Chapitre : Primitive

Exercice 1 : Dériver F pour montrer que c'est une primitive de f

Dans chaque cas, déterminer si la fonction F est une primitive de f

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

$F(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = x^2$ $\qquad v(x) = x + 3$

$u'(x) = 2x$ $\qquad v'(x) = 1$

$$F'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

$$F'(x) = \frac{2x(x+3) - 1 \times x^2}{(x+3)^2}$$

$$F'(x) = \frac{2x^2 + 6x - x^2}{(x+3)^2}$$

$$F'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$$

$$F'(x) = f(x)$$

b) $f(x) = \cos(x) - x\sin(x)$ $\qquad F(x) = x\cos(x)$

$F(x) = u(x)v(x)$ avec :

$u(x) = x$ $\qquad v(x) = cos(x)$

$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = -sin(x)$

$$F'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$F'(x) = 1 \times \cos(x) - \sin(x) \times x$$

$$F'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

c) $f(x) = \dfrac{28}{(-3x+7)^2}$ $\qquad F(x) = \dfrac{4x}{-3x+7}$

$F(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = 4x$ $\qquad v(x) = -3x + 7$

$u'(x) = 4$ $\qquad v'(x) = -3$

$$F'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

$$F'(x) = \frac{4(-3x+7) - (-3) \times 4x}{(-3x+7)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-12x + 28 + 12x}{(-3x+7)^2}$$

$$F'(x) = \frac{28}{(-3x+7)^2}$$

$$F'(x) = f(x)$$

d) $f(x) = \frac{x(3x+2)}{(3x+1)^2}$ $F(x) = \frac{x^2}{3x+1}$

$\boldsymbol{F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$ **avec :**

$\boldsymbol{u(x) = x^2}$ $\boldsymbol{v(x) = 3x+1}$

$\boldsymbol{u'(x) = 2x}$ $\boldsymbol{v'(x) = 3}$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3x^2}{(3x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{x(2(3x+1) - 3x)}{(3x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{x(6x+2-3x)}{(3x+1)^2}}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = \frac{x(3x+2)}{(3x+1)^2}}$$

$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

e) $f(x) = 16(2x+1)^7$ $F(x) = (2x+1)^8$

$\boldsymbol{F(x) = g(u(x)) = (u(x))^8}$ **avec :**

$\boldsymbol{u(x) = 2x+1}$ $\boldsymbol{g(x) = x^8}$

$\boldsymbol{u'(x) = 2}$ $\boldsymbol{g'(x) = 8x^7}$

$\boldsymbol{F'(x) = u'(x)g'(u(x))}$

$\boldsymbol{F'(x) = 8u'(x)(u(x))^7}$

$\boldsymbol{F'(x) = 8 \times 2 \times (2x+1)^7}$

$\boldsymbol{F'(x) = 16(2x+1)^7}$

$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

f) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ $F(x) = \cos^3(x)$

$\boldsymbol{F(x) = g(u(x)) = (cos(x))^3}$ **avec :**

$\boldsymbol{u(x) = cos(x)}$ $\boldsymbol{g(x) = x^3}$

$\boldsymbol{u'(x) = -sin(x)}$ $\boldsymbol{g'(x) = 3x^2}$

$\boldsymbol{F'(x) = u'(x)g'(u(x))}$

$\boldsymbol{F'(x) = 3u'(x)(u(x))^2}$

$\boldsymbol{F'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)}$

$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Exercice 2 : Primitives d'une fonction usuelle

Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x^2$	2. $f(x) = x^9 + 1$	3. $f(t) = 3t^2 + 2t$
$\boldsymbol{F(x) = \frac{2}{3}x^3}$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{x^{10}}{10} + x}$	$\boldsymbol{F(t) = t^3 + t^2}$
4. $f(t) = -5t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8$	5. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$	6. $f(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$
$\boldsymbol{F(t) = -\frac{5}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 8t}$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{F(x) = 2x - \frac{3}{x}}$
7. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$	8. $f(x) = 3\cos x$	9. $f(x) = \sin(3x + 2)$
$\boldsymbol{F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}}$ **Car si** $\boldsymbol{g(x) = -\frac{1}{x^3} = -x^{-3}}$ $\boldsymbol{G(x) = \frac{-1}{-2}x^{-2} = \frac{1}{2x^2}}$	$\boldsymbol{F(x) = 3\sin(x)}$	$\boldsymbol{F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x+2)}$

