Chapitre : Dérivation (3) : Fonctions dérivées (compléments)

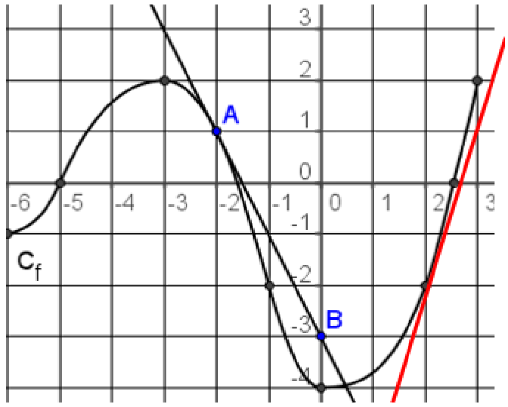
Exercice 1 :

Soit f une fonction dont on donne la représentation graphique C_f ci-dessous.
La droite (AB) est la tangente à C_f au point A d'abscisse -2.
De plus, la courbe admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses -3 et 0.

1) Déterminer les valeurs des nombres suivants :

$f(-2) = 1$ $\quad f(0) = -4$ $\quad f'(-2) = -2$ $\quad f'(0) = 0$

Tang. Hor.



2) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = -2 : S = \{-1\,;2\}$

b) $f(x) > -2 :\ S = [-6\,;\ -1[\cup]2\,;3]$

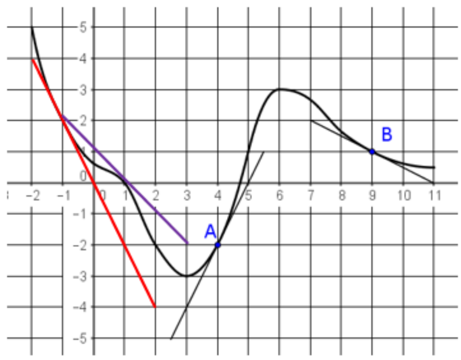
c) $f'(x) = 0 :\ S = \{-3\,;0\}$ **tangentes horizontales**

d) $f'(x) \leq 0 :\ S = [-3\,;0]$ f **décroissante**

3) On sait que $f'(2) = 3$.
Tracer ci-contre la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 2 :

La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2\,;\ 11]$.
Les droites dessinées sont les tangentes à C_f aux points A et B d'abscisses 4 et 9.
De plus, C_f admet aux points d'abscisses 3 et 6 des tangentes horizontales.



1) Déterminer :

$f(4) = -2$ $\quad f(9) = 1$ $\quad f(3) = -3$ $\quad f(6) = 3$

$f'(4) = 2$ $\quad f'(9) = -\frac{1}{2}$ $\quad f'(3) = 0$ $\quad f'(6) = 0$

Tang. Hor. **Tang. Hor.**

2) a) Déterminer une équation de la tangente au point A :

$$y = f'(4)(x-4) + f(4)$$
$$y = 2(x-4) - 2$$
$$y = 2x - 8 - 2$$
$$y = 2x - 10$$

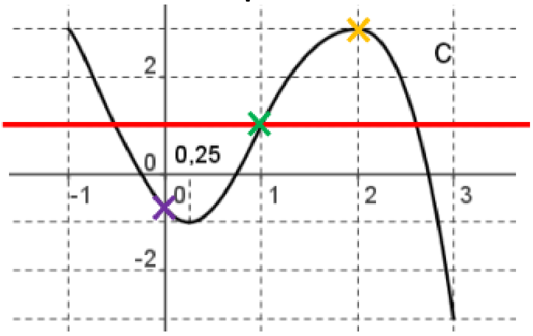
b) Déterminer une équation de la tangente au point B :

$$y = f'(9)(x-9) + f(9)$$
$$y = -\frac{1}{2}(x-9) + 1$$
$$y = -\frac{1}{2x} + \frac{9}{2} + \frac{2}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

3) On sait que $f'(-1) = -2$ et $f'(1) = -1$.
Tracer ci-dessus les tangentes T_{-1} et T_1 aux points C et D d'abscisses -1 et 1.

Exercice 3 : VRAI ou FAUX

f est une fonction définie sur [-1 ; 3]. On donne ci-dessous sa courbe représentative.



1) L'image de 3 par f est -1. Faux $f(3) = -3$

2) 1 a trois antécédents par f. Vrai :
La courbe coupe trois fois la droite horizontale rouge

3) $f'(2) = 3$. Faux :
Au point d'abscisse 3 (en orange sur la figure), la tangente est horizontale donc le coefficient directeur de cette tangente est 0 donc $f'(2) = 0$

4) $f'(1) > 0$. Vrai :
Aux alentours du point d'abscisse 1 (en vert sur la figure), la fonction est strictement croissante donc la dérivée est strictement positive d'où $f'(1) > 0$.

5) $f'(0) > 0$. Faux :
Aux alentours du point d'abscisse 0 (en violet sur la figure), la fonction est strictement décroissante donc la dérivée est strictement négative d'où $f'(0) < 0$.

6) $f'(x) > 0$ sur $[\,1\,;\,3\,]$. Faux :
Sur [2 : 3] , la fonction est strictement décroissante donc la dérivée y est strictement négative.

