{2}}$

$\boldsymbol{2x = -\sqrt{2} - 4}$ **ou** $\boldsymbol{2x = \sqrt{2} - 4}$

$\boldsymbol{x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2}$ **ou** $\boldsymbol{x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2}$

Exercice 8 : Sens de variations et tangente.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$$

1. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
$\boldsymbol{f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 dans un repère (O, I, J).

$\boldsymbol{f(0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{f'(0) = 9}$.
$\boldsymbol{T : y = f'(0)(x-0) + f(0)}$
$\boldsymbol{T : y = 9x}$

3. Etudier la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T.

On pose $\boldsymbol{p(x) = f(x) - 9x}$
$\boldsymbol{p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9x}$
$\boldsymbol{p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right)}$
Comme $\boldsymbol{x^2 \geq 0}$ **alors** $\boldsymbol{p(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{\frac{1}{3}x - 3}$
On résout $\boldsymbol{p(x) = 0}$
$\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = 0}$
$\boldsymbol{x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 0}$
$\boldsymbol{x^2 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\frac{1}{3}x - 3 = 0}$
$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{\frac{1}{3}x = 3}$
$\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 9}$

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{3}x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

m=$\frac{1}{3}$>0

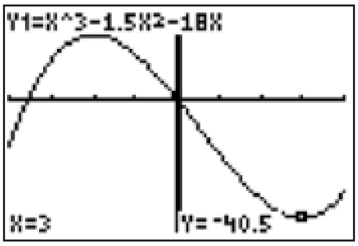
Sur$\boldsymbol{]-\infty\,; 9]}$, $\boldsymbol{p(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 9x \Leftrightarrow C_f}$ **est au-dessous de** $\boldsymbol{T}$.
De même sur$\boldsymbol{[9; +\infty[}$, $\boldsymbol{C_f}$ **est au-dessus de** $\boldsymbol{T}$.

Compétence : Extremums d'une fonction

Exercice 9 : Extremums d'une fonction polynôme.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x$

1. a. Tracer la courbe de f sur la calculatrice.
   b. Par lecture graphique, quel semble être le minimum de la fonction f sur $[-4\,;4]$? En quelle valeur de x semble-t-il atteint ?



Le minimum de $\boldsymbol{f}$ sur $[-4\,;\ 4]$ semble être $\boldsymbol{-40{,}5}$, atteint pour $\boldsymbol{x = 3}$.

2. a. Etudier le sens de variations de f sur $[-4\,;4]$.

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 3x - 18}$
$\boldsymbol{\Delta = \cdots = 225 = 15^2}$
Les racines sont $\boldsymbol{x_1 = -2}$ **et** $\boldsymbol{x_2 = 3}$.
$\boldsymbol{a = 3 > 0}$ **donc « + » à l'extérieur des racines.**

x	-4		-2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	22	$\searrow$	$-40{,}5$	$\nearrow$	-32

b. Déterminer le minimum de f sur $[-4\,;4]$.

Le minimum de $\boldsymbol{f}$ sur $[-4\,;\ 4]$ est $\boldsymbol{-40{,}5}$, atteint pour $\boldsymbol{x = 3}$.

Exercice 10 : Extremums d'une fonction quotient

Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par : $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x+2}$

1. Etudier le sens de variations de f sur $[-1\,;1]$.

$\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec** $\boldsymbol{u(x) = x^2 + x + 2}$ **donc** $\boldsymbol{u'(x) = 2x + 1}$ **et** $\boldsymbol{v(x) = x + 2}$ **donc**
$\boldsymbol{v'(x) = 1}$ **avec** $\boldsymbol{v(x) \neq 0}$ **sur** $\boldsymbol{[-1\,;1]}$**.**
$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$
$\boldsymbol{f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2)-(x^2+x+2)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x+x+2-x^2-x-2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}}$
Comme $\boldsymbol{(x+2)^2 > 0}$ **alors** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{x(x+4)}$**.**
$\boldsymbol{x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = -4}$**.**
Or $\boldsymbol{x \in [-1\,;1]}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **pour** $\boldsymbol{x = 0}$**.**

x	-1		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

2. En déduire les extremums de f sur ce même intervalle.

Sur $[-\mathbf{1}\,;\ \mathbf{1}]$**, le maximum de** $\boldsymbol{f}$ **est 2 atteint en** $\boldsymbol{x = -1}$ **et le minimum est 1 atteint en** $\boldsymbol{x = 0}$**.**

Compétence : Nombre de solutions d'une équation du type $\boldsymbol{f(x) = k}$

Exercice 11 :

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0		$-$		
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-3

1. Indiquer si f admet un extremum sur $[0\,;4]$. Si oui, pour quelle valeur de x ?

Sur $[\mathbf{0}\,;\ \mathbf{4}]$**, le maximum de** $\boldsymbol{f}$ **est 2 atteint en** $\boldsymbol{x = 1}$ **et le minimum est** $\boldsymbol{-3}$ **atteint en** $\boldsymbol{x = 4}$**.**

2. Quel est le signe de $f(x)$ sur $[0\,;1]$?

Pour tout $\boldsymbol{x \in [0\,;1]}$**, on a** $\boldsymbol{0 \leq f(x) \leq 2}$ **donc** $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$**.**

3. On admet que $f(2) = 0$.
   a. Compléter le tableau de variation avec 2 et $f(2) = 0$.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;4]$.

x	0		2		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	-3

4. a. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$ sur $[0\,;4]$.

Quand $\boldsymbol{x \in [0\,;1]}$**,** $\boldsymbol{f}$ **est croissante et** $\boldsymbol{f(x) > -1}$**. Il n'existe pas de solution de l'équation** $\boldsymbol{f(x) = -1}$ **sur** $\boldsymbol{[0\,;1]}$**.**
Quand $\boldsymbol{x \in [1\,;4]}$**,** $\boldsymbol{f}$ **est strictement décroissante et** $\boldsymbol{f(x) \in [-3\,;2]}$**. Or** $\boldsymbol{-1 \in [-3\,;2]}$**.**
Il existe donc un unique nombre $\boldsymbol{\alpha \in [1\,;4]}$ **tel que** $\boldsymbol{f(\alpha) = -1}$**.**
Conclusion : L'équation $\boldsymbol{f(x) = -1}$ **admet une seule solution sur** $\boldsymbol{[0\,;4]}$**.**

b. Même question avec $f(x) = 0$.

