Chapitre 5 - Probabilités conditionnelles

Dans tout ce chapitre P est une probabilité définie sur l'univers Ω.

I. Probabilité conditionnelle de B sachant A

1) Définitions

Définition 1 : Soit A et B deux événements de l'univers Ω, A étant de probabilités non nulle ($P(A) \neq 0$).
La probabilité que l'événement B soit réalisé ____________________ que l'événement A est réalisé est le nombre __________ défini par :

Cette probabilité est appelée probabilité _____________________ de B sachant ______.

Remarque : De la même manière si $P(B) \neq 0$ alors :

Application 1 :
Un SAV a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A, dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes.
Un appareil choisi au hasard présente la panne A.
Déterminer la probabilité pour qu'il ait aussi la panne B.

Propriétés 1 : Soit A et B deux événements de l'univers Ω tels que $P(A) \neq 0$. Alors on a :
1) $\quad \leq P_A(B) \leq$
2) $P_A(B) + P_A(\bar{B}) =$____
3) Dans une **situation d'équiprobabilité**, $P_A(B) =$ ________________________

Propriétés 2 : Soit A et B deux événements de l'univers Ω.
1) Si $P(A) \neq 0$ alors $P(A \cap B) =$________________________
2) Si $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) =$ __________________

Preuve : Ce ne sont que des conséquences de la définition 1 et de la remarque.

Exercice 1 : Soit A et B deux événements tels que :
$P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.
Calculer $P_A(B)$.

Exercice 2 : Soit A et B deux événements tels que :
$P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}2$ et $P(B) = 0{,}48$.
Calculer $P(A \cap B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 3 : Soit E et F deux événements tels que :
$P(E) = 0{,}5$, $P_E(F) = 0{,}8$.
Calculer $P(E \cap F)$.

Exercice 4 : Soit A et B deux événements tels que :
$P(A) = 0{,}72$, $P(B) = 0{,}47$ et $P(A \cup B) = 0{,}88$.
Calculer $P(A \cap B)$ puis $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Exercice 5 : Probabilité conditionnelle
On choisit au hasard un jour de l'année et on considère les évènements suivants : U : « le jour choisi a été pluvieux » et V : « le jour choisi a été venteux ».
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elles correspondent à une probabilité conditionnelle ou pas et donner la notation correspondante.
a) Dans l'année 40% des jours sont pluvieux
b) 66% des jours pluvieux sont ventés
c) Parmi les jours non ventés, 22% sont pluvieux
d) 49% des jours dans l'année n'ont été ni ventés ni pluvieux.

Exercice 6 : Probabilité conditionnelle
Une administration emploie 20% de CDD.
60% des CDD et 30% des CDI ont moins de 30 ans.
Dans la base de données des employés, on tire au hasard le nom de l'un des employés.
On considère les évènements suivants :
D : « l'employé est en CDD » et J : « l'employé a moins de 30 ans ».
a) Traduire les données en terme de probabilités, en utilisant les événements D et J.
b) Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit en CDD et ait moins de 30 ans.

Exercice 7 : Probabilité conditionnelle
Dans une population 82% des ménages possèdent une voiture, 11% possèdent un deux-roues et 89% possèdent au moins un véhicule (un des deux).
a) On choisit un ménage au hasard dans la population, déterminer la probabilité qu'il possède une voiture et un deux-roues.
b) On choisit un ménage au hasard possédant une voiture, déterminer la probabilité qu'il possèdent un deux-roues.

Exercice 8 : Probabilité conditionnelle
Parmi ses salariés, une société compte 70 % d'employés commerciaux et 80 % d'entre eux possèdent une voiture de fonction.
Parmi les employés qui ne sont pas des commerciaux, seulement 10 % possèdent une voiture de fonction.
On interroge au hasard un employé de la société.
On considère les évènements suivants:
- C : «L'employé interrogé est un commercial»;
- V : «L'employé interrogé possède une voiture de fonction».

