Chapitre : Fonctions polynômes de degré 2 et 3 - Correction

Exercice 1 : Racines d'un polynôme

1. Vérifier que 1 est une racine de : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(1)} &= \mathbf{2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1} \\ &= \mathbf{2 - 3 + 1} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

1 est bien une racine de $\boldsymbol{f}$.

2. Vérifier que -1 est une racine de : $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(-1)} &= \mathbf{4(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 1} \\ &= \mathbf{4(-1) + 2 \times 1 + 1 + 1} \\ &= \mathbf{-4 + 2 + 1 + 1} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{-1}$ est bien une racine de $\boldsymbol{f}$.

3. Vérifier que 2 est une racine de : $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(2)} &= \mathbf{-3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 6} \\ &= \mathbf{-3 \times 4 + 6 + 6} \\ &= \mathbf{-12 + 12} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

2 est bien une racine de $\boldsymbol{f}$.

4. Vérifier que -3 est une racine de : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(-3)} &= \mathbf{(-3)^3 + 2(-3)^2 - 4(-3) - 3} \\ &= \mathbf{-27 + 2 \times 9 + 12 - 3} \\ &= \mathbf{-27 + 18 + 12 - 3} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\mathbf{-3}$ est bien une racine de $\boldsymbol{f}$.

Exercice 2 : Racines d'un polynôme

Conjecturer une racine "évidente" des polynômes suivants et vérifier votre conjecture.

Méthode :

- **Conjecturer une racine "évidente", c'est essayer de deviner une racine simple (un nombre tel que 0 ; 1 ; -1 ; 2 ou - 2) .**
- **On vérifie en calculant l'image ...**

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$

Racine évidente : 0

$\boldsymbol{f(0)} = \mathbf{2 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0 + 0 = 0}$

2. $f(x) = x^2 + x - 2$

Racine évidente : $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{-1}$

$\boldsymbol{f(1)} = \mathbf{1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0}$

$\boldsymbol{f(-1)} = \mathbf{(-1)^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0}$

3. $f(x) = x^2 - 4$

Racine évidente : $\mathbf{2}$ ou $\mathbf{-2}$

$\boldsymbol{f(2)} = \mathbf{2^2 - 4 = 4 - 4 = 0}$

$\boldsymbol{f(-2)} = \mathbf{(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0}$

4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Racine évidente : 1

$\boldsymbol{f(1)} = \mathbf{2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0}$

5. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

Racine évidente : $\mathbf{-1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(-1)} &= \mathbf{2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1} \\ &= \mathbf{2 - 3 + 1 = 0} \end{aligned}$$

6. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

Racine évidente : 1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(1)} &= \mathbf{1^3 + 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1} \\ &= \mathbf{1 + 2 - 4 + 1} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

7. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

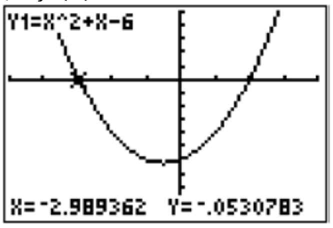
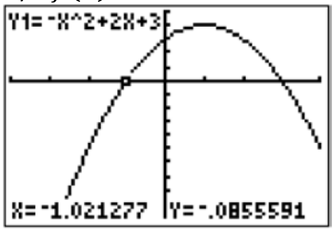
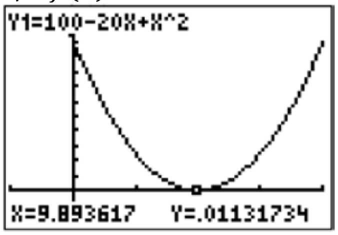
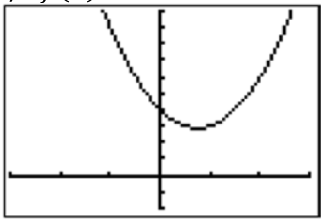
Racine évidente : $\mathbf{-1}$

8. $f(x) = 35x^3 + 23x^2 - 14x$

Racine évidente : 0

Exercice 3 : Résolution graphique (calculatrice)

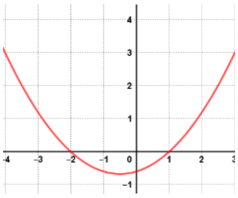
Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f, puis résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$	b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$	c) $f(x) = 100 - 20x + x^2$	d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
			
$\boldsymbol{S = \{-3\,;2\}}$.	$\boldsymbol{S = \{-1\,;3\}}$.	$\boldsymbol{S = \{10\}}$.	$\boldsymbol{S = \emptyset}$.

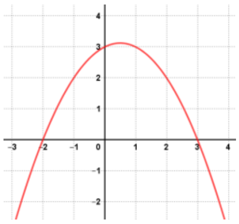
Exercice 4 :

Conjecturer, grâce au graphique, les racines des polynômes représentés ci-dessous.

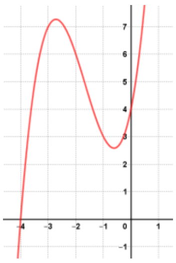
a) $\boldsymbol{S = \{-2\,;1\}}$



b) $\boldsymbol{S = \{-2\,;3\}}$

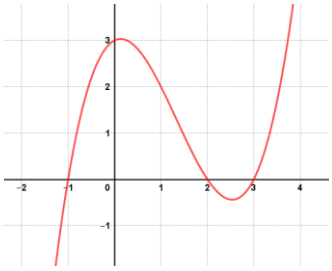


c) $\boldsymbol{S = \{-4\}}$



d) $\boldsymbol{S = \{-2\,;0\,;1\}}$

e) $\boldsymbol{S = \{-1\,;2\,;3\}}$



Exercice 5 : Fonction polynôme du second degré ou non ?

Dans chacun des cas suivants, on donne l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2.

Si oui, préciser les coefficients a, b et c.

a. $f(x) = 4 - x^2 + x^3$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car il y a « x^3 ».

b. $f(x) = 7 - 2x$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car $a = 0$. C'est une fonction affine.

c. $f(x) = 3x - x^2$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec :
$a = -1 \neq 0\,; b = 3$ et $c = 0$.

d. $f(x) = 5 - 2x^2 + 3x$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec :
$a = -2 \neq 0\,; b = 3$ et $c = 5$.

e. $f(x) = 3(x+1)^2 - 4(2x-5)$

$\boldsymbol{f(x) = 3(x^2 + 2x + 1) - 8x + 20}$

$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 2x + 23}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 3 \neq 0\,; b = -2$ et $c = 23$.

f. $f(x) = (x+1)^2 + (x-2)^2$

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4}$

$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 2x + 5}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec :
$a = 2 \neq 0\,; b = -2$ et $c = 5$.

g. $f(x) = (2x+3)^2 - (2x-1)^2$

$\boldsymbol{f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 - 4x + 1)}$

$\boldsymbol{f(x) = 16x + 8}$

Ce n'est pas une fonction polynôme de degré 2 car $a = 0$. C'est une fonction affine.

h. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$

$x^2 + 1 \neq 0$ pour tout réel x, et

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$

C'est une fonction polynôme de degré 2 avec :
$a = 1 \neq 0\,; b = 0$ et $c = 1$.

