Fiche méthode : Produit scalaire

I. Différentes formules du produit scalaire

Application 1 : Produit scalaire et angle

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que :
$AB = 3, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = 45°$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 3 \times 9 \times \cos(45) = 27 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{2}\sqrt{2}$$

2. Calculer AB sachant que :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

$$AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos(\widehat{BAC})} = \frac{40}{8 \times \frac{1}{2}} = \frac{40}{4} = 10$$

3. Calculer $\widehat{BAC}$ au degré près sachant que :
$AB = 3, AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{6}{3 \times 7} = \frac{2}{7}$$

A la calculatrice, on trouve $\widehat{BAC} \approx 73°$

Application 2 : Droites perpendiculaires

On se place dans un repère orthonormé.
Soient les points $A(-1; -1), B(3\,; 5), C(2; 1)$ et $D(-1\,; 3)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+1\\5+1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-2\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 4 \times (-3) + 6 \times 2 = -12 + 12 = 0$

Ainsi les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Application 3 : Utilisation de deux formules

Soient $A(4\,; 1), B(-3\,; 1)$ et $C(1\,; 5)$ trois points du plan.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-7) \times (-3) + 0 \times 4 = 21$

2. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$

$AB = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$

$AC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{21}{7 \times 5} = \frac{3}{5}$.

3. Donner une mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Ainsi $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°$

4. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? Justifier.

Méthode 1 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 21 \neq 0$
Méthode 2 : $\widehat{BAC} = 18{,}43° \neq 90°$
Conclusion : Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

Rappels :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points du plan tels $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$
- On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$, noté $\|\vec{u}\|$, la longueur du segment $[AB]$.
On a donc $\|\vec{u}\| = AB$
- Dans une base orthonormée on a :
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Produit scalaire et angle :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.
Il existe trois points A, B et C tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

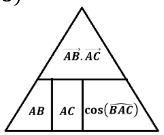
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Cette formule peut s'écrire :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$AB = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$



Produit scalaire et coordonnées :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée.
Le produit scalaire est le nombre réel :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Vecteurs orthogonaux :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires.**

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur **produit scalaire est nul.**

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si :

$$xx' + yy' = 0$$

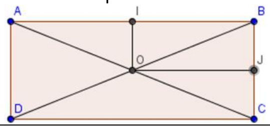
Triangle rectangle :

Soit A, B, C trois points distincts.
Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque : Cela permet de ne pas forcément utiliser le théorème de Pythagore.

Application 4 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 5$ et $AD = 2$.
Calculer les produits scalaires :



a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$
car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de sens opposés.
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 25$
car B est le projeté orhogonal de C sur (AB).
c) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA} = -DA^2 = -4$
car D est le projeté orthogonal de C sur (DA).
d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}.-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}AB^2 = -\frac{25}{2}$
car D est le projeté orthogonale de A sur (AB) et car I est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Application 5 : Produit scalaire avec normes

ABC est un triangle tel que $AB = 6, BC = 3$ et $AC = 4$.
Calculer : a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

a)
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(BC^2 - BA^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(3^2 - 6^2 - 4^2) = -\frac{43}{2}$$

b)
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = -\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = -\frac{1}{2}(4^2 - 6^2 - 3^2) = -\frac{29}{2}$$

c)
$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(BA^2 - BC^2 - CA^2) = \frac{1}{2}(6^2 - 3^2 - 4^2) = \frac{11}{2}$$

Vecteurs colinéaires :

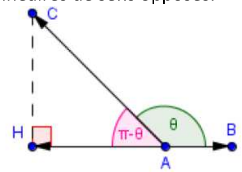
Soit A, B, C trois points distincts.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens opposés.

Produit scalaire et projeté orthogonal :

Soit A, B, C trois points distincts. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens opposés.



Produit scalaire avec normes :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

On trouve souvent cette formule de cette manière :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$$

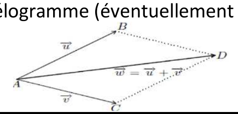
Relation de Chasles :

Quels que soient les points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Règle du parallélogramme :

Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de même origine A.
Pour tous points A, B, C et D on a :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, si et seulement si, D est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati).



II. Théorème d'Al-Kashi

Application 6 : Produit scalaire et angle

Le triangle ABC est tel que $AB = 9, AC = 4$ et $\hat{A} = 60°$.

1. Calculer BC.

D'après la formule d'Al-Kashi on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$
$BC^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \times 9 \times 4 \times \cos(60) = 61.$
Ainsi $BC = \sqrt{61}$.

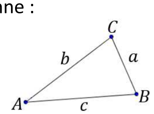
2. Calculer $\hat{C}$, en donner l'arrondi au degré près.

D'après la formule d'Al-Kashi on a :
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\hat{C})$
$\cos(\hat{C}) = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{-2AB \times AC} = \frac{81 - 16 - 61}{-2 \times 4 \times \sqrt{61}} = \frac{4}{-8\sqrt{61}} = -\frac{1}{2\sqrt{61}}$
Ainsi $\hat{C} \approx 94°$

Théorème d'AL-Kashi

Dans un triangle quelconque ABC,
Notons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Le théorème d'AL-Kashi nous donne :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$



On peut obtenir les formules suivantes :

$$\cos(\hat{A}) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} \qquad \cos(\hat{B}) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$