1. Déduire des informations de l'énoncé:
   a) les probabilités $P(C)$ et $P(\bar{C})$.
   b) les probabilités $P_C(V)$ et $P_{\bar{C}}(V)$.
2. a) Définir par une phrase l'évènement $C \cap V$.
   Calculer la probabilité $P(C \cap V)$.
   b)Définir par une phrase l'évènement $\bar{C} \cap V$.
   Calculer la probabilité $P(\bar{C} \cap V)$.

2) Utilisation de tableaux à double entrée

Application 2 : Utilisation de tableaux à double entrée

Des chercheurs ont demandé à 100 jeunes enfants s'ils préfèreraient avoir le super-pouvoir de voler, avoir celui de se rendre invisible, ou avoir un autre super-pouvoir.
Voici les résultats de leur enquête :

	Garçon (G)	Fille (F)	TOTAL
Voler (V)	26	12	38
Invisible (I)	12	32	44
Autre	10	8	18
TOTAL	48	52	100

On considère les événements V, I, G et F comme définit sur le tableau.
On choisit au hasard un des jeunes enfants interrogés.

Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles.
La probabilité de l'événement $A \cap B$ se situe à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.
La dernière colonne et la dernière ligne du tableau contiennent les probabilités de chaque événement $A, \bar{A}, B$ et $\bar{B}$.
$P_A(B)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A \cap B)$ et de $P(A)$ lues dans le tableau.

	B	$\bar{B}$	TOTAL
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
TOTAL	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

1. Calculer la probabilité que cet enfant choisi au hasard ait répondu "Voler".
2. Calculer la probabilité que cet enfant choisi au hasard soit un garçon.
3. Calculer la probabilité que cet enfant choisi au hasard soit un garçon sachant qu'il a répondu "Voler".
4. Calculer la probabilité que cet enfant choisi au hasard ait répondu "Voler" sachant que c'est un garçon.
5. Soit I l'événement « l'enfant choisi au hasard a répondu Se rendre invisible », et F l'événement « l'enfant choisi au hasard est une fille ».
Que signifie $P_F(I) \approx 0{,}62$?

Exercice 9 : Utilisation de tableau

A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Le tableau de probabilités ci-dessous reprend les données de l'expérience.

	A	B	C	Total
D	0,2	0,1	0,1	
$\bar{D}$	0,25	0,15	0,2	
Total				1

1. Compléter le tableau de probabilités.
2. A l'aide du tableau, préciser les valeurs de $P(B \cap D)$; $P(A \cap \bar{D})$; $P(B)$ et $P(\bar{D})$.
3. En déduire les valeurs de $P_B(D)$ et $P_{\bar{D}}(A)$.

Exercice 10 : Utilisation de tableau

Les données sont celles du tableau ci-dessous où A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,32		
$\bar{B}$		0,2	0,36
Total			

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses.

1. $P(\bar{B}) = 0{,}2$
2. $P(A) = 0{,}48$
3. $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}32$
4. $P_A(B) = 0{,}5$

Exercice 11 : Utilisation de tableau

Des personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobayes pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. On a donné à certaines d'entre elles le médicament, les autres ont pris un placébo.
On choisit au hasard une personne ayant participé à l'expérimentation et on considère les événements suivants :
A : « la personne choisie a vu son état de santé s'améliorer ».
M : « la personne choisie a été traitée avec le médicament ».
P : « la personne choisie a été traitée avec un placebo».

Le tableau de probabilités ci-dessous reprend les données de l'expérience.