Exercice 6 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2

Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = 3x^2$

- f est de la forme ax^2 avec $a = 3$
- f a une seule racine 0
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $O(0\,;0)$ c'est-à-dire l'origine du repère
- L'axe de symétrie est l'axe des ordonnées (c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 0$)
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

car $a > 0$

b) $f(x) = -6x^2 + 1$

- f est de la forme $ax^2 + b$ avec $a = -6$ et $b = 1$
- Pour trouver les racines, on résout l'équation
  $f(x) = 0$
  $-6x^2 + 1 = 0$
  $-6x^2 = -1$
  $x^2 = \dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$
  $x = \sqrt{\dfrac{1}{6}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{1}{6}}$
  f a deux racines : $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$ et $x = -\sqrt{\frac{1}{6}}$
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $S(0\,;b)$ c'est-à-dire $S(0\,;1)$
- L'axe de symétrie est l'axe des ordonnées (c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 0$)
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

car $a < 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

c) $f(x) = -2x^2$

- f est de la forme ax^2 avec $a = -2$
- f a une seule racine 0
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $O(0\,;0)$ c'est-à-dire l'origine du repère
- L'axe de symétrie est l'axe des ordonnées (c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 0$)
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

car $a < 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

car $a < 0$

d) $f(x) = 4x^2 + 3$

- f est de la forme $ax^2 + b$ avec $a = 4$ et $b = 3$
- Pour trouver les racines, on résout l'équation
  $f(x) = 0$
  $4x^2 + 3 = 0$
  $4x^2 = -3$
  $x^2 = -\dfrac{3}{4}$ $(impossible)$
  f n'a pas de racine

  <u>Remarque :</u> Comme a et c ont le même signe, on savait déjà que f n'avait pas de racine.
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $S(0\,;b)$ c'est-à-dire $S(0\,;3)$
- L'axe de symétrie est l'axe des ordonnées (c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 0$)
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

car $a > 0$

Exercice 7 : Polynôme et racines

Méthode : On utilise la forme factorisée : $a(x-x_1)(x-x_2)$ et on peut choisir pour a la valeur que l'on veut (sauf 0) Puisqu'on peut choisir la valeur de a, il y a une infinité de bonnes réponses à chaque fois et on ne donne ici qu'une des réponses possibles. (Dans toutes les réponses données, on a choisi la valeur $a = 1$).

1. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines 2 et 8.

$\boldsymbol{f(x) = (x-2)(x-8)}$

2. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines -3 et 5.

$\boldsymbol{f(x) = (x+3)(x-5)}$

3. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines -7 et -11

$\boldsymbol{f(x) = (x+7)(x+11)}$

4. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines 0 et 4

$\boldsymbol{f(x) = (x-0)(x-4) = x(x-4)}$

Exercice 8 : Polynôme et racines

1. Donner deux polynômes de degré 2 ayant pour racine 3 et 5.

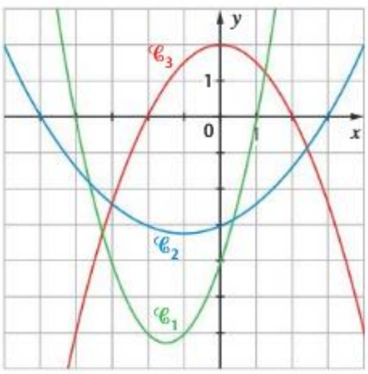
$\boldsymbol{f(x) = (x-3)(x-5)}$
$\boldsymbol{g(x) = 2(x-3)(x-5)}$

2. Donner deux polynômes de degré 2 ayant pour racines - 2 et 4.

$\boldsymbol{f(x) = (x+2)(x-4)}$
$\boldsymbol{g(x) = -(x+2)(x-4)}$

Exercice 9 : Lecture graphique

Relier chacune des courbes aux fonctions données ci-dessous.



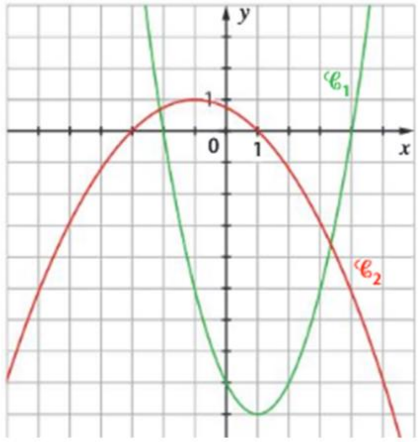
a) $f(x) = (x-1)(x+4)$

b) $g(x) = -0{,}5(x-2)(x+2)$

c) $h(x) = 0{,}2(x-3)(x+5)$

Fonction	Racines	Courbe
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(x+4)}$	**1 et - 4**	$\boldsymbol{C_1}$
$\boldsymbol{g(x) = -0,5(x-2)(x+2)}$	**2 et - 2**	$\boldsymbol{C_3}$
$\boldsymbol{h(x) = 0,2(x-3)(x+5)}$	**2 et - 5**	$\boldsymbol{C_2}$

Exercice 10 : Lecture graphique



Les courbes C_1 et C_2 sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g s'écrivant sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Déterminer l'expression de f et celle de g.

On appelle f la fonction associée à la courbe C_1 et g la fonction associée à la courbe C_2.

• Sur le graphique, en regardant la courbe C_1, on voit que les racines de f sont -2 et 4
donc $f(x) = a(x+2)(x-4)$
Pour trouver a, on utilise un point de la courbe (par exemple le sommet) pour lequel on peut lire les coordonnées.
Ici le sommet est $S\ (1\ ;\ -9)$ donc on a $f(1) = -9$
Donc en remplaçant les x par 1 dans la formule trouvée :

$$a(1+2)(1-4) = -9$$
$$a \times 3 \text{ - } \times (-3) = -9$$
$$-9a = -9$$
$$a = \frac{-9}{-9} = 1$$

Donc on a $f(x) = 1(x+2)(x-4)$ soit $f(x) = (x+2)(x-4)$

• Sur le graphique, en regardant C_2, on voit que les racines de g sont -3 et 1
donc $g(x) = a(x+3)(x-1)$
Ici le sommet est $S\ (-1\ ;\ 1)$ donc on a $g(-1) = 1$
Donc en remplaçant les x par - 1 dans la formule trouvée :

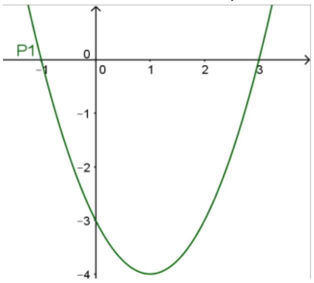
$$a(-1+3)(-1-1) = 1$$
$$a \times 2 \text{ - } \times (-2) = 1$$
$$-4a = 1$$
$$a = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

donc on a $g(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x-4)$

<u>Exercice 11 : Lecture graphique du signe</u>

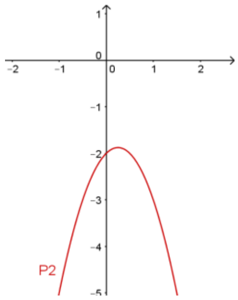
f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.

1. Dans un tableau, donner le signe de $f(x)$.



x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

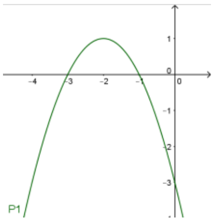
2. Dans un tableau donner le signe de $g(x)$

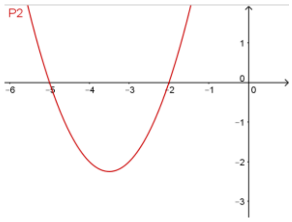


x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	

<u>Exercice 12 : Lecture graphique</u>

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.





