Chapitre : Droites (correction)

Compétence : Différentes équations de droites

Exercice 1 : Différentes équations de droites

Les équations suivantes sont-elles des équations de droites ?

Si oui, donner l'équation réduite, et préciser si la droite a une particularité (horizontale ? verticale ? passe par l'origine ?)

1) $y = \frac{3}{2}x + \sqrt{2}$	2) $2x + 3y - 5 = 0$	3) $5x = 1$
C'est déjà une équation de droite sous forme réduite. Aucune particularité.	$\boldsymbol{3y = -2x + 5}$ $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}}$ **Aucune particularité.**	$\boldsymbol{x = \frac{1}{5}}$ **Droite verticale.**
4) $3y + 2 = 6$	5) $2x + \frac{3}{y} - 5 = 0$	6) $2x^2 + 3y - 1 = 0$
$\boldsymbol{3y = 4}$ $\boldsymbol{y = \frac{4}{3}}$ **Droite horizontale.**	**Ce n'est pas une équation de droite (à cause du $\frac{3}{y}$)**	**Ce n'est pas une équation de droite (à cause du x^2)**

Exercice 2 : Différentes équations de droites

Les équations suivantes sont-elles des équations de droites ?

Si oui, donner l'équation réduite, et préciser si la droite a une particularité (horizontale ? verticale ? passe par l'origine ?)

1) $x + y - 5 = 0$	2) $3x - 6y + 2 = 0$	3) $3\sqrt{2}\ x + \sqrt{2}\,y = 0$
$\boldsymbol{y = -x + 5}$ **Aucune particularité**	$\boldsymbol{-6y = -3x - 2}$ $\boldsymbol{y = \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}}$ $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}}$ **Aucune particularité.**	$\boldsymbol{\sqrt{2}\,y = -3\sqrt{2}\,x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x}$ $\boldsymbol{y = -3x}$
4) $5y + 10x = 20$	5) $3 - x = 0$	6) $\sqrt{4x} + 2y = 0$
$\boldsymbol{5y = -10x + 20}$ $\boldsymbol{y = -2x + 4}$ **Aucune particularité.**	$\boldsymbol{-x = -3}$ $\boldsymbol{x = 3}$ **Droite verticale.**	**Ce n'est pas une équation de droite (à cause du $\sqrt{4x}$)**

Exercice 3 : Différentes équations de droites

Compléter le tableau suivant.

(pour l'équation réduite, faire les calculs au brouillon, et ne donner que la réponse)

équation :	est-ce une équation de droite ? (oui ou non)	si c'est une équation droite			
		particularité ?	équation réduite ?	m = ?	p = ?
$3x + 5y + 10 = 0$	**oui**	**non**	$\boldsymbol{y = -\frac{3}{5}x - 2}$	$-\frac{3}{5}$	$\mathbf{-2}$
$2x - 8 = 0$	**oui**	**verticale**	$\boldsymbol{x = 4}$		
$2x^2 + 3y + 1 = 0$	**NON**				
$4x + 2y = 0$	**oui**	**passe par O**	$\boldsymbol{y = -2x}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$
$x = 3y - 1$	**oui**	**non**	$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$y + 8 = 0$	**oui**	**horizontale**	$\boldsymbol{y = -8}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-8}$
$\frac{2x+y}{3} = 1$	**oui**	**non**	$\boldsymbol{y = -2x + 3}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{3}$

Exercice 4 : Différentes équations de droites

Déterminer l'équation réduite de chacune des droites suivantes, préciser si la droite a une particularité (horizontale ? verticale ? passe par l'origine ?)

$D_1 : 2x + y - 3 = 0$	$D_2 : 5y - 10 = 0$	$D_3 : 9x + 3y = 0$
$\boldsymbol{y = -2x + 3}$ **aucune particularité**	$\boldsymbol{5y = 10}$ $\boldsymbol{y = 2}$ **droite horizontale**	$\boldsymbol{3y = -9x}$ $\boldsymbol{y = -3x}$ **droite passant par l'origine**

$D_4 : 2x - 4y + 8 = 0$	$D_5 : -3x + y - 5 = 0$	$D_6 : x + 3y = 0$
$\boldsymbol{-4y = -2x - 8}$ $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 2}$ **aucune particularité**	$\boldsymbol{y = 3x + 5}$ **aucune particularité**	$\boldsymbol{3y = -x}$ $\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x}$ **droite passant par l'origine**

Compétence : Points appartenant à une droite ?

Exercice 5 : Points appartenant à une droite ?