Quand $\boldsymbol{x \in [0\,;1]}$**,** $\boldsymbol{f}$ **est croissante et** $\boldsymbol{f(x) \in [0\,;2\,]}$**. Or** $\boldsymbol{0 \in [0\,;2]}$**.**
Il existe donc un unique nombre $\boldsymbol{\alpha \in [0\,;1]}$ **tel que** $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$**.**
Quand $\boldsymbol{x \in [1\,;4]}$**,** $\boldsymbol{f}$ **est strictement décroissante et** $\boldsymbol{f(x) \in [-3\,;2]}$**. Or** $\boldsymbol{0 \in [-3\,;2]}$**.**
Il existe donc un unique nombre $\boldsymbol{\beta \in [1\,;4]}$ **tel que** $\boldsymbol{f(\beta) = 0}$**.**
Conclusion : L'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$ **admet deux solutions sur** $\boldsymbol{[0\,;4]}$**.**

Exercice 12 :

Soit f une fonction dérivable sur $[-4\,;3]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-4	-3	-2	-1,5	0	1	3
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{3}{2}$ ↗	0 ↗	2

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction f admet-elle :

a. un maximum ?	**f admet un maximum pour $x = 3$.**
b. un minimum ?	**f admet un minimum pour $x = 0$.**

2. Peut-on donner le signe de $f(x)$ sur $[-4\,;3]$?

Non, car on ne connaît pas les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-4\,;3]$.

Quand $x \in [-4\,;-2]$, f est croissante et $f(x) \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$. Or $0 \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$.
Il existe donc un unique nombre $x_1 \in \left[-1\,;\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_1) = 0$.
Quand $x \in [-2\,;0]$, f est strictement décroissante et $f(x) \in \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$. Or $0 \in \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.
Il existe donc un unique nombre $x_2 \in \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_2) = 0$.
Quand $x \in [0\,;3]$, f est croissante et $f(x) \in \left[-\frac{3}{2}\,;2\right]$. Or $0 \in \left[-\frac{3}{2}\,;2\right]$.
Il existe donc un unique nombre $x_3 \in \left[-\frac{3}{2}\,;2\right]$ tel que $f(x_3) = 0$.
Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions sur $[-4\,;3]$.

4. On admet maintenant que $f(-3) = 0$, $f(-1{,}5) = 0$ et $f(1) = 0$.
   En déduire l'ensemble des solutions sur $[-4\,;3]$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

$S = [-3\,;\,-1{,}5] \cup [1\,;3]$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-1\,;5]$ par : $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

1. Dresser le tableau de variations de f.

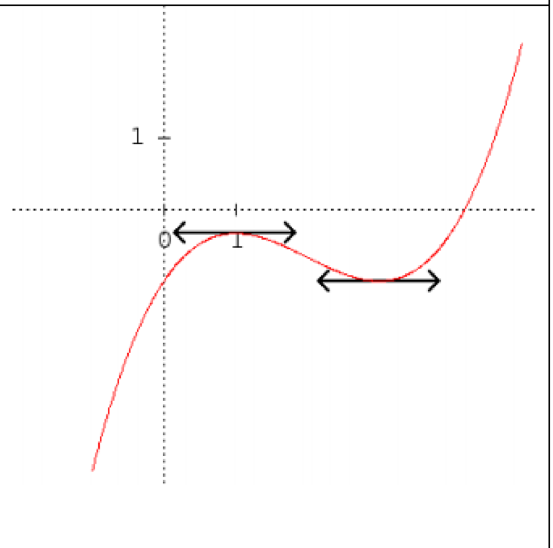
Pour tout $x \in [-1\,;5]$ on a : $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ (fonction trinôme).
$\Delta = \cdots = 1 = 1^2$
Les racines sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.
$a = \frac{1}{2} > 0$ donc « + » à l'extérieur des racines.

x	-1	1	3	5
$f'(x)$	$+$	0	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$-\frac{11}{3}$ ↗	$-\frac{1}{3}$ ↘	-1 ↗	$\frac{7}{3}$

2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour tout réel x de I.

Pour tout $x \in [-1\,;5]$ on a : $-\frac{11}{3} \leq f(x) \leq \frac{7}{3}$.

3. Tracer C_f et ses tangentes horizontales.

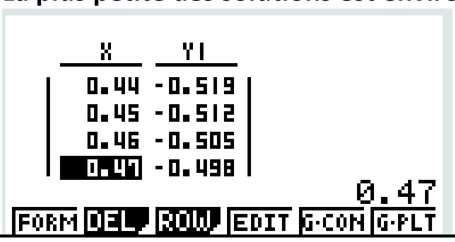


4. a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$?

L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ possède 3 solutions.
(Pour la rédaction voir exercices 11 et 12).

b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la plus petite des solutions.

La plus petite des solutions est environ $0{,}47$



X	Y1
0.44	-0.519
0.45	-0.512
0.46	-0.505
0.47	-0.498

0.47

FORM DEL ROW EDIT G·CON G·PLT

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $I = [-10\,;10]$ par : $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 2$

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$

$\boldsymbol{f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4}$

$\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2+4x+4) = x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4 = f'(x)}$

2. En déduire le sens de variation de f.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$.
Comme $(x+2)^2 \geq 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.
Or $x - 1 > 0$ pour $x > 1$.

x	-10		-2		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1542	↘	6	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	3462

3. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$?

Quand $x \in [-10\,;1]$, f est décroissante et $f(x) \in \left[-\frac{3}{4}\,;1542\right]$. Or $0 \in \left[-\frac{3}{4}\,;1542\right]$
Il existe donc un unique nombre $x_1 \in [-10\,;1]$ tel que $f(x_1) = 0$. (plus précisément $x_1 \in [-2\,;1]$)
Quand $x \in [1\,;10]$, f est strictement croissante et $f(x) \in \left[-\frac{3}{4}\,;3462\right]$. Or $0 \in \left[-\frac{3}{4}\,;3462\right]$.
Il existe donc un unique nombre $x_2 \in [1\,;10]$ tel que $f(x_2) = 0$.
Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[-10\,;10]$.