Exercice 3 : Primitives d'une fonction usuelle

Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x - 7$	b) $f(t) = 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)$
$\boldsymbol{F(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 - 7x}$ $\boldsymbol{= \frac{3}{2}x^2 - 7x}$	$\boldsymbol{F(t) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\sin\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}$ $\boldsymbol{= \frac{3}{4}\sin\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)}$
c) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$	d) $f(t) = 8\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$
$\boldsymbol{F(x) = 4 \times \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x}$ $\boldsymbol{= \frac{4}{3}x^3 - x^2 + x}$	$\boldsymbol{F(t) = 8 \times \left(-\frac{1}{3}\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$ $\boldsymbol{= -\frac{8}{3}\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)}$
e) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$	f) $f(t) = 4t^2 - 8t + 3$
$\boldsymbol{F(x) = x + \frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{F(t) = 4 \times \frac{1}{3}t^3 - 8 \times \frac{1}{2}t^2 + 3t}$ $\boldsymbol{= \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 3t}$
g) $f(x) = 3\cos(2x)$	h) $f(t) = 9t + 3$
$\boldsymbol{F(x) = 3 \times \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{3}{2}\sin(2x)}$	$\boldsymbol{F(t) = 9 \times \frac{1}{2}t^2 + 3t}$ $\boldsymbol{= \frac{9}{2}t^2 + 3t}$
i) $f(x) = -4\sin(6x - 1)$	j) $f(t) = 6$
$\boldsymbol{F(x) = -4 \times \left(-\frac{1}{6}\cos(6x - 1)\right)}$ $\boldsymbol{= \frac{4}{6}\cos(6x - 1)}$ $\boldsymbol{= \frac{2}{3}\cos(6x - 1)}$	$\boldsymbol{F(t) = 6t}$
k) $f(x) = \cos(7 - 3x)$	l) $f(t) = \sin(\pi t - 4) + 2\cos(5 - t)$
$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{-3}\sin(7 - 3x)}$ $\boldsymbol{= -\frac{1}{3}\sin(7 - 3x)}$	$\boldsymbol{F(t) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t - 4) + 2(-\sin(5 - t))}$ $\boldsymbol{= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t - 4) - 2\sin(5 - t)}$

m) $f(x) = 2 - 3x^2 + 5x^3 - x^7$

n) $f(t) = 5\cos(3t) - 6\sin(4t-1)$

$\boldsymbol{F(x) = 2x - x^3 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{8}x^8}$	$\boldsymbol{F(t) = \frac{5}{3}\sin(3t) - 6\left(-\frac{1}{4}\cos(4t-1)\right)}$ $\boldsymbol{= \frac{5}{3}\sin(3t) + \frac{3}{2}\cos(4t-1)}$

Exercice 4 : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)^4$. **(Hors programme)**
   Déterminer les primitives de f, puis la primitive F_0 telle que $F_0(-1) = 2$.

On a $u(x) = 2x + 1$ donc **$u'(x) = 2$ ainsi** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^4(x)}$ **Soit $C \in \mathbb{R}\mathbb{R}$** $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}u^5(x) + C}$ $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C}$	**Or $F(-1) = 2$** $\boldsymbol{\frac{1}{10}(2 \times (-1) + 1)^5 + C = 2}$ $\boldsymbol{\frac{1}{10}(-1)^5 + C = 2}$ $\boldsymbol{-\frac{1}{10} + C = 2}$ $\boldsymbol{C = \frac{20}{10} + \frac{1}{10}}$ $\boldsymbol{C = \frac{21}{10}}$ **Ainsi $F(x) = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + \frac{21}{10}$**

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
   Déterminer les primitives de f, puis la primitive F_0 telle que $F_0(0) = 1$.

Soit $C \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{F(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + C}$	**Or $F(0) = 1$** $\boldsymbol{\frac{3}{2}\sin\left(2 \times 0 - \frac{\pi}{2}\right) + C = 1}$ $\boldsymbol{\frac{3}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C = 1}$ $\boldsymbol{-\frac{3}{2} + C = 1}$ $\boldsymbol{C = \frac{5}{2}}$ **Ainsi $F(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{2}$**

Exercice 5 : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle donné vérifiant la condition donnée.

a) $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ $\qquad F(0) = 8$ $\qquad I = \mathbb{R}$

Soit $C \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{F(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C}$	$\boldsymbol{F(0) = 8}$ $\boldsymbol{\frac{5}{4} \times 0^4 + \frac{2}{3} \times 0^3 - \frac{3}{2} \times 0^2 + 0 + C = 8}$ $\boldsymbol{C = 8}$
$\boldsymbol{F(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 8}$	

b) $f(x) = 3\cos(x)$ $\qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ $\qquad I = \mathbb{R}$

Soit $C \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{F(x) = 3\sin(x) + C}$	$\boldsymbol{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5}$ $\boldsymbol{3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 5}$ $\boldsymbol{3 + C = 8}$ $\boldsymbol{C = 5}$
$\boldsymbol{F(x) = 3\sin(x) + 5}$	

c) $f(t) = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$

Soit $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{F(t) = -\frac{5}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + C}$	$\boldsymbol{F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3}$ $\boldsymbol{-\frac{5}{2}\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C = 3}$ $\boldsymbol{-\frac{5}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + C = 3}$ $\boldsymbol{-\frac{5}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + C = 3}$ $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{4} + C = 3}$ $\boldsymbol{C = 3 - \frac{5\sqrt{2}}{4}}$ $\boldsymbol{C = \frac{12 - 5\sqrt{2}}{4}}$
$\boldsymbol{F(t) = -\frac{5}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{12 - 5\sqrt{2}}{4}}$	

d) $f(t) = t + 5$ $\quad$ $F(4) = -6$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$