1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x) > 0$	$\boldsymbol{S} =]-\mathbf{3}\,;\,-\mathbf{1}[$
$f(x) \geq 0$	$\boldsymbol{S} = [-\mathbf{3}\,;\,-\mathbf{1}]$
$f(x) < 0$	$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{3}[\cup]-\mathbf{1}\,;\,+\infty[$
$f(x) \leq 0$	$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{3}] \cup [-\mathbf{1}\,;\,+\infty[$

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$g(x) > 0$	$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{5}[\cup]-\mathbf{2}\,;\,+\infty[$
$g(x) \geq 0$	$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{5}] \cup [-\mathbf{2}\,;\,+\infty[$
$g(x) < 0$	$\boldsymbol{S} =]-\mathbf{5}\,;\,-\mathbf{2}[$
$g(x) \leq 0$	$\boldsymbol{S} = [-\mathbf{5}\,;\,-\mathbf{2}]$

Exercice 13 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2

Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = 3(x+1)(x-2)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 3$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
- Les racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$
  avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)$
  $= 3 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{4}$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = \frac{1}{2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{27}{4}$	↗	

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a > 0$

b) $f(x) = -6(x-2)(x+7)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = -6$; $x_1 = 2$ et $x_2 = -7$
- Les racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = -7$
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$
  avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2+(-7)}{2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f\left(-\frac{5}{2}\right)$
  $= -6\left(-\frac{5}{2}-2\right)\left(-\frac{5}{2}+7\right)$
  $= -6 \times \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{243}{2}$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = -\frac{5}{2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
f		↗	$\frac{243}{2}$	↘	

car $a < 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

c) $f(x) = -5(x-2)^2$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = -5$; $x_1 = 2$ et $x_2 = 2$
- Il y a une unique racine : 2
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$
  avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f(2) = -5(2-2)^2 = 0$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = 2$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

car $a <$ 0

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

car $a < 0$

d $f(x) = 4(x-3)(x+1)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 4$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$
- Les racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$
  avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f(1) = 3(1-3)(1+1)$
  $= 3 \times (-2) \times 2 = -12$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = 1$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-16	↗	

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a > 0$

Exercice 14 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2

Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = -2(x+5)(x+4)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a=-2$; $x_1 = -5$ et $x_2 = -4$
- Les racines sont $x_1 = -5$ et $x_2 = -4$
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$ avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-5+(-4)}{2} = \frac{-9}{2} = -\frac{9}{2}$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f\left(-\frac{9}{2}\right)$
  $= -2\left(-\frac{9}{2}+5\right)\left(-\frac{9}{2}+4\right)$
  $= -2 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = -\frac{9}{2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

car $a < 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

b) $f(x) = 3x(x-4)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 3$; $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$
- Les racines sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 4$
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$ avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f(2) = 3 \times 2 \times (2-4)$
  $= 6 \times (-2) = -12$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = \frac{1}{2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-12	↗

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a > 0$

c) $f(x) = -2(x-3)(x-6)$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = -2$; $x_1 = 3$ et $x_2 = 6$
- Les racines sont $x_1 = 3$ et $x_2 = 6$
- La parabole est tournée vers le bas car $a < 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$ avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$
  et $\beta = f(\alpha\,) = f\left(\frac{9}{2}\right) = -2\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-6\right)$
  $= -2 \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = \frac{9}{2}$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\frac{9}{2}$	↘

car $a < 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		3		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a < 0$

d $f(x) = (x+5)^2$

- f est de la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 1$; $x_1 = -5$ et $x_2 = -5$
- Il y a une unique racine : -5
- La parabole est tournée vers le haut car $a > 0$
- Le sommet est le point $S(\alpha\,;\beta\,)$ avec $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-5-5}{2} = -5$
- et $\beta = f(\alpha\,) = f(-5) = (-5+5)^2 = 0$
- L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = \alpha$ soit $x = -5$
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
f	↘	0	↗

car $a > 0$

- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

car $a > 0$

Exercice 15 : Factorisation d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P(x) = 2x^2 - x$

$\boldsymbol{P(x) = x(2x-1)}$

2. $P(x) = x^2 + 2x + 1$

$\boldsymbol{P(x) = (x+1)^2}$ **(identité remarquable)**

3. $P(x) = x^2 - 9$

$\boldsymbol{P(x) = x^2 - 3^2}$

$\boldsymbol{P(x) = (x-3)(x+3)}$

(identité remarquable)

4. $P(x) = 3x^2 + 5\,x$

$\boldsymbol{P(x) = x(3x+5)}$

5. $P(x) = x^2 - 2x + 1$

$\boldsymbol{P(x) = (x-1)^2}$ **(identité remarquable)**

6. $P(x) = x^2 - 7$

$\boldsymbol{P(x) = x^2 - \sqrt{7}^2}$

$\boldsymbol{P(x) = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right)}$

(identité remarquable)

Exercice 16 : Factorisation d'un polynôme

Factoriser chaque polynôme sachant que x_1 et x_2 en sont les racines.

a) $P(x) = 5x^2 + 20x$ Avec : $x_1 = 0$ et $x_2 = -4$

$\boldsymbol{P(x) = 5x(x+4)}$

b) $P(x) = -2x^2 - 16x - 14$ Avec : $x_1 = -7$ et $x_2 = -1$

$\boldsymbol{P(x) = -2(x+7)(x+1)}$

c) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ Avec : $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

$\boldsymbol{P(x) = (x-3)(x-2)}$

Exercice 17 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x+2)(x-1)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{2(x+2)(x-1)} &= \boldsymbol{(2x+4)(x-1)} \\ &= \boldsymbol{(2x^2 - 2x + 4x - 4} \\ &= \boldsymbol{2x^2 + 2x - 4} \\ &= \boldsymbol{f(x)} \end{aligned}$$

On a bien $\boldsymbol{f(x) = 2(x+2)(x-1)}$

b) Déterminer alors les racines de f.

D'après la forme factorisée trouvée à la question d'avant, les racines sont $\boldsymbol{-2\ et\ 1}$ **.**

Exercice 18 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$.

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -3(x-5)(x+2)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{-3(x-5)(x+2)} &= \boldsymbol{(-3x+15)(x+2)} \\ &= \boldsymbol{-3x^2 - 6x + 15x + 30} \\ &= \boldsymbol{-3x^2 + 9x + 30} \\ &= \boldsymbol{f(x)} \end{aligned}$$

On a bien $\boldsymbol{f(x) = -3(x-5)(x+2)}$

b) Déterminer alors les racines de f.

D'après la forme factorisée trouvée à la question d'avant, les racines sont $\boldsymbol{5\ et -2}$

Exercice 19 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-5)(x-1)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{2(x-5)(x-1)} &= \boldsymbol{(2x-10)(x-1)} \\ &= \boldsymbol{2x^2 - 2x - 10x + 10} \\ &= \boldsymbol{2x^2 - 12x + 10} \\ &= \boldsymbol{f(x)} \end{aligned}$$

On a bien $\boldsymbol{f(x) = 2(x-5)(x-1)}$

b) Déterminer alors les racines de f.

D'après la forme factorisée trouvée à la question d'avant, les racines sont $\boldsymbol{5\ et\ 1}$ **.**

Exercice 20 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = -4x^2 + 12x - 8$.

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -4(x-1)(x-2)$.

$$\begin{aligned} -4(x-1)(x-2) &= (-4x+4)(x-2) \\ &= -4x^2 + 8x + 4x - 8 \\ &= -4x^2 + 12x - 8 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a bien $f(x) = -4(x-1)(x-2)$

b) Déterminer alors les racines de f.

