Fiche méthode : Fonction exponentielle

I. Propriétés algébriques

Application 1 : Propriétés algébriques

Simplifier les expressions suivantes, pour tout réel x :

$A = e^{x+2}e^{-x+2}$ $A = e^{x+2-x+2}$ $A = e^4$	$B = \dfrac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$ $B = e^{(-2x+1)-(-x+1)}$ $B = e^{-2x+1+x-1}$ $B = e^{-x}$
$C = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$ $C = \dfrac{(e^x - 1)(e^{-x} + 1) + (e^{-x} - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$ $C = \dfrac{e^0 + e^x - e^{-x} - 1 + e^0 + e^{-x} - e^x - 1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$ $C = 0$	

Propriétés algébriques

Soient a et b deux réels. Soit n un entier, alors :

1) $e^0 = 1$
2) $e^1 = e$
3) $e^{a+b} = e^a e^b$
4) $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
5) $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
6) $(e^a)^n = e^{na}$

Remarque :
$e \approx 2{,}718281828$. C'est un nombre irrationnel.
.

Fonction exponentielle :
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x$$

II. Développement et identitsé remarquables

Application 2 : Développement et identités remarquables

t désigne un nombre réel. Développer et réduire chaque expression.

1. $A = e^{2t}(e^t - e^{-2t})$

$A = e^{2t}e^t - e^{2t}e^{-2t}$
$A = e^{3t} - 1$

I. $B = 3e^t(e^t - e^{-t}) - 5e^{2t}$

$B = 3(e^t)^2 - 3e^t e^{-t} - 5e^{2t}$
$B = 3e^{2t} - 3 - 5e^{2t}$
$B = -2e^{2t} - 3$

/. $C = (e^t - 1)^2$

$C = (e^t)^2 - 2e^t + 1$
$C = e^{2t} - 2e^t + 1$

/. $D = (e^{3t} - 5)(e^{3t} + 5)$

$D = (e^{3t})^2 - 5^2$
$D = e^{6t} - 25$

III. Signe

Signe :
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Ainsi pour tout réel x on a $\boldsymbol{e^x > 0}$.

Application 3 : Signe

Déterminer le signe des expressions données sur $\mathbb{R}$.

$$A(x) = 5e^x - xe^x$$

$A(x) = e^x(5 - x)$
Comme pour tout réel x, $e^x > 0$ alors $A(x)$ est du signe de $5 - x$.

$5 - x = 0$
$x = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	

Signe de $m = -1 < 0$ à droite du « zéro ».

$$D(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

$D(x) = e^{-x}(x - x^2)$
Comme pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ alors $D(x)$ est du signe de $x - x^2$.

$x - x^2 = 0$
$x(1 - x) = 0$
$x = 0$ ou $1 - x = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$D(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines.

IV. Variations et tangentes

Application 4 : Equation de tangente :

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

$f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$

Equation de la tangente T_0 à C_e au point $A(0\,;1)$:
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$y = e'(0)(x - 0) + e^0$
$y = 1 \times x + 1$
$y = x + 1$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1.

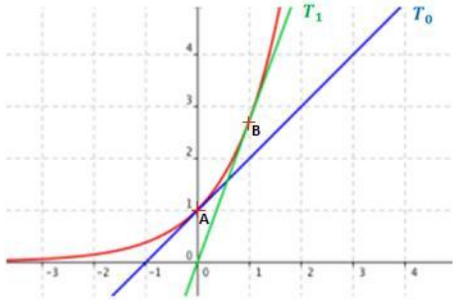
$f(1) = e$ et $f'(1) = e$

Equation de la tangente T_1 à C_e au point $B(1\,;e)$:
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
$y = e \times (x - 1) + e$
$y = ex$

Variations :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp	$\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	

Courbe :



V. Equation et inéquation

Equation et inéquation
1) Pour tous réels a et b, $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
2) Pour tous réels a et b, $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

