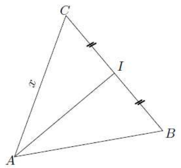
Chapitre : Trigonométrie

I. Rappel de trigonométrie du collège

Exercice 1 : Rappel de trigonométrie du collège

Soit ABC un triangle équilatéral dont la mesure des côtés vaut x.



On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. Que représente la droite (AI) dans le triangle ABC ?
2. Remplir le tableau ci- dessous :

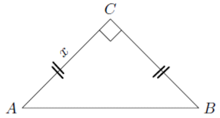
	$\widehat{CIA}$	$\widehat{CAB}$	$\widehat{CAI}$	$\widehat{ICA}$
Mesure en degré				

3. a. Donner la mesure du segment $[CI]$ en fonction de x.
   b. A l'aide du théorème de Pythagore, déterminer la mesure du segment $[AI]$ en fonction de x.
   c. Dans le triangle AIC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente des angles $\widehat{IAC}$ et $\widehat{ICA}$. Puis, remplir le tableau suivant :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
60^o			
30^o			

Exercice 2 : Rappel de trigonométrie du collège

On considère le triangle rectangle-isocèle en C ci-dessous.
On note x la mesure du côté AC.



1. Compléter le tableau suivant

	$\widehat{ACB}$	$\widehat{CAB}$
Mesure en degré		

2. a. A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la mesure du côté $[AB]$ en fonction de x.
   b. Dans le triangle rectangle ABC, déterminer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$.
   c. Compléter le tableau ci-contre :

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
45^o			

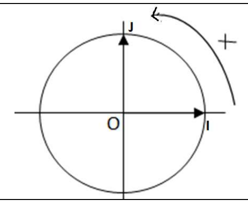
II. Fonctions circulaires

1) Cercle trigonométrique

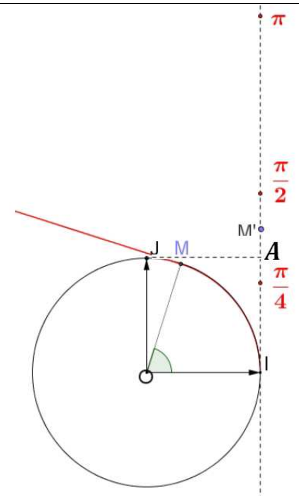
Définition 1 : Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé sens ____________________________ (ou positif).
L'autre sens est appelé sens ________________________________ (ou négatif).

Définition 2 : Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens _____________________________ des aiguilles d'une montre. On l'appellera sens ____.

Définition 3 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le cercle trigonométrique est le cercle de centre __________ et de rayon _______ et sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé sens direct (ou positif) : c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Construction: On trace la tangente en I au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et on munit cette droite du repère (I, A) tel que $IA = OI = 1$.
Cette droite représente la droite des réels.
On « enroule cette droite des réels » autour du cercle $\mathscr{C}$.
$[IA)$ s'enroule dans le sens direct, $[IA')$ dans le sens indirect.



Propriété 1 :

- A chaque réel x correspond un point M du cercle trigonométrique.
- Réciproquement, à chaque tour de cercle effectué avec la droite des réels, on se retrouve au même point sur le cercle trigonométrique.
  Ainsi, à chaque point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, différant tous d'un multiple de__________________.

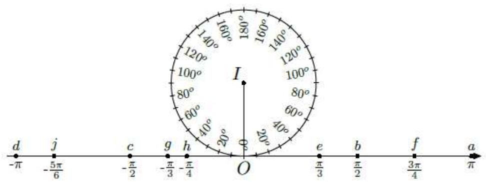
Remarque : 2π est le _____________________________
du cercle trigonométrique (cercle de rayon 1).

Remarque : le sens des aiguilles d'une montre est appelé sens indirect (ou négatif).

Exercice 3 : Enroulement de la droite numérique

On considère une droite graduée d'origine O sur laquelle est placé des points définis par leur abscisse :

$a(\pi)$ $\quad b\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad c\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad d(-\pi)$ $\quad e\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad h\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad j\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$



On considère le cercle C de rayon 1 placé sur la droite graduéecomme l'indique la figure précédente.

