Chapitre : Nombres complexes

I. Nombres complexes

1) Forme algébrique

L'équation $x^2 = -1$ n'admet aucune racine réelle, en effet le carré d'un nombre réel est toujours positif.
Afin de résoudre cette équation, on introduit un nouveau nombre non réel : le nombre __.
On imagine donc l'existence d'un nouveau nombre, noté_____, tel que :

A partir de i, on construit un nouvel ensemble de nombres appelé ____________________, noté _______.

Définition 1 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{i}$, tel que : _____.
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres de la forme :
$z =$___________________________
La notation $\boldsymbol{z = a + bi}$ s'appelle _____________________ du nombre complexe z.

Remarque : Tous les nombres réels sont des nombres complexes ayant 0 pour partie imaginaire ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Définition 2 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z = a + bi}$ un nombre complexe.
1) Le nombre réel a est appelé ____.
   On notera $\boldsymbol{a} =$
2) Le nombre réel b est appelé ____.
   On notera $\boldsymbol{b} =$
3) Si $a = 0$, on dira que z est un ____.

Exemples :
- $3 + 4\,i$ est un nombre complexe ayant __ pour partie réelle et __ pour partie imaginaire.
- $-5\,i =$____________ a pour partie réelle _____ et pour partie imaginaire _____.
- $-5\,i$ est appelé ________________________________.
- $7 =$ ____________ a pour partie réelle _____ et pour partie imaginaire _____.

Exercice 1 : Partie réelle et partie imaginaire

Identifier la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :
a) $z = 5 + 3i$ b) $z = 2 - 4i$ c) $z = -7 - 6i$
d) $z = -i$ e) $z = 12$ f) $z = -\frac{3}{4}i + 5$

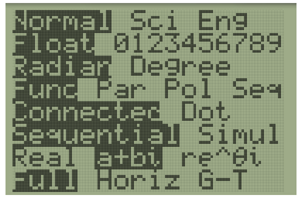
Exercice 2 : Egalité de deux nombres complexes

Dans chaque cas, déterminer les nombres réels a et b tels que :
a) $(2a + 1) - 3i = 5 + (2 - b)i$ b) $(-a + 1) + (2b + 1)i = -3i$
c) $(a + 3) + (b - 3)i = 6$ d) $(-2a + 3) + (2 - 3b)i = 5 - 7i$

2) Calculer avec des nombres complexes

Propriété 1 : On peut définir sur $\mathbb{C}$, une addition, une soustraction, une multiplication et une division ayant les mêmes propriétés que les opérations sur les nombres réels en ajoutant la propriété $i^2 =$______.

Remarque : Les priorités opératoires, les propriétés de factorisation et de distribution sont conservées sur $\mathbb{C}$. Les identités remarquables restent vraies sur $\mathbb{C}$. La règle des signes pour la multiplication et la division est conservée.
Régler votre machine pour calculer en complexes : appuyer sur la touche MODE et effectuer le réglage



Application 1 :
On pose $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 + 5i$.
Calculer puis vérifier sur votre machine :

a) $z_1 + z_2$	b) $z_1 - z_2$
c) $z_1 \times z_2$	**d) z_1^2**

Exercice 3 : Sommes et produits dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.
a) $z_1 + z_2$ b) $2z_1 - 4z_2$ c) $z_1 \times z_2$
d) ${z_2}^2$ e) z_1^3 f) $(-2 - z_1)(3 - 4z_2)$

Exercice 4 : Développer

Soit les nombres complexes $z_1 = 4 - 2i$ et $z_2 = -2 - 5i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.
a) $(3 + i)^2$ b) $(-4 - i)^2$ c) $(4 - 2i)(4 + 2i)$

Exercice 5 : Développer

Soit les nombres complexes $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, mettre sous la forme algébrique $a + bi$ le nombre complexe :
$$1 + z + z^2$$

3) Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe.
On appelle ________________ de z, noté $\bar{z}$, le nombre complexe
$\bar{z} =$__________________.

Propriété 2 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe. On a :

1) $z + \bar{z} =$

2) $z - \bar{z} =$

3) $z\bar{z} =$

Application 2 : Soit $z = 3 + 2\,i$

- Le conjugué de z est $\bar{z} =$
- $\bar{\bar{z}} =$
- $z\bar{z} =$

Exercice 6 : Conjugué

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - i$ b) $z = i + 2$ c) $z = 3i$
d) $z = 3 - 2i$ e) $z = 5i - 4$ f) $z = -12$

Exercice 7 : Conjugué

On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 3 - i$.

