Chapitre : Fonctions linéaires et affines

Activité 1 :

Pour emprunter des livres dans une bibliothèque, on a le choix entre trois formules.

- Formule A : payer une participation de 0,50 € par livre emprunté.
- Formule B : acheter une carte rose de bibliothèque à 7,50 € par an et ne payer qu'une participation de 0,20 € par livre emprunté.
- Formule C : acheter une carte verte de bibliothèque à 15,50 € par an et emprunter autant de livres que l'on veut.

PARTIE 1

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de livre empruntés par an	10	30	45
Prix à payer avec la formule A en €			
Prix à payer avec la formule B en €			
Prix à payer avec la formule B en €			

2. On appelle x le nombre de livres empruntés par une personne en un an.
Exprimer P_A, P_B et P_C en fonction de x et donner la nature de chacune de ces fonctions.

- Soit P_A le prix à payer avec la formule A.

- Soit P_B le prix à payer avec la formule B.

- Soit P_C le prix à payer avec la formule C.

3. Résoudre l'équation $0{,}5x = 7{,}5 + 0{,}2x$. Interpréter le résultat.

I. Définitions et exemples

Définition 1 : Soient m, p deux réels donnés.

Une **fonction** ____________________ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ______________________________.

- Si $p = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par _________________________ est appelée **fonction ___________________________.**

  Une fonction linéaire traduit une situation de ___________________________.

- Si $m = 0$, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par _________________________ est appelée **fonction _________________________.**

Application 1 : Fonction affine et système

Un agriculteur transporte ses ballots de paille à l'aide d'un camion. Chaque ballot est identique. Quand le camion transporte 5 ballots, la masse totale du camion et des ballots est de 11,5 tonnes. Quand il transporte 12 ballots, la masse totale du camion et des ballots est de 17,1 tonnes.

On suppose que l'on peut approcher la masse totale du camion et des ballots par une fonction affine f du nombre de ballots transportés.

On désigne par x le nombre de ballots transportés et par $f(x)$ la masse totale du camion **et** des ballots.

1. Déterminer l'image de x par la fonction f

2. Quelle est la masse à vide du camion ? Justifier en utilisant la fonction f.

3. En déduire la masse d'un ballot **uniquement**.

Exercice 1 : Déterminer une fonction affine vérifiant deux conditions

1. Déterminer une fonction affine f vérifiant : $f(6) = 5$ et $f(-2) = 1$
2. Déterminer une fonction affine g vérifiant : $g(2) = 0$ et $g(8) = 12$
3. Résoudre $f(x) = g(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 2 : Vocabulaire

Pour chaque fonction , préciser sa nature (non affine, affine, linéaire ou constante), les valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine (si possible), et le sens de variation (selon vos connaissances).

fonction	nature	coefficient directeur	ordonnée à l'origine	sens de variation
a) $a(x) = 5x - 3$				
b) $b(x) = 8 - 3x$				
c) $c(x) = 3\sqrt{2}$				
d) $d(x) = 4x^2 + 3$				
e) $e(x) = \frac{4-5x}{3}$				
f) $f(x) = 4x$				
g) $g(x) = \sqrt{3x+1}$				
h) $h(x) = 2\sqrt{x} - 3$				
i) $i(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$				
j) $j(x) = \frac{2}{3x} - 1$				
k) $k(x) = \sqrt{2}\ x$				
l) $l(x) = (2 + x)^2$				
m) $m(x) = \frac{2x-3}{5}$				
n) $n(x) = \sqrt{2x} - 7$				
o) $o(x) = 1$				
p) $p(x) = -\sqrt{2}x + 6$				
q) $q(x) = \frac{1+3x}{5}$				
r) $r(x) = \frac{4}{5x} - 1$				

Exercice 3 : Développement et fonction affine

Démontrer que les fonctions données sont des fonctions affines, donner leur sens de variation, puis tracer leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

a) $f_1(x) = \frac{5x - 4}{2}$

b) $f_2(x) = \frac{1 - 2x}{3}$

c) $f_3(x) = \frac{x + 4}{2} - 3x$

d) $f_4(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2$

e) $f_5(x) = x^2 + (2 + x)(2 - x)$

f) $f_6(x) = (2x + 1)^2 - (2x + 3)(2x - 3)$

Exercice 4 : Modélisation

On compare deux formules de locations de DVD :

- Option 1 : chaque DVD est loué 3,50 € ;
- Option 2 : on paye un abonnement annuel de 12 €, puis 2 € par DVD loué.