1. a. Soit M un point de C tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure π. Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$.
   b. Placer l'unique point A du cercle C tel que l'arc $\widehat{OA}$ ait pour longueur π.
2. a. Soit M un point de C tel que l'arc $\widehat{OM}$ mesure $\frac{\pi}{2}$. Donner la mesure de l'angle $\widehat{OIM}$.
   b. Placer les deux points B et C appartenant au cercle C tel que les arcs $\widehat{OB}$ et $\widehat{OC}$ aient pour longueur $\frac{\pi}{2}$.
3. De même, placer les points E, F, G, H, J tels que les arcs $\widehat{OE}, \widehat{OF}, \widehat{OG}, \widehat{OH}, \widehat{OJ}$ aient respectivement la même longueur que l'abscisse des points e, f, g, h, j.

2) Une nouvelle unité de mesure : le radian

Définition 4 : La mesure d'un angle en ______________________________ est égale à la ____ que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Définition 5 : Soit x un réel. Lorsque le point M' d'abscisse x sur la droite des réels se superpose au point M sur le cercle trigonométrique, l'angle $\widehat{IOM}$ (pris dans le sens direct si x est positif, et dans le sens indirect si x est négatif) mesure x radians.

Remarque : La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radian est égale à la longueur de l'arc IM

Propriété 2 : On obtient le tableau de conversion suivant :

Mesure de l'arc IM= mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π
Mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$							

Application 1 :

Compléter le tableau suivant :

Mesures d'angles en degrés	180	25	38		
Mesures d'angles en radians				$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$

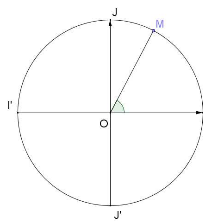
Exercice 4 : Conversion radian – degré

Remplir le tableau suivant :

Degré									20	40	50	15	120	300	29
Radian	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{8}$							

Exercice 5 :

1. Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, donner un réel associé aux points I, J, I' et J'.
2. Combien mesure, en degrés, l'angle $\widehat{IOM}$ quand le point M est associé au réel $\frac{\pi}{8}$?
3. A quel réel le point M peut-il être associé lorsque l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 40° ?

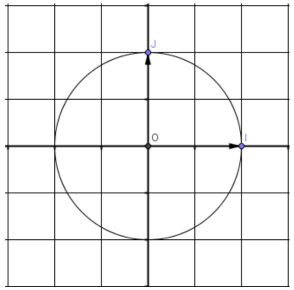


Exercice 6 :

Dans le cercle trigonométrique ci-dessous, préciser pour chaque réel donné dans quel quart de cercle se trouve le point qui lui est associé.

a. $\frac{3\pi}{7}$ b. $\frac{5\pi}{9}$ c. $\frac{18\pi}{11}$ d. $\frac{7\pi}{5}$

e. $-\frac{23\pi}{9}$ f. $\frac{32\pi}{7}$ g. $-\frac{29\pi}{11}$ h. $\frac{68\pi}{5}$



Exercice 7 : Placer des points sur le cercle trigonométrique

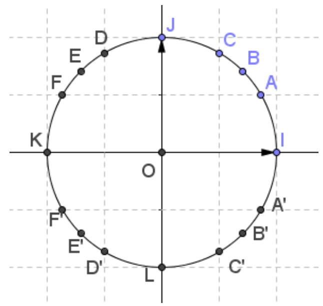
Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points associés aux nombres réels suivants :

1. $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ π
2. $-\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\pi$
3. $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{4\pi}{3}$
4. $-\frac{2\pi}{3}$ $-\frac{5\pi}{6}$ $-\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{7\pi}{6}$ $-\frac{4\pi}{3}$