7) $f(x) < 0$ sur $[-1\,;\,0\,]$. Faux :
Sur [- 1 ; 0], certains nombres ont une image positive (par exemple tous ceux entre -1 et -0,5)

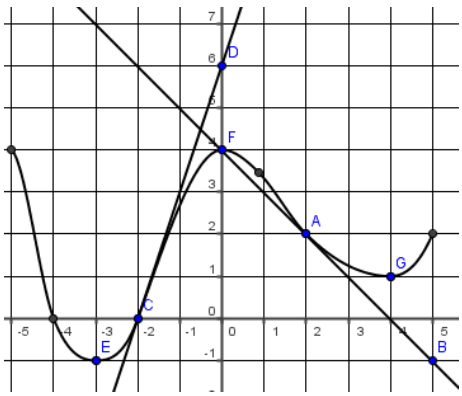
8) $f'(x) < 0$ sur $[-1\,;\,0\,]$. Vrai :
Sur [-1 ; 0] , la fonction est strictement décroissante donc la dérivée y est strictement négative

9) L'inéquation $f'(x) \geq 0$ a pour ensemble de solutions $[\,0,25\,;\,2\,]$. Vrai :
$f'(x) \geq 0$ si la fonction f est croissante donc on a bien $S = [0,25\,;2\,]$

Exercice 4 :

On donne ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [-5 ; 5].

On admet que : - la droite (AB) est tangente à C_f au point A,
- la droite (CD) est tangente à C_f au point C
- les tangentes aux points E, F et G sont horizontales.



1) Déterminer par lecture graphique :

$f(-3) = -1$	$f(-2) = 0$	$f(0) = 4$	$f(2) = 2$
$f'(-3) = 0$	$f'(-2) = 3$	$f'(0) = 0$	$f'(2) = -1$

2) Résoudre graphiquement :

a) $f'(x) = 0$: $S = \{-3\,;0\,;4\}$ (tangentes horizontales)

b) $f'(x) > 0$: $S =]-3\,;0[\cup]4\,;5[$ (f strictement croissante)

c) $f(x) < 0$: $S = [-5\,;\,-4[\cup]-2\,;5]$ (Courbe strictement en dessous de l'axe des abscisses)

d) $f'(x) \leq 0$: $S = [-5\,;\,-3] \cup [0\,;4]$ (f décroissante)

Exercice 5 : Calculer les dérivées des fonctions données.

a) $f(x) = x^4$

$\boxed{f'(x) = 4x^3}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

c) $f(x) = x^7$

$\boxed{f'(x) = 7x^6}$

d) $f(x) = -2x + 5$

$\boxed{f'(x) = -2}$

e) $f(x) = \frac{1}{3}$ *(attention piège !)*

$\boxed{f'(x) = 0}$

f) $f(x) = 1 - 5x$

$\boxed{f'(x) = -5}$

g) $f(x) = \sqrt{3}$

$\boxed{f'(x) = 0}$

h) $f(x) = \sqrt{3}\,x$

$\boxed{f'(x) = \sqrt{3}}$

i) $f(x) = 3x - 1$

$\boxed{f'(x) = 3}$

Exercice 6 : **Calculer les dérivées des fonctions données.**

a) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 4$

$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = 5 + \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

c) $f(t) = t^3 + t^2 - t - 4$

$f'(t) = 3t^2 + 2t - 1$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = -\sqrt{3} + x^2$

$f'(x) = 2x$

f) $f(t) = 4t^3$

$f'(t) = 4 \times 3t^2$
$f'(t) = 12t^2$

g) $f(t) = -\frac{1}{t}$

$f'(t) = -\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

$f'(t) = \frac{1}{t^2}$

h) $f(x) = -2x^7$

$f'(x) = -14x^6$

i) $f(t) = \frac{1}{2}t^4$

$f'(t) = \frac{1}{2} \times 4t^3$
$f'(t) = 2t^3$

j) $f(x) = \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2$

$f'(x) = \frac{2}{3}x$

k) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x + 9$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 2$

l) $f(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$

$f'(x) = 2x + 2 - 3 \times \frac{-1}{x^2}$

$f'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$

m) $f(x) = \frac{2x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 3$

$f'(x) = \frac{2 \times \cancel{5}x^4}{\cancel{5}} - \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} + 2x - 1$
$f'(x) = 2x^4 - x^2 + 2x - 1$

Exercice 7 : **Calculer les dérivées des fonctions données.**

a) $f(x) = (3x^2 + 4)(2x + 1)$

$f(x) = u(x)v(x)$ **avec :**

$u(x) = 3x^2 + 4$ $\quad v(x) = 2x + 1$

$u'(x) = 6x$ $\quad v'(x) = 2$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = 6x(2x + 1) + 2(3x^2 + 4)$

$f'(x) = 12x^2 + 6x + 6x^2 + 8$

$f'(x) = 18x^2 + 6x + 8$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1)(3x^3 - 1)$

$f(x) = u(x)v(x)$ **avec :**

$u(x) = x^2 - x + 1$ $\quad v(x) = 3x^3 - 1$

$u'(x) = 2x - 1$ $\quad v'(x) = 9x^2$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = (2x - 1)(3x^3 - 1) + 9x^2(x^2 - x + 1)$

$f'(x) = 6x^4 - 2x - 3x^3 + 1 + 9x^4 - 9x^3 + 9x^2$

$f'(x) = 15x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = (-x + 2)(2x^2 + x)$

$f(x) = u(x)v(x)$ **avec :**

$u(x) = -x + 2$ $\quad v(x) = 2x^2 + x$

$u'(x) = -1$ $\quad v'(x) = 4x + 1$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = -1(2x^2 + x) + (4x + 1)(-x + 2)$

$f'(x) = -2x^2 - x - 4x^2 + 8x - x + 2$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 2$

d) $f(x) = (x^3 - 4x)(5x - 1)$

$f(x) = u(x)v(x)$ **avec :**

$u(x) = x^3 - 4x$ $\quad v(x) = 5x - 1$

$u'(x) = 3x^2 - 4$ $\quad v'(x) = 5$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