	A	$\bar{A}$	Total
M	51%	16%	67%
P	5%	28%	33%
Total	56%	44%	100%

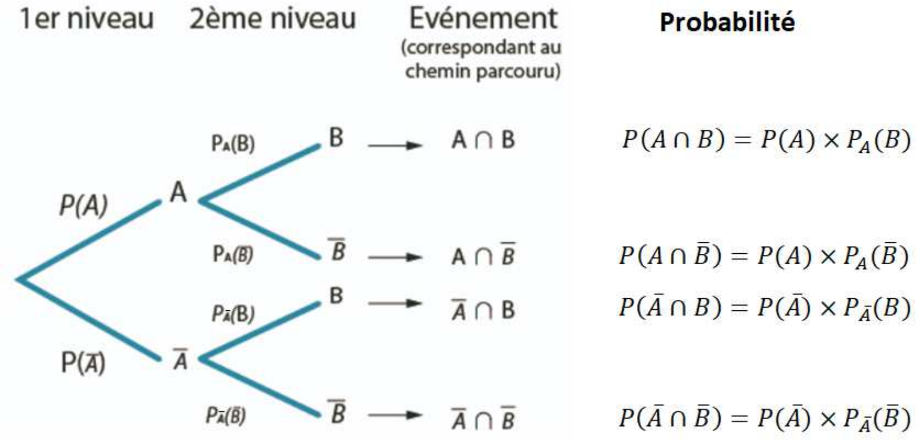
Si nécessaire, on arrondira les résultats à 0,01 près.

1. Indiquer la signification des valeurs 5% et 44%.
2. Déterminer $P_A(M)$.
3. Déterminer la probabilité que la personne choisie n'ait pas vu son état s'améliorer sachant qu'elle a pris le médicament.

II. Arbres pondérés et probabilités totales

1) Arbres pondérés

On peut modéliser une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers Ω par un arbre pondéré.
Pour cela, on envisage deux niveaux de branches : le premier qui indique la probabilité de l'événement A et celle de l'événement $\bar{A}$ et le second qui permet d'indiquer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.



- Une **branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.
  Par exemple, la probabilité de la branche reliant A à B est $P_A(B)$.
- Un **chemin** est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. Sa probabilité est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
- Un **nœud** est le point de départ d'une ou de plusieurs branches.

Remarque : Sur chacun des niveaux, il est possible d'avoir plus de deux branches.

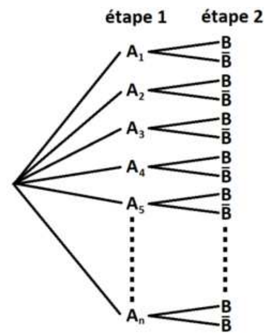
Propriété 3 (Règle du produit) :
La probabilité d'un chemin est ____
des probabilités rencontrées le long du chemin.

Propriété 4 (Règle de la somme) :
La probabilité d'un événement s'obtient en effectuant ____________________________
des probabilités de tous les chemins menant à cet événement.

Remarque : La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

2) Formule des probabilités totales

Définition 2 : Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'événements **non vide**, **deux à deux** __________________
et dont la **réunion est** ________________________.



Remarque : On parle alors de système complet d'événements.

Propriété 5 (Formule des probabilités totales) :
Soit n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω.
Pour tout événement B, on a :

$P(B) =$

C'est-à-dire :

$P(B) =$

Remarque : Sur un arbre pondéré, la probabilité de l'événement B s'obtient en additionnant les probabilités des chemins conduisant à la réalisation de B.

Propriété 6 (cas particulier) : Soit A et B deux événements avec A et $\bar{A}$ de probabilité non nulle, on a :
Pour tout événement B, on a :

Preuve : Comme $A \neq \emptyset$, A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω.
On a alors pour tout événement B de Ω on a : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$
Donc $P(B) = P\big((B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})\big)$.
De plus $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles alors : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Application 3:

Un atelier dispose de 3 machines M1, M2 et M3 pour fabriquer des pièces de mécanique : 50% de ces pièces sont fabriquées sur M1, 35% sur M2 et le reste sur M3.

Il s'avère par ailleurs que :

- 1% des pièces fabriquées sur M1 ont un défaut
- 2% des pièces fabriquées sur M2 ont un défaut
- 6% des pièces fabriquées sur M3 ont un défaut

Chaque jour, on examine au hasard une des pièces fabriquées.

