Chapitre : Second degré

I. Fonction polynôme du second degré

Activité : On donne l'expression algébrique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$$

On appelle cette forme : *forme* ________________________ *du polynôme du second degré.*
La fonction f est représentée par la courbe C_f dans un repère orthonormé du plan.

1) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

On appelle cette forme : *forme* ________________________ *du polynôme du second degré.*

2) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = -2(x+3)(x-1)$.

On appelle cette forme : *forme* ________________________ *du polynôme du second degré.*

3) Le point $\mathrm{A}(2; -10)$ appartient-il à la courbe C_f ?

4) Utiliser la forme la mieux adaptée pour répondre aux questions suivantes, en justifiant soigneusement:
   a) Déterminer les antécédents de 0 par f.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Donner la nature et la valeur de l'extremum.

Définition 1 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou fonction trinôme), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) =$ ____
$P(x)$ est alors appelé **polynôme du second degré** (ou trinôme).
L'écriture $ax^2 + bx + c$ s'appelle la **forme** _______________________ du polynôme.

Remarques :

1. Les nombres a, b et c sont appelés les ______________________________du polynôme.
2. « ax^2 » est le **terme de degré** ______ du polynôme, « bx » est le **terme de degré** _____, et « c » est le **terme**_______________________.
3. Attention à l'ordre : $P(x) = 3x - 4x^2 + 1$ est aussi un polynôme de degré 2… dans le désordre.
   En général, on écrit toujours un polynôme selon les puissances décroissantes (x^2, puis x, puis le terme constant). Si on remet dans l'ordre habituel, on obtient :
   $$P(x) = -4x^2 + 3x + 1$$
4. Plus généralement, on appelle **fonction polynôme de degré n** ($n \in \mathbb{N}$), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où $a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et a_n sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.

Application 1 : Trinôme ou pas ? Donner les valeurs de a, b et c si possible.

a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$	
b) $g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$	
c) $h(x) = -2x + 1$	
d) $k(x) = -x^2 + 1$	
e) $l(x) = (x+1)(x-2)$	
f) $m(x) = (x-1)(x+1)$	
g) $n(x) = (x-1)^2 - (x+2)^2$	

Exercice 1 : Fonction polynôme du second degré ou non ?

Dans chacun des cas suivants, on donne l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2.
Si oui, préciser les coefficients a, b et c.

a. $f(x) = 4 - x^2 + x^3$
b. $f(x) = 7 - 2x$
c. $f(x) = 3x - x^2$
d. $f(x) = 5 - 2x^2 + 3x$
e. $f(x) = 3(x+1)^2 - 4(2x-5)$
f. $f(x) = (x+1)^2 + (x-2)^2$
g. $f(x) = (2x+3)^2 - (2x-1)^2$
h. $f(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$

Définition 2 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une________________.
Une équation de cette parabole est pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y = ax^2 + bx + c$.

Propriété 1: Le signe de a donne le sens de cette parabole :

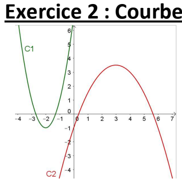
Si $a > 0$:
on dit que la parabole est « **tournée vers le haut** » ou « **à l'endroit** » (comme celle de x^2)

Si $a < 0$:
on dit que la parabole est « **tournée vers le bas** » ou « **à l'envers** » (par rapport à celle de x^2)

Cette parabole **coupe l'axe des ordonnées au point M** (;).

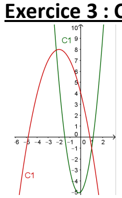
Remarque : La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1x^2 + 0x + 0 = x^2$ est une fonction polynôme du second degré particulière.

Exercice 2 : Courbe et fonction trinôme



On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 + 8x + 7$
et celle de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 1$
Attribuer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative. Justifier.

Exercice 3 : Courbe et fonction trinôme



On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x^2 - 5 + x$
et celle de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = -x^2 - 4x + 4$
Attribuer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative. Justifier.

II. Forme canonique

Propriété 2 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Pour tout trinôme $ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme ____________________ du polynôme** $ax^2 + bx + c$.