1. Les points $A(-3\,;2), B(0\,;5), C(12\,;47)$ et $D(1\,;3)$ appartiennent-ils à la droite d'équation $y = 4x - 1$?

$4x_A - 1 = 4 \times (-3) - 1 = -12 - 1 = -13 \neq 2$ Ainsi $A \notin (d)$	$4x_B - 1 = 4 \times 0 - 1 = -1 \neq 5$ Ainsi $B \notin (d)$
$4x_C - 1 = 4 \times 12 - 1 = 48 - 1 = 47$ Ainsi $C \in (d)$	$4x_D - 1 = 4 \times 1 - 1 = 4 - 1 = 3$ Ainsi $D \in (d)$

2. Les points $A(-2\,;3), B(0\,;5), C(-2\,;47)$ et $D(1\,;3)$ appartiennent-ils à la droite d'équation $x = -2$?

$x_A = -2$ Ainsi $A \in (d)$	$x_B = 0 \neq -2$ Ainsi $B \notin (d)$
$x_C = -2$ Ainsi $C \in (d)$	$x_D = 1 \neq -2$ Ainsi $D \notin (d)$

3. Les points $A(-3\,;2), B(0\,;5), C(12\,;47)$ et $D(1\,;3)$ appartiennent-ils à la droite d'équation $y = 3x + 11$?

$3x_A + 11 = 3 \times (-3) + 11 = -9 + 11 = 2$ Ainsi $A \in (d)$	$3x_B + 11 = 3 \times 0 + 11 = 11 \neq 5$ Ainsi $B \notin (d)$
$3x_C + 11 = 3 \times 12 + 11 = 36 + 11 = 47$ Ainsi $C \in (d)$	$3x_D + 11 = 3 \times 1 + 11 = 3 + 11 = 14 \neq 3$ Ainsi $D \notin (d)$

4. Les points $A\left(1\,;-\frac{1}{4}\right), B\left(-\frac{1}{2}\,;-1\right), C(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2})$ et $D(1\,;3)$ appartiennent-ils à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$?

$\frac{1}{2}x_A - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$ Ainsi $A \in (d)$	$\frac{1}{2}x_B - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{4}{4} = -1$ Ainsi $B \in (d)$
$\frac{1}{2}x_C - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ Ainsi $C \in (d)$	$\frac{1}{2}x_D - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \neq 3$ Ainsi $D \notin (d)$

5. Les points $A(0; 2{,}3), B(1; 2{,}4), C(1{,}2; 1{,}7)$ et $D(1\,;2{,}2)$ appartiennent-ils à la droite d'équation $y = -0{,}1x + 2{,}3$?

$-0,1x_A + 2,3 = -0,1 \times 0 + 2,3 = 2,3$ Ainsi $A \in (d)$	$-0,1x_B + 2,3 = -0,1 \times 1 + 2,3 = 2,2 \neq 2,4$ Ainsi $B \notin (d)$
$-0,1x_C + 2,3 = -0,1 \times 1,2 + 2,3 = 2,18 \neq 1,7$ Ainsi $C \notin (d)$	$-0,1x_D + 2,3 = -0,1 \times 1 + 2,3 = 2,2$ Ainsi $D \in (d)$

Exercice 6 : Abscisses, ordonnées et équations de droites

1. Pour chacune des équations de droites suivantes, indiquer **l'ordonnée** du point d'abscisse $x = -3$.

a. $y = -2$

$y = -2$

b. $y = x - 2$

$y = -3 - 2 = -5$

c. $y = \frac{2}{3}x - 2$

$y = \frac{2}{3} \times (-3) - 2 = -4$

d. $y = \frac{2}{3}x$

$y = \frac{2}{3} \times (-3) = -2$

e. $y = 2x + 7$

$y = 2 \times (-3) + 7 = 1$

f. $y = -x + 3$

$y = -(-3) + 3 = 6$

2. Pour chacune des équations de droites suivantes, indiquer **l'abscisse** du point d'ordonnée $y = 2$.

a. $x = 3$

$x = 3$

b. $y = x - 4$

$2 = x - 4$ donc $x = 6$

c. $y = \frac{5}{2}x$

$2 = \frac{5}{2}x$ donc $x = 2 \times \frac{2}{5}$ donc $x = \frac{4}{5}$

d. $y = 2x + 1$

$2 = 2x + 1$ donc $2x = 1$ donc $x = \frac{1}{2}$

e. $y = -x + 7$

$2 = -x + 7$ donc $x = 5$

f. $y = \frac{2}{3}x - 2$

$2 = \frac{2}{3}x - 2$ donc $\frac{2}{3}x = 4$ donc $x = 4 \times \frac{3}{2}$ donc $x = 6$

Compétence : Déterminer une équation de droite

Exercice 7 : Déterminer une équation de droite

Déterminer l'équation de la droite (AB)

a. $A(7\,;0)$ et $B(0\,;7)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) ainsi (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$.

On cherche d'abord le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-0}{0-7} = \frac{7}{-7} = -1$$

Donc (AB) : $y = -x + p$.

On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :

$A(7\,;\,0) \in (AB)$ ainsi $y_A = -x_A + p$

$$-x_A + p = y_A$$
$$-7 + p = 0$$
$$p = 7$$

Conclusion : (AB) a pour équation : $y = -x + 7$.