Exercice 8 : Points images sur le cercle trigonométrique et mesure d'angle

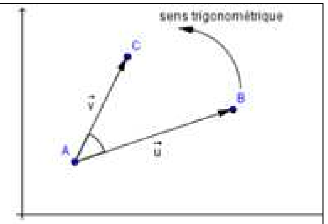
On se place sur le cercle trigonométrique ci-contre :

1. Quels sont les points images des réels suivants :
   π $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ $-\pi$ $-\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{5\pi}{4}$
2. Donner trois réels différents ayant pour image :
   a. le point J b. le point K
   c. le point C d. le point E
3. Donner une mesure des angles :
   a. $(\overrightarrow{OL} ; \overrightarrow{OK})$ b. $(\overrightarrow{OE'} ; \overrightarrow{OL})$ c. $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OI})$



3) Mesure d'un angle orienté

Définition 6 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On définit alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par la mesure de l'angle ____________________ si on tourne dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) pour passer de B à C, ou par ________________________ dans le cas contraire.



Remarque : On a défini une mesure de l'angle, on peut obtenir d'autres mesures de cet angle en ajoutant un multiple de 2π radian ou de 360°.

Attention ! Un angle orienté possède plusieurs mesures.

Exemple : L'angle orienté $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI})$ mesure $-\frac{\pi}{2}$ rad mais aussi $\frac{3\pi}{2}rad, -\frac{5\pi}{2}rad, \ldots$

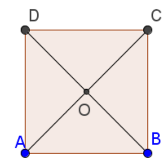
Application 2 : Mesures d'angles orientés et carré

$ABCD$ est un carré.

Lire graphiquement une mesure de chacun des angles orientés ci-dessous :

a. $(\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{CA}) =$ b. $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{OB}) =$ c. $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{AC}) =$

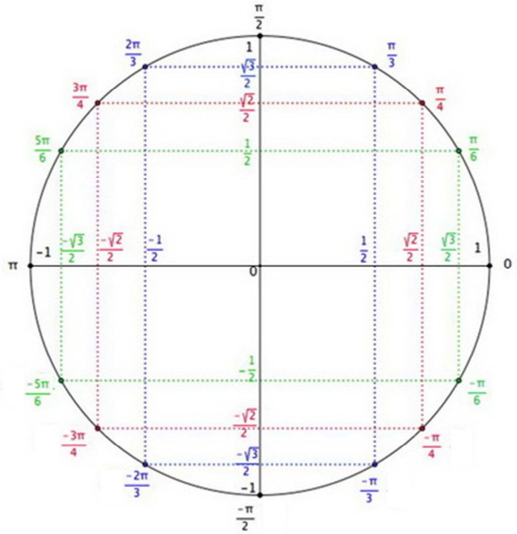
d. $(\overrightarrow{DO} ; \overrightarrow{AC}) =$ e. $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{AD}) =$ f. $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{CD}) =$



4) Mesure principale d'un angle orienté

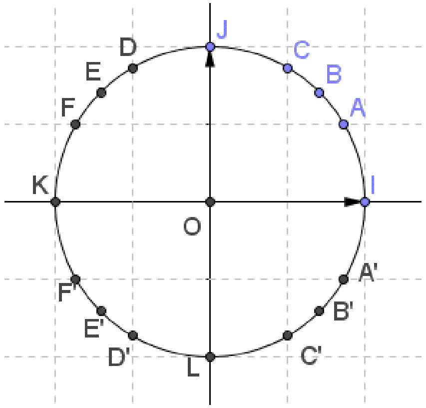
Définition 7 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle mesure principale de l'angle $(\vec{u}\,,\vec{v})$ l'unique mesure de l'angle $(\vec{u}\,,\vec{v})$ comprise dans l'intervalle ________________________

Les mesures principales remarquables :

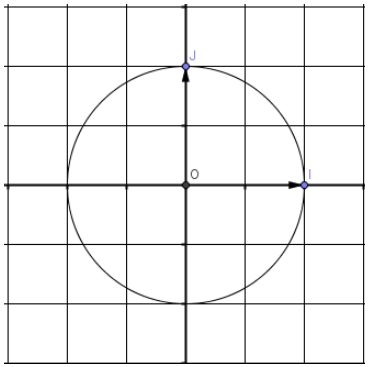


Cercle trigonométrique avec les points images :

Pour les exercices 10 et 11 :



Application 3 :



Sur le cercle trigonométrique, on considère les point A, B et C tels que l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ mesure $\frac{4\pi}{6}\ rad$, l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$ mesure $\frac{5\pi}{3}\ rad$, et l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})$ mesure $\frac{-7\pi}{4}\ rad$.

