Fiche méthode : Comparaison et résolution graphique

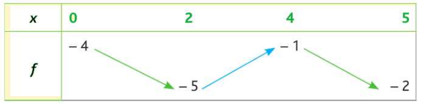
I. Variations et comparaisons

Variations et comparaisons :

- Dire que f est **strictement croissante** sur I signifie que f **conserve l'ordre**, c'est-à-dire :
  Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$ (inégalité stricte).
- Dire que f est **croissante** sur I signifie que f **conserve l'ordre**, c'est-à-dire :
  Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (inégalité large).
- Dire que f est **strictement décroissante** sur I signifie que f **contrarie l'ordre**, c'est-à-dire :
  Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$ (inégalité stricte).
- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que f **contrarie l'ordre**, c'est-à-dire :
  Pour tous nombres a et b de I, si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$ (inégalité large).
- Dire que f est **constante** sur I signifie que:
  Pour tous nombres a et b de I, il existe un réel k tel que :$f(a) = f(b) = k$
- Dire que f admet un **maximum** atteint en $x = a$ sur I signifie que :
  Pour tout nombre réel $x \in I$:$\boldsymbol{f(x) \leq f(a)}$.
- Dire que f admet un **minimum** atteint en $x = b$ sur I signifie que :
  Pour tout nombre réel $x \in I$:$\boldsymbol{f(x) \geq f(b)}$.

Application 1 : Comparaison

On donne le tableau de variation d'une fonction f.



1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Méthode : Pour déterminer l'ensemble de définition dans un tableau de variations on lit les extrémités de la première ligne.

$D_f = [0\,;5]$

2. Décrire les variations de f.

Méthode : Pour décrire les variations à l'aide d'un tableau de variations :
- Si la flèche est vers le haut, la fonction est croissante sur l'intervalle des valeurs correspondantes de la 1ère ligne.
- Si la flèche est vers le bas, la fonction est décroissante sur l'intervalle des valeurs correspondantes de la 1ère ligne.

La fonction f est strictement croissante sur $[2\,;\,4]$.
La fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,2]$ et sur $[4\,;5]$.

3. Quelle est le minimum de la fonction f sur $[2\,;\,5]$?

Le minimum de la fonction f sur $[2;5]$ est -5 atteint en $x = 2$.

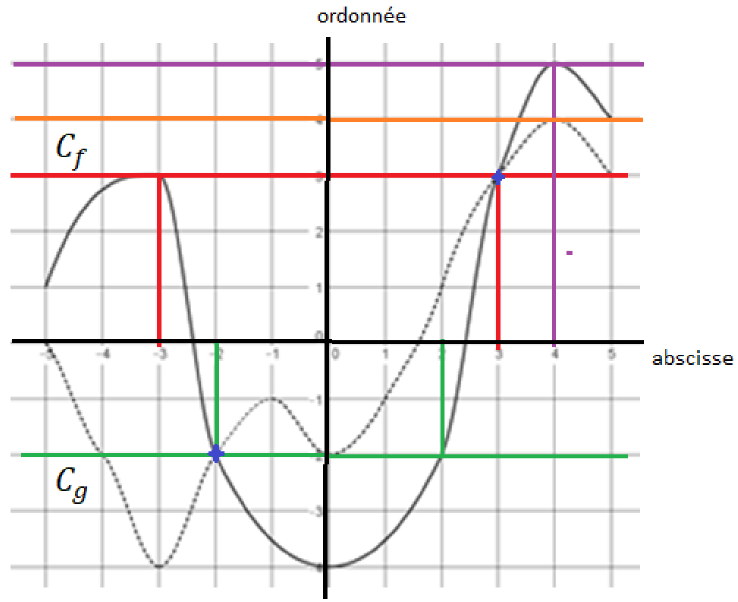
4. En justifiant ces réponses, indiquer dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse ou si le tableau ne permet pas de conclure.

a. $f(1) < f(3)$	Le tableau ne permet pas de conclure.
b. $f(1) < f(0)$	$0 < 1$, or la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;2]$ ainsi : $f(0) > f(1)$. VRAIE.
c. $f(3) < 0$	Sur $[2\,;\,4]$, le maximum de la fonction f est -1, ainsi pour tout $x \in [2\,;\,4]$ on a : $f(x) \leq -1 < 0$. Or $3 \in [2\,;\,4]$ ainsi $f(3) < 0$. VRAIE.
d. $f(3) = -3$	Le tableau ne permet pas de conclure.
e. $f(x) \leq -1$ sur $[0\,;5]$	Le maximum de la fonction f sur $[0\,;5]$ est -1. Ainsi pour tout réel $x \in [0\,;\,5]$ on a $f(x) \leq -1$. VRAIE.
f. $f(1) = -4{,}5$	Le tableau ne permet pas de conclure.
g. $f(1) < f(5)$	$f(5) = -2$. Pour tout $x \in [0\,;2]$ on a $-5 \leq f(x) \leq -4 < -2$. Or $1 \in [0\,;2]$ donc VRAIE.
h. $f(2) = f(5)$	$f(2) = -5$ et $f(5) = -2$. Ainsi $f(2) \neq f(5)$. FAUSSE.
i. Le minimum de f sur $[0\,;5]$ est -2	Le minimum de la fonction f sur $[-4\,;6]$ est -5. FAUSSE.

II. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Application 2 :

On donne ci-dessous les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g



1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

$D_f = [-5\,;5]$

2) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes, en donnant l'ensemble S des solutions.

a) $\boldsymbol{f(x) = 3}$ S = $\{-3\,;3\}$

b) $\boldsymbol{f(x) = 5}$ S = $\{4\}$

c) $\boldsymbol{f(x) = -2}$ S = $\{-2\,;2\}$

d) $\boldsymbol{f(x) \geq -2}$ S = $[-5\,;\,-2] \cup [2\,;5]$

e) $\boldsymbol{f(x) \leq 5}$ S = $D_f = [-5\,;5]$

f) $g(x) > 4$ S = $\emptyset$

g) $f(x) = g(x)$ S = $\{-2\,;3\}$

h) $f(x) < g(x)$ S = $]-2\,;3[$

i) $f(x) \leq g(x)$ S = $[-2\,;3]$

j) $f(x) > g(x)$ S = $[-5\,;\,-2[\cup]3\,;\,5]$

k) $f(x) \geq g(x)$ S = $[-5\,;\,-2] \cup [3\,;\,5]$

Résolution graphique d'équations et inéquations :

Soit k un réel.
- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont **les abscisses** des points d'intersections de la courbe C_f et de la droite d'équation $\boldsymbol{y = k}$ (droite horizontale).
  Autrement dit : Résoudre l'équation $f(x) = k$, c'est trouver les **antécédents** de k.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ sont **les abscisses** des points de la courbe C_f situés **en dessous et sur** la droite d'équation $\boldsymbol{y = k}$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont **les abscisses** des points d'intersections des courbes $\boldsymbol{C_f}$ et $\boldsymbol{C_g}$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont **les abscisses** des points de la courbe C_f situés **en dessous et sur** la courbe C_g.