Fiche méthode : Second degré

I. Différentes formes

Application 1 : On donne l'expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

On appelle cette forme : *forme **développée** du polynôme du second degré.*

La fonction f est représentée par la courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.

1) Démontrer que pour tout réel x,
$$f(x) = -2(x+3)(x-1)$$

$$-2(x+3)(x-1) = -2(x^2 - x + 3x - 3)$$
$$= -2(x^2 + 2x - 3)$$
$$= -2x - 4x + 6$$
$$= f(x)$$

On appelle cette forme : *forme **factorisée** du polynôme du second degré.*

2) Démontrer que pour tout réel x,
$$f(x) = -2(x+1)^2 + 8$$

$$-2(x+1)^2 + 8 = -2(x^2 + 2x + 1) + 8$$
$$= -2x^2 - 4x - 2 + 8$$
$$= -2x^2 - 4x + 6$$
$$= f(x)$$

On appelle cette forme : *forme **canonique** du polynôme du second degré.*

3) Le point $A(2; -10)$ appartient-il à la courbe C_f ?

$f(2) = -2(2+3)(2-1)$
$= -2 \times 5 \times 1$
$= -10 = y_A$

Donc $A \in C_f$

4) Utiliser la forme la mieux adaptée pour répondre aux questions suivantes, en justifiant.

a) Déterminer les antécédents de 0 par f.

$f(x) = 0$
$-2(x+3)(x-1) = 0$ (forme factorisée)
$x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$x = -3$ ou $x = 1$
-3 et 1 sont les antécédents de 0 par f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

On utilise la forme canonique :
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$
$f(x) = -2(x - (-1))^2 + 8$
Par correspondance : $a = -2 < 0$ ainsi la fonction sera d'abord croissante puis décroissante.
$\alpha = -1$ et $\beta = 8$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	8	↘	

c) Donner la nature et la valeur de l'extremum.

On utilise la forme canonique ainsi la fonction f admet comme maximum 8 atteint en $x = -1$.

Différentes formes d'un polynôme du 2nd degré :

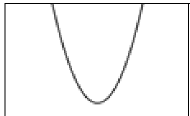
- **Forme développée :** $f(x) = ax^2 + bx + c$
  La parabole **coupe l'axe des ordonnées au point $M(0\,;\,c)$.**
- **Forme factorisée :**
  - Si $f(x) = 0$ admet deux solutions notées x_1 et x_2 alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  - Si $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α alors $f(x) = a(x-\alpha)^2$.
  - Si $f(x) = 0$ n'admet aucune solution réelle alors $f(x)$ ne se factorise pas.
- **Forme canonique :** $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Pour passer d'une forme à l'autre :
(Attention : Il ne faut pas commencer par $f(x) =$)

- **De forme factorisée à forme développée :** Il suffit de développer en utilisant la double distributivité.
- **De forme canonique à forme développée :** Il suffit de développer et d'utiliser les identités remarquables :
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- **De la forme canonique à la forme factorisée** : On utilise l'identité remarquable :
  - $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- **De la forme développée à la forme canonique** : Deux méthodes (voir partie II)
  1) En utilisant le début d'une identité remarquable
  2) Avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

Courbe et variations :

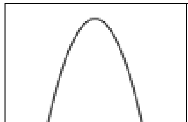
- **Si $a > 0$**



x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

La parabole est « **tournée vers le haut** »
La fonction f admet un minimum β atteint en $x = \alpha$

- **Si $a < 0$**



x	$-\infty$		α		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

La parabole est « **tournée vers le bas** »
La fonction f admet un maximum β atteint en $x = \alpha$

II. Forme canonique

Application 2 : Déterminer, par deux méthodes, la forme canonique des trinômes définies par :

$$A(x) = x^2 + 4x - 1$$
$$a = 1\,;\, b = 4 \text{ et } c = -1$$

1ère méthode : avec α et β

$A(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
Avec $a = 1$;
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$ et
$\beta = A(-2)$
$= (-2)^2 + 4(-2) - 1$
$= 4 - 8 - 1$
$= -5$

$A(x) = (x+2)^2 - 5$

2ème méthode : avec un début de développement

Etape 1 : On factorise par a les deux 1ers termes :
$A(x) = (\boldsymbol{x^2 + 4x}) - 1$