On note x le nombre de DVD loués sur l'année.

1. Compléter le tableau suivant :

Nombre de DVD loués	0	2	6
Prix avec l'option 1 (en €)			
Prix avec l'option 2 (en €)			

2. a) Déterminer la fonction f qui modélise le prix à payer en € en fonction de x avec l'option 1.
   b) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier la réponse.
3. a) Déterminer la fonction g qui modélise le prix à payer en € en fonction de x avec l'option 2.
   b) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier la réponse.
   c) Combien coûte la location de 20 DVD avec l'option 2 ?
4. Quelle option permet de louer le plus de DVD si on dispose d'un budget de 70 € ?

Exercice 5 : Proportionnalité et pourcentages

Un commerçant calcule le prix de vente de ses articles en augmentant de 40% le prix d'achat.

1. Calculer le prix de vente d'un article acheté 58€
2. a. Le prix de vente est-il proportionnel au prix initial ?
   b. On appelle x le prix d'achat et $f(x)$ le prix de vente. Donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 6 : Proportionnalité et pourcentages

Un magasin propose des soldes de 30% sur l'ensemble des articles.

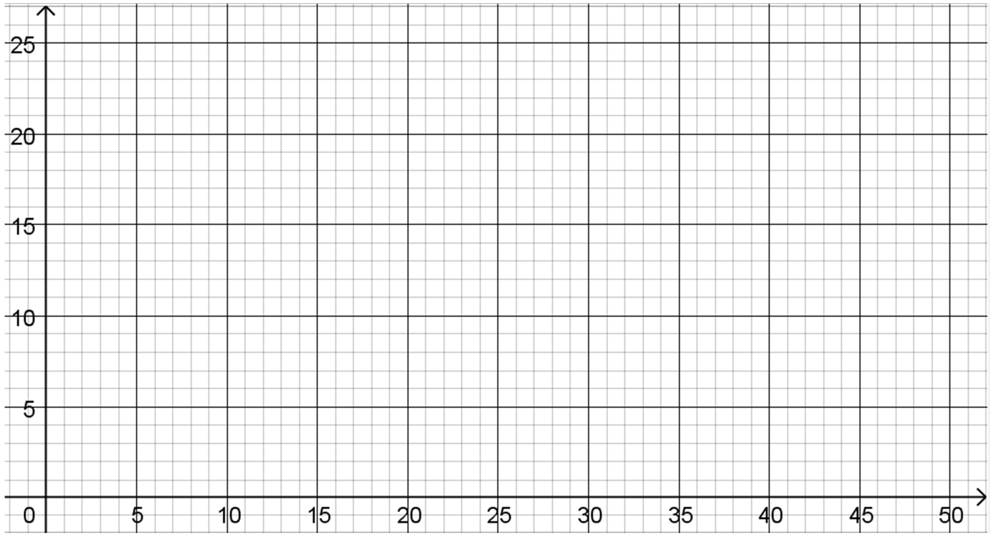
1. Un article coûte 132€. A quel prix est-il soldé ?
2. a. Le prix soldé est-il proportionnel au prix initial ?
   b. On appelle x le prix initial et $f(x)$ le prix soldé. Donner l'expression de $f(x)$.

II. Représentation graphique

Activité 1 (suite) :

PARTIE 2

1. Tracer dans l'intervalle $[0\,;50]$: la droite D_A qui représente la fonction P_A, la droite D_B qui représente la fonction $P_B$et la droite D_C qui représente la fonction P_C.



2. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la formule la plus intéressante si on emprunte 20 livres en un an?

b) À partir de combien de livres empruntés par an la formule C est-elle la plus intéressante ?

Propriétés 1 :

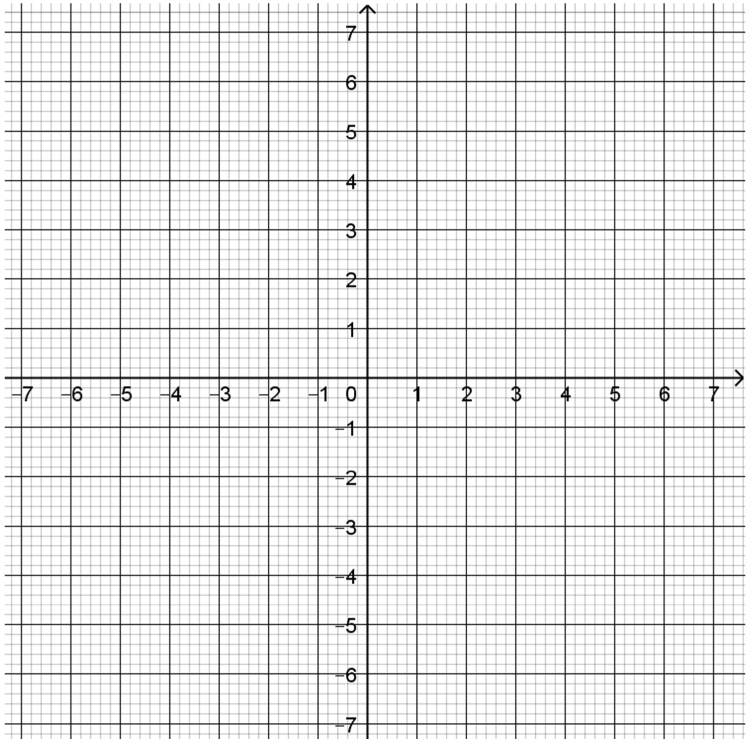
- La représentation graphique de la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par ________________ dans un repère est la ____________________________ d'équation ________________.
- La représentation graphique de la fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par ______________ est la___________________________________ du repère d'équation ______________.
- La représentation graphique de la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par _________ est la ____ d'équation _________.

Conséquence :

- Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il suffit de trouver l'image de deux réels par la fonction affine, de représenter les points correspondants et de les relier par une droite.
- Pour tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire, il suffit de trouver l'image d'un réel par la fonction linéaire, de représenter le point correspondant et de tracer une droite passant par ce point et l'origine du repère.

Application 3 : Donner la représentation graphique des fonction f, g et h définie sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 2x - 3$
2. $g(x) = -0{,}5x + 4$
3. $h(x) = \frac{3}{2}x$



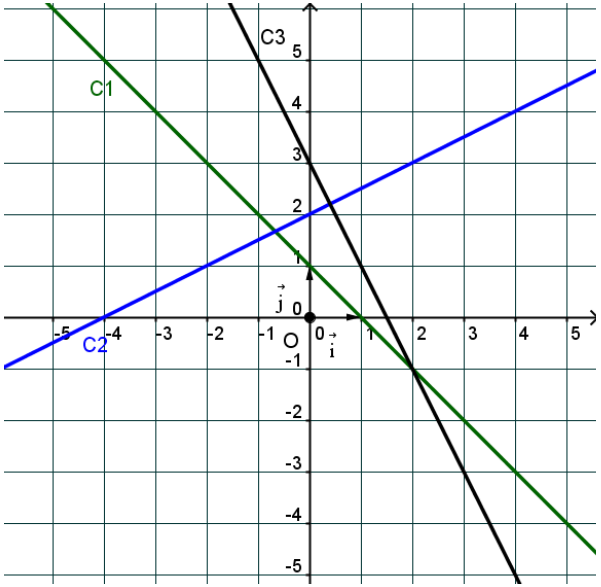
Exercice 7 : Tracer des droites, représentations graphiques de fonctions affines

Représenter dans un repère orthonormé les fonctions affines f, g, h et k :

a) $f(x) = 2x + 5$ b) $g(x) = \frac{3}{4}x - 2$ c) $h(x) = \frac{5}{3}x$ d) $k(x) = -\frac{3}{2}x - 1$

Exercice 8 : Associer une droite à une fonction affine

On a représenté graphiquement trois des six fonctions ci-dessous.



