Chapitre : Fonction carré et cube :

I. La fonction carré $x \to x^2$

1) Etude de la fonction

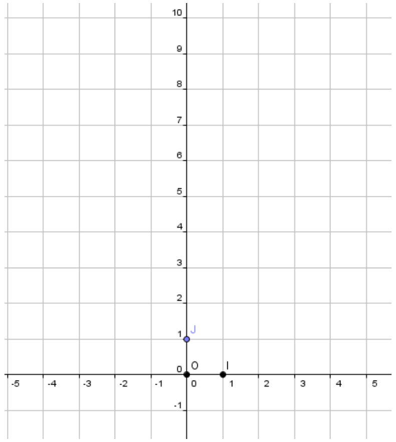
Activité 1 : La fonction « carré »

Soit A la fonction qui à tout nombre x de $[0\ ;\ +\infty[$ associe l'aire d'un carré de côté x (le côté est mesuré en cm et l'aire en cm²). Soit C la courbe représentant la fonction A.

1) (a) Exprimer A en fonction de x.

(b) En déduire :

$A(0)$	
$A\left(\frac{1}{2}\right)$	
$A(1)$	
$A\left(\frac{3}{2}\right)$	
$A(3)$	



2) Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$.

(a) Construire un carré de côté a et un carré de côté b.

(b) Quel carré semble avoir la plus grande aire ? Le démontrer.

(c) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Tracer la courbe C sur $[0\ ;3]$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Observer C_f à la calculatrice. Expliquer comment tracer la courbe C_f sur $[-3\ ;0]$. Justifier.

Définition 1 : La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$

Application 1 : Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré :

$A = -\frac{1}{7}$	$B = 10^{-5}$	$C = 3\sqrt{2}$	$D = \sqrt{3} - 2$

Exercice 1 : Images, antécédents de nombres par la fonction carré

Soit f la fonction carré.

1. Calculer les images par f des nombres réels suivants :

a. 8
b. -6
c. 0
d. $0{,}4$
e. $-1{,}5$
f. $11{,}3$
g. $-\frac{3}{4}$
h. $\frac{1}{7}$
i. $\sqrt{3}$
j. $5\sqrt{2}$
k. $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
l. 10^{-4}
m. 2×10^3
n. 3^5

2. Déterminer les éventuels antécédents des nombres suivants par f

a. 4
b. -9
c. 0
d. $0{,}49$
e. $\frac{9}{4}$
f. 1
g. $1{,}21$
h. -1
i. $\frac{1}{25}$
j. 10^4

Exercice 2 : Images, antécédents de nombres par la fonction carré

Recopier et compléter les phrases suivantes :

81 est le carré de …

Le carré de $\sqrt{5}$ est …

… est le carré de 3,2

… est le carré de $-\sqrt{3}$

Propriété 1 (signe) : Un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$.

Propriété 2 (variation) :

- La fonction carré est strictement sur $]-\infty, 0]$.
- La fonction carré est strictement sur $[0, +\infty[$.

Propriété 3 (comparaison) : On a montré que :

- si $0 < a < b$ alors
- si $a < b < 0$ alors

Tableau de variation de la fonction carré :

Exercice 3 : Tableau de variations de la fonction carré

1. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[2\,;5]$
2. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-3\,;0]$
3. Donner le tableau de variation de la fonction carré sur l'intervalle $[-7\,;6]$

Exercice 4 : Extremums de fonction carré

1. Quel est le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,-3]$?
2. Quel est le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[1\,;4]$
3. Déterminer deux intervalles où la fonction carré admet 1 pour minimum et 9 pour maximum.

Exercice 5 : Extremums de fonction carré

1. Quel est le maximum de la fonction carré sur $[-5\,;\,3]$?
2. Quel est le minimum de la fonction carré sur l'intervalle $[-5\,;3]$
3. Déterminer trois intervalles où la fonction carré admet 0 pour minimum et 25 pour maximum.