Remarque : **Sans aucun calcul, on aurait pu trouver l'ordonnée à l'origine grâce au point $B(0\,;7)$**

b. $A(8\,;3)$ et $B(8\,;\,-3)$

$x_A = x_B = 8$ donc (AB) a pour équation $x = 8$. La droite est donc parallèle à l'axe des ordonnées (verticale).

c. $A(-7\,;-3)$ et $B(12\,;-3)$

$y_A = y_B = -3$ donc (AB) a pour équation $y = -3$. La droite est donc parallèle à l'axe des abscisses (horizontale).

d. $A\,(-2\,;\,-8\,)$ et $B\,(\,6\,;\,16\,)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) donc (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$

On cherche d'abord le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{16+8}{6+2} = \frac{24}{8} = 3$$

Ainsi (AB): $y = 3x + p$

On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :

$B(6\,;16) \in (AB)$, donc $y_B = 3x_B + p$

$$16 = 18 + p$$
$$18 + p = 16$$
$$p = -2$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (AB) : $y = 3x - 2$.

e. $A(-2\,;0)$ et $B(0\,;\,2)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) donc (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$

On cherche d'abord le coefficient directeur m :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0+2} = 1$$

Ainsi (AB): $y = x + p$

On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :

$B(0\,;2) \in (AB)$, donc $y_B = x_B + p$

$$2 = 0 + p$$
$$p = 2$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (AB) : $y = x + 2$.

f. $A\left(3\,;\,1\right)$et $B\left(-12\,;\,-2\right)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) donc (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$
On cherche d'abord le coefficient directeur m :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{-12-3} = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}}$$

Ainsi (AB): $y = \frac{1}{5}x + p$
On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :
$A(3\,;1) \in (AB)$, donc $y_A = \frac{1}{5} + p$

$$\boldsymbol{1 = \frac{3}{5} + p}$$
$$\boldsymbol{\frac{3}{5} + p = 1}$$
$$\boldsymbol{p = \frac{5}{5} - \frac{3}{5}}$$
$$\boldsymbol{p = \frac{2}{5}}$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (AB) : $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$.

g. $A(1\,;-2)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\,;-5\right)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) donc (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$
On cherche d'abord le coefficient directeur m :

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5+2}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-3}{-\frac{3}{2}} = 3 \times \frac{2}{3} = 2}$$

Ainsi (AB): $y = 2x + p$
On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :
$A(1\,;-2) \in (AB)$, donc $y_A = 2x_A + p$

$$\boldsymbol{2x_A + p = y_A}$$
$$\boldsymbol{2 \times 1 + p = -2}$$
$$\boldsymbol{p = -4}$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (AB) : $y = 2x - 4$.

h. $A(0\,;\sqrt{5}-2)$ et $B(4\,;\,\sqrt{5}+2)$

$x_A \neq x_B$ (et $y_A \neq y_B$) donc (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$
On cherche d'abord le coefficient directeur m :

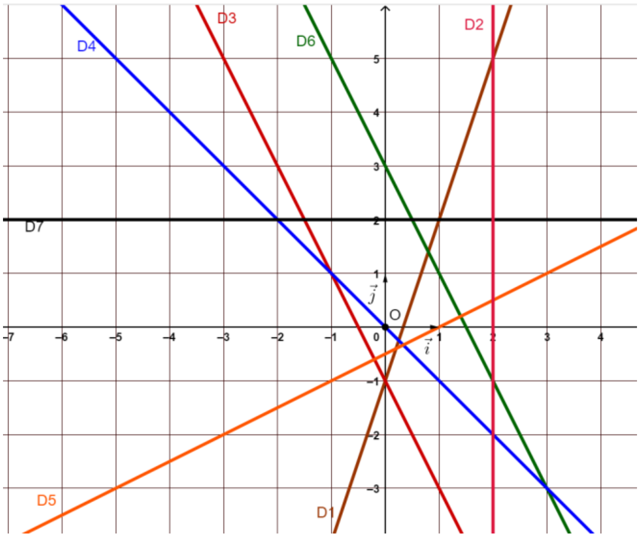
$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)}{4-0} = \frac{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}{4} = \frac{4}{4} = 1}$$

Ainsi (AB): $y = x + p$
On cherche ensuite l'ordonnée à l'origine p :
$A(0\,;\sqrt{5}-2) \in (AB)$, donc $y_A = x_A + p$

$$\boldsymbol{\sqrt{5} - 2 = 0 + p}$$
$$\boldsymbol{p = \sqrt{5} - 2}$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (AB) : $y = x + \sqrt{5} - 2$.

Exercice 8 : Associer une fonction affine à une droite



Déterminer une équation de chaque droite représentée ci-contre.

