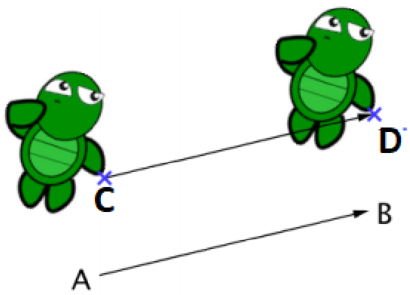
Chapitre : Vecteur

I. Translation et vecteurs.

1) Translation

Définition 1 : Soient A et B deux points distincts du plan.
D est l'image de C par la translation qui envoie A en B signifie que : $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

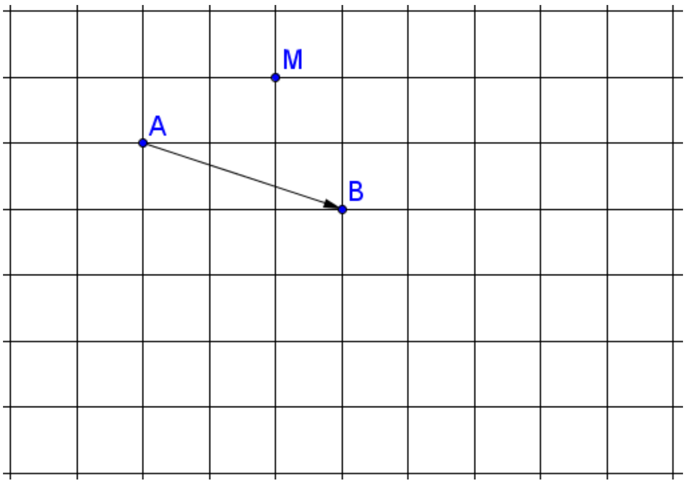


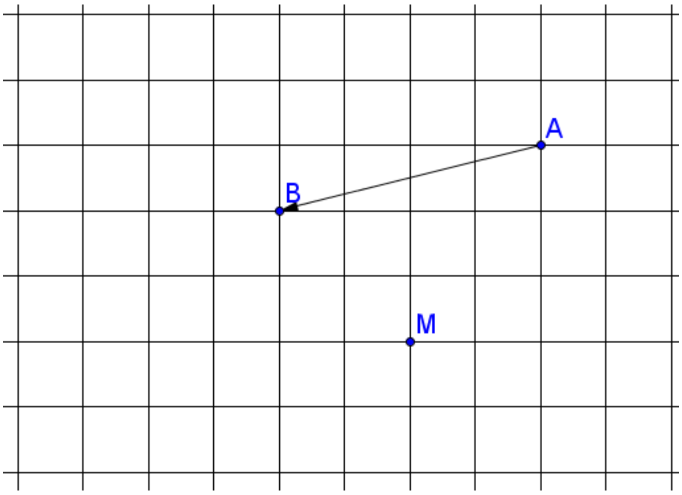
Cette translation est caractérisée par les 3 propriétés suivantes:

- Les **droites** (AB) et (CD) ont la même ________________________ **(sont parallèles)**;
- Les **segments** $[AB]$ et $[CD]$ ont la même ____________________________, appelée ______________________________ du vecteur;
- Le ______________________________ de A (dit _________________________) vers B (dit ______________________________) est le sens de C vers D (sens indiqué par la ______________________________).

On associe alors à cette translation le ***vecteur noté*** ___________

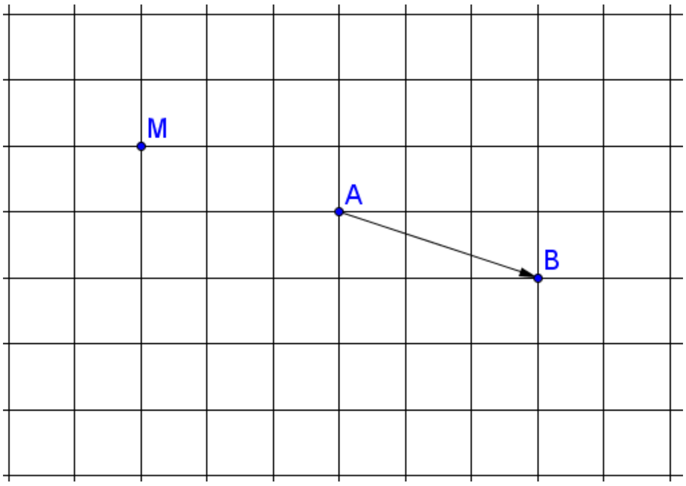
Application 1 : 1. Construire le point M', image de M par la translation qui transforme A en B.

