Chapitre : Vecteurs (2) : Colinéarité (correction)

Compétence : Vecteurs colinéaires

Exercice 6 : Multiplication d'un vecteur par un réel et coordonnées

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.

Calculer les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ dans les cas suivants :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $k=-3$

$-3\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $k=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\\\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ **soit** $\frac{3}{4}\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $k=\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\times\sqrt{2}\\\sqrt{3}\times\sqrt{5}\end{pmatrix}$ **soit** $\sqrt{3}\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\\sqrt{15}\end{pmatrix}$

Exercice 2 : Vecteurs colinéaire et coordonnées

Existe-t-il un nombre réel k tel que $\vec{v}=\ k\vec{u}$ lorsque :

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4{,}5\\-6\end{pmatrix}$?

$\frac{4{,}5}{-1{,}5}=-3$ **et** $-\frac{6}{2}=-3$ **ainsi** $\vec{v}=\ -3\vec{u}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}0{,}7\\1{,}2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3{,}5\\5\end{pmatrix}$?

$\frac{3{,}5}{5}=0{,}7$ **et** $\frac{5}{1{,}2}=0{,}6\neq 0{,}7$ **NON**

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-2\end{pmatrix}$?

$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$ **et** $\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$ **ainsi** $\vec{v}=\frac{1}{4}\vec{u}$

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-5\end{pmatrix}$?

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ **et** $\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2}\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{u}$

Exercice 3 : Vecteurs colinéaire et coordonnées

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui déterminer le nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\9\end{pmatrix}$?

1ère méthode : $\frac{-1}{-9} = \frac{1}{9}$ **et** $\frac{0}{9} = 0 \neq \frac{1}{9}$	**2ème méthode :** $-1 \times 9 - 0 \times (-9) = -9 \neq 0$
Ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires.	

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1{,}8\\5{,}4\end{pmatrix}$?

1ère méthode : $\frac{-2}{1{,}8} = -\frac{10}{9}$ **et** $\frac{-6}{5{,}4} = -\frac{10}{9}$	**2ème méthode :** $-2 \times 5{,}4 - (-6) \times 1{,}8 = -10{,}8 + 10{,}8 = 0$
Ainsi les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u} = -\frac{10}{9}\vec{v}$	

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-20\end{pmatrix}$?

1ère méthode : $\frac{\frac{1}{4}}{-3} = -\frac{1}{12}$ **et** $\frac{\frac{5}{3}}{-20} = -\frac{1}{12}$	**2ème méthode :** $\frac{1}{4} \times (-20) - \frac{5}{3} \times (-3) = -5 + 5 = 0$
Ainsi les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u} = -\frac{1}{12}\vec{v}$	

d. $\vec{u}\begin{pmatrix}0{,}01\\0{,}001\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10^{-3}\\10^{-4}\end{pmatrix}$?

1ère méthode : $\frac{0{,}01}{10^{-3}} = 10$ **et** $\frac{0{,}001}{10^{-4}} = 10$	**2ème méthode :** $10^{-2} \times 10^{-4} - 10^{-3} \times 10^{-4} = 10^{-6} - 10^{-6} = 0$
Ainsi les vecteurs sont colinéaires et $\vec{u} = 10\vec{v}$	

Exercice 4 : Combinaisons linéaires et coordonnées de vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\ )$.
Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D.

1. $\overrightarrow{OA} = -2\,\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

On sait que $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ **et** $O(0\,;0)$.
$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\times 1+3\times 0\\-2\times 0+3\times 1\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ **ainsi** $A(-2\,;3)$.

2. $\overrightarrow{OB} = -(\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\,) + (\,-2\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,)$

$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-(1+2\times 0)+(-2\times 1-0)\\-(0+2\times 1)+(-2\times 0-1)\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$
ainsi $B(-3\,;-3)$.

3. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}(\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}\,) - \frac{3}{4}(\,-\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,)$

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(1-0)-\frac{3}{4}(-1+0)\\\frac{1}{4}(0-1)-\frac{3}{4}(-0+1)\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **ainsi**
$B(1\,;-1)$.