Soit $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{F(t) = \frac{1}{2}t^2 + 5t + C}$	$\boldsymbol{F(4) = -6}$ $\boldsymbol{\frac{1}{2} \times 4^2 + 5 \times 4 + C = -6}$ $\boldsymbol{8 + 20 + C = -6}$ $\boldsymbol{C = -6 - 28}$ $\boldsymbol{C = -34}$
$\boldsymbol{F(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 5t - 34}$	

Exercice 6 : *BAC STI2D – Polynésie juin 2014*

On considère une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

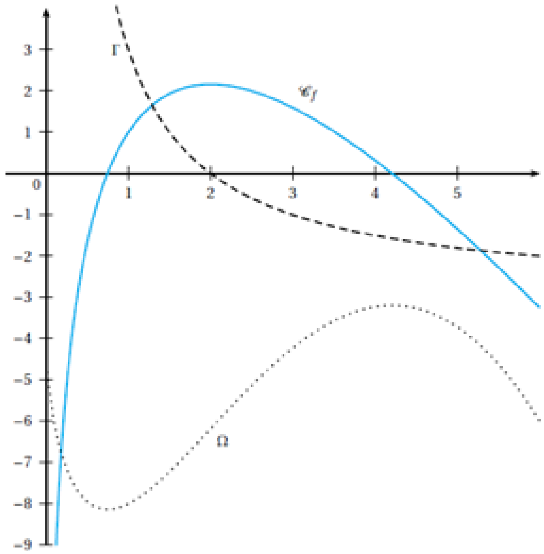
Le point $A(1\,;1)$ appartient à C_f.

C_f admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

Sur le graphique ci-contre, on a tracé C_f (trait plein) ainsi que les courbes Ω et Γ.

L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.

Identifier chacune des courbes, en justifiant soigneusement.



On sait que :

- **les variations de la fonction f permettent de donner le signe de sa dérivée f'**
- **le signe de la fonction f permet de donner les variations d'une de ses primitives F**

On a :

x	0		$0,7$		$4,1$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi la fonction F est décroissante sur $]0\,;\,0,7]$, croissante sur $[0,7\,;4,1]$ et décroissante sur $[4,1\,;\,+\infty[$.
La fonction Fest donc représenté par Ω.

x	0		2		$+\infty$
f	‖	$\nearrow$	2	$\searrow$	

Ainsi la fonction f' est positive sur $]0\,;\,2]$ et négative sur $[2\,;\,+\infty[$.
La fonction f'est donc représenté par Γ.

Exercice 7 : *BAC STI2D – Antilles-Guyane juin 2013*

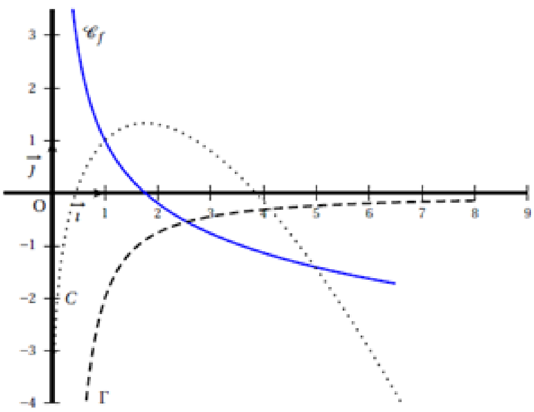
On considère une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

Sur le graphique ci-contre, on donne C_f et les courbes C et Γ.

L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.

a) Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.



Sur le graphique on voit que f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$; donc sur cet intervalle $f'(x) \leq 0$: seuls les points de Γ ont leurs ordonnées négatives : Γ est donc la représentation de $f\,'$.

b) Par lecture graphique, donner $F(1)$

D'après la question précédente C est la représentation graphique de l'une des primitives de f.
On lit sur le graphe que le point de C d'abscisse 1 a pour ordonnée 1. $F(1)\ =\ 1$.

Exercice 8 :

La vitesse d'un avion de chasse en m/s est donnée par une fonction v du temps t définie sur l'intervalle $[\ 0\ ; 10\ ]$ par :

$$v(t\ ) = \ -1{,}5t^2 + 48t + 200$$

On note $x(t)$ la distance parcourue par l'avion au bout de t secondes et on rappelle que x est une primitive de v.

a) Montrer que les fonctions définies sur $[\ 0\ ; 10\ ]$ par $t \ \longmapsto -0{,}5\ t^3 + 24t^2 + 200t + k$ sont des primitives de v.