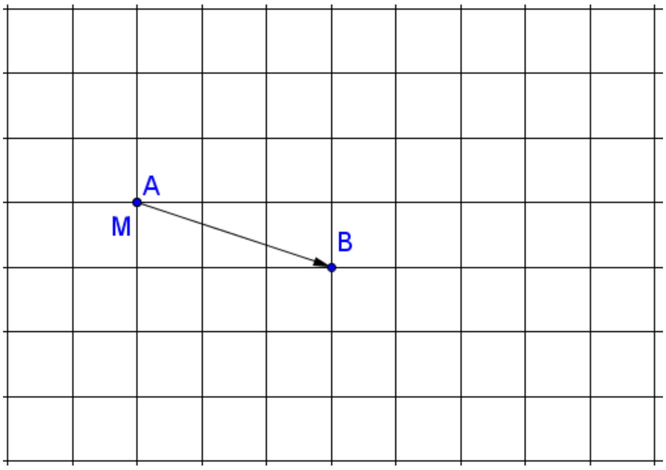


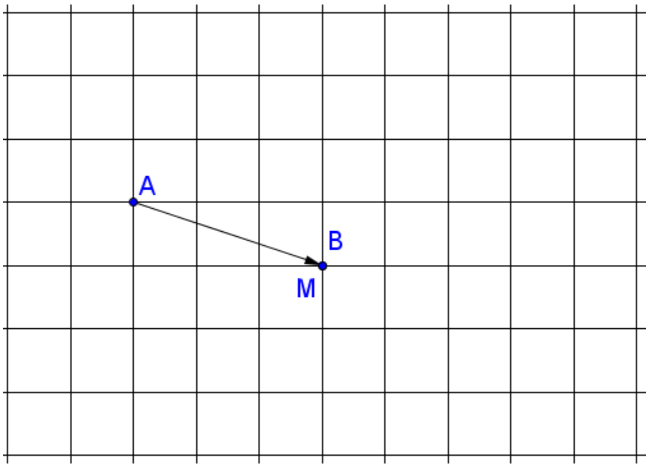


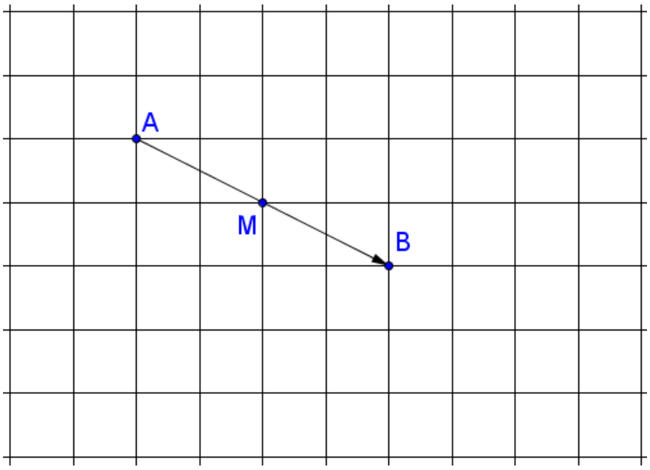
Dans chaque construction, on voit apparaitre une figure familière, laquelle ?

2. Quelque cas particuliers :

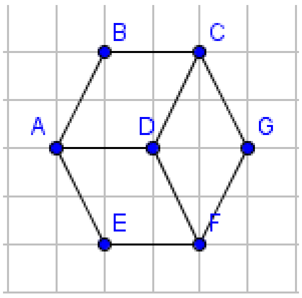








Exercice 1 :

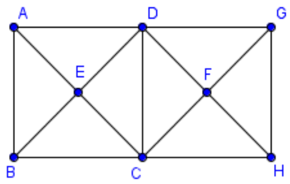


1. a. La translation qui transforme A en B, tranforme D en …
   b. La translation qui transforme C en B, transforme D en …
   c. La translation qui transforme A en B, transforme … en D
   d. La translation qui transforme … en B, tranforme F en D
   e. La translation qui transforme E en G, tranforme … en …
2. a. La translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, transforme C en …
   b. La translation de vecteur $\overrightarrow{\ \ B}$, transforme E en A
   c. La translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, transforme … en E
   d. La translation de vecteur $\overrightarrow{GB}$, transforme … en …

Exercice 2 : Image d'un point par une translation.

1. Construire un triangle ABC tel que : $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7$ cm.
2. Construire l'image C' de C par la translation qui transforme A en B.
3. Construire l'image A' de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 : Image d'un point par une translation.