4. $\overrightarrow{OD} = -3(5\,\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}\,)$

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-3(5\times 1-3\times 0)\\-3(5\times 0-3\times 1)\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-15\\9\end{pmatrix}$ **ainsi**
$B(-15\,;9)$.

Exercice 5 : Combinaisons linéaires et coordonnées de vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\ )$.
Soit les vecteurs $\vec{u} = -2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 3\,\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

On calcule d'abord les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\times 1+0\\-2\times 0+1\end{pmatrix}$ **soit** $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
$\vec{v}\begin{pmatrix}3\times 1+4\times 0\\3\times 0+4\times 1\end{pmatrix}$ **soit** $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-2-3\\1-4\end{pmatrix}$ **soit** $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

2. $\vec{w} = 3(-\vec{u} + \vec{v})$

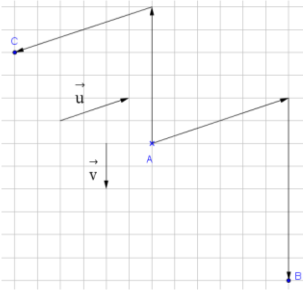
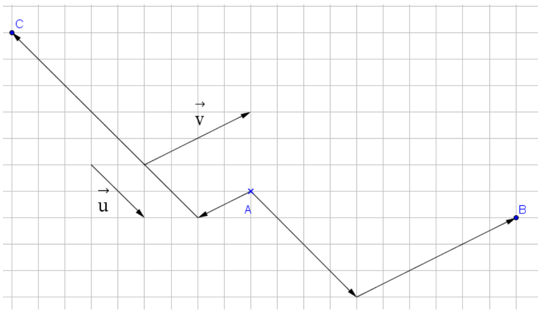
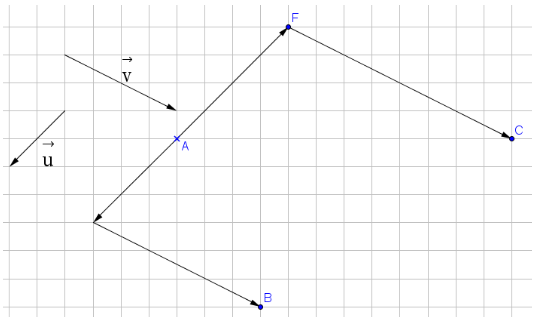
$\vec{w}\begin{pmatrix}3(2+3)\\3(-1+4)\end{pmatrix}$ **soit** $\vec{w}\begin{pmatrix}15\\9\end{pmatrix}$

3. $\vec{w} = -5(\vec{u} - \vec{v}) + 3(-\vec{u} - 2\vec{v})$

$\vec{w}\begin{pmatrix}-5(-2-3)+3(2-6)\\-5(1-4)+3(-1-8)\end{pmatrix}$ **soit** $\vec{w}\begin{pmatrix}13\\-12\end{pmatrix}$

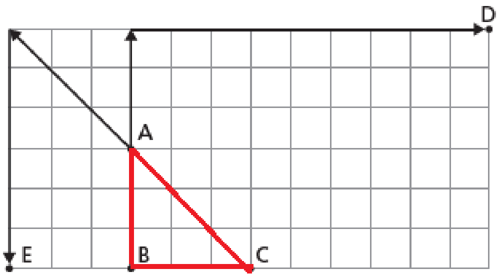
Exercice 6 : Combinaisons linéaires et construction de vecteurs

Construire les points B et C

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = -3\vec{v} - 2\vec{u}$	$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{5}{2}\vec{u}$	$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ et $\overrightarrow{AC} = -2(\vec{u} - \vec{v})$
		

Exercice 7 : Triangle et construction de points vérifiant une combinaison linéaire de vecteurs.