$f'(x) = (3x^2 - 4)(5x - 1) + 5(x^3 - 4x)$

$f'(x) = 15x^3 - 3x^2 - 20x + 4 + 5x^3 - 20x$

$f'(x) = 20x^3 - 3x^2 - 40x + 4$

Exercice 8 : **Calculer les dérivées des fonctions données.**

a) $f(x) = (3x-2)^2$

$f(x) = \left(u(x)\right)^2$ **avec :**

$u(x) = 3x-2$
$u'(x) = 3$

$f'(x) = 2u'(x)u(x)$

$f'(x) = 2 \times 3 \times (3x-2)$

$f'(x) = 6(3x-2)$ *

$f'(x) = 18x-12$

b) $f(x) = (-5x^2+6x+2)^2$

$f(x) = \left(u(x)\right)^2$ **avec :**

$u(x) = -5x^2+6x+2$
$u'(x) = -10x+6$

$f'(x) = 2u'(x)u(x)$

$f'(x) = 2(-10x+6)(-5x^2+6x+2)$ *

$f'(x) = 2(50x^3-60x^2-20x-30x^2+36x+12)$

$f'(x) = 2(50x^3-90x^2+16x+12)$

$f'(x) = 100x^3-180x^2+32x+24$

**** : On peut s'arrêter là***

c) $f(x) = \left(3x^2+\frac{1}{x}\right)^2$

$f(x) = \left(u(x)\right)^2$ **avec :**

$u(x) = 3x^2+\dfrac{1}{x}$

$u'(x) = 6x-\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2u'(x)u(x)$

$f'(x) = 2\left(6x-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(3x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = (3x^2+1)(4x-1)^2$

$f(x) = u(x)\left(v(x)\right)^2$ **avec :**

$u(x) = 3x^2+1$ $\quad v(x) = 4x-1$
$u'(x) = 6x$ $\quad v'(x) = 4$

Notons $g(x) = (4x-1)^2 = \left(v(x)\right)^2$

$g'(x) = 2v'(x)v(x)$

$g'(x) = 2 \times 4(4x-1)$

$g'(x) = 8(4x-1)$

On a donc : $f(x) = u(x)g(x)$

$f'(x) = u'(x)g(x)+g'(x)u(x)$

$f'(x) = 6x(4x-1)^2+8(4x-1)(3x^2+1)$

$f'(x) = (4x-1)[6x(4x-1)+8(3x^2+1)]$

$f'(x) = (4x-1)[\,24x^2-6x+24x^2+8]$

$f'(x) = (4x-1)(48x^2-6x+8)$

Exercice 9 : **Calculer les dérivées des fonctions données.**

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ **avec :**

$u(x) = 2x-3$ $\quad v(x) = x+1\ (v(x) \neq 0)$
$u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-1(2x-3)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x+4}$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ **avec :**

$u(x) = x-1$ $\quad v(x) = x^2+3x+4$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = 2x+3$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1(x^2+3x+4)-(2x+3)(x-1)}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3x+4-(2x^2-2x+3x-3)}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3x+4-(2x^2+x-3)}{(x^2+3x+4)^2}$$

b) $f(x)=\dfrac{-2x+3}{5x-1}$

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x)=-2x+3$ $\quad v(x)=5x-1$

$u'(x)=-2$ $\quad v'(x)=5$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2(5x-1)-5(-2x+3)}{(5x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-10x+2+10x-15}{(5x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-13}{(5x-1)^2}$$

c) $f(t)=\dfrac{t}{2t^2-2t+1}$

$f(t)=\frac{u(t)}{v(t)}$ avec :

$u(t)=t$ $\quad v(t)=2t^2-2t+1$

$u'(t)=1$ $\quad v'(t)=4t-2$

$$f'(t)=\frac{u'(t)v(t)-v'(t)u(t)}{\left(v(t)\right)^2}$$

$$f'(t)=\frac{1(2t^2-2t+1)-(4t-2)t}{(2t^2-2t+1)^2}$$

$$f'(t)=\frac{2t^2-2t+1-4t^2+2t}{(2t^2-2t+1)^2}$$

$$f'(t)=\frac{-2t^2+1}{(2t^2-2t+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+3x+4-2x^2-x+3}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+7}{(x^2+3x+4)^2}$$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x)=x^2$ $\quad v(x)=x^2+2$

$u'(x)=2x$ $\quad v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+2)-2x\times x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+2-x^2)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\times 2}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+2)^2}$$

f) $f(t)=\dfrac{t-3}{t^2+2t+3}$

$f(t)=\frac{u(t)}{v(t)}$ avec :

$u(t)=t-3$ $\quad v(t)=t^2+2t+3$

$u'(t)=1$ $\quad v'(t)=2t+2$

$$f'(t)=\frac{u'(t)v(t)-v'(t)u(t)}{\left(v(t)\right)^2}$$

$$f'(t)=\frac{1(t^2+2t+3)-(2t+2)(t-3)}{(t^2+2t+3)^2}$$

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+3-(2t^2-6t+2t-6)}{(t^2+2t+3)^2}$$

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+3-(2t^2-4t-6)}{(t^2+2t+3)^2}$$

$$f'(t)=\frac{t^2+2t+3-2t^2+4t+6}{(t^2+2t+3)^2}$$

$$f'(t)=\frac{-t^2+6t+9}{(t^2+2t+3)^2}$$

Exercice 10 : **Calculer les dérivées des fonctions données.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec :

$v(x) = x^2$
$v'(x) = 2x$

$f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^5}$

$f(x) = \dfrac{2}{v(x)}$ avec :