On note M1 (respectivement M2, M3) l'événement « la pièce examinée a été fabriquée sur M1 (respectivement M2, M3) » et D l'événement « la pièce examinée comporte un défaut ».

1. Schématiser les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

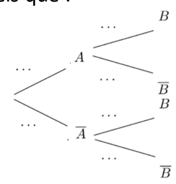
2. Calculer la probabilité que la pièce examinée comporte un défaut.

Exercice 12 : Arbres pondérés et probabilités totales

Soit A et B deux événements tels que :

$P(A) = 0{,}7$.
$P_A(B) = 0{,}3$.
$P_{\bar{A}}(B) = 0{,}35$.

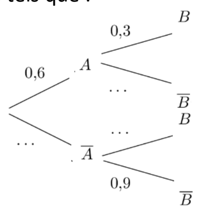
Compléter l'arbre ci-contre :



Exercice 13 : Arbres pondérés et probabilités totales

Soit A et B deux événements tels que :

1. Compléter l'arbre ci-contre.
2. Indiquer la signification des nombres : 0,6 ; 0,3 et 0,9.
3. Déterminer $P(A \cap B)$
4. Déterminer $P_{\bar{A}}(\overline{B})$



Exercice 14 : Arbres pondérés et probabilités totales

Un magasin vend des appareils électroménagers.

Une enquête statistique sur ses clients a montré que :

- 10 % des clients achètent un réfrigérateur ;
- parmi les clients qui achètent un réfrigérateur, 30 % achètent aussi un four à micro-ondes ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de réfrigérateur, 15 % achètent un four à micro-ondes.

On choisit au hasard un client du magasin.

On considère les évènements R et M suivants :

R : « le client achète un réfrigérateur »

M : « le client achète un four à micro-ondes ».

1. Préciser les valeurs de $P(R), P_R(M)$ et $P_{\bar{R}}(M)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. a) Définir, à l'aide d'une phrase, l'évènement $R \cap M$. b) Calculer la probabilité de l'évènement $R \cap M$.
   c. Montrer que la probabilité qu'un client choisi au hasard achète un four à micro-ondes est égale à 0,165.
   d. Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard n'achète pas de réfrigérateur sachant qu'il a acheté un four à micro-ondes.

Exercice 15 : Arbres pondérés et probabilités totales

Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés. Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation.

Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.

On choisit un vacancier au hasard.

On considère les événements suivants :

S : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport »

N : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1. Traduire en terme de probabilités les données numériques de l'énoncé.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. a) Définir par une phrase l'évènement $S \cap N$.
   b) Calculer $P(S \cap N)$.
4. Montrer que $p(N) = 0{,}655$.
5. Calculer $P_N(S)$.

Exercice 16 : Arbres pondérés et probabilités totales

Un magasin de vêtements a constitué un stock d'un certain type de pantalons venant de trois fabricants f1, f2, et f3.

Certains de ces pantalons présentent un défaut.

60 % du stock provient du fabricant f1, 30 % du stock provient du fabricant f2, et le reste du stock provient du fabricant f3.

La qualité de la production n'est pas la même selon les fabricants. Ainsi :

- 6 % des pantalons produits par le fabricant f1 sont défectueux
- 4 % des pantalons produits par le fabricant f2 sont défectueux
- 2 % des pantalons produits par le fabricant f3 sont défectueux.

On prélève au hasard un pantalon dans le stock.

On considère les évènements suivants :

F1 : « le pantalon a été fabriqué par f1 » ;

F2 : « le pantalon a été fabriqué par f2 » ;

F3 : « le pantalon a été fabriqué par f3 » ;

D : « le pantalon est défectueux ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement F3.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. a. Montrer que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,05.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement : « le pantalon est sans défaut ».
4. On prélève un pantalon parmi ceux qui présentent un défaut. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par le fabricant f1 ?

Exercice 17 : Arbres pondérés et probabilités totales

L'entreprise dispose de deux machines m1 et m2.