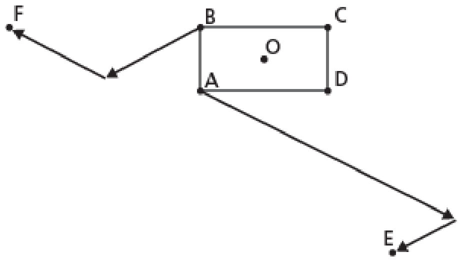
1. Tracer un triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que $AB = 3$ cm



2. Construire les points D et E vérifiant :
   a. $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$
   b. $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

Exercice 8 : Rectangle et construction de points vérifiant une combinaison linéaire de vecteurs.

1. Tracer un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 2$ cm et $AD = 4$ cm

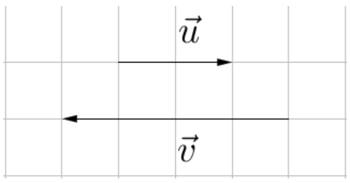


2. Construire les points E et F vérifiant :
   a. $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{OC}$
   b. $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$

Exercice 9 : Multiplication d'un vecteur par un réel et construction

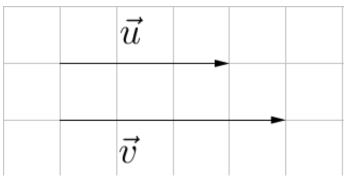
Pour chacune des figures suivantes, trouver le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

a.



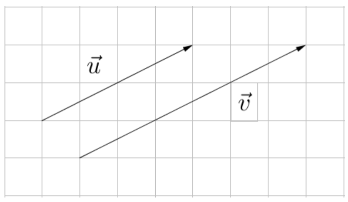
$\boldsymbol{\vec{v} = -2\vec{u}}$

b.



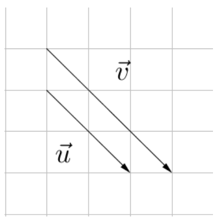
$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{4}{3}\vec{u}}$

c.



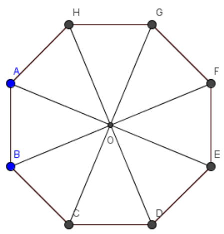
$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}}$

d.



$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}}$

Exercice 10 : Octogone et vecteurs colinéaires



$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.

Répondre par vrai ou faux et justifier

a. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires.	c. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires.
Faux (pas la même direction).	**Vrai (même direction)**
b. Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires.	d. Les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Vrai (même direction)	**Vrai (même direction)**

Exercice 11 : Parallélisme et vecteurs colinéaires

Vérifier si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Méthode : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles sinon elles ne le sont pas.

a. $A(-3\,;2), B(3\,;3), C(-3\,;\,-3)$ et $D(5\,;\,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ **et** $\frac{2}{1}=2\neq\frac{4}{3}$

2ème méthode :

$6\times 2-1\times 8=12-8=4\neq 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

b. $A(0\,;5), B(3\,;0), C(-3\,;\,8)$ et $D(3\,;\,-2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{6}{3}=2$ **et** $\frac{-10}{-5}=2$

2ème méthode :

$3\times(-10)-(-5)\times 6=-30+30=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

c. $A(-1\,;4), B(3\,;3), C(-3\,;\,1)$ et $D(4\,;\,-3)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{7}{4}$ **et** $\frac{-4}{-1}=4\neq\frac{7}{4}$

2ème méthode :

$4\times(-4)-(-1)\times 7=-16+7=-9\neq 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires alors les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

d. $A(6\,;5), B(4\,;1), C(2\,;\,3)$ et $D(-0{,}5\,;\,-2)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2{,}5\\-5\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{-2{,}5}{-2}=\frac{5}{4}$ **et** $\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}$

2ème méthode :

$-2\times(-5)-(-4)\times(-2{,}5)=10-10=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 12 : Points alignés et vecteurs colinéaires

Vérifier si les trois points sont alignés

Méthode : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés.

a. $A(-3\,;3), B(5\,;-3)$ et $C(1\,;\,0)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ et $\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

2ème méthode :

$8\times(-3)-(-6)\times 4=-24+24=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors les 3 points sont alignés.

b. $E(3\,;3), F(2\,;1)$ et $G(-1\,;\,-3)$.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{-4}{-1}=4$ et $\frac{-6}{-2}=3\neq 4$

2ème méthode :

$-1\times(-6)-(-2)\times(-4)=6-8=-2$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires alors les 3 points ne sont pas alignés.

c. $H(-2\,;6), I(-1\,;3{,}5)$ et $J(2\,;\,-4)$.