Etape 2 : On cherche le début d'une identité remarquable :
$\boldsymbol{x^2 + 4x}$ est le début de l'identité remarquable $(x+2)^2$
$(x+2)^2 = \boldsymbol{x^2 + 4x} + 4$
$\boldsymbol{x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4}$

$A(x) = (\boldsymbol{(x+2)^2 - 4}) - 1$
$A(x) = (x+2)^2 - 4 - 1$
$A(x) = (x+2)^2 - 5$

$$B(x) = \boldsymbol{2x^2 - 4x} + 6$$
$$a = 2\,;\, b = -4 \text{ et } c = 6$$

1ère méthode : avec α et β

$B(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
Avec $a = 2$;
$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$ et
$\beta = B(1) = 2 - 4 + 6 = 4$

$B(x) = 2(x-1)^2 + 4$

2ème méthode : avec un début de développement

Etape 1 : On factorise par a les deux 1ers termes :
$B(x) = \boldsymbol{2(x^2 - 2x)} + 6$

Etape 2 : On cherche le début d'une identité remarquable :
$\boldsymbol{x^2 - 2x}$ est le début de l'identité remarquable $(x-1)^2$
$(x-1)^2 = \boldsymbol{x^2 - 2x} + 1$
$\boldsymbol{x^2 - 2x} = \boldsymbol{(x-1)^2 - 1}$

$B(x) = \boldsymbol{2((x-1)^2 - 1)} + 6$

Etape 3 : On développe par a la grande parenthèse :
$B(x) = \boldsymbol{2(x-1)^2 - 2} + 6$
$B(x) = 2(x-1)^2 + 4$

Application 3 : Extremums

Déterminer l'extremum des fonctions suivantes en en précisant la nature et en déduire leur forme canonique :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$a = 1\,;\, b = -4$ et $c = 3$
$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} = \frac{4}{2} = 2$
$\beta = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$
$a > 0$ ainsi la fonction f admet comme minimum -1 atteint en $x = 2$.

$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$
$= (x-2)^2 - 1$

b) $g(x) = -2x^2 - x + 1$

$a = -2\,;\, b = -1$ et $c = 1$
$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$
$\beta = g\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1 = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{9}{8}$
$a < 0$ ainsi la fonction f admet comme maximum $\frac{9}{8}$ atteint en $x = -\frac{1}{4}$.

$\boldsymbol{g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$
$= -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

III. Equations et inéquations

Application 4 : Equations sans discriminant

Dans chacun des cas, résoudre l'équation $f(x)=0$.

a) $f(x)=2x^2-8x$

$f(x)=0$
$2x(x-4)=0$
(On factorise par $2x$)
$x=0$ ou $x-4=0$
$x=0$ ou $x=4$
$S=\{0\,;4\}$

c) $f(x)=25-4x^2$

$f(x)=0$
$f(x)=5^2-(2x)^2$
$(5-2x)(5+2x)=0$
(Identité remarquable)
$5-2x=0$ ou $5+2x=0$
$x=\frac{5}{2}$ ou $x=-\frac{5}{2}$
$S=\left\{-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right\}$

b) $f(x)=(x+1)(2x+3)$

$f(x)=0$
$(x+1)(2x+3)=0$
$x=-1$ ou $x=-\frac{3}{2}$.
$S=\left\{-\frac{3}{2}\,;-1\right\}$

d) $f(x)=(x-2)^2-49$

$f(x)=0$
$(x-2)^2-49=0$
$(x-2)^2=49$
$x-2=-7$ ou $x-2=7$
$x=-5$ ou $x=9$
$S=\{-5\,;9\}$

Application 5 : Inéquations du 2nd degré

Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $-2x^2+5x+7<0$

On note $f(x)=-2x^2+5x+7$

1ère étape :

On cherche les racines de $f(x)$ en résolvant l'équation du second degré $f(x)=0$.

$a=-2\,;b=5$ et $c=7$

$\Delta=b^2-4ac$
$=5^2-4\times(-2)\times 7$
$=25+56$
$=81>0$

Et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$

Ainsi l'équation admet deux solutions réelles :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1=\frac{-5-9}{2\times(-2)}$ | $x_2=\frac{-5+9}{2\times(-2)}$
$x_1=\frac{-14}{-4}$ | $x_2=\frac{4}{-4}$
$x_1=\frac{7}{2}$ | $x_2=-1$

2ème étape :

On fait le tableau de signes en utilisant le signe de a (à l'extérieur des racines).

$a<0$ ainsi la parabole est tournée vers le bas.

x	$-\infty$		-1		7/2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

3ème étape :

On résout l'inéquation demandée :

$-2x^2+5x+7<0$ pour $x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$

$S=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]\frac{7}{2}\,;+\infty\right[$

Racine d'un polynôme :

- Soit P un polynôme et r un réel.
  On appelle racine (solution) d'un polynôme, le nombre r tel que $P(r)=0$.
  Graphiquement les racines d'un polynôme sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Méthode : Equation du second degré :

- Soient a, b et c trois nombres réels avec $a\neq 0$.
  L'équation $ax^2+bx+c=0$ est une équation du second degré.
- Pour résoudre une équation du second degré :
  On regarde si on ne peut pas utiliser une méthode vue au collège ou en seconde :
  - Factorisation par x (*voir a)*)
  - Produit nul (*voir b)*)
  - 3ème identité remarquable (*voir c)*) :
    $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
  - (expression)²$=k$ (*voir d)*)
    expression$=-\sqrt{k}$ ou expression$=\sqrt{k}$
- Si aucune de ces méthodes ne fonctionne on calcule le discriminant :
  - Le **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c est : $\Delta=b^2-4ac$

Signe d'un polynôme du second degré :

Soient a, b et c trois nombres réels avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$.

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré.

- Si $\Delta>0$

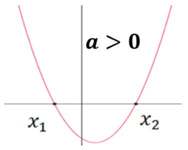
L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Forme factorisée du polynôme lorsque $\Delta>0$:

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

La parabole coupe deux fois l'axe des abscisses :



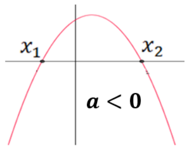


Tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

b) $2x^2-20x+50>0$

On note $f(x)=2x^2-20x+50$

1ère étape :

On cherche les racines de $f(x)$ en résolvant l'équation du second degré $f(x)=0$.

$a=2\,;b=-20$ et $c=50$

$\Delta=b^2-4ac$
$=(-20)^2-4\times 2\times 50$
$=400-400$
$=0$

Ainsi l'équation admet une seule solution :

$\alpha=-\frac{b}{2a}$
$\alpha=\frac{20}{2\times 2}$
$\alpha=\frac{20}{4}$
$\alpha=5$

2ème étape : On fait le tableau de signes en utilisant le signe de a.

$a>0$ ainsi la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

3ème étape : On résout l'inéquation demandée :

$2x^2-20x+50>0$ pour $x\in\mathbb{R}\backslash\{5\}$

$S=\mathbb{R}\backslash\{5\}=\left]-\infty\,;5\right[\cup\left]5\,;+\infty\right[$

c) $5x^2+x+4\geq 0$

On note $f(x)=5x^2+x+4$

1ère étape : On cherche les racines de $f(x)$ en résolvant l'équation du second degré $f(x)=0$.

$a=5\,;b=1$ et $c=4$

$\Delta=b^2-4ac$
$=1^2-4\times 5\times 4$
$=1-80$
$=-79<0$

Ainsi l'équation n'admet pas de solution réelle.

2ème étape : On fait le tableau de signes en utilisant le signe de a.

$a>0$ ainsi la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	

3ème étape : On résout l'inéquation demandée :

$5x^2+x+4\geq 0$ pour $x\in\mathbb{R}$

$S=\mathbb{R}$

- Si $\Delta=0$

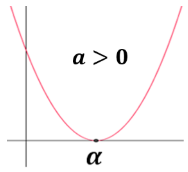
L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution double réelle :

$$\alpha=-\frac{b}{2a}$$

Forme factorisée du polynôme lorsque $\Delta=0$:

$$P(x)=a(x-\alpha)^2$$

La parabole coupe une seule fois l'axe des abscisses en $x=\alpha$:



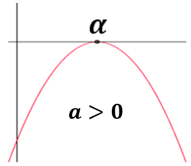


Tableau de signes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

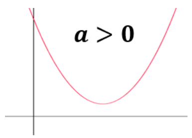
- Si $\Delta<0$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution réelle

Forme factorisée du polynôme lorsque $\Delta<0$:

On ne peut pas factoriser $f(x)$.

La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.



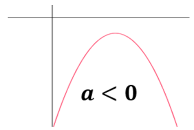


Tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	