$v(x) = x^5$
$v'(x) = 5x^4$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = 2 \times \dfrac{-5x^4}{(x^5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-10x^4}{(x^5)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$

$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec :

$v(x) = 2x + 1$
$v'(x) = 2$

$f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$

$f(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec :

$v(x) = x^2 + 3$
$v'(x) = 2x$

$f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{3x-2}$

$f(x) = \dfrac{-2}{v(x)}$ avec :

$v(x) = 3x - 2$
$v'(x) = 3$

$f'(x) = -2 \times \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = -2 \times \dfrac{-3}{(3x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{6}{(3x-2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+x-2}$

$f(x) = \dfrac{-3}{v(x)}$ avec :

$v(x) = x^2 + x - 2$
$v'(x) = 2x + 1$

$f'(x) = -3 \times \dfrac{-v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$f'(x) = -3 \times \dfrac{-(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}$

Exercice 13 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ $\boldsymbol{f'(t) = -3 \times \frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)}$ $\boldsymbol{= -\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)}$	b) $f(x) = sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\boldsymbol{f'(x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$
c) $f(x) = x\,cos(x)$ $\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$ **avec :** $\boldsymbol{u(x) = x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = cos(x)}$ $\boldsymbol{u'(x) = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = -sin(x)}$ $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$ $\boldsymbol{= 1 \times cos(x) - sin(x) \times x}$ $\boldsymbol{= cos(x) - x\,sin(x)}$	d) $f(t) = t\,sin(2t)$ $\boldsymbol{f(t) = u(t)v(t)}$ **avec :** $\boldsymbol{u(t) = t}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(t) = sin(2t)}$ $\boldsymbol{u'(t) = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(t) = 2cos(2t)}$ $\boldsymbol{f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t)}$ $\boldsymbol{= 1 \times sin(2t) + 2cos(2t) \times t}$ $\boldsymbol{= sin(2t) + 2t\,cos(2t)}$
e) $f(t) = \frac{cos(3t)}{t}$ $\boldsymbol{f(t) = \frac{u(t)}{v(t)}}$ **avec :** $\boldsymbol{u(t) = cos(3t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(t) = t}$ $\boldsymbol{u'(t) = -3sin(3t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(t) = 1}$ $\boldsymbol{f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{\left(v(t)\right)^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{-3sin(3t) \times t - 1 \times cos(3t)}{t^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{-3t\,sin(3t) - cos(3t)}{t^2}}$	f) $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec :** $\boldsymbol{u(x) = sin(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = x}$ $\boldsymbol{u'(x) = cos(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = 1}$ $\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{cos(x) \times x - 1 \times sin(x)}{x^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{x\,cos(x) - sin(x)}{x^2}}$
g) $f(t) = \frac{sin(t)}{cos(t)}$ $\boldsymbol{f(t) = \frac{u(t)}{v(t)}}$ **avec :** $\boldsymbol{u(t) = sin(t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(t) = cos(t)}$ $\boldsymbol{u'(t) = cos(t)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(t) = -sin(t)}$ $\boldsymbol{f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - v'(t)u(t)}{\left(v(t)\right)^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{cos(t) \times cos(t) + sin(t) \times sin(t)}{\left(cos(t)\right)^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{\left(cos(t)\right)^2 + \left(sin(t)\right)^2}{\left(cos(t)\right)^2}}$ $\boldsymbol{= \frac{1}{\left(cos(t)\right)^2}}$	h) $f(x) = sin(x)\,cos(x)$ $\boldsymbol{f(x) = u(x)v(x)}$ **avec :** $\boldsymbol{u(x) = sin(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = cos(x)}$ $\boldsymbol{u'(x) = cos(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = -sin(x)}$ $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)}$ $\boldsymbol{= \left(cos(x)\right)^2 - \left(sin(x)\right)^2}$
i) $f(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$ $\boldsymbol{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec :** $\boldsymbol{u(x) = cos(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v(x) = sin(x)}$ $\boldsymbol{u'(x) = -sin(x)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{v'(x) = cos(x)}$	

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$
$$= \frac{-\left(sin(x)\right)^2 - \left(cos(x)\right)^2}{\left(sin(x)\right)^2}$$
$$= \frac{-\left(\left(sin(x)\right)^2 + \left(cos(x)\right)^2\right)}{\left(sin(x)\right)^2}$$
$$= \frac{-1}{\left(sin(x)\right)^2}$$

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [\,-8\,;8\,]$ par $f(x) = \ x^3 + 6x^2 - 15x$

1) Montrer que $f'(x) = \ 3(x-1)(x+5)$.

Pour tout $x \in [-8\,;8]$ on a : $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$
Or,
$3(x-1)(x+5) = 3(x^2 + 5x - x - 5)$
$= 3(x^2 + 4x - 5)$
$= 3x^2 + 12x - 15$
$= f'(x)$

2) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

On étudie d'abord le signe de $f'(x)$:

$x - 1 = 0$ $\quad$ $x + 5 = 0$
$x = 1$ $\quad$ $x = -5$

x	-8		-5		1		8	
3		$+$		$+$		$+$		
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		m=1>0
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		m=1>0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

Puis on dresse le tableau de variation en utilisant le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

x	-8		-5		1		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-8	$\nearrow$	100	$\searrow$	-8	$\nearrow$	776

<u>Remarque :</u> On aurait ou trouver le signe de la dérivée en utilisant la règle suivante :
Pour un polynôme du 2nd degré ayant deux racines, son signe est celui de a à « l'extérieur des racines ».

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [\,-5\,;5\,]$ par $f(x) = \ -x^4 + 2x^2 + 2$

1) Montrer que $f'(x) = \ -4x(x-1)(x+1)$.