1. Placer les points A, B et C sur le cercle trigonométrique.
2. Déterminer la mesure des angles qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exercice 9 : Mesures (principales) d'angles orientés

Sans utiliser la calculatrice, indiquer, parmi les nombres réels suivants, ceux qui appartiennent à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

$\frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{4}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$ $\quad -\frac{2\pi}{3}$ $\quad -\frac{7\pi}{6}$ $\quad \frac{5\pi}{4}$ $\quad \frac{7\pi}{3}$ $\quad \frac{5\pi}{6}$

Exercice 10 : Points images et mesures d'angles orientés

On se place dans le cercle trigonométrique du cours avec les points images.

Repérer sur ce cercle les points images des réels suivants et donner pour chacun d'eux le réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ qui a même image :

Réel	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-\frac{5\pi}{2}$	20π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{2}$	-17π
Point image										
$\in]-\boldsymbol{\pi}\,;\,\boldsymbol{\pi}]$										

Exercice 11 : Points images et mesures d'angles orientés

On se place dans le cercle trigonométrique du cours avec les points images.

Repérer sur ce cercle les points images des réels suivants et donner pour chacun d'eux le réel de $[0\,;\,2\pi[$ qui a même image :

Réel	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	6π	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{25\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{2}$	7π
Point image												
$\in[\boldsymbol{0}\,;\,\boldsymbol{2\pi}[$												

Application 4 : Donner la mesure principale des angles orientés dont une mesure en radians est :

a) $-\frac{\pi}{2}$	
b) $\frac{2\pi}{5}$	
c) $\frac{49\pi}{3}$	
d) $\frac{38\pi}{5}$	
e) $-\frac{19\pi}{7}$	
f) $-\frac{127\pi}{3}$	

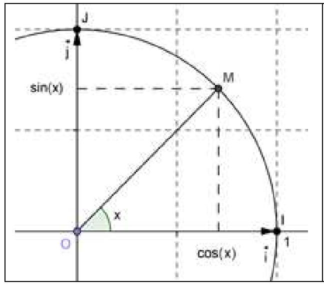
Exercice 12 : Mesures principales d'angles orientés

Donner la mesure principale des angles mesure :

$\frac{5\pi}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2}$ $\quad -\frac{5\pi}{4}$ $\quad -3\pi$ $\quad \frac{4\pi}{3}$ $\quad -\frac{11\pi}{6}$ $\quad -\frac{11\pi}{2}$ $\quad 25\pi$

18π $\quad -14\pi$ $\quad \frac{40\pi}{3}$ $\quad -\frac{31\pi}{6}$ $\quad \frac{25\pi}{4}$ $\quad \frac{19\pi}{6}$ $\quad \frac{13\pi}{4}$

III. Cosinus et sinus d'un angle orienté



Définition 8 : Soit x une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où M est un point du cercle trigonométrique.

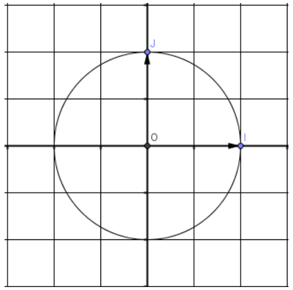
- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est ______________________ de M.
- Le sinus de x, noté $\sin x$, est __________________________ de M.

Activité : Valeurs remarquables du sinus et cosinus

Le but est de compléter au fur et à mesure le tableau suivant qui permettra de connaître quelques valeurs remarquables du sinus et du cosinus d'un nombre réel.

x (mesure en degrés)	0°	30°	45°	60°	90°
x (mesure en radians)					
$\cos x$					
$\sin x$					

1. a) Construire dans un repère orthonormé un cercle trigonométrique.
   b) Expliquer pourquoi les sinus et cosinus des réels proposés sont toujours positifs ou nuls.



