Fiche méthode : Dérivées et primitives

I. Dérivée

Fonction f	Fonction f'	f définie est dérivable sur
$f(x) = k$ (k =constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax$ $(a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$	$f'(x) = -\omega \sin(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$	$f'(x) = \omega \cos(\omega t + \phi)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

On considère deux fonctions u et v définies et dérivables sur un intervalle I.
On peut alors faire des « opérations » entre ces 2 fonctions (sur un intervalle adapté) et la fonction obtenue est alors dérivable sur l'intervalle en question.

	Fonction	**Dérivé**
Produit d'une fonction par un nombre k (k constante)	ku	ku'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit	$u \times v$	$u'v + v'u$
Inverse ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Quotient ($v(x) \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
Puissance	u^n	$nu^{n-1}u'$
Logarithme *(Voir Fiche méthode logarithme)*	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
Exponentielle *(Voir Fiche méthode exponentielle)*	e^u	$u'e^u$

Application 1 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto (x^2 + 3x + 1)^4$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{(x^3-1)^2}$ définie sur $]1\,;\,+\infty[$

Cours :
Si $f(x) = (u(x))^n$ alors
$f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$

Résolution :

$f(x) = (u(x))^4$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 1$.
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 3$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = 4u^3(x)u'(x)$.
Ainsi pour tout réel **x**, on a :
$f'(x) = 4(x^2 + 3x + 1)^3(2x + 3)$

$g(x) = u(x)^{-2}$ avec $u(x) = x^3 - 1$ qui ne s'annule pas sur $]1\,;\,+\infty[$.
u est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ et $u'(x) = 3x^2$.
Donc f est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ et :
$f'(x) = -2u^{-3}(x)u'(x) = -2\frac{u'(x)}{u^3(x)}$.
Ainsi pour tout $\in]1\,;\,+\infty[$, on a :
$f'(x) = -2\frac{3x^2}{(x^3-1)^3} = -\frac{6x^2}{(x^3-1)^3}$

II. Primitives

Fonction f définie par :	**Fonction primitive F définie par :**	**Intervalle de validité**
$f(x) = k$ (constante)	$F(x) = kx + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$]-\infty; +\infty[$ si $n \geq 1$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leq -2$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + C$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$]-\infty; +\infty[$

On considère une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I.

	Fonction	**Primitive**
Puissance	$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
Logarithme *(Voir Fiche méthode logarithme)*	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$
Exponentielle *(Voir Fiche méthode exponentielle)*	$u'e^u$	$e^u + C$

Application 2 : Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$ vérifiant $F(6) = 600$

Cours :
Si $f(x) = x^n$ alors
$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

Résolution :
Pour tout x $\in \mathbb{R}$ **: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$**

Il existe un réel C tel que pour tout x $\in \mathbb{R}$ **:**
$F(x) = 2 \times \frac{1}{4}x^4 - 5 \times \frac{1}{3}x^3 + x + C$
$\quad = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x + C$
Finalement, pour tout x $\in \mathbb{R}$ **: $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x + 18$**

$F(6) = 600 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 6^4 - \frac{5}{3} \times 6^3 + 6 + C = 600$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1296 - \frac{5}{3} \times 216 + 6 + C = 600$
$\Leftrightarrow 648 - 72 + 6 + C = 600$
$\Leftrightarrow 582 + C = 600$
$\Leftrightarrow C = 18$

Application 3 : Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x^2 + 1)^2$ vérifiant $F(1) = \frac{1}{3}$

Cours :
Si $f(x) = u'(x)(u(x))^n$ alors
$F(x) = \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + C$

Résolution :
On pose $u(x) = x^2 + 1$,
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$ c'est à dire $x = \frac{1}{2}u'(x)$
On remarque alors que : **$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)(u(x))^2$**
Il existe un réel C tel que pour tout x $\in \mathbb{R}$ **:**
$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+1}(x^2 + 1)^3 + C$
$\quad = \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C$
Finalement, pour tout x $\in \mathbb{R}$ **: $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 - 1$**

$F(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 + C = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(1^2 + 1)^3 + C = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{8}{6} + C = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{4}{3} + C = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow C = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}$
$\Leftrightarrow C = -1$