$\boldsymbol{f(t) = \ -0,5t^3 + 24t^2 + 200t + k}$ $\boldsymbol{f}$ **est une primitive de** $\boldsymbol{v}$ **si** $\boldsymbol{f'(t) = v(t)}$ $\boldsymbol{f'(t) = -0,5 \times 3t^2 + 24 \times 2t + 200 \times 1 + 0}$ $\boldsymbol{f'(t) = \ -1,5\ t^2 + 48t + 200}$ $\boldsymbol{f'(t) = v(t)}$ **Donc les fonctions** $\boldsymbol{f}$ **sont bien des primitives de** $\boldsymbol{v}$ **.**

b) Justifier que, pour tout $t \in [\ 0\ ; 10\ ]$, $x(t) = \ -0{,}5\ t^3 + 24t^2 + \ 200t$.

$\boldsymbol{x}$ **est une primitive de** $\boldsymbol{v}$ **donc d'après la question précédente, on a :** $\boldsymbol{x(t) = \ -0,5t^3 + 24t^2 + 200t + k}$ **avec** $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ **On cherche** $\boldsymbol{k}$ **pour avoir** $\boldsymbol{x(0) = \ 0}$ **(à** $\boldsymbol{t = 0}$**, l'avion n'a pas bougé, la distance parcourue est nulle)** $\boldsymbol{-0,5 \times 0^3 + 24 \times 0^2 + 200 \times 0 + k = 0}$ $\boldsymbol{k \ = \ 0}$ **On a bien** $\boldsymbol{x(t) = \ -0,5t^3 + 24t^2 + 200t}$

c) Quelle distance sera parcourue par l'avion au bout de 10 secondes ?

Au bout de 10 secondes, la distance parcourue est : $\boldsymbol{x(10) = -0,5 \times 10^3 + 24 \times 10^2 + 200 \times 10 = 3900m}$

Exercice 9 :

Un projectile est lâché sans vitesse initiale à 500m d'altitude. Il tombe vers la Terre sous l'effet de la pesanteur dans un mouvement rectiligne. Son accélération est égale à 9,81 $m.s^{-2}$.

a) Déterminer sa vitesse $v(t)$ puis la distance $x(t)$ parcourue au bout de t secondes.

• On a $\boldsymbol{a(t) = 9,81}$ **et** $\boldsymbol{v}$ **est la primitive de** $\boldsymbol{a}$ **vérifiant** $\boldsymbol{v(0) = \ 0}$ **(sans vitesse initiale)** $\boldsymbol{v(t) = 9,81\ t + K}$ **avec** $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}$**.** **On doit avoir** $\boldsymbol{v(0) = 0}$ $\boldsymbol{9,81 \times 0 + K = 0}$ $\boldsymbol{K = 0}$ $$\boldsymbol{v(t) = 9,81\ t}$$ **• On a** $\boldsymbol{v(t) = 9,81t}$ **et** $\boldsymbol{x}$ **est la primitive de** $\boldsymbol{v}$ **vérifiant** $\boldsymbol{x(0) = \ 0}$ **(à** $\boldsymbol{t = 0}$ **, la distance parcourue est nulle)** $\boldsymbol{x(t) = 9,81 \times \frac{1}{2}t^2 + K = 4,905t^2 + K}$ **avec** $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}$**.** **On doit avoir** $\boldsymbol{x(0) = 0}$ $\boldsymbol{4,905 \times 0^2 + K = 0}$ $\boldsymbol{K = 0}$ $$\boldsymbol{x(t) = 4,905\ t^2 = \frac{1}{2} g\ t^2}$$

b) Déterminer à quel instant le projectile touchera le sol. Quelle sera alors sa vitesse ?

• Le projectile touche le sol lorsqu'il a parcouru 500m
On cherche donc t pour que $x(t) = 500$ (avec $t > 0$)

$$4,905t^2 = 500$$
$$t^2 = \frac{500}{4,905}$$
$$t = \sqrt{\frac{500}{4,905}} \approx 10s$$

• La vitesse au moment de l'impact est :$v(10) = 9,81 \times 10 = 98,1\ m.s^{-1}$
(pour info : $98,1\ m.s^{-1} \approx 353\ km.h^{-1}$:on a multiplié par $3,6$)

<u>Exercice 10</u> :

La voiture de course la plus rapide est capable de passer de 0 à 100 km/h en 2,4s

a) Calculer la valeur a de l'accélération que l'on suppose constante.

$100\ km.h^{-1} \approx 27,78 m.s^{-1}$
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27,78}{2,4} = 11,575\ m.s^{-2}$$

b) Déterminer la vitesse v de la voiture en fonction du temps t.

v est la primitive de a qui vérifie $v(0) = 0$
donc $v(t) = 11,575\ t + k$ avc $k \in \mathbb{R}$

On veut avoir $v(0) = 0$
$11,575 \times 0 + k = 0$
$k = 0$

On a donc $v(t) = 11,575\ t$

c) Exprimer la distance d parcourue par la voiture en fonctions du temps.

d est la primitive de v vérifiant $d(0) = 0$

$v(t) = 11,575\ t$ donc $d(t) = 11,575 \times \frac{1}{2} t^2 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
soit $d(t) = 5,7875\ t^2 + C$
On cherche C pour avoir $d(0) = 0$
$5,5875 \times 0^2 + C = 0$
$C = 0$
On a donc : $d(t) = 5,7875\ t^2$

d) Quelle distance aura parcourue la voiture en passant de 0 à 100 km/h?