1. Associer à chaque représentation graphique la fonction qui lui correspond.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x) = x + 1$

$g(x) = -x + 1$

$h(x) = 2x + 1$

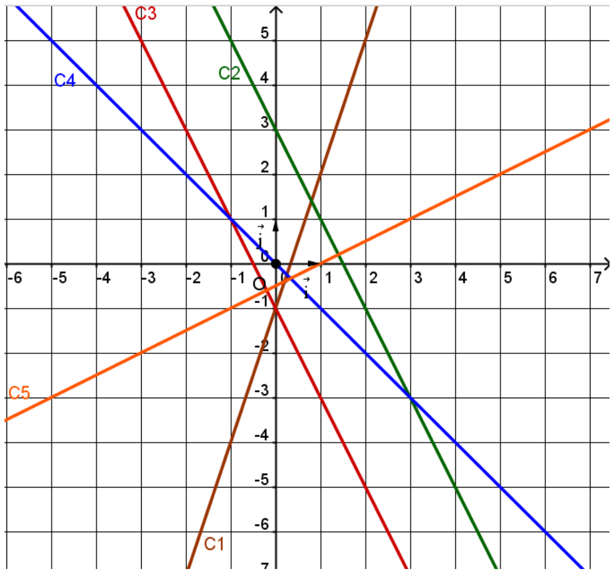
$k(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$l(x) = -2x + 3$

$m(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

2. Tracer la représentation graphique de chacune des fonctions non représentés.

Exercice 9 : Associer une fonction affine à une droite



1. Parmi les six représentations graphiques suivantes, trouver celle qui correspond à la représentation graphique des fonctions f, g et h, sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(x) = 3x - 1$

$g(x) = -2x - 1$

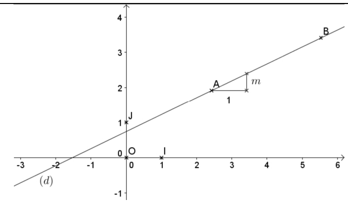
$h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2. Donner l'expression des fonctions représentées manquantes.

III. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Définition/propriété 2 : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distrincts de la droite (d).



- m est appelé ________________________ de la droite :

$m =$

Graphiquement : On part d'un point de la droite, on se déplace de m unité verticalement (+ vers le haut, − vers le bas) et on se déplace d'une unité horizontalement (+ vers la droite, − vers la gauche) pour retrouver un point de la droite.

Remarque 1 : Si $m = \frac{N}{D}$, on peut, en partant d'un point de la droite, se déplacer de N unités verticalement puis de D unités horizontalement pour retrouver un point de la droite.

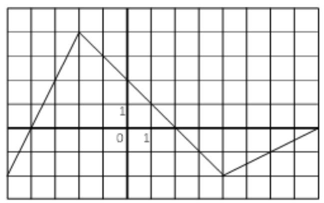
Remarque 2 : On appelle aussi m ________________________ de la fonction f.

- p est appelé ________________________:
  $p = f(0)$.

Graphiquement : p est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées

Exercice 10 : Fonction affine par morceaux

La fonction représentée ci-dessous est une fonction **AFFINE PAR MORCEAUX**.



Elle est définie sur $\mathbb{R}$, mais a des expressions différentes
selon les intervalles.

