# Chapitre : Fonction linéaire et affine (correction)

**Compétence : Système d'équation à deux inconnues et fonction affine**

**Exercice 1 : Déterminer une fonction affine vérifiant deux conditions**

1. Déterminer une fonction affine $f$ vérifiant : $f(6) = 5$ et $f(-2) = 1$

**$f$ est une fonction affine, donc $f(x) = mx + p$.**

$$\begin{cases} f(6) = 5 \\ f(-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + p = 5 \\ -2m + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5 - 6m \\ -2m + 5 - 6m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5 - 6m \\ -8m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 5 - 6 \times \frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{cases}$$

**Ainsi $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.**

2. Déterminer une fonction affine $g$ vérifiant : $g(2) = 0$ et $g(8) = 12$

**$g$ est une fonction affine, donc $g(x) = mx + p$.**

$$\begin{cases} g(2) = 0 \\ g(8) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + p = 0 \\ 8m + p = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -2m \\ 8m - 2m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -2m \\ 6m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -4 \\ m = 2 \end{cases}$$

**Ainsi $g(x) = 2x - 4$.**

3. Résoudre $f(x) = g(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2x = -4 - 2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x = -6 \Leftrightarrow x = -6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x = 4.$$

**Le point d'intersection des droites représentant $f$ et $g$ a pour abscisse 4.**

**Compétence : Vocabulaire**

**Exercice 4 : Vocabulaire**

Pour chaque fonction , préciser sa nature (non affine, affine, linéaire ou constante), les valeurs du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine (si possible), et le sens de variation (selon vos connaissances).

| fonction | nature | coefficient directeur | ordonnée à l'origine | sens de variation |
|---|---|---|---|---|
| a) $a(x) = 5x - 3$ | affine | $5$ | $-3$ | Croissante $(5 > 0)$ |
| b) $b(x) = 8 - 3x$ | affine | $-3$ | $8$ | Décroissante $(-3 < 0)$ |
| c) $c(x) = 3\sqrt{2}$ | constante | $0$ | $3\sqrt{2}$ | Constante |
| d) $d(x) = 4x^2 + 3$ | non affine | | | |
| e) $e(x) = \frac{4-5x}{3} = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$ | affine | $-\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | Décroissante $(-\frac{5}{3} < 0)$ |
| f) $f(x) = 4x$ | linéaire | $4$ | $0$ | Croissante $(4 > 0)$ |
| g) $g(x) = \sqrt{3x+1}$ | non affine | | | |
| h) $h(x) = 2\sqrt{x} - 3$ | non affine | | | |
| i) $i(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ | affine | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | Croissante $(\frac{2}{3} > 0)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| j) $j(x) = \frac{2}{3x} - 1$ | non affine | | | |
| k) $k(x) = \sqrt{2}\ x$ | linéaire | $\sqrt{2}$ | $0$ | Croissante ($\sqrt{2} > 0$) |
| l) $l(x) = (2 + x)^2$ | non affine | | | |
| m) $m(x) = \frac{2x-3}{5} = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$ | affine | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{3}{5}$ | Croissante ($\frac{2}{5} > 0$) |
| n) $n(x) = \sqrt{2x} - 7$ | non affine | | | |
| o) $o(x) = 1$ | constante | $0$ | $1$ | Constante |
| p) $p(x) = -\sqrt{2}x + 6$ | affine | $-\sqrt{2}$ | 6 | Décroissante ($-\sqrt{2} < 0$) |
| q) $q(x) = \frac{1+3x}{5} = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ | affine | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | Croissante ($\frac{3}{5} > 0$) |
| r) $r(x) = \frac{4}{5x} - 1$ | non affine | | | |

**Exercice 3 : Développement et fonction affine**

Démontrer que les fonctions données sont des fonctions affines, donner leur sens de variation, puis tracer leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

a) $f_1(x) = \frac{5x-4}{2}$

$f_1(x) = \frac{5}{2}x - \frac{4}{2}$

$f_1(x) = \frac{5}{2}x - 2$

**$m = \frac{5}{2} > 0$ ainsi $f_1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

b) $f_2(x) = \frac{1-2x}{3}$

$f_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$

$f_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

**$m = -\frac{2}{3} < 0$ ainsi $f_2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

c) $f_3(x) = \frac{x+4}{2} - 3x$

$f_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{4}{2} - \frac{6x}{2}$

$f_3(x) = -\frac{5}{2}x - 2$

**$m = -\frac{5}{2} < 0$ ainsi $f_3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

d) $f_4(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2$

$f_4(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 - 4x^2$

$f_4(x) = 4x^2 + 4x - 4x^2$

$f_4(x) = 4x$

**$m = 4 > 0$ ainsi $f_4$ (fonction linéaire) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

e) $f_5(x) = x^2 + (2 + x)(2 - x)$

$f_5(x) = x^2 + 2^2 - x^2$

$f_5(x) = 4$

**$f_5$ est une fonction constant ($m = 0$)**

f) $f_6(x) = (2x + 1)^2 - (2x + 3)(2x - 3)$

$f_6(x) = 4x^2 + 4x + 1 - (4x^2 - 9)$

$f_6(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 9$

$f_6(x) = 4x + 10$

**$m = 4 > 0$ ainsi $f_6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

**Exercice 4 : Modélisation**

On compare deux formules de locations de DVD :

- Option 1 : chaque DVD est loué 3,50 € ;
- Option 2 : on paye un abonnement annuel de 12 €, puis 2 € par DVD loué.

On note $x$ le nombre de DVD loués sur l'année.

1. Compléter le tableau suivant :

| Nombre de DVD loués | 0 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|
| Prix avec l'option 1 (en €) | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{3,5 \times 2 = 7}$ | $\mathbf{3,5 \times 6 = 21}$ |
| Prix avec l'option 2 (en €) | $\mathbf{12}$ | $\mathbf{2 \times 2 + 12 = 16}$ | $\mathbf{2 \times 6 + 12 = 24}$ |

2. a) Déterminer la fonction $f$ qui modélise le prix à payer en € en fonction de $x$ avec l'option 1.