Exercice 6 : Variations de la fonction carré et comparaisons

Indiquer quelle propriété du cours permet d'affirme sans calcul que :

1. Si $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ alors $2 < \frac{9}{4}$
2. Si $-0{,}8 < -\frac{3}{4}$ alors $0{,}64 > \frac{9}{16}$
3. Si $1{,}5 < a < 1{,}6$ alors $2{,}25 < a^2 < 2{,}56$
4. Si $a < -1$ alors $a^2 > 1$

Exercice 7 : Variations de la fonction carré et comparaisons

1. Comparer les carrés des nombres a et b suivants sans aucun calcul :

   a. $a = \sqrt{3}$ et $b = 2$

   b. $a = -0{,}34$ et $b = -0{,}27$

   c. $a = 1{,}28$ et $b = \frac{4}{3}$

   d. $a = -\sqrt{2}$ et $b = -1{,}5$

   e. $a = \sqrt{7}$ et $b = 3$

   f. $a = 3$ et $b = \sqrt{10}$

   g. $a = -1{,}28$ et $b = -\frac{4}{3}$

   h. $a = 3 - \sqrt{3}$ et $b = 3 - \sqrt{5}$

2. Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice

   a. $a = 3{,}456^2$ et $b = 3{,}546^2$

   b. $a = (-7{,}878)^2$ et $b = (-7{,}879)^2$

   c. $a = 4\pi^2$ et $b = 5{,}987^2$

   d. $a = 2$ et $b = 2{,}1^2$

   e. $a = (-\pi + 2)^2$ et $b = (-\pi + 1)^2$

   f. $a = (3 - 2 \times 10^{-3})^2$ et $b = (2 + 7 \times 10^{-2})^2$

2) Parité

Propriété 4 : La fonction carré est

Remarque 1 : Une fonction est paire si et seulement si :

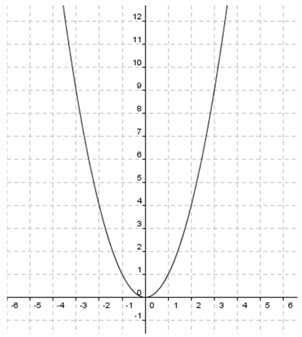
- Son ensemble de définition D est symétrique par rapport à 0
- Pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$

⇨ On peut le vérifier ici : $f(-x) =$

Remarque 2 : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

⇨ On va le vérifier maintenant :

3) Parabole d'équation $y = x^2$



Définition 2 : La fonction carré est représentée par une courbe appelée :

Elle est constituée des points $M(x;\ x^2)$ et a pour équation

Le point $O(0\,;0)$ est appelée sommet de la parabole.

Propriété 5 : Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Exercice 8 : Représentation graphique de la fonction carré, images et antécédents

1. Dans un repère orthogonal (unité graphique : 3 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées), représenter graphiquement la fonction carré sur $[-3\,;3]$.
2. En laissant apparaître les traits de construction, indiquer graphiquement :

   a. comment déterminer l'image de $\frac{4}{3}$

   b. comment déterminer les antécédents de 3,5

3. a. Quelles sont les valeurs exactes des antécédents de 3,5 ?

   b. De quelle équation ces nombres sont-ils solutions ?

4) Equation $x^2 = a$

Propriétés 6 :

- Si $a > 0$, $x^2 = a$ admet
- Si $a = 0$, $x^2 = a$ admet
- Si $a < 0$, $x^2 = a$

Application 2 : Déterminer les antécédents des nombres suivants par la fonction carré :

$0{,}36$	-5	7

Application 3 : Résoudre les équations suivantes :

$x^2 - \frac{3}{5} = 0$	$(2x-1)^2 = 25$

Exercice 9 : Equations de la forme $x^2 = a$

Résoudre les équations suivantes

a. $x^2 = 25$
b. $x^2 = 2$
c. $x^2 = -10$
d. $x^2 = 12$

e. $x^2 + 1 = 0$
f. $x^2 - \frac{9}{4} = 0$
g. $x^2 - 1 = 81$
h. $x^2 + 6 = 127$

i. $2x^2 - 1 = 1$
j. $3x^2 + 2 = 0$
k. $\frac{9}{2}x^2 = 2$
l. $9x^2 - 4 = 12$

m. $1 - 2x^2 = 1$
n. $-x^2 + 2 = 5$
o. $\frac{1}{2}x^2 = 50$
p. $(x-1)^2 = 1$

q. $(x+2)^2 = 3$
r. $(x-4)^2 = -1$
s. $(2x-3)^2 = 9$
t. $(1-2x)^2 = 7$

5) Encadrements et inéquations

On a déjà vu : si $0 \leq a < b$ alors $0 \leq a^2 < b^2$ et si $a < b \leq 0$ alors $a^2 > b^2 \geq 0$.
Mais que se passe-t-il si $a < 0 < b$?
On ne peut pas conclure directement, il faut raisonner graphiquement.

Application 4 :

1. Sachant que $-2 \leq x \leq 4$, encadrer x^2.
2. Sachant que $3 < x < 5$, encadrer x^2.
3. Sachant que $-8 < x < -\frac{2}{3}$, encadrer x^2.

