Chapitre   : Dérivation (nombre dérivé, tangente)

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, on aura :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, C_f sa représentation graphique dans un repère du plan. Soit a un réel de I et A le point de C_f d'abscisse a.

Soit h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I. Soit $M\left(a+h\,;f(a+h)\right)$ un point de C_f.

I. Rappel 2nd : Images et antécédents

Exercice 1 : Images et antécédents (Calculs)

1. Calculer l'image de 27 par $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x+1$.
2. Calculer l'image de 3 par la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+4^2}$.
3. Calculer l'image de $-\sqrt{2}$ par $f : x \mapsto -2x^2+1$.
4. Déterminer l'antécédent de 123 par $f : x \mapsto 7x+39$
5. Déterminer l'antécédent de 9 par la fonction f définie par $f(x) = 1{,}5(x-2)$.
6. Déterminer l'antécédent de $\frac{7}{3}$ par $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x+1$.

Exercice 2 : Images et antécédents (Calculs)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2}{3-x}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calculer l'image de 0, de 5 et de -2.

c) Calculer les antécédents de 0 et de 7.

Exercice 3 : Images et antécédents (Calculs)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$$

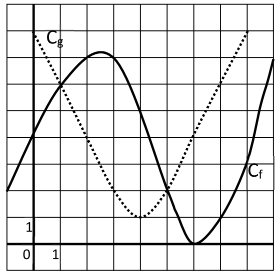
a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calculer l'image de 0, de 5 et de -2.

c) Calculer les antécédents de 1 et de 0.

Exercice 4 : Images et antécédents (Graphique)

On donne ci-dessous les courbes des fonctions f et g.



1) Ensembles de définition :

$D_f =$ $D_g =$

2) a) Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?

b) Quelle est l'image de 4 par la fonction g ?

c) Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

d)Quels sont les antécédents de 0 par la fonction g ?

3) Déterminer les extremums de la fonction g :

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f :

5) Dresser le tableau de signes de la fonction f :

6) Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 0$	$S =$	f) $g(x) > 6$	$S =$
b) $g(x) = 0$	$S =$	g) $g(x) < 1$	$S =$
c) $g(x) = 2$	$S =$	h) $g(x) > 0$	$S =$
d) $f(x) = g(x)$	$S =$	i) $f(x) > g(x)$	$S =$
e) $f(x) > 7$	$S =$	j) $f(x) < g(x)$	$S =$

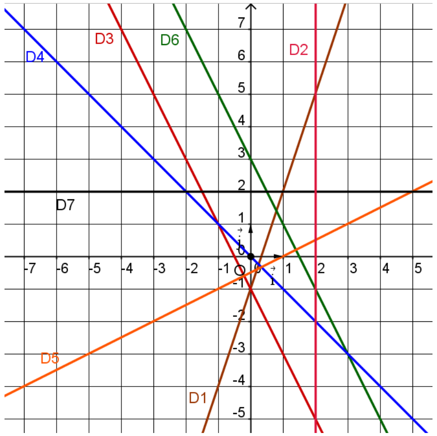
II. Rappel 2nd : Déterminer une équation de droite

Exercice 5 : Déterminer une équation de droite

Déterminer l'équation de la droite (AB)

a. $A(7\,;0)$ et $B(0\,;7)$
b. $A(8\,;3)$ et $B(8\,;\,-3)$
c. $A(-7\,;-3)$ et $B(12\,;-3)$
d. $A\,(-2\,;\,-8\,)$ et $B\,(\,6\,;\,16\,)$
e. $A(-2\,;0)$ et $B(0\,;\,2)$
f. $A\,(\,3\,;\,1\,)$et $B\,(\,-12\,;\,-2\,)$

Exercice 6 : Associer une fonction affine à une droite



Déterminer une équation de chaque droite représentée ci-contre.

Exercice 7 : Représenter dans un repère orthonormé des droites

Représenter dans un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les droites suivantes :

a. $(d_1) : y = 2$
b. $(d_2) : x = -1$
c. $(d_3) : y = -2x$
d. $(d_4) : y = x - 3$
e. $(d_5) : y = 2x - 1$
f. $(d_6) : y = -x - 2$
g. $(d_7) : y = \frac{1}{2}x + 2$
h. $(d_8) : y = -\frac{5}{8}x - 3$
i. $(d_9) : y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

III. Taux de variation

Définition 1 :
Le taux de variation d'une fonction f entre a et $a + h$ est le nombre :

$$\tau_a(h) =$$

Ce nombre est la pente de la droite (AM), sécante à C_f passant par les point A et M.