$\boldsymbol{f(x) = 3,5x}$

b) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier la réponse.

$\boldsymbol{f(x) = mx}$ **avec** $\boldsymbol{m = 3,5}$ **ainsi** $\boldsymbol{f}$ **est une fonction linéaire.**

3. a) Déterminer la fonction $g$ qui modélise le prix à payer en € en fonction de $x$ avec l'option 2.

$\boldsymbol{g(x) = 2x + 12}$

b) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier la réponse.

$\boldsymbol{g(x) = mx + p}$ **avec** $\boldsymbol{m = 2}$ **et** $\boldsymbol{p = 12}$ **ainsi** $\boldsymbol{g}$ **est une fonction affine.**

c) Combien coûte la location de 20 DVD avec l'option 2 ?

$\boldsymbol{g(20) = 2 \times 20 + 12 = 40 + 12 = 52}$

**La location de 20 DVD avec l'option 2 coûte 52€.**

4. Quelle option permet de louer le plus de DVD si on dispose d'un budget de 70 € ?

$\boldsymbol{f(x) = 70}$

$\boldsymbol{3,5x = 70}$

$\boldsymbol{x = \frac{70}{3,5}}$

$\boldsymbol{x = 20}$

**Si on dispose de 70€ avec l'option 1, on peut louer** $\boldsymbol{20}$ **DVDs.**

$\boldsymbol{g(x) = 70}$

$\boldsymbol{2x + 12 = 70}$

$\boldsymbol{2x = 70 - 12}$

$\boldsymbol{2x = 58}$

$\boldsymbol{x = \frac{58}{2}}$

$\boldsymbol{x = 29}$

**Si on dispose de 70€ avec l'option 2, on peut louer** $\boldsymbol{29}$ **DVDs.**

**L'option 2 permet de louer le plus de DVDs si on dispose d'un budget de 70€.**

**Compétence : Proportionnalité**

## Exercice 5 : Proportionnalité et pourcentages

Un commerçant calcule le prix de vente de ses articles en augmentant de 40% le prix d'achat.

1. Calculer le prix de vente d'un article acheté 58€.

| |
|---|
| $\boldsymbol{V_i = 58}$<br>$\boldsymbol{c = 1 + \frac{40}{100} = 1,4}$. **(augmentation)**<br>$\boldsymbol{V_f = V_i \times c = 58 \times 1,4 = 81,2€}$ |

2. a. Le prix de vente est-il proportionnel au prix initial ?

| |
|---|
| **Le prix de vente est proportionnel au prix initial et le coefficient de proportionnalité est $\boldsymbol{c = 1,4}$.** |

b. On appelle $x$ le prix d'achat et $f(x)$ le prix de vente. Donner l'expression de $f(x)$.

| |
|---|
| $\boldsymbol{f(x) = 1,4x}$ |

## Exercice 6 : Proportionnalité et pourcentages

Un magasin propose des soldes de 30% sur l'ensemble des articles.

1. Un article coûte 132€. A quel prix est-il soldé ?

| |
|---|
| $\boldsymbol{V_i = 132}$<br>$\boldsymbol{c = 1 - \frac{30}{100} = 0,7}$. **(diminution)**<br>$\boldsymbol{V_f = V_i \times c = 132 \times 0,7 = 92,4€}$ |

2. a. Le prix soldé est-il proportionnel au prix initial ?

| |
|---|
| **Le prix soldé est proportionnel au prix initial et le coefficient de proportionnalité est $\boldsymbol{c = 0,7}$.** |

b. On appelle $x$ le prix initial et $f(x)$ le prix soldé. Donner l'expression de $f(x)$.

| |
|---|
| $\boldsymbol{f(x) = 0,7x}$ |

**Compétence : Représentation graphique et sens de variations**

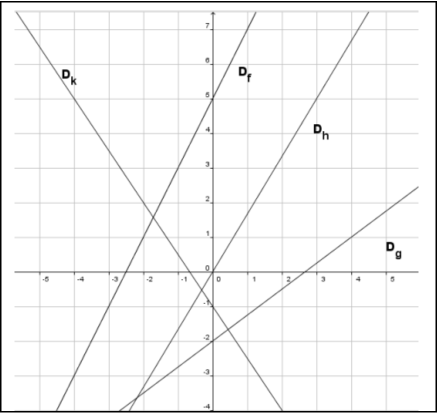
## Exercice 7 : Tracer des droites, représentations graphiques de fonctions affines

1. Représenter dans un repère orthonormé les fonctions affines $f, g, h$ et $k$ :

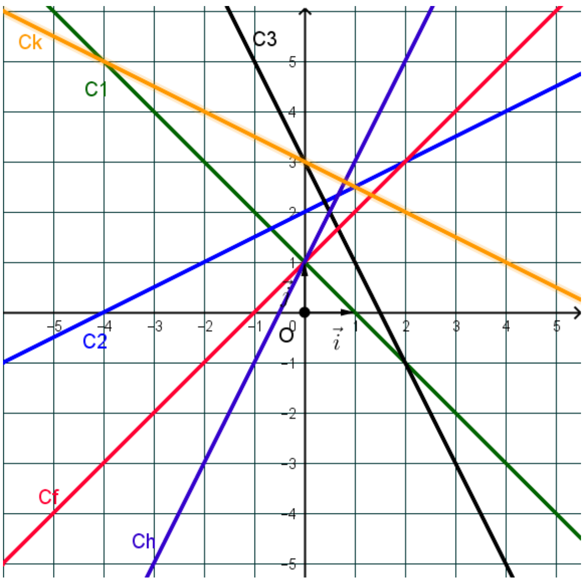
$f(x) = 2x + 5$ $\quad g(x) = \frac{3}{4}x - 2$ $\quad h(x) = \frac{5}{3}x$ $\quad k(x) = -\frac{3}{2}x - 1$

2. Donner le sens de variations des fonctions précédentes.

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{f}$ **est croissante car** $\boldsymbol{m = 2 > 0}$. | $\boldsymbol{g}$ **est croissante car** $\boldsymbol{m = \frac{3}{4} > 0}$. |
| $\boldsymbol{h}$ **est croissante car** $\boldsymbol{m = \frac{5}{3} > 0}$. | $\boldsymbol{k}$ **est décroissante car** $\boldsymbol{m = -\frac{3}{2} < 0}$. |




## Exercice 8 : Associer une droite à une fonction affine




On a représenté graphiquement trois des six fonctions ci-dessous.