La voiture passe de 0 à 100 km/h en $2,4s$;
on calcule donc $d(2,4)$:
$d(2,4) = 5,7875 \times 2,4^2 = 33,336\ m$

Exercice 11 :

Un cycliste démarre sa course avec une accélération donnée pendant les 20 premières secondes par :$a(t) = -\frac{t^2}{80} + \frac{t}{4}$ en $m.s^{-2}$, où t désigne le temps écoulé depuis le début de la course.

a) Calculer sa vitesse $v(t)$, la primitive de $a(t)$ qui s'annule en 0.

$\boldsymbol{v(t) = -\frac{1}{80} \times \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} t^2 + C}$ **avec** $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{v(t) = -\frac{1}{240} t^3 + \frac{1}{8} t^2 + C}$$

On veut avoir $\boldsymbol{v(0) = 0}$ **(" qui s'annule en 0")**

$$\boldsymbol{-\frac{1}{240} \times 0^3 + \frac{1}{8} \times 0^2 + C = 0}$$

$\boldsymbol{C = 0}$

On a donc $\boldsymbol{v(t) = -\frac{1}{240} t^3 + \frac{1}{8} t^2}$

b) Calculer la distance parcourue $x(t)$, la primitive de $v(t)$ qui s'annule en 0.

$\boldsymbol{x(t) = -\frac{1}{240} \times \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} t^3 + C}$ **avec** $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{x(t) = -\frac{1}{960} t^4 + \frac{1}{24} t^3 + C}$$

On veut avoir $\boldsymbol{x(0) = 0}$ **(" qui s'annule en 0")**

Donc $\boldsymbol{-\frac{1}{960} \times 0^4 + \frac{1}{24} \times 0^3 + C = 0}$

d'où $\boldsymbol{C = 0}$

On a donc $\boldsymbol{x(t) = -\frac{1}{960} t^4 + \frac{1}{24} t^3}$

c) Quelle distance aura parcouru le cycliste au bout de 20 secondes ?

On calcule $\boldsymbol{x(20)}$

$$\boldsymbol{x(20) = -\frac{1}{960} \times 20^4 + \frac{1}{24} \times 20^3 = \frac{500}{3} \approx 167m}$$

Exercice 12 :

Un skieur descend un pente à 45° en ligne droite.
La force de gravité est représentée par un vecteur vertical $\vec{g} = \overrightarrow{g_x} + \overrightarrow{g_y}$ comme indiqué ci dessous.

L'accélération du skieur $a(t)$ est constante égale à $||\overrightarrow{g_x}||$.

On donne $||\vec{g}||$ = 9,81 $m.s^{-2}$

L'accélération, la vitesse et la distance parcourue sont ds fonctions du temps t en secondes.

a) Calculer $||\overrightarrow{g_x}||$.

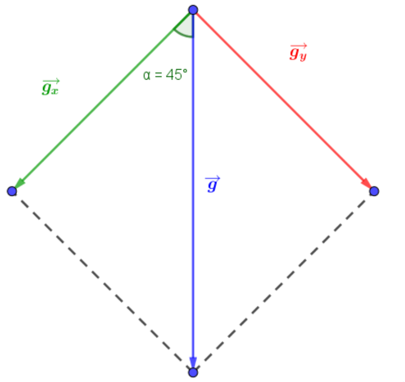
En utilisant la trigonométrie de 3ème,

$$\cos(45°) = \frac{||\overrightarrow{g_x}||}{||\vec{g}||}$$

$$||\overrightarrow{g_x}|| = ||\overrightarrow{g_x}|| \cos(45°)$$

$$||\overrightarrow{g_x}|| = 9,81 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$||\overrightarrow{g_x}|| \approx 6,94$$



b) Déterminer la vitesse du skieur $v(t)$, primitive de $a(t)$ sachant que la vitesse initiale $v(0)$ est égale à $1m/s$.

$v(t)$ est une primitive de $a(t) = 6,94$ $donc$ $v(t) = 6,94\,t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
Avec $v(0) = 1$
$6,94 \times 0 + C = 1$
$C = 1$

$$v(t) = 6,94\,t + 1$$

c) Exprimer la distance parcourue $x(t)$, primitive de $v(t)$

On a $x'(t) = v(t) = 6,94\,t + 1$ et $x(0) = 0$ (distance parcourue à $t = 0$)
$x(t) = 6,94 \times \frac{1}{2}t^2 + t + C = 3,47t^2 + t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

On cherche C : pour avoir $x(0) = 0$, on doit avoir $C = 0$
Donc $x(t) = 3,47\,t^2 + t$

d) Quelle distance aura parcouru le skieur au bout de 25 secondes ? Le résultat semble-t-il cohérent ? Commenter.