1. a) Donner la forme algébrique de $z_1 + z_2$, puis de $\overline{z_1 + z_2}$.
   b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ puis de $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.
   c) Comparer les résultats obtenus.
2. a) Donner la forme algébrique de z_1z_2, puis de $\overline{z_1z_2}$.
   b) Donner la forme algébrique de $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
   c) Comparer les résultats obtenus.
3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $z_1 = a_1 + b_1i$ et $z_2 = a_2 + b_2i$ où a_1, a_2, b_1 et b_2 sont quatre nombres réels.

Définition 4 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ un nombre complexe non nul.
On appelle ________________ de z, le nombre complexe ___________________ tel que :

Propriété 3 : Soient z et z' deux nombres complexes. On a :

1) $\overline{(z + z')} =$ 2) $\overline{(z - z')} =$

3) $\overline{(zz')} =$ 4) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$

Application 3 : On pose $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 + 5i$.

1. Calculer $\frac{1}{z_1}$.
2. Calculer $\frac{z_1}{z_2}$.

Remarque : Pour mettre un quotient sous forme algébrique on utilise le conjugué du dénominateur.

Exercice 8 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 3i$ et $z_2 = -4 - i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a) $\frac{1}{z_1}$ b) $\frac{1}{z_2}$ c) $\frac{z_1}{z_2}$
d) $\frac{1}{z_1^2}$ e) $\frac{1}{z_2^2}$ f) $\frac{1+z_1}{1-z_2}$

Exercice 9 : Inverses et quotients dans $\mathbb{C}$

Soit les nombres complexes $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = -1 - 2i$, mettre les nombres suivants sous la forme algébrique $a + bi$.

a) $\frac{1}{z_1}$ b) $\frac{-2}{z_2}$ c) $\frac{z_1}{z_2}$ d) $\frac{1+z_1}{1-z_2}$

Exercice 10 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique.

a) $(1 + 3i)z + 2 - 4i = 0$ b) $(-4 - i)z + 3 - 5i$ c) $7z - 4i = -iz + 5$

Exercice 11 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation :

a) $\frac{z+1}{z-1} = 1 + i$ b) $\frac{z-2i}{z+3} = 2 - i$

Exercice 12 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Déterminer les solutions complexes z_1 et z_2 tels que :

a) $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = i \\ -2iz_1 + z_2 = 0 \end{cases}$

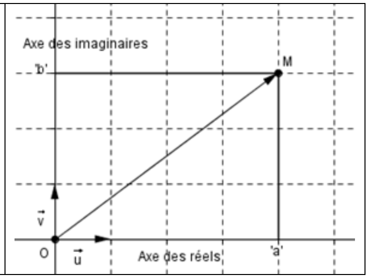
II. Image et affixe d'un nombre complexe

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Définition 5 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.
A tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe le point M de coordonnées (;   ).
Réciproquement : à tout point du plan on peut associer un nombre complexe.

- M est appelé

- z est appelé



Application 4 :

L'image de 1 est $M($; $)$ et l'image de i est $M'($; $)$
L'affixe de $N(2,-5)$ est $z =$______________________.

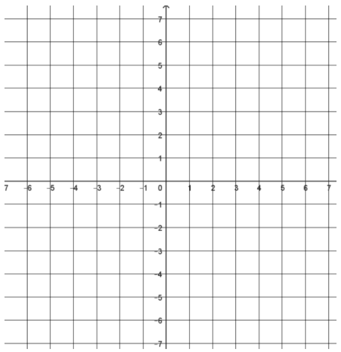
Définition 6 : Le plan muni du repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ permettant de représenter les nombres complexes par des points est appelé **plan complexe.**
La droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$ est appelée ____________________
________________, c'est l'ensemble des points dont l'affixe est ________________.
La droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{v}$ est appelée ____________________
________________, c'est l'ensemble des points dont l'affixe est ________________.

Définition 7 : Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$. Soit $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ un repère du plan.
Le vecteur image du nombre complexe $z = a + bi$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} =$__________.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ est le nombre complexe $z =$________________________.

Application 5 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + 3\,i$, $z_B = \frac{1}{2} + 2\,i$ et $z_C = 2 - 5\,i$.



Propriété 4 : Soient $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z'.
Alors l'affixe de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est :
______________________________.

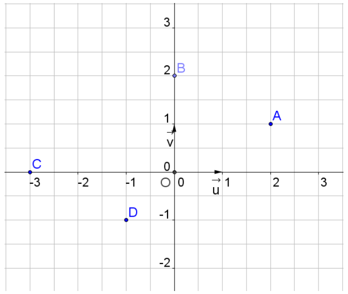
Exercice 13 : Affixe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, placer les points d'affixes :

a) $z_A = 2 - 2i$ b) $z_B = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ c) $z_C = -3$ d) $z_D = 2i$

e) $z_E = -\frac{5}{2}i$ f) $z_F = -4 + 3i$ g) $z_G = 2$ h) $z_H = -3 + i$

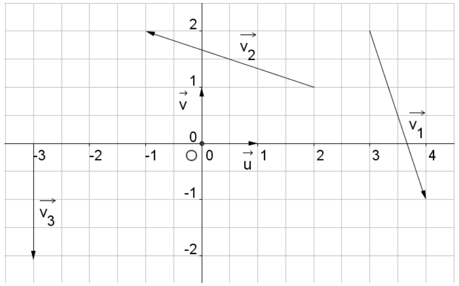
Exercice 14 : Affixe de points



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives : z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D représentés.