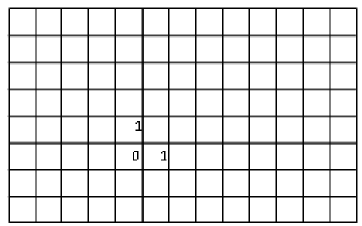
Déterminer ces expressions :

- sur $]-\infty\,;-2]$: $f(x) =$ ....
- sur $[-2\,;4]$: $f(x) =$ ....
- sur $[4\,;+\infty[$: $f(x) =$ ....

Exercice 11 : Fonction affine par morceaux

Représenter la fonction f définie par :

- sur $]-\infty\,;0]$: $f(x) = -x - 2$
- sur $[0\,;3]$: $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$
- sur $[3\,;4]$: $f(x) = 3x - 10$
- sur $[4\,;+\infty[$: f est constante



Exercice 12 : Modélisation

Dans un jeu vidéo, on a le choix entre trois personnages dont la force se mesure en points. Tous les personnages commencent au niveau 0 et terminent au niveau 25, cependant, ils n'évoluent pas de la même manière.

Guerrier	**Mage**	**Chasseur**
Je commence avec 50 points et je ne gagne pas d'autres points au cours du jeu. **Représenté par une fonction f.**	Je commence avec 0 point et je gagne 3 points par niveau. **Représenté par une fonction g.**	Je commence avec 20 points et je gagne 2 points par niveau. **Représenté par une fonction h.**

1. Compléter le tableau suivant.

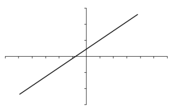
Niveau du jeu	0	1	5	10	15	25
Force du guerrier (en points)						
Force du mage (en points)						
Force du chasseur (en points)						

2. Pour chacun des personnages, sa force est-elle proportionnelle au niveau du jeu ? Si oui, quel est le coefficient de proportionnalité ?
3. Chacune des trois fonctions f, g et h permet de calculer la force d'un personnage en fonction du niveau x du jeu. Exprimer chacune de ces fonctions, en fonction de x.
4. a) Utiliser le tableau de valeurs de la question 1. pour tracer, dans le même repère, les représentations graphiques des fonctions f, g et h.
   b) Que constate-t-on ? Pourquoi pouvait-on le prévoir pour la fonction f ?
5. a) Déterminer, à l'aide du graphique, le niveau à partir duquel le mage devient le plus fort des trois personnages.
   b) Retrouver ce résultat par le calcul.

IV. Variations

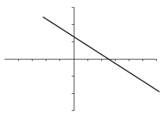
Propriété 3 : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = m\,x + p$ où m et p sont deux nombres réels donnés. Alors :

- Si $m > 0$, alors la fonction f est strictement ______________________________ sur $\mathbb{R}$.



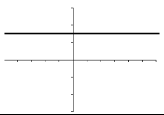
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	

- Si $m < 0$, alors la fonction f est strictement ______________________________ sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	

- Si $m = 0$, alors la fonction f est
- __________________________ sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f	

Preuve : Soient a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\ (x) = mx + p$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. On donc :

Etudions le signe de $f(a) - f(b)$.

On a :

Si $m > 0$

Si $m < 0$

Enfin si $m = 0$, $f(a) = f(b) = p$ donc la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$

Conséquence : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. Soient également $m \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{R}$:

- Si $m > 0$: la fonction linéaire $f\ :\ x \mapsto mx$ étant croissante, on obtient que $f(a) \leq f(b)$ c'est-à-dire : $ma \leq mb$

Autrement dit : lorsque l'on multiplie chaque membre d'une inégalité par un réel strictement positif, on conserve l'ordre.

- Si $m < 0$: la fonction linéaire $g\ :\ x \mapsto mx$ étant décroissante, on obtient que $g(a) \geq g(b)$ c'est-à-dire $ma \geq mb$

Autrement dit : lorsque l'on multiplie chaque membre d'une inégalité par un réel strictement négatif, on contrarie l'ordre.

- La fonction affine $h\ :\ x \mapsto x + p$ étant croissante, on obtient que $h(a) \leq h(b)$ c'est-à-dire : $a + p \leq b + p$

Autrement dit : lorsque l'on ajoute un réel à chaque membre d'une inégalité on conserve l'ordre.