Avec $\alpha =$ et $\beta =$

Preuve : Soit le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a est un réel non nul.

- Etape 1 : On met le coefficient a en facteur dans les deux premiers termes (On peut car il est non nul) :

$$P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

- Etape 2 : On peut considérer $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme *le début du développement* de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

  En effet $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, d'où :

- Etape 3 : $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$
- Etape 4 : On a donc : $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$
- Etape 5 : Et en *réduisant au même dénominateur* : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$

$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ et $\boldsymbol{\beta} = \frac{-\Delta}{\boldsymbol{4a}}$.

Notons que $\beta = P(\alpha)$: En effet $P(\alpha) = a(\alpha - \alpha) + \beta = \beta$. Ainsi $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{P}\left(-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)$

Remarque : Cette preuve nous donne une méthode pour mettre sous forme canonique un polynôme.

Application 2 :

Déterminer, par deux méthodes, la forme canonique des trinômes définies par :

$$A(x) = x^2 + 4x - 1$$

$a =$; $b =$ et $c =$

1^ère^ méthode : avec α et β

2ème méthode : avec un début de développement

Etape 1 : On factorise par a les deux 1^ers^ termes :

$A(x) =$

Etape 2 : On cherche le début d'une identité remarquable :

est le début de l'identité remarquable :

$$B(x) = 2x^2 - 4x + 6$$

$a =$; $b =$ et $c =$

1^ère^ méthode : avec α et β

2ème méthode : avec un début de développement

Etape 1 : On factorise par a les deux 1^ers^ termes :

$A(x) =$

Etape 2 : On cherche le début d'une identité remarquable :

est le début de l'identité remarquable :

Etape 3 : On développe par a la grande parenthèse :

$$C(x) = -3x^2 + 10x + 8$$

$a =$; $b =$ et $c =$

1ère méthode : avec α et β

2ème méthode : avec un début de développement

Etape 1 : On factorise par a les deux 1ers termes :

$A(x) =$

Etape 2 : On cherche le début d'une identité remarquable :

est le début de l'identité remarquable :

Etape 3 : On développe par a la grande parenthèse :

Exercice 4 : Forme canonique

Ecrire sous forme canonique chacun des polynômes du second degré donnés.

a) $f(x) = 2x^2 + 12x - 5$
b) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$
c) $f(x) = 7 - 2x - 8x^2$
d) $f(x) = x^2 + 6x$
e) $f(x) = -x^2 + 2x + 16$
f) $f(x) = -x^2 - 2x - 17$
g) $f(x) = x^2 - 6x - 5$
h) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
i) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

Propriété 3 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

Son tableau de variation est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f	

Une fonction polynôme du degré 2 admet un ______________________ $\beta = f(-\frac{b}{2a})$ atteint en $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f	

Une fonction polynôme du degré 2 admet un ____________________ $\beta = f(-\frac{b}{2a})$ atteint en $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

La parabole de sommet $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, admet un axe vertical de symétrie d'équation $x =$

Application 3 :

Déterminer l'extremum des fonctions suivantes en en précisant la nature :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$	b) $g(x) = -2x^2 - x + 1$

Exercice 5 : Coordonnées du sommet de la parabole et forme canonique

Déterminer en justifiant la réponse les coordonnées du sommet de la parabole représentative de la fonction f proposée ainsi que le tableau de variations de f.

a. $f(x) = (x-3)^2 - 4$
b. $f(x) = -(x+3)^2 + 1$
c. $f(x) = x^2 - 5$
d. $f(x) = 3 - (x+1)^2$
e. $f(x) = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 5$
f. $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{4}{3}$

Exercice 6 : Forme développée, forme factorisée et forme canonique

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x - 6$$

1. Montrer que $f(x) = (x-1)(x+6)$
   Comment s'appelle cette forme ?
2. Montrer que $f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$
   Comment s'appelle cette forme ?
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :
   a. Calculer l'image de -6, de 0 et de $-\frac{5}{2}$
   b. résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. résoudre l'équation $f(x) = -6$
   d. résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{4}$
4. Déterminer les variation de la fonction f.