$\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}1\\-2,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HJ}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{4}{1}=4$ et $\frac{-10}{-2{,}5}=4$

2ème méthode :

$1\times(-10)-(-2,5)\times 4=-10+10=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HJ}$ sont colinéaires alors les 3 points sont alignés.

d. $K\left(\frac{7}{5}\,;1\right), L\left(\frac{4}{5}\,;4\right)$ et $M(1\,;\,3)$.

$\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\2\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}$

2ème méthode :

$-\frac{3}{5}\times 2-3\times\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires alors les 3 points sont alignés.

e. $N(2{,}5\,;0), P(-2\,;4)$ et $Q(-0{,}5\,;\,2{,}7)$.

$\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}-4,5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix}-3\\2,7\end{pmatrix}$

1ère méthode :

$\frac{-3}{-4{,}5}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ et $\frac{2{,}7}{4}\neq\frac{2}{3}$

2ème méthode :

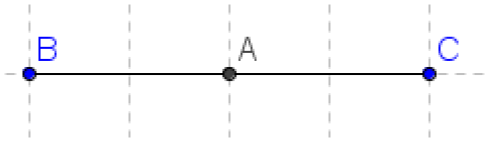
$-4,5\times 2,7-4\times(-3)=-12,15+12=-0,15\neq 0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ ne sont pas colinéaires alors les 3 points ne sont pas alignés.

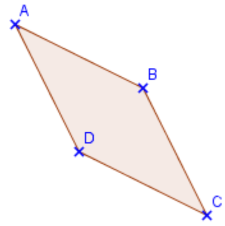
Exercice 13 : Propriétés et vecteurs

Voici une liste de propositions

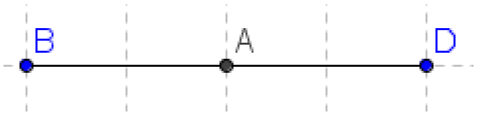
a. Le point A est le milieu de $[BC]$ **avec 5 et 7**



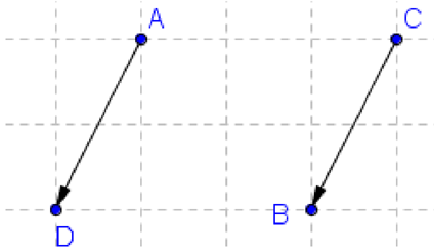
b. $ABCD$ est un parallélogramme **avec 1 et 2**



c. D est le symétrique de B par rapport à A **avec 6 et 8**



d. Le point B est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. **avec 3 et 4**



Dans chaque cas, faire une figure puis trouver dans la liste ci-dessous deux conclusions possibles :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
3. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
4. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$
5. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$
6. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
7. $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA}$
8. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Exercice 14 : Vrai ou faux ?

1. Si $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$ alors A, B et C sont alignés
2. Si $2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$ alors $A \in [BC]$
3. Si $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{DC}$ alors A, B, C et D sont alignés
4. Si $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{DC}$ alors $(AB) /\!/ (CD)$
5. Si $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{DC}$ alors $ABCD$ est un trapèze
6. Si $AB = CD$ alors $ABDC$ est un parallélogramme

VRAI : 1 et 4 **FAUX : 2, 3, 5 et 6**

Compétence : Géométrie et vecteurs

Exercice 15 :

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

1. Placer les points $A(2\,;1), B(5\,;3), C(3\,;\ -3)$ et $D(6\,;\ -1)$.
2. Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $ABDC$ est un parallélogramme.