Pour tout $x \in [-5\,;5]$ on a : $f'(x) = -4x^3 + 4x$
Or,
$-4x(x-1)(x+1) = -4x(x^2 - 1)$ $\quad$ $(on\ a\ une\ identité\ remarquable)$
$= -4x^3 + 4x$
$= f'(x)$

2) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

On étudie d'abord le signe de $f'(x)$:

$-4x = 0$ $\quad$ $x - 1 = 0$ $\quad$ $x + 1 = 0$
$x = 0$ $\quad$ $x = 1$ $\quad$ $x = -1$

Puis on dresse le tableau de variation en utilisant le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

x	-5		-1		0		1		5	
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		m=-4<0
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		m=1>0
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		m=1>0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

x	-5		-1		0		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-573	↗	3	↘	2	↗	3	↘	-573

<u>Exercice 16 :</u>

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{3x-9}$

Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur D_f.

<u>1ère étape :</u> On dérive la fonction f

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ **avec :**

$u(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $v(x) = 3x - 9$ $\qquad$ **($v(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$)**

$u'(x) = 2$ $\qquad$ $v'(x) = 3$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(3x-9) - 3(2x+1)}{(3x-9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x - 18 - 6x - 3}{(3x-9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-21}{(3x-9)^2} < 0$$

<u>2ème étape :</u> On étudie le signe de $f'(x)$

Sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ on a $(3x-9)^2 > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-21 < 0$ ainsi $f'(x) < 0$.

<u>3ème étape :</u> On dresse le tableau de variation en utilisant le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f		↘	||	↘	

Exercice 17 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [-4\,;4]$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+x+1}$

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

1ère étape : On dérive la fonction f

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = 4x$ $\quad v(x) = x^2+x+1 \quad$ ($v(x) \neq 0$ sur $[-4\,;4]$)

$u'(x) = 4$ $\quad v'(x) = 2x+1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)4x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+4x+4-8x^2-4x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+4}{(x^2+x+1)^2}$$

1ère méthode :

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

2ème méthode :

Or,

$-4(x-1)(x+1) = -4(x^2-1)$

$= -4x^2+4$

$$f'(x) = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

2) En déduire le tableau de variations sur D_f.

2ème étape : On étudie le signe de $f'(x)$

Sur $[-4\,;4]$ on a $(x^2+x+1)^2 > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $-4(x-1)(x+1)$

On résout $-4(x-1)(x+1) = 0$

$x-1=0 \qquad x+1=0$

$x=1 \qquad x=-1$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$	
-4	$-$		$-$		$-$		
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		m=1>0
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		m=1>0
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		

3ème étape : On dresse le tableau de variation en utilisant le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\frac{16}{13}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{16}{21}$

a=-4<0

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-2} + 1$

f est représentée par la courbe C_f dans un repère du plan.

1) a) Montrer que la dérivée de f est : $f'(x) = \dfrac{3x(x-4)}{(x-2)^2}$

1ère étape : On dérive la fonction f

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + 1$ **avec :**

$u(x) = 3x^2$ $\quad$ $v(x) = x - 2$ $\quad$ **($v(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$)**

$u'(x) = 6x$ $\quad$ $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x(x-2) - 1 \times 3x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 12x - 3x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x-2)^2}$$

b) Etudier les variations de la fonction f sur D_f

Sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ on a $(x-2)^2 > 0$ ainsi $f'(x)$ est du signe de $3x(x-4)$

On résout $3x(x-4) = 0$

$3x = 0$ $\quad$ $x - 4 = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	25	$\nearrow$	

a=3>0

2) a) Déterminer l'équation de la tangente T-2 au point d'abscisse -2.

$$f(-2) = \frac{3(-2)^2}{-2-2} + 1 = -2 \qquad f'(-2) = \frac{3(-2)(-2-4)}{(-2-2)^2} = \frac{9}{4}$$

$T_{-2} : y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$$y = \frac{9}{4}(x+2) - 2$$

$$y = \frac{9}{4}x + \frac{9}{2} - \frac{4}{2}$$

$$y = \frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$$

b) Etudier les positions relatives de C_f et de T-2 sur D_f.

Posons $p(x) = f(x) - \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}$

$$p(x) = \frac{3x^2}{x-2} + 1 - \frac{9}{4}x - \frac{5}{2}$$

$$p(x) = \frac{3x^2}{x-2} - \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}$$

$$p(x) = \frac{4 \times 3x^2}{4(x-2)} - \frac{9x(x-2)}{4(x-2)} - \frac{3 \times 2(x-2)}{2 \times 2(x-2)}$$

$$p(x) = \frac{12x^2 - 9x^2 + 18x - 6x + 12}{4(x-2)}$$

$$p(x) = \frac{3x^2 + 12x + 12}{4(x-2)}$$

$$p(x) = \frac{3(x^2 + 4x + 4)}{4(x-2)}$$

$$p(x) = \frac{3(x+2)^2}{4(x-2)}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$3\ (x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$4(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x^2+12x+12}{4x-8}$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	

Si $x < 2$ on a : $p(x) \leq 0$ ainsi C_f est située en dessous de T_{-2}.

Si $x > 2$ on a : $p(x) > 0$ ainsi C_f est située strictement au dessus de T_{-2}.

<u>Exercice 19 :</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$

1) Montrer que $f'(x) = (x-3)^2$ et déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$$

On résout $(x-3)^2 = 0$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 9$.

$$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$T : y = 9x$$

2) b) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à sa tangente T.