Exercice 7 : Forme développée, forme factorisée et forme canonique

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

1. Montrer que $f(x) = 2(x-2)(x+1)$
2. Montrer que $f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :
   a. Calculer l'image de -3, de 2 et de $\frac{1}{2}$
   b. Calculer l'image de $\sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{5}$
   c. résoudre l'équation $f(x) = 0$
   d. résoudre l'équation $f(x) = -4$
   e. résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$
4. Déterminer les variation de la fonction f.

III. Equation du second degré

Définition 3 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

L'équation ____ est une équation du second degré.

Définition 4 : Soit P un polynôme et r un réel.
On appelle racine (solution) d'un polynôme, le nombre r tel que _____________________.

Graphiquement les racines d'un polynôme sont les ________________________des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exercice 8 : Résolution graphique (calculatrice)
Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f, puis résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
c) $f(x) = 100 - 20x + x^2$
d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

Exercice 9 : Sans discriminant
Dans chacun des cas, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

a) $f(x) = 25 - 4x^2$
b) $f(x) = 2x^2 - 8x$
c) $f(x) = (x - 2)^2 - 49$
d) $f(x) = (x + 3)^2$
e) $f(x) = (x + 1)(2x + 3)$

Définition 5 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre noté Δ, égal à :

Exercice 10 : Discriminant
Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	c	ax^2+bx+c	$\Delta = b^2-4ac$	$(*)$
1	4	3			
3	-2	1			
-2	1	3			
3	0	1			
2	1	0			
0	2	-1			

$(*)$: Nombre de solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Exercice 11 : Discriminant
Compléter le tableau ci-dessous :

ax^2+bx+c	a	b	c	$\Delta = b^2-4ac$	$(*)$
x^2+3x+5					
$-3x^2+x-1$					
$-x^2-2x+5$					
$2x^2+8x-1$					
$2x^2-7$					
$-3x^2+2x$					

$(*)$: Nombre de solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Propriétés 4 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

	l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ …	la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$
Si $\Delta > 0$	… admet deux solutions réelles distinctes : $P(x)$ se factorise sous la forme :	… coupe ___________fois l'axe des abscisses
Si $\Delta = 0$	… admet une seule solution double réelle : $P(x)$ se factorise sous la forme :	… coupe ___________ fois l'axe des abscisses, en x_0.
Si $\Delta < 0$	… n'admet pas de solution réelle. $P(x)$	… _________________ l'axe des abscisses.

Preuve : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$ et $P(x) = ax^2 + bx + c$

Dans la preuve de la forme canonique on avait : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ ainsi si on factorise par a :

$$P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- 1^er^ cas : **Si $\Delta > 0$** $\quad P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$

  Donc $P(x)$ est de la forme $P(x) = a\,(A^2 - B^2)$, que l'on peut factoriser : $a(A + B)(A - B)$.

  $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ ainsi $P(x) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  $P(x) = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ou $x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  En posant $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ on obtient donc $P(x) = a\,(x - x1)(x - x2)$

  x_1 et x_2 sont les deux racines de P donc les deux solutions de l'équation $P(x) = 0$.

- 2^ème^ cas : **Si $\Delta = 0$** $\quad P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

  P admet une racine double: $x_0 = \frac{-b}{2a}$, qui est la seule solution de l'équation $P(x) = 0$.

- 3^ème^ cas : **Si $\Delta < 0$**

  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc pour tout x de$\mathbb{R}$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 > 0$

  P ne s'annule donc jamais et n'a pas de racine, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solutions.

Remarque : Cette preuve peut aussi se faire en utilisant la résolution d'équations du type : $X^2 = k$ selon le signe de k.