La première machine m1 produit 60 % des pots fabriqués par l'entreprise, le reste de la fabrication étant assuré par la machine m2.

7 % des pots produits par la machine m1 sont non conformes, alors que la proportion de pots non conformes produits par la machine m2 est de 2 % seulement.

On prélève un pot au hasard dans la production totale. On adopte les notations suivantes :

• M1 désigne l'évènement « le pot provient de la machine m1. »

• M2 désigne l'évènement « le pot provient de la machine m2. »

• C désigne l'évènement : « le pot est conforme ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité $P(M1 \cap \bar{C})$; interpréter cette probabilité.
   b. Vérifier que $P(M1 \cap \bar{C}) = 0{,}008$.
3. Justifier que $P(\bar{C}) = 0{,}05$.
4. On prélève au hasard un pot parmi les pots non-conformes. Déterminer la probabilité qu'il provienne de la machine m2.

Exercice 18 : Arbres pondérés et probabilités totales

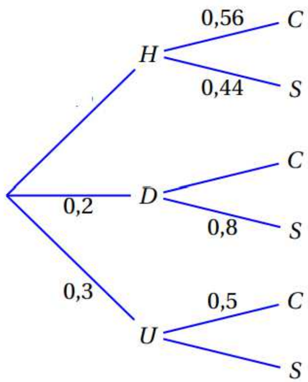
Les trois principaux services de soins d'un centre hospitalier sont : le service hématologie, le service diabétologie, le service urologie.

Les seringues utilisées sont fournies soit par le laboratoire Clamex, soit par le laboratoire Spara :

On choisit au hasard et de manière équiprobable un patient qui a subi une prise de sang dans l'un des trois services citées précédemment.

On considère les évènements suivants :

- H : « La prise de sang a été effectuée dans le service hématologie »;
- D : « La prise de sang a été effectuée dans le service diabétologie »;
- U : « La prise de sang a été effectuée dans le service urologie »;
- C : « La seringue utilisée pour ce patient a été fournie par le laboratoire Clamex »;
- S : « La seringue utilisée pour ce patient a été fournie par le laboratoire Spara ».



1. Compléter l'arbre des probabilités qui modélise la situation.
2. Indiquer la signification des nombres 0,2 et 0,56.
3. a. Quelle est la probabilité de l'événement H ?
   b. Déterminer la probabilité que la seringue utilisée ait été fournie par le laboratoire Clamex sachant qu'elle a été utilisée dans le service diabétologie.
4. Calculer la probabilité de l'événement : « le patient choisi a subi une prise de sang dans le service d'urologie avec une seringue fournie par le laboratoire Spara.

Exercice 19 : Arbres pondérés et probabilités totales Dans un petit village, la mairie a organisé une fête locale : un certain nombre d'entrées gratuites ont été distribuées aux habitants et des stands ont été installés pour la vente de produits locaux.

Les organisateurs estiment que 40 % des visiteurs de la fête ont eu une entrée gratuite, les autres ont payé leur entrée.

De plus, parmi les visiteurs ayant une entrée gratuite, 45 % ont effectué un achat dans un des stands.

Parmi ceux ayant payé leur entrée, 60 % n'ont rien acheté.

On interroge au hasard un des visiteurs de la fête à la fin de la journée.

On note G l'évènement : « le visiteur a eu une entrée gratuite » et A l'évènement : « le visiteur a effectué un achat ».

1. Donner la valeur de la probabilité $P_G(A)$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « le visiteur a payé son entrée et a effectué un achat ».
4. Montrer que la probabilité que le visiteur ait effectué un achat est 0,42.
5. Calculer la probabilité que le visiteur ait payé son entrée sachant qu'il a effectué un achat.

III. Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition 3 : Soit A et B deux événements de l'univers Ω de probabilité non nulle.
On dit que l'événement B est ______________ de l'événement A si la réalisation ou non de l'événement A ________________________________ pas la probabilité de B.