4. Discuter, suivant la valeur du réel m, du nombre de solutions de l'équations $f(x) = m$.

Pour tout $m < -\frac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solutions.
Pour tout $m = -\frac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ a une seule solution.
Pour tout $m > -\frac{3}{4}$,, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions : une plus petite que 1 et une plus grande que 1.

Compétence : Obtention d'inégalités

Exercice 15 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x + 18$

1. Dresser le tableau de variations de f.

$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 3}$
$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1.}$
Les racines sont donc -1 et 1.
$a = -3 < 0$ donc « $-$ » à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	16	↗	20	↘	

2. Déterminer le signe de f sur $]-\infty\,;1]$.

$f(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1]$.

3. a. Vérifier que $f(3) = 0$.

$\boldsymbol{f(3) = -3^3 + 3 \times 3 + 18 = -27 + 9 + 18 = 0}$

b. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1\,;\,+\infty[$.

$f(x) \geq 0$ sur $[1\,;\,3]$ et $f(x) \leq 0$ sur $[3\,;\,+\infty[$.

c. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x^3 \leq 3x + 18$?

$\boldsymbol{x^3 \leq 3x + 18 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0}$
$\boldsymbol{S =]-\infty\,;3]}$

Exercice 16 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $I = [0\,;4]$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \left(1 + \frac{1}{4}x\right)$

1. Dresser le tableau de variations de f.

Sur $]0\,;4]$ f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = \frac{2-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$.
Comme $\sqrt{x} \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - \sqrt{x}$.
$2 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$ ainsi sur $[0\,;4]$ $f'(x) \geq 0$.

x	0		4
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0
$f(x)$	-1	↗	0

2. En déduire que pour tout $x \in I$: $\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$

$f(x) \leq 0$ d'après le tableau de variations ainsi $\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$

3. Développer $(0{,}5\sqrt{x} - 1)^2$, puis redémontrer que : $\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$

$\left(0{,}5\sqrt{x} - 1\right)^2 = \frac{1}{4}x - \sqrt{x} + 1 = -\sqrt{x} + \left(1 + \frac{1}{4}x\right)$
Or $\left(0{,}5\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0$ cad $\sqrt{x} \leq 1 + \frac{1}{4}x$.

Exercice 17 : Obtention d'inégalités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2$

1. Etudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^2(x-1)$ est du signe de $x - 1$ (car $x^2 \geq 0$).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

2. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$
Les racines sont 0 et $\frac{2}{3}$.
$a = 3 > 0$ donc « + » à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	

3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

$f(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ et $f'(2) = 2 \times (6-2) = 8$.
$T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$T : y = 8(x-2) + 4$
$T : y = 8x - 12$

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
   a. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = 3x^2 - 2x - 8$
$\Delta = \cdots = 100 = 10^2$
Les racines sont $-\frac{4}{3}$ et 2.
$a = 3 > 0$ donc « + » à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	$\frac{500}{27}$	↘	0	↗	

   b. En utilisant le minimum de g sur $[2\,;\,+\infty[$, démontrer que $g(x)$ est positif sur $[2\,;\,+\infty[$.

$x \geq 2$ or la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$, donc $g(x) \geq g(2)$. $g(2) = 0$ donc $g(x) \geq 0$

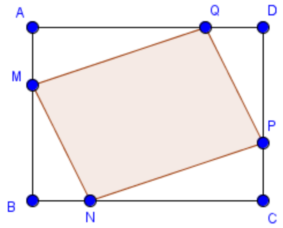
5. Déduire des questions précédentes la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T sur $[2\,;\,+\infty[$.

Sur $[2\,;\,+\infty[$ $g(x) \geq 0$ donc $x^3 - x^2 - 8x + 12 \geq 0$ donc $x^3 - x^2 \geq 8x - 12$ donc $f(x) \geq 8x - 12$.
Sur $[2\,;\,+\infty[$ C_g est au-dessus de T.

Compétence : Problèmes

Exercice 18 : Aire et dérivée

$ABCD$ est un rectangle de dimensions :
$AB = 3\ cm$ et $BC = 4\ cm$.



M, N, P et Q sont quatre points tels que : $AM = BN = CP = DQ = x$.

1. On admet que $MNPQ$ est un parallélogramme. On désigne par $A(x)$ l'aire du parallélogramme$MNPQ$.
   Déterminer $A(x)$ en fonction de x.

$\boldsymbol{A(x) = 3 \times 4 - 2A(BNM) - 2A(NCP) = 12 - x(3 - x) - x(4 - x) = 2x^2 - 7x + 12.}$

2. a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par $f(x) = 2x^2 - 7x + 12$.

$f'(x) = 4x - 7$ (focntion affine).

x	0		$\frac{7}{4}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↘	$\frac{47}{8}$	↗	9

   b. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire $A(x)$ est minimale.

L'aire $A(x)$ est minimale pour $x = \frac{7}{4} = 1,75\ cm$ et cette aire vaut $\frac{47}{8}\ cm^2$.

Exercice 19 : Bénéfice et dérivée

Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 80 tonnes de produit chimique. Le coût de fabrication de x tonnes, exprimé en centaines d'euros, est donné par la fonction C définie par :
$\boldsymbol{C(x) = 0,01x^3 - 1,05x^2 + 37x + 40}$, $x \in [0\,;80]$. Chaque tonne est vendue 19 centaines d'euros. On note $R(x)$, la recette en centaines d'euros, obtenue pour la vente de x tonnes de produit.

1. Montrer que le bénéfice mensuel, en centaines d'euros, est donné par la fonction B définie par :

$$\boldsymbol{B(x) = -0,01x^3 + 1,05x^2 - 18x - 40}$$

Chaque tonne est vendue 19 centaines d'euros donc $R(x) = 19x$.
$\boldsymbol{B(x) = R(x) - C(x) = 19x - (0,01x^3 - 1,05x^2 + 37x + 40)}$
$\boldsymbol{= 19x - 0,01x^3 + 1,05x^2 - 37x - 40 = -0,01x^3 + 1,05x^2 - 18x - 40}$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;\,80]$.