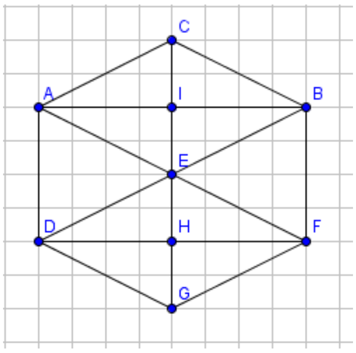


1. Quelles sont les images de B, C, D et E par la translation qui transforme A en D ?
2. Quelles sont les images de B, E et F par la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$?

Exercice 4 : Image d'un rectangle par une translation.

1. Tracer un rectangle $ABCD$ de centre O.
2. Construire l'image de ce rectangle par la translation qui transforme D en B.
3. Construire l'image de ce rectangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

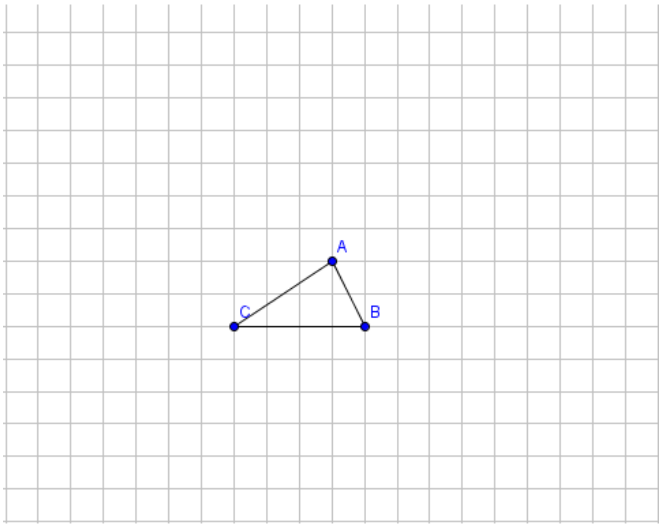
Exercice 5 : Image d'un point par une translation.



Compléter :

L'image de	par la translation de vecteur	est le point
A	$\overrightarrow{DE}$	
	$\overrightarrow{GH}$	C
H		F
B		C

Exercice 6 : Image d'un triangle par une translation.



1. Construire l'image $A_1B_1C_1$ du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. Construire l'image $A_2B_2C_2$ du triangle $A_1B_1C_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
3. Quelle translation transforme le triangle ABC en $A_2B_2C_2$?
4. Quelle translation transforme le triangle $A_2B_2C_2$ en ABC ?

2) Egalité de vecteurs

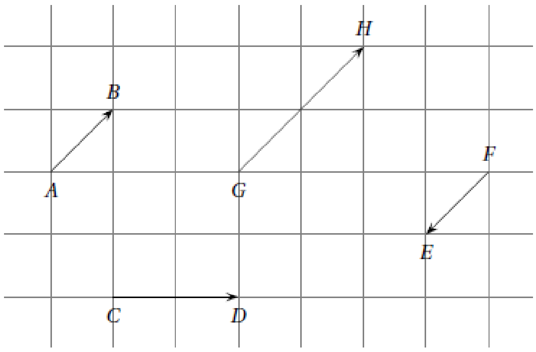
Définition 3 :

Deux vecteurs sont dits **égaux** s'ils sont associés à une même ______________________________.

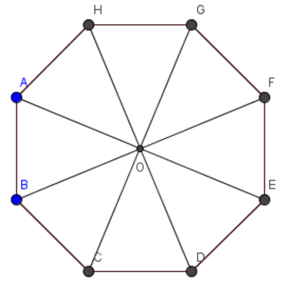
Visuellement, deux vecteurs sont égaux s'ils donnent l'idée du « même déplacement »

Propriété 1 : Deux vecteurs sont **égaux** si et seulement si ils ont même: ____________________
____.

Application 2 : Expliquer, en utilisant les termes direction, sens, ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs.



Exercice 7 : Vecteurs égaux, vecteurs opposés



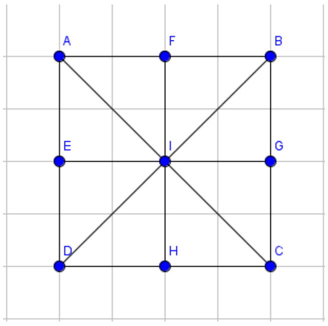
$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O.