V. Signe de $mx + p$

Activité 2 :

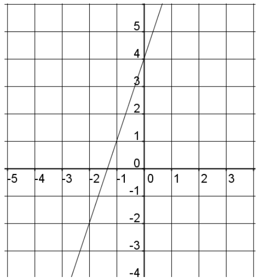
Dresser le tableau de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 4$

x	
$f(x)$	

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$, et placer cette valeur dans le tableau précédent.
2. En déduire l'intervalle sur lequel la fonction f est positive. Celui où elle est négative.

On résume ces informations dans un tableau, appelé **tableau de signe** de f

x	
$f(x) = 3x + 4$	



En résumé :

Propriété 4 : Soient m un reel tel que $\boldsymbol{m \neq 0}$ et p un réel. Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$

- $f(x) = 0$ pour $\boldsymbol{x = -\frac{p}{m}}$
- Le signe de $mx + p$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :
  - $Si\ m > 0$

Valeurs de x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	

  - $Si\ m < 0$

Valeurs de x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	

Autrement dit : Le signe de $mx + p$ est le signe de m (appelé coefficient directeur) à « droite du zéro »

Preuve : Soient m un reel tel que $\boldsymbol{m \neq 0}$ et p un réel. Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{p}{m}}$ (car $m \neq 0$).

- Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
  f est négative sur $]-\infty\,; -\frac{p}{m}[$ et f est positive sur $]-\frac{p}{m}\,;\,+\infty[$
- Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc :
  f est positive sur $]-\infty\,; -\frac{p}{m}[$ et f est négative sur $]-\frac{p}{m}\,;\,+\infty[$

VI. Inéquations produits et inéquations quotients

1) Inéquations produits

Activité 3 :

A. On cherche les solutions de l'inéquation $(x + 3)(-x + 5) \leq 0$

1. Etudier le signe de $x + 3$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		

2. Etudier le signe de $-x + 5$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		

3. Pour étudier le signe de $(x + 3)(-x + 5)$, on « superpose » les deux tableaux. Et on utilise la règle du signe d'un produit.

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de		
Signe de		

4. En déduire les solutions de l'inéquation $(x + 3)(-x + 5) \leq 0$

B. Quelles sont les solutions de l'inéquation $(3x - 2)(x + 4) \geq 0$

Valeurs de x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de		
Signe de		

2) Inéquations quotients

Activité 4 :

A. On cherche les solutions de l'inéquation $\frac{-3x+6}{x-4} \leq 0$

1. Un quotient n'existe que si le dénominateur n'est pas nul.
   (a) Résoudre $x - 4 = 0$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{-3x+6}{x-4}$

2. Etudier le signe de $-3x + 6$

Valeurs de x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de	

3. Etudier le signe de $x - 4$

Valeurs de x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de	

4. Pour étudier le signe de $\frac{-3x+6}{x-4}$, on « superpose » les deux tableaux. Et on utilise la règle sur le signe d'un quotient. On signale par une *double barre* verticale la valeur interdite.

Valeurs de x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de	

4. En déduire les solutions de l'inéquation $\frac{-3x+6}{x-4} \leq 0$

B. Quelles sont les solutions de l'inéquation $\frac{4-7x}{-2x+6} > 0$

Valeurs de x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de	

Exercice 13 : Tableau de signes

1. Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 8$ et $g(x) = 3x + 2$
2. Vérifier les résultats en calculant mentalement les images de $-4,\ 0, 1, 3$ par f et g.