$B'(x) = -0{,}03x^2 + 2{,}1x - 18$
$\boldsymbol{\Delta = \cdots = 2,25 = 1,5^2}$
Les racines sont 10 et 60.
$a = -0,03 < 0$ donc « $-$ » à l'extérieur des racines.

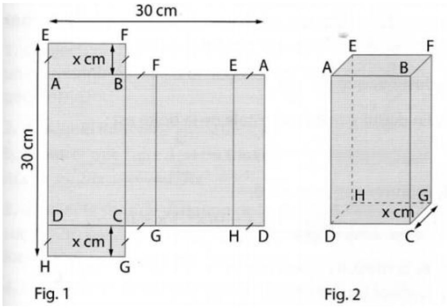
x	0		10		60		80
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-40	↘	-125	↗	500	↘	120

3. Déduire de la question précédente le nombre de tonnes que doit vendre l'entreprise pour que son bénéfice mensuel soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice ?

L'entreprise doit vendre 60 tonnes pour que son bénéfice mensuel soit maximal. Ce bénéfice est alors de 500 centaines d'euros c'est à dire 50 000€.

Exercice 20 : Volume et dérivée

La figure 1 ci-dessous représente un patron du parallélépipède rectangle de la figure 2.
Ce patron est fabriqué à partir d'une feuille cartonnée carrée de 30 cm de côté.
Le parallélépipède ainsi obtenu est une boîte de lait



1. Démontrer que le volume $V(x)$ du parallélépipède $ABCDEFGH$ s'exprime en cm^3 pour $x \in [0\,;15]$ par

$$V(x) = 2x(15-x)^2$$

Pour tout $x \in [0\,;15]$ on a $AB + x + EF + x = 30$, comme $AB = EF$, nous obtenons $AB = 15 - x$.
$AD = 30 - 2x = 2(15-x)$.
Le volume est alors pour tout $x \in [0\,;15]$, $V(x) = AB \times AE \times AD = 2x(15-x)^2$.

2. Dresser le tableau de variations de V sur [0 ; 15].

$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$
$\Delta = \cdots = 3600 = 60^2$
Les racines sont 5 et 15.
$a = 6 > 0$ donc « + » à l'extérieur des racines.

x	0		5		15
$V'(x)$		+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	1000	↘	0

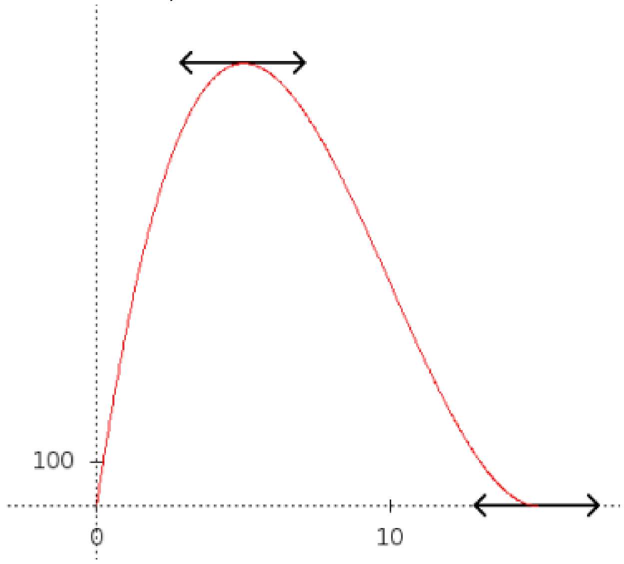
3. Pour quelle valeur de x le volume de cette boîte est-il maximal ? Calculer ce volume maximal.

Le volume de cette boite est maximal pour $x = 5$. Ce Volume sera alors de $1000\ cm^3$.

4. Compléter le tableau de valeur suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0	392	676	864	968	1000	972	896	784	648	500	352	216	104	28	0

5. Tracer la courbe représentative de V dans le plan muni d'un repère orthogonal, 1cm représentant en abscisses 1cm, et en ordonnée 100 cm^3.



6. Le fabriquant voudrait que le volume de cette boîte soit de 0,5 Litres, c'est à dire 500 cm^3.
   a. Combien de valeurs de x permettent de fabriquer des boîtes de 0,5 Litre? Les faire figurer sur le graphique.

La droite d'équation $y = 500$ coupe la courbe en deux points distincts. Donc il y a deux valeurs de x qui permettent de fabriquer des boites de lait de $0,5$ litre.

   b. En déterminer des valeurs approchées à 0,1 près à l'aide de la calculatrice.

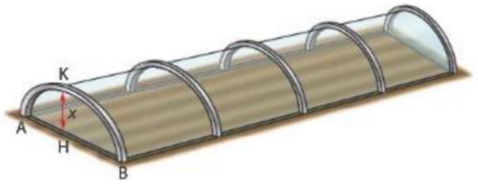
Les deux valeurs de x sont donc égales à environ $1,3$ cm et 10 cm.

   c. Parmi ces valeurs, laquelle retiendra le fabriquant?

Le fabriquant choisira $x = 10$ cm car la surface en carton de la boite a alors pour aire$400\ cm^2$,alors que pour $x = 1,3$, l'aire est de $857,62$ cm².

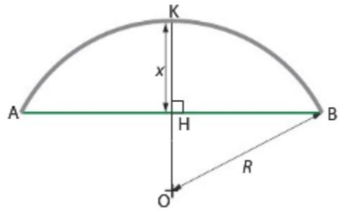
Exercice 21 : Rayon de cintrage minimal

Un jeune agriculteur bio veut fabriquer une serre pour protéger ses cultures de tomates dont les dimensions sont :



$$AB = 400\ cm$$
$$100\ cm \leq x \leq 300\ cm$$

La distance $HK = x$ avec H milieu de $[AB]$ est appelé la flèche. Le rayon de cintrage est noté R.
Ainsi $R = OA = OB = OK$.