D'après la forme factorisée trouvée à la question d'avant, les racines sont 1 *et* 2..

Exercice 21 : Factoriser à l'aide d'une racine

Factoriser chaque polynôme du second degré dont on donne une racine.

a) $P(x) = x^2 + 13x + 30$ de racine -3

• La forme factorisée est $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 1$ (coefficient devant x^2)

$x_1 = -3$ **(énoncé)**

$x_2 = ?$

On a donc $P(x) = (x+3)(x-x_2)$

• On développe :

$P(x) = (x+3)(x-x_2)$

$P(x) = x^2 - x \times x_2 + 3\,x - 3\,x_2$

On compare avec l'écriture développée de l'énoncé en regardant surtout le terme ''sans x''

$-3x_2 = 30$

$x_2 = \dfrac{30}{-3} = -10$

La deuxième racine est -10

Donc $P(x) = (x+3)(x+10)$

b) $P(x) = 5x^2 + 9x - 2$ de racine -2

• La forme factorisée est $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 5$ (coefficient devant x^2)

$x_1 = -2$ **(énoncé)**

$x_2 = ?$

On a donc $P(x) = 5(x+2)(x-x_2)$

• On développe :

$P(x) = 5(x+2)(x-x_2)$

$P(x) = (5x+10)(x-x_2)$

$P(x) = 5x^2 - 5x \times x_2 + 10\,x - 10\,x_2$

On compare avec l'écriture développée de l'énoncé en regardant surtout le terme ''sans x''

$$-10x_2 = -2$$

$$x_2 = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

La deuxième racine est $\frac{1}{5}$

Donc $P(x) = 5(x+2)\left(x - \dfrac{1}{5}\right)$

c) $P(x) = x^2 - 10x - 200$ de racine 10

• La forme factorisée est $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a = 1$ (coefficient devant x^2)

$x_1 = 10$ **(énoncé)**

$x_2 = ?$

On a donc $P(x) = (x - 10)(x - x_2)$

• On développe :

$P(x) = (x - 10)(x - x_2)$

$P(x) = x^2 - x \times x_2 - 10\,x + 10\,x_2$

On compare avec l'écriture développée de l'énoncé en regardant surtout le terme ''sans x''

$10x_2 = -200$

$x_2 = \dfrac{-200}{10} = -20$

La deuxième racine est -20

Donc $P(x) = (x - 10)(x + 20)$

Exercice 22 : Résolution d'équations « simples »

Dans chacun des cas, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

a) $f(x) = 25 - 4x^2$

C'est une identité remarquable :

$f(x) = (5 - 2x)(5 + 2x)$

Formule : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$f(x) = 0$

$(5 - 2x)(5 + 2x) = 0$

$5 - 2x = 0$ **ou** $5 + 2x = 0$

$x = \frac{5}{2}$ **ou** $x = -\frac{5}{2}$.

$S = \left\{-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\right\}$.

b) $f(x) = 2x^2 - 8x$

On factorise par x : $f(x) = 2x(x - 4)$

$f(x) = 0$

$2x(x - 4) = 0$

$x = 0$ **ou** $x - 4 = 0$

$x = 0$ **ou** $x = 4$.

$S = \{0\,;4\}$.

c) $f(x) = (x - 2)^2 - 49$

$f(x) = 0$

$(x - 2)^2 - 49 = 0$

$(x - 2)^2 = 49$

$x - 2 = -7$ **ou** $x - 2 = 7$

$x = -5$ **ou** $x = 9$.

$S = \{-5\,;9\}$.

d) $f(x) = (x + 3)^2$

$(x + 3)^2 = 0$

$x + 3 = 0$

$x = -3$.

$S = \{-3\}$.

e) $f(x) = (x + 1)(2x + 3)$

$(x + 1)(2x + 3) = 0$

$x + 1 = 0$ **ou** $2x + 3 = 0$

$x = -1$ **ou** $x = -\frac{3}{2}$.

$S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,-1\right\}$.

Exercice 23 : Signe d'un produit

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$.

a) $f(x) = (x-2)(x+3)$

$f(x) = 0$
$(x-2)(x+3) = 0$
$x-2 = 0$ ou $x+3 = 0$
$x = 2$ ou $x = -3$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $f(x) = 2x(x-5)$

$f(x) = 0$
$2x(x-5) = 0$
$x = 0$ ou $x-5 = 0$
$x = 0$ ou $x = 5$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2-10x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $f(x) = (7-x)(1+x)$

$f(x) = 0$
$(7-x)(1+x) = 0$
$7-x = 0$ ou $1+x = 0$
$x = 7$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $f(x) = (x+5)(3-x)$

$f(x) = 0$
$(x+5)(3-x) = 0$
$x+5 = 0$ ou $3-x = 0$
$x = -5$ ou $x = 3$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 24 : Signe d'un produit

A l'aide de la forme factorisée, déterminer le tableau de signes de chaque polynôme.

a) $P(x) = (x+2)(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $P(x) = (x+7)(x+8)$

x	$-\infty$		-8		-7		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2+15x+56$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $P(x) = 3(x-2)(x+7)$

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$3(x+7)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+15x-42$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $P(x) = -5(x+5)(x-1)$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-5(x+5)$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-5x^2-20x+25$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 25 : Inéquations produit

Résoudre chaque inéquation.

a) $(x+3)(x-2) \leq 0$ **(négatif)**

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$			
$x-2$		$-$			0	$+$	
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-3\ ;\ 2]$

b) $(x-4)(x-5) > 0$ **(strictement positif)**

x	$-\infty$		4		5		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$			
$x-5$		$-$			0	$+$	
$x^2-9x+20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\ ;4[\cup]5\ ;\ +\infty[$

c) $3(x-4)(x+2) < 0$ **(strictement négatif)**

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$3\ (x+2)$		$-$	0	$+$			
$x-4$		$-$			0	$+$	
$3x^2-6x-24$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-2\ ;4[$

d) $-(x+2)(x+3) \geq 0$ **(positif)**

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$			
$x+2$		$-$			0	$+$	
$-x^2-5x-6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = [-3\ ;\ -2]$

Exercice 26 : Inéquations produit

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2+9x+30$.

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -3(x+2)(x-5)$.

$$\begin{aligned} -3(x+2)(x-5) &= -3(x^2-5x+2x-10) \\ &= -3(x^2-3x-10) \\ &= -3x^2+9x+30 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$ **(négatif)**.

On résout $f(x)=0$

$-3(x+2)(x-5)=0$

$x+2=0$ **ou** $x-5=0$

$x=-2$ **ou** $x=5$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-3\ (x+2)$		$+$	0	$-$			
$x-5$		$-$			0	$+$	
$-3x^2+9x+30$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\ ;\ -2] \cup [5\ ;\ +\infty[$

Compétence : Forme développée, forme factorisée et forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Exercice 27

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x - 6$

1. Montrer que $f(x) = (x-1)(x+6)$. $(x-1)(x+6)$ est la forme factorisée de f.

$\boldsymbol{(x-1)(x+6) = x^2 + 6x - x - 6 = x^2 + 5x - 6 = f(x)}$

2. Montrer que $f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$. $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$ est la forme canonique de f

$\boldsymbol{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{49}{4} = x^2 + 5x - \frac{24}{4} = x^2 + 5x - 6 = f(x)}$

3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :

a. Calculer l'image de -6, de 0 et de $-\frac{5}{2}$

Pour -6, on utilise la forme factorisée : $f(-6) = (-6-1)(-6+6) = 0$.