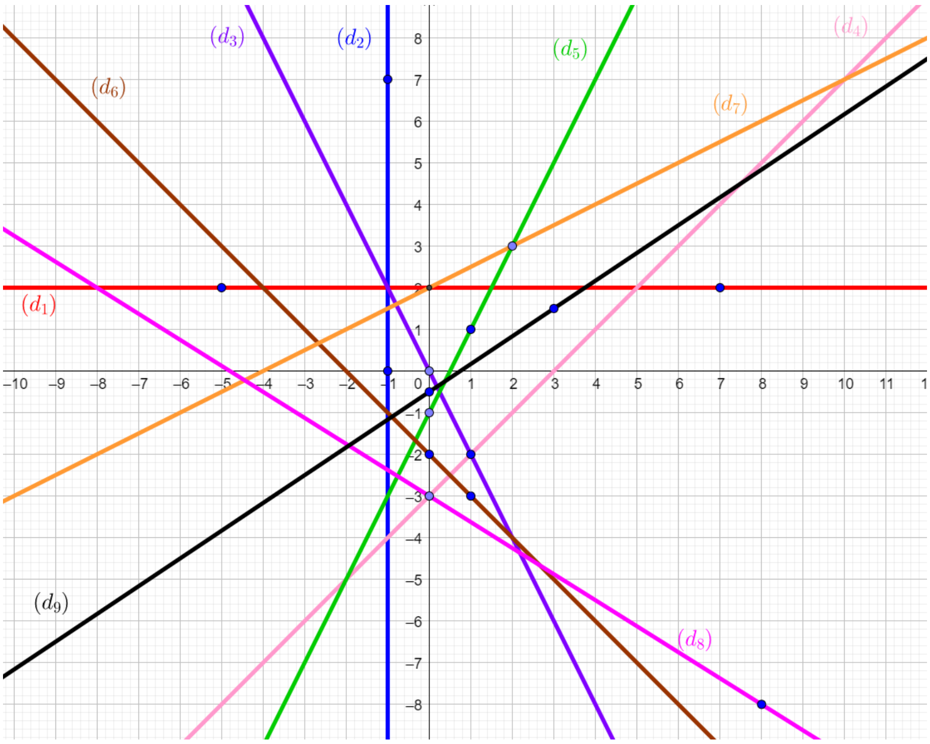
$\boldsymbol{D_1 : y = 3x - 1}$
$\boldsymbol{D_2 : x = 2}$
$\boldsymbol{D_3 : \ y = -2x - 1}$
$\boldsymbol{D_4 : y = -x}$
$\boldsymbol{D_5 : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$
$\boldsymbol{D_6 : y = -2x + 3}$
$\boldsymbol{D_7 : y = 2}$

Compétence : Représenter dans un repère orthonormé des droites

Exercice 9 : Représenter dans un repère orthonormé des droites

Représenter dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ les droites suivantes :

a. $(d_1) : y = 2$
b. $(d_2) : x = -1$
c. $(d_3) : y = -2x$
d. $(d_4) : y = x - 3$
e. $(d_5) : y = 2x - 1$
f. $(d_6) : y = -x - 2$
g. $(d_7) : y = \frac{1}{2}x + 2$
h. $(d_8) : y = -\frac{5}{8}x - 3$
i. $(d_9) : y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$



Compétence : Droites parallèles et coefficients directeurs

Exercice 10 : Droites parallèles et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (d) :

1. (d) est parallèle à l'axe (OJ) passant par $A(1\ ;\ -3)$.

(d) est parallèle à l'axe (OJ) donc (d) a une équation de la forme $x = x_A$.
$A(1\,;-3) \in (d)$, donc $x_A = 1$
On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $x = 1$.

2. (d) est parallèle à l'axe (OI) passant par $A(1\ ;\ -3)$.

(d) est parallèle à l'axe (OI) donc (d) a une équation de la forme $y = y_A$.
$A(1\,;-3) \in (d)$, donc $y_A = -3$
On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = -3$.

3. (d) est parallèle à l'axe (IJ) passant par $A(1\ ;\ -3)$.

(d) est parallèle à l'axe (IJ) or (IJ) : $y = -x + 1$ donc (d) a le même coefficient directeur que (IJ) donc $m = -1$.
(d) a une équation de la forme $y = -x + p$.
$A(1\,;-3) \in (d)$, donc $y_A = -x_A + p$

$$-3 = -1 + p$$
$$p = -2$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = -x - 2$.

4. (d) est parallèle à (BC) passant par A avec $A(6\,;2), B(0\,;5)$ et $C(-1\,;-1)$

On calcule d'abord le coefficient directeur de (BC) : $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-5}{-1-0} = \frac{-6}{-1} = 6$.
(d) est parallèle à (BC) donc $m_{(d)} = m_{(BC)} = 6$.
(d) a une équation de la forme $y = 6x + p$.
$A(6\,;2) \in (d)$, donc $y_A = 6x_A + p$

$$2 = 6 \times 6 + p$$
$$p = 2 - 36$$
$$p = -34$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = 6x - 34$.

5. (d) est parallèle à la droite (d') d'équation $x = 3$ passant par $A(-3\,;1)$

(d) est parallèle à l'axe (d') donc (d) a une équation de la forme $x = x_A$.
$A(-3\,;1) \in (d)$, donc $x_A = -3$
On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $x = -3$.

6. (d) est parallèle à la droite (d') d'équation $y = -4$ passant par $A(4\,;2)$

(d) est parallèle à l'axe (d') donc (d) a une équation de la forme $y = y_A$.
$A(4\,;2) \in (d)$, donc $y_A = 2$
On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = 2$.