On veut déterminer pour quelle valeur de x le rayon R de cintrage est minimal.

1. a. Exprimer, de deux façons différentes, R en fonction de x et de OH.

$\boldsymbol{R = OH + x}$ **Ainsi** $\boldsymbol{R^2 = (OH + x)^2 = OH^2 + 2xOH + x^2}$	**Dans le triangle $\boldsymbol{OHB}$ rectangle en $\boldsymbol{H}$, on a :** $\boldsymbol{R^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + 40\,000}$ **Ainsi** $\boldsymbol{R = \sqrt{OH^2 + 40\,000}}$

b. En déduire que $OH = \frac{40000-x^2}{2x}$

$\boldsymbol{OH^2 + 2xOH + x^2 = OH^2 + 40\,000}$ soit $\boldsymbol{2xOH = 40\,000 - x^2}$ soit $\boldsymbol{OH = \frac{40000-x^2}{2x}}$

c. Exprimer alors R en fonction de x.

$$R = OH + x = \boldsymbol{\frac{40000 - x^2}{2x} + x = \frac{40000 - x^2 + 2x^2}{2x} = \frac{x^2 + 40000}{2x} = \frac{20000}{x} + \frac{x}{2}}$$

2. Soit f la fonction définie sur $[100\,;300]$ par $f(x) = \frac{20000}{x} + \frac{x}{2}$.

a. Etudier les variations de f sur $[100\,;300]$

$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{20000}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-40000+x^2}{2x^2} = \frac{(x-200)(x+200)}{2x^2}}$
Comme $\boldsymbol{2x^2 \geq 0}$ alors $\boldsymbol{f'(x)}$ est du signe du numérateur.
Les racines sont donc 200 et $\boldsymbol{-200 \notin [100 : 300]}$.
$\boldsymbol{a = 1 > 0}$ donc « + » à l'extérieur des racines.

x	100		200		300
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$		↘	200	↗	

b. Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un minimum.

$\boldsymbol{f}$ admet un minimum pour $\boldsymbol{x = 200}$. Ce minimum vaut 200.

3. a. Pour quelle valeur de la flèche x, le rayon est-il minimal ?

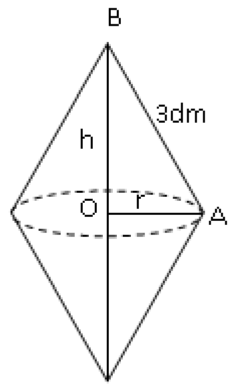
On remarque que $\boldsymbol{R = f(x)}$ ainsi le rayon est minimal pour $\boldsymbol{x = 200}$.

b. Quelle est alors la particularité de l'arc AB ?

L'arc $\boldsymbol{AB}$ est donc un demi-cercle.

Exercice 22 :

On veut construire une bouée ayant la forme d'un double cône.
Unité choisie : le décimètre (dm) pour tout l'exercice.
On désigne par h la hauteur OB du cône.
On désigne par r le rayon OA de base.
On fixe la longueur AB à 3 dm.



1) a) Exprimer le volume V de la bouée en fonction de r et de h.

Le volume d'un cône de révolution est :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \times base \times hauteur}$$

donc ici, pour les 2 cônes, avec la base circulaire :

$\boldsymbol{V = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h}$ **donc** $\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi r^2 h}$

b) En considérant le triangle OAB, déterminer une relation entre r et h.

Le triangle $\boldsymbol{OAB}$ est rectangle en $\boldsymbol{O}$ donc d'après le théorème de Pythagore :

$\boldsymbol{AB^2 = OA^2 + OB^2}$

$\boldsymbol{3^2 = r^2 + h^2}$

$\boldsymbol{r^2 = 9 - h^2}$

c) En déduire que le volume peut s'écrire sous la forme : $V = \frac{2}{3}\pi(9h - h^3)$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi r^2 h}$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi (9 - h^2)\, h}$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi (9h - h^3)}$

2) a) Etudier les variations de $V(h)$ sur [0 ; 3]

Remarque : h n'est définie qu'entre 0 et 3 :
$h = 0$ *quand B et O sont confondus (le cône est aplati… il n'y a plus qu'un disque)*
et $h = 3$ *quand A et O sont confondus (le cône est allongé… il n'y a plus qu'un « piquet »)*

$\boldsymbol{V'(h) = \frac{2}{3}\pi(9 - 3h^2)}$

$\boldsymbol{V'(h)}$ **est donc du signe de** $\boldsymbol{-3h^2 + 9}$

On résout $\boldsymbol{-3h^2 + 9 = 0}$

$\boldsymbol{h^2 = 3}$

$\boldsymbol{h = -\sqrt{3} \notin [0\,;3]}$ **ou** $\boldsymbol{h = \sqrt{3}}$

Comme $\boldsymbol{a = -3 < 0}$ on a :

h	0		$\sqrt{3}$		3
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$4\cdot\sqrt{3}\cdot\pi$	$\searrow$	0

$\boldsymbol{V_0 = V(\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi(9\sqrt{3} - (\sqrt{3})^3) = \frac{2}{3}\pi(6\sqrt{3}) = 4\pi\sqrt{3}}$

b) Pour quelle valeur h_0 le volume est-il maximal ? Que vaut alors ce volume V_0 ?

(on attend bien sûr des valeurs exactes)

Le volume est maximal pour $\boldsymbol{h_0 = \sqrt{3}}$ dm et vaut alors $\boldsymbol{V_0 = 4\pi\sqrt{3}}$ dm^3. (≈ 21,77 dm^3).

c) Quel est le rayon r_0 correspondant à ce volume maximal ?

On reprend la relation entre $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{r^2 + h^2 = 9}$

$\boldsymbol{r_0^2 + h_0^2 = 9}$ **avec** $\boldsymbol{h_0 = \sqrt{3}}$

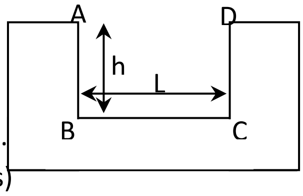
$\boldsymbol{r_0^2 + 3 = 9}$

$\boldsymbol{r_0^2 = 6}$

On sait que r est positif donc on obtient : $\boldsymbol{r_0 = \sqrt{6}}$ **dm.**

Exercice 23 :

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section rectangulaire $ABCD$.



