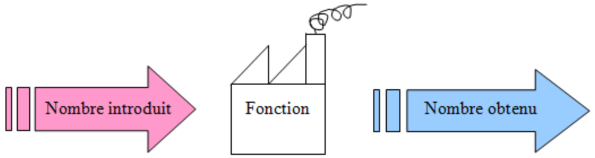
Chapitre : Généralité sur les fonctions

I. Généralités

1) Définitions

Définition 1 :

1. Une fonction f est un procédé qui permet d'associer à tout nombre x, élément d'une partie D_f de $\mathbb{R}$, un nombre réel ______________________________ y.



On note :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y(= f(x))$$

2. L'ensemble de définition de f, notée D_f est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe.
3. y est ___________________________ de x par la fonction f, notée __________________.
4. x est ____ de y.

Voici quelques exemples de fonctions que l'on étudiera cette année, dites de références :

- $x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$ fonction _______________________________________, $D =$ ____________.
- $x \mapsto x$ fonction ____, $D =$ ____________.
- $x \mapsto mx \ (m \in \mathbb{R}^*)$ fonction ____________________________________, $D =$ ____________.
- $x \mapsto mx + p \ (m \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{R})$ fonction ________________________, $D =$ ____________.
- $x \mapsto x^2$ fonction ____, $D =$ ____________.
- $x \mapsto \frac{1}{x}$ fonction ____, $D =$ ____________.

Exercice 1 : Définition

On définit la fonction suivante :

$$f : [-3\,;10] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 4x + 2$$

1. Quel est le nom de la fonction ?
2. Quel est son ensemble de définition ?
3. Comment s'appelle x ?
4. Comment s'appelle $f(x)$?

Exercice 2 : Grandeur et fonction

En physique et en chimie, on rencontre souvent des formules littérales qui traduisent une relation entre plusieurs grandeurs numériques.

Dans chacun des cas suivants, donner une phrase de la forme :

« La grandeur … est exprimée en fonction de … ».

a. $v = \frac{d}{t}$ b. $U = RI$ c. $P = UI$

d. $P = mg$ e. $E = \frac{1}{2}mv^2$

Exercice 3 : Expression algébrique

Déterminer l'expression algébrique de l'image du réel x par la fonction définie par la phrase :

1. A tout réel, on associe le carré du quotient de la somme de ce réel et de 2 par le carré de 4.
2. A tout réel, on associe le quotient de la différence de ce réel et de 6 par le produit de 4 et de ce réel.
3. A tout réel, on associe le produit de la différence de ce réel et de 1 par le carré de la somme de 4 et de ce réel.

Propriété 1 :

- $\frac{A}{B}$ est définie si, et seulement si, ____________________.
- $\sqrt{A}$ est définie si, et seulement si, ____________________.

Méthodes 1 :

- Pour trouver l'image de a, on calcule _____________________________________.
- Pour trouver les antécédents de b, on résout l'équation ____________________________.
- Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction qui comporte un quotient, on cherche les valeurs interdites en résolvant l'équation « dénominateur $= 0$ », puis on donne l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} \backslash \{$ valeurs interdites $\}$.

Application 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

1. Calculer l'image de 2 par la fonction f.
2. Calculer $f(-1)$
3. Résoudre $f(x) = 0$. Interpréter le résultat.
4. Donner les éventuels antécédents de 2 par la fonction f.
5. Donner l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \frac{5x+9}{2x-1}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par :
$f(x) = 4 - 6x$
1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) a) Calculer les images de 0 et 4 .
2) b) Calculer $f(-1)$ et $f(2)$.
3) Déterminer les antécédents de - 5.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par :
$f(x) = x^2 - 9x - 2$.
1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) a) Calculer les images de 1 et 4 .
2) b) Calculer $f(-2)$ et $f(0)$.
3) Déterminer les antécédents de - 2.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer l'image de 0 par la fonction f.
3) Déterminer $f(3\sqrt{2})$
4) Le point $A(-1\,;8)$ appartient t'il à C_f ? Justifier. Même question pour le point $B(0\,;\,6)$.
5) a) Développer $(-2x-6)(x-1)$. Que remarquez-vous ?
   b) En déduire les éventuels antécédents de 0 par la fonction f.
6) Résoudre $-2x^2 - 4x + 6 = 6$