7. (d) est parallèle à la droite (d') d'équation $y = -5x + 3$ passant par $A(-1\,;7)$

(d) est parallèle à (d') donc $m_{(d)} = m_{(d')} = -5$.
(d) a une équation de la forme $y = -5x + p$.
$A(-1\,;7) \in (d)$, donc $y_A = -5x_A + p$

$$7 = -5 \times (-1) + p$$
$$p = 7 - 5$$
$$p = 2$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = -5x + 2$.

8. (d) est parallèle à la droite (d') d'équation $y = 2x - 5$ passant par $A(0\,;3)$

(d) est parallèle à (d') donc $m_{(d)} = m_{(d')} = 2$.
(d) a une équation de la forme $y = 2x + p$.
$A(0\,;3) \in (d)$, donc $y_A = 2x + p$

$$3 = 2 \times 0 + p$$
$$p = 3$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = 2x + 3$.

9. (d) est parallèle à la droite (d') d'équation $y = \frac{3}{2}x - 2$ passant par $A(2\,;3)$

(d) est parallèle à (d') donc $m_{(d)} = m_{(d')} = \frac{3}{2}$.
(d) a une équation de la forme $y = \frac{3}{2}x + p$.
$A(2\,;3) \in (d)$, donc $y_A = \frac{3}{2}x_A + p$

$$3 = \frac{3}{2} \times 2 + p$$
$$p = 3 - 3$$
$$p = 0$$

On conclut en donnant l'équation de la droite (d) : $y = \frac{3}{2}x$.

Exercice 11 : Droites parallèles et coefficients directeurs

Parmi les droites dont on donne l'équation, identifier celle qui sont parallèles.

a. $(d_1) : x = -3$
b. $(d_2) : y = x + 7$
c. $(d_3) : y = 1{,}2$
d. $(d_4) : y = -3x + 1$
e. $(d_5) : y = x$
f. $(d_6) : x = 15$
g. $(d_7) : y = 3x + 1$
h. $(d_8) : y = -23$
i. $(d_9) : y = -3x - 3$

$(d_1) \mathbin{/\!/} (d_6)$: ce sont des droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = k$.
$(d_3) \mathbin{/\!/} (d_8)$: ce sont des droites parallèles à l'axe des abscisses d'équation $y = k$.
$(d_2) \mathbin{/\!/} (d_5)$: ce sont des droites avec le même coefficient directeur $m = 1$.
$(d_4) \mathbin{/\!/} (d_9)$: ce sont des droites avec le même coefficient directeur $m = -3$.

Exercice 12: Droites parallèles et coefficients directeurs

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont ou ne sont pas parallèles :

1. $A(1\,;1), B(3\,;3), C(-5\,;12)$ et $D(10\,;27)$.

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{3-1} = 1$	$m' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{27-12}{10-(-5)} = \frac{15}{15} = 1$	**$m = m'$ ainsi $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$**

2. $A(-2\,;6), B(6\,;0), C(10\,;-12)$ et $D(-10\,;-3)$.

$m = \frac{0-6}{6+2} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$	$m' = \frac{-3+12}{-10-10} = \frac{9}{-20} \neq -\frac{3}{4}$	**$m \neq m'$ ainsi (AB) et (CD) non $/\!/$**

3. $A(0{,}8\,;1), B(1{,}3\,;3), C(5\,;1{,}9)$ et $D(5{,}3\,;3{,}1)$.

$m = \frac{3-1}{1{,}3-0{,}8} = \frac{2}{0{,}5} = 4$	$m' = \frac{3{,}1-1{,}9}{5{,}3-5} = \frac{1{,}2}{0{,}3} = 4$	**$m = m'$ ainsi $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$**

Compétence : Points alignés et coefficients directeurs

Exercice 13 : Points alignés et coefficients directeurs

Les points A, B et C sont-ils, ou non, alignés ?

1. $A(6\,;2), B(0\,;5)$ et $C(-2\,;6)$.

$m_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{0-6} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$ et $m_{(AC)} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6-2}{-2-6} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$ donc $m_{(AB)} = m_{(AC)}$ ainsi les points A, B et C sont alignés.

2. $A(-1\,;0), B(1\,;5)$ et $C(-1\,;-1)$.

$x_A = x_C = -1$ mais $x_B \neq -1$ ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. $A(7\,;-2), B(7\,;3)$ et $C(7\,;-9)$.

$x_A = x_B = x_C = 7$ ainsi les points A, B et C sont alignés.

4. $A(-186\,;17), B(0\,;-45)$ et $C(78\,;-71)$.

$m_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-45-17}{0+186} = \frac{-62}{186} = -\frac{1}{3}$ et $m_{(AC)} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-71-17}{78+186} = \frac{-88}{264} = -\frac{1}{3}$ donc $m_{(AB)} = m_{(AC)}$ ainsi les points A, B et C sont alignés.

5. $A\left(\frac{1}{2}\,;\frac{17}{5}\right), B\left(\frac{1}{2}\,;\frac{7}{4}\right)$ et $C\left(\frac{1}{2}\,;1\right)$.