L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m².
On désigne par h la hauteur et par L la largeur (en mètres) de cette section intérieure. On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $g(h) = AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimum.

1) a) Ecrire L en fonction de h.

L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m² ainsi :

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{L \times h = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{L = \frac{1}{2h}}$

b) Montrer que $g(h) = 2h + \frac{1}{2h}$.

$\boldsymbol{g(h) = AB + BC + CD}$

$\boldsymbol{g(h) = h + L + h}$

$\boldsymbol{g(h) = 2h + \frac{1}{2h}}$

c) Démontrer que la dérivée de g est : $g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$.

$\boldsymbol{g'(h) = 2 + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = 2 - \frac{1}{2h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = \frac{4h^2-1}{2h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}}$ **(on reconnait l'identité remarquable $^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)**

d) Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$ on a : $2h^2 > 0$ ainsi $g'(h)$ est du signe de $4h^2 - 1$

On résout $4h^2 - 1 = 0$

$\boldsymbol{(2h-1)(2h+1) = 0}$

$\boldsymbol{2h - 1 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{2h + 1 = 0}$

$\boldsymbol{h = \frac{1}{2}}$ **ou** $\boldsymbol{h = -\frac{1}{2} \notin]0\,;\,+\infty[}$

Comme $a = 4 > 0$ alors on met le signe de a à l'extérieur des racines.

Ici $\frac{1}{2}$ est la deuxième racine ainsi on met « + » à droite.

h	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(h)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	2	↗	

2) Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de L permettant d'obtenir le frottement minimum.

Le frottement est minimal pour $h = \frac{1}{2}$ m,

et comme $L = \frac{1}{2h}$ cela donne $L = 1$ m.

Exercice 24 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \frac{3x^2}{x-2} + 1$

f est représentée par la courbe C_f dans un repère du plan.

1) a) Montrer que la dérivée de f est : $\boldsymbol{f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}}$.

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + 1}$ **avec :**

  $\boldsymbol{u(x) = 3x^2}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = x-2}$

  $\boldsymbol{u'(x) = 6x}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = 1}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x(x-2) - 3x^2}{(x-2)^2}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x^2 - 12x - 3x^2}{(x-2)^2}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}}$

b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f .

- **Sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $(x-2)^2 > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $3x(x-4)$.**
  On résout $3x(x-4) = 0$
  $3x = 0$ ou $x - 4 = 0$
  $x = 0$ ou $x = 4$
- **$f'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.**

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘	‖	↘	25	↗	

c) Préciser s'il y a un maximum local ou un minimum local (ou plusieurs).

1 est un maximum local (pour x = 0) et 25 est un minimum local (pour x = 4).

2) a) Déterminer l'équation de la tangente $\boldsymbol{T_{-2}}$ au point d'abscisse -2.

$\boldsymbol{f(-2) = -2}$

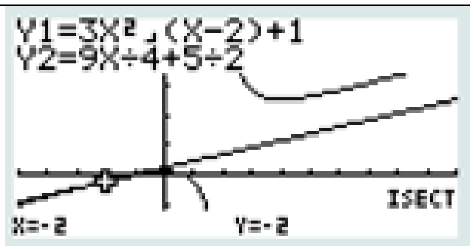
$\boldsymbol{f'(-2) = \frac{9}{4}}$

$\boldsymbol{T_{-2} : y = f'(-2)(x+2) + f(-2)}$

$\boldsymbol{y = \frac{9}{4}(x+2) - 2}$

$\boldsymbol{y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{2} - \frac{4}{2}}$

$\boldsymbol{y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{2}}$



b) Etudier les positions relatives de C_f et de $\boldsymbol{T_{-2}}$ sur D_f.

On pose $d(x) = f(x) - \left(\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}\right)$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{3x^2}{x-2} + 1 - \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}}$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{3x^2}{x-2} + \frac{4}{4} - \frac{9x}{4} - \frac{10}{4}}$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{3x^2}{x-2} + \frac{-9x-6}{4}}$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{12x^2 + (-9x-6)(x-2)}{4x-8}}$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{12x^2 - 9x^2 + 18x - 6x + 12}{4x-8}}$

$\boldsymbol{d(x) = \frac{3x^2 + 12x + 12}{4x-8}}$

On étudie le signe de $d(x)$:

$\boldsymbol{3x^2 + 12x + 12 = 0}$

$\boldsymbol{x^2 + 4x + 4 = 0}$

$\boldsymbol{(x+2)^2 = 0}$

$\boldsymbol{x + 2 = 0}$

$\boldsymbol{x = -2}$

$\boldsymbol{4x - 8 = 0}$

$\boldsymbol{x = 2}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$3x^2+12x+12$		$+$	0	$+$		$+$	
$4x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$-$	0	$-$	‖	$+$	

Sur $]-\infty\,;2[$ $d(x) \leq 0$ ainsi $f(x) \leq \frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$ ainsi C_f est en dessous de T_{-2}
Sur $]2\,;+\infty[$ $d(x) > 0$ ainsi $f(x) > \frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$ ainsi C_f est en dessus de T_{-2}

3) Démontrer qu'il existe deux points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = 2x - 5$.
On donnera leurs abscisses simplifiées
(on trouve des valeurs assez compliquées…) mais leurs ordonnées ne sont pas demandées.