Exercice 7 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 12x - 14$$

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Calculer l'image de 0 par la fonction f.
3) Déterminer $f(2\sqrt{5})$
4) Le point $A(3\,;-32)$ appartient t'il à C_f ? Justifier. Même question pour le point $B(0\,;\,14)$.
5) a) Développer $(x+1)(2x-14)$. Que remarquez-vous ?
   b) En déduire les éventuels antécédents de 0 par la fonction f.
6) Résoudre $2x^2 - 12x - 14 = -14$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{3x-5}$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Déterminer l'image de 0 et celle de -2.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1-x^2}{(x-2)(4x-5)}$$

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
2) Déterminer l'image de 0 et celle de -2.

2) Tableaux de valeurs

Définition 2 : Un tableau de valeurs d'une fonction est un tableau donnant les images de quelques nombres de l'ensemble de définition de la fonction.

Application 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 5$.
Remplir à l'aide de la calculatrice le tableau de valeur suivant :

x	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$									

Exercice 10 : Utiliser un tableau de valeurs
On définit la fonction f par le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	2	1	4	-1

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Quelles sont les images par f de $-1, 0$ et de 2 ?
3. Quels sont les éventuels antécédents de 1 ?

Exercice 11 : Utiliser un tableau de valeurs
On définit la fonction g par le tableau suivant :

x	$-2{,}5$	$-0{,}5$	0	2	5
$g(x)$	1	-5	$0{,}5$	4	1

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
2. Quelles sont les images par g de $-2{,}5;\ 0$ et de 2 ?
3. Quels sont les éventuels antécédents de 1 ?

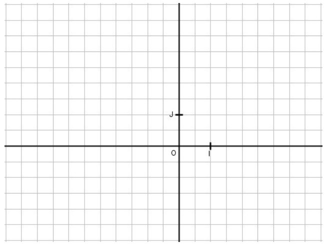
3) Représentation graphique

Définition 3 : Un repère du plan, est un triplet de 3 points non alignés du plan : $(O;\ I\ ,J)$.

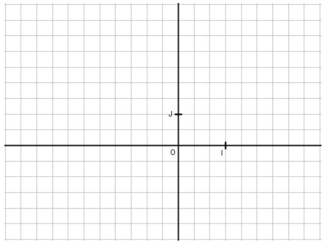
- Le point O est ____ du repère.
- La droite (OI) est l'axe des ____ et le point I donne l'unité de cet axe.
- La droite (OJ) est l'axe ____ et le point J donne l'unité de cet axe.

Définition 4 : On considère un repère (O, I, J) du plan et un point quelconque M.
- En traçant la droite parallèle à la droite (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'abscisse x du point M.
- En traçant la droite parallèle à la droite (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'ordonnée y du point M.
- L'unique couple (x, y), est le couple des coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).

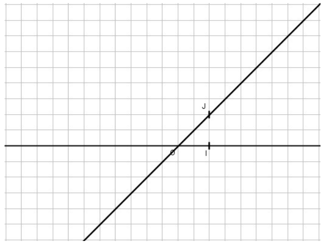
Application 3 : Placer des points dans un repère
Placer les points $A(2;\ 3), B(-3;\ 1)\ et\ C(0;-2)$ dans les trois repères $(O;\ I;\ J)$ suivants :



$(O;\ I;\ J)$ est un repère
________________________:
les axes sont :
______________________ et
_________________________.



$(O;\ I;\ J)$ est un repère
________________________:
les axes sont :
_____________________ mais
_________________________.



$(O;\ I;\ J)$ est un repère
_________________________.

Définition 5 : Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.

La représentation graphique C_f (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points M de coordonnées ______________ où ________________________ x est un nombre de D_f et __________________ y est _________________________de x par f.

Ainsi on écrit aussi __________________________.