1. Compléter le tableau suivant en répondant par oui ou non.

Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même longueur				
sont égaux				
sont opposés				

2. Répondre par vrai ou faux. Justifier les réponses
   a. $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux
   b. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés
   c. $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés
   d. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés
   e. $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont égaux
   f. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont opposés
   g. $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont opposés
   h. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont de sens opposés

Exercice 8 : Carré et vecteurs égaux

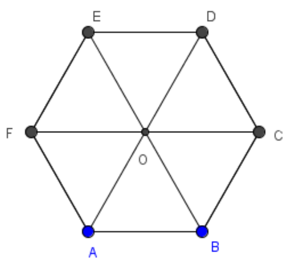


$ABCD$ est un carré de centre I, les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments $[AD], [AB], [BC]$ et $[DC]$.

Répondre par vrai ou faux. Justifier les réponses

a. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$
b. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
c. $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BD}$
d. $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EI}$
e. $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{DH}$
f. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BH}$

Exercice 9 : Hexagone et vecteurs égaux

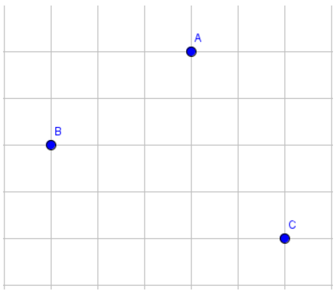


$ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.

Répondre aux questions suivantes en utilisant uniquement les points de la figure.

1. Trouver tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{CD}$
2. Trouver un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$
3. Peut-on trouver un vecteur égal au vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{BE}$
4. Citer tous les vecteurs opposés à $\overrightarrow{AO}$

Exercice 10 : Vecteurs égaux



a. Reproduire la figure et placer les points D, E et F tel que :

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CA}$

b. Trouver tous les vecteur égaux à $\overrightarrow{AF}$

c. Trouver tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{FB}$

On a vu précédemment que :

- D est l'image de C par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- Si les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{CD}$ étaient les mêmes alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

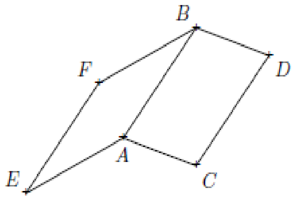
Propriété 2 : Soient quatre points A, B, C et D tels que A différent de B.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ______________ est un __________________________________.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les ____.

Remarque : Attention à l'ordre des lettres.

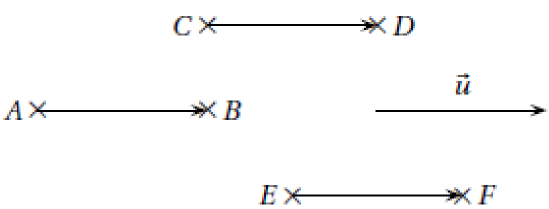
Application 3 : Soit $ABDC$ et $ABFE$ deux parallélogrammes.
Montrons que $CDFE$ est un parallélogramme puis que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$



Propriété 3 : Soient 3 points A, I et B. $\overrightarrow{AI}$=$\overrightarrow{IB}$, *si et seulement si,* ________________________

____.

Notation $\vec{u}$



Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

Exercice 11 : Parallélogramme et vecteurs égaux

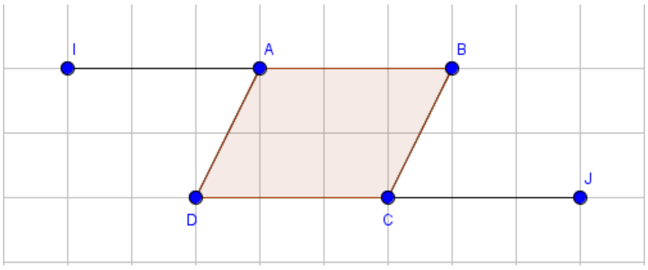
On considère le parallélogramme $ABCD$.

Construire ce parallélogramme, en prenant soin de représenter un parallélogramme quelconque.

Construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DB}$ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DB}$

Exercice 12 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère



$ABCD$ est un parallélogramme. A est le milieu du segment $[IB]$ et C est le milieu du segment $[DJ]$

Quelle est la nature du quadrilatère $IAJC$? Le démontrer.

Exercice 13 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Construire ce parallélogramme, en prenant soin de représenter un parallélogramme quelconque.

1. Construire les points E et F, images respectives de B et de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que C est le milieu des segments $[DE]$ et $[BF]$.

Exercice 14 : Vecteur égaux et nature d'un quadrilatère

Soit ABC un triangle.

On considère le point D, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, et le point E, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Quelle est la nature du quadrilatère $ACDE$? Le démontrer.

3) Vecteur nul

Définition 4 : On appelle ___________________________________, noté __________, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont _____________________________________.

II. Coordonnées de vecteurs

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 5 : Une ____________________du plan est un couple $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même ___________________________________.
La base est ____ dans le cas où $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont des directions ____ et ont pour norme ________________unité de longueur.