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
Celui de la tangente au point d'abscisse x est $f'(x)$ et celui de D est 2, donc on résout l'équation $f'(x) = 2$ pour <u>tout $x \neq 2$.</u>

$\frac{3x(x-4)}{(x-2)^2} = 2$

$3x(x-4) = 2(x-2)^2$

$3x^2 - 12x = 2(x^2 - 4x + 4)$

$3x^2 - 12x = 2x^2 - 8x + 8$

$x^2 - 4x - 8 = 0$

On obtient une équation du second degré, que l'on résout :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 48 > 0$

Et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{4-4\sqrt{3}}{2}$	$x_2 = \frac{4+4\sqrt{3}}{2}$
$x_1 = 2 - 2\sqrt{3}$	$x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$

Il y a 2 points pour lesquels la tangente est parallèle à la droite donnée, d'abscisses :
$x_1 = 2 - 2\sqrt{3}$ **et** $x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

On résout l'équation $f(x) = 0$ pour <u>tout $x \neq 2$</u> :

$\frac{3x^2}{x-2} + 1 = 0$

$\frac{3x^2}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} = 0$

$\frac{3x^2+x-2}{x-2} = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0$ **(car $x - 2 \neq 0$)**

On obtient de nouveau une équation du second degré, que l'on résout :

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$

Et $\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{-1-5}{6}$	$x_2 = \frac{-1+5}{6}$
$x_1 = -1$	$x_2 = \frac{2}{3}$

Les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont $A(-1\,;0)$ et $B\left(\frac{2}{3}\,;0\right)$.

Exercice 25 :

Pour chacune des fonctions données, déterminer l'ensemble de définition D_f, le domaine de dérivabilité $D_{f'}$ puis étudier les variations de f sur D_f, et préciser les extremums locaux.

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$

- $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$
- $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$
- **On étudie le signe de la dérivée : c'est un polynôme du second degré.**
  On résout $f'(x) = 0$
  $3x^2 + 12x - 15 = 0$
  $x^2 + 4x - 5 = 0$ **(on a divisé par 3)**

  $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$
  Et $\sqrt{\Delta} = 6$

  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $x_1 = \frac{-4-6}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-4+6}{2}$
  $x_1 = -5$ $\qquad$ $x_2 = 1$

- $f'(x)$ **est du signe de** $a = 3 > 0$ **à l'extérieur des racines.**
- **On en déduit le tableau de variations :**

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	101	↘	-7	↗	

- f **admet** 101 **comme maximum local atteint en** $x = -5$
- f **admet** -7 **comme minimum local atteint en** $x = 1$

2) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$
- $f'(x) = 2x - 4$
- **On étudie le signe de la dérivée :** f' **est une fonction affine**
  On résout $f'(x) = 0$
  $2x - 4 = 0$
  $2x = 4$
  $x = 2$

Ainsi comme le coefficient directeur de f' **est** $m = 2 > 0$ **(signe « à droite du 0 ») on a :**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

- f **admet** -1 **comme minimum local atteint en** $x = 2$

3) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 2$

- $\boldsymbol{D_f = D_{f'} = \mathbb{R}}$
- $\boldsymbol{f'(x) = -4x^3 - 4x}$
  $\boldsymbol{f'(x) = -4x(x^2+1)}$
- **On étudie le signe de la dérivée : c'est un polynôme du 3ème degré.**
  Il faut donc penser à factoriser !
  On résout $\boldsymbol{f'(x) = 0}$
  $\boldsymbol{-4x(x^2+1) = 0}$
  $\boldsymbol{-4x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$
  $\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x^2 = -1 < 0}$ **(impossible sur $\mathbb{R}$)**
  $\boldsymbol{x = 0}$
- **Sur $\mathbb{R}$ on a : $\boldsymbol{(x^2 + 1) > 0}$ donc $\boldsymbol{f'(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{-4x}$.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

- **$\boldsymbol{f}$ admet 2 comme maximum local atteint en $\boldsymbol{x = 0}$**

4) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-9}$

- **Pour l'ensemble de définition : on cherche les valeurs interdites en résolvant :**
  $\boldsymbol{3x - 9 = 0}$
  $\boldsymbol{x = 3}$

  Ainsi $\boldsymbol{D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{3\} =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[}$

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec :**

  $\boldsymbol{u(x) = 2x + 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = 3x - 9}$
  $\boldsymbol{u'(x) = 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = 3}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2(3x-9) - 3(2x+1)}{(3x-9)^2}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{6x - 18 - 6x - 3}{(3x-9)^2}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-21}{(3x-9)^2} < 0}$

- **Sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ on a : $\boldsymbol{(3x-9)^2 > 0}$ donc $\boldsymbol{f'(x)}$ est du signe de $\boldsymbol{-21 < 0}$**

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	||	$\searrow$	

$\boldsymbol{f}$ n'admet aucun extremums locaux.

5) $f(x) = \sqrt{x}(x+3)$

- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}_+ = [\mathbf{0}\,;\,+\infty[$
- $\boldsymbol{D_{f'}} = \mathbb{R}_+^* =]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$

- $\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$ **avec :**

  $\boldsymbol{u(x) = \sqrt{x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = x + 3}$

  $\boldsymbol{u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = 1}$

  $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{x+3}{2\sqrt{x}} + 1 \times \sqrt{x}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{x+3+\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{x+3+2x}{2\sqrt{x}}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{3x+3}{2\sqrt{x}}}$

- **Sur** $\mathbb{R}_+^*$**,** $\boldsymbol{2\sqrt{x} > 0}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{3x+3}$**.**

  On résout $\boldsymbol{3x + 3 = 0}$

  $\boldsymbol{x = -1 \notin \mathbb{R}_+^*}$
- **Ainsi comme le coefficient directeur de** $\boldsymbol{x \mapsto 3x+3}$ **est** $\boldsymbol{m = 3 > 0}$ **on a :**

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	

<u>Remarque</u> : attention, l'image f (0) existe et vaut 0,
par contre, f n'est pas dérivable en 0, il y a des doubles barres pour la dérivée.

- **Il n'y a pas de minimum local, ni de maximum local.**

Bien voir que 0 est le minimum global de f sur [0 ; + ∞ [, atteint pour x = 0, mais
ce n'est pas un minimum local (f ne peut pas être définie sur un intervalle ouvert contenant 0).