La distance parcourue au bout de 25 s est $x(25)$
$x(25) = 3,47 \times 25^2 + 25 = 2193,75\,m$

Le résultat n'est pas cohérent car on néglige les forces de frottements de la neige sur les skis, qui font ralentir le skieur.

Exercice 13 :

Un mobile glisse sans frottement le long d'un axe horizontal muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,)$.

Son accélération instantanée à l'instant t est donnée par $a(t) = \cos\left(\ 2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

1) Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse initiale est nulle, déterminer $v(t)$, la vitesse instantanée du mobile en fonction du temps t.

$\boldsymbol{v'(t) = a(t) = \cos\left(\ 2t + \frac{\pi}{2}\right)\ et\ v(0) = 0\ (vitesse\ initiale\ nulle)}$

donc $\boldsymbol{v(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + C}$ **avec** $\boldsymbol{C \in \mathbb{R}}$

On doit avoir $\boldsymbol{v(0) = 0}$ **donc :**

$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\left(\ 2 \times 0 + \frac{\pi}{2}\right) + C = 0}$

$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0}$

$\boldsymbol{\frac{1}{2} + C = 0}$

$\boldsymbol{C = -\frac{1}{2}}$

On a donc :

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{1}{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}}$$

2) A $t = 0$, le mobile , représenté par le point M d'abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O\ ;\ \vec{\imath}\,)$, se trouve en O. Exprimer l'abscisse de M en fonction de t .

$\boldsymbol{x(t)}$ **est la primitive de** $\boldsymbol{v(t)}$ **telle que** $\boldsymbol{x(0) = 0}$ **(Car M = O en** $\boldsymbol{t = 0}$**)**

Donc

$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}t + C = -\frac{1}{4}\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}t + C}$ **avec** $\boldsymbol{C \in \mathbb{R}}$

On doit avoir $\boldsymbol{x(0) = 0}$

donc :

$\boldsymbol{-\frac{1}{4}\cos\left(2 \times 0 + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \times 0 + C = 0}$

$\boldsymbol{-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 0}$

$\boldsymbol{-\frac{1}{4} \times 0 +}$

$\boldsymbol{C = 0}$

$\boldsymbol{C = 0}$

On a donc:

$$\boldsymbol{x(t) = -\frac{1}{4}cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}t}$$

Exercice 14 :

L'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal évolue en fonction du temps t suivant la formule :

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

où i_0 est l'amplitude du signal en ampères,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du signal en $rad.s^{-1}$

T est la période du signal en seconde

φ est le déphasage exprimé en radian.

Lorsque ce courant traverse une résistance R, l'énergie émise su l'intervalle $[\ 0\ ; T\ ]$ est égale à $E = R\left(\ F(T) - F(0)\right)$ où F est une primitive de i^2.

Un logiciel de calcul nous fournit deux expressions de i^2. On admet qu'elles sont égales:

$$i^2(t) = i_0^2(\sin(\omega t + \varphi))^2 \quad et\ i^2(t) = \frac{i_0^2}{2} - \frac{i_0^2}{2}\cos(\ 2\omega t + 2\varphi)$$

a) Après avoir choisi l'une de ces deux expressions, déterminer une primitive F de i^2.

$$\boldsymbol{i^2(t) = \frac{i_0^2}{2} - \frac{i_0^2}{2}\cos(\ 2\omega t + 2\varphi)}$$

Donc

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{i_0^2}{2}\ t - \frac{i_0^2}{2}\left(\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi)\right)}$$

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{i_0^2}{2}\ t - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi)}$$

b) Montrer que $E = \frac{1}{2} R\ i_0^2 T$

$$\boldsymbol{E = R\left(\ F(T) - F(0)\right)}$$

$$\boldsymbol{E = R\left(\left(\frac{i_0^2}{2}\ T - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\omega T + 2\varphi)\right) - \left(\frac{i_0^2}{2} \times 0\ - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\omega \times 0\ + 2\varphi)\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{E = R\left(\left(\frac{i_0^2}{2}\ T - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\omega T + 2\varphi)\right) - \left(-\frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\varphi)\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{E = R\left(\frac{i_0^2}{2}\ T - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\omega T + 2\varphi) + \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\varphi)\right)}$$

Or on a:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

donc $\boldsymbol{\sin(2\omega T + 2\varphi) = \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{T} \times T + 2\varphi\right) = \sin(\ 4\pi + 2\varphi) = \sin(2\varphi)}$

car la fonction sin est $\boldsymbol{2\pi}$ **−périodique (et** $\boldsymbol{4\pi}$ **correspond à deux tours)**

On obtient :

$$\boldsymbol{E = R\left(\frac{i_0^2}{2}\ T - \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\varphi) + \frac{i_0^2}{4\omega}\sin(2\varphi)\right)}$$

$$\boldsymbol{E = R\left(\frac{i_0^2}{2}\ T\right) = \frac{1}{2} R\ i_0^2 T}$$

Exercice 15 :

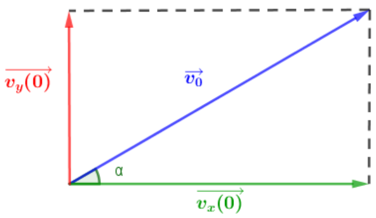
Lors d'une pénalité au rugby, la trajectoire du ballon peut être modélisée par deux fonctions x et y donnant le déplacement horizontal et vertical du ballon en fonction du temps t.