Exercice 14 : Tableau de signes

On a dressé le tableau de signe de fonctions affines, mais l'expression de la fonction a été effacée. Donner l'expression effacée.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
Signe de		$-$	0	$+$	

Exercice 15 : Equation et inéquation (fonction affine)

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = -7x + 4$. Résoudre :
   a. $f(x) = 0$ b. $f(x) > 0$
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{5}{4}x + 6$. Résoudre :
   a. $g(x) = 0$ b. $g(x) \leq 0$
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = -2x + 6$. Résoudre :
   a) $h(x) = 0$ b) $h(x) < 0$
4. Soit k la fonction définie par $k(x) = \frac{2}{3}x - 1$. Résoudre :
   a) $k(x) = 0$ b) $k(x) \geq 0$
5. Soit l la fonction définie par $l(x) = -x - \frac{2}{5}$. Résoudre :
   a) $l(x) = 0$ b) $l(x) > 0$
6. Soit m la fonction définie par $m(x) = 3 - 5x$. Résoudre :
   a) $m(x) = 0$ b) $m(x) \leq 0$
7. Soit n la fonction définie par $n(x) = 3x - 9$. Résoudre :
   a) $n(x) = 0$ b) $n(x) \geq 0$
8. Soit p la fonction définie par $p(x) = \frac{3}{5}x - \frac{4}{3}$. Résoudre :
   a) $p(x) = 0$ b) $p(x) < 0$

Exercice 16 : Signe d'un produit

1. Déterminer le signe de chacune des fonctions f, g et h :
   a. $f(x) = (3x-5)(-2x+7)$ b. $g(x) = -x(x-7)$ c. $h(x) = (2x-1)(-3x)(5-x)$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $f(x) > 0$ b. $g(x) \leq 0$ c. $h(x) < 0$

Exercice 17 : Signe d'un produit

Résoudre les inéquations suivantes

a) $(x-5)(6x-10) \leq 0$

b) $(2-10x)(4x-1) \geq 0$

c) $(5x-9)(5x-8) \geq 0$

d) $(-3x-9)(7x-8) < 0$

e) $(3x+2)(-x+2)(2x-1) \leq 0$

$f)$ $(4x-5)(2-2x)(3x-3) > 0$

Exercice 18. : Signe d'un quotient

1. Déterminer le signe de chacune des fonctions f, g et h :
   a. $f(x) = \frac{-x}{2-x}$ b. $g(x) = \frac{7-2x}{-3x+5}$ c. $h(x) = \frac{(2-x)(x+1)}{3x-5}$
2. Résoudre les inéquations suivantes :
   a. $f(x) < 0$ b. $g(x) \geq 0$ c. $h(x) \leq 0$

Exercice 19 : Signe d'un quotient

Résoudre les inéquations suivantes

a) $\frac{x+2}{7x-1} > 0$

b) $\frac{3x(2x-1)}{3x+4} < 0$

c) $\frac{2x+6}{2-4x} > 0$

d) $\frac{(-x-2)(x-1)}{x(-2x+4)} \geq 0$

e) $\frac{4x+9}{6-10x} \leq 0$

f) $\frac{9-10x}{-9x-5} > 0$

Exercice 20. : Tableau de signes

Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x^2+1)(2x-8)(-x+3)$

b) $f(x) = 3x(5x-2)$

c) $f(x) = \frac{-5x}{(x+3)^2}$

d) $f(x) = \frac{5-x}{x^2(3x-6)}$

e) $f(x) = \frac{(\sqrt{2}x-\sqrt{6})(1-x)}{3x(2x+4)}$

f) $f(x) = x(x+1)(x+2)$

g) $f(x) = \frac{-10(3x+7)}{1-6x}$

h) $f(x) = \frac{(3x-2)(4-2x)}{x-1}$

Exercice 21 : Inéquations produit

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + (x-1)(2x+3)$$
   a) Factoriser $f(x)$.
   b) Etudier le signe de $f(x)$.
   c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
2. Mêmes questions avec :
$$g(x) = x(-x+4) - 2x(2x+3)$$
3. Mêmes questions avec :
$$h(x) = (3x+1)^2 - (4-2x)^2$$

Exercice 22 : Inéquations quotient

1. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{1}{x+2} + x$$
   a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   b) Mettre $f(x)$ sous forme d'un seul quotient.
   c) Etudier le signe de $f(x)$.
   d) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
   e) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
2. Mêmes questions avec $g(x) = \frac{3x}{x+1} - 1$