3. a. Soit E le symétrique de D par rapport à B. En déduire une égalité de deux vecteurs.

Cela signifie que le point B est le milieu de $[ED]$ ainsi : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB}$

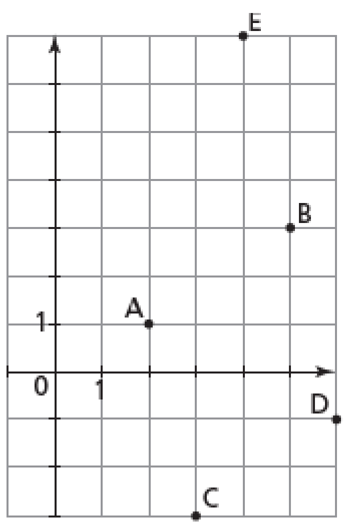
b. Utiliser cette égalité pour calculer les coordonnées du point E.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_B = x_B - x_D \\ y_E - y_B = y_B - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 5 = 5 - 6 \\ y_E - 3 = 3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 7 \end{cases}.$$

Ainsi $E(4\,;7)$.

4. Démontrer que $ACBE$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$ donc $ACBE$ est un parallélogramme.



Exercice 16 :

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.

1. Placer les points $A(-3\,;-3), B(-2\,;1), C(2\,;\ 2)$ et $D(1\,;\ -2)$. **A faire.**
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2+2\\2-1\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1+3\\-2+3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

3. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Ainsi $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Démontrer que $ABCD$ est un losange.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2+3\\1+3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ **ainsi** $AB=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **ainsi** $BC=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$.

ABCD est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur, ainsi $ABCD$ est un losange.

Exercice 17 :

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.

1. Placer les points $A(-1\,;0), B(2\,;1)$ et $C(3\,;\ -2)$. **A faire**
2. Soit D le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme

   a. Calculer les coordonnées du point D. Vérifier graphiquement la réponse.

$ABCD$ est un parallélogramme$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-x_A=x_C-x_D\\y_B-y_A=y_C-y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2+1=3-x_D\\1-0=-2-y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=0\\y_D=-3\end{cases}$.

Ainsi $D(0\ ;\ -3)$

   b. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ **donc** $AB=\sqrt{10}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ **donc** $AC=\sqrt{20}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ **donc** $BC=\sqrt{10}$

   c. Démontrer que l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.

On remarque que $AC^2=AB^2+BC^2$ ainsi d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
On a bien montré que l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

$ABCD$ est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux et un angle droit. C'est donc un carré.

Compétence : Colinéarité en géométrie repérée

Exercice 18 : Colinéarité en géométrie repérée

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-2\,;3)$, $B(4\,;7)$ et $C(3\,;2)$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4+2\\7-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

$6\times 2-4\times 3=12-12=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

2. $M(x\,;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Calculer x pour que les points A, B et M soient alignés.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\0-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$.

A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 4(x+2)-(-3)\times 6=0$

$\Leftrightarrow 4x+8+18=0$

$\Leftrightarrow 4x=-26$

$\Leftrightarrow x=-\frac{26}{4}$.

$M(-6{,}5\,;0)$.

Exercice 19 : Colinéarité en géométrie repérée

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-2\,;-1)$, $B(0\,;4)$, $C(2\,;\ -3)$ et $D(6\,;-1)$.

1. $M(x\,;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Calculer x pour que les points A, B et M soient alignés.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\0+1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+2\\4+1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 5(x+2)-1\times 2=0$

$\Leftrightarrow 5x+10-2=0$

$\Leftrightarrow 5x=-8$

$\Leftrightarrow x=-\frac{8}{5}$.

$M(-\frac{8}{5};0)$.

2. Démontrer que les droites (CM) et (BD) sont parallèles.

$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}-2\\0+3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-\frac{18}{5}\\3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6-0\\-1-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

$-\frac{18}{5}\times(-5)-3\times 6=18-18=0$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, donc les droites (CM) et (BD) sont parallèles.