Définition 6 : Soit $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ une base orthonormée.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple de nombres $(x\,;y)$ tels que :

$$\vec{u} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

On appelle x _____________________________ et y _________________________________ du vecteur $\vec{u}$.

2) Coordonnées de points et vecteurs dans un repère

Définition 7 : On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ ainsi on obtient un repère **orthonormé** $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ formé d'un point O et d'une base **orthonormée** $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ du plan.

Remarque : Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans un repère $(0, I, J)$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} =$.

Définition 8 : Pour tout point M du plan, le couple coordonnées de M dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ est le couple $(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} =$________________________________.
On appelle x ______________________ et y ______________________du point M dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

Remarque : La notion de vecteur permet de représenter une translation par les coordonnées du vecteur associé dans un repère.

Propriété 4 : Soient A de coordonnées $(x_A; y_A)$ et B de coordonnées $(x_B; y_B)$, deux points du plan dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \qquad \\ \qquad \end{pmatrix}$

Application 4 : Soit $(1\,;2)$, $B(\,4;4)$, $C(2\,;1)$ et $D(5\,;3)$ quatre points.
Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$? $\overrightarrow{CD}$.

Python : Coordonnée d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

```
def vec(xA,yA,xB,yB):

    x=

    y=

    return(x,y)
```

Exercice 15 : Nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B, C et D suivants.
Montrer dans chaque cas, **de deux façons différentes**, que $ABCD$ est un parallélogramme :

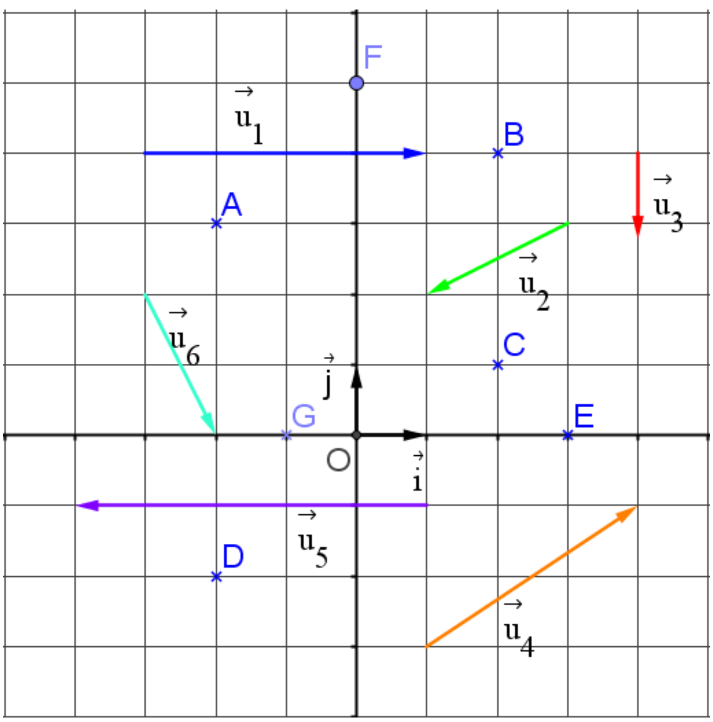
1. $A(-1\,;2)$, $B(5\,;3)$, $C(4\,;\ 0)$ et $D(-2\,;\ -1)$.
2. $A(1\,;1)$, $B(7\,;2)$, $C(6\,;\ -1)$ et $D(0\,;\ -2)$.
3. $A(-1\,;1)$, $B(3\,;1)$, $C(2\,;\ -1)$ et $D(-2\,;\ -1)$.

Python : Parallélogramme ?

```
def parall(xA,yA,xB,yB,xC,yC,xD,yD):

        return
```

Exercice 16 : Lecture graphique de coordonnées de vecteurs et construction de vecteurs



On se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$

1. Trouver, par lecture graphique, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{DA}$.
2. Lire les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_6}$.
3. Placer les points H, K, L et M tels que :
   a. $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
   b. $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
   c. $\overrightarrow{DL}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$
   d. $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

Propriété 5 : Deux vecteurs sont **égaux**, *si et seulement si,* ils ont les ____________________
____.

Autrement dit : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à _________________

Exercice 17 : Coordonnées de vecteurs et équation

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-5\,;4), B(2\,;6), C(-1\,;\ -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$.

Exercice 18 : Coordonnées de vecteurs et équation

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $E(-10\,;5), F(0\,;-4), G(-7\,;\ -2)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GE}$.
2. Calculer les coordonnées du point H tel que $\overrightarrow{HE} = \vec{v}$.