1. Associer à chaque représentation graphique la fonction qui lui correspond.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

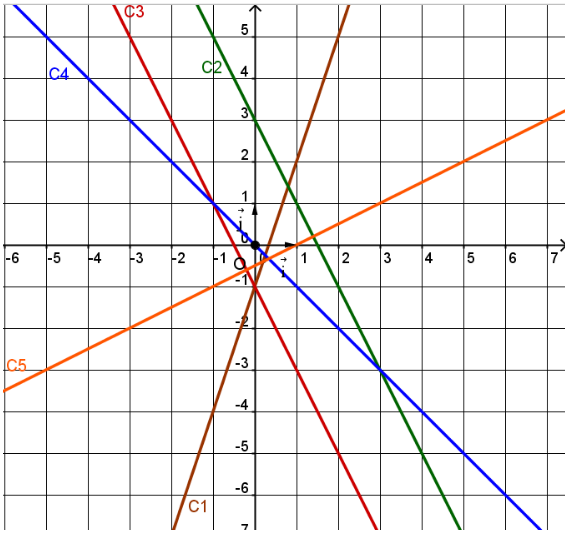
$f(x) = x + 1$ $\quad g(x) = -x + 1 \rightarrow \boldsymbol{C_1}$

$h(x) = 2x + 1$ $\quad i(x) = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow \boldsymbol{C_2}$

$j(x) = -2x + 3 \rightarrow \boldsymbol{C_3}$ $\quad k(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

2. Tracer la représentation graphique de chacune des fonctions non représentés.

## Exercice 9 : Associer une fonction affine à une droite




1. Parmi les six représentations graphiques suivantes, trouver celle qui correspondent à la représentation graphique des fonctions $f$, $g$ et $h$, sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

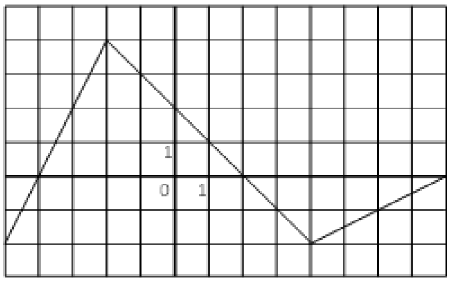
$f(x) = 3x - 1 \to \boldsymbol{C_1}$
$g(x) = -2x - 1 \to \boldsymbol{C_3}$
$h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \to \boldsymbol{C_5}$

2. Donner l'expression des fonctions représentées manquantes.

$C_2 \to \boldsymbol{i(x) = -2x + 3}$
$C_4 \to \boldsymbol{j(x) = -x}$

## Exercice 10 : Fonction affine par morceaux

La fonction représentée ci-dessous est une fonction **AFFINE PAR MORCEAUX**.



Elle est définie sur $\mathbb{R}$, mais a des expressions différentes selon les intervalles.

Déterminer ces expressions :

- sur $]-\infty\,;-2]$ : $f(x) = \boldsymbol{2x + 8}$
- sur $[-2\,;4]$ : $f(x) = \boldsymbol{-x + 2}$
- sur $[4\,;+\infty[$ : $f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{2}x - 4}$

## Exercice 11 : Fonction affine par morceaux (à faire)

Représenter la fonction $f$ définie par :

- sur $]-\infty\,;0]$ : $f(x) = -x - 2$

$\boldsymbol{m = -1}$ **et** $\boldsymbol{p = -2}$

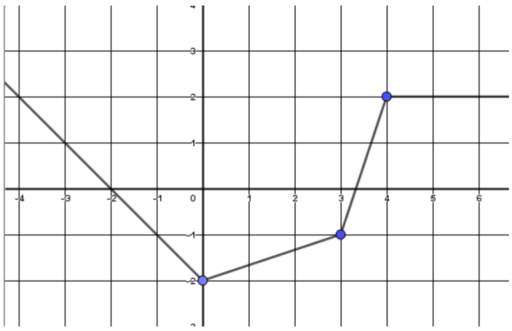
- sur $[0\,;3]$ : $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

$\boldsymbol{m = \frac{1}{3}}$ **et** $\boldsymbol{p = -2}$

- sur $[3\,;4]$ : $f(x) = 3x - 10$

$\boldsymbol{f(3) = 3 \times 3 - 10 = -1}$ **donc** $\boldsymbol{B(3\,;-1)}$
$\boldsymbol{f(4) = 3 \times 4 - 10 = 2}$ **donc** $\boldsymbol{C(4\,;2)}$

- sur $[4\,;+\infty[$ : $f$ *est constante*



## Exercice 12 : Modélisation

Dans un jeu vidéo, on a le choix entre trois personnages dont la force se mesure en points. Tous les personnages commencent au niveau 0 et terminent au niveau 25, cependant, ils n'évoluent pas de la même manière.

| Guerrier | Mage | Chasseur |
|---|---|---|
| Je commence avec 50 points et je ne gagne pas d'autres points au cours du jeu.<br>**Représenté par une fonction $f$.** | Je commence avec 0 point et je gagne 3 points par niveau.<br>**Représenté par une fonction $g$.** | Je commence avec 20 points et je gagne 2 points par niveau.<br>**Représenté par une fonction $h$.** |

1. Compléter le tableau suivant.

| **Niveau du jeu** | $0$ | $1$ | $5$ | $10$ | $15$ | $25$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Force du guerrier (en points)** | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{50}$ |
| **Force du mage (en points)** | $\mathbf{3\times 0=0}$ | $\mathbf{3\times 1=3}$ | $\mathbf{3\times 5=15}$ | $\mathbf{30}$ | $\mathbf{45}$ | $\mathbf{75}$ |
| **Force du chasseur (en points)** | $\mathbf{2\times 0+20}$<br>$\mathbf{=20}$ | $\mathbf{2\times 1+20}$<br>$\mathbf{=22}$ | $\mathbf{2\times 5+20}$<br>$\mathbf{=30}$ | $\mathbf{40}$ | $\mathbf{50}$ | $\mathbf{70}$ |

