Fiche méthode : Fractions - Puissances - Racine carré

I. Fractions

Application 1 : Quotients égaux

$$\frac{-35}{28}=\frac{-35\div 7}{28\div 7}=\frac{-5}{4}=-\frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{5{,}4}=\frac{3\times 10}{5{,}4\times 10}=\frac{30}{54}=\frac{30\div 2}{54\div 2}=\frac{15}{27}=\frac{15\div 3}{27\div 3}=\frac{5}{9}$$

Application 2 : Fractions irréductibles

Ecrire sous forme de fraction irréductible.

$$A=\frac{4}{6} \qquad B=-\frac{16}{24} \qquad C=\frac{36}{16}$$

$$A=\frac{\cancel{2}\times 2}{\cancel{2}\times 3} \qquad B=-\frac{\cancel{8}\times 2}{\cancel{8}\times 3} \qquad C=\frac{\cancel{4}\times 9}{\cancel{4}\times 4}$$

$$A=\frac{2}{3} \qquad B=-\frac{2}{3} \qquad C=\frac{9}{4}$$

Application 3 : Mise sous le même dénominateur

Mettre $\frac{11}{21}$ et $-\frac{4}{7}$ sur le même dénominateur.

$$-\frac{4}{7}=-\frac{4\times 3}{7\times 3}=-\frac{12}{21}$$

Mettre $\frac{1}{6}$ et $\frac{3}{4}$ sur le même dénominateur.

$$\frac{1}{6}=\frac{1\times 2}{6\times 2}=\frac{2}{12}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12}$$

Application 4 : Somme et différence de fractions

$$A=\frac{2}{3}+\frac{7}{9}$$
$$A=\frac{2\times \mathbf{3}}{3\times \mathbf{3}}+\frac{7}{9}$$
$$A=\frac{6}{9}+\frac{7}{9}$$
$$A=\frac{6+7}{9}$$
$$A=\frac{13}{9}$$

$$B=\frac{5}{8}-2$$
$$B=\frac{5}{8}-\frac{2}{1}$$
$$B=\frac{5}{8}-\frac{2\times \mathbf{8}}{1\times \mathbf{8}}$$
$$B=\frac{5}{8}-\frac{16}{8}$$
$$B=\frac{5-16}{8}$$
$$B=-\frac{11}{8}$$

$$C=\frac{4}{15}-\frac{3}{7}$$
$$C=\frac{4\times\mathbf{7}}{15\times\mathbf{7}}-\frac{3\times\mathbf{15}}{7\times\mathbf{15}}$$
$$C=\frac{28}{105}-\frac{45}{105}$$
$$C=\frac{28-45}{105}$$
$$C=\frac{17}{105}$$

Application 5 : Produits et quotients de fractions

$$A=\frac{2}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{2\times 7}{3\times 9}=\frac{14}{27}$$

$$B=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{1}{3}\times\frac{7}{3}=-\frac{1\times 7}{3\times 3}=-\frac{7}{9}$$

$$C=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{5}=\frac{3\times 1\times 11}{2\times 2\times 5}=\frac{33}{20}$$

$$D=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

$$E=\frac{2}{11}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{11}\times\frac{4}{3}=\frac{2\times 4}{11\times 3}=\frac{8}{33}$$

$$F=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{7}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{7}}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{1\times 7}{3\times 5}=\frac{7}{15}$$

$$G=\frac{2}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{\frac{3}{2}}=-2\times\frac{2}{3}=-\frac{2\times 2}{3}=-\frac{4}{3}$$

Quotients égaux :

Un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise **le numérateur et le dénominateur** par **un même nombre non nul.**

Autrement dit :

Soient a, b et c trois nombres avec $b\neq 0, c\neq 0$.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}} \qquad \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}\div\boldsymbol{c}}$$

Simplification et fractions irréductibles

Pour simplifier une fraction, on cherche un nombre qui soit un diviseur du numérateur et du dénominateur (autre que 1).

Lorsque la fraction est simplifiée au maximum, elle est irréductible.

Réduire des fractions au même dénominateur

Pour trouver un dénominateur commun, on cherche un nombre qui soit un multiple de chaque dénominateur (de préférence le plus petit).

Remarque :

Le produit des dénominateurs de plusieurs fractions est un dénominateur commun possible (mais ce n'est pas forcément le plus petit).

Somme et différence de fractions :

- Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on conserve le dénominateur commun.
  Pour tous nombres a, b et c (avec c non nul) :
  $$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \qquad \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$$
- Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents, on doit d'abord les transformer pour qu'elles aient le même dénominateur puis on applique la règle précédente.

Produit de deux nombres en écriture fractionnaire :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres a, b, c et d (avec b et d non nuls) :

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\times\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}} \qquad \boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$$

Quotient de deux nombres en écriture fractionnaire :

Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.

Pour tous nombres a, b, c et d $(b, c$ et d non nuls) :

$$\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{a}\times\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} \qquad \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\div\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}=\frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\times\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$$

II. Puissance

Ecrire sous la forme a^n où a et n sont des entiers relatifs.