Autrement dit : L'événement B est __________________de l'événement A si ____________________.

Propriété 7 (conséquence) : Soit A et B deux événements indépendants de l'univers Ω de probabilité non nulle alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $P_A(B) =$__________
- $P_B(A) =$__________
- $P(A \cap B) =$___________________

Preuve : Soit A et B deux événements indépendants de l'univers Ω de probabilité non nulle.

$P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow$

Remarque : Cette propriété revient à dire que :
B est indépendant de A si et seulement si A est indépendant de B.

Propriété 8 (conséquence) : Soit A et B deux événements de l'univers Ω de probabilité non nulle.
Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) =$____________.

Propriété 9 : Soit A et B deux événements de l'univers Ω de probabilité non nulle.
Deux évènements A et B sont indépendants alors ________ et _______________ sont indépendants.

Application 4 :
On tire au hasard une carte de 32 cartes.
On considère les événements suivants : A : « la carte tiré est un carreau », B : « la carte tiré est un roi » et C : « la carte tiré est rouge ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 20 : Indépendance de deux événements
A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}84$; $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
2. $P(A) = 0{,}27$; $P(B) = 0{,}48$ et $P_B(A) = 0{,}27$.
3. $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{5}{7}$ et $P(A \cap B) = \frac{3}{7}$.

Exercice 21 : Indépendance de deux événements
A et B désignent deux événements indépendants de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

1. $P(A) = 0{,}84$ et $P(B) = 0{,}75$. Calculer $P(A \cap B)$.
2. $P(A) = 0{,}05$ et $P(B) = 0{,}01$. Calculer $P(A \cap B)$.
3. $P(A) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$. Calculer $P(B)$.
4. $P(A) = \frac{4}{15}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Calculer $P(B)$.
5. $P(\bar{A}) = 0{,}43$ et $P(A \cap B) = 0{,}03$. Calculer $P(B)$.

Exercice 22 : Indépendance de deux événements
A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
$P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 23 : Indépendance de deux événements
A et B désignent deux événements de l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Sachant que : $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$.
Déterminer $P(B)$ lorsque :

1. Les événements A et B sont incompatibles ?
2. Les événements A et B sont indépendants ?

Exercice 24 : Indépendance de deux événements

On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge, l'autre vert, et on considère les événements :

A : « la somme des nombres obtenus est 7 ».

B : « On a obtenu le 3 au moins une fois ».

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 25 : Indépendance de deux événements

Une secrétaire dispose de deux téléphones indépendants. Elle a remarqué que sur une durée d'une heure, le premier a une probabilité de sonner égale à 0,6 et le second égale à 0,7.

Déterminer la probabilité que, dans l'heure qui vient, la secrétaire ne soit pas dérangée par le téléphone.

2) Succession de deux épreuves indépendantes

Propriété 10 :

Dans une répétition d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est ______________________ des probabilités rencontrées le long du chemin.

Application 5 :

Lors d'un test de sélection, un QCM est proposé aux candidats.

Ce QCM comporte deux questions qui ont chacune trois réponses possibles parmi lesquelles une seule est juste.

Un candidat répond au hasard à ce QCM.

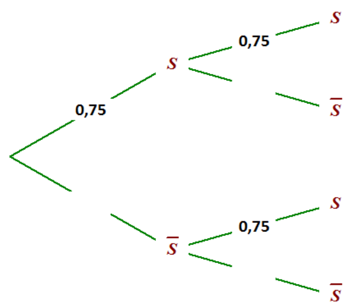
1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou un tableau de probabilités.

2. En déduire la probabilité pour que le candidat ait au moins une réponse juste.

Exercice 26 : Successions de 2 épreuves indépendantes

Voici l'arbre pondéré incomplet modélisant la répétition d'une même expérience aléatoire de manière indépendante, avec deux issues : succès (S) ou échec ($\bar{S}$).