$x_A = x_B = x_C = \frac{1}{2}$ ainsi les points A, B et C sont alignés.

6. $A(-\sqrt{5}\,;6), B(-12\,;6)$ et $C(2-\sqrt{5}\,;6)$.

$y_A = y_B = y_C = 6$ ainsi les points A, B et C sont alignés.

Compétence : Droites sécantes et coefficients directeurs

Exercice 14 : Droites sécantes et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on considère les droites (d) et $(d)'$ d'équations respectives :

$$y = -\frac{2}{3}x + 7 \text{ et } y = \frac{1}{6}x - 18$$

1. Montrer que (d) et (d') sont sécantes.

(d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur ($-\frac{2}{3} \neq \frac{1}{6}$) ainsi (d) et (d') sont sécantes.

2. Le point $A(30\ ;\ -13)$ est-il le point d'intersection des droites (d) et (d') ?

$-\frac{2}{3}x_A + 7 = -\frac{2}{3} \times 30 + 7 = -20 + 7 = -13$ **donc** $A \in (d)$.

$\frac{1}{6}x_A - 18 = \frac{1}{6} \times 30 - 18 = 5 - 18 = -13$ **donc** $A \in (d')$.

Ainsi A est le point d'intersection des droites (d) et (d').

Exercice 15 : Droites sécantes et coefficients directeurs

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ et on considère les droites (d) et $(d)'$ d'équations respectives :

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8} \text{ et } y = -\frac{5}{7}x + \frac{5}{8}$$

1. Montrer que (d) et (d') sont sécantes.

(d) et (d') n'ont pas le même coefficient directeur ($\frac{2}{7} \neq -\frac{5}{7}$) ainsi (d) et (d') sont sécantes.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8} \\ y = -\frac{5}{7}x + \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8} \\ \frac{2}{7}x - \frac{3}{8} = -\frac{5}{7}x + \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{7}x - \frac{3}{8} \\ \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{7} \times 1 - \frac{3}{8} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{56} - \frac{21}{56} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{56} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi $I\left(1\ ;\ -\frac{5}{56}\right)$ est le point d'intersection de (d) et (d').

Compétence : Systèmes d'équations

Exercice 16 : Systèmes d'équations

Résoudre les systèmes d'équations proposés

1. $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

Par substitution :

$$\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 2(11 + 3y) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 22 + 6y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3y \\ 7y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 3 \times (-3) \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$

Par substitution :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 3 \times (-2y) + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -6y + 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

Par substitution :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 2x \\ 4x + (1 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - 2x \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 - (-1) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

4. $\begin{cases} 5x + 3y = -3 \\ 5x - 5y = 5 \end{cases}$

Par substitution :

$$\begin{cases} 5x + 3y = -3 \\ 5x - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -3 - 3y \\ (-3 - 3y) - 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -3 - 3y \\ -8y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -3 - 3 \times (-1) \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

5. $\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -6x+2y=9 \end{cases}$

Par combinaison puis substitution :

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -6x+2y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -12x+4y=18\ (L_2 \leftarrow 2L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-2-3x \\ -12x+4y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-2-3x \\ -12x+(-2-3x)=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4y=-2-3x \\ -15x=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-2-3\times\left(-\frac{4}{3}\right) \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-2+4 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{4} \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

6. $\begin{cases} 8x-6y=3 \\ -4x+4y=-3 \end{cases}$

Par combinaison :

$$\begin{cases} 8x-6y=3 \\ -4x+4y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=3 \\ -8x+8y=-6\ (L_2 \leftarrow 2L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=3 \\ 2y=-3\ (L_2 \leftarrow L_1+L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8x+9=3 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=-6 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{6}{8} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{4} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Compétence : Déterminer une équation cartésienne à l'aide d'un vecteur directeur

Exercice 17 : Déterminer une équation cartésienne

Soit (d) la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x-2$.

Identifier d'autres équations de (d) parmi celle-ci :

a) $x=4y+2$	b) $x-4y-2=0$
$4y=x-2$ $y=\frac{1}{4}x-\frac{2}{4}$ **Ce n'est pas la même.**	$-4y=-x+2$ $y=\frac{-x}{-4}+\frac{2}{-4}$ $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$ **Ce n'est pas la même.**
c) $x=8$	d) $-x+4y+8=0$
Ce n'est pas la même.	$4y=x-8$ $y=\frac{1}{4}x-\frac{8}{4}$ $y=\frac{1}{4}x-2$ **C'est la même.**
e) $0{,}5x-2y=4$	f) $y+6=x$
$-2y=-0{,}5x+4$ $y=\frac{-0{,}5x}{-2}+\frac{4}{-2}$ $y=\frac{1}{4}x-2$ **C'est la même.**	$y=x-6$ **Ce n'est pas la même.**

Exercice 18 : Déterminer une équation cartésienne

On donne un point A d'une droite (d) et un vecteur directeur de cette droite. Déterminer une équation de (d).