Exercice 19 : Coordonnées de vecteurs et quadrilatère

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-2\,;5), B(6\,;1), C(\frac{5}{2}\,;\ -2)$ et $D(-\frac{11}{2}\,;2)$.

1. Calculer les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Exercice 20 : Coordonnées de vecteurs et parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.
Soit $A(-4\,;1), B(-2\,;5)$ et $C(4\,;\ 2)$

1. Placer les points A, B et C dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
   Calculer les coordonnées du point D.

Exercice 21 : Cordonnées de vecteurs égaux et équations

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

Soit $A(-1\,;2), B(1\,;4)$ et $C(x\,;\ 6)$.
Déterminer le réel x tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient égaux.

Exercice 22 : Coordonnées de vecteurs et parallélogramme

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.
Soit $A(2\,;3), B(6\,;1)$ et $C(-1\,;\ -3)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Construire le point D, image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les coordonnées du point D.
4. Démontrer que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
5. Calculer les valeurs exactes des longueurs AD et BC.
   Que peut-on en déduire pour $ABDC$.

III. Géométrie

1) Propriété des triangles

Définition 9 : Un triangle ABC est isocèle en A s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :

Définition 10 : Un triangle ABC est équilatéral s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :

Définition 11 : Un triangle ABC est rectangle en A si l'angle en A est ____________________.

On appelle le côté $[BC]$ ___________________________du triangle rectangle.

Définition 12 : Un triangle est quelconque s'il n'est ni isocèle, ni équilatéral ou ni rectangle.

2) Propriétés du parallélogramme

Quadrilatère $ABCD$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- **Diagonales qui se coupent en leur milieu (formule du milieu)**
- **Côtés opposés deux à deux de même longueur (formule de la norme/distance)**
- Côtés opposés parallèle deux à deux
- 2 de ses côtés opposés parallèle et de même longueur
- Angles opposés 2 à 2 de même mesure.

↓

Parallélogramme

- Deux côtés consécutifs de même longueur.
  (formule de la norme/distance)
- Diagonales perpendiculaires
  (formule de la norme/distance + réciproque du théorème de Pythagore)

↓

Losange

- Diagonales de même longueur
  (formule de la norme/distance)
- Deux côtés consécutifs perpendiculaires (angle droit).
  (formule de la norme/distance + réciproque du théorème de Pythagore)

- Diagonales de même longueur
  (formule de la norme/distance)
- Deux côtés consécutifs perpendiculaires (angle droit).
  (formule de la norme/distance + réciproque du théorème de Pythagore)

↓

Rectangle

- Deux côtés consécutifs de même longueur.
  (formule de la norme/distance)
- Diagonales perpendiculaires
  (formule de la norme/distance + réciproque du théorème de Pythagore)

↓

Carré

3) Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 7 : Soit $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ un repère du plan et A, B deux points du plan de coordonnées respectives $(x_A;\ y_A)$ et $(x_B;\ y_B)$.
Alors le point M milieu de $[AB]$ a pour coordonnées :

Application 5 : Soit $A(-2\,;3)$ et $B(1;5)$ deux points dans un repère orthonormé.
Calculer le milieu M de $[AB]$.

Python : Milieu

```
def distance(xA,yA,xB,yB):

   x=

   y=

   return(x,y)
```

Exercice 23 : Milieu

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Déterminer dans chaque cas :

1. Les coordonnées du point M, milieu du segment $[AB]$.
2. Les coordonnées du point M', symétrique du point M par rapport au point A.
   a. $A(0\,;0)$ et $B(1\,;1)$
   b. $A(1\,;1)$ et $B(0\,;0)$
   c. $A(-5\,;3)$ et $B(-5\,;-10)$
   d. $A(3\,;0)$ et $B(0\,;3)$
   e. $A(\frac{2}{3}\,;\frac{3}{4})$ et $B(-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{2})$
   f. $A(2{,}5\,;0)$ et $B(-3\,;\ -5{,}2)$

Exercice 24 : Milieu et nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(1\,;3)$, $B(7\,;2)$, $C(4\,;\ -2)$ et $D(-2\,;\ -1)$.

1. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$.
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

Exercice 25 : Milieu et nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $E(-7\,;-1)$, $F(-2\,;1)$, $G(1\,;\ -1)$ et $H(-4\,;\ -3)$.
Démontrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

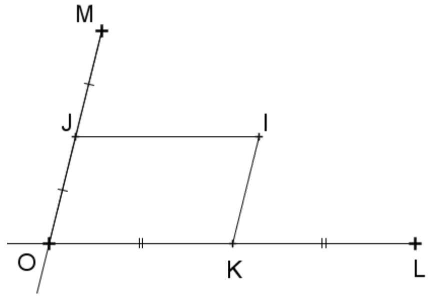
Exercice 26 : Milieu et parallélogramme

On considère trois points A, B et C dont on donne les coordonnées dans un repère (O, I, J) du plan.
Pour chacun des cas suivants ; déterminer les coordonnées d'un quatrième point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme :

a. $A(1\,;1)$, $B(5;2)$ et $C(3\,;4)$.
b. $A(-1\,;2)$, $B(5;-2)$ et $C(1\,;-5)$.
c. $A(-3\,;2)$, $B(2;0)$ et $C(-1\,;-1)$.

Exercice 27 : Milieu et repère quelconque

Sur la figure suivante, $OKIJ$ est un parallélogramme, J est le milieu du segment $[OM]$ et K celui du segment $[OL]$.



Le point I est-il le milieu du segment $[ML]$?

4) Norme d'un vecteur et distance

Définition 13 : Soit $\vec{u}$ un vecteur et A, B deux points du plan tels $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
On appelle _ du vecteur $\vec{u}$, noté ________, la __________________du segment [AB].
On a donc $||\vec{u}|| = AB$.

Propriété 6 : Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ un vecteur et A, B deux points du plan dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $k \in \mathbb{R}$.
1. $||\vec{u}|| =$___________________________________
2. $||k\vec{u}|| = |k|||\vec{u}||$
3. $||\overrightarrow{AB}|| = AB =$____ (formule de la distance).

Application 6 : Soit $(1\,;2)$, $B(\,4;4)$, $C(2\,;1)$ et $D(5\,;3)$ quatre points.
Calculer AB et CD.

Python : Distance

```
def distance(xA,yA,xB,yB):

    D=

    return(D)
```

Exercice 28 : Distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Calculer dans chaque cas la distance AB.

a. $A(0\,;0)$ et $B(1\,;1)$
b. $A(1\,;1)$ et $B(0\,;0)$
c. $A(3\,;0)$ et $B(0\,;3)$
d. $A(-1\,;5)$ et $B(3\,;-7)$
e. $A\left(\frac{2}{3}\,;\frac{3}{4}\right)$ et $B\left(-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{2}\right)$
f. $A(2{,}5\,;0)$ et $B(-3\,;\,-5{,}2)$
g. $A(1-\sqrt{2}\,;1)$ et $B\left(1+\sqrt{2}\,;\,-1\right)$

Exercice 29 : Distance et nature d'un triangle

Dans un repère orthonormé (O, U, V) du plan, donner la nature du triangle TRI pour chacun des cas suivants :

a. $T(3\,;3), R(2\,;\,-2)$ et $I(-8\,;0)$.
b. $T(4\,;-6), R(2\,;\,0)$ et $I(5\,;-1)$.
c. $T(-2\,;3), R(8\,;\,4)$ et $I(-1\,;-6)$.
d. $T(3\,;5), R(-3\,;\,1)$ et $I(5\,;-\frac{9}{2})$.
e. $T(-2\,;-1), R(3\,;\,1)$ et $I(-\frac{7}{2}\,;10)$.
f. $T(1\,;-2), R(6\,;\,0)$ et $I(-1\,;9)$.
g. $T(-1\,;1), R(\sqrt{2}+1\,;\,\sqrt{2}+1)$ et $I(\sqrt{2}+1\,\,;-\sqrt{2}+1\,)$.
h. $T(1\,;2), R(5\,;\,2)$ et $I(3\,;3+2\sqrt{2})$.

Exercice 30 : Distance et triangle

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.
Soit les points $A(-5\,;\,-1), B(4\,;\,-1)$ et $M(x\,;2)$.
Déterminer dans chacun des cas suivants la ou les valeur(s) de x telle(s) que M vérifie :

a. le triangle ABM est isocèle en M.
b. le triangle ABM est rectangle en A.
c. le triangle ABM est rectangle en B.

Exercice 31 : Distance et alignement de points

Dans un repère orthonormé, dire si les points A, B et C sont alignés dans les cas suivants :

a. $A(-1\,;4), B(1\,;1)$ et $C(5\,;\,-5)$.
b. $A(4\,;-3), B(13{,}5\,;4)$ et $C(1\,;\,-1)$.
c. $A(-3\,;6), B(3\,;2)$ et $C(16\,;\,-7)$.
d. $A(-3\,;-5), B(4\,;-4)$ et $C(38\,;\,1)$.

Exercice 32 : Distance et quadrilatère

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.
Soit les points $A(3; 2)$, $B(2; 0)$, $C(4; -1)$ et $D(5; 1)$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme
2. Montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un rectangle
3. Montrer que le parallélogramme $ABCD$ est un losange.
4. En déduire la nature de $ABCD$.