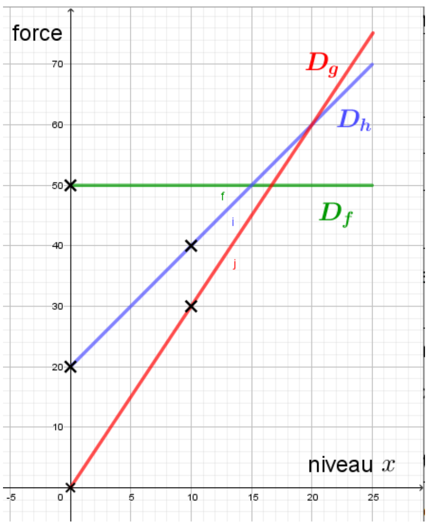
2. Pour chacun des personnages, sa force est-elle proportionnelle au niveau du jeu ? Si oui, quel est le coefficient de proportionnalité ?

- **Guerrier :** $\frac{50}{1}=50$ **et** $\frac{50}{5}=10\neq 50$ **donc il n'y a pas proportionnalité.**
- **Mage :** $\frac{3}{1}=3\,;\frac{15}{5}=3\,;\frac{30}{10}=3\,;\frac{45}{15}=3\,;\frac{75}{25}=3$ **donc la force est proportionnelle au niveau du jeu pour le mage. Le coefficient de proportionnalité est 3.**
- **Chasseur :** $\frac{22}{1}=22$ **et** $\frac{30}{5}=6\neq 22$ **donc il n'y a pas proportionnalité.**

3. Chacune des trois fonctions $f$, $g$ et $h$ permet de calculer la force d'un personnage en fonction du niveau $x$ du jeu. Exprimer chacune de ces fonctions, en fonction de $x$.

- $f$ **est une fonction constante définie par :** $f(x)=50$
- $g$ **est une fonction linéaire définie par :** $g(x)=3x$
- $h$ **est une fonction affine définie par :** $h(x)=2x+20$

4. a) Utiliser le tableau de valeurs de la question 1. pour tracer, dans le même repère, les représentations graphiques des fonctions $f$, $g$ et $h$.
   b) Que constate-t-on ? Pourquoi pouvait-on le prévoir pour la fonction f ?




**La droite représentant la fonction $f$ est horizontale, c'est normal puisque $f$ est une fonction constante.**

**La droite représentant la fonction $g$ passe par l'origine du repère, c'est normal puisque $g$ est une fonction linéaire.**

5. a) Déterminer, à l'aide du graphique, le niveau à partir duquel le mage devient le plus fort des trois personnages.

**D'après le graphique, le mage (fonction $g$) devient le plus fort des trois personnages à partir du niveau 20.**

   b) Retrouver ce résultat par le calcul.

**On résout** $g(x)\geq f(x)$

$3x\geq 50$

$x\geq \frac{50}{3}$

$x\geq 17$

**et**

**On résout** $g(x)\geq h(x)$

$3x\geq 2x+20$

$x\geq 20$

**Conclusion :** **Le mage (fonction $g$) devient le plus fort des trois personnages à partir du niveau 20.**

Compétence : Tableau de signes

## Exercice 13 : Tableau de signes

1. Dresser le tableau de signes des fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 8$ et $g(x) = 3x + 2$

$$-4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$m = -4 < 0$$

$$3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$m = 3 > 0$$

2. Vérifier les résultats en calculant mentalement les images de $-4,\ 0, 1, 3$ par $f$ et $g$.

| $x$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 24 | 8 | 4 | $-4$ |
| $g(x)$ | $-10$ | 2 | 5 | 11 |

## Exercice 14 : Tableau de signes

On a dressé le tableau de signe de fonctions affines, mais l'expression de la fonction a été effacée.
Donner l'expression effacée.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de .... | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Il suffit d'avoir $m > 0$ et $2m + p = 0$.**

**$f(x) = x - 2$ marche.**

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Il suffit d'avoir $m > 0$ et $-5m + p = 0$.**

**$f(x) = x + 5$ marche.**

## Exercice 15 : Equation et inéquation (fonction affine)

1. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = -7x + 4$. Résoudre :
   a. $f(x) = 0$ b. $f(x) > 0$

$-7x + 4 = 0$

$-7x = -4$

$x = \frac{-4}{-7}$

$x = \frac{4}{7}$

$S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$

**1ère méthode :**

$-7x + 4 > 0$

$-7x > -4$

$x < \frac{-4}{-7}$

$x < \frac{4}{7}$

$S = ]-\infty\,; \frac{4}{7}[$

**2ème méthode :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-7x+4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$m = -7 < 0$

$S = ]-\infty\,; \frac{4}{7}[$

2. Soit $g$ la fonction définie par $f(x) = \frac{5}{4}x + 6$. Résoudre :
   a. $g(x) = 0$ b. $g(x) \leq 0$

$\frac{5}{4}x + 6 = 0$

$\frac{5}{4}x = -6$

$x = -6 \times \frac{4}{5}$

$x = -\frac{24}{5}$

$S = \left\{-\frac{24}{5}\right\}$

**1ère méthode :**

$\frac{5}{4}x + 6 \leq 0$

$\frac{5}{4}x \leq -6$

$x \leq -6 \times \frac{4}{5}$

$x \leq -\frac{24}{5}$

$S = ]-\infty\,; -\frac{24}{5}]$

**2ème méthode :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{24}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{4}x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$m = \frac{5}{4} < 0$