a) $A(-2\,;3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$ **sont colinéaires**

$$\Leftrightarrow -(y-3)-3(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow -y+3-3x-6=0$$
$$\Leftrightarrow -3x-y-3=0$$

2ème méthode : (d) : $ax+by+c=0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de** (d) **ainsi**

(d) **a pour équation :** $3x+y+c=0$

$A(-2\,;\,3) \in (d)$ **donc** $3x_A+y_A+c=0$

$$3\times(-2)+3+c=0$$
$$-6+3+c=0$$
$$c=3$$

Conclusion :

(d) **a pour équation :** $3x+y+3=0$

b) $A(-4\,;6)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-6\end{pmatrix}$ **sont colinéaires**

$$\Leftrightarrow 7(y-6)-0(x+4)=0$$
$$\Leftrightarrow -y+3-3x-6=0$$
$$\Leftrightarrow 7y-42=0$$

2ème méthode : (d) : $ax+by+c=0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de** (d) **ainsi**

(d) **a pour équation :** $-7y+c=0$

Or $A(-4\,;6) \in (d)$ **ainsi** $-7y_A+c=0$

$$-7\times 6+c=0$$
$$c=42$$

Conclusion :

(d) **a pour équation :** $-7y+42=0$ **(c'est à dire** $y=6$**)**

Exercice supplémentaire : Déterminer une équation cartésienne

On donne deux points A et B. Déterminer une équation de la droite (AB).

$A(4\,;5)$ et $B(3\,;3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-4\\3-5\end{pmatrix}$ **c'est-à-dire** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

$M(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix}$ **sont colinéaires**

$$\Leftrightarrow -2(x-4)+1(y-5)=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+8+y-5=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+y+3=0$$

L'équation cartésienne de (d) **a pour équation :**

$$-2x+y+3=0$$

$A(-1\,;\,-1)$ et $B(11\,;3)$

Soit $M(x\,;y)$**. On a :** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ **ssi** $\overrightarrow{AM}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **sont colinéaires.**

$$12(y+1)-4(x+1)=0$$
$$12y+12-4x-4=0$$
$$-4x+12y+8=0$$
$$-x+3y+2=0$$

$A(2\,;2)$ et $B(-2\,;\,-2)$

Soit $M(x\,;y)$**. On a :** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ **ssi** $\overrightarrow{AM}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **sont colinéaires.**

$$-4(y-2)-(-4)(x-2)=0$$
$$-4y+8+4x-8=0$$
$$4x-4y=0$$
$$x-y=0$$

$A(3\,;7)$ et $B(3\,;\,-9)$

Soit $M(x\,;y)$**. On a :** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-7\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-16\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ **ssi** $\overrightarrow{AM}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **sont colinéaires.**

$$0\times(y-7)-(-16)(x-3)=0$$
$$x-3=0$$
$$x=3$$

Exercice supplémentaire : Déterminer une équation cartésienne

Déterminer une équation de la droite (d), parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(1\,;4), B(-1\,;4)$ et $C(0\,;0)$

Soit $M(x\,;y) \in (d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\4-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par $C \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow 0x + 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 0$$

L'équation cartésienne de (d) a pour équation :

$$y = 0$$

2. $A(-1\,;\,-3), B(-2\,;\,-4)$ et $C(1\,;1)$

Soit $M(x\,;y) \in (d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2+1\\-4+3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par C ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$-(y-1) - (-1)\times(x-1) = 0$$
$$-y + 1 + x - 1 = 0$$
$$x - y = 0$$

3. $A(1\,;1), B(3\,;3)$ et $C(2\,;7)$

Soit $M(x\,;y) \in (d)$. On a : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(d) est parallèle à (AB) et passant par C ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$2(y-7) - 2(x-2) = 0$$
$$2y - 14 - 2x + 4 = 0$$
$$-2x + 2y - 10 = 0$$

Exercice 19 : Droites parallèles

On donne une équation de deux droites (d_1) et (d_2).

Indiquer si ces droites sont parallèles. Donner les coordonnées du point d'intersection si les droites sont sécantes.

1. $(d_1) : 7x + y - 1 = 0$ et $(d_2) : x + 5y - 3 = 0$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ un vecteur de (d_1)

On note $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ un vecteur de (d_2)

$-1\times 1 - 7\times(-5) = -1 + 35 = 34 \neq 0$ ainsi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes en un point P. Le point P vérifie :

Méthode 1 : Par substitution (on isole y (ou x)) :

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\x+5y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x+5(-7x+1)-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x-35x+5-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\-34x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\-34x=-2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y=-7x+1\\x=\frac{-2}{-34}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7x+1\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-7\times\frac{1}{17}+1\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-\frac{7}{17}+\frac{17}{17}\\x=\frac{1}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{10}{17}\\x=\frac{1}{17}\end{cases}$$

Ainsi $P\left(\frac{1}{17}\,;\frac{10}{17}\right)$.

