Fiche méthode : Fonction affine

I. Fonction affine, linéaire et constante

Application 1 :

Pour emprunter des livres dans une bibliothèque, on a le choix entre trois formules.

- Formule A : payer une participation de 0,50 € par livre emprunté.
- Formule B : acheter une carte rose de bibliothèque à 7,50 € par an et ne payer qu'une participation de 0,20 € par livre emprunté.
- Formule C : acheter une carte verte de bibliothèque à 15,50 € par an et emprunter autant de livres que l'on veut.

PARTIE 1

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de livre empruntés par an	10	30	45
Prix à payer avec la formule A en €	5	15	22,5
Prix à payer avec la formule B en €	9,5	13,5	16,5
Prix à payer avec la formule B en €	15,5	15,5	15,5

2. On appelle x le nombre de livres empruntés par une personne en un an.
   a) Exprimer P_A, P_B et P_C en fonction de x.
   b) Donner la nature de chacune de ces fonctions.

- Soit P_A le prix à payer avec la formule A.

$P_A(x) = 0{,}5x$
P_A est une fonction linéaire.

- Soit P_B le prix à payer avec la formule B.

$P_B(x) = 0{,}2x + 7{,}5$
P_B est une fonction affine.

- Soit P_C le prix à payer avec la formule C.

$P_C(x) = 15{,}5$
P_C est une fonction constante.

3. Résoudre l'équation $0{,}5x = 7{,}5 + 0{,}2x$. Interpréter le résultat.

$0{,}5x = 7{,}5 + 0{,}2x$
$0{,}5x - 0{,}2x = 7{,}5$
$0{,}3x = 7{,}5$
$x = \frac{7{,}5}{0{,}3}$
$x = 25$

$$S = \{25\}$$

Le prix à payer sera le même pour les formules A et B si l'on emprunte 25 livres.

Fonction affine et cas particuliers :

Soient m, p deux réels donnés.

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $p = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ est appelée **fonction linéaire.**

  Une fonction linéaire traduit une situation de **proportionnalité.**

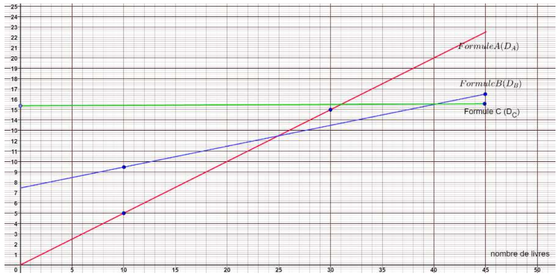
- Si $m = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$ est appelée **fonction constante.**

Représentation graphique : Droite

- La représentation graphique de la **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$ dans un repère est la **droite** d'équation : $\boldsymbol{y = mx + p}$.
- La représentation graphique de la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = mx}$ est la **droite passant par l'origine** du repère d'équation $\boldsymbol{y = mx}$.
- La représentation graphique de la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = p}$ est la **droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses)** d'équation $\boldsymbol{y = p}$.

PARTIE 2

1. Tracer dans l'intervalle [0 ; 50] : la droite D_A qui représente la fonction P_A, la droite D_B qui représente la fonction P_B et la droite D_C qui représente la fonction P_C.



2. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.
   a) Quelle est la formule la plus intéressante si on emprunte 20 livres en un an?

Graphiquement, on remarque que la formule A est la plus intéressante si on emprunte 20 livres en un an.

   b) À partir de combien de livres empruntés par an la formule C est-elle la plus intéressante ?

Graphiquement, la formule C est la plus intéressante à partir de 40 livres empruntés.

II. Représentation graphique

Application 2 : Donner la représentation graphique des fonction f, g et h définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 2x - 3$

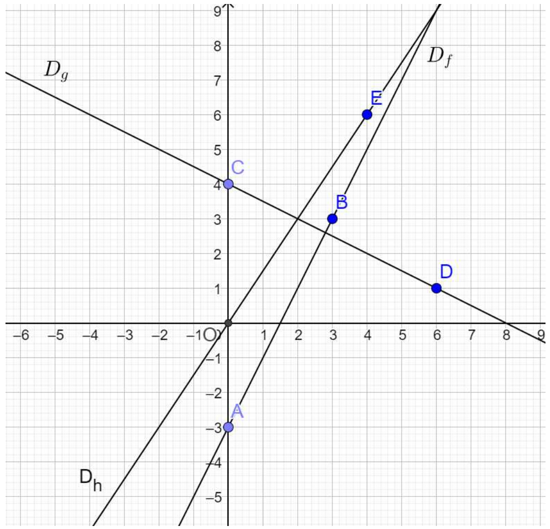
$f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ $A(0\,;\,-3) \in D_f$	$f(3) = 2 \times 3 - 3 = 3$ $B(3\,;\,3) \in D_f$

2. $g(x) = -0{,}5x + 4$

$g(0) = -0{,}5 \times 0 + 4 = 4$ $C(0\,;\,4) \in D_g$	$g(6) = -0{,}5 \times 6 + 4 = 1$ $D(6\,;\,1) \in D_g$

3. $h(x) = \frac{3}{2}x$

Fonction linéaire donc passe par l'origine	$h(4) = \frac{3}{2} \times 4 = 6$ $E(4\,;6) \in D_h$



Coefficient directeur et ordonnée à l'origine :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = mx + p$$

- m est appelé **coefficient directeur** de la droite :
  $m = \frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal}$
- p est appelé **ordonnée à l'origine**

Pour tracer une droite :

1ère méthode :

- Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il suffit de trouver l'image de deux réels par la fonction affine, de représenter les points correspondants et de les relier par une droite.
- Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de trouver l'image d'un réel par la fonction linéaire, de représenter le point correspondant et de tracer une droite passant par ce point et l'origine du repère.

2ème méthode :

- On obtient le premier point grâce à l'ordonnée à l'origine p.
- On obtient un second point avec le coefficient directeur m (en se déplaçant de m unités verticalement et d'une unité (horizontalement) vers la droite).

Remarque : Si $m = \frac{N}{D}$, on peut, en partant d'un point de la droite, se déplacer de N unités verticalement puis de D unités horizontalement pour retrouver un point de la droite.

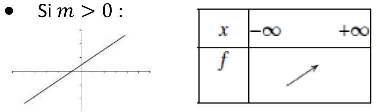
III. Variations

Application 3 : Vocabulaire

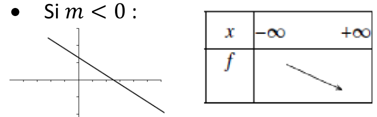
fonction	nature	m	p	Variation ?
$a(x) = 5x - 3$	affine	5	-3	Croissante
$b(x) = 8 - 3x$	affine	-3	8	Décroissante
$c(x) = 3\sqrt{2}$	constante	0	$3\sqrt{2}$	Constante
$d(x) = 4x^2 + 3$	non affine	[redacted]		
$e(x) = 4x$	linéaire	4	0	Croissante
$f(x) = 2\sqrt{x} - 3$	non affine	[redacted]		
$g(x) = \frac{2x-3}{5} = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$	affine	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	Croissante

Variations :

- Si $m > 0$:



- Si $m < 0$:



- Si $m = 0$