On pose $p(x) = f(x) - 9x$

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9x$$

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$$

Comme $x^2 \geq 0$ alors $p(x)$ est du signe de $\frac{1}{3}x - 3$

On résout $p(x) = 0$

$$\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 0$$

$x^2 = 0$ ou $\frac{1}{3}x - 3 = 0$

$x = 0$ ou $\frac{1}{3}x = 3$

$x = 0$ ou $x = 9$

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{3}x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$p(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

m=$\frac{1}{3}$>0

Sur$]-\infty\,;9]$, $p(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 9x \Leftrightarrow C_f$ est en dessous de T.
De même sur$[9;+\infty[$, C_f est au-dessus de T.

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [\,0\,;2\pi\,]$ par $f(t) = \sin(2t)$.

1) Calculer $f'(t)$.

$\boldsymbol{f'(t) = 2\cos(2t)}$

2) a) Si t varie dans $[\,0\,;2\pi\,]$, dans quel intervalle varie $2t$?

$2t$ varie dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$

b) Compléter le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$		$\boldsymbol{\frac{7\pi}{4}}$		2π
$2t$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\boldsymbol{\frac{5\pi}{2}}$		$\boldsymbol{\frac{7\pi}{2}}$		4π
$\cos(2t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$2\cos(2t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\cdot\pi}{4}$		$\frac{5\cdot\pi}{4}$		$\frac{7\cdot\pi}{4}$		$2\cdot\pi$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	0

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [\,0\,;2\pi\,]$ par $f(t) = 3\cos(2t)$.

1) Calculer $f'(t)$.

$\boldsymbol{f'(t) = -6\sin(2t)}$

2) a) Si t varie dans $[\,0\,;2\pi\,]$, dans quel intervalle varie $2t$?

$2t$ varie dans l'intervalle $[0\,;4\pi]$

b) en vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

t	0		$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$		$\boldsymbol{\pi}$		$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$		2π
$2t$	0		$\boldsymbol{\pi}$		$\boldsymbol{2\pi}$		$\boldsymbol{3\pi}$		4π
$\sin(2t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$-6\sin(2t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\cdot\pi}{2}$		$2\cdot\pi$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	3	↘	-3	↗	3	↘	-3	↗	3

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = [-\pi ; \pi\,]$ par $f(t) = 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

1) Calculer $f'(t)$.

$\boldsymbol{f'(t) = -5\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$

2) a) Si t varie dans $[-\pi ; \pi\,]$, dans quel intervalle varie $t + \frac{\pi}{4}$?

$\boldsymbol{t + \frac{\pi}{4}}$ **varie dans l'intervalle** $\boldsymbol{\left[-\pi + \frac{\pi}{4}\ ; \pi + \frac{\pi}{4}\right]}$ **c'est-à-dire** $\boldsymbol{\left[-\frac{3\pi}{4}\ ; \frac{5\pi}{4}\right]}$

b) Compléter le tableau suivant :

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$t + \frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$		0		π		$\frac{5\pi}{4}$
$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$-5\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

t	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\cdot\pi}{4}$		π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-\frac{5}{\sqrt{2}}$

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $D_f = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

1) Calculer $f'(t)$.

$$\boldsymbol{f'(t) = -6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) a) Montrer que si t varie dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $3t + \frac{\pi}{4}$ varie dans $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{7\pi}{4}\right]$

$$\boldsymbol{0 \le t \le \frac{\pi}{2}}$$
$$\boldsymbol{0 \le 3t \le \frac{3\pi}{2}}$$
$$\boldsymbol{0 + \frac{\pi}{4} \le 3t + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \le 3t + \frac{\pi}{4} \le \frac{7\pi}{4}}$$

b) Compléter le tableau suivant :

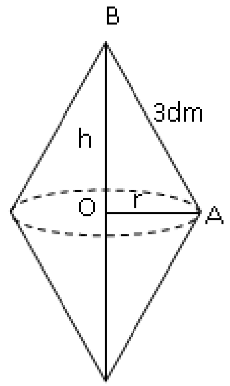
t	0		$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$		$\frac{\pi}{2}$
$3t + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\boldsymbol{\pi}$		$\frac{7\pi}{4}$
$\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	
$-6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	

c) En déduire le tableau de signes de $f'(t)$ puis le tableau de variation de f.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Exercice 24 :

On veut construire une bouée ayant la forme d'un double cône.



Unité choisie : le décimètre (dm) pour tout l'exercice.

On désigne par h la hauteur OB du cône.

On désigne par r le rayon OA de base.

On fixe la longueur AB à 3 dm.

1) a) Exprimer le volume V de la bouée en fonction de r et de h.

Le volume d'un cône de révolution est :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \times base \times hauteur}$$

donc ici, pour les 2 cônes, avec la base circulaire :

$\boldsymbol{V = 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h}$ **donc** $\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi r^2 h}$

b) En considérant le triangle OAB, déterminer une relation entre r et h.

Le triangle OAB est rectangle en O donc d'après le théorème de Pythagore :

$\boldsymbol{AB^2 = OA^2 + OB^2}$

$\boldsymbol{3^2 = r^2 + h^2}$

$\boldsymbol{r^2 = 9 - h^2}$

c) En déduire que le volume peut s'écrire sous la forme : $V = \frac{2}{3}\pi(9h - h^3)$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi r^2 h}$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi (9 - h^2) h}$

$\boldsymbol{V = \frac{2}{3} \pi (9h - h^3)}$

2) a) Etudier les variations de $V(h)$ sur [0 ; 3]

<u>Remarque</u> : h n'est définie qu'entre 0 et 3 :

$h = 0$ quand B et O sont confondus (le cône est aplati… il n'y a plus qu'un disque)

et $h = 3$ quand A et O sont confondus (le cône est allongé… il n'y a plus qu'un « piquet »)