Application 5 : Equations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $e^{x+1} - e^{2x+5} = 0$ b) $e^{3-x} = 1$

$e^{x+1} = e^{2x+5}$ $x + 1 = 2x + 5$ $x - 2x = 5 - 1$ $-x = 4$ $x = -4$ $S = \{-4\}$	$e^{3-x} = e^0$ $3 - x = 0$ $x = 3$ $S = \{3\}$

c) $(e^x + 5)(e^x - 1) = 0$

$e^x + 5 = 0$ ou $e^x = -5 < 0$ (impossible) ou $S = \{0\}$	$e^x - 1 = 0$ $e^x = 1$ $x = 0$

Application 6 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $e^{2x-1} \geq e^{x+7}$ b) $e^{3x+4} \leq e^{5x-6}$

$2x - 1 \geq x + 7$ $2x - x \geq 7 + 1$ $x \geq 8$ $S = [8\,;+\infty[$	$3x + 4 \leq 5x - 6$ $3x - 5x \leq -6 - 4$ $-2x \leq -10$ $x \geq \dfrac{-10}{-2}$ car $-2 < 0$ $x \geq 5$ $S = [5\,;+\infty[$

c) $e^{2x} + 2 \leq 0$ d) $e^x - 1 \leq 0$

$e^{2x} \leq -2$ Impossible $S = \emptyset$	$e^x \leq 1$ $e^x \leq e^0$ $x \leq 0$ $S =]-\infty\,;0]$

VI. Dérivées et exponentielle

Dérivée :
Soit f la fonction exponentielle. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
$$\boldsymbol{f'(x) = e^x = f(x)}$$
La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Application 7 : Dérivées
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 5x^3 - 9e^x$
$f'(x) = 15x^2 - 9e^x$

b) $g(x) = e - e^x$
$g'(x) = -e^x$

Produit :
c) $h(x) = (2x-7)e^x = \boldsymbol{u(x)v(x)}$ avec :

$u(x) = 2x - 7$ $\quad v(x) = e^x$
$u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = e^x$

$\boldsymbol{h'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$h'(x) = 2e^x + e^x(2x-7)$
$h'(x) = 2e^x + 2xe^x - 7e^x$
$h'(x) = 2xe^x - 5e^x$
$h'(x) = e^x(2x-5)$

Quotient :
d) $k(t) = \dfrac{1+e^t}{e^t} = \dfrac{\boldsymbol{u(t)}}{\boldsymbol{v(t)}}$ avec :

$u(t) = 1 + e^t$ $\quad v(t) = e^t$
$u'(t) = e^t$ $\quad v'(t) = e^t$

$$k'(t) = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{v^2(t)}$$
$$k'(t) = \frac{e^te^t - e^t(1+e^t)}{(e^t)^2}$$
$$k'(t) = \frac{e^te^t - e^t - e^te^t}{(e^t)^2}$$
$$k'(t) = \frac{-e^t}{(e^t)^2}$$

Application 8 : Dérivée et composée
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{5x+1}$.
Déterminer $f'(x)$.

1ère méthode :
$a = 5$
$f'(x) = ae^{ax+b}$
$f'(x) = 5e^{5x+1}$

2ème méthode :
$f(x) = e^{u(x)}$ avec : $\quad u(x) = 5x + 1$
$\quad u'(x) = 5$

$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$f'(x) = 5e^{5x+1}$

Composée (affine) :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ avec a et b deux réels.
f est dérivable sur un intervalle $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :
$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

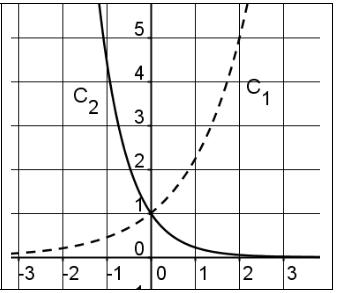
Composée (générale) :
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

VII. Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$

Application 9 : Fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{0,8x} \text{ et } g(x) = e^{-1,5x}.$$

On a représenté ci-contre ces deux fonctions.
Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

$0,8 > 0$ ainsi la fonction f est croissante : C_1.
$-1,5 < 0$ ainsi la fonction g est décroissante : C_2.