Exercice 10 : Encadrement de x^2

1. Proposer le meilleur encadrement possible de x^2 sachant que :
   a. $x \in [2\,;2{,}5]$ b. $x \in]-1\,;\,-0{,}5[$ c. $x \in [3\,;\,+\infty[$ d. $x \leq -5$
2. En s'aidant du tableau de variations de la fonction carré, proposer le meilleur encadrement possible de x^2 sachant que :

a. $x \in]-1\,;2]$
b. $x \in]-\infty\,;\,1]$

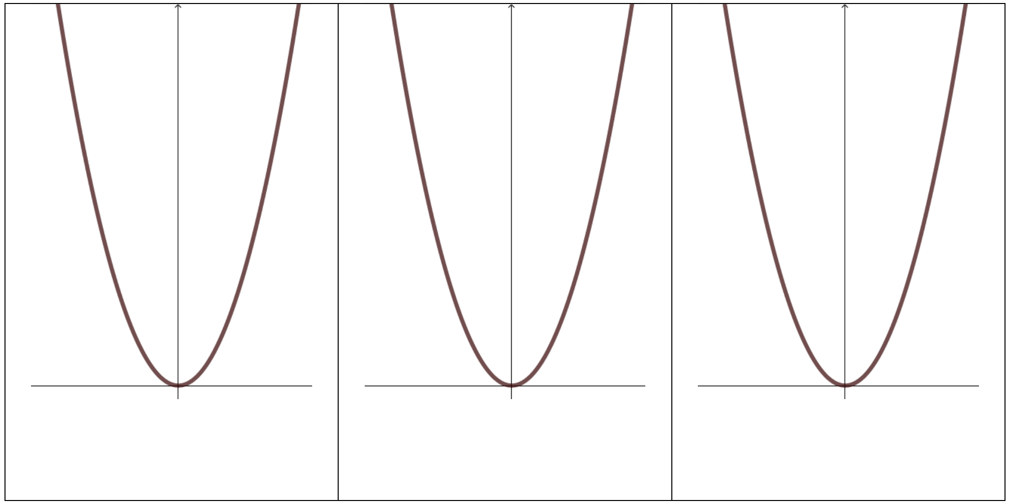
c. $x \in [-3\,;2]$
d. $x \in]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{5}[$

e. $x \in [-2\,;\,+\infty[$
f. $x \in]-10^{-1}\,;0{,}05]$

g. $-2 < x \leq 4$
h. $-10^{-2} < x < 10^{-2}$

Application 5 : Dans chacun des cas suivants, **à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré**, déterminer pour quelles valeurs de x on a (*on fera apparaitre les pointillés et des couleurs) :*

1. $4 \leq x^2 \leq 9$ 2. $x^2 > 5$ 3. $x^2 \leq 16$



Exercice 11 : Inéquations avec la fonction carré

En s'aidant, de la parabole représentative de la fonction carré, résoudre chacune des inéquation (déterminer à quel intervalle ou réunion d'intervalle appartient x) :

a. $0 < x^2 \leq 4$	c. $x^2 \geq 10^{-6}$	e. $x^2 < 1$	g. $x^2 \leq 10$
b. $1 \leq x^2 \leq 9$	d. $x^2 > 100$	f. $x^2 \geq 64$	h. $4 < x^2 < 16$

II. Fonction cube

Définition 3 : On appelle fonction cube la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$

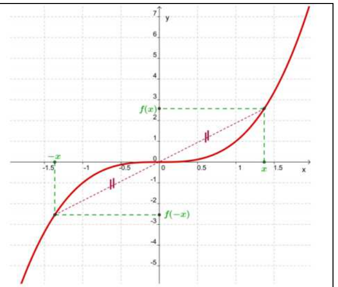
Exercice 12 : Compléter :

- L'image de 3 par la fonction cube est :
- L'image de 0 par l fonction cube est :
- L'image de -6 par la fonction cube est :
- L'image de $\sqrt{2}$ par la fonction cube est :

- L'antécédent de 2 par la fonction cube est :
- L'antécédent de 125 par la fonction cube est :
- L'antécédent de -8 par la fonction cube est :
- L'antécédent de -5 par la fonction cube est :

Propriété 7 (variations) : La fonction cube est strictement sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-contre :



Exercice 13 : Fonction cube

On note f la fonction cube.

1. Donner le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Représenter graphiquement cette fonction.
3. Calculer l'image de 0,5, puis celle de 10^{-2} par f.
4. Déterminer l'antécédent de 27, puis celle de -125 par la fonction cube.
5. Résoudre $f(x) = 1$
6. Résoudre graphiquement $f(x) = 8$.
7. Résoudre graphiquement $x^3 > 8$.

Exercice 14 : Fonction cube

Pour chacun des points suivants, dire s'il appartient ou non à la représentation graphique de la fonction cube :

$A(2\,;8)$ $B(-1\,;-1)$ $C(0\,;0)$ $D(-3\,;27)$

Exercice 15: Fonction cube

Construire le tableau de variation de la fonction cube sur chacun des intervalles suivants :

$I = [1\,;4]$ $J = [-2\,;-1]$ $K = [-3\,;3]$

Propriété 8 : La fonction cube est

Sa courbe représentative est donc

En effet : $f(-x) =$

Définition 4 : Soit x un nombre réel positif. La racine cubique de x, notée $\sqrt[3]{x}$, est l'unique nombre positif dont le cube est x : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

Remarque : La calculatrice donne des valeurs approchées des racines cubiques qu'on ne sait pas calculer, il faut utiliser les touches $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\wedge}$ (il est écrit $\sqrt[x]{}$ au dessus)

Exemple : $\sqrt[3]{2}$ est un irrationnel et $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$ au millième près.

Propriétés 9 : Soit k un réel.

- L'équation $x^3 = k$ admet une unique solution :
- L'inéquation $x^3 < k$ a pour ensemble de solution l'intervalle :

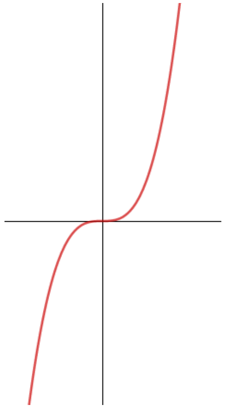
Application 9 : Résoudre. Donner la valeur exacte, puis, si la solution n'a pas d'écriture rationnelle,
utilisez la calculatrice pour donner une valeur approchée au centième près.

1) $x^3 = 1$	2) $x^3 = 5$	3) $x^3 = 8$

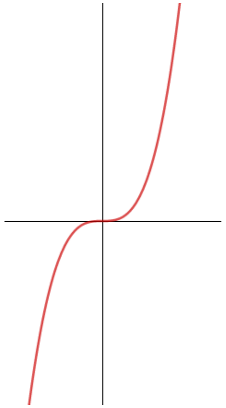
4) $x^3 = -10$	5) $x^3 = -27$	6) $x^3 = 1000$

Application 10 : Résoudre, en faisant un schéma et une lecture graphique si besoin :

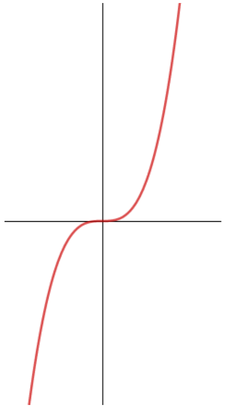
1) $x^3 < 8$



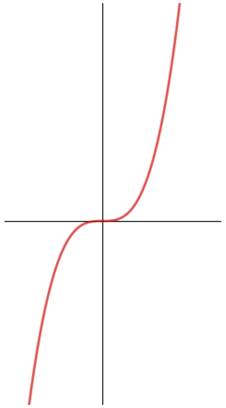
2) $x^3 \geq -5$



3) $x^3 > 0$



4) $x^3 \leq -1$



Application 11 Donner un encadrement de x^3 dans chaque cas :

a) $4 \leq x < 6$ b) $-8 \geq x > -10$ c) $-3 < x \leq 4$

Exercice 16 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $x^3 = 0$
b) $x^3 = 7$
c) $3x^3 = 8$
d) $x^3 = -1$
e) $x^3 = -16$
f) $2x^3 = 24$
g) $x^3 > 2$
h) $x^3 < 6$
i) $x^3 \geq -2$
j) $x^3 \leq 8$
k) $x^3 \geq 27$
l) $x^3 < -4$
m) $x^3 > -1$
n) $x^3 \leq 64$

Exercice 17: Donner un encadrement de x^3 dans chaque cas :

a) $4 \leq x < 6$ b) $-8 \geq x > -10$ c) $-3 < x \leq 4$

III. Puissances

Définition 5 : Soit a un nombre et n un nombre entier naturel,

1er cas : Si $a \neq 0$, la puissance d'exposant n du nombre a est le nombre noté a^n et défini par :

- $a^0 =$ et $a^1 =$
- si $n \geq 2$ alors a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = \boldsymbol{a \times a \times \ldots \times a}$ (avec n facteurs a)

2ème cas : Si $a = 0$ et si n est un entier supérieur ou égal à 1, $0^n =$

La puissance d'exposant $-n$ du nombre $a \neq 0$ est le nombre noté a^{-n} et défini par : $a^{-n} =$