$\boldsymbol{V'(h) = \frac{2}{3}\pi(9 - 3h^2)}$

$V'(h)$ est donc du signe de $-3h^2 + 9$

On résout $-3h^2 + 9 = 0$

$\boldsymbol{h^2 = 3}$

$\boldsymbol{h = -\sqrt{3} \notin [0\,;3]}$ **ou** $\boldsymbol{h = \sqrt{3}}$

Comme $a = -3 < 0$ on a :

h	0		$\sqrt{3}$		3
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$4 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi$	$\searrow$	0

$\boldsymbol{V_0 = V(\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi(9\sqrt{3} - (\sqrt{3})3) = \frac{2}{3}\pi(6\sqrt{3}) = 4\pi\sqrt{3}}$

b) Pour quelle valeur h_0 le volume est-il maximal ? Que vaut alors ce volume V_0 ?

(on attend bien sûr des valeurs exactes)

Le volume est maximal pour $h_0 = \sqrt{3}$ dm et vaut alors $V_0 = 4\pi\sqrt{3}$ dm³. (≈ 21,77 dm³).

c) Quel est le rayon r_0 correspondant à ce volume maximal ?

On reprend la relation entre h et r : $r^2 + h^2 = 9$

$\boldsymbol{r_0^2 + h_0^2 = 9}$ **avec** $\boldsymbol{h_0 = \sqrt{3}}$

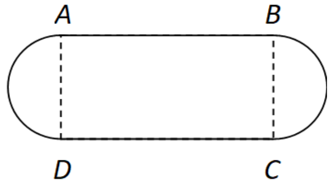
$\boldsymbol{r_0^2 + 3 = 9}$

$\boldsymbol{r_0^2 = 6}$

On sait que r est positif donc on obtient : $r_0 = \sqrt{6}$ dm.

Exercice 25 :

Un terrain de jeux est formé d'un rectangle $ABCD$ et de deux demi-disques de diamètres respectifs $[AD]$ et $[BC]$.



On note **x le rayon** de chaque demi-disque et **L la longueur AB**, exprimée en mètres.

1) Calculer le périmètre du terrain, en fonction de x et de L.

Rappel : Périmètre d'un cercle : $P = 2\pi R$
Périmètre d'un demi-cercle : $P = \pi R$

Ainsi le périmètre du terrain est :

$$P_{Terrain} = 2 \times P_{demi-disque} + P_{ABCD}$$
$$= 2\pi x + 2L$$

2) Dans toute la suite de l'exercice, le périmètre du terrain est de 400 mètres.

a) Exprimer L en fonction de x.

$$400 = 2\pi x + 2L$$
$$2L = 400 - 2\pi x$$
$$L = 200 - \pi x$$

b) Montrer que l'aire du terrain, en m², peut s'écrire :

$$400x - \pi x^2$$

$$A_{Terrain} = A_{ABCD} + A_{Cercle}$$
$$= L \times 2x + \pi x^2$$
$$= (200 - \pi x) \times 2x + \pi x^2$$
$$= 400x - 2\pi x^2 + \pi x^2$$
$$= 400x - \pi x^2$$

3) Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = 400x - \pi x^2$.

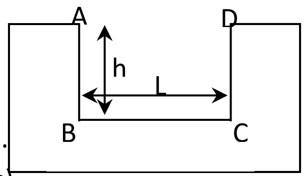
a) Etudier les variations de f, et dresser le tableau de variations.
(avec des **valeurs exactes** dans le tableau de variations)

$$f'(x) = 400 - 2\pi x$$
$$f'(x) = 0$$
$$400 - 2\pi x = 0$$
$$2\pi x = 400$$
$$x = \frac{400}{2\pi}$$
$$x = \frac{200}{\pi}$$

b) Quelle est l'aire maximale du terrain ? Pour quelle valeur exacte de x est-elle atteinte ? Quelle est la valeur de L correspondante ? Qu'est-ce que cela signifie ?

Exercice 26 :

On veut, avant construction, rendre minimal le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal ouvert, de section rectangulaire $ABCD$.
L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m².
On désigne par h la hauteur et par L la largeur (en mètres) de cette section intérieure. On admettra que le frottement est minimum lorsque la longueur $g(h) = AB + BC + CD$ de la section intérieure est minimum.



1) a) Ecrire L en fonction de h.

L'aire de la section intérieure du canal doit être de 0,5 m² ainsi :

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{L \times h = \frac{1}{2}}$

$\boldsymbol{L = \frac{1}{2h}}$

b) Montrer que $g(h) = 2h + \frac{1}{2h}$.

$\boldsymbol{g(h) = AB + BC + CD}$

$\boldsymbol{g(h) = h + L + h}$

$\boldsymbol{g(h) = 2h + \frac{1}{2h}}$

c) Démontrer que la dérivée de g est : $g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}$.

$\boldsymbol{g'(h) = 2 + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = 2 - \frac{1}{2h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = \frac{4h^2-1}{2h^2}}$

$\boldsymbol{g'(h) = \frac{(2h-1)(2h+1)}{2h^2}}$ **(on reconnait l'identité remarquable $^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$)**

d) Etudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$ on a : $2h^2 > 0$ ainsi $g'(h)$ est du signe de $4h^2 - 1$

On résout $4h^2 - 1 = 0$

$\boldsymbol{(2h-1)(2h+1) = 0}$

$2h - 1 = 0$ ou $2h + 1 = 0$

$h = \frac{1}{2}$ ou $h = -\frac{1}{2} \notin]0\,;\,+\infty[$

Comme $a = 4 > 0$ alors on met le signe de a à l'extérieur des racines.