Exercice 20 : Colinéarité en géométrie repérée

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3\,;2)$ et $B(-1\,;7)$.

Le point $M\left(-6\,;\ -\frac{11}{2}\right)$ est-il un point de (AB) ?

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-6+3\\-\frac{11}{2}-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{15}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1+3\\7-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$-3\times 5-\left(-\frac{15}{2}\right)\times 2=-15+15=0.$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A, B et M sont alignés c'est à dire $M\in(AB)$.

Exercice 21 : Colinéarité en géométrie repérée

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(3\,;2)$, $B(7\,;3)$, $C(-3\,;\ y)$ et $D(1\,;-3)$.

Calculer y pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-3\\3-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1+3\\-3-y\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-3-y\end{pmatrix}$

$(AB)\ /\!/\ (CD)$ **$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires**

$\Leftrightarrow 4(-3-y)-1\times 4=0$

$\Leftrightarrow -12-4y-4=0$

$\Leftrightarrow -4y=16$

$\Leftrightarrow y=-4.$

$C(-3;-4).$

Compétence : Colinéarité en géométrie non repérée

Exercice 22 : Colinéarité en géométrie non repérée

A et B sont deux points distincts.

On se propose de construire le point M tel que : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

1. A l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}}$

Or $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}}$. Ainsi $\boldsymbol{-3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}}$.

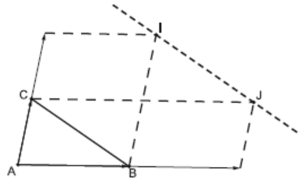
2. Pourquoi M est-il un point de la droite (AB) ? Le construire.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AM}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ sont colinéaires ainsi les points $\boldsymbol{A, M}$ et $\boldsymbol{B}$ sont alignés donc $\boldsymbol{M \in (AB)}$.

Exercice 23 : Colinéarité en géométrie non repérée

ABC est un triangle.

1. Construire les points I et J tels que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$



2. a. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ puis en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}}$	$\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}=-\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}$

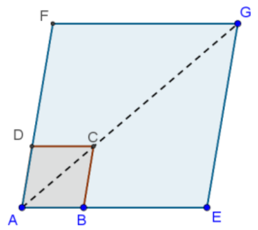
b. Que peut-on en déduire sur les droites (IJ) et (BC) ?

$\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{CB}}$ sont colinéaires ainsi les droites $\boldsymbol{(IJ)}$ et $\boldsymbol{(BC)}$ sont parallèles.

Exercice 24 : Colinéarité en géométrie non repérée

$ABCD$ et $AEGF$ sont deux parallélogrammes tels que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$
Démontrer que les points A, C et G sont alignés.



$\boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=3\overrightarrow{AC}}$

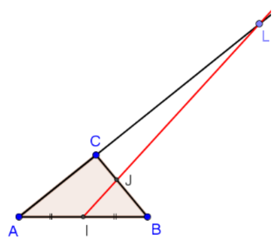
$\boldsymbol{\overrightarrow{AG}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ sont colinéaires ainsi les points $\boldsymbol{A, G}$ et $\boldsymbol{C}$ sont alignés.

Exercice 25 : Colinéarité en géométrie non repérée

ABC est un triangle.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.



$\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}}$

2. En déduire que les points I, J et L sont alignés.

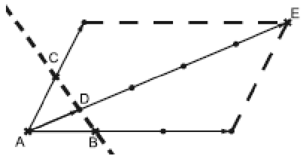
On remarque que $\boldsymbol{\overrightarrow{IL}=5\overrightarrow{IJ}}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{IL}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{IJ}}$ sont colinéaires ainsi les points $\boldsymbol{I, J}$ et $\boldsymbol{L}$ sont alignés

Exercice supplémentaire : Colinéarité en géométrie non repérée

ABC est un triangle.

1. Construire le point D tel que : $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.



On construit $\boldsymbol{E}$ tel que : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ puis D tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

2. a. A l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

b. Que peut-on en déduire sur les points B, C et D.

$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. **Ainsi $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les points B, C et D sont alignés.**

Exercice supplémentaire : Colinéarité en géométrie non repérée

ABC est un triangle.

D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	**$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$**

2. En déduire que les points B, C et D sont alignés.

On remarque que : $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$. **Ainsi $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires donc les points B, C et D sont alignés.**

Compétence : Logique et vecteurs

Exercice 26 : Y'a-t-il équivalence ?

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

	P	Q
1	$AB = DC$	$ABCD$ est un parallélogramme
2	C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$ABCD$ est un parallélogramme
3	$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{AC}$	A, B et C sont alignés
4	$\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{AC}$	$AB = 2AC$
5	Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$	$(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$
6	$AI = IB$	I est le milieu du segment $[AB]$
7	$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$	$2\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$
8	$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$	$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$
9	$A(-3\,;0)$ et $B(7\,;3)$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$

Compléter le tableau suivant en indiquant si les phrases mathématiques sont justes ou fausses.

Numéro	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1	**F**	**V**	**F**
2	**V**	**V**	**V**
3	**V**	**F**	**F**
4	**V**	**F**	**F**
5	**V**	**V**	**V**
6	**F**	**V**	**F**
7	**V**	**V**	**V**
8	**V**	**F**	**F**
9	**V**	**F**	**F**

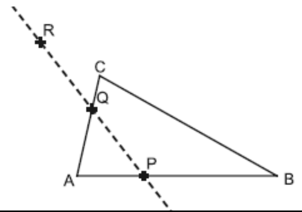
Compétence : Choisir un repère pour démontrer

Exercice supplémentaire : Choisir un repère pour démontrer

ABC est un triangle, P, Q, R sont tels que :

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

1. Faire une figure



2. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de P, Q et R.

a) Dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **ainsi** $P\left(\frac{1}{3} ; 0\right)$.

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **ainsi** $Q\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ **ainsi** $R\left(-\frac{1}{3} ; \frac{4}{3}\right)$.

b) Dans le repère $\left(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ **ainsi** $P\left(0 ; \frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ **ainsi** $Q\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$ **ainsi** $R\left(\frac{4}{3} ; 0\right)$.

c) Dans le repère $\left(C ; \overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ}\right)$

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

Or $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ **et** $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ **donc** $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CR} + 2\overrightarrow{CQ}$ **ainsi** $P(-1 ; 2)$

Par définition d'un repère $Q(0 ; 1)$ **et** $R(1 ; 0)$

3. a. Quel repère choisir pour démontrer que les points P, Q et R sont alignés ?

On choisit le repère $\left(C ; \overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ}\right)$.

b. Le démontrer.

Dans le repère $\left(C ; \overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ}\right)$ **on a :** $\overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **et** $\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{RP} = 2\overrightarrow{RQ}$ **ainsi les vecteur** $\overrightarrow{RP}$ **et** $\overrightarrow{RQ}$ **sont colinéaire et les points** P, Q **et** R **sont alignés.**

Compétence : Vecteur directeur

Exercice 27 : Vecteurs directeurs

Dire si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(1 ; 2), B(3 ; 7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\7-2\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ **ainsi les vecteurs sont colinéaires et** $\vec{u}$ **est un vecteur directeur de la droite** (AB).

2. $A(-3 ; 2), B(4 ; 7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4+3\\7-2\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

$5 \times 5 - 1 \times 7 = 25 - 7 = 18 \neq 0$

Ainsi les vecteurs ne sont pas colinéaires et $\vec{u}$ **n'est pas un vecteur directeur de la droite** (AB).

3. $A(-1 ; 3), B(7 ; 3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7+1\\3-3\end{pmatrix}$ **soit** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ **ainsi les vecteurs sont colinéaires et** $\vec{u}$ **est un vecteur directeur de la droite** (AB).