2. Donner la valeur exacte de $\sin 0$ et de $\cos 0$.
3. a) Sur le cercle trigonométrique, où se trouve le point associé au réel $\frac{\pi}{2}$?
   b) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{2}$ et de $\cos\frac{\pi}{2}$.
4. a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point A associé au réel $\frac{\pi}{4}$?
   b) Expliquer pourquoi la droite (OA) est un axe de symétrie du quart de cercle IJ de centre O.
   c) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$.
5. a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point B associé au réel $\frac{\pi}{3}$?
   b) Quelle est la nature du triangle OIB ? Justifier.
   c) La hauteur issue de B de ce triangle coupe (OI) en H.
   Quelle sont les coordonnées du point H ? En déduire la valeur exacte de OH.
   d) Démontrer que H est le milieu de $[OI]$.
   c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{3}$ puis de $\sin\frac{\pi}{3}$
6. a) Placer sur le cercle trigonométrique, le point C associé au réel $\frac{\pi}{6}$?
   b) Calculer $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$. En déduire le symétrique de C par rapport à la droite (OA).
   c) En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{6}$ et de $\cos\frac{\pi}{6}$.

Exercice 13 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

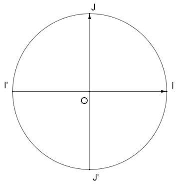
1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), tracer le cercle trigonométrique de centre O.
2. Marquer tous les points du cercle qui peuvent être associés au réel x sachant que $\cos x = 0{,}75$.
3. Si on sait que $\sin x$ est positif, où se trouve le point associé au réel x ?

Exercice 14 : Sinus et cosinus

Dans le cercle trigonométrique ci-contre, préciser dans chaque cas le signe du sinus et du cosinus d'un réel x associé au point M.

a. $M \in \widehat{IJ}$ c. $M \in \widehat{I'J'}$

b. $M \in \widehat{JI'}$ d. $M \in \widehat{J'I}$



Exercice 15 :Sinus et cosinus

1. Placer approximativement sur un cercle trigonométrique les points associés aux réels suivants :

$-\frac{55\pi}{7}$ $\frac{54\pi}{5}$ $\frac{41\pi}{3}$ $-\frac{85\pi}{8}$

2. En déduire le signe du sinus et du cosinus de chacun de ces réels.

Exercice 16 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

Soit a un réel tel que $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos a = \frac{3}{8}$.

1. Placer le point A associé au réel a sur un cercle trigonométrique.
2. Calculer $\sin a$.

Exercice 17 : Sinus et cosinus d'un nombre réel

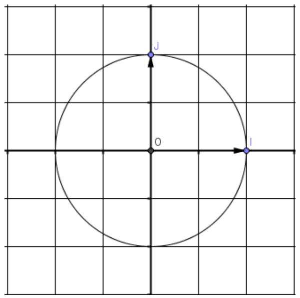
Soit b un réel tel que $b \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin b = \frac{5}{7}$.

1. Placer le point B associé au réel b sur un cercle trigonométrique.
2. Calculer $\cos b$.

Propriétés 3 :

1. Pour tout réel x,________ $\leq \cos x \leq$ ________ et ________ $\leq \sin x \leq$________.
2. Pour tout réel x, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 =$

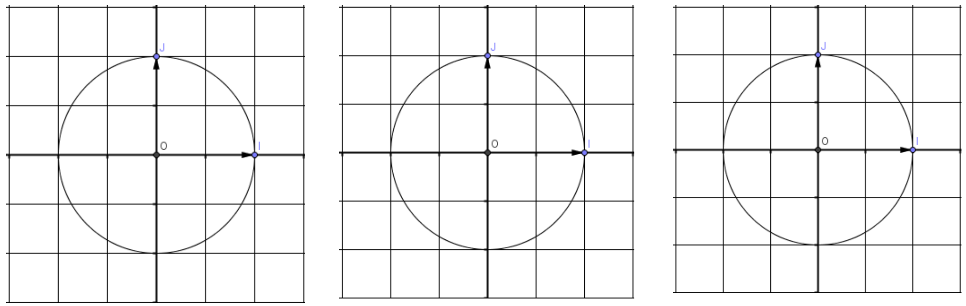
Idée de preuve :



