Fiche méthode : Suites

I. Suite arithmétique

Application 1 : Modéliser une situation à l'aide d'une suite arithmétique.

En 2015, Anne a reçu 80€ d'étrennes. Chaque année, celle-ci augmentent de 6€.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant des étrennes l'année $2015+n$.

1. Donner les valeurs $a_1$et a_2. A quelle année correspondent-elles ?

D'après l'énoncé $a_0 = 80$ (en 2015)	
$a_1 = a_0 + 6$ $= 80 + 6$ $= 86$ € en 2016.	$a_2 = a_1 + 6$ $= 86 + 6$ $= 92$ € en 2017.

2. a. Donner la nature de la suite (a_n)

Pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre, ici 6.
Ainsi la suite (a_n) est arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $a_0 = 80$.

b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n

Pour tout entier naturel n on a : $a_{n+1} = a_n + 6$

c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n on a : $a_n = 80 + 6n$

3. Donner le sens de variation de la suite (a_n)

$r > 0$ ainsi la suite (a_n) est strictement ↗ sur $\mathbb{N}$.

4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2030 ?

$2030 - 2015 = 15.$
$a_{15} = 80 + 6 \times 15 = 170$
Il y a $15 - 0 + 1 = 16$ termes.
$S = 16 \times \frac{80+170}{2} = 2000$ €.
Au 31 décembre 2030, Anne a reçu 2000€ d'étrennes au total.

5. a. Déterminer la limite de la suite (a_n)en$+\infty$.

$r > 0$ ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

b. Déterminer le seuil n_p à partir duquel Anne aura reçu un montant supérieur ou égal à 300€

1ère méthode :
$a_n \geq 300$
$80 + 6n \geq 300$
$6n \geq 220$
$n \geq \frac{220}{6}$

D'après la calculatrice le seuil recherché est :
$n_p = 37$

Ainsi en 2052, Anne aura reçu un montant supérieur à 300€.

2ème méthode :
A la calculatrice, on trouve en utilisant le mode recur :
$a_{36} = 296 > 300$et $a_{37} = 302 > 300.$

Généralité :

Suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 :

- Donner u_{n+1} en fonction de u_n : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$
- Donner u_n en fonction de n :
  - Pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{u_n = u_0 + rn}$
  - Si $p < n, u_n = u_p + r(n-p)$

Variations :

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Somme :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, alors la somme des premiers termes vaut :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \textbf{nombre de terme} \times \frac{\textbf{1er terme de la somme} + \textbf{dernier terme de la somme}}{\textbf{2}}$$

Remarque :
nb de terme = rang du dernier terme − rang du 1er terme + 1

Limites :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est divergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est divergente et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Application 2 : Somme et Suites arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.
Déterminer la somme $S = u_8 + \cdots + u_{14}$

Nombre de termes : Il y a $(14-8)+1 = 7$ termes dans cette suite.
1er terme de la somme : $u_8 = 3 + 2 \times 8 = 19$
Dernier terme de la somme : $u_{14} = 3 + 2 \times 14 = 15$
$S = 7 \times \frac{u_8 + u_{14}}{2} = 7 \times \frac{19+15}{2} = 7 \times 17 = 119$

II. Suite géométrique

Application 3 : Modéliser une situation à l'aide d'une suite géométrique.

Le directeur d'un cinéma de centre-ville a vu le nombre d'entrées diminuer de 5 % par an depuis l'ouverture en 2000, année au cours de laquelle il avait comptabilisé 200 000 entrées.
Pour tout entier naturel n, on modélise par u_n le nombre d'entrées dans ce cinéma l'année $2000+n$.
On définit ainsi la suite u sur $\mathbb{N}$. On a : $u_0 = 200\,000$.

1. Quelle est la nature de la suite u ? Justifier.

Diminuer de 5% revient à multiplier par :
$$1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$$
Pour passer d'un terme au suivant on multiplie toujours par 0,95 ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de 1er terme $u_0 = 200\,000$.

2. Donner le nombre d'entrées en 2001 et 2002.

$u_1 = u_0 \times 0{,}95$ $= 200\,000 \times 0{,}95$ $= 190\,000$ en 2001	$u_2 = u_1 \times 0{,}95$ $= 190\,000 \times 0{,}95$ $= 180\,500$ en 2002

3. Exprimer u_n en fonction de n, où n est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n on a :
$u_n = 200\,000 \times 0{,}95^n$

4. Donner le nombre d'entrées en 2010

$u_{10} = 200\,000 \times 0{,}95^{10}$
≈ 119747 entrées en 2010.

5. Selon ce modèle, combien d'entrées le directeur a-t-il comptabilisé entre 2000 et 2010 ? Arrondir le résultat à l'unité.

Nombre de termes : $2010 - 2000 + 1 = 11$
$$S = 200\,000 \times \frac{1 - 0{,}95^{11}}{1 - 0{,}95} \approx 1\,724\,800$$
Entre 2000 et 2010, le directeur a comptabilisé environ 1 724 800 places.

6. On cherche à déterminer au bout de combien d'années, le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été **divisé par deux** par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma.

a) On programme une fonction, en langage Python, appelée cinéma et sans argument :

Compléter les instructions manquantes afin de répondre au problème posé.

```
def cinema():
    N = 0
    U = 200000
    While U >100 000 :
        N = N+1
        U = 0,95U
    return N
```

b) Le programme renvoie la valeur 14. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Au bout de 14 ans le nombre d'entrées dans ce cinéma aura été divisé par deux par rapport à celui de l'année d'ouverture du cinéma.