Ici $\frac{1}{2}$ est la deuxième racine ainsi on met « + » à droite.

h	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(h)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	2	↗	

2) Déduire de ce qui précède les valeurs de h et de L permettant d'obtenir le frottement minimum.

Le frottement est minimal pour $h = \frac{1}{2}$ m,

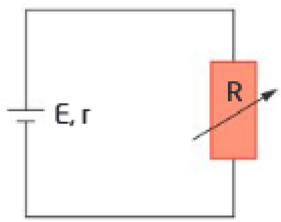
et comme $L = \frac{1}{2h}$ cela donne $L = 1$ m.

<u>Exercice 27 :</u>

Un générateur de force électromotrice E (en Volts) a une résistance interne r (en ohms). Dans le circuit suivant, on branche ce générateur à une résistance variable R.

La puissance en watts dissipée dans ce circuit est

$$P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$$



Données :

$E = 12V\,; r = 4{,}5\Omega\,; 1\,\Omega \leq R \leq 10\Omega$

1) Montrer que la fonction puissance P est définie sur l'intervalle [1 ; 10] par :

$$P = \frac{144R}{(R+4,5)^2}$$

On fait l'application numérique avec $E = 12V$; $r = 4,5\Omega$:

$$\boldsymbol{P = \frac{RE^2}{(R+r)^2} = \frac{R \times 12^2}{(R+4,5)^2} = \frac{144R}{(R+4,5)^2}}$$

2) A l'aide d'une calculatrice (ou d'un logiciel permettant de visualiser la courbe d'une fonction), conjecturer la valeur de R pour laquelle la puissance est maximale et la valeur de cette puissance maximale.

Menu GRAPH

-Entrer la fonction

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{144\,x}{(x+4,5)^2}}$$

- Appuyer sur u (Draw)

Raté ... La courbe n'est pas très visible ....

- On règle l'intervalle de définition :

Le (V-window)

Entrer 0 et 10 pour Xmin et Xmax

Ça ne marche toujours pas ... grrr !

- On fait un zoom automatique : Lw (Zoom)

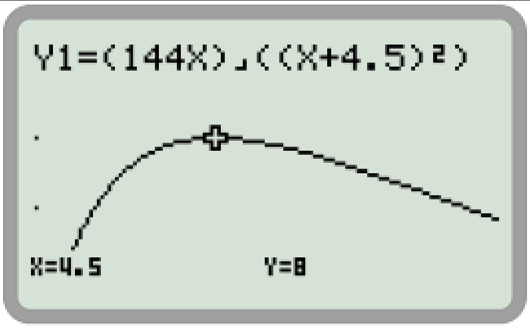
y(Auto)

et là c'est bon !!!

- Pour avoir les coordonnées du point au niveau du maximum :

Lq (Trace)

Il faut peut être descendre la courbe avec la flèche qui descend)



Remarques :

a) pour revenir au cadrage initial pour un autre exercice ...

Le (V-window)

q (Init)

b) Il existe une commande Max qui donne les coordonnées du maximum

Lorsqu'on a le dessin de la courbe

Ly (G-solve)

w (Max)

Il semblerait que la puissance est maximale pour R = 4,5Ω

3) a) Montrer que $P'(R) = \frac{144(4,5-R)}{(R+4,5)^3}$

b) Dresser le tableau de signes de $P'(R)$ sur $[\,1\,;10\,]$.

<u>Ce qu'on doit se dire :</u>

$144 > 0$ donc 144 ne change pas les signes dans un tableau

R est entre 1 et 10 donc positif et si on ajoute 4,5 cela reste positif .

$R + 4,5$ est donc positif donc en le mettant au cube, cela reste positif

Rappel : un nombre réel au cube est du même signe que le nombre de départ :

c'es-à-dire x^3 et x ont le même signe

Si $x > 0$ alors $x^3 > 0$ et réciproquement : si $x^3 > 0$ alors x aussi

Le signe de $P'(R)$ dépend donc uniquement de $4,5 - R$

<u>Ce qu'on doit écrire :</u>

$\boldsymbol{144 > 0}$

$\boldsymbol{R > 0 \text{ donc } R + 4,5 > 0 \text{ d'où } (R+4,5)^3 > 0}$

donc le signe de $P'(R)$ est celui de $4,5 - R$

$$\boldsymbol{4,5 - R = 0}$$
$$\boldsymbol{R = 4,5}$$

C'est une fonction affine avec un coefficient directeur négatif (le coefficient de la variable R vaut -1)

On obtient donc :

R	1		$4,5$		10
144		$+$		$+$	
$4,5 - R$		$+$	0	$-$	
$(R+4,5)^3$		$+$		$+$	
$P'(R)$		$+$	0	$-$	

c) En déduire le tableau de variation de la fonction P sur [1 ; 10].

R	1		$4,5$		10
$P'(R)$		$+$	0	$-$	
$P(R)$	$4,76$	$\nearrow$	8	$\searrow$	$6,85$

$$\boldsymbol{P(1) = \frac{144 \times 1}{(1+4,5)^2}}$$
$$\boldsymbol{P(1) \approx 4,76}$$

$$\boldsymbol{P(4,5) = \frac{144 \times 4,5}{(4,5+4,5)^2}}$$
$$\boldsymbol{P(1) = 8}$$

$$\boldsymbol{P(1) = \frac{144 \times 10}{(10+4,5)^2}}$$
$$\boldsymbol{P(1) \approx 6,85}$$

d) Confirmer ou infirmer les conjectures faites au 2) .

D'après le tableau de variations ci dessus, la puissance est maximale quand $\boldsymbol{R = 4,5\Omega}$; et cette puissance maximale vaut 8W