Propriétés 4 : Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel, alors :

1. $\cos(-a) =$_______________et $\sin(-a) =$_______________
2. $\cos(a+\pi) =$_______________ et $\sin(a+\pi) =$_______________
3. $\cos(\pi - a) =$_______________ et $\sin(\pi - a) =$_______________
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) =$_______________ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) =$_______________
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$_______________ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$_______________

Idée de preuve :



Application 5 : En utilisant le cercle trigonométrique et le tableau des valeurs remarquables, déterminer la valeur exacte de :

a. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	b. $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$	c. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
d. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	e. $\sin(2\pi)$	f. $\cos(2\pi)$

Exercice 18 : Angles associés et valeurs particulières

Utiliser les résultats relatifs aux valeurs particulières et aux angles associés pour déterminer les valeurs exactes des nombres réels suivants :

a. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ c. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ d. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ e. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

f. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ g. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ h. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ i. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ j. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

k. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ l. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ m. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ n. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

IV. Equation $cos(x) = cos(a)$ et $sin(x) = sin(a)$ (hors programme ???)

Propriété 5 : Soit a un réel connu et k un entier relatif.. Les solutions dans $\mathbb{R}$

- de l'équation $\cos x = \cos a$ sont $x = a + 2k\pi \ et \ x = -a + 2k\pi$,.
- de l'équation $\sin x = \sin a$ sont $x = a + 2k\pi \ et \ x = \pi - a + 2k\pi$.

Application 6 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos x = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

2. Résoudre dans$]-\pi;\ \pi]$, $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$.

3. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 19 : Système d'équation

Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ces systèmes :

a. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ b. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{1}{2}\end{cases}$ c. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$ d. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{1}{2}\end{cases}$

e. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ f. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ g. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ h. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

i. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ j. $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ k. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ l. $\begin{cases}\cos\theta = -\frac{1}{2}\\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

m. $\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = 1\end{cases}$ n. $\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = -1\end{cases}$ o. $\begin{cases}\cos\theta = 1\\ \sin\theta = 0\end{cases}$ p. $\begin{cases}\cos\theta = -1\\ \sin\theta = 0\end{cases}$

V. Fonctions circulaires

On s'intéresse maintenant aux deux fonctions $\cos : x \to \cos(x)$ et $\sin : x \to \sin(x)$.

Définition 9 : Les fonctions $\cos : x \to \cos(x)$ et $\sin : x \to \sin(x)$ sont définies sur ___________.

Propriété 6 :
Les fonctions $\cos : x \to \cos(x)$ et $\sin : x \to \sin(x)$ sont périodiques de période : _________
(les courbes représentatives sont inchangées par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$).

Autrement dit : Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a :

$\cos(x + 2k\pi) =$_____________ et $\sin(x + 2k\pi) =$__________________

Propriété 7 : Soient ω et ϕ des réels avec $\omega \neq 0$.
En physique on utilise des fonctions de la forme :
- $\boldsymbol{t \mapsto \cos(\omega t + \phi)}$
- $\boldsymbol{t \mapsto \sin(\omega t + \phi)}$

Ces fonctions ont pour période : $T =$

Preuve : $\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right) = \cos(\omega t + 2\pi + \phi) = \cos(\omega t + \phi)$

Propriété 8 : La fonction $\cos : x \to \cos x$ est ________________________.
(la courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie)