Généralité :

Suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 :

- Donner u_{n+1} en fonction de u_n : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n q}$
- Donner u_n en fonction de n :
  - Pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{u_n = u_0 q^n}$
  - Si $p < n, u_n = u_p q^{n-p}$

Augmentation et diminution :

- Augmentation de p% : Suite géométrique de raison : $$\boldsymbol{q = 1 + \frac{p}{100}}$$
- Diminution de p% : Suite géométrique de raison : $$\boldsymbol{q = 1 - \frac{p}{100}}$$

Variations :

- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est :
  - décroissante si $u_0 > 0$
  - croissante si $u_0 < 0$.
- Si $q = 0$, la suite (u_n)est constante.
- Si $q = 1$, la suite (u_n)est constante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est :
  - croissante si $u_0 > 0$
  - décroissante si $u_0 < 0$.

Somme :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \textbf{1er terme de la somme} \times \frac{\textbf{1} - \textbf{raison}^{\textbf{nombre de terme}}}{\textbf{1} - \textbf{raison}}$$

Limites :

Soit $q > 0$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < q < 1 \end{cases}$$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.

1. Si $0 < q < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
2. Si $q > 1$et $u_0 > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Si $q > 1$et $u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
4. Si $q = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

Application 4 : Somme et Suites géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Calculer la somme $S = u_8 + \cdots + u_{14}$

Il y a $(14-8)+1 = 7$ termes dans cette suite. Et $u_8 = 3 \times 2^8 = 768$.
$$S = u_8 \frac{(1 - q^{nombre\ de\ termes})}{1-q} = 768 \times \frac{1 - 2^7}{1-2} = 97536$$

III. Etude de suites du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Application 5 : Suites arithmético-géométrique

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

$u_0 = 1$	$u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4}$ $u_1 = \frac{3}{4}$	$u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ $u_2 = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ $u_2 = \frac{5}{8}$

Vérification : Suite arithmétique ? $u_1 - u_0 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$ $u_2 - u_1 = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{5}{8} - \frac{6}{8} = -\frac{1}{8} \neq -\frac{1}{4}$	**Vérification : Suite géométrique ?** $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4}$ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{3}{4}$

Ainsi (u_n) n'est ni une suite arithmétique, ni u ne suite géométrique.

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Calculer les 3 premiers termes de cette suite.

$v_0 = u_0 - \frac{1}{2}$ $v_0 = 1 - \frac{1}{2}$ $v_0 = \frac{1}{2}$	$v_1 = u_1 - \frac{1}{2}$ $v_1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$ $v_1 = \frac{1}{4}$	$v_2 = u_2 - \frac{1}{2}$ $v_2 = \frac{5}{8} - \frac{4}{8}$ $v_2 = \frac{1}{8}$

b) Que pouvez-vous conjecturer concernant la nature de cette suite ?

(v_n) semble être une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

c) Démontrer votre conjecture.

Pour tout entier naturel n,

$v_n = u_n - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{2}{4}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$ (Remarque : *Il faut penser à factoriser par la raison conjecturée précédemment*).

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$.

3) a) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$v_n = v_0 q^n$

$v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n,

$v_n = u_n - \frac{1}{2}$

$u_n = v_n + \frac{1}{2}$

$u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$

Application 6 :

On définit la suite u par son 1er terme : $u_0 = 1$

et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$.

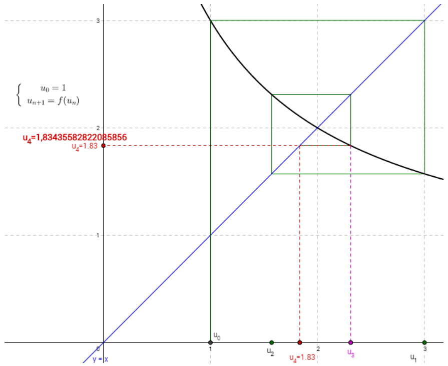
1) La relation de récurrence est du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Donner l'expression $f(x)$ de cette fonction f.

f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$$

b) La courbe de cette fonction est donnée ci-contre.



Construire u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

c) Que peut-on conjecturer sur les variations de u et son comportement à l'infini ?

La suite (u_n) ne semble ni croissante, ni décroissante.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

2) On définit la suite v par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$ pout tout n de $\mathbb{N}$.

a) Démontrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme.

Pour tout entier naturel n,

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2}$

$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1} - 2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1} + 2}$

$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+8-2(2u_n+1)}{2u_n+1}}{\frac{u_n+8+2(2u_n+1)}{2u_n+1}}$

$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n+8-4u_n-2}{2u_n+1}}{\frac{u_n+8+4u_n+2}{2u_n+1}}$

$v_{n+1} = \frac{-3u_n + 6}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{5u_n + 10}$

$v_{n+1} = \frac{-3(u_n - 2)}{5(u_n + 2)}$

$v_{n+1} = -\frac{3}{5}v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 2} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n, et donner la limite de la suite v.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{1}{3}$ donc pour tout entier naturel n :

$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

$-1 < q < 0$ donc : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

c) En déduire la limite de la suite u. *(c'est hors programme, mais intuitif !)*

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

$v_n(u_n + 2) = u_n - 2$

$v_n u_n + 2v_n - u_n = -2$

$u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n$

$u_n(v_n - 1) = -2 - 2v_n$

$u_n = \frac{-2 - 2v_n}{v_n - 1}$ (on suppose que $v_n \neq 1$)

Comme : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ *on a alors :* $\lim_{n \to +\infty} u_n = "\frac{-2}{-1}" = 2$