$S = ]-\infty\,; -\frac{24}{5}]$

3. Soit $h$ la fonction définie par $h(x) = -2x + 6$. Résoudre :

a) $h(x) = 0$ b) $h(x) < 0$

| | | |
|---|---|---|
| $-2x + 6 = 0$<br>$-2x = -6$<br>$x = \frac{-6}{-2}$<br>$x = 3$<br>$S = \{3\}$ | **<u>1<sup></sup>ère méthode :</u>**<br>$-2x + 6 < 0$<br>$-2x < -6$<br>$x > \frac{-6}{-2}$ $car -2 < 0$<br>$x > 3$<br>$S = ]3\ ;\ +\infty[$ | **<u>2ème méthode :</u>**<br>$\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & 3 & +\infty \\ \hline h(x) & + & 0 & - \\ \hline\end{array}$ $m = -2 < 0$<br>$S = ]3\ ;\ +\infty[$ |

4. Soit $k$ la fonction définie par $k(x) = \frac{2}{3}x - 1$. Résoudre :

a) $k(x) = 0$ b) $k(x) \geq 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{2}{3}x - 1 = 0$<br>$2x - 3 = 0$<br>$2x = 3$<br>$x = \frac{3}{2}$<br>$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ | **<u>1ère méthode :</u>**<br>$\frac{2}{3}x - 1 \geq 0$<br>$\frac{2}{3}x \geq 1$<br>$x \geq 1 \times \frac{3}{2}$ car $\frac{3}{2} > 0$<br>$x \geq \frac{3}{2}$<br>$S = [\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$ | **<u>2ème méthode :</u>**<br>$\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & \frac{3}{2} & +\infty \\ \hline k(x) & - & 0 & + \\ \hline\end{array}$ $m = \frac{2}{3} > 0$<br>$S = [\frac{3}{2}\ ;\ +\infty[$ |

5. Soit $l$ la fonction définie par $l(x) = -x - \frac{2}{5}$. Résoudre :

a) $l(x) = 0$ b) $l(x) > 0$

| | | |
|---|---|---|
| $-x - \frac{2}{5} = 0$<br>$-x = \frac{2}{5}$<br>$x = -\frac{2}{5}$<br>$S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ | **<u>1ère méthode :</u>**<br>$-x - \frac{2}{5} > 0$<br>$-x > \frac{2}{5}$<br>$x < \frac{2}{5} \times (-1)$ car $-1 < 0$<br>$x < -\frac{2}{5}$<br>$S = ]-\infty\ ;\ -\frac{2}{5}[$ | **<u>2ème méthode :</u>**<br>$\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & -\frac{2}{5} & +\infty \\ \hline l(x) & + & 0 & - \\ \hline\end{array}$ $m = -1 < 0$<br>$S = ]-\infty\ ;\ -\frac{2}{5}[$ |

6. Soit $m$ la fonction définie par $m(x) = 3 - 5x$. Résoudre :

a) $m(x) = 0$ b) $m(x) \leq 0$

| | | |
|---|---|---|
| $3 - 5x = 0$<br>$-5x = -3$<br>$x = \frac{-3}{-5}$<br>$x = \frac{3}{5}$<br>$S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$ | **<u>1ère méthode :</u>**<br>$3 - 5x \leq 0$<br>$-5x \leq -3$<br>$x \geq \frac{-3}{-5}$ car $-5 < 0$<br>$x \geq \frac{3}{5}$<br>$S = [\frac{3}{5}\ ;\ +\infty[$ | **<u>2ème méthode :</u>**<br>$\begin{array}{\|c\|ccc\|}\hline x & -\infty & \frac{3}{5} & +\infty \\ \hline m(x) & + & 0 & - \\ \hline\end{array}$ $m = -5 < 0$<br>$S = [\frac{3}{5}\ ;\ +\infty[$ |

7. Soit $n$ la fonction définie par $n(x) = 3x - 9$. Résoudre :

a) $n(x) = 0$ b) $n(x) \geq 0$

| | | |
|---|---|---|
| $3x - 9 = 0$<br>$3x = 9$<br>$x = \frac{9}{3}$<br>$x = 3$<br>$S = \{3\}$ | **<u>$1^{\text{ère}}$ méthode :</u>**<br>$3x - 9 \geq 0$<br>$3x \geq 9$<br>$x \geq \frac{9}{3}$ car $3 > 0$<br>$x \geq 3$<br>$S = [3\,;\,+\infty[$ | **<u>$2^{\text{ème}}$ méthode :</u>**<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 3 & & +\infty \\ \hline n(x) & & - & 0 & + & \end{array}$ $m = 3 > 0$<br>$S = [3\,;\,+\infty[$ |

8. Soit $p$ la fonction définie par $p(x) = \frac{3}{5}x - \frac{4}{3}$. Résoudre :

a) $p(x) = 0$ b) $p(x) < 0$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{3}{5}x - \frac{4}{3} = 0$<br>**On multiplie par 15**<br>$9x - 20 = 0$<br>$9x = 20$<br>$x = \frac{20}{9}$<br>$S = \left\{\frac{20}{9}\right\}$ | **<u>$1^{\text{ère}}$ méthode :</u>**<br>$\frac{3}{5}x - \frac{4}{3} < 0$<br>$\frac{3}{5}x < \frac{4}{3}$<br>$x < \frac{4}{3} \times \frac{5}{3}$<br>$x < \frac{20}{9}$<br>$S = ]-\infty\,;\frac{20}{9}[$ | **<u>$2^{\text{ème}}$ méthode :</u>**<br>$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & \frac{20}{9} & & +\infty \\ \hline p(x) & & - & 0 & + & \end{array}$ $m = \frac{3}{5} > 0$<br>$S = ]-\infty\,;\frac{20}{9}[$ |