Application 4 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a) $-2x^2+5x+7=0$

b) $5x^2+x+4=0$

c) $2x^2-20x+50=0$

Exercice 12 : Equation du second degré

Pour chacune des fonctions données ci-dessous résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$. Factoriser $f(x)$ si possible.

a) $f(x)=5x^2-4x-1$ b) $f(x)=x^2+6x+5$ c) $f(x)=-x^2-3x+4$

d) $f(x)=x^2-6x$ e) $f(x)=x^2+6x+9$ f) $f(x)=5x^2+6x+1$

g) $f(x)=-x^2+4x-4$ h) $f(x)=-4x^2+12x-9$ i) $f(x)=x^2-3x+4$

j) $f(x)=x^2-9$ k) $f(x)=2x^2-3x+7$ l) $f(x)=x^2-x$

m) $f(x)=x^2+6x+9$ n) $f(x)=4x^2+8x$ o) $f(x)=16x^2-25$

Exercice 13 : Equation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2-3x=-3$ b) $(x-5)(2+x)=15$ c) $7x^2=2x$ d) $x^2=3x$

Propriété 5 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a\neq 0$ et $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré, dont le discriminant est strictement positif ($\Delta>0$).
P admet alors deux racines distinctes x_1 et x_2 vérifiant :

a) $x_1+x_2=$

b) $x_1\times x_2=$

Preuve : Il suffit d'additionner x_1 et x_2 pour a) et de multiplier x_1 et x_2 pour b).

Propriété 6 : Soient a, b et c trois nombres réels avec $a\neq 0$. Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré avec $\Delta>0$. On note $S=x_1+x_2$ et $P=x_1\times x_2$

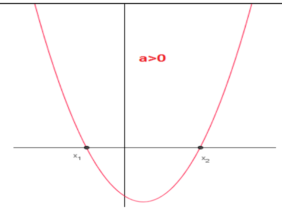
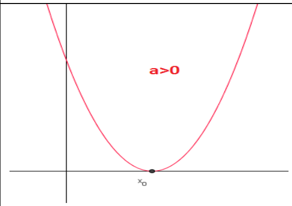
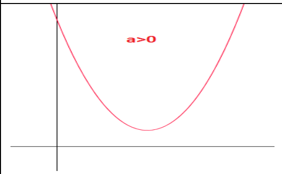
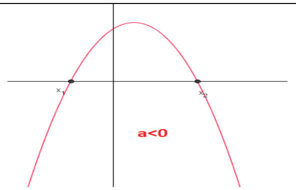
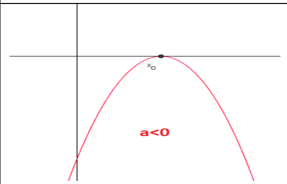
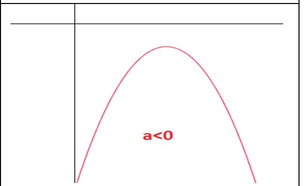
$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

Preuve :

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\Leftrightarrow x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0\Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

IV. Signe d'un trinôme

Propriété 6 : Le signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b, c sont des réels et $a \neq 0$) dépend du signe du réel a et du signe du discriminant Δ.

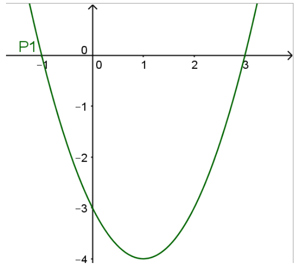
	Si $\Delta > 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta < 0$
$a > 0$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$
$a < 0$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$	 x $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$
CCL :	$f(x)$ est du signe de a « à l'extérieur de l'intervalle des racines x_1 et x_2 » et est du signe contraire « à l'intérieur ».	$f(x)$ s'annule pour $x = x_0$ et est du signe de a pour tout réel x différent de x_0	Pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a

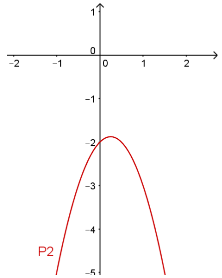
Application 5 : Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $-2x^2 + 5x + 7 < 0$	b) $5x^2 + x + 4 \geq 0$	c) $2x^2 - 20x + 50 > 0$

Exercice 14 : Lecture graphique du signe

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.





1. Dans un tableau, donner le signe de $f(x)$.
2. Dans un tableau donner le signe de $g(x)$

Exercice 15 : Application du cours

1. Le polynôme $x^2 + 2x - 35$ a pour racines 5 et -7. Donner le signe de $x^2 + 2x - 35$.
2. Le polynôme $x^2 + 2x + 11$ n'a pas de racine. Donner le signe de $x^2 + 2x + 11$.
3. Le polynôme $-6x^2 - 24x + 270$ a pour racines -9 et 5. Donner le signe de $-6x^2 - 24x + 270$.
4. Le polynôme $-7x^2 - 14x - 7$ a pour unique racine -1. Donner le signe de $-7x^2 - 14x - 7$.

Exercice 16 : Signe d'un produit

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$.

a) $f(x) = (x-2)(x+3)$
b) $f(x) = 2x(x-5)$
c) $f(x) = (7-x)(1+x)$
d) $f(x) = (x+5)(3-x)$

Exercice 17 : Signe de $ax^2 + bx + c$

Etudier le signe de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$ selon les valeurs de x.

a) $f(x) = -x^2 - 5x + 14$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
c) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$
d) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
f) $f(x) = -x^2 + x - 2$
g) $f(x) = x - x^2 + 2$
h) $f(x) = -100x^2 - 20x - 1$
i) $f(x) = 5x^2 - 4x$
j) $f(x) = -x^2 + 121$
k) $f(x) = x(1-x) - 2$
l) $f(x) = -3x - (x^2 - 4)$

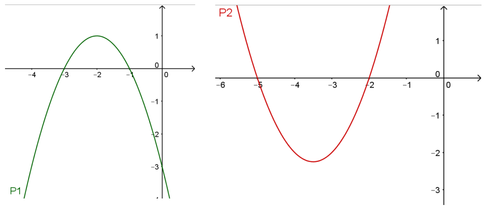
Exercice 18 : Inéquation et calculatrice

Avec la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f, puis donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 12$.

Exercice 19 : Lecture graphique

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
 $f(x) > 0 \quad f(x) \geq 0 \quad f(x) < 0 \quad f(x) \leq 0$
2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
 $g(x) > 0 \quad g(x) \geq 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) \leq 0$

Exercice 21 : Inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $(-3x+1)(x-2) > 0$
b) $(2+5x)(1-x) \geq 0$
c) $x^2+12x+35 < 0$
d) $-2x^2+x+15 \leq 0$
e) $5x^2-25x \geq 0$
f) $x^2-14x+49 \geq 0$
g) $x^2-3x < 0$
h) $-2x^2-2x+12 > 0$
i) $3x^2-5x \geq -2$
j) $(1+x)(x-2) < 4$
k) $13x-(9x^2+4) \geq 0$
l) $x(x-3) < 9-3x$
m) $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+2} \geq -1$
n) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} \leq \frac{3x^2-1}{x^2-x}$

Exercice 22 : Inéquations

a) Etudier le signe de $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

b) Etudier le signe de $Q(x) = -x^2 + 4x - 15$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(2x^2+5x-3)(x+5)}{(-x^2+4x-15)} \geq 0$$

Exercice 23 : Positions relatives

Déterminer les positions relatives des paraboles $\mathscr{P}_f$ et $\mathscr{P}_g$ représentant les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$
$$g(x) = -2x^2 - 3x + 20$$

Exercice 24 :

1) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $B(-3\,;\,0)$ et $C\left(\frac{5}{2};\,22\right)$.

2) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $D\,(0\,;\,1)$, $E\,(2\,;\,1)$ et $F\,(-3\,;\,31)$.

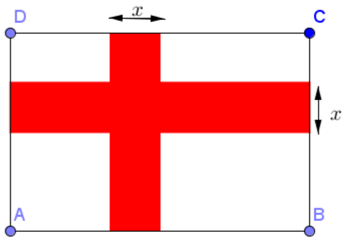
3) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui coupe l'axe des abscisses en $M\,(1\,;\,0)$ et $N\,(3\,;\,0)$ et qui a pour sommet un point d'ordonnée 3.

4) Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui est tangente à l'axe des abscisses en $Q\,(2\,;\,0)$ et qui passe par $R\,(1\,;\,-2)$.

