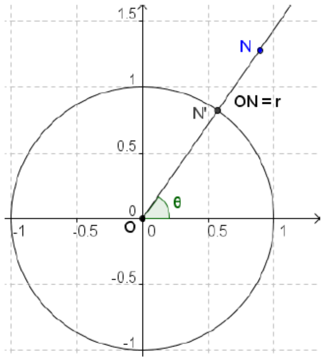
Chapitre   : Nombres complexes – Forme trigonométrique

1) Coordonnées polaires



On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On a vu dans le chapitre trigonométrie que tout point M du cercle trigonométrique a des coordonnées de la forme $M(\cos(\theta)\,;\sin(\theta))$ où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
Tout point M du cercle trigonométrique peut donc être repéré à l'aide d'un réel θ.
Considérons un point N du plan différent de O.
Si on trace la demi-droite $[ON)$, on peut définir un point N' appartenant à la demi-droite $[ON)$ et au cercle trigonométrique.
D'après ce qui précède, on obtient ainsi un réel θ associé à N', donc à N.
La connaissance de ce réel θ n'est pas suffisante pour repérer N, pour ce faire, il suffit de connaitre la distance $r = ON$.

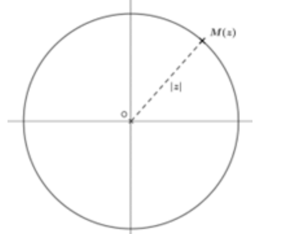
Définition 1 : Soit N un point du plan différent de O.
Le couple $(r\ ;\ \theta)$ défini précédemment est appelé coordonnées ________________ de N.

Propriété 1 : Soit N un point de coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$.
Alors N a pour coordonnées cartésiennes :

2) Module d'un nombre complexe et distance

Définition 2 :
Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On appelle _________________________ **de z,** que l'on note $|z|$, la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le module de z est égal à _____________________________.

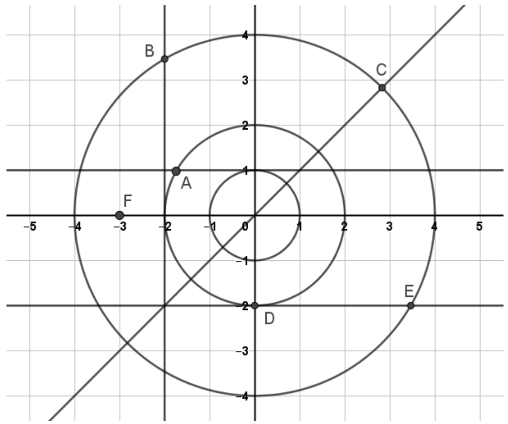


Attention : Ne pas confondre module d'un nombre complexe et valeur absolue d'un nombre réel

Exercice 1 : Placer des points à l'aide des coordonnées polaires
Placer dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D telle que :

a. z_A a pour module 3 et pour argument $\frac{3\pi}{4}$.
b. z_B a pour module $\frac{1}{2}$ et pour argument $-\frac{\pi}{6}$.
c. z_C a pour module 2 et pour argument π.
d. z_D a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.
e. z_E a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$.
f. z_F a pour module 3 et pour argument 0.

Exercice 2 : Lecture graphique de coordonnées polaires
Par lecture graphique, donner le module et un argument des affixes de chacun des points représentés ci dessous.



Propriété 2 : $|z|$ est un nombre réel ___________________________.

Propriété 3 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe. On a :
$$|z| =$$

Application 1 :
Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 + 3\,i$	$z_2 = -4 + 2i$	$z_3 = -1 - i$	$z_4 = 5i$	$z_5 = -2$

Propriété 4 :
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- Pour tout nombre complexe z, on a : $|z|^2 = z\bar{z}$ donc $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriété 5 :
Pour tous complexes z_1 et z_2 ,
1. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ Le module d'un produit est le produit des modules
2. Si $z_2 \neq 0$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ Le module d'un quotient est le quotient des modules.
3. Si $z_2 \neq 0$ $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$ Le module de l'inverse d'un nombre complexe non nul est l'inverse du module du nombre complexe.

Propriété 6 : Soient A et B deux points d'affixe respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
La distance AB est donnée par $AB =$

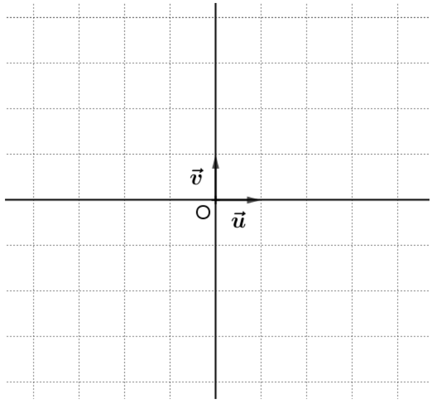
Application 2 :

Dans le plan complexe muni d' un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on donne A, B et C les points d'affixes respectives :

$z_A = -2+2i$; $z_B = 1+3\,i$ et $z_C = -1-i$

a) Placer les points dans le plan complexe.

b) Quelle semble être la nature du triangle ABC ? Le démontrer.



Exercice 3 : Affixes et distance

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Calculer la distance AB si A et B ont pour affixes respectives :

a. $z_A = 2-i$ et $z_B = -1+3i$

b. $z_A = -3+5i$ et $z_B = 2+2i$

c. $z_A = 1+i$ et $z_B = 3+2i$

d. $z_A = 2$ et $z_B = -1+i$

Exercice 4 : Triangle équilatéral

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes $z_A = 2i$ et $z_B = \sqrt{3}+i$. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 5 : Nature d'un triangle

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$

Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2-2i, z_B = -2-2i$ et $z_C = -4i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
2. Calculer les distance AB, AC et BC.
3. Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 6 : Nature d'un triangle

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$z_A = 5+3i\ ; \qquad z_B = 6+6i\ ; \qquad z_c = -1+5i$$

a) Placer les points dans le repère.

b) Calculer les longueurs AB, AC et BC.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 7 : Nature d'un quadrilatère

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 3i\ ; z_B = 7+2i\ ;\ z_c = 2-3i\ ; z_D = -5-2i$$

a) Calculer les longueurs AB, BC, CD et DA.

b) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$, en justifiant soigneusement.

Exercice 8 : Cercle

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et Ω d'affixes : $z_A = -3-i, z_B = -2+4i$ et $z_\Omega = i$.

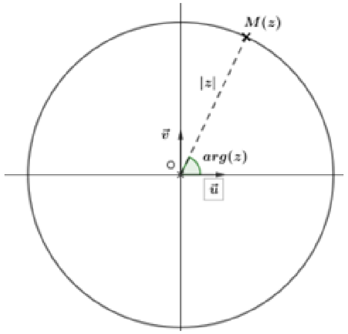
Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle de centre Ω dont on déterminera le rayon.

3) Argument d'un nombre complexe

Propriété 7 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe non nul.
On appelle ________________________ **de z**, un réel θ (ou $Arg(z)$), tel que :

$$\begin{cases} \cos(\boldsymbol{\theta}) = \\ \\ \sin(\boldsymbol{\theta}) = \end{cases}$$

où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$



Remarque : Le module d'un nombre complexe est unique, en revanche, on a toujours une infinité d'arguments.

Exercice 9 : Système d'équation trigonométrique

Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ ces systèmes :

a. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ b. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ c. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ d. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ f. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ g. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ h. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

i. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ j. $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ k. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ l. $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

m. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$ n. $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = -1 \end{cases}$ o. $\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$ p. $\begin{cases} \cos\theta = -1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases}$

Application 3 :

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$	$z_2 = -2 + 2i$

$z_3 = 2\sqrt{3} + 2i$	$z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

Propriété 8 : Soient A et B deux points d'affixe respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.
Une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB})$ est donnée par :

Application 4 :

Soient M et N les points d'affixes $z_M = 6 - 6i$ et $z_N = 4 - 4i$.
Calculer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{NM})$.

Exercice 10 : Affixes et mesure d'angle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1 + i$ et $z_B = -3 - 3i$.

1. Placer les points A et B.
2. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{OA})$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{OB})$.
3. Que peut-on déduire pour le triangle OAB ?

Exercice 11 : Affixes et mesure d'angle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i, z_B = (1 + \sqrt{3})i$ et $z_C = (2\sqrt{3} + 1) + 3i$..

1. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AB})$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AC})$.
3. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC})$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

4) Forme trigonométrique

Propriété 5 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe non nul.
On appelle ______________________________ du nombre complexe z, l'écriture $z =$______________________.

Application 5 : Soit $z = 1 + i\ \in\ \mathbb{C}$.
Ecrire z sous forme trigonométrique.

Méthode :

1. On calcule le module de z.
2. On calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
3. On lit la valeur de θ dans le tableau des valeurs remarquables.
4. Finalement on écrit l'écriture trigonométrique de z.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Application 6 : Ecrire le nombre complexe $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ sous forme algébrique.

Exercice 12 : Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants. En déduire la forme trigonométrique de z.

a. $z = 1 + i$
b. $z = -5i$
c. $z = -1$
d. $z = 1 + i\sqrt{3}$
e. $z = \sqrt{3} + i$
f. $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$
g. $z = 1 - i$
h. $z = 2 + 2i$
i. $z = -1 + i\sqrt{3}$
j. $z = -2i$
k. $z = -3$
l. $z = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$
m. $z = -1 + i$
n. $z = 2 - 2i$
o. $z = \sqrt{3} - i$
p. $z = -7i$

Exercice 13 : Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ.

Ecrire z sous la forme algébrique $a + bi$ dans les cas suivants :

a. $r = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$
b. $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$
c. $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$
d. $r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{4}$
e. $r = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$
f. $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$
g. $r = 1$ et $\theta = \frac{7\pi}{3}$
h. $r = 4$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$
i. $r = 3$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$
j. $r = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$
k. $r = \frac{1}{2}$ et $\theta = \pi$
l. $r = \frac{1}{3}$ et $\theta = \frac{7\pi}{6}$
m. $r = 4$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$
n. $r = 2\sqrt{3}$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$
o. $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$
p. $r = \sqrt{3}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$

Exercice 14 : Nature d'un quadrilatère

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\vec{v})$.

On prendra 1 cm pour unité graphique. Soient A, B et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 2\sqrt{3} + 2i\ ;\ z_B = 2\sqrt{3} - 2i\ et\ z_D = 4\sqrt{3} + 4i.$$

1) Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.
2) Faire une figure et construire les points A et B. Expliquer sur la copie votre construction.
3) Démontrer que OAB est un triangle équilatéral.
4) Démontrer que les points O, A et D sont alignés.
5) Construire le point D sur la figure. Expliquer sur la copie votre construction.
6) Démontrer que le triangle OBD est rectangle.

Exercice 15 : Nature d'un quadrilatère

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C définies par :

$$z_A = 2 + 2i\,; \quad z_B = -2 + 2i\,; \quad z_C = -\sqrt{3} + i.$$

1) a) Déterminer les formes trigonométriques des nombres complexes z_A, z_B et z_C.
b) Dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, placer les points A et B, et construire le point C, en laissant apparents les traits de construction.
2) a) Calculer les longueurs AB, CA et CB.
b) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 16 : Nature d'un quadrilatère

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on donne les points A, B, et C d'affixes respectives :

$$z_A = 4 + 4i \qquad z_B = 4 - 4i \qquad z_C \ avec\ |z_C| = 4 \text{ et } \arg(z_C) = \frac{\pi}{3}$$

1) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.
2) Déterminer la forme algébrique de z_C.
3) Placer A et B dans le repère, et construire C à la règle et au compas, en expliquant.
4) Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 17 : Nature d'un quadrilatère

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
1) On considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$2z + 6i = 2 + iz$$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
b) Déterminer la forme trigonométrique de z_1.
2) Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i,\ \ z_B = -2 - 2i\ \ et\ \ z_C = -4i.$
a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
b) Déterminer la nature du triangle ABC.
3) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $OACB$? Justifier soigneusement

Exercice 18 : *BAC STI2D – France juin 2014*

On considère les deux nombres complexes :

- z a pour module 2 et pour argument $\frac{2\pi}{3}$.
- z' a pour module 2 et pour argument -$\frac{2\pi}{3}$.

1) La forme algébrique de z est égale à :
a) $-1 + i\sqrt{3}$ b) $1 + i\sqrt{3}$ c) $2 + i\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3} - i$
2) Le nombre complexe z' est le nombre complexe :
a) opposé de z b) inverse de z c) conjugué de z d) opposé du conjugué de z
3) Le nombre complexe $z \times z'$:
a) est un nombre réel b) est un nombre imaginaire pur
c) a pour module 2 d) est un nombre complexe dont un argument est $\frac{4\pi}{3}$
4) Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = i$ est :
a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) -$\frac{\pi}{6}$

Exercice 19 : *BAC STI2D – Antilles-Guyane juin 2014*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unités 2 cm.
Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

1) Donner les écritures algébriques de z, de $\bar{z}$ et de $\frac{1}{2}\bar{z}$.
2) On considère le nombre complexe $p = \frac{2+\bar{z}}{2-\bar{z}}$
Montrer que $p = -i\sqrt{3}$.
3) Les points M, N et P sont les points d'affixes respectives 1, $\frac{1}{2}\bar{z}$ et p.
a) Placer ces trois points dans le repère.
b) Justifier l'alignement de ces trois points.

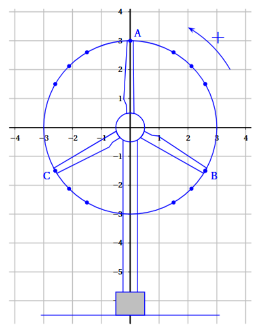
Exercice 20 : *BAC STI2D - Métropole juin 2017*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
1) <u>Proposition 1 :</u>
Le nombre complexe z de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3} + 6i$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives : z_A de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = z_A \times z_B$.
<u>Proposition 2 :</u> Le point C appartient au cercle de centre O et de rayon 4.

Exercice 21 : *BAC STI2D - Métropole septembre2017*

Dans le plan complexe muni d'une repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par le point A de coordonnées $(0\,;\,3)$ et par les points B et C d'affixes respectives :
$z_B = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\,i$ et z_C de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.



1) Soit z_A l'affixe du point A.
a) Donner la forme algébrique de z_A .
b) Donner la forme trigonométrique de z_A .
2) Déterminer la forme trigonométrique de z_B
3) On admet que lorsque l'hélice tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct, les points A, B et C sont transformés respectivement en A'; B' et C' tels que :

- A' a pour affixe $z_{A'} = z_A \times i$
- B' a pour affixe $z_{B'} = z_B \times i$
- C' a pour affixe $z_{C'} = z_C \times i$

Déterminer la forme trigonométrique de $z_{C'}$

Exercice 22 : *BAC STI2D - Antilles Guyane - juin 2016*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$
1) La forme algébrique du nombre complexe $\frac{1+2i}{3-i}$ est :
a) $\frac{1}{2} + \frac{7}{10}i$ b) $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$ c) $\frac{1}{8} + \frac{7}{8}i$ d) « Aucune des réponses a.-b.-c. ».
2) La forme trigonométrique du nombre complexe $2 - 2i\sqrt{3}$ est
a) $\left[4\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$ b) $\left[-4\,;\,\frac{\pi}{6}\right]$ c) $\left[4\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$ d) $\left[16\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$