Le buteur se trouve à 50m face aux poteaux et le ballon est posé au sol.

A l'instant $t = 0$, le coup de pied donne au ballon une vitesse initiale de 25 m/s représentée par un vecteur $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

a) Calculer la vitesse horizontale $v_x(0)$ et la vitesse verticale $v_y(0)$ du ballon juste après le coup de pied ($v_x(0)$ et $v_y(0)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v_0}$.)

En notant v_0 la norme du vecteur $\overrightarrow{v_0}$ et en utilisant la trigonométrie de 3ème,



$$\boldsymbol{v_x(0) = v_0 \cos(\alpha)}$$
$$\boldsymbol{v_x(0) = 25\cos(30°)}$$
$$\boldsymbol{v_x(0) = \frac{25\sqrt{3}}{2} \approx 21,65}$$

$$\boldsymbol{v_y(0) = v_0 \sin(\alpha)}$$
$$\boldsymbol{v_y(0) = 25\sin(30°)}$$
$$\boldsymbol{v_y(0) = \frac{25}{2} = 12,5}$$

b) La vitesse horizontale est constante et la fonction x vérifie, pour $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[$

$x'(t) = v_x(0)\ et\ x(0) = 0$. Donner l'expression de $x(t)$.

$x'(t) = v_x(0)$ *et* $x(0) = 0$. Donner l'expression de $x(t)$.

On a $x'(t) = 21,65$ et $x(0) = 0$

$x(t) = 21,65\,t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$x(0) = 0$

$C = 0$

$x(t) = 21,65\,t$

c) La vitesse verticale v_y varie en fonction du temps sous l'effet de la pesanteur. Pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty[$, $v_y'(t) = -9{,}81$.

Exprimer $v_y(t)$.

Pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty[$, $v_y'(t) = -9,81$.

On a : $v_y'(t) = -9,81$ *et* $v_y(0) = 12,5$

$v_y(t) = -9,81\,t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$v_y(0) = 12,5$

$-9,81 \times 0 + C = 12,5$

$C = 12,5$

$v_y(t) = -9,81\,t + 12,5$

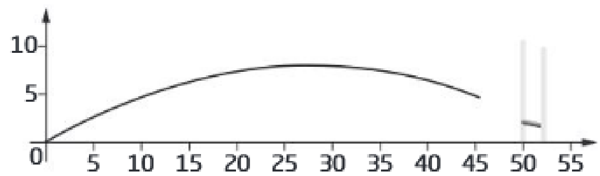
d) Exprimer $y(t)$ sachant que $y'(t) = v_y(t)$ pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty[$.

On a $y'(t) = -9,81\,t + 12,5$ et $y(0) = 0$

donc $y(t) = -9,81 \times \frac{1}{2}t^2 + 12,5\,t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

avec $y(0) = 0$, on a : $C = 0$ et $y(t) = -4,905\,t^2 + 12,5\,t$

e) Pour marquer la pénalité, le ballon doit passer au dessus de la barre transversale située à 3m du sol. Le buteur va-t-il marquer?



Le buteur marque si lorsque $x(t) = 50$, alors $y(t) > 3$

Si $x(t) = 50$ alors $21,65t = 50$

d'où : $t = \frac{50}{21,65} \approx 2,31$

$y(2,31) = -4,905 \times 2,31^2 + 12,5 \times 2,31 \approx 2,70$

Le buteur ne marquera donc pas ...

Exercice 16 :

On lance à partir du sol une bille verticalement vers le haut, à la vitesse initiale de $20m.s^{-1}$. Le but de l'exercice est de savoir à quelle hauteur monte-t-elle et au bout de combien de temps revient-elle sur terre. La bille subit une accélération constante de $g = -9{,}81\ m.s^{-2}$

1) Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de l'accélération qui vérifie $v(0) = 20$.

On a $v'(t) = -9,81$ **et** $v(0) = 20$ $v(t) = -9,81\,t + C$ **avec** $C \in \mathbb{R}$ $v(0) = 20$ $-9,81 \times 0 + C = 20$ $C = 20$ **On a donc** $v(t) = -9,81t + 20$

2) A quel instant $t_0$la vitesse s' annule-t-elle? Que fait la bille avant t_0? Après t_0 ?

