Fiche méthode : Complexes

I. Opération

Les trois identités remarquables :		
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Application 1 : On pose $z_1 = 1+2i$ et $z_2 = 3+5i$. Calculer puis vérifier sur votre machine :

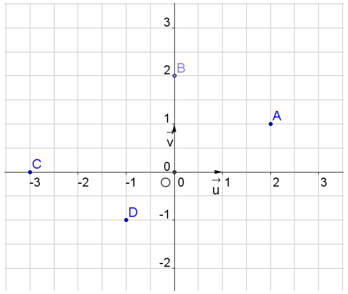
1. $z_1+z_2 = 1+2i+3+5i$
   $= 4+7i$
2. $z_1-z_2 = 1+2i-(3+5i)$
   $= 1+2i-3-5i$
   $= -2-3i$
3. $z_1\times z_2 = (1+2i)(3+5i)$
   $= 3+5i+6i+10i^2$
   $= 3+11i-10$
   $= -7+11i$
4. $z_1^2 = (1+2i)^2$
   $= 1+4i+4i^2$
   $= 1+4i-4$
   $= -3+4i$
5. $\overline{z_1} = 1-2i$
6. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+2i}$
   $= \frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$
   $= \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5}$
   $= \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+5i}$
   $= \frac{(1+2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$
   $= \frac{3-5i+6i-10i^2}{3^2+5^2}$
   $= \frac{3+i+10}{9+25}$
   $= \frac{13+i}{34}$
   $= \frac{13}{34}+\frac{i}{34}$

Forme algébrique :

- $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- La notation $\boldsymbol{z = a+bi}$ s'appelle **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Le nombre réel a est appelé partie réelle de z. On notera $\boldsymbol{a = Re(z)}$
- Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z. On notera $\boldsymbol{b = Im(z)}$
- Si $a = 0$, on dira que z est un imaginaire pur.
- On appelle **conjugué** de z, noté $\bar{z}$, le nombre complexe $\boldsymbol{\bar{z} = a-bi}$.
- $\boldsymbol{z\bar{z} = a^2+b^2}$
- Pour mettre un quotient sous forme algébrique **on multiplie par le conjugué du dénominateur** « en haut et en bas »

II. Images et affixes

Application 2 : Affixe de points

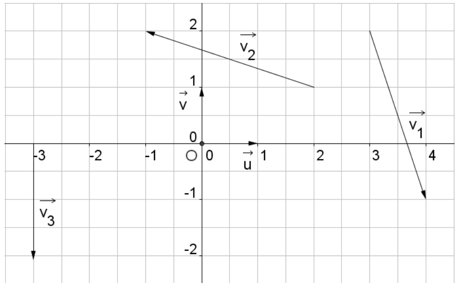


Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives : z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D représentés.

$A(2\,;1)$ donc $z_A = 2+i$
$B(0\,;2)$ donc $z_B = 2i$
$C(-3\,;0)$ donc $z_C = -3$
$D(-1\,;-1)$ donc $z_D = -1-i$

Application 3 : Affixe de vecteurs

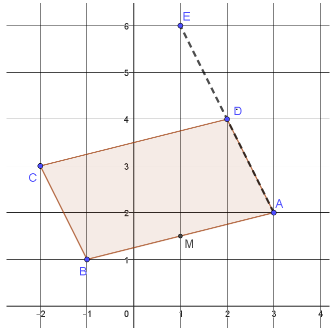


Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives : z_1, z_2 et z_3 des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ représentés.

$\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ donc $z_1 = 1-3i$
$\vec{v_2}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ donc $z_1 = -2i$
$\vec{v_3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ donc $z_1 = -3+i$

Application 4 :



Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :
$z_A = 3+2i\,; z_B = -1+i\,; z_C = -2+3i$ et $z_D = 2+4i$.

1. Placer les points A, B, C et D
2. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $= -1+i-(3+2i)$ $= -1+i-3-2i$ $= -4-i$	$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D$ $= -2+3i-(2+4i)$ $= -2+3i-2-4i$ $= -4-i$

3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

On remarque que : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Déterminer l'affixe du milieu M de $[AB]$.

$z_M = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{3+2i-1+i}{2} = \frac{2+3i}{2} = 1+\frac{3}{2}i$

5. Déterminer l'affixe de E symétrique de A par rapport à D.

Le point D est donc le milieu du segment $[EA]$:
$z_D = \frac{z_E+z_A}{2}$
$2z_D = z_E+z_A$
$z_E = 2z_D - z_A$
$z_E = 2(2+4i)-(3+2i)$
$z_E = 4+8i-3-2i$
$z_E = 1+6i$

Image et affixe :

- $z = \boldsymbol{a+bi} \Leftrightarrow M(\boldsymbol{a\,;b})$
- M est appelé **image de z**
- z est appelé **affixe de M**
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **affixe** :
  $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$
- L'affixe du **milieu** M du segment $[AB]$ est :
  $\boldsymbol{z_M = \frac{z_A+z_B}{2}}$
- L'affixe du **symétrique** S du point A par rapport à $\boldsymbol{B}$ est :
  $\boldsymbol{z_S = 2z_B - z_A}$

Affixes et géométrie :

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = k\, z_{\overrightarrow{CD}}} \Leftrightarrow$ Les droites (AB) et (CD) sont parallèles
$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = k\, z_{\overrightarrow{BC}}} \Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

Application 5 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1+i\,; z_B = 4+3i\,; z_C = -5+5i$ et $z_D = 4+11i$.

1. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $= 4+3i-(1+i)$ $= 4+3i-1-i$ $= 3+2i$	$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$ $= -5+5i-(1+i)$ $= -5+5i-1-i$ $= -6+4i$

Il n'y 'a pas de relation entre $z_{\overrightarrow{AC}}$ et $z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B et C ne sont pas alignés.

2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $= 4+3i-(1+i)$ $= 4+3i-1-i$ $= 3+2i$	$z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C$ $= 4+11i-(-5+5i)$ $= 4+11i+5-5i$ $= 9+6i$

On remarque $z_{\overrightarrow{CD}} = 3z_{\overrightarrow{AB}}$ ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les (AB) et (CD) sont parallèles.