Pour 0, on utilise la forme développée : $f(0) = 0^2 - 5 \times 0 - 6 = -6$.

Pour $-\frac{5}{2}$, on utilise la forme canonique : $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = -\frac{49}{4}$.

b. résoudre l'équation $f(x) = 0$

On utilise la forme factorisée : $(x-1)(x+6) = 0$.

Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$x - 1 = 0$ ou $x + 6 = 0$ c'est-à-dire $x = 1$ ou $x = -6$

$S = \{-6\,;1\}$

c. résoudre l'équation $f(x) = -6$

On utilise la forme développée : $x^2 + 5x - 6 = -6$.

$x^2 + 5x = 0$ donc $x(x+5) = 0$

$x = 0$ ou $x + 5 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = -5$

$S = \{-5\,;0\}$

d. résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{4}$

On utilise la forme canonique : $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \frac{15}{4}$.

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{64}{4}$ donc $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = 16$

$x + \frac{5}{2} = -4$ ou $x + \frac{5}{2} = 4$ c'est-à-dire $x = -\frac{13}{2}$ ou $x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{-\frac{13}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}$

4. Déterminer les variation de la fonction f.

On utilise la forme canonique : $f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = -\frac{5}{2}$ et $\beta = -\frac{49}{4}$.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-\frac{5}{2}]$ et croissante sur $[\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$.

Exercice 28

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

1. Montrer que $f(x) = 2(x-2)(x+1)$

$\boldsymbol{2(x-2)(x+1) = 2(x^2 + x - 2x - 2) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4 = f(x)}$

2. Montrer que $f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

$\boldsymbol{-\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2} + 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 2x^2 + 2x - \frac{8}{4} = 2x^2 + 2x - 4 = f(x)}$

3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :

a. Calculer l'image de -3, de 2 et de $\frac{1}{2}$

Pour -3, on utilise la forme factorisée : $\boldsymbol{f(-3) = 2 \times (-3-2)(-3+1) = 2 \times (-5) \times (-2) = 20.}$

Pour 2, on utilise la forme factorisée : $\boldsymbol{f(2) = 2 \times (2-2)(2+1) = 0.}$

Pour $\frac{1}{2}$, on utilise la forme canonique : $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{9}{2}.}$

b. Calculer l'image de $\sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{5}$

Pour $\sqrt{3}$, on utilise la forme développée : $\boldsymbol{f(\sqrt{3}) = 2 \times \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} - 4 = 2 \times 3 - 2\sqrt{3} - 4 = 2 - 2\sqrt{3}.}$

Pour $1 - \sqrt{5}$, on utilise la forme développée :

$$\boldsymbol{\begin{aligned} f(1-\sqrt{5}) &= 2(1-\sqrt{5})^2 - 2(1-\sqrt{5}) - 4 = 2(1 - 2\sqrt{5} + 5) - 2 + 2\sqrt{5} - 4 \\ &= 2 - 4\sqrt{5} + 10 - 2 + 2\sqrt{5} - 4 = 6 - 2\sqrt{5} \end{aligned}}$$

c. résoudre l'équation $f(x) = 0$

On utilise la forme factorisée : $2(x-2)(x+1) = \boldsymbol{0}$**.**

Un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul.

$\boldsymbol{x - 2 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x + 1 = 0}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{x = 2}$ **ou** $\boldsymbol{x = -1}$

$\boldsymbol{S = \{-1\,;2\}}$

d. résoudre l'équation $f(x) = -4$

On utilise la forme développée : $2x^2 - 2x - 4 = \boldsymbol{-4}$**.**

$\boldsymbol{2x^2 - 2x = 0}$ **donc** $\boldsymbol{2x(x-1) = 0}$

$\boldsymbol{2x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x - 1 = 0}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{x = 0}$ **ou** $\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{S = \{0\,;1\}}$

e. résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$

On utilise la forme canonique : $\boldsymbol{-\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.}$

$\boldsymbol{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{2}}$ **donc** $\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2}$

$\boldsymbol{x - \frac{1}{2} = -\sqrt{2}}$ **ou** $\boldsymbol{x - \frac{1}{2} = \sqrt{2}}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{x = -\sqrt{2} + \frac{1}{2}}$ **ou** $\boldsymbol{x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\sqrt{2} + \frac{1}{2}\,;\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right\}}$

4. Déterminer les variation de la fonction f.

On utilise la forme canonique : $\boldsymbol{f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$

Ainsi $\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ **avec** $\boldsymbol{a = 2 > 0,\ \alpha = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\beta = -\frac{9}{2}.}$

La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\boldsymbol{\frac{1}{2}}]$ **et croissante sur** $[\boldsymbol{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty[$**.**

Exercice 29 : Lecture graphique

On donne quatre courbes ci-contre et quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

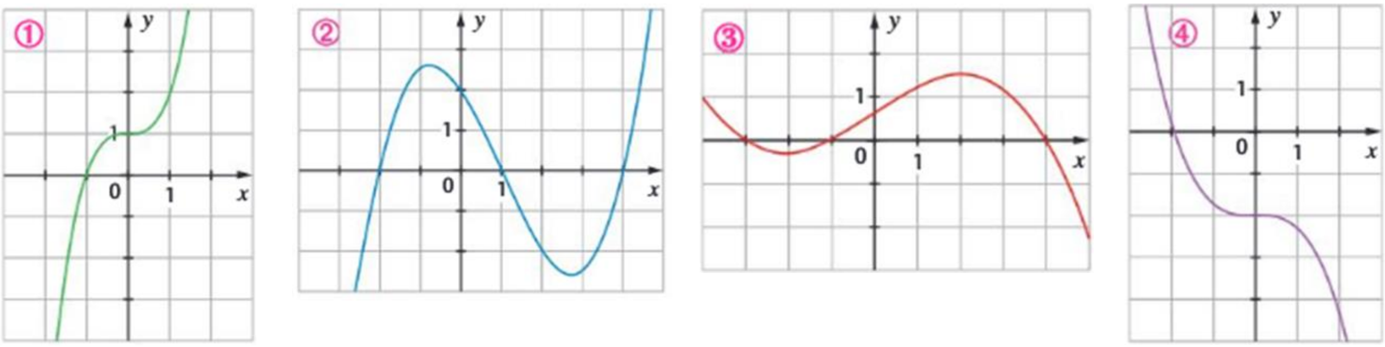
a) $f(x) = -0{,}05\,(x+3)(x-4)(x+1)$

b) $g(x) = x^3 + 1$

c) $h(x) = -0{,}3x^3 - 2$

d) $i(x) = 0{,}0.25(x-1)(x+2)(x-4)$

Relier chaque fonction à sa représentation graphique.



Fonction	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$
Forme	Forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$	$ax^3 + b$ avec $a = 1$ *et* $b = 1$	$ax^3 + b$ *avec* $a = -0,3$ *et* $b = -2$	Forme factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
Racines si forme factorisée	-3 ; 4 ; -1			1 ; -2 ; 4
Sens de variations pour forme $ax^3 + b$		Croissant	Décroissant	
Courbe	Courbe 3	Courbe 1	Courbe 4	Courbe 2

Exercice 30 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3) &= (x\times x + x\times 2 + 1\times x + 1\times 2)(x+3)\\ &= \left(x^2 + 2x + x + 2\right)(x+3)\\ &= \left(x^2 + 3x + 2\right)(x+3)\\ &= x^2\times x + x^2\times 3 + 3x\times x + 3x\times 3 + 2\times x + 2\times 3\\ &= x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 2x + 6\\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b) Déterminer alors les racines de f.

1ère méthode :	**2ème méthode :**
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ **avec :** $x_1 = -2$ **et** $x_2 = -2$ **et** $x_3 = -3$	$f(x) = 0$ $(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ $x+1 = 0$ **ou** $x+2 = 0$ **ou** $x+3 = 0$ $x = -1$ **ou** $x = -2$ **ou** $x = -3$

Les racines de $f(x)$ sont $x_1 = -2$ et $x_2 = -2$ et $x_3 = -3$

c) Donner le tableau de signe de $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0			$+$			
$x+2$				$-$	0	$+$			
$x+1$				$-$			0	$+$	
$x^3+6x^2+11x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 31 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 14x + 12$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2(x-1)(x-2)(x+3)} &= \big(2\times x + 2\times(-1)\big)\big(x\times x + x\times 3 + (-2)\times x + (-2)\times 3\big) \\
&= (2x-2)\big(x^2+3x-2x-6\big) \\
&= (2x-2)\big(x^2+x-6\big) \\
&= 2x\times x^2 + 2x\times x + 2x\times(-6) + (-2)\times x^2 + (-2)\times x + (-2)\times(-6) \\
&= 2x^3 + 2x^2 - 12x - 2x^2 - 2x + 12 \\
&= 2x^3 - 14x + 12 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Déterminer alors les racines de f.

1ère méthode :	**2ème méthode :**
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ **avec :** $x_1 = 1$ **et** $x_2 = 2$ **et** $x_3 = -3$	$f(x) = 0$ $2(x-1)(x-2)(x+3) = 0$ $x-1=0$ **ou** $x-2=0$ **ou** $x+3=0$ $x=1$ **ou** $x=2$ **ou** $x=-3$

Les racines de $f(x)$ sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et $x_3 = -3$

c) Donner le tableau de signe de $f(x)$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$2(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^3-14x+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 32 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = (x+4)(x-1)^2$

Rappel identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{(x+4)(x-1)^2} &= (x+4)\big(x^2 - 2\times x + 1^2\big) \\
&= (x+4)\big(x^2-2x+1\big) \\
&= (x\times x^2 + x\times(-2x) + x\times 1 + 4\times x^2 + 4\times(-2x) + 4\times 1 \\
&= x^3 - 2x^2 + x + 4x^2 - 8x + 4 \\
&= x^3 + 2x^2 - 7x + 4 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

b) Déterminer alors les racines de f.

1ère méthode :	**2ème méthode :**
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)^2$ **avec :** $x_1 = -4$ **et** $x_2 = 1$ **(racine double)**	$f(x) = 0$ $(x+4)(x-1)^2 = 0$ $x+4=0$ **ou** $x-1=0$ $x=-4$ **ou** $x=1$

Les racines de $f(x)$ sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$ (racine double)

c) Donner le tableau de signe de $f(x)$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
x^3+2x^2-7x+4		$-$	0	$+$	0	$+$	

Exercice 33 : Signe d'un produit

A l'aide de la forme factorisée, déterminer le tableau de signes de chaque polynôme.

a) $P(x) = (x-1)(x+5)(x-4)$

x	$-\infty$		-5		1		4		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$					
$x-1$				$-$	0	$+$			
$x-4$						$-$	0	$+$	
$x^3-21x+20$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $P(x) = 5(x-2)(x-3)(x+7)$

x	$-\infty$		-7		2		3		$+\infty$
$5\ (x+7)$		$-$	0	$+$					
$x-2$				$-$	0	$+$			
$x-3$						$-$	0	$+$	
$5x^3+10x^2-145x+210$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) $P(x) = -4(x+6)(x+5)(x+1)$

x	$-\infty$		-6		-5		-1		$+\infty$
$-4\,(x+6)$		$+$	0	$-$					
$x+5$				$-$	0	$+$			
$x+1$						$-$	0	$+$	
$-4x^3-48x^2-164x-120$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

d) $P(x) = 5x(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$5\ (x+1)$		$-$	0	$+$					
x				$-$	0	$+$			
$x-2$						$-$	0	$+$	
$5x^3-5x^2-10x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 34 : Inéquations produit

Résoudre chaque inéquation.

a) $(-4)(x+3)(x-1) < 0$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-4\ (x+3)$		$+$	0	$-$			
$x-1$				$-$	0	$+$	
$-4x^2-8x+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{3}[\cup]\mathbf{1}\,;\,+\infty[$

b) $5(x-2)(x+6)(x+4) \leq 0$

x	$-\infty$		-6		-4		2		$+\infty$
$5\ (x+6)$		$-$	0	$+$					
$x+4$				$-$	0	$+$			
$x-2$						$-$	0	$+$	
$5x^3+40x^2+20x-240$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{6}] \cup [-\mathbf{4}\,;\mathbf{2}]$

c) $-6(x-2)(x-1)(x+7) \geq 0$

x	$-\infty$		-7		1		2		$+\infty$
$-6\ (x+7)$		$+$	0	$-$					
$x-1$				$-$	0	$+$			
$x-2$						$-$	0	$+$	
$-6x^3-24x^2+114x-84$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{7}] \cup [\mathbf{1}\,;\mathbf{2}]$

d) $-(x+3)(x-4)(x-1) > 0$

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$					
$x-1$				$-$	0	$+$			
$x-4$						$-$	0	$+$	
$-x^3+2x^2+11x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{3}[\cup]\mathbf{1}\,;\,\mathbf{4}[$

Exercice 35 : Inéquations produit

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 4x - 16$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-1)(x+2)(x+4)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{2(x-1)(x+2)(x+4)} &= \mathbf{2\left(x^2+2x-x-2\right)(x+4)} \\
&= \mathbf{2(x^2+x-2)(x+4)} \\
&= \mathbf{2(x^3+4x^2+x^2+4x-2x-8)} \\
&= \mathbf{2(x^3+5x^2+2x-8)} \\
&= \mathbf{2x^3+10x^2+4x-16}
\end{aligned}$$

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

On résout d'abord $f(x) = 0$

$\mathbf{2(x-1)(x+2)(x+4) = 0}$

$\boldsymbol{x-1=0}$ **ou** $\boldsymbol{x+2=0}$ **ou** $\boldsymbol{x+4=0}$

$\boldsymbol{x=1}$ **ou** $\boldsymbol{x=-2}$ **ou** $\boldsymbol{x=-4}$

x	$-\infty$		-4		-2		1		$+\infty$
$2\ (x+4\ )$		$-$	0	$+$					
$x+2$				$-$	0	$+$			
$x-1$						$-$	0	$+$	
$2x^3+10x^2+4x-16$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\,-\mathbf{4}] \cup [-\mathbf{2}\,;\mathbf{1}]$

<u>Exercice 36 : Problème : Bénéfice et second degré</u>

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village.
Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.
On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes) avec $0 < q < 60$.
Charlie sait que le cout de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.
Son objectif est double :

- Rendre la production rentable ;
- Maximiser le bénéfice de sa chocolaterie.

Les formules donnant le cout $C(q)$ et la recette $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées :

$$C(q) = q^2 + 30q + 1000 \text{ et } R(q) = 100q$$

1. Justifier que $B(q) = -q^2 + 70q - 1000$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B(q)} &= \boldsymbol{R(q) - C(q)} \\ &= \boldsymbol{100q - \left(q^2 + 30q + 1000\right)} \\ &= \boldsymbol{100q - q^2 - 30q - 1000} \\ &= \boldsymbol{-q^2 + 70q - 1000} \end{aligned}$$

2. a. Montrer que $B(q) = -(q - 20)(q - 50)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{-(q-20)(q-50)} &= \boldsymbol{-(q^2 - 50q - 20q + 1000)} \\ &= \boldsymbol{-\left(q^2 - 70q + 1000\right)} \\ &= \boldsymbol{-q^2 + 70q - 1000} \\ &= \boldsymbol{B(q)} \end{aligned}$$

b. Quelles sont les racines de $B(q)$?

$\boldsymbol{B(q) = 0}$
$\boldsymbol{-(q-20)(q-50) = 0}$
$\boldsymbol{q - 20 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{q - 50 = 0}$
$\boldsymbol{q = 20}$ **ou** $\boldsymbol{q = 50}$
Les racines de $\boldsymbol{B(q)}$ sont $\boldsymbol{x_1 = 20}$ et $\boldsymbol{x_2 = 50}$.

3. a. Résoudre $B(q) > 0$

q	0		20		50		60
$B(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boldsymbol{a < 0}$

$S =]20\,;50[$

b. En déduire les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait du bénéfice.

La chocolaterie de Charlie fait des bénéfices quand elle produit entre 20 et 50 tonnes de chocolats.

4. a. Donner le tableau de variation de la fonction B.

$\boldsymbol{q}$	0		35		60
B	-1000	$\nearrow$	225	$\searrow$	-400

$\boldsymbol{a < 0}$

b. Pour quelle quantité q, le bénéfice est maximal, quel est son montant ?

Le bénéfice est maximal pour $\boldsymbol{q = 35}$. Ce bénéfice est de 225 (unités ???) €

Exercice 37 : Problème : Second degré

Une salle de spectacle peut contenir jusqu'à 5000 personnes. Pour organiser un concert, le gestionnaire de cette salle doit remplir cette salle à au moins 80%.

D'après une étude, il estime que le nombre de spectateurs est donné par :

$$g(x) = -x^2 + 30x + 5000$$

où x est le prix d'une place de spectacle et $g(x)$ le nombre de places achetées.

Il veut alors exploiter cette étude pour déterminer les différents prix de la place qui lui permettront de remplir sa salle à au moins 80% de sa capacité maximale et ainsi pouvoir organiser le concert.

1. Quel est le nombre de places achetées par les clients si le prix de la place est fixé à 10€ ? 30 € ?
2. Vérifier que :
$$-x^2 + 30x + 1000 = (x+20)(50-x).$$
3. Résoudre l'inéquation $g(x) > 4000$ puis répondre au problème posé.

Exercice 38 : Problème : Second degré

L'empreinte carbone est un indicateur des émissions de gaz à effet de serre qui intègre les émissions directes des ménages français, de la production nationale et celles associées aux produits importés. On étudie les émissions de CO_2 entre 1995 et 2015. Les émissions sont exprimées en million de tonnes équivalent CO_2 (Mt eq CO_2). On modélise l'évolution de ces émissions en fonction du temps écoulé depuis 1995, exprimés en années, par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 39] par :

$$*f(x) = -0{,}8x^2 + 19{,}2\,x + 468.$$

1) Montrer que $f(x) = -0{,}8\,(x-39)(x+15)$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{-0,8\,(x-39)(x+15)} &= \boldsymbol{-0,8(x^2+15x-39x-585)}\\ &= \boldsymbol{-0,8(x^2-24x-585)}\\ &= \boldsymbol{-0,8x^2+19,2x+468}\\ &= \boldsymbol{f(x)}\end{aligned}$$

En déduire les deux racines du polynôme sur $\mathbb{R}$.

1ère méthode :	**2ème méthode :**
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ **avec** $x_1 = 39$ **et** $x_2 = -15$	$f(x) = 0$ $-0,8\,(x-39)(x+15) = 0$ $x - 39 = 0$ **ou** $x + 15 = 0$ $x = 39$ **ou** $x = -15$ **Les racines de** $f(x)$ **sont** $x_1 = 39$ **et** $x_2 = -15$

2) Déterminer le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\ 39]$.

$$\alpha = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{39-15}{2} = 12$$

$$\beta = f(12) = -0,8\,(12-39)(12+15) = \frac{2916}{5} = 583,2$$

x	0	12	39
f	468 ↗	$\frac{2916}{5}$	↘ 0

3) La France s'est engagée, d'ici 2030, à réduire ses émissions de CO_2 de 40% par rapport à leur niveau en 1995, estimé à 468 Mt eq CO_2.

D'après ce modèle, l'engagement de la France sera-t-il tenu en 2030? Justifier la réponse.

Pour $x = 0$ on est 1995

Donc à $x = 35$ on est en 2030

$f(35) = -0,8\,(35-39)(35+15) = 225$ **Mt eq CO_2 en 2030.**

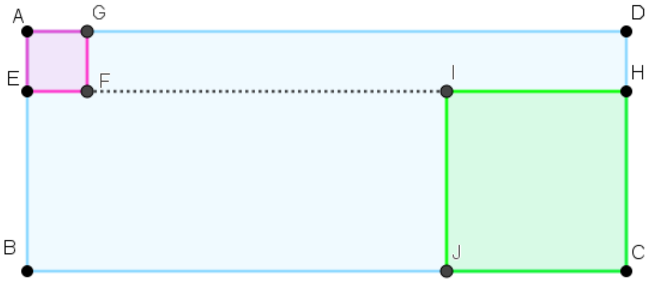
Réduire de 40% revient à multiplier $1 - \frac{40}{100} = 0,6$.

Ainsi on cherche à avoir $468 \times 0,6 = 280,8$ **Mt eq CO_2**

$225 < 280,8$ **ainsi l'engagement de la France sera tenu en 2030.**

Exercice 39 : Problème : Géométrie et second degré

Sur une parcelle rectangulaire ABCD de 4 mètres par 10 mètres, on veut délimiter deux parterres de fleurs carrés, dans deux coins opposés (AEFG et CHIJ sur le schéma ci dessous), tels que les points E, F, I et H soient alignés.
On pose AB = 4 , AD = 10 et AE = x, avec $0 < x < 4$.



1a) Exprimer en fonction de x l'aire du carré AEFG et celle du carré CHIJ.
1b) En déduire l'aire de la zone non fleurie.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;4] par $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.
a) Vérifier que -2 est racine de f.
b) En déduire f(x) sous forme factorisée.
c) Déterminer les variations de f.
d) Comment faut-il construire ces deux carrés pour l'aire de la zone non fleurie soit maximale?

Exercice 40 : Problème : Second degré

La grue blanche, un oiseau d'Amérique du Nord, était une espèce en voie de disparition au tournant du XXème siècle. En 1938, il en restait seulement 15. Les chances de les préserver étaient maigres mais aujourd'hui il y en a environ 600.
1) Le nombre de grues blanches au début du XXème siècle est donné dans le tableau ci-après. une espèce est considérée en "danger critique d'extinction" si sa population a diminué de plus de 80% sur la période des dix années précédentes. Peut-on considérer que c'est la cas en 1938?

2) Avec les programmes de protection mis en œuvre depuis 1938, l'évolution de la population de grues blanches à partir de 1938 peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle [38;100] par :

$$f(t) = 0{,}08t^2 - 7{,}2\,t + 173$$

où t est le temps écoulé en années à partir de 1900 (l'année 1938 correspond à t = 38).

Compléter le tableau de valeurs en arrondissant les résultats à l'unité.

Rang de l'année*	10	20	28	30	38	40	45	50	60	80	100
Nbre de grues	200	150	90	44							

*le rang 0 correspond à l'année 1900.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(t) = 173$.
b) En considérant les propriétés de symétrie de la parabole représentant la fonction *f,* en déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son extremum et dresser son tableau de variation sur l'intervalle [38;100].
c) Déterminer, selon ce modèle, l'année pour laquelle le nombre de grues blanches a été minimal.
4) A l'aide de la calculatrice, estimer l'année à partir de laquelle le nombre de grues aura atteint l'effectif de 1910.

Exercice 41 : Problème : Second degré

Au cours d'une compétition d'athlétisme, un athlète lance un javelot. L'étude des divers mouvements subis par ce javelot montre que, au bout de t secondes, il atteint une hauteur, exprimée en mètres, donnée par l'expression :

$$f(t) = -5t^2 + 17t + 2.$$

1) Pour des problèmes liés à des panneaux publicitaires, l'organisateur de la compétition se demande si le javelot montera à plus de 16 mètres.

a) Ecrire l'inéquation liée à ce problème.

b) Soit le polynôme $g(t) = f(t) - 16$. Vérifier que 2 est une ravine de $g(t)$.

c) En déduire une factorisation de $g(t)$.

d) Construire le tableau de signes de $g(t)$.

e) Répondre à la question posée par l'organisateur.

2) On veut savoir au bout de combien de temps le javelot va toucher le sol.

a) En utilisant la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude une seconde de l'instant t_0 où le javelot touche le sol.

b) On veut déterminer par balayage un encadrement de t_0 d'amplitude 10^{-3}.

Compléter l'algorithme ci-contre afin que la variable a contienne en fin d'algorithme une valeur approchée de t_0 à 10^{-3}près par défaut.

c) A l'aide de la calculatrice et/ou de l'algorithme, donner l'encadrement de t_0 demandé.

a $\leftarrow 3$
p $\leftarrow 10^{-3}$
Tant que ....
    a $\leftarrow$ ....
Fin Tant que
a $\leftarrow$ ....

c) Créer la fonction h sous Python et traduire l'algorithme de la question 2b) .

def h(t) :

a =

p =

Exercice 42 : Problème : 3ème degré

Une usine produit chaque mois entre 0 et 50 machines agricoles. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 50] par :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2489{,}25x - 10171{,}25.$$

L'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.

1) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 50]:

$$f(x) = (x-5)(x-39{,}5)(x-51{,}5)$$

$$\begin{aligned}(x-5)(x-39,5)(x-51,5) &= (x^2-39,5x-5x+197,5)(x-51,5)\\ &= (x^2-44,5x+197,5)(x-51,5)\\ &= x^3-51,5x^2-44,5x^2+2291,75x+197,5x-10171,25\\ &= x^3-96x^2+2489,25x-10171,25\\ &= f(x)\end{aligned}$$

2) Etudier le signe de $f(x)$.

On résout $f(x)=0$

$(x-5)(x-39,5)(x-51,5)=0$

$x-5=0$ **ou** $x-39,5=0$ **ou** $x-51,5=0$

$x=5$ **ou** $x=39,5$ **ou** $x=51,5$ **(impossible)**

x	0		5		39,5		50	
$x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$		*m=1>0*
$x-39,5$		$-$	|	$-$	0	$+$		*m=1>0*
$x-51,5$		$-$	|	$-$	|	$-$		*m=1>0*
$(x-5)(x-39,5)(x-51,5)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

3) En déduire le nombre de machines agricoles que l'entreprise doit produire pour réaliser des profits.

$f(x)>0$ pour $x\in]5\,;39,5[$ ainsi l'entreprise doit produire entre 5 et 39 (on ne peut avoir 39,5 machines) machines agricoles pour réaliser des profits.

Exercice 43 : Problème : 3ème degré

Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 85 tonnes de produit chimique. Le coût de fabrication de q tonnes de ce produit, exprimé **en centaines d'euros**, est donné par la fonction C définie par :

$C(q) = 0{,}01q^3 - 1{,}04q^2 + 36{,}43q + 40$ où q est compris entre 0 et 85.

Chaque tonne de ce produit est vendue 1900€. On note R(q) la recette, et B(q) le bénéfice, en centaines d'euros, obtenus pour la vente mensuelle d q tonnes de ce produit.

1) On fait varier q de 0 à 85 avec un pas de 1. On souhaite créer une feuille de calcul comme ci-dessous, présentant le coût de fabrication, la recette et le bénéfice réalisés.

	A	B	C	D
1	q	C(q)	R(q)	B(q)
2	0	40	0	-40
3	1	75,4	19	-56,4
4	2	108,78	38	-70,78

a) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule B2 pour obtenir les valeurs du coût de fabrication?

b) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule C2 pour obtenir les valeurs de la recette?

c) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule C2 pour obtenir les valeurs du bénéfice?

2) a) Déterminer l'expression de la fonction $R(q)$.

$\boldsymbol{R(q)=19q}$

Attention : On travaille en centaine d'euros.

b) En déduire une expression du bénéfice $B(q)$

$$\begin{aligned}&B(q)=R(q)-C(q)\\ &=19q-\left(0,01q^3-1,04q^2+36,43q+40\right)\\ &=19q-0,01q^3+1,04q^2-36,43q-40\\ &=-0,01q^3+1,04q^2-17,43q-40\end{aligned}$$

c) A l'aide d'un tableur et/ou de votre calculatrice, conjecturer, à une tonne près, la quantité de produit Q_0qu'il faut produire et vendre mensuellement pour réaliser le plus grand bénéfice.

d) En modifiant le pas de variation de la variable q, donner une valeur approchée à 0,1 tonne près de Q_0.

3) On veut à présent déterminer les valeurs de q pour lesquelles les pertes mensuelles dépassent 4000 euros.
a) Ecrire l'inéquation liée à ce problème.

$\boldsymbol{B(q) < -40}$
$\boldsymbol{-0,01q^3 + 1,04q^2 - 17,43q - 40 < -40}$
$\boldsymbol{-0,01q^3 + 1,04q^2 - 17,43q < 0}$

b) Montrer que l'inéquation s'écrit $-0{,}01q(q-21)(q-83) < 0$.

$\boldsymbol{-0,01q(q-21)(q-83) < 0}$
$\boldsymbol{-0,01q\left(q^2 - 83q - 21q + 1743\right) < 0}$
$\boldsymbol{-0,01q\left(q^2 - 104q + 1743\right) < 0}$
$\boldsymbol{-0,01q^3 + 1,04q^2 - 17,43q < 0}$

c) Répondre à la question posée.

$\boldsymbol{-0,01q(q-21)(q-83) = 0}$
$\boldsymbol{q = 0}$ **ou** $\boldsymbol{q - 21 = 0}$ **ou** $\boldsymbol{q - 83 = 0}$
$\boldsymbol{q = 0}$ **ou** $\boldsymbol{q = 21}$ **ou** $\boldsymbol{q = 83}$

q	0		21		83		85	
$-0,01q$	0	$-$		$-$		$-$		**m=-0,01<0**
$q-21$		$-$	0	$+$		$+$		**m=1>0**
$q-83$		$-$		$-$	0	$+$		**m=1>0**
$-0,01q(q-21)(q-83)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

$\boldsymbol{S =]0\,;21[\cup]83\,;85[}$
Les pertes mensuelles dépassent 4000 euros pour $\boldsymbol{q \in]0\,;21[\cup]83\,;85[}$