Fiche méthode : Complexes

I. Opération

Application 1 : On pose $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 + 5i$. Calculer puis vérifier sur votre machine :

1. $z_1 + z_2 = 1 + 2i + 3 + 5i$
   $= 4 + 7i$
2. $z_1 - z_2 = 1 + 2i - (3 + 5i)$
   $= 1 + 2i - 3 - 5i$
   $= -2 - 3i$
3. $z_1 \times z_2 = (1 + 2i)(3 + 5i)$
   $= 3 + 5i + 6i + 10i^2$
   $= 3 + 11i - 10$
   $= -7 + 11i$
4. $\overline{z_1} = 1 - 2i$
5. $z_1\overline{z_1} = 1^2 + 2^2 = 5$
6. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1+2i} = \frac{(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{1^2+2^2} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3+5i} = \frac{(1+2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3-5i+6i-10i^2}{3^2+5^2} = \frac{3+i+10}{9+25} = \frac{13+i}{34} = \frac{13}{34} + \frac{i}{34}$

Forme algébrique :

- $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- La notation $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Le nombre réel a est appelé partie réelle de z. On notera $\boldsymbol{a = Re(z)}$
- Le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z. On notera $\boldsymbol{b = Im(z)}$
- Si $a = 0$, on dira que z est un imaginaire pur.
- On appelle **conjugué** de z, noté $\boldsymbol{\bar{z}}$, le nombre complexe $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.
- $\boldsymbol{z\bar{z} = a^2 + b^2}$
- Pour mettre un quotient sous forme algébrique **on multiplie par le conjugué du dénominateur** « en haut et en bas »

II. Images et affixes

Application 2 :

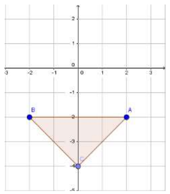
Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$, $z_B = -2 - 2i$ et $z_C = -4i$

Le but est de démontrer la nature du triangle ABC.

1ère méthode :

(a) Donner les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.
Et placer ces points sur le repère.

$A(2\,;-2)$	$B(-2\,;\,-2)$	$C(0\,;-4)$



(b) Calculer les distances AB, AC et BC

Etape 1 : On calcule l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
$= -2 - 2i - (2 - 2i)$
$= -2 - 2i - 2 + 2i$
$= -4$

De la même manière :

$z_{\overrightarrow{AC}} = -2 - 2i$

$z_{\overrightarrow{BC}} = 2 + 2i$

Etape 2 : On en déduit les distances AB, AC et BC

$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{(-4)^2} = 4$

$AC = |z_{\overrightarrow{AC}}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

$BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

(c) En déduire la nature du triangle ABC.

- On remarque que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.
- De plus $AC = BC$ donc le triangle ABC est aussi isocèle en C.

Conclusion : Le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

Image et affixe :

- A tout nombre complexe $z = \boldsymbol{a} + i\,\boldsymbol{b}$, on associe le point M de coordonnées $(\boldsymbol{a}\,; \boldsymbol{b})$
- M est appelé **image de z**
- z est appelé **affixe de M**
- **Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :**
  $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$
- $\boldsymbol{AB = |z_B - z_A|}$
- **Si $\overrightarrow{AB}\binom{a}{b}$ alors** $AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **L'affixe du milieu I du segement $[AB]$ est :**
  $\boldsymbol{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$

III. Produit scalaire

2ème méthode :

(a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -2-(-4) \end{pmatrix}$ cad $\overrightarrow{CA}\binom{2}{2}$

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -2-0 \\ -2-(-4) \end{pmatrix}$ cad $\overrightarrow{CA}\binom{-2}{2}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 2 \times (-2) + 2 \times 4$
$= -4 + 4$
$= 0$

Coordonnées de vecteur :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Norme :

Si $\overrightarrow{AB}\binom{x}{y}$ alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

On appelle $\|\overrightarrow{AB}\|$ **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Produit scalaire :

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.

Le **produit scalaire** est le nombre réel :
$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

(b) Déterminer la nature du triangle ABC.

- D'après la question précédente $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$ ainsi $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont **orthogonaux** donc (CA) est **perpendiculaire** à (CB) : le triangle ABC est rectangle en C.
- $CA = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ et $CB = \sqrt{8}$. Ainsi $AC = BC$ donc le triangle ABC est aussi isocèle en C.

Conclusion : Le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

IV. Module et argument d'un nombre complexe

On considère l'équation (E) d'inconnue z : $(2 - i)z = 2 - 6i$.

1. Montrer, **en résolvant dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)**, que la solution de (E) est $z_1 = 2 - 2i$.

$(2 - i)z = 2 - 6i \Leftrightarrow z = \frac{2-6i}{2-i} \Leftrightarrow z = \frac{2-6i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$
$\Leftrightarrow z = \frac{(2-6i)(2+i)}{2^2+1^2} \Leftrightarrow z = \frac{4+2i-12i-6i^2}{5}$
$\Leftrightarrow z = \frac{10-10i}{5} \Leftrightarrow z = 2 - 2i$

2. Déterminer la forme trigonométrique de $z_1 = 2 - 2i$.

Module :

$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

$|z_1| = \sqrt{8}$

$|z_1| = 2\sqrt{2}$

Argument :

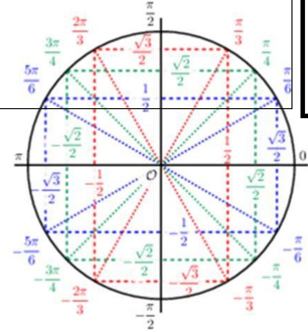
θ vérifie le système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z_1|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z_1|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\arg(z_1) = \theta = -\frac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique :

$z_1 = |z_1|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$



3. Déterminer la forme algébrique de :

$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z = a + ib}$ un nombre complexe non nul.

Module :

On appelle **module** de z, que l'on note $|\boldsymbol{z}|$, la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{OM} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$.

Argument :

On appelle **argument** de z, un réel $\boldsymbol{\theta}$ (ou $Arg(z)$), tel que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos(\theta)} = \frac{a}{|z|} \\ \boldsymbol{\sin(\theta)} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,, \overrightarrow{OM})$ à 2π près.

Forme trigonométrique :

On appelle **forme trigonométrique** du nombre complexe z, l'écriture $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.