Autrement dit, le nombre a^n est l'inverse de a^n. En particulier $a^{-1} =$

Exemples :

$3^4 = \underbrace{3\times3\times3\times3}_{4 \text{ fois}}$ | $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3\times3\times3\times3}$ | $2^0 = 1$ | $3^1 = 3$ | $5^{-1} = \frac{1}{5}$ | $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

Propriété 11 : Cas particuliers : les puissances de 10

Si n est un entier naturel, $10^n = \mathbf{1000 \ldots 0}$ (avec n zéros) et $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \mathbf{0,0 \ldots 01}$(avec n zéros)

Propriétés 12 : a et b sont des nombres non nuls et m et n des entiers relatifs :

$a^m \times a^n =$ $\frac{a^m}{a^n} =$ $(a^m)^n =$ $(ab)^n =$ $\left(\frac{a}{n}\right)^n =$

Exemples :

$3^{-6} \times 3^2 = 3^{-4}$ $\frac{7^4}{7^6} = 7^{-2}$ $(10^{-3})^{-2} = 10^6$ $(3 \times 5)^3 = 3^3 \times 5^3$ $\left(\frac{2}{5}\right)^5 = 2^5 \times 5^{-5}$

Pour les exercices 18 à 22 : Ecrire sous la forme a^n, où a et n sont des entiers relatifs.

Exercice 18 :

1) $A = 5 \times 5^{-3}$
2) $B = (2^3)^5$
3) $C = 7 \times 7^2$
4) $D = (3^2)^{-5}$

Exercice 19 :

1) $A = (-5)^3 \times (-5)^7$
2) $B = (-3)^{-2} \times (-3)^{-6}$
3) $C = (-2)^{-3} \times (-2)^4$
4) $D = (3^2)^5 \times (-2)^5$

Exercice 20 :

1) $A = \frac{2^7}{2^3}$
2) $B = \frac{2^3}{2^5}$
3) $C = \frac{15^{-5}}{3^{-5}}$
4) $D = (2^3)^4 \times \frac{2}{2^{-7}}$

Exercice 21 :

1) $A = \frac{3^5 \times 3^2}{(3\times3^{-2})^{-1}}$
2) $B = \frac{7\times7^{-3}}{7^{-1}\times(7^2)^{-3}}$
3) $C = \frac{12^2\times3^2}{9^2}$
4) $D = \frac{5^7\times3^7}{15^7}$

Exercice 22 :

1) $10^5 \times 10^{-1}$ 2) $10^{-2} \times 10^2$ 3) $10^{-6} \times (10^2)^4$ 4) $\frac{10^3}{10^{-2}}$

IV. Positions relatives de courbes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

C_f, C_g, C_h sont les courbes représentatives des fonctions : $x \to x,\ \ g: x \to x^2\ \ et\ \ h: x \to x^3$, toutes trois strictement croissantes sur $[0\,;+\infty[$.

Propriétés 10 :

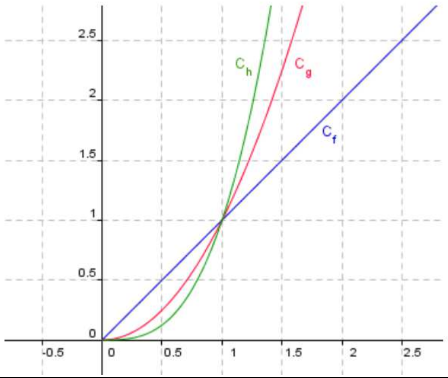
- Les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(1\,; 1)$ sont communs aux trois courbes.

- Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la courbe C_h est en-dessous de C_g, elle-même en dessous de C_f.

Autrement dit, $\forall x \in\,]0\,;1[\,, x^3 < x^2 < x$

- Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$: la courbe C_f est en-dessous de C_g, elle-même en dessous de C_h.

Autrement dit, $\forall x \in\,]1\,;+\infty[\,, x < x^2 < x^3$



Preuve :

- Si $0 \le x \le 1$ alors en multipliant chaque membre par x (positif) on obtient $0 \le x^2 \le x$ donc en particulier $x^2 \le x$.
  En multipliant encore par x, on obtient $x^3 \le x^2$.
  Ainsi : $x^3 \le x^2 \le x$.

- Si $x \ge 1$ alors en multipliant chaque membre par x (positif) on obtient $x^2 \ge x$.
  En multipliant encore par x, on obtient $x^3 \ge x^2$.
  Ainsi : $x \le x^2 \le x^3$.