Exercice 33 : Distance et losange

Dans un repère orthonormé, on considère les points
$A(-1; 4)$, $B(4; 5)$, $C(3 ; 0)$ et $D(-2; -1)$.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.

Exercice 34 : Distance et cercle

(O, I, J) est un repère orthonormé du plan.
Soit les points $A(-3; -1)$, $B(-2; 4)$ et $C(3; -1)$.

1. Calculer JA, JB et JC.
2. Que représente le point $J(0 ; 1)$ pour le triangle ABC ?

Exercice 35 : Nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les pointsA, B, C et D suivants.
Montrer dans chaque cas, que $ABCD$ est un carré :

1. $A(0 ; 1)$, $B(2 ; 1)$, $C(2 ; -1)$ et $D(0 ; -1)$.
2. $A(-1 ; 1)$, $B(2 ; 1)$, $C(2 ; -2)$ et $D(-1 ; -2)$.
3. $A(-3 ; 5)$, $B(1 ; 5)$, $C(1 ; 1)$ et $D(-3 ; 1)$.

Exercice 36 : Nature d'un quadrilatère

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les pointsA, B, C et D suivants.
Donner dans chaque cas, la nature exacte du quadrilatère $ABCD$.

1. $A(-4 ; 2)$, $B(1 ; 2)$, $C(1 ; -1)$ et $D(-4 ; -1)$.
2. $A(-3 ; 1)$, $B(1 ; 1)$, $C(1 ; -3)$ et $D(-3 ; -3)$.
3. $A(-1 ; 3)$, $B(1 ; -1)$, $C(-1 ; -5)$ et $D(-3 ; -1)$.

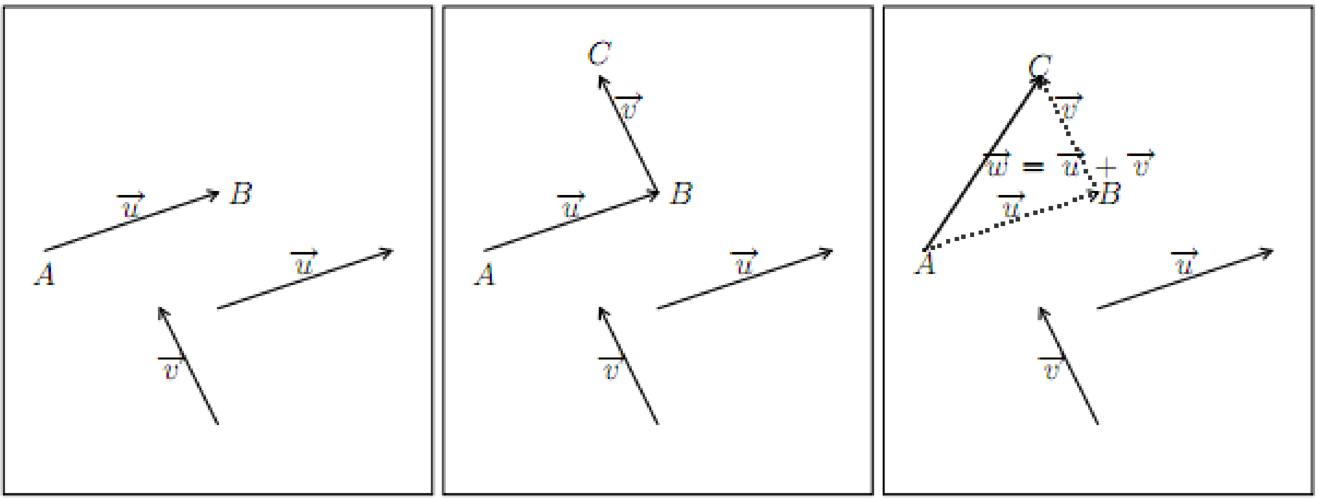
IV. Somme de vecteurs

1) Vecteur somme

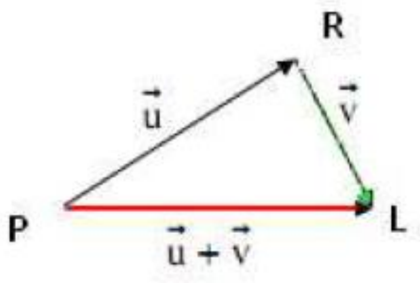
Définition 14 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de

____ de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

En enchainant ces deux translations, un point A a pour image le point B vérifiant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, et le point B a pour image le point C avec $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
Par définition, le point C est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Exