Chapitre : Fonctions circulaires (correction)

Exercice 1 : Déterminer la période des fonctions suivantes.

a) $f(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$: $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}$

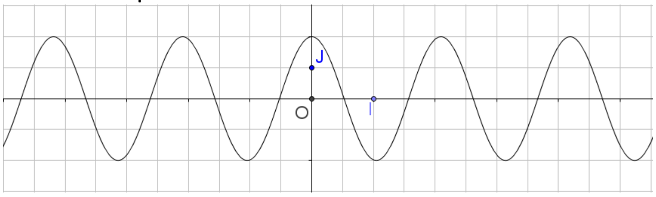
b) $f(t) = \sin\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$: $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}}$.

c) $f(t) = \sin(3t)$: $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}}$

d) $f(t) = \cos(4t + \pi)$: $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2 : Courbes de fonctions sinusoïdales

Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

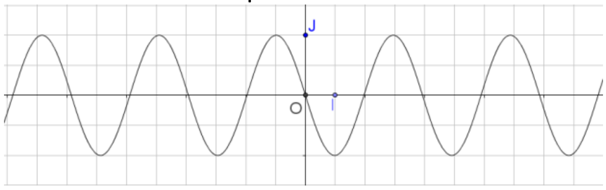
Le maximum de f est 2 donc $A = 2$.

2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ donc $T = 2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Exercice 3 : Courbes de fonctions sinusoïdales

Dans le repère orthogonal (O, I, J) ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x)$ où A et ω sont deux réels strictement positifs.



1. Déterminer graphiquement la valeur de A.

Le maximum de f est 1 donc $A = 1$.

2. Déterminer graphiquement la période T de f.
   En déduire la valeur de ω.

La représentation graphique de f est invariante par la translation de vecteur $4\overrightarrow{OI}$ donc $T = 4$ et $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 :

Lors de l'émission d'un son pur, la pression de l'air (en mP) est donné par une fonction f définie par :

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

où t est le temps exprimé en secondes.

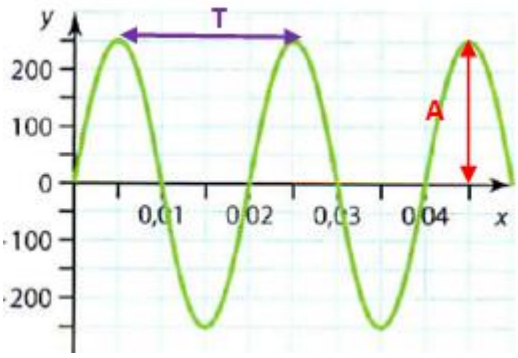
1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω.

on a $T = 0,02s$ donc $\omega = \frac{2\pi}{0,02} = 100\pi$

2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.

$A = 250$ (valeur maximale)

3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de f.



Avec les éléments ci dessus : $f(t) = 250\sin(100\pi t + \varphi)$
donc $f(0) = 250\sin(\varphi)$

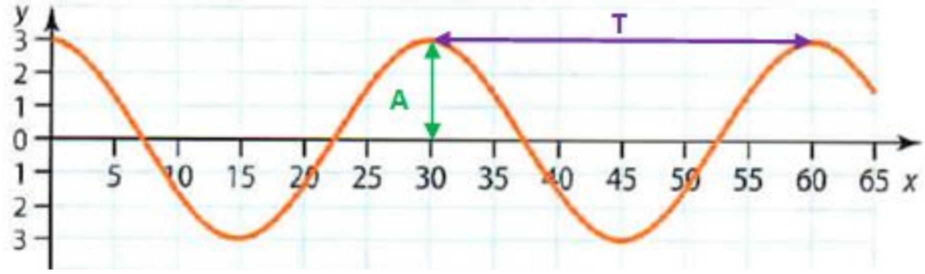
Graphiquement : $f(0) = 0$
donc $250\sin(\varphi) = 0$
$\sin(\varphi) = 0$
$\varphi = 0$

On a $f(t) = 250\sin(100\pi t)$

Exercice 5 :

La tension en Volts aux bornes d'un générateur très basse fréquence est définie par :

$U(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où t est le temps exprimé en secondes. La fonction U est représentée ci dessous.



1) Lire graphiquement la période T et en déduire la valeur de ω

on a $T = 30s$ donc $\omega = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

2) Déterminer sur le graphique la valeur de A.

$A = 3$ (valeur maximale)

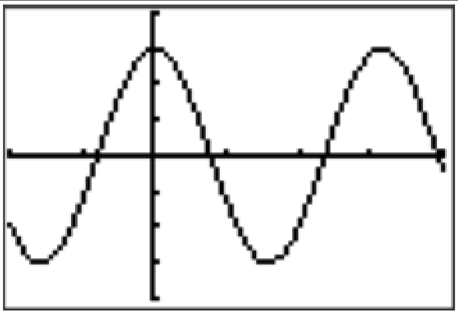
3) En utilisant l'image de 0, déterminer la valeur de φ et donner l'expression de U.

Avec les éléments ci dessus : $U(t) = 3\,cos\left(\frac{\pi}{15}t + \varphi\right)$
donc $U(0) = 3\,cos(\varphi)$

Graphiquement : $U(0) = 3$
donc $3\,cos(\varphi) = 3$
$cos(\varphi) = 1$
$\varphi = 0$ **On a $U(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$**

Exercice 6 : Courbes de fonctions sinusoïdales

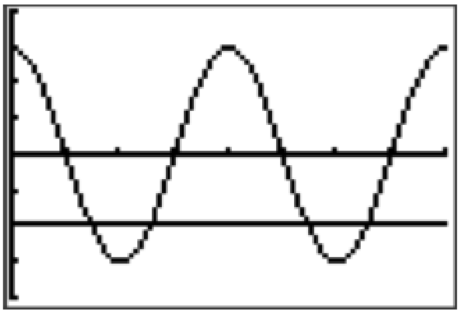
1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x)$.
Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.



Graphiquement, la période semble être un peu plus de 3.

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi}$$

b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $3\cos(2x) = -2$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.



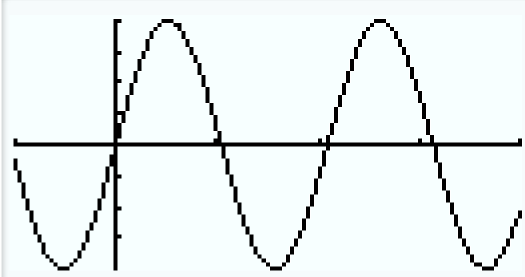
Il y a 4 solutions.

2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\cdot\pi}{2}$		$2\cdot\pi$
$f(x)$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Exercice 7 : Courbes de fonctions sinusoïdales

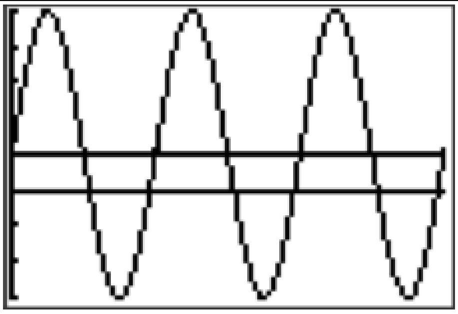
1. a) Sur la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin(3x)$.
Déterminer graphiquement la période de f. Justifier ce résultat par le calcul.



Graphiquement, la période semble être un peu plus de 2.

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}}$$

b) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $4\sin(3x) = -1$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.



Il y a 6 solutions.

2. Tracer le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\cdot\pi}{6}$		$\frac{7\cdot\pi}{6}$		$\frac{3\cdot\pi}{2}$		$\frac{11\cdot\pi}{6}$		$2\cdot\pi$
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

Exercice 8 :

Suite à un tremblement de terre, le Japon est touché par un tsunami. On modélise la hauteur de l'eau par la fonction h, définie pour tout $t \geq 0$ par :

$h(t) = a\cos(bt)$ avec h en mètres et t en secondes.

Déterminer les nombres a et b dans le cas d'un tsunami où les vagues mesurent 12 mètres de haut et présentent une période de 20 minutes.

La période est de 20 minutes soit $\boldsymbol{T = 1200s}$ donc $\boldsymbol{b = \frac{2\pi}{1200} = \frac{\pi}{600}}$

Les vagues mesurent 12 mètres de haut donc $\boldsymbol{a = 12}$

On a donc $\boldsymbol{h(t) = 12\cos\left(\frac{\pi}{600}t\right)}$

Exercice 8 :

On modélise la température d'un ville par la fonction $\theta(t) = 15{,}7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$

où t est exprimé en mois. Le 1er janvier correspond à $t = 0$.

a) Quelle est la température le 1er février ? le 1er décembre ?

Pour le 1er février, on a $t = 1$:

$$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(1-3)\right) + 9$$
$$\theta(1) == 15,7\sin\left(-\frac{2\pi}{6}\right) + 9$$
$$\theta(1) = 15,7\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 9$$
$$\theta(1) = -\frac{15,7\sqrt{3}}{2} + 9$$
$$\theta(1) \approx -4,6$$

La température le 1er février est $-4,6$ °

Pour le 1er décembre , on a $t = 11$

$$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(11-3)\right) + 9$$
$$\theta(1) == 15,7\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) + 9$$
$$\theta(1) = 15,7\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 9$$
$$\theta(1) = -\frac{15,7\sqrt{3}}{2} + 9$$
$$\theta(1) \approx -4,6$$

La température le 1er décembre est $-4,6$ °

b) A quelle périodicité retrouve-t-on des températures analogues?

La période de la fonction est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2\pi \times \frac{6}{\pi} = 12$$

c) Quelles sont les température extrêmes ? A quelles dates correspondent-elles?

1ère méthode :

on étudie les variations de la fonction θ sur une période par exemple [0 ; 12]

$$\theta(t) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9 = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\theta'(t) = 15,7 \times \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

comme $5,7 \times \frac{\pi}{6} > 0$, le signe de $\theta'(t)$ est celui de $\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\right)$

t	0		6		12
$\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$
$cos(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2})$	0	$+$	0	$-$	0

t	0		6		12
$cos(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2})$	0	$+$	0	$-$	0
$\theta(t)$	$-6,7$	$\nearrow$	$24,7$	$\searrow$	$-6,7$

La température est minimale pour $t = 0$ *et* $t = 12$, c'est à dire pour les mois de janvier.
La température est maximale pour $t = 6$, c'est à dire pour les mois de juillet.

2ème méthode :

$$\theta(t) = 15,7\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 9$$

• Comme 15,7 > 0 ,

θ est maximale quand $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$ est maximal donc quand $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 1$

donc $\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t - 3 = 3 + 12k$

$t = 6 + 12k$ avec k entier

or $6 + 12k$ appartient à $[0\ ;\ 12]$ si

$$0 \leq 6 + 12k \leq 12$$
$$-6 \leq 12k \leq 6$$
$$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{k} \leq \frac{1}{2}$$

or k est entier donc la seule valeur possible est $k = 0$

on a donc $t = 6$

• Comme 15,7 > 0 ,

θ est minimale quand $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)$ est minimal donc quand $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = -1$

donc $\frac{\pi}{6}(t-3) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$t - 3 = -3 + 12k$

$t = 12k$ avec k entier

or $12k$ appartient à $[0\ ;\ 12]$ si

$$0 \leq 12k \leq 12$$
$$0 \leq k \leq 1$$

or k est entier donc les seules valeurs possibles sont $k = 0$ et $k = 1$

on a donc $t = 0$ ou $t = 12$

Exercice 9 :

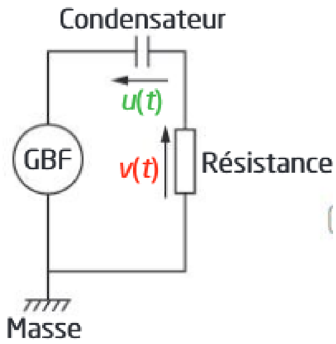
On réalise un montage en branchant en série une résistance ($R = 100\ \Omega$) et un condensateur à un GBF qui génère une tension sinusoïdale. On branche sur ce circuit un oscilloscope bi-courbe.

La tension aux bornes du condensateur est

$$u(t) = U \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

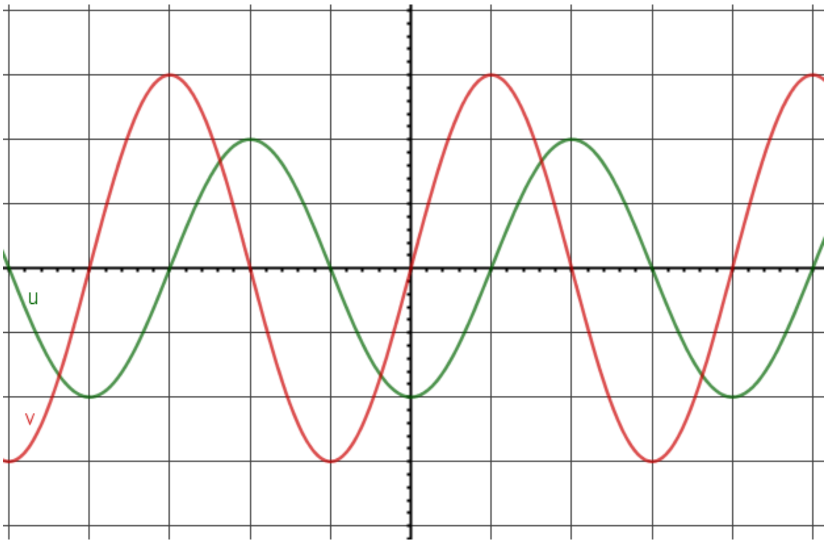
La tension aux bornes de la résistance est

$$v(t) = V \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$



1) En utilisant l'oscillogramme ci-dessous, identifier

$U,\ \omega_1, \varphi_1, V,\ \omega_2, \varphi_2$.



Le réglage de l' oscilloscope est :

• sensibilité verticale : $1V/div$.

• sensibilité horizontale : 0,25 ms / div.

Pour $u(t)$ [courbe verte]

$\boldsymbol{U = 2\ (Volts\ )}$

$\boldsymbol{\omega_1 = 4 \times 0,25 = 1\ ms = 0,001}$

à $t = 0$:

$u(0) = U \sin(\varphi_1) = 2\ \sin(\varphi_1)$ et graphiquement $u(0) = -2$

donc $\sin(\varphi_1) = -1$ d'où $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

Pour $v(t)$ [courbe rouge]

$\boldsymbol{V = 3\ volts}$

$\boldsymbol{\omega_2 = 4 \times 0,25 = 1\ ms = 0,001}$

à $t = 0$: $v(0) = V \sin(\varphi_2) = 3\ \sin(\varphi_2)$ et graphiquement $v(0) = 0$

donc $\sin(\varphi_2) = 0$ d'où $\varphi_2 = 0$

2) Le déphasage entre les signaux $s_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ est $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Deux signaux sont :

• en phase si les signaux sont proportionnels

• en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre.

Traduire ces informations en termes de déphasage.

Que peut on en déduire sur φ_1 et φ_2?

Deux signaux sont en phase si les signaux sont proportionnels

donc on doit avoir $\varphi_2 = \varphi_1$

soit $\Delta\varphi = 0$

• Deux signaux sont en opposition de phase si les signaux oscillent à l'opposé l'un de l'autre. (l'un est au maximum quand l'autre est minimum)

Il faut donc que $\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $\sin(\omega t + \varphi_2)$ soient opposés

comme on sait que :

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ on a $\omega t + \varphi_1 + \pi = \omega t + \varphi_2$

Donc $\varphi_1 + \pi = \varphi_2$

soit $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$

ou $\Delta\varphi = \pi$

3) Deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le déphasage est $\frac{\pi}{2}$. Comment traduire cette information à l'aide des représentations graphiques des signaux ?

Si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ alors les signaux s'écrivent :
$s_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ **et** $s_2(t) = A_2 \sin\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$
soit $s_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ **et** $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1)$
donc lorsque l'un des deux signaux est à son maximum (ou minimum) , l'autre signal s'annule.

4) Si $\Delta\varphi$ est positif, le signal 2 est en avance de phase par rapport au signal 1.
Si $\Delta\varphi$ est négatif, le signal 2 est en retard de phase par rapport au signal 1.
Que peut-on dire sur les signaux u et v ?

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ **et** $\varphi_2 = 0$
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$
donc le signal 2 (courbe rouge) - celui de v - est en avance (ou u est en retard ...)

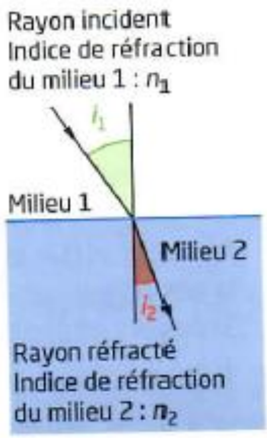
5) La loi d'Ohm s'applique sur les valeurs instantanées en régime sinusoïdal. Ainsi $v(t) = R\, i(t)$.
En déduire l'expression de $i(t)$.
i et u sont-elles en phase, en opposition de phase ou en quadrature de phase ?

on a $v(t) = 3 \sin(0,001\, t)$
donc $i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{3}{100} \sin(0,001t) = 0,03 \sin(0,001t)$

comme $u(t) = 2\, sin\left(0,001\, t - \frac{\pi}{2}\right)$
Le déphasage est de $\pm\frac{\pi}{2}$
donc les signaux sont en quadrature de phase.

<u>Exercice 10 :</u>

La réfraction est la déviation des signaux lumineux passant obliquement d'un milieu transparent à un autre. Chaque milieu est défini par son indice de réfraction.
L'indice de l'air est 1, celui de l'eau est 1,33, celui de l'huile d'olive est 1,47 et celui d'un diamant est 2,42.



i_1 est l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction . Cette déviation est régie par la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

a) Déterminer une mesure de l'angle d'incidence lorsque l'angle de réfraction est égal à 30° et lorsque le rayon lumineux passe de l'air à l'eau.

On a : $n_1 = 1$
$n_2 = 1,33$
$i_2 = 30°$

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$
$$\sin(i_1) = 1,33 \sin(30°)$$
$$\sin(i_1) = 0,665$$
$$i_1 = \sin^{-1}(0,665)$$
$$i_1 \approx 42°$$

b) Déterminer une mesure de l'angle de réfraction lorsque l'angle d'incidence est égal à 15° et lorsque le rayon lumineux passe de l'air à l'huile d'olive.

On a : $n_1 = 1$

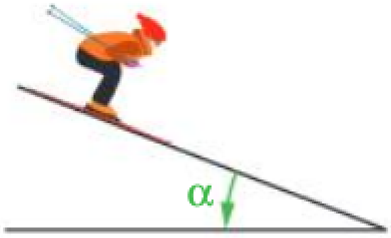
$n_2 = 1,47$ $i_1 = 15°$ $$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$ $$\sin(15°) = 1,47 \sin(i_2)$$ $$\sin(i_2) = \frac{\sin(15°)}{1,47}$$ $$i_2 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(15°)}{1,47}\right)$$ $$i_2 \approx 10°$$

c) Une personne possède un diamant. Pour être certaine qu'il s'agisse bien d'un diamant, elle le porte chez un bijoutier. Quelle sera la mesure de l'angle de réfraction si le bijoutier envoie un rayon lumineux avec un angle d'incidence de 45°?

On a : $n_1 = 1$ $n_2 = 2,42$ $i_1 = 45°$ $$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$ $$\sin(45°) = 2,42 \sin(i_2)$$ $$\sin(i_2) = \frac{\sin(45°)}{2,42}$$ $$i_2 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(45°)}{2,42}\right)$$ $$i_2 \approx 17°$$

Exercice 11 :

Un skieur s'élance sur une pente verglacée à $t = 0s$.
Cette piste fait un angle de α rad avec l'horizontale.
En physique, on montre que si on néglige les frottements, la vitesse à l'instant t du skieur est donnée, en mètres par seconde, par la formule $v(t) = gt\sin(\alpha)$ où g est l'accélération de la pesanteur avec : $g = \frac{9{,}81m}{s^2}$.
Si besoin, on arrondira à 10^{-2}.



1) Dans cette question, on suppose que $\alpha = \frac{\pi}{9}$.

a) Calculer la vitesse du skieur après 5s , puis 10 s de glisse.

Avec $\alpha = \frac{\pi}{9}, v(t) = gt\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$	
$v(5) = 9,81 \times 5\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ $v(5) \approx 16,8\ ms^{-1}$	$v(10) = 9,81 \times 10\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$ $v(10) \approx 33,6\ ms^{-1}$

b) La vitesse du skieur est-elle proportionnelle au temps ?

$v(t) = gt\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 9,81\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)t$ **C'est une fonction affine donc la vitesse est proportionnelle au temps.**

c) La vitesse du skieur est-elle une fonction croissante du temps ?

$v(t) = gt\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 9,81\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)t$ **Or,** $9,81\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx 3,36$ **On a une fonction affine de coefficient directeur positif donc c'est une fonction croissante du temps.**

2) Maintenant, on suppose que α varie et on mesure la vitesse du skieur après 5s.

$$\boldsymbol{v(5) = g \times 5\sin(\alpha) = 49,05\sin(\alpha)}$$

a) Compléter le tableau si ci-dessous :

α	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
$v(5)$	$\mathbf{8,52}$	$\mathbf{16,8}$	$\mathbf{24,525}$	**34,68**	**37,57**	**42,48**

b) La vitesse du skieur après 5 s est -elle proportionnelle à α ?

La vitesse du skieur après 5 s n'est pas proportionnelle à α
En effet :

$\times 3$

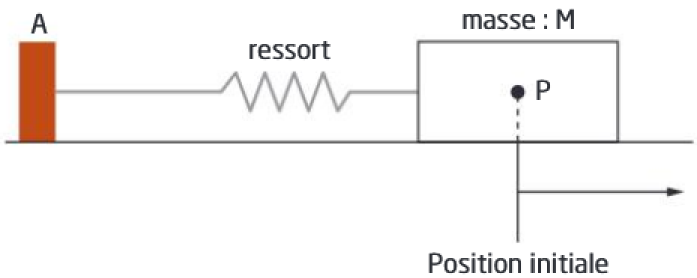
$\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$
$\mathbf{16,8}$	$\mathbf{42,58}$

Mais $\mathbf{16,8 \times 3 = 50,4}$ donc $\mathbf{16,8 \times 3 \neq 42,58}$

Exercice 12 :

Un objet (M) de masse m peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à l'une des extrémités d'un ressort à réponse linéaire, de masse négligeable et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

On écarte le centre d'inertie P de l'objet de sa position d'équilibre; P effectue alors des oscillations autour de celle-ci.



On admet que l'équation horaire du mouvement du point P est donnée en mètres par :

$$x(t) = 0,1\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

où t est exprimé en secondes.

a) Calculer $x(1)$. Interpréter la valeur à l'aide du contexte.

$$\boldsymbol{x(1) = 0,1\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4} \times 1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boldsymbol{x(1) = 0,1\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\boldsymbol{x(1) \approx 0,12}$$

A $\boldsymbol{t = 1\ s}$, le point P est à 12 cm de sa position d'équilibre.

b) Déterminer la valeur t_0 de t pour laquelle le point P se retrouve à sa position d'équilibre pour la première fois.

Le point P se retrouve à sa position d'équilibre lorsque $\boldsymbol{x(t) = 0}$.
On résout l'équation :

$$\boldsymbol{x(t) = 0}$$

$$\boldsymbol{0,1\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0}$$

$\cos\left(\frac{1}{4}t-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\frac{1}{4}t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \; \frac{1}{4}t-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\frac{1}{4}t=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \; \frac{1}{4}t=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\frac{1}{4}t=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad ou \; \frac{1}{4}t=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

donc en multipliant par 4 :

$t=3\pi+8k\pi \quad ou \; t=-\pi+8k\pi$

$t=(3+8k)\pi \quad ou \; t=(8k-1)\pi$

Pour trouver la première valeur de t pour laquelle $x(t)=0$, il faut trouver la plus petite valeur positive de t

Si $t=(3+8k)\pi$ avec k entier

On cherche k entier pour que $t\geq 0$:

$t\geq 0$ signifie :

$(3+8k)\pi\geq 0$

$3+8k\geq 0$ **car** $\pi>0$

$8k\geq 0-3$

$k\geq -\frac{3}{8}$

Comme k est entier, le premier entier supérieur ou égal à -3/8 est 0

Et dans ce cas, $t=(3+8\times 0)\pi=3\pi$

Si $t=(8k-1)\pi$ avec k entier

On cherche k entier pour que $t\geq 0$:

$t\geq 0$ signifie :

$(8k-1)\pi\geq 0$

$8k-1\geq 0$ **car** $\pi>0$

$8k\geq 1$

$k\geq\frac{1}{8}$

Comme k est entier, le premier entier supérieur ou égal à 1/8 est 1

Et dans ce cas, $t=(8-1)\pi=7\pi$

Comme $3\pi<7\pi$ la première valeur de t pour laquelle $x(t)=0$ est 3π

c) Combien de fois le point P repasse par sa position d'équilibre dans l'intervalle [0 ; 40] ?

Il faut chercher le nombre de valeur de t (donc de k) qui se trouvent dans [0; 40]

Si $t=(3+8k)\pi$ avec k entier

On cherche k entier pour que

$0\leq t\leq 40$ **:**

$0\leq t\leq 40$ **signifie :**

$0\leq (3+8k)\pi < 40$

$$0\leq 3+8k < \frac{40}{\pi}$$

$$-3\leq 8k < \frac{40}{\pi}-3$$

$$-\frac{3}{8}\leq k < \frac{40}{8\pi}-\frac{3}{8}$$

$$-\frac{3}{8}\leq k < \frac{5}{\pi}-\frac{3}{8}$$

Comme k est entier, et comme

$$-\frac{3}{8}=-0,375$$

$$\frac{5}{\pi}-\frac{3}{8}\approx 1,2$$

Il y a deux valeurs possibles pour k : 0 et 1

Donc deux valeurs pour t

($t=3\pi$ et $t=11\pi$)

Si $t=(8k-1)\pi$ avec k entier

On cherche k entier pour que

$0\leq t\leq 40$ **:**

$0\leq t\leq 40$ **signifie :**

$0\leq (8k-1)\pi < 40$

$$0\leq 8k-1 < \frac{40}{\pi}$$

$$1\leq 8k < \frac{40}{\pi}+1$$

$$\frac{1}{8}\leq k < \frac{40}{8\pi}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}\leq k < \frac{5}{\pi}+\frac{1}{8}$$

Comme k est entier, et comme

$$\frac{1}{8}=0,125$$

$$\frac{5}{\pi}+\frac{1}{8}\approx 1,7$$

Il y a une seule valeur possible pour k :

$k=1$

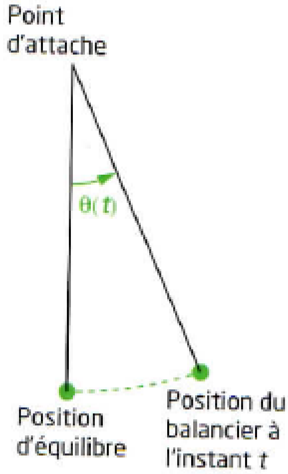
Donc une seule valeur pour t :

$$t=7\pi$$

Dans l'intervalle [0 ; 40] , le point P repasse 3 fois par sa position d'équilibre.

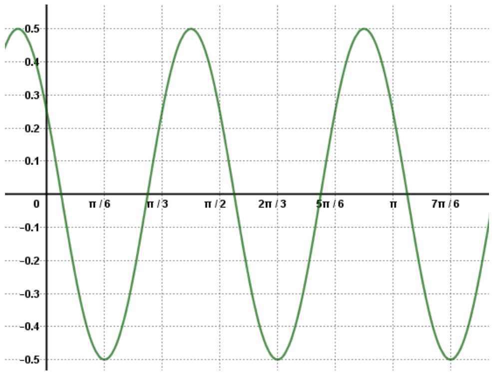
Exercice 13 :

Une horloge à balancier comporte un pendule pesant dont les oscillations sont entretenues par un engrenage ; cela permet au balancier d'entretenir des oscillations constantes.



On appelle θ la fonction, qui à tout instant t exprimé en secondes, associe l'angle $\theta(t)$, exprimé en radians, que fait la tige à l'instant t avec la position d'équilibre.

On dispose de la représentation graphique de θ et on admet que θ est périodique de période T.



1) a) Lire $\theta(0)$ et interpréter le résultat en fonction des données de l'exercice.

$\boldsymbol{\theta(0) = 0,25\, rad}$

A $\boldsymbol{t = 0}$, le balancier fait un angle de 0,25 radians avec sa position d'équilibre (soit 14,3°)

Rappel :

Degrés	**180**	**?**
Radians	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{0,25}$

b) L'horloger affirme au propriétaire de la comtoise que la valeur maximale de $\theta(t)$ est 60°. Qu'en pensez-vous ?

$\boldsymbol{\theta_{max} = 0,5\, radians}$

soit 29°

Degrés	**180**
Radians	$\boldsymbol{\pi}$

2) On admet que $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ pour tout $t \geq 0$.

a) Déterminer par lecture graphique la période T de $\theta(t)$ et la valeur de A.

Graphiquement $\boldsymbol{T = \frac{\pi}{2}}$ et $\boldsymbol{A = 0,5}$

b) Proposer une démarche qui permette de déterminer la valeur de φ.

Avec les éléments ci dessus : $\boldsymbol{\theta(t) = 0,5\, cos(\omega t + \varphi)}$

donc $\boldsymbol{\theta(0) = 0,5\, cos(\varphi)}$

Graphiquement : $\boldsymbol{\theta(0) \approx 0,25}$

donc $\boldsymbol{0,5\, cos(\varphi) \approx 0,25}$

$\boldsymbol{cos(\varphi) \approx 0,5}$

c) φ a pour valeur exacte l'une des valeurs ci-dessous :

$$\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\ ou\ \frac{\pi}{3}.$$

Préciser laquelle en justifiant votre choix.

Comme cos $\boldsymbol{\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$, on a : $\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{3}}$

Exercices bonus (hors programme ???)

Compétence : Equations $cos\ t = cos\ a$ et $sin\ t = sin\ a$

Exercice supplémentaire : Equations $cos\ t = cos\ a$ et $sin\ t = sin\ a$

Pour chacune des équations suivantes :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation.
2. Représenter les solutions de l'équation précédente par des points du cercle trigonométrique.

	Solutions (avec $k \in \mathbb{Z}$)
a. $\cos t = \cos \frac{2\pi}{3}$	$t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ **Deux points images.**
b. $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ **Deux points images.**
c. $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **Deux points images.**
d. $\sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$ $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ **Deux points images.**
e. $\cos t = \cos \frac{7\pi}{6}$	$t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $t = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ **Deux points images.**
f. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$	$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **ou** $x = -\frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **Trois points images plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**
g. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	$2x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ **ou** $2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3x = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$ **Un point image ($k = 0$) plus trois autres points images (avec $k = 0$; 1 2).**
h. $\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$	$3t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **ou** $3t - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $3t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **ou** $3t = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $3t = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ **ou** $3t = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

	$t=\frac{7\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi$ **ou** $t=\frac{13\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi$ **Trois points images plus trois autres points images (avec** $k=0$; **1 2).**
i. $\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(t+\frac{5\pi}{6}\right)$	$2t-\frac{\pi}{3}=t+\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ **ou** $2t-\frac{\pi}{3}=-\left(t+\frac{5\pi}{6}\right)+2k\pi$ $t=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $3t=-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $t=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ **ou** $3t=-\frac{3\pi}{6}+2k\pi$ $t=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ **ou** $t=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$ **Un point image (**$k=0$**) plus trois autres points images (avec** $k=0$; **1 2).**

<u>Exercice supplémentaire : Equations</u> $cos\ t=cos\ a$ **et** $sin\ t=sin\ a$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ et enfin dans $[0\ ;\ 2\pi[$ l'équation :

	Dans $\mathbb{R}$ **(avec** $k\in\mathbb{Z}$**)**	**Dans** $]-\pi\,;\pi]$	**Dans** $[0\ ;\ 2\pi[$
a. $\cos t=\frac{1}{2}$	$t=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$	$S=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$	$S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$
b. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ **ou** $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$	$S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$	$S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$
c. $\sin t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$t=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $t=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$	$S=\left\{-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right\}$	$S=\left\{\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$
d. $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$	$S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$	$S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$
e. $\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ **ou** $t=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$	$S=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$	$S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{9\pi}{4}\right\}$
f. $\cos t=-1$	$t=\pi+2k\pi$	$S=\{\pi\}$	$S=\{\pi\}$
g. $\cos t=-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$S=\emptyset$ **car** $-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$	$S=\emptyset$	$S=\emptyset$
h. $\sin t=-\frac{1}{2}$	$t=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ **ou** $t=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$	$S=\left\{-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right\}$	$S=\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$
i. $\sin t=0$	$t=k\pi$	$S=\{0;\pi\}$	$S=\{0;\pi\}$
j. $\cos 4t=\frac{1}{2}$	$4t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $4t=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $t=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi$ **ou** $t=-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi$	**8 points images.**	**8 points images.**
k. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$	$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ **ou** $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ **ou** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$	**4 points images.**	**4 points images.**
l. $\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3t+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ **ou** $3t+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ $3t=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ **ou** $3t=-\frac{13\pi}{12}+2k\pi$ $t=-\frac{7\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi$ **ou** $t=-\frac{13\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi$	**6 points images**	**6 points images**

<u>Exercice supplémentaire : Inéquation avec</u> $sin\ t$ **ou** $cos\ t$

Par lecture sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels t de $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis de $[0\ ;\ 2\pi[$ tels que :

	Sur $]-\pi\ ;\ \pi]$	**Sur** $[0\ ;\ 2\pi[$
a. $\cos t\geq\frac{1}{2}$	$\left[-\frac{\pi}{3}\ ;\frac{\pi}{3}\right]$	$[0\ ;\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{\pi}{3}\ ;2\pi[$
b. $\sin t>\frac{\sqrt{3}}{2}$	$]\frac{\pi}{3}\ ;\frac{2\pi}{3}[$	$]\frac{\pi}{3}\ ;\frac{2\pi}{3}[$

c. $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$]-\boldsymbol{\pi}; -\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}[\cup]\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\ ; \boldsymbol{\pi}]$	$]\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\ ; \frac{\boldsymbol{5\pi}}{\boldsymbol{4}}[$
d. $-\frac{1}{2} \leq \sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	$]-\boldsymbol{\pi}; -\frac{\boldsymbol{5\pi}}{\boldsymbol{6}}] \cup [-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}\ ; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}] \cup [\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\ ;\ \boldsymbol{\pi}]$	$[\boldsymbol{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}] \cup [\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{4}}\ ; \frac{\boldsymbol{7\pi}}{\boldsymbol{6}}] \cup [\frac{\boldsymbol{11\pi}}{\boldsymbol{6}}\ ;\ \boldsymbol{2\pi}[$
e. $\cos t \leq 0$	$]-\boldsymbol{\pi}; -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}] \cup [\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\ ; \boldsymbol{\pi}]$	$\left[\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\ ; \frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]$
f. $1 - 2\sin t > 0$	$]-\boldsymbol{\pi}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}[\cup]\frac{\boldsymbol{5\pi}}{\boldsymbol{6}}\ ; \boldsymbol{\pi}]$	$[\boldsymbol{0}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}[\cup]\frac{\boldsymbol{5\pi}}{\boldsymbol{6}}\ ; \boldsymbol{2\pi}[$