**Compétence : Signe d'un produit et signe d'un quotient, inéquations**

**<u>Exercice 16 : Signe d'un produit</u>**

1. Déterminer le signe de chacune des fonctions $f, g$ et $h$ :

a. $f(x) = (3x - 5)(-2x + 7)$

$3x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{3}$ | $-2x + 7 = 0$, $x = \frac{7}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{3}$ | | $\frac{7}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-5$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $-2x+7$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(3x-5)(-2x+7)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

m=3>0

m=-2<0

b. $g(x) = -x(x - 7)$

$-x = 0$, $x = 0$ | $x - 7 = 0$, $x = 7$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 7 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $x-7$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $-x(x-7)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

m=-1<0

m=1>0

c. $h(x) = (2x - 1)(-3x)(5 - x)$

$2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$ | $-3x = 0$, $x = 0$ | $5 - x = 0$, $x = 5$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $-3x$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $5-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(2x-1)(-3x)(5-x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

m=2>0

m=-3<0

m=-1<0

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $f(x) > 0$ b. $g(x) \leq 0$ c. $h(x) < 0$

| | | |
|---|---|---|
| $S = ]\frac{5}{3}\,;\frac{7}{2}[$ | $S = ]-\infty\,;0] \cup [7\,;\,+\infty[$ | $S = ]-\infty\,;0[ \cup ]\frac{1}{2}\,;5[$ |

**Exercice 17 : Signe d'un produit**

Résoudre les inéquations suivantes

a) $(x-5)(6x-10) \leq 0$

négatif

$x-5=0$

$x=5$

$6x-10=0$

$6x=10$

$x=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{3}$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $6x-10$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-5)(6x-10)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S=\left[\frac{5}{3};5\right]$

b) $(2-10x)(4x-1) \geq 0$

positif

$2-10x=0$

$-10x=-2$

$x=\frac{-2}{-10}=\frac{1}{5}$

$4x-1=0$

$4x=1$

$x=\frac{1}{4}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{5}$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-10x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $4x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2-10x)(4x-1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S=\left[\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right]$

c) $(5x-9)(5x-8) \geq 0$

positif

$5x-9=0$

$5x=9$

$x=\frac{9}{5}$

$5x-8=0$

$5x=8$

$x=\frac{8}{5}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{8}{5}$ | | $\frac{9}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x-9$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $5x-8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(5x-9)(5x-8)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S=]-\infty;\frac{8}{5}] \cup [\frac{9}{5};+\infty[$

d) $(-3x-9)(7x-8) < 0$

strict. négatif

$-3x-9=0$

$-3x=9$

$x=\frac{9}{-3}=-3$

$7x-8=0$

$7x=8$

$x=\frac{8}{7}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{8}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x-9$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $7x-8$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(-3x-9)(7x-8)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S=]-\infty;-3[\cup]\frac{8}{7};+\infty[$

e) $(3x+2)(-x+2)(2x-1) \leq 0$

négatif

$3x+2=0$

$3x=-2$

$x=-\frac{2}{3}$

$-x+2=0$

$x=2$

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-x+2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(3x+2)(-x+2)(2x-1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S=\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty[$

$f)$ $(4x-5)(2-2x)(3x-3) > 0$

strict. positif

$4x-5=0$

$4x=5$

$x=\frac{5}{4}$

$2-2x=0$

$-2x=-2$

$x=\frac{-2}{-2}=1$

$3x-3=0$

$3x=3$

$x=\frac{3}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{5}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2-2x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $3x-3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(4x-5)(2-2x)(3x-3)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$S=]-\infty;1[\cup]1;\frac{5}{4}[$

**Exercice 18 : Signe d'un quotient**

1. Déterminer le signe de chacune des fonctions $f$, $g$ et $h$ :

a) $f(x) = \dfrac{-x}{2-x}$

$\boldsymbol{-x = 0}$

$\boldsymbol{x = 0}$

**Valeur interdite :**

$\boldsymbol{2 - x = 0}$

$\boldsymbol{-x = -2}$

$\boldsymbol{x = 2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $2-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{-x}{2-x}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | |

m=-1<0

m=-1<0

b) $g(x) = \dfrac{7-2x}{-3x+5}$

$\boldsymbol{7 - 2x = 0}$

$\boldsymbol{-2x = -7}$

$\boldsymbol{x = \frac{7}{2}}$

**Valeur interdite :**

$\boldsymbol{-3x + 5 = 0}$

$\boldsymbol{-3x = -5}$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{3}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{5}{3}$ | | $\frac{7}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $7-2x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $-3x+5$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | |
| $\frac{7-2x}{-3x+5}$ | | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

m=-2<0

m=-3<0

c) $h(x) = \dfrac{(2-x)(x+1)}{3x-5}$

$\boldsymbol{2 - x = 0}$

$\boldsymbol{-x = -2}$

$\boldsymbol{x = 2}$

$\boldsymbol{x + 1 = 0}$

$\boldsymbol{x = -1}$

**Valeur interdite :**

$\boldsymbol{3x - 5 = 0}$

$\boldsymbol{3x = 5}$

$\boldsymbol{x = \frac{5}{3}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{5}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $3x-5$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\frac{(2-x)(x+1)}{3x-5}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

m=-1<0

m=1>0

m=3>0

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $f(x) < 0$ b. $g(x) \geq 0$ c. $h(x) \leq 0$

| a. | b. | c. |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{S} = ]\mathbf{0}\,;\mathbf{2}[$ | $\boldsymbol{S} = ]-\infty\,;\frac{5}{3}[\cup[\frac{7}{2}\,;\,+\infty[$ | $\boldsymbol{S} = [\mathbf{-1}\,;\frac{5}{3}[\cup[\mathbf{2}\,;+\infty[$ |

**Exercice 19 : Signe d'un quotient**

Résoudre les inéquations suivantes

a) $\dfrac{x+2}{7x-1} > 0$

strict. positif

$x+2=0$

$x=-2$

**Valeur interdite :**

$7x-1=0$

$7x=1$

$x=\dfrac{1}{7}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $7x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{x+2}{7x-1}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

$S = ]-\infty\ ;\ -2[ \cup ]\dfrac{1}{7}\ ;\ +\infty[$

b) $\dfrac{3x(2x-1)}{3x+4} < 0$

strict. négatif

$3x=0$

$x=0$

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=\dfrac{1}{2}$

**Valeur interdite :**

$3x+4=0$

$3x=-4$

$x=-\dfrac{4}{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{4}{3}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{3x(2x-1)}{3x+4}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$S = ]-\infty\ ;\ -\dfrac{4}{3}[ \cup ]0\ ;\dfrac{1}{2}[$

c) $\dfrac{2x+6}{2-4x} > 0$

strict. positif

$2x+6=0$

$2x=-6$

$x=-\dfrac{6}{2}$

$x=-3$

**Valeur interdite :**

$2-4x=0$

$-4x=-2$

$x=\dfrac{-2}{-4}$

$x=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2-4x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{2x+6}{2-4x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