Autrement dit :Pour tout réel $x, \cos(-x) =$____________

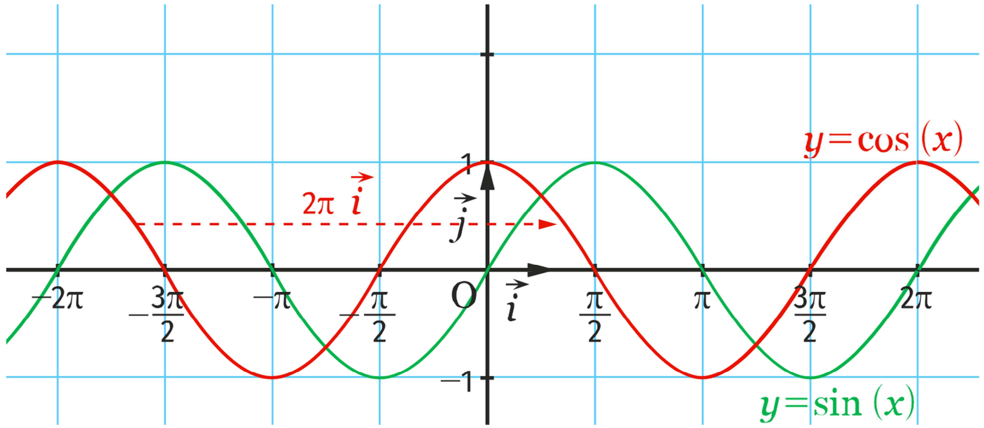
Propriété 9 : La fonction $\sin : x \to \sin x$ est ________________________ .
(la courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie).

Autrement dit :Pour tout réel $x, \sin(-x) =$____________________

Remarque : On retrouve avec les fonctions les propriétés géométriques du sinus et du cosinus lues sur le cercle trigonométrique.

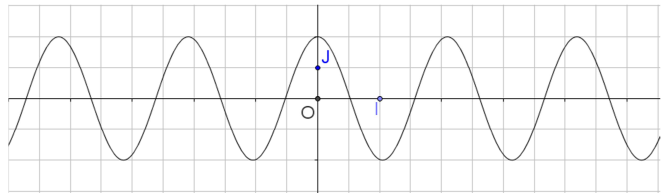
Propriété 10 : La courbe représentative de la fonction sinus est une __________________.

Propriété 11 : La courbe représentative de la fonction cosinus est une sinusoïde. Cette sinusoïde est translatée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche par rapport à la courbe de la fonction sinus.



Exercice 20 : Courbes de fonctions sinusoïdales

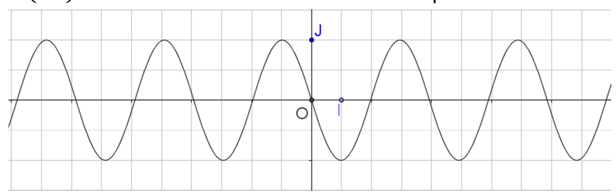
Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.
2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

Exercice 21 : Courbes de fonctions sinusoïdales

Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.
2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

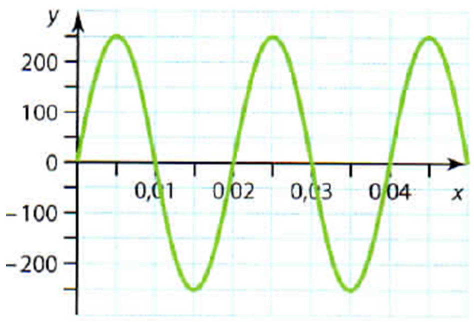
Exercice 22:

Lors de l'émission d'un son pur, la pression de l'air (en mP) est donné par une fonction f définie par :

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

où t est le temps exprimé en secondes.

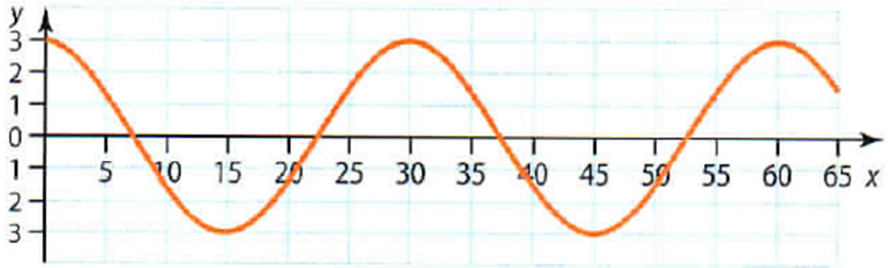
1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω.
2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.
3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de f.