1. Compléter l'arbre pondéré.
2. En déduire la probabilité d'obtenir exactement un succès.



Exercice 27 : Successions de 2 épreuves indépendantes

On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note les numéros obtenus.

Dans chaque cas, choisir la bonne réponse :

1. La probabilité d'obtenir un double 6 est égale à :
   a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{30}$
2. La probabilité d'obtenir un double 5 et un 6 est égale à :
   a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{15}$
3. La probabilité d'obtenir 6 au 2nd lancer est égale à :
   a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{5}{36}$ c) $\frac{1}{6}$

Exercice 28 : Successions de 2 épreuves indépendantes

Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent deux feux tricolores. Ces deux feux fonctionnent de façon indépendante et le cycle de chacun d'eux est réglé ainsi :

- vert : 35 s
- orange : 5s
- rouge : 20 s

Calculer la probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feu orange.

Exercice 29 : Successions de 2 épreuves indépendantes

Sohan a dans sa poche trois pièce de 1€ : une provenant d'Allemagne (A), une d'Espagne (E) et une de France (F).

Il tire au hasard, successivement et avec remise, deux pièces de sa poche.

Calculer la probabilité que les deux pièces proviennent de pays différents.

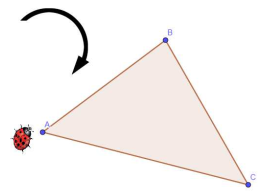
Exercice 30 : Successions de 2 épreuves indépendantes

Une coccinelle se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC.

Elle part du sommet A puis vole vers un autre sommet.

Son déplacement se fait 2 fois sur 3 dans le sens des aiguilles d'une montre et fois sur 3 dans le sens inverse.

On s'intéresse aux deux premiers déplacements.



1. Représenter les différentes issues possibles de cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré ou un tableau de probabilités.
2. Quelle est la probabilité que la coccinelle soit revenue à son point de départ au bout des 2 premiers déplacements.

IV. Exercices supplémentaires : Probabilités conditionnelles : Tableaux croisés

Exercice 31 :

Une étude de l'organisation mondiale du tourisme montre que, pour 1000 touristes venus en Europe l'année dernière, 14% sont venus en France. Parmi les touristes qui sont venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour. Parmi les touristes qui ne sont pas venus en France, 25% ont dépensé plus de 900 euros pour leur séjour.

Nombre de touristes	Venus en France	Non venus en France	Total
ayant dépensé plus de 900 €			
ayant dépensé 900 € ou moins de 900 €			
Total			1 000

1) Compléter le tableau suivant:

2) On choisit au hasard un touriste venu en Europe. Tous les touristes ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :

F : " Le touriste a choisi comme destination la France"

A: " le touriste a dépensé plus de 900€ pour son séjour".

a) Calculer $p(\bar{F} \cap A)$.

b) Calculer la probabilité que le touriste ait dépensé plus de 900€ pour son séjour.

3) On choisit au hasard un touriste parmi ceux qui ont dépensé plus de 900€ pour leur séjour. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en France ?

Exercice 32 :

Un sondage effectué dans une société comprenant 40% de cadres et 60% d'employés. On sait que 20% des cadres et 10% des employés de cette société parlent anglais.

1) On considère un groupe de 100 salariés. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de salariés parlant anglais	Nombre de salariés ne parlant pas anglais	Total
Nombre de cadres			
Nombre d'employés			
Total			100

2) On choisit un salarié au hasard parmi les 100. Tous les salariés ont la même probabilité d'être choisis. On note E et A les événements suivants :

E :" le salarié choisi est un employé" et A :" le salarié choisi sait parler anglais"

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

a) E b) A

c) " L'employé choisi est un cadre qui sait parler anglais"

d) "L'employé choisi est un employé sachant qu'il sait parler anglais".

Exercice 33 :

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test. Parmi les bien portants, 2% ont un test positif. Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

	Malades	Bien portants	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			30 000

1) Compléter le tableau suivant:

Dans les questions suivantes, les résultats numériques demandés seront arrondis à 10^{-3}.

