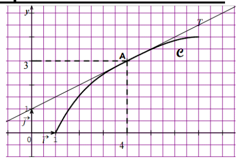
Chapitre : Dérivation (2)

I. Rappel : Nombre dérivée et tangentes (lecture graphique).

Exercice 1 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

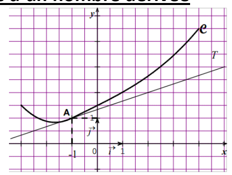
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 4 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse 4.



Donner la valeur de $f(4)$ et donner la valeur de $f'(4)$.

Exercice 2 : Lecture graphique d'un nombre dérivée

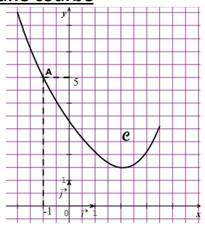
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1 et la droite T est la tangente à C au point d'abscisse -1.



Donner la valeur de $f(-1)$ et donner la valeur de $f'(-1)$.

Exercice 3 : Tracer une tangente à une courbe

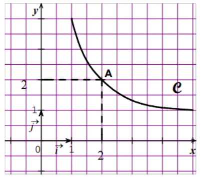
La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en -1.
On sait $f'(-1) = -2$



1. Donner $f(-1)$
2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

Exercice 4 : Tracer une tangente à une courbe

La courbe C_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dérivable en 2.
On sait $f'(2) = -1$



1. Donner $f(2)$
2. Tracer la droite T tangente à C_f en A
3. Déterminer l'équation réduite de T.

II. Fonction dérivée

Sir Isaac Newton (1643- 1727) : Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais. En mathématiques, Newton partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition 1 : Dire qu'une fonction f est ______________________ sur un intervalle I signifie que pour tout $a \in I$, $f'(a)$_____________________.

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on appelle fonction dérivée de f, notée __________, la fonction qui associe à tout nombre $x \in I$, le nombre dérivé de f en x notée ____________

Remarque : En physique, on parle de la notation différentielle $\frac{dy}{dx}$ où $f'(x) = \frac{dy}{dx}$si $y = f(x)$.

Exemple (vitesse instantanée)

Le calcul différentiel permit aux physiciens de déterminer la vitesse d'évolution d'un phénomène.
Considérons par exemple le mouvement d'un mobile se déplaçant sur une droite.
À un instant t, le mobile se trouve à une abscisse x.
Si on considère une distance infiniment petite dx correspondant à un temps infiniment petit dt, la vitesse instantanée à l'instant t s'exprime par :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Ainsi, si l'on connaît la courbe d'évolution de x en fonction du temps, la vitesse à un instant donné sera le coefficient directeur de la tangente au point considéré.
Si on revient aux mathématiques, on pourrait avoir une fonction que l'on nomme x (attention ici on ne parle pas de la variable x utilisée habituellement) qui serait en fonction du temps t (la variable de la fonction sera donc t). L'image de x serait noté $x(t)$ et la vitesse instantanée $x'(t)$.

III. Fonctions dérivées de référence

1) Dérivée d'une fonction constante.

Propriété 1 : Soient k un réel et f une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$___________________

Preuve : Soit k un réel.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ est dérivable en a. Soit $h \neq 0$. Alors

- $f(a) =$
- $f(a+h) =$
- $f(a+h) - f(a) =$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$

Ainsi, quelque soit le nombre réel a, f est dérivable en a et $f'(a) =$

Application 1 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5$

2) Dérivée d'une fonction affine et linéaire.

Propriété 2 : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$______________________

Preuve : On l'a déjà prouvé dans le chapitre 1 quand on a vu que : Le taux de variation d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est le coefficient directeur de la droite d'équation $y = mx + p$.

Propriété 3 (cas particuler) : Soit f une fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$____________________

Propriété 4 (cas particuler) : Soit f une fonction linéaire définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$____________________

Preuve : Ici $a = 1$.

Application 2 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x + \frac{3}{4}$

3) Dérivée d'une fonction puissance

Propriété 5 : Soit n un entier relatif non nul et f une fonction définie par $f(x) = x^n$, alors f est dérivable et $f'(x) =$____________________

- Si $n > 0$, alors la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Si $n < 0$, alors la fonction f est définie et dériable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété 6 (cas particuler) : Soit f une fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$____________________

Remarque/preuve : Ici il suffit de remplacer n par 2. On avait aussi prouvé ce théorème dans le chapitre 5.

Propriété 7 (cas particuler) : Soit f une fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) =$____________________

Remarque/preuve : Ici il suffit de remplacer n par 3 ou de faire la limite du taux de variation.