VIII. Etude de fonctions

Application 10 : Avec un produit et fonction affine
f est la fonction définie sur $[-3\,;1]$ par :
$$f(x) = (5-4x)e^x$$
Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout réel x, $f(x) = \boldsymbol{u(x)v(x)}$ avec :
$u(x) = 5 - 4x$ $\quad v(x) = e^x$
$u'(x) = -4$ $\quad v'(x) = e^x$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$f'(x) = -4e^x + e^x(5-4x)$
$f'(x) = e^x(-4+5-4x)$
$f'(x) = e^x(-4x+1)$

Comme pour tout réel appartenant à $[-3\,;1]$ $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-4x+1$

On résout
$-4x + 1 = 0$
$x = \frac{1}{4}$

x	-3		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$17\cdot e^{-3}$	↗	$4\cdot e^{\frac{1}{4}}$	↘	e

Application 11 : Avec une composée
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 5e^{-4,5x} + 6$$
Démontrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g(x) = 5e^{u(x)} + 6$ avec :
$u(x) = -4,5x$
$u'(x) = -4,5$

$g'(x) = 5u'(x)e^{u(x)} + 0$
$g'(x) = 5 \times -4,5e^{-4,5x}$
$g'(x) = -22,5e^{-4,5x}$

Comme pour tout réel, $e^{-4,5x} > 0$ ainsi $g'(x)$ est du signe de $-22,5 < 0$ ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Application 12 : Produit et fonction trinôme
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x^2-4)e^x$$
Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout réel x, $f(x) = \boldsymbol{u(x)v(x)}$ avec :
$u(x) = x^2 - 4$ $\quad v(x) = e^x$
$u'(x) = 2x$ $\quad v'(x) = e^x$

$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$
$f'(x) = 2xe^x + e^x(x^2-4)$
$f'(x) = e^x(2x + x^2 - 4)$
$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

Comme pour tout réel $e^x > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 4$

$a = 1\,; b = 2$ et $c = -4$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 2^2 - 4 \times 1 \times -4$
$= 20 > 0$
Et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = -1-\sqrt{5} \qquad x_2 = -1+\sqrt{5}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}-1$		$\sqrt{5}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$2\cdot\sqrt{5}\cdot e^{-\sqrt{5}-1} + 2\cdot e^{-\sqrt{5}-1}$	↘	$2\cdot e^{\sqrt{5}-1} - 2\cdot\sqrt{5}\cdot e^{\sqrt{5}-1}$	↗	$+\infty$

Application 13 : Quotient et fonction trinôme
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$$
Dresser le tableau de variations de g.

Pour tout réel x, $\quad g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :
$u(x) = x^2 + 2x$ $\quad v(x) = e^x$
$u'(x) = 2x + 2$ $\quad v'(x) = e^x$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$$
$$g'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x)}{(e^x)^2}$$
$$g'(x) = \frac{e^x\left(2x+2-(x^2+2x)\right)}{(e^x)^2}$$
$$g'(x) = \frac{e^x(2x+2-x^2-2x)}{e^{2x}}$$
$$g'(x) = \frac{e^x(2-x^2)}{(e^x)^2}$$

Comme pour tout réel, $e^x > 0$ et $e^{2x} > 0$ ainsi $g'(x)$ est du signe de $2 - x^2$.

On résout $2 - x^2 = 0$
$x^2 = 2$
$x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2\cdot e^{\sqrt{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\sqrt{2}}$	↗	$2^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\sqrt{2}} + 2\cdot e^{-\sqrt{2}}$	↘	0