V. Problèmes

Exercice 25 : Aire et trinôme

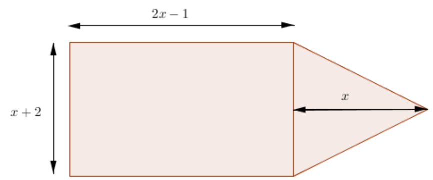
Soit $ABCD$ un rectangle tel que :
$AB = 6$ et $AD = 4$.



1. On note A_C, l'aire de la croix. Donner en fonction de x, l'aire de la croix $A_C(x)$.
2. On note A_R, l'aire de la croix. Donner en fonction de x, l'aire de la partie restante $A_R(x)$.
 Trouver x pour que l'aire de la croix soit égale à l'aire de la partie restante.

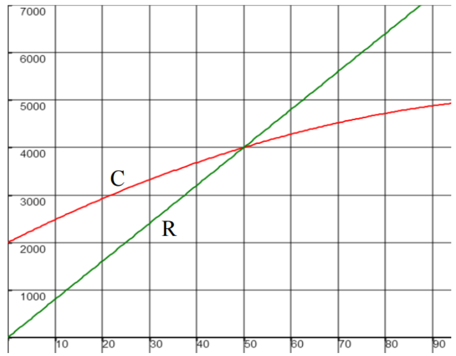
Exercice 26 : Aire et trinôme

On considère la figure ci-contre, constituée d'un rectangle auquel est juxtaposé un triangle isocèle.
Les dimensions sont en centimètres.
Déterminer x pour que l'aire de cette figure soit égale à 126 cm².



Exercice 27 : Bénéfice et second degré

Un artisan fabrique des chaises.
Le coût de la fabrication de n chaises est donnée en euros par $C(n) = -0{,}2n^2 + 50n + 2000$ pour n appartenant à $[0\,;90]$.
De plus, chaque chaise est vendue 80€.



1. Quel est le montant $R(n)$, en euros, que rapportera la vente de n chaises?
 La droite représentative R de $R(n)$ est tracée sur le même graphique que la courbe C, représentative de $C(n)$.
2. Que représente l'intersection des deux courbes ?
3. Lire graphiquement pour quelles valeurs de n l'artisan réalise un bénéfice.
4. Vérifier cette réponse par le calcul.

Exercice 28 : Bénéfice et second degré

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village.
Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.
On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes) avec $0 < q < 60$.
Charlie sait que le cout de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.
Son objectif est de rendre la production rentable.

Les formules donnant le cout $C(q)$ et la recette $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées :

$$C(q) = q^2 + 30q + 1000 \text{ et } R(q) = 100q$$

1. Justifier que $B(q) = -q^2 + 70q - 1000$
2. a. Résoudre $B(q) > 0$
 b. En déduire les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait du bénéfice.
3. Donner les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait un bénéfice maximal.

Exercice 31 : Changement de variable (4ème degré)

Résoudre (en justifiant) l'équation suivante :

$$3x^4 - 6x^2 - 9 = 0$$

Exercice 29 : Bénéfice et second degré

Une entreprise produit des téléviseurs 3D.
Le coût de production $C(n)$, exprimé en milliers d'euros, pour n articles, est donné par la fonction C telle que $C(n) = 0{,}02n^2 - 2n + 98$ pour n appartenant à l'intervalle $[0;\,150]$.

1. Chaque article étant vendu 1 500€, calculer le montant $V(n)$, exprimé en milliers d'euros, pour la vente de n articles.
2. On note $B(n)$ le bénéfice pour n articles vendus en milliers d'euros.
 a. Pour quelle quantité de téléviseurs vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice.
 b. Pour quelle quantité de téléviseurs vendus l'entreprise fait-elle un bénéfice de 40000€ ?

Exercice 30 : Problème du second degré

La trajectoire d'un projectile est donnée par :

$$h(x) = -0{,}1x^2 + 2x + 1$$

où $h(x)$ désigne la hauteur en mètre du projectile et x (un réel positif) la distance en mètres du projectile par rapport au point de lancer.

1. Déterminer la hauteur du projectile au moment du lancer.
2. A quelle distance le projectile retombe-t-il (on donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée au millimètre) ?
3. Déterminer la hauteur maximale du projectile.
4. A quelle distance est-elle atteinte ?