Application 6 :

1) $A=5\times 5^{-3}=5^{1-3}=5^{-2}$
2) $B=(2^3)^5=2^{3\times 5}=2^{15}$
3) $C=7\times 7^2=7^{1+2}=7^3$
4) $D=(3^2)^{-5}=3^{2\times(-5)}=3^{-10}$

Application 7 :

1) $A=(-5)^3\times(-5)^7=(-5)^{3+7}=(-5)^{10}$
2) $B=(-3)^{-2}\times(-3)^{-6}=(-3)^{-2-6}=(-3)^{-8}$
3) $C=(-2)^{-3}\times(-2)^4=(-2)^{-3+4}=(-2)^1=-2$
4) $D=(3^2)^5\times(-2)^5=\left(3^2\times(-2)\right)^5=(-18)^5$

Application 8 :

1) $A=\frac{2^7}{2^3}=2^{7-3}=2^4$
2) $B=\frac{2^3}{2^5}=2^{3-5}=2^{-2}$
3) $C=\frac{15^{-5}}{3^{-5}}=\left(\frac{15}{3}\right)^{-5}=5^{-5}$
4) $D=(2^3)^4\times\frac{2}{2^{-7}}=2^{3\times 4+1+7}=2^{20}$

Application 9 :

1) $A=\frac{3^5\times 3^2}{(3\times 3^{-2})^{-1}}=\frac{3^{5+2}}{(3^{1-2})^{-1}}=\frac{3^7}{(3^{-1})^{-1}}$
$=3^7\times 3^{-1}=3^{7-1}=3^6$
2) $B=\frac{7\times 7^{-3}}{7^{-1}\times(7^2)^{-3}}=\frac{7^{1-3}}{7^{-1+2\times(-3)}}=\frac{7^{-2}}{7^{-7}}=7^{-2+7}=7^5$
3) $C=\frac{12^2\times 3^2}{9^2}=\left(\frac{12\times 3}{9}\right)^2=\left(\frac{3\times 4\times 3}{3\times 3}\right)^2=4^2$
4) $D=\frac{5^7\times 3^7}{15^7}=\left(\frac{5\times 3}{15}\right)^7=1^7=1$

Puissance :

Soit a un nombre et n un nombre entier naturel,

1er cas : Si $a\neq 0$, la puissance d'exposant n du nombre a est le nombre noté a^n et défini par :

- $a^0=1$ et $a^1=a$
- si $n\geq 2$ alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}\times\ldots\times\boldsymbol{a}$ (avec n facteurs a)

2ème cas : Si $a=0$ et si n est un entier supérieur ou égal à 1, $0^n=0$

Exemples : $3^4=\underbrace{3\times 3\times 3\times 3}_{\text{4 fois}}$ $\quad 2^0=1 \quad 3^1=3$

La puissance d'exposant $-n$ du nombre $a\neq 0$ est le nombre noté a^{-n} et défini par : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Autrement dit : le nombre a^n est l'inverse de a^n.

En particulier $a^{-1}=\frac{1}{a}$.

Exemples : $5^{-1}=\frac{1}{5} \qquad 7^{-2}=\frac{1}{7^2}=\frac{1}{49}$

Cas particuliers : les puissances de 10

Si n est un entier naturel, $10^n=1\mathbf{000}\ldots\mathbf{0}$ (avec n zéros) et $10^{-n}=\frac{1}{10^n}=\mathbf{0},\mathbf{0}\ldots\mathbf{01}$(avec n zéros)

Exemples : $10^3=1000 \qquad 10^{-5}=\frac{1}{10^5}=0{,}00001$

Propriétés :

a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs :

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \qquad (a^m)^n=a^{m\times n}$$

$$(ab)^n=a^n\times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

III. Racine carrée

Application 11 : Déterminer sans calculatrice :

a) $\sqrt{4{,}5}\times\sqrt{2}=\sqrt{4{,}5\times 2}=\sqrt{9}=3$
b) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$
c) $\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{2\times 32}=\sqrt{64}=8$
d) $\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2$
e) $\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$

Application 11 :

Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers et b le plus petit possible.

a) $\sqrt{12}$	$=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
b) $\sqrt{50}$	$=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{40}$	$=\sqrt{4\times 10}=\sqrt{4}\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$
d) $\sqrt{63}$	$=\sqrt{9\times 7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$
e) $\sqrt{99}$	$=\sqrt{9\times 11}=\sqrt{9}\times\sqrt{11}=3\sqrt{11}$

Racine carrée :

Soit a un nombre positif,

On appelle racine carrée de a, notée : $\sqrt{a}$ le nombre positif dont le carré est a.

Le symbole $\sqrt{\ }$ est appelé **radical**.

$$\sqrt{12}\approx 3{,}4641$$

Valeur exacte *Valeur approchée*

La racine carrée d'un nombre **négatif** n'existe pas !

Propriétés :

Pour tous nombres a et b positifs :

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\boldsymbol{a} \qquad \left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^2=\boldsymbol{a}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}=\sqrt{\boldsymbol{a}}\times\sqrt{\boldsymbol{b}} \qquad \sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}} \quad \text{avec } b\neq 0$$

Attention : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Mais on sait que : $\sqrt{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}<\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}$