$S = ]-3\ ;\dfrac{1}{2}[$

d) $\dfrac{(-x-2)(x-1)}{x(-2x+4)} \geq 0$

positif

$-x-2=0$

$-x=2$

$x=-2$

$x-1=0$

$x=1$

**Valeurs interdites :**

$x=0$

$-2x+4=0$

$-2x=-4$

$x=\dfrac{-4}{-2}$

$x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-2x+4$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{(-x-2)(x-1)}{x(-2x+4)}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

$S = ]-\infty\ ;\ -2] \cup ]0\ ;1] \cup ]2\ ;\ +\infty[$

e) $\dfrac{4x+9}{6-10x} \leq 0$

négatif

$4x + 9 = 0$

$4x = -9$

$x = -\dfrac{9}{4}$

**Valeur interdite :**

$6 - 10x = 0$

$-10x = -6$

$x = \dfrac{-6}{-10}$

$x = \dfrac{3}{5}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{9}{4}$ | | $\frac{3}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x+9$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $6-10x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{4x+9}{6-10x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |

$S = ]-\infty\ ;\ -\dfrac{9}{4}] \cup ]\dfrac{3}{5}\ ;\ +\infty[$

**Exercice 20. : Tableau de signes**

Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x^2 + 1)(2x - 8)(-x + 3)$

$2x^2 + 1 = 0$
$x^2 = -\dfrac{1}{2}$
impossible

$2x - 8 = 0$
$2x = 8$
$x = \dfrac{8}{2}$
$x = 4$

$-x + 3 = 0$
$-x = -3$
$x = 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+1$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | toujours positif |
| $2x-8$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | m=2>0 |
| $-x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | m=-1<0 |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

**Attention :** $x \mapsto 2x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine

b) $f(x) = 3x(5x - 2)$

$3x = 0$
$x = 0$

$5x - 2 = 0$
$5x = 2$
$x = \dfrac{2}{5}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{5}$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | m=3>0 |
| $5x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | m=5>0 |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

c) $f(x) = \dfrac{-5x}{(x+3)^2}$

$-5x = 0$
$x = 0$

**Valeur interdite :**
$x + 3 = 0$
$x = -3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | m=-5<0 |
| $(x+3)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | carré toujours positif |
| $f(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

d) $f(x) = \dfrac{5-x}{x^2(3x-6)}$

$5 - x = 0$
$-x = -5$
$x = 5$

**Valeurs interdites :**

$x^2 = 0$
$x = 0$

$3x - 6 = 0$
$3x = 6$
$x = \dfrac{6}{3}$
$x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | m=-1<0 |
| $x^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | carré toujours positif |
| $3x-6$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | m=3>0 |
| $f(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

e) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{2}x-\sqrt{6})(1-x)}{3x(2x+4)}$

$\sqrt{2}x-\sqrt{6}=0$
$\sqrt{2}x=\sqrt{6}$
$x=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$
$x=\sqrt{\dfrac{6}{2}}$
$x=\sqrt{3}$

**Valeur interdite :**
$3x=0$
$x=0$

$1-x=0$
$-x=-1$
$x=1$

**Valeur interdite :**
$2x+4=0$
$2x=-4$
$x=-\dfrac{4}{2}$
$x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{2}x-\sqrt{6}$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | m=$\sqrt{2}$ >0 |
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | m=-1<0 |
| $3x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | m=3>0 |
| $2x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | m=2>0 |
| $f(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

f) $f(x)=x(x+1)(x+2)$

$x=0$

$x+1=0$
$x=-1$

$x+2=0$
$x=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | m=1>0 |
| $x+1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | m=1>0 |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | m=1>0 |
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

g) $f(x)=\dfrac{-10(3x+7)}{1-6x}$

$3x+7=0$
$3x=-7$
$x=-\dfrac{7}{3}$

**Valeur interdite :**
$1-6x=0$
$-6x=-1$
$x=\dfrac{-1}{-6}$
$x=\dfrac{1}{6}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{7}{3}$ | | $\frac{1}{6}$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-10$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $3x+7$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | m=3>0 |
| $1-6x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | m=-6<0 |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

**Attention :** Il ne faut pas oublier le $-10$ dans le tableau !

h) $f(x)=\dfrac{(3x-2)(4-2x)}{x-1}$

$3x-2=0$
$3x=2$
$x=\dfrac{2}{3}$

$4-2x=0$
$-2x=-4$
$x=\dfrac{-4}{-2}$
$x=2$

**Valeur interdite :**
$x-1=0$
$x=1$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | m=3>0 |
| $4-2x$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | m=-2<0 |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | m=1>0 |
| $f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice 21 : Inéquations produit**

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + (x-1)(2x+3)$$

   a) Factoriser $f(x)$.

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 1 + (x-1)(2x+3)}$
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 + (x-1)(2x+3)}$ **identité remarquable :** $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)[(x-1) + (2x+3)]}$ **facteur commun :** $\boldsymbol{(x-1)}$
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(x-1+2x+3)}$
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(3x+2)}$

   b) Etudier le signe de $f(x)$.