On dit que la courbe C_f a pour équation ____.

Méthode 2:

Pour vérifier qu'un point $M(x_M ; y_M)$ appartient à C_f on vérifie d'abord que $x_M \in D_f$ puis on calcule $f(x_M)$.

- si $f(x_M)$__________________________________ alors M______C_f.
- si $f(x_M)$__________________________________ alors M______C_f.

Application 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$.

1. Le point $A(2\,;3)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?	2. Le point $B(-1\,;3)$ appartient-il à la courbe représentative de f ?

Exercice 12 : Savoir si un point appartient à une courbe.

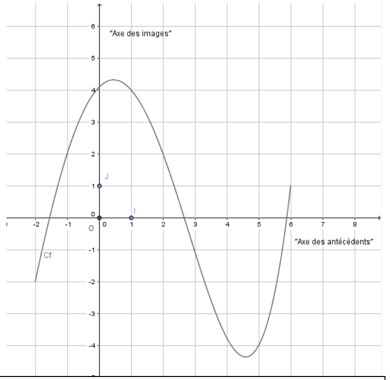
1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{2x+1}$ et C_f sa courbe représentative.

Les points $A(2\,;9)$ et $B(0;5)$ appartiennent-ils à C_f ?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x - 2$ et C_g sa courbe représentative.

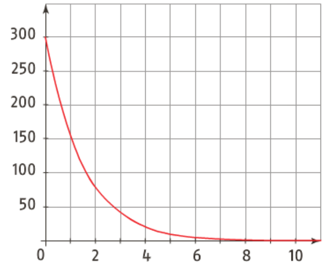
Les points $A\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{4}\right)$ et $B(2\,;6)$ appartiennent-ils à C_g ?

Application 5 :



1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Donner graphiquement l'image de 5 par la fonction f.
3. Donner graphiquement $f(3)$.
4. Donner graphiquement les éventuels antécédents de 2 par la fonction f.
5. Donner graphiquement les éventuels antécédents de 5 par la fonction f.

<u>Remarque</u> : Attention : toutes les « courbes » dessinées ne sont pas des représentations de fonction !

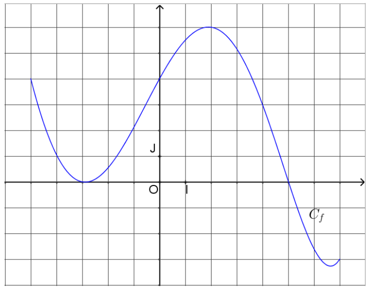


Exercice 13 : Utiliser la courbe représentative d'une fonction

Alex a mesuré la tension en fonction du temps écoulé aux bornes d'une lampe. Il a obtenu le graphique suivant, donnant la tension (en volts) en fonction du temps (en millisecondes).

1. Quelles devraient être les légendes en abscisses et en ordonnées ?
2. Quelles est la tension au bout de 2 ms; au bout de 4 ms ?

Au bout de combien de secondes la tension initiale a-t-elle été divisé par 2; par 3



Exercice 14 : Utiliser la courbe représentative d'une fonction

Dans un repère, on donne la courbe représentative d'une fonction f.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Compléter le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-1	0	2	4	5	7
$f(x)$									

3. Compléter le tableau suivant :

y	-1	0	1	4	6
Antécédent de y					

4. -4 admet-il des antécédents ? Justifier.

Exercice 15 :

f est une fonction et C_f est sa courbe représentative.