2) On choisit au hasard une personne dans cette population. on considère les événements T et M suivants :

T : " le test est positif pour la personne choisie"

M : " la personnes choisie est malade."

a) Décrire par une phrase les événements suivants : $\overline{T}$; $T \cap M$; $\overline{T} \cap M$.

b) Calculer les probabilités $p(\overline{T})$; $p(T \cap M)$; $p(\overline{T} \cap M)$.

c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.

d) Déterminer les probabilités conditionnelles $p_T(M)$ et $p_M(T)$.

e) Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercice 34 :

L'année dernière, une étude réalisée auprès de 1000 employés d'une entreprise a révélé que 60% de ces employés pouvaient venir en utilisant les transports en commun. Parmi ceux-ci, 72% déclaraient tout de même venir en voiture.

Parmi ceux qui n'ont pas accès aux transports en commun, 96% venaient travailler en voiture.

On choisit un employé au hasard parmi les 1000 employés. Tous les employés ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants:

T: " l'employé peut utiliser les transports en commun"

V: " l'employé vient travailler en voiture"

Nombre d'employés	Venant en voiture	Ne venant pas en voiture	Total
Pouvant venir en transports en commun			
Ne pouvant pas venir en transports en commun			
Total			1000

1) Compléter le tableau suivant :

2) Calculer la probabilité de l'événement $T \cap V$.

3) Déterminer la probabilité que l'employé ne puisse pas utiliser les transports en commun et qu'il ne vienne pas travailler en voiture.

4) Calculer p(V).

5) Sachant qu'un employé vient en voiture, quelle est la probabilité qu'il ait accès aux transports en commun ? Arrondir au millième.

V. Exercices supplémentaires : Probabilités conditionnelles : Indépendance

Exercice 35 :

A la sortie d'une usine, les montres peuvent présenter un défaut sur le bracelet et un défaut sur le cadran. Une montre est défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. On prélève une montre au hasard dans la production d'une journée.

On note D_1 l'événement « la montre présente un défaut sur le bracelet » et D_2 l'événement « la montre présente un défaut sur le cadran ». On sait que $p(D_1) = 0{,}02$ et $p(D_2) = 0{,}01$.

On suppose que ces deux événements sont indépendants.

a) Calculer la probabilité que la montre présente les deux défauts.

b) Déterminer la probabilité que la montre n'ait aucun défaut.

Exercice 37 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 100 élèves de terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, demi-pensionnaire ou interne)

	Externe	Demi-pensionnaire	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

1) Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?

2) Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

Exercice 36 :

Chaque matin de classe, un élève peut être victime de deux événements indépendants :

- R : « Il n'entend pas son réveil sonner »
- B : « Son bus est en retard ».

Il a observé que, chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0,05 et celle de B est égale à 0,1. Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, l'élève est en retard au lycée.

a) Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, l'élève entende son réveil sonner et que son bus soit en retard

b) Calculer la probabilité que l'élève soit à l'heure au lycée un jour donné de classe

c) Au cours d'une semaine, l'élève se rend 5 fois au lycée. On suppose que tous les jours sont indépendants les uns des autres. Déterminer la probabilité que l'élève soit à l'heure tous les jours de la semaine.

Exercice 38 :

Une enquête a été menée sur différentes tranches d'âges concernant leurs habitudes écologiques. Parmi les personnes interrogées, 75 % ont moins de 35 ans ; 25 % ont 35 ans ou plus ; 60% font le tri sélectif ; 45 % sont des personnes de moins de 35 ans qui font le tri sélectif et 80 % sont des personnes de plus de 35 ans qui font le tri sélectif.

On note T l'événement « la personne fait le tri sélectif » ; J « la personne a moins de 35 ans » et M « la personne a 35 ans ou plus ».

1) Les événements J et T sont-ils indépendants ?

2) Les événements M et T sont-ils indépendants ?