***Il faut bien sûr utiliser la forme factorisée pour faire un tableau de signes…***
***On ne peut pas étudier le signe sans cette forme factorisée !!!***

$$\boldsymbol{f(x) = (x-1)(3x+2)}$$

$\boldsymbol{x - 1 = 0}$
$\boldsymbol{x = 1}$

$\boldsymbol{3x + 2 = 0}$
$\boldsymbol{3x = -2}$
$\boldsymbol{x = -\frac{2}{3}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | m=1>0 |
| $3x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | m=3>0 |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

   c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

$$\boldsymbol{S = ]-\infty\,;\,-\frac{2}{3}] \cup [1\,;\,+\infty[}$$

2. Mêmes questions avec :

$$g(x) = x(-x+4) - 2x(2x+3)$$

2) a)

$\boldsymbol{g(x) = x(-x+4) - 2x(2x+3)}$
$\boldsymbol{g(x) = x[(-x+4) - 2(2x+3)]}$ **facteur commun :** $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{g(x) = x(-x+4-4x-6)}$
$\boldsymbol{g(x) = x(-5x-2)}$

b)

$$\boldsymbol{g(x) = x(-5x-2)}$$

$\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{-5x - 2 = 0}$
$\boldsymbol{-5x = 2}$
$\boldsymbol{x = \frac{2}{-5}}$
$\boldsymbol{x = -\frac{2}{5}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $0$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | m=1>0 |
| $-5x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | m=-5<0 |
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

c) $g(x) \geq 0$ : $\boldsymbol{S = [-\frac{2}{5}\,;\,0]}$

3. Mêmes questions avec :

$$h(x) = (3x+1)^2 - (4-2x)^2$$

3) a)

$\boldsymbol{h(x) = (3x+1)^2 - (4-2x)^2}$
$\boldsymbol{h(x) = [(3x+1) + (4-2x)][(3x+1) - (4-2x)]}$ **identité remarquable :** $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$
$\boldsymbol{h(x) = (3x+1+4-2x)(3x+1-4+2x)}$
$\boldsymbol{h(x) = (x+5)(5x-3)}$

b)

$$h(x) = (x+5)(5x-3)$$

$x + 5 = 0$
$x = -5$

$5x - 3 = 0$
$5x = 3$
$x = \frac{3}{5}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $\frac{3}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+5$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $5x-3$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

c) $h(x) \geq 0$ : $S = ]-\infty\,;\,-5] \cup [\frac{3}{5}\,;\,+\infty[$

**<u>Exercice 22 : Inéquations quotient</u>**

1. Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + x$$

a) Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?

**On cherche les éventuelles valeurs interdites :**
$x + 2 = 0$
$x = -2$
**$-2$ est une valeur interdite donc $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$**

b) Mettre $f(x)$ sous forme d'un seul quotient.

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + x = \frac{1}{x+2} + \frac{x(x+2)}{x+2} = \frac{1 + x^2 + 2x}{x+2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+2}$$

**Identité remarquable** : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b$ *indispensable de factoriser pour pouvoir étudier le signe*

c) Etudier le signe de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$$

$x + 1 = 0$
$x = -1$

**<u>Valeur interdite :</u>**
$x + 2 = 0$
$x = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | | $+$ | \| | $+$ | 0 | $+$ | | carré toujours positif |
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | | m=1>0 |
| $f(x)$ | | $-$ | \|\| | $+$ | 0 | $+$ | | |

d) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

$S = ]-2\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$

e) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

$S = ]-2\,;\,+\infty[$

2. Mêmes questions avec $g(x) = \frac{3x}{x+1} - 1$

a) **On cherche les éventuelles valeurs interdites :**
$x + 1 = 0$
$x = -1$
**$-1$ est une valeur interdite donc $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$**

b)

$$g(x) = \frac{3x}{x+1} - 1 = \frac{3x}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{3x - (x+1)}{x+1} = \frac{3x - x - 1}{x+1} = \frac{2x-1}{x+1}$$

c)

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

$\mathbf{2x - 1 = 0}$
$\mathbf{2x = 1}$
$\mathbf{x = \frac{1}{2}}$

**<u>Valeur interdite :</u>**
$\mathbf{x + 1 = 0}$
$\mathbf{x = -1}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | m=2>0 |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | m=1>0 |
| $g(x)$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |

d) $g(x) > 0 : S = ]-\infty\,;\,-1[ \cup ]\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$

e) $g(x) \geq 0 : S = ]-\infty\,;\,-1[ \cup [\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$

Compétence : Résoudre un problème (bonus)

**Exercice supplémentaire :**

1. Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 756

**Soit $n$ un entier.**

$$\boldsymbol{n+(n+1)+(n+2)=756 \Rightarrow 3n=753 \Rightarrow n=\frac{753}{3} \Rightarrow n=251}$$

**Ainsi on trouve : $251, 252$ et $253$. Vérification : $251+252+253=756$.**

2. Trouver quatre nombre entier pairs consécutifs dont la somme est 756.

**Soit $n$ un entier.**

$$\boldsymbol{2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=756 \Rightarrow 8n=756-12 \Rightarrow n=\frac{744}{8} \Rightarrow n=93}$$

**Ainsi on trouve : $186, 188, 190$ et $192$. Vérification : $186+188+190+192=756$.**

3. Existe-t-il cinq nombres entiers impairs consécutifs dont la somme est 756 ?

**Soit $n$ un entier.**

$$\boldsymbol{(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+(2n+9)=756 \Rightarrow 10n=756-25 \Rightarrow n=\frac{731}{10} \Rightarrow n=73,1}$$

**Ce n'est pas un entier, donc il n'existe pas cinq nombres entiers impairs consécutifs dont la somme est 756.**

**Exercice supplémentaire :**

Les trois premières notes de Charlène sont 12, 15 et 11. Le devoir suivant compte double et Charlène voudrait avoir au moins 14 de moyenne.

Quelle est la note minimale que doit obtenir Charlène ?

**Soit $x$ la note minimale.**

$$\boldsymbol{\frac{2x+12+15+11}{5} \geq 14 \Leftrightarrow 2x+38 \geq 70 \Leftrightarrow 2x \geq 32 \Leftrightarrow x \geq 16.}$$

**Ainsi si Charlène a au moins 16 (qui compte double), elle aura 14 de moyenne.**

**Exercice supplémentaire :**

En ajoutant le même nombre $x$ au numérateur et au dénominateur de $\frac{23}{6}$ on obtient 2. Trouver $x$.

$$\boldsymbol{\frac{23+x}{6+x}=2 \Rightarrow 23+x=2(6+x) \Rightarrow 23+x=12+2x \Rightarrow x=11.}$$