Exercice 15 : Affixe de vecteurs



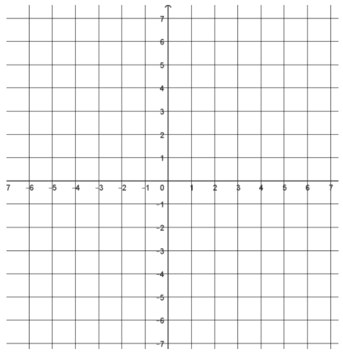
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Par lecture graphique, donner les affixes respectives : z_1, z_2 et z_3 des vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ représentés.

Application 6 :

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

1. Placer les points $A(-1\,;3)$ *et* $B(2\,;\,3)$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



3. Donner les affixes z_A et z_B de A et de B.
4. Calculer $z_B - z_A$.
5. Que peut-on conjecturer quant à l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Propriété 5 : Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z =$ ______________________________.

Application 7 : Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :
$z_A = 3 + 2i$; $z_B = -1 + i$; $z_C = -2 + 3i$ et $z_D = 2 + 4i$.

1. Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Exercice 16 : Affixes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :
$$z_A = -2 + i, z_B = 4i, z_C = \frac{7}{2} + 2i \text{ et } z_D = \frac{3}{2} - i.$$
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. On considère les quatre points P, Q, R et S d'affixes respectives :
$$z_P = -1 + 2i, z_Q = -2 + 5i, z_R = 2 + 4i \text{ et } z_S = 3 + i.$$
Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$?

Exercice 17 : Affixes et équations

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -1 + 2i$; $z_B = 1 + 4i$ et $z_C = a + 6i$.
Déterminer le réel a tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient égaux.

Exercice 18 : Affixes et parallélogrammes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = 2 - \frac{3}{4}i, z_B = -1 + 2i$ et $z_C = 5 + \frac{1}{2}i$.
Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Vérifier sur un graphique.

Exercice 19 : Affixes et équation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -5 + 4i$; $z_B = 2 + 6i$ et $z_C = -1 - 3i$.
On considère aussi le vecteur $\vec{u}$ d'affixes : $z = 4 - i$

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$.

Exercice 20 : Affixes et parallélogramme

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les trois points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -4 + i$; $z_B = -2 + 5i$ et $z_C = 4 + 2i$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
En déduire l'affixe du point D.

Propriété 6 : Soient A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B.
Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe : $z =$ ______________________________________.

Application 9 : On considère les points A et B d'affixes $z_A = 2 + 3i$ et $z_B = -4 + i$.

1) Déterminer l'affixe du milieu M de $[AB]$.

2) Déterminer l'affixe de C symétrique de A par rapport à B.

Exercice 21 : Milieu

1. Soit les points A et B d'affixes respectives $2 + 3i$ et $-1 + 2i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?
2. Soit les points A et B d'affixes respectives $3 - 2i$ et $4 + 5i$. Quelle est l'affixe du milieu de $[AB]$?

Application 8 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1 + i$; $z_B = 4 + 3i$; $z_C = -5 + 5i$ et $z_D = 4 + 11i$.

1. Les points A, B , C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Exercice 22 : Droites parallèles

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont ou ne sont pas parallèles sachant que les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

1. $z_A = 1 + i$; $z_B = 3 + 3i$; $z_C = -5 + 12i$
$z_D = 10 + 27i$
2. $z_A = -2 + 6i$; $z_B = 6$; $z_C = 10 - 12i$
$z_D = -10 - 3i$
3. $z_A = 0{,}8 + i$; $z_B = 1{,}3 + 3i$; $z_C = 5 + 1{,}9i$
$z_D = 5{,}3 + 3{,}1i$

Exercice 23 : Points alignés

Démontrer que les points A, B et C sont, ou non, alignés sachant que les points A, B et C ont pour affixes respectives :

1. $z_A = 6 + 2i$; $z_B = 5i$; $z_C = -2 + 6i$
2. $z_A = -1$; $z_B = 1 + 5i$; $z_C = -1 - i$
3. $z_A = 7 - 2i$; $z_B = 7 + 3i$; $z_C = 7 - 9i$
4. $z_A = -186 + 17i$; $z_B = -45i$; $z_C = 78 - 71i$