Méthode 2 : Par combinaison :

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\x+5y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\7x+35y-21=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\(7x+35y-21)-(7x+y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+y-1=0\\34y-20=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}7x+y-1=0\\y=\frac{20}{34}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x+\frac{10}{17}-1=0\\y=\frac{10}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7x-\frac{7}{17}=0\\y=\frac{10}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{17}\\y=\frac{10}{17}\end{cases}$$

Ainsi $P\left(\frac{1}{17}\,;\frac{10}{17}\right)$.

2. $(d_1) : x - y - 1 = 0$ et $(d_2) : -2x + 2y - 3 = 0$

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_1) et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_2) et $\overrightarrow{u_2} = -2\,\overrightarrow{u_1}$.

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires ainsi les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Exercice 20 : Déterminer une équation cartésienne

Déterminer une équation de la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.

1. $(d) : 4x + 2y - 5 = 0$ et $A(1\,;1)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d).
Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.
Soit $M(x\,;y) \in (d')$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$.
(d') est la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\mathbf{-2(y-1) - 4(x-1) = 0}$$
$$\mathbf{-2y + 2 - 4x + 4 = 0}$$
$$\mathbf{-4x - 2y + 6 = 0}$$

2ème méthode :
$(d)//(d)'$ alors $(d') : 4x + 2y + c = 0$
$A(1\,;1) \in (d') : 4x_A + 2y_A + c = 0$
$4 + 2 + c = 0$
$c = -6$

$(d') : 4x + 2y - 6 = 0$

2. $(d) : x + 2y - 5 = 0$ et $A(0\,;1)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d).
Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.
Soit $M(x\,;y) \in (d')$. Ainsi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$.
(d') est la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\mathbf{-2(y-1) - x = 0}$$
$$\mathbf{-2y + 2 - x = 0}$$
$$\mathbf{-x - 2y + 2 = 0}$$

3. $(d) : x - 5 = 0$ et $A(1\,;2)$.

On a $(d) : x = 5$. C'est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
Notons (d') la droite parallèle à la droite (d) et passant par le point A.
Ainsi (d') est aussi une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Or $A(1\,;2) \in (d')$.
Ainsi $(d') : x = 1$ (ou $x - 1 = 0$ sous forme cartésienne).

Exercice 21 : Equation de médianes

Soit les points $A(1\,;-2), B(6\,;5)$ et $C(8\,;\,-6)$.

1. Déterminer une équation des médianes issues de A et de B dans le triangle ABC.

Calculons les coordonnées de A' milieu du segment $[BC]$. $A'\left(\frac{6+8}{2};\frac{5-6}{2}\right)$ soit $A'\left(7;-\frac{1}{2}\right)$.
La médiane issue de A est donc la droite (AA').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}7-1\\-\frac{1}{2}+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}6\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (AA')).
$M \in (AA')$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$12(y+2)-3(x-1)=0$$
$$12y+24-3x+3=0$$
$$-3x+12y+27=0$$

Calculons les coordonnées de B' milieu du segment $[AC]$. $B'\left(\frac{1+8}{2};\frac{-2-6}{2}\right)$ soit $B'\left(\frac{9}{2};-4\right)$.
La médiane issue de B est donc la droite (BB').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}-6\\-4-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-9\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (BB')).
$M \in (BB')$ ssi $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$(y-5)-6(x-6)=0$$
$$y-5-6x+36=0$$
$$-6x+y+31=0$$

2. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des médianes (deux suffisent).

<u>Méthode par combinaison :</u>

$$\begin{cases}-3x+12y+27=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-6x+24y+54=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-6x+24y+54)-(-6x+y+31)=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}23y+23=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\-6x-1+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-1\\-6x+30=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$$ **. Ainsi $G(5\,;-1)$.**

<u>Méthode par substitution :</u>

$$\begin{cases}-3x+12y+27=0\\-6x+y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+12(6x-31)+27=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+72x-372+27=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}69x-345=0\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}69x=345\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{345}{69}\\y=6x-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=6\times5-31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$$ **. Ainsi $G(5\,;-1)$.**

Exercice 22 : Equation de médianes

Soit les points $A(-1\,;1), B(3\,;7)$ et $C(4\,;\,-2)$.

1. Déterminer les coordonnées des points A' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$.

Calculons les coordonnées de A' milieu du segment $[BC]$. $A'\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$
Calculons les coordonnées de C' milieu du segment $[AB]$. $C'(1;4)$.

2. Déterminer une équation des médianes issues de A et de C dans le triangle ABC.

La médiane issue de A est donc la droite (AA').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}+1\\\frac{5}{2}-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (AA')).
$M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$9(y-1)-3(x+1)=0$$
$$9y-9-3x-3=0$$
$$-3x+9y-12=0$$

La médiane issue de C est donc la droite (CC').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}1-4\\4+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$ (on prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (CC')).
$M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$-(y+2)-2(x-4)=0$$
$$-y-2-2x+8=0$$
$$-2x-y+6=0$$

3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des médianes (deux suffisent).

$$\begin{cases}-3x+9y-12=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+9y-12=0\\-18x-9y+54=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3x+9y-12)+(-18x-9y+54)=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-21x+42=0\\-2x-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\-2\times 2-y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$ **. Ainsi $G(2\,;2)$.**