Exercice 23:

La tension en Volts aux bornes d'un générateur très basse fréquence est définie par :

$U(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où t est le temps exprimé en secondes. La fonction U est représentée ci dessous.



1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω
2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.
3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de U.

Exercice 24 : Courbes de fonctions sinusoïdales

1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x)$.
   Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.
   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $3\cos(2x) = -2$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 25 : Courbes de fonctions sinusoïdales

1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin(3x)$.
   Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.
   b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $4\sin(3x) = -1$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

Exercice 11 :

Suite à un tremblement de terre, le Japon est touché par un tsunami. On modélise la hauteur de l'eau par la fonction h, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$h(t) = a\cos(bt) \text{ avec } h \text{ en mètres et } t \text{ en secondes.}$$

Déterminer les nombres a et b dans le cas d'un tsunami où les vagues mesurent 12 mètres de haut et présentent une période de 20 minutes.

Exercice 26 :

On modélise la température d'un ville par la fonction $\theta(t) = 15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$

où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

a) Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?
b) A quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues?
c) Quelles sont les température extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles?

Exercice 27 :

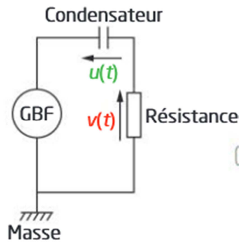
On réalise un montage en branchant en série une résistance ($R = 100\ \Omega$) et un condensateur à un GBF qui génère une tension sinusoïdale. On branche sur ce circuit un oscilloscope bi-courbe.

La tension aux bornes du condensateur est

$$u(t) = U\sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

La tension aux bornes de la résistance est

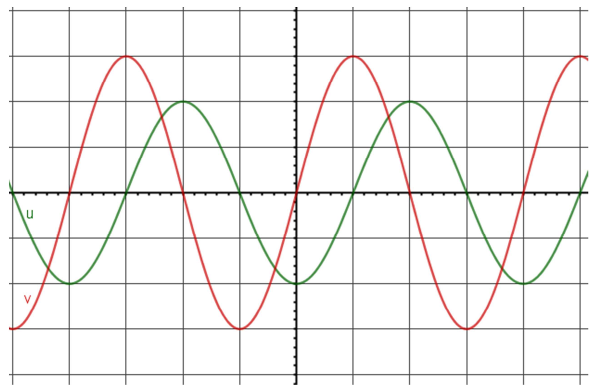
$$v(t) = V\sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$



1) En utilisant l'oscillogramme ci-dessous, identifier U, ω_1, φ_1, V, ω_2, φ_2 .

Le réglage de l' oscilloscope est :

• sensibilité verticale : $1V/div$.
• sensibilité horizontale : $0{,}25\ ms\ /div$.



2) Le déphasage entre les signaux $s_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ est $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Deux signaux sont :

• en phase si les signaux sont proportionnels
• en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.

Traduire ces informations en termes de déphasage.

Que peut on en déduire sur φ_1 et φ_2?

3) Deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le déphasage est $\frac{\pi}{2}$. Comment traduire cette information à l'aide des représentations graphiques des signaux ?

4) Si $\Delta\varphi$ est positif, le signal 2 est en avance de phase par rapport au signal 1.
Si $\Delta\varphi$ est négatif, le signal 2 est en retard de phase par rapport au signal 1.
Que peut-on dire sur les signaux u et v ?

5) La loi d'Ohm s'applique sur les valeurs instantanées en régime sinusoïdal. Ainsi $v(t) = R\,i(t)$.
En déduire l'expression de $i(t)$.
i et u sont-elles en phase, en opposition de phase ou en quadrature de phase ?