$v(t) = 0$ $-9,81\,t + 20 = 0$ $t = \dfrac{20}{9,81} \approx 2,04$	**- avant** t_0 **: la bille monte** **- après** t_0 **:la bille descend**

3) Déterminer l'altitude $h(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de la fonction v qui vérifie $h(0) = 0$.

On a $h'(t) = -9,81t + 20$ **et** $h(0) = 0$ $h(t) = -9,81 \times \dfrac{1}{2}\, t^2 + 20t + C$ $h(t) = -4,905\, t^2 + 20t + C$ **avec** $C \in \mathbb{R}$ $h(0) = 0$ $-4,905 \times 0^2 + 20 \times 0 + C = 0$ $C = 0$ **On a donc** $h(t) = -4,905\, t^2 + 20t$

4) En déduire à quel instant t la bille retombe au sol.

On résout $h(t) = 0$ $-4,905\, t^2 + 20t = 0$ $t\,(-4,905\,t + 20) = 0$ $t = 0$ **ou** $-4,905\,t + 20 = 0$ $t = \dfrac{20}{4,95} \approx 4,04\ s$ **La bille retombe au sol au bout d'environ 4 secondes.** **(A** $t = 0$**, la bille ne retombe pas au sol, elle en décolle seulement ...)**

Exercice 17 :

Un mobile, de masse 1kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9N/m$.

Si on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

A chaque instant t , la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ )$. Les lois de la physique montrent que la fonction f vérifie la relation (E): $f'' + 9f = 0$ où f''est la dérivée seconde de f.

1) a) Montrer que les fonctions f de la forme $f(t) = A\cos(3t\ ) + B\sin(3t)$, où A et B sont des constantes réelles, vérifient la relation (E).

$\boldsymbol{f(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)}$

$\boldsymbol{f'(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)}$

$\boldsymbol{f''(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t)}$

On remplace dans (E):

$\boldsymbol{f''(t) + 9f(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) + 9(A\cos(3t) + B\sin(3t))}$

$\boldsymbol{f''(t) + 9f(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) + 9A\cos(3t) + 9B\sin(3t)}$

$\boldsymbol{f''(t) + 9f(t) = 0}$

Donc l'équation est vérifiée

b) Que représentent $f''(t)$ et $f'(t)$ pour le mobile à l'instant t ?

$f'(t)$ représente la vitesses du mobile à l'instant t

$f''(t)$ représente l'accélération du mobile à l'instant t

2) On sait qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0{,}5\ m$ et a une vitesse initiale $f'(0) = 1{,}5\ m.s^{-1}$.

Déterminer les valeurs des réels A et B.

$\boldsymbol{f(0) = 0,5}$	$\boldsymbol{f'(0) = 1,5}$
$\boldsymbol{A\cos(3\times 0) + B\sin(3\times 0) = 0,5}$	$\boldsymbol{-3A\sin(3\times 0) + 3B\cos(3\times 0) = 1,5}$
$\boldsymbol{A\times 1 + B\times 0 = 0,5}$	$\boldsymbol{-3A\times 0 + 3B\times 1 = 1,5}$
$\boldsymbol{A = 0,5}$	$\boldsymbol{B = \frac{1,5}{3} = 0,5}$

On a donc $\boldsymbol{f(t) = 0,5\cos(3t) + 0,5\sin(3t)}$

3) On admet que

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

a) Résoudre l'équation $f(t) = 0$

$\boldsymbol{f(t) = 0}$

$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0}$

$\boldsymbol{\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad car\ \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0}$

Soit $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

$\boldsymbol{3t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$	$\boldsymbol{ou\quad 3t - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
$\boldsymbol{3t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$	$\boldsymbol{3t = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
$\boldsymbol{3t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$	$\boldsymbol{3t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$
$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}}$	$\boldsymbol{t = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}}$

b) A partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (on donnera la réponse arrondie au millième de seconde)

On cherche la plus petite valeur de t telle que $t > 0$ et $f(t) = 0$

Soit $k \in \mathbb{Z}$

Si on a : $t = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$ **Alors $t > 0$ donne :** $\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} > 0$ $\frac{2k\pi}{3} > -\frac{\pi}{4}$ $\frac{2k}{3} > -\frac{1}{4}$ $k > -\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}$ $k > -\frac{3}{8}$ **Or k est entier donc la première valeur possible de k est $k = 0$** **On a alors** $t = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$	**Si on a :** $t = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ **Alors $t > 0$ donne :** $-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} > 0$ $\frac{2k\pi}{3} > \frac{\pi}{12}$ $\frac{2k}{3} > \frac{1}{12}$ $k > \frac{1}{12} \times \frac{3}{2}$ $k > \frac{1}{8}$ **Or k est entier donc la première valeur possible de k est $k = 1$** **On a alors** $t = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$ $t = \frac{7\pi}{12} \approx 1,833$

Le mobile repasse à sa position d'équilibre pour la première fois au bout de $0,785\ s$.