1) Compléter les phrases suivantes :

a) $f\ (2)\ =\ 3$ signifie que :
- ... est l'image de ...
- ... est un antécédent de ...
- le point A (... ; ...) appartient à C_f

b) $f\ (5)\ =\ 0$ signifie que :
- ... est l'image de ...
- ... est un antécédent de ...
- le point B (... ; ...) appartient à C_f

c) $f\ (1)\ =\ f\ (4)\ =\ -2$ signifie que :
- ... est l'image de ...
- ... est antécédents de ...
- ....

d) C_f passe par le point M (-5 ; 0) signifie que f (...) = ...

e) Le point N (3 ; 7) appartient à la courbe C_f signifie que f (...) = ...

f) C_f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -4 et 3 signifie que :

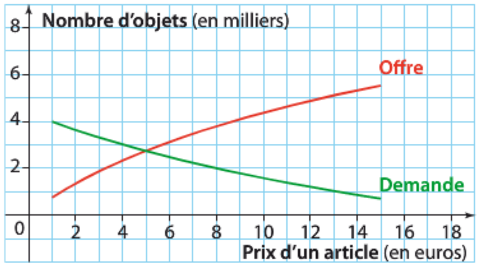
....

g) C_f coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 12 signifie que :

....

II. Résolution graphique d'équations

Activité : Une entreprise fabrique des articles dont le prix unitaire est noté x (en euros).



Sur le graphique sont représentées :

- La fonction **"Demande"** f, qui à x associe la quantité d'objets, en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter.
- La fonction **"offre"** g, qui à x associe la quantité, en milliers, que les industriels sont prêts à fabriquer.

1. Lorsque le prix unitaire est de 10€, l'offre est-elle supérieure, égale ou inférieure à la demande ?

2. Pour quel prix unitaire le marché est-il équilibré ?
(c'est-à-dire pour que l'offre soit égale à la demande)

3. Dans quel intervalle faut-il choisir le prix unitaire pour que l'offre soit inférieure à la demande ?

1) Equation $f(x) = k$

Soit k un réel. Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont ______________________ des points ________________________________ la courbe C_f et de la droite d'équation ______________.

Autrement dit : Résoudre l'équation $f(x) = k$, c'est trouver ______________________ de k.

2) Inéquation $f(x) \leq k$

Soit k un réel. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ sont ______________________ des points de la courbe C_f situés ________________________________ et sur la droite d'équation __________.

3) Equation $f(x) = g(x)$

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f et g une fonction définie sur son ensemble de définition D_g.

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont ______________________ des points ______________________ des courbes C_f et C_g.

4) Inéquation $f(x) \leq g(x)$

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f et g une fonction définie sur son ensemble de définition D_g.

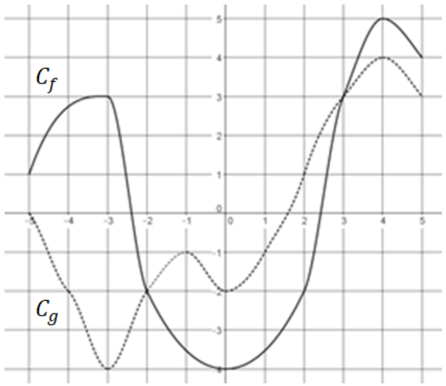
Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont ______________________ des points de la courbe C_f situés ________________________________ et sur la courbe C_g.

Application 6 : On donne ci-dessous les courbes représentatives C_f et C_g de deux fonctions f et g.

1) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes, en donnant l'ensemble S des solutions.

a) $f(x) = 3$
b) $f(x) = 5$
c) $f(x) = -2$
d) $f(x) \geq -2$
e) $f(x) \leq 5$
f) $g(x) > 4$
g) $f(x) = g(x)$
h) $f(x) < g(x)$
i) $f(x) \leq g(x)$
j) $f(x) > g(x)$
k) $f(x) \geq g(x)$



Exercice 16 : Equations et inéquations

On donne ci-dessous les courbes des fonctions f et g.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. a) Quelle est l'image de – 2 par la fonction f ?
   b) Quelle est l'image de 4 par la fonction g ?
   c) Quels sont les antécédents de 3 par la fonction f ?
   d) Quels sont les antécédents de 3 par la fonction g ?
3. Résoudre graphiquement :

a) $f(x) = 0$	e) $f(x) > 2$	i) $f(x) \geq g(x)$
b) $f(x) = -4$	f) $f(x) \leq 2$	j) $f(x) < g(x)$
c) $g(x) = 2$	g) $g(x) < -2$	
d) $f(x) = g(x)$	h) $g(x) \geq -4$