6) $f(x) = 3 - \frac{5}{2x-1}$

- **Pour l'ensemble de définition : on cherche les valeurs interdites en résolvant :**

  $\boldsymbol{2x - 1 = 0}$

  $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

  Ainsi $\boldsymbol{D_f = D_{f'}} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\} =]-\infty\,;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\;;\,+\infty[$

- $\boldsymbol{f(x) = 3 - \frac{5}{v(x)}}$ **avec :**

  $\boldsymbol{v(x) = 2x - 1}$

  $\boldsymbol{v'(x) = 2}$

  $\boldsymbol{f'(x) = 0 - 5 \times \frac{-v'(x)}{v^2(x)}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{10}{(2x-1)^2} > 0}$

- **Sur** $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **on a :** $\boldsymbol{(\,2x - 1\,)^2 > 0}$ **donc** $\boldsymbol{f\,'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{10 > 0}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

- **Il n'y a pas de minimum local, ni de maximum local.**

7) f (x) = $\sqrt{-x^2+6x-8}$

- **Pour l'ensemble de définition : on cherche les valeurs interdites en résolvant :**
  $-x^2+6x-8 \geq 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 36 - 32 = 4$
  Et $\sqrt{\Delta} = 2$

  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $x_1 = \frac{-6-2}{-2}$ $\quad$ $x_2 = \frac{-6+2}{-2}$

  $x_1 = 4$ $\quad$ $x_2 = 2$

  Comme $a = -1 < 0$**, on met le signe de** a **« à l'extérieur des racines ».**

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2+6x-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  Donc $D_f = [2\,;4]$ **et** $D_{f'} =]2\,;4[$

- $f(x) = \sqrt{u(x)}$ **avec :**
  $u(x) = -x^2+6x-8$
  $u'(x) = -2x+6$

  $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
  $f'(x) = \frac{-2x+6}{2\sqrt{-x^2+6x-8}}$

- **Sur** $]2\,;4[$ **on a :** $2\sqrt{-x^2+6x-8} > 0$ **ainsi** $f'(x)$ **est du signe de** $-2x+6$
  On résout $-2x+6=0$
  $x = 3$

- **Ainsi comme le coefficient directeur de** $x \mapsto -2x+6$ **est** $m = -2 < 0$ **on a :**

x	2		3		4
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Remarque : attention, les image f (2) et f (4) existent et valent 0, par contre, f n'est pas dérivable en 2 ni en 4, il y a des doubles barres pour la dérivée.

- 1 est un maximum local, pour $x = 3$.

Bien voir que 0 est le minimum global de f sur [2 ; 4], atteint pour $x = 2$ et $x = 4$, mais ce n'est pas un minimum local.

8) $f(x) = \sqrt{x}(2 - 3x)$

- $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}_+ = [\mathbf{0}\,;\,+\infty[$
- $\boldsymbol{D_{f'}} = \mathbb{R}_+^* =]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$

- $\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$ **avec :**

  $\boldsymbol{u(x) = \sqrt{x}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = 2 - 3x}$

  $\boldsymbol{u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = -3}$

  $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{x}} - 3 \times \sqrt{x}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2-3x-3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2-3x-6x}{2\sqrt{x}}}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}}$
- **Sur** $\mathbb{R}_+^*$ **on a :** $\boldsymbol{2\sqrt{x} > 0}$ **ainsi** $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{-9x + 2}$**.**

  On résout $\boldsymbol{-9x + 2 = 0}$

  $\boldsymbol{x = \frac{2}{9}}$
- **Ainsi comme le coefficient directeur de** $\boldsymbol{x \mapsto -9x + 2}$ **est** $\boldsymbol{m = -9 < 0}$ **on a :**

x	0		$\frac{2}{9}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\frac{2}{2}}{9}$	↘	

$f\left(\frac{2}{9}\right) = \sqrt{\frac{2}{9}} \times \left(2 - 3 \times \frac{2}{9}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

<u>Remarque</u> : attention, l'image f (0) existe et vaut 0,
par contre, f n'est pas dérivable en 0, il y a des doubles barres pour la dérivée.

- $\frac{4\sqrt{2}}{9}$est un maximum local, pour $x = \frac{2}{9}$.

<u>Remarque</u> : 0 n'est pas un minimum local, et on ne peut pas savoir si c'est le minimum global sans connaitre la limite de f en +∞…

9) $f(x) = (2x + 1)^5$

- $\boldsymbol{D_f = D_{f'}} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{f(x) = u^5(x)}$ **avec :**

  $\boldsymbol{u(x) = 2x + 1}$

  $\boldsymbol{u'(x) = 2}$

  $\boldsymbol{f'(x) = 5u^4(x)u'(x)}$

  $\boldsymbol{f'(x) = 5(2x + 1)^4 \times 2}$

  $\boldsymbol{f'(x) = 10(2x + 1)^4 \geq 0}$

- **On résout** $\boldsymbol{2x + 1 = 0}$

  $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↗	

- **Il n'y a pas de minimum local, ni de maximum local.**

<u>Remarque</u> : au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ ***la dérivée s'annule sans changer de signe.***
Il y a une tangente horizontale, mais pas d'extremum local.

10) $f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x+1}$

- **Pour l'ensemble de définition : on cherche les valeurs interdites en résolvant :**
  $\boldsymbol{x + 1 = 0}$
  $\boldsymbol{x = -1}$

  Ainsi $\boldsymbol{D_f = D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty\,; -1[\cup]-1\,;\,+\infty[}$

- **Conseil : Vous pouvez réduire dés maintenant $f(x)$ au même dénominateur.**
  $\boldsymbol{f(x) = \frac{(2x+3)(x+1)+2}{x+1}}$
  $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2+2x+3x+3+2}{x+1}}$
  $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2+5x+5}{x+1}}$
  $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec :**
  $\boldsymbol{u(x) = 2x^2 + 5x + 5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = x + 1}$
  $\boldsymbol{u'(x) = 4x + 5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = 1}$

  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{(4x+5)(x+1) - 1(2x^2+5x+5)}{(x+1)^2}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{4x^2+4x+5x+5-2x^2-5x-5}{(x+1)^2}}$
  $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}}$

- **Sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ on a : $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 4x$**
  On résout $2x^2 + 4x = 0$
  $\boldsymbol{2x(x+2) = 0}$
  $\boldsymbol{2x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x + 2 = 0}$
  $\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = -2}$

- **Comme $a = 2 > 0$ on a :**

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3	↘	‖	↘	5	↗	

- – 3 est un maximum local, pour x = – 2.
- 5 est un minimum local, pour x = 0.