Application 3 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$

4) Dérivée d'une fonction inverse

Propriété 8 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) =$

1ère preuve : $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = -1x^{-2} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

2ème preuve :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$par $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en a. Soit $h \neq 0$. Alors :

- $f(a) =$
- $f(a+h) =$
- $f(a+h) - f(a) =$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$

Ainsi, quelque soit le nombre réel a, f est dérivable en a et $f'(a) =$

5) Dérivée d'une fonction racine carrée

Propriété 9 : Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=$

Preuve : Soit $a\in>0$. Montrons que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable en a.

Soit $h\neq 0$. Alors :

- $f(a)=$
- $f(a+h)=$
- $f(a+h)-f(a)=$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$
- $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$

Ainsi, quelque soit le nombre $a\in]0,+\infty[$, f est dérivable en a et $f'(a)=$

Montrons maintenant que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

$$\tau_0(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$$

Donc lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, $\tau_0(h)$ prend des valeurs de plus en plus grandes et ne tend pas vers un nombre réel. Donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Résumé :

Fonction f	Fonction f'	f définie et dérivable sur
$f(x)=k\ \ (k\in\mathbb{R})$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax\ \ (a\in\mathbb{R})$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n\ \ (n\in\mathbb{Z})$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $]-\infty;0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$ si $n<0$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	définie sur $[0\,;\,+\infty[$ dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$

6) Dérivée d'une fonction valeur absolue

Propriété : Soit f la fonction valeur absolue. Pour tout $x\neq 0$, f est dérivable.

- Si $x<0$ alors $f'(x)=$_______________
- Si $x>0$ alors $f'(x)=$_______________

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement : La courbe représentative de f a, au point d'abscisse 0, une demi-tangente de pente -1 et une demi-tangente de pente 1.

Preuve : On démontre la non dérivabilité en 0.

$*$ Si $h>0$ alors :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{|h|}{h}=\frac{h}{h}=1$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0;h>0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1.$

$*$ Si $h>0$ alors:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\cdots=\frac{|h|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

ainsi $\lim\limits_{h\to 0;h<0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1.$

On obtient donc deux limites différentes ainsi la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 : Nombre dérivée

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a pour :

1. $f(x)=x^2$ et $a=-5$
2. $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=4$
3. $f(x)=x^3$ et $a=2$
4. $f(x)=\frac{1}{x}$ et $a=3$

Exercice 6 : Equation de tangente

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

1. $f(x)=x^2$ et $a=2$
2. $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=9$
3. $f(x)=x^3$ et $a=-1$
4. $f(x)=\frac{1}{x}$ et $a=3$

IV. Dérivées et opérations

1) Dérivée du produit d'un réel avec une fonction.

Propriété 10 : Soient k un réel et u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction ku définie par $(ku)(x) = ku(x)$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$(ku)'(x) =$____________________

Preuve : Soit $a \in I$.Montrons que la fonction $f$définie sur Ipar $f(x) = ku(x)$est dérivable en a. Soit$h \neq 0$. Alors :

- $f(a) = ku(a)$
- $f(a+h) = ku(a+h)$
- $f(a+h) - f(a) = ku(a+h) - ku(a) = k\big(u(a+h) - u(a)\big)$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k(u(a+h)-u(a))}{h} = k\,\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Remarque : $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ est le taux de variation de la fonction u en a.

Or on a : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} k\,\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = k \times \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = ku'(a)$

Ainsi quelque soit le nombre $a \in I$, f est dérivable en a et $f'(a) = ku'(a)$

Application 4 : Dériver les fonctions f, g et h définie sur I par :

1. $f(x) = 8x^4$ et $I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = -\frac{7}{x}$ et $I = \mathbb{R}^*$
3. $h(x) = 3\sqrt{x}$ et $I = \mathbb{R}_+$

Exercice 7 : Produit par un réel

1. $f(x) = 6x$
2. $g(x) = -5x^3$
3. $h(x) = 7\sqrt{x}$
4. $k(x) = -\frac{3}{x}$

2) Dérivée d'une somme ou d'une différence

Propriétés 11 : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
1) Alors la fonction $u + v$ définie par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$(u+v)'(x) =$____
Autrement dit : La dérivée d'une somme est la__________________________ des dérivées.

2) Alors la fonction $u - v$ définie par $(u-v)(x) = u(x) - v(x)$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$(u-v)'(x) =$____
Autrement dit : La dérivée d'une différence est la________________________des dérivées.

Preuve (pour la somme) : Soit $a \in I$.Montrons que la fonction $f$définie sur Ipar $f(x) = u(x) + v(x)$est dérivable en a. Soit$h \neq 0$. Alors :

- $f(a) = u(a) + v(a)$
- $f(a+h) = u(a+h) + v(a+h)$
- $f(a+h) - f(a) = u(a+h) + v(a+h) - \big(u(a) + v(a)\big) = u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)+v(a+h)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$

Ainsi quelque soit le nombre $a \in I$, f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a) + v'(a)$

Propriété 12 : Soient a, b, c trois réels tel que $a \neq 0$, et f une fonction polynôme du second degré définie pour tout réel x par$f(x) = ax^2 + bx + c$ alors la dérivée f' est définie pour tout réel x par :
$f'(x) =$____

Preuve : Il suffit d'appliquer les propriétés précédentes.

Application 5 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 7x - 8$

Exercice 8 : Somme

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $g(x) = x^3 + x - 3$
3. $.h(x) = x^2 + \sqrt{x} + 1$
4. $k(x) = x^5 + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$

Exercice 9 : Somme et produit par un réel

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
2. $g(x) = -3x^3 + 5x$
3. $h(x) = 2x + 7$
4. $k(x) = 3\sqrt{x} + 2x + 1$
5. $l(x) = x\sqrt{3} - \frac{7}{x} + x^2$
6. $m(x) = \frac{-5x+7}{3}$
7. $n(x) = \frac{x^3}{6} + 3x^2 - 2$
8. $p(x) = \frac{x^4+5x^3-7}{3}$
9. $q(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x$

3) Dérivée d'un produit

Propriété 13 : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction uv définie par $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$(uv)'(x) =$______________________________________

Attention : La dérivée d'un produit **n'est pas** le produit des dérivées !!!

Preuve : Soit $a \in I$.Montrons que la fonction f définie sur I par $f(x) = u(x) \times v(x)$ est dérivable en a.
Soit $h \neq 0$. Alors :

- $f(a) = u(a)v(a)$
- $f(a+h) = u(a+h)v(a+h)$
- $f(a+h) - f(a) = u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$

$$= \frac{u(a+h)v(a+h)\boldsymbol{-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)}-u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)\boldsymbol{v(a+h)}-u(a)\boldsymbol{v(a+h)}}{h} + \frac{\boldsymbol{u(a)}v(a+h)-\boldsymbol{u(a)}v(a)}{h}$$

$$= \boldsymbol{v(a+h)}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \boldsymbol{u(a)}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \boldsymbol{v(a+h)} = v(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \boldsymbol{u(a)} = u(a)$

- $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = v(a)u'(a) + u(a)v'(a) = f'(a)$

Ainsi quelque soit le nombre $a \in I$, f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$

Application 6 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^4 - 2x^2 + 1)$

Remarque : Ici, on pourrait tout simplement développer l'expression de f et dériver la fonction polynôme trouvée.

Propriété 14 : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction u^2 définie par $u^2(x) = \left(u(x)\right)^2$, est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
$(u^2)'(x) =$______________________________

Preuve : Il suffit de remplacer $v(x)$ par $u(x)$ dans la propriété 12

Application 7 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-4x^3 - 2x + 5)^2$

Exercice 10 : Produit de deux fonctions

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $g(x) = 4x(x-5)$
3. $h(x) = x^3(\sqrt{x} - x)$
4. $k(x) = x^2(2x+4)$
5. $l(x) = (x^2+3)(1-x)$
6. $m(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

4) Dérivée d'un quotient

Propriété 15 : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ définie par $\frac{u}{v}(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) =$$

Attention : La dérivée d'un quotient **n'est pas** le quotient des dérivées !!!

Application 8 : Dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

Remarque : Quand on peut factoriser le numérateur, il est conseillé de le faire.

Exercice 11 : Quotient

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$
2. $g(x) = \frac{2x^2}{x+5}$
3. $h(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$
4. $k(x) = \frac{-2\sqrt{x}+5}{x^2}$

Propriété 16 (cas particulier) : Soient k un réel et v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{k}{v}$ définie par $\frac{k}{v}(x) = \frac{k}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{k}{v}\right)'(x) =$$

Preuve : Si u est une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = k$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $u'(x) = 0$.

Donc $\left(\frac{k}{v}\right)'(x) = \frac{-kv'(x)}{(v(x))^2}$

Application 9 : Dériver la fonction définie sur $]3\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{-2}{3-x}$

Propriété 17 (cas particulier) : Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I avec pour tout $x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ définie par $\frac{1}{v}(x) = \frac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) =$$

Preuve : Ici $k = 1$.

Application 10 : Dériver la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Exercice 12 : Inverse

1. $f(x) = \frac{1}{x-7}$ 2. $g(x) = \frac{-1}{x^2-1}$ 3. $h(x) = \frac{2}{3x+1}$ 4. $k(x) = \frac{-5}{x^2+1}$

Résumé :

	Fonction	Dérivé
Produit d'une fonction par un nombre k (k constante)	ku	ku'
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit	$u \times v$	$u'v+v'u$
Puissance 2	u^2	$2uu'$
Quotient ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
Inverse ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$

Exercice 13 : Calculs en vrac

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$
2. $g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$
3. $h(x) = (2-x)\sqrt{x}$
4. $k(x) = \frac{-1}{x^2}$
5. $l(x) = \frac{1}{x^2+2}$
6. $m(x) = (2x+1)^2$
7. $n(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + \frac{x}{5} - 3$
8. $p(x) = 2x - \frac{x}{x+6}$
9. $q(x) = \frac{1}{x^2} - 3x^2 + \frac{x+1}{x^2-3} - 5$

Exercice 14 : Dérivées et tangentes

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.

$f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ et $a = -1$ | $g(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x^3-1}$ et $a = 0$ | $h(x) = 2(3x-1)\sqrt{x}$ et $a = 1$

Exercice 15 : Dérivées et tangentes

La fonction f est défine sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - 8$$

1. Calculer $f'(x)$
2. Démontrer que la courbe représentative de f admet deux tangentes horizontales. Précisez les abscisses des points correspondants.

Exercice 16 : Dérivées et tangentes

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6$$

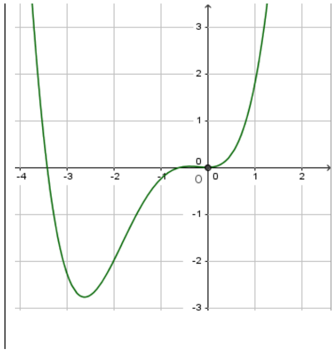
Démontrer que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1 passe par le point $A(0\,;8)$.

Exercice 17 : Dérivées et tangentes

La courbe ci-dessous est une partie de la courbe représentative de g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

1. a. En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
   b. Par le calcul, trouver la valeur exacte des abscisses de ces points.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $a = -2$. Tracer cette tangente.



Exercice 18 : Dérivées et tangentes

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1\,; +\infty[$.
   b. Calculez $f'(x)$.
2. Quels sont les points de C_f en lesquels la tangente à C_f est parallèle à la droite d'équation $y = 4x$?
3. Existe-t-il des tangentes à C_f passant par el point $A(0\,;1)$?

Exercice 19 : Dérivées et tangentes

Soit g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$
et C_g sa courbe représentative.

1. La courbe C_g admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
2. La courbe C_g admet-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y = 3x - 5$?
   Si oui, précisez en quels points.

Exercice 20 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer a, b, c sachant que C_f vérifie les hypothèses suivantes :
   H_1 : C_f passe par l'origine du repère O.
   H_2 : C_f passe par le point $A(1\,; -3)$
   H_3 : la tangente en O à C_f a pour équation réduite $y = -4x$.

Exercice 21 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer a, b, c sachant que C_f vérifie les hypothèses suivantes :
   H_1 : C_f coupe l'axe (Oy) au point d'ordonnée 20.
   H_2 : C_f passe par le point $A(-1\,;\ 18)$
   H_3 : $C_f$admet une tangente en A de coefficient directeur 3.

H_4 : $C_f$admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Exercice 22 : Dérivées et tangentes

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{3x - 2}$$

et l'on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère$(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer a et b sachant que C_f coupe l'axe des ordonnées au point $A(0\,;1)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

V. Composition

Propriété 18 : Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout réel x de J, $ax + b$ appartient à I, alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x de J on a :

$$f'(x) =$$

Application 11 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)^3$.

Remarque 1 : La formule précédente est un cas particulier d'une formule plus générale :

Propriété 19 (hors programme) : Si g est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout réel x de J, $u(x)$ appartient à I, alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(u(x))$, est dérivable sur J et pour tout x de J on a :

$$f'(x) =$$

Dans la propriété 17, u est la fonction définie par $u(x) = ax + b$ et $u'(x) = a$.

Remarque 2 : On peut grâce à cette formule trouver les dérivées des fonctions u^n : $(\boldsymbol{u^n})' =$

Application 12 : Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

Au passage on peut remarquer : $(\sqrt{\boldsymbol{u}})' =$

Exercice 23 :

Dériver les fonctions suivantes, sans se préoccuper des ensembles de définitions/dérivabilités.

1. $f(x) = (5 - 4x)^3$	2. $f(x) = (2x + 7)^5$	3. $f(x) = \sqrt{5 + 3x}$
4. $f(x) = \sqrt{-2x - 1}$	5. $f(x) = 3(x - 5)^7$	6. $f(x) = -2\sqrt{5x + 3}$
7. $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^3$	8. $f(x) = 3(-x^5 + 2x^3 - 9)^7$	9. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 4}$
10. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$	11. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^5$	