Application 1 : Soit $f : x \mapsto x^2$.

a) Calculer le taux de variation de la fonction f entre 1 et $1 + h$ avec $(h \neq 0)$

b) *Généralité* : Calculer le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ avec $(h \neq 0)$

Propriété 1 : Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$ avec m et p des réels.
Le taux de variation de la fonction f est le ______________________ de la droite d'équation $y = mx + p$.

Preuve : Soit $f : x \mapsto mx + p$

Application 2 : Donner, sans calcul, le taux d'accroissement de la fonction $g : x \mapsto 4x + 7$.

IV. Nombre dérivé

Définition 2 :
Le nombre dérivé de la fonction f en a est, si elle existe, la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 , on note ce nombre _______________.
On écrit alors :

$$f'(a) =$$

Application 1 (suite) : Soit $f : x \mapsto x^2$.

c) Calculer le nombre dérivé de f en $(a =)1$

d) Calculer le nombre dérivé de f en en un point quelconque $a \neq 0$.

Remarques :

- En cinématique, on peut interpréter un taux de variation comme une vitesse moyenne et un nombre dérivé comme une vitesse instantanée ;
- Dans un cadre économique, le nombre dérivé est relié au coût marginal.

Exercice 8 : Taux de variation et nombre dérivé

Le taux de variation d'une fonction f, dérivable en 2 est tel que $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 4 + h$, avec $h \neq 0$.

Calculer $f'(2)$.

Exercice 9 : Taux de variation et nombre dérivé

Le taux de variation d'une fonction f, dérivable en 1 est tel que $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h+2}{(1+h)^2}$, avec $h \neq 0$ et $1 + h \neq 0$.

Calculer $f'(1)$.

Exercice 10 : Taux de variation et nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et h un réel non nul.

1. Calculer $f(4)$
2. Vérifier que $f(4 + h) = 14 + 3h$
3. Montrer que le taux de variation de f entre 4 et $4 + h$ est égal à 3
4. En déduire que f est dérivable en 4 et déterminer $f'(4)$.

Exercice 11 : Taux de variation et nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et h un réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2 + h)$.
2. Vérifier que le taux de variation de f entre -2 et $-2 + h$ est égal à $-4 + h$
3. En déduire que f est dérivable en -2 et déterminer $f'(-2)$.

Exercice 12 : Taux de variation et nombre dérivé

Prouver l'existence du nombre dérivé au point a de la fonction f indiquée, puis calculer sa valeur.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = -1$

b) $f(x) = -x^2 + 2x$ et $a = 3$

c) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ et $a = 1$

d) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $a = 2$

e) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $a = -1$

f) $f(x) = x^3 - 3x$ et $a \in \mathbb{R}$

g) $f(x) = x^3 + 1$ et $a = 2$

h) $f(x) = (x - 3)^3$ et $a = 0$

i) $f(x) = \frac{3}{x}$ et $a \in \mathbb{R}$

V. Tangente

Définition 3 : La tangente en un point d'une courbe est la position limite d'une sécante passant par ce point et un point voisin de la courbe, lorsque ce point vient se confondre avec le premier point.

Remarque : Dire que f est dérivable en a signifie que le coefficient directeur des sécantes (AM) tend vers un réel $f'(a)$ correspondant au coefficient directeur de « la position limite » de ces sécantes.

On obtient alors ces définitions :

Définition 4 :

- Si f est dérivable en a, alors la tangente à la courbe représentative C de f au point A de C est ______ ______________________________de ________________________________ **le nombre dérivé** de f en a.
- **Le coefficient directeur** de la tangente à la courbe de f en a est _________________________________

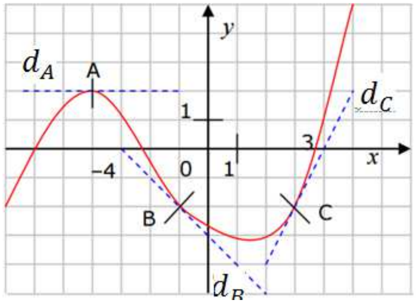
____

Remarque : Le point $A(a\,; f(a))$ est le point de contact de la tangente et de C_f.

Application 3 : La courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée ci– contre en rouge.

Déterminer :

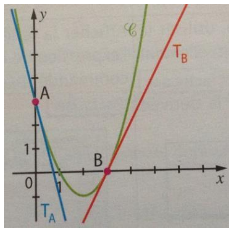
$f'(-4)$	
$f'(-1)$	
$f'(3)$	



Exercice 13 : Coefficient directeur et nombre dérivé

Soit f dérivable en 0 et en 3 telle que : $f'(0) = -4$ et $f'(3) = 2$.

Soit T_A la tangente à C_f au point A d'abscisse 0 et T_B la tangente à C_f au point B d'abscisse 3.

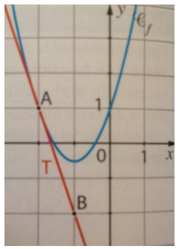


1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T_A.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T_B.

Exercice 14 : Coefficient directeur et nombre dérivé

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite (AB) est tangente à C_f au point A d'abscisse -2.



1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. En déduire le nombre dérivé de f en -2.

Exercice 15 : Coefficient directeur et nombre dérivé

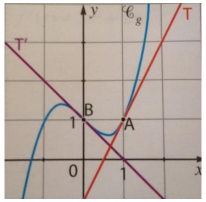
On donne le tableau ci-contre :

x_A	-5	-1	2	4
$f(x_A)$	138	10	19	75
$f'(x_A)$	-52	-12	18	38

1. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_A.
2. Donner les coordonnées du point de tangence.

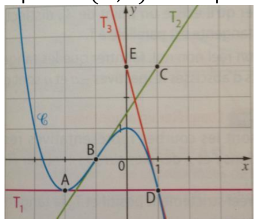
Exercice 16 : Coefficient directeur et nombre dérivé

Soit g dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les droites T et T' sont tangentes à C_g aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 0.
Déterminer les nombres dérivés de g en 1 et 0.



Exercice 17 : Nombre dérivé et tangente

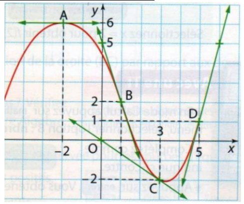
Soit une fonction f. Les droites T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à C_f, respectivement aux points A, B et D.
Le point $E(0\,;3)$ est un point de T_3.



1. Déterminer :
   a) $f(-2)\,;f(-1)$ et $f(1)$
   b) $f'(-2)\,;f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Vérifier qu'une équation de T_2 est : $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.
3. Déterminer une équation des tangentes T_1 et T_3.

Exercice 18 : Nombre dérivé et tangente

La fonction suivante est dérivable sur son domaine de définition. Par lecture graphique, donner la pente de chacune des tangentes tracées, puis donner une équation de chacune de ces tangentes.



Exercice 19 : Coefficient directeur et nombre dérivé

1. On donne pour tout réel x, $f'(x) = -6x + 11$
   a) Calculer $f'(0)$ et $f'(3)$.
   b) En déduire les coefficients directeurs respectifs des tangentes à C_f au point A d'abscisse 0 et au point B d'abscisse 3.
2. On donne pour tout réel x, $f'(x) = 9 + 7x$
   a) Calculer $f'(-11)$ et $f'(8)$.
   b) En déduire les coefficients directeurs respectifs des tangentes à C_f au point A d'abscisse -11 et au point B d'abscisse 8.

Application 4 : Dans le plan muni du repère (O, I, J), soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe C_f au point $A(-3; 1)$ passe par le point $B(2; -1)$.

Déterminer le nombre dérivé $f'(-3)$.

Propriété 2 : La tangente à la courbe représentative C_f au point A admet pour équation :

$y =$

Preuve : Méthode pour obtenir l'équation réduite de la tangente à C_f en $A(a; f(a))$:

On cherche à obtenir une équation de la tangente de la forme $y = mx + p$.

- m est le coefficient directeur de la tangente, donc $m =$
- Pour obtenir p, on utilise le fait que A appartient à C_f et à la tangente

Application 1 (suite) : e) Déterminer l'équation de la tangente à $f : x \to x^2$ en 1.

Exercice 20 : Equation de tangentes

1. Déterminer une équation de la tangente au point $A(-1\,;2)$ à C_f sachant que : $f'(-1) = 3$.
2. Déterminer une équation de la tangente T au point $A(1\,;3)$ à C_f sachant que le coefficient directeur de T est 4.

Exercice 21 : Nombre dérivé et tangente

1. Le point $A(1\,;7)$ appartient à C_f et on donne $f'(1) = 5$.
   Placer le point A, puis tracer la tangente à C_f en A.
2. Le point $B(2\,;7)$ appartient à C_f et on donne $f'(2) = -2$.
   Placer le point B, puis tracer la tangente à C_f en B.

Exercice 22 : Equation de tangentes

Soit f une fonction et f' sa fonction dérivée.
Donner une équation de la tangente au point A de C_f d'abscisse x_A sachant que :

1. $f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f'(x) = 2x - 5$ en $x_A = 2$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ en $x_A = -1$
3. $f(x) = x^3 + 1$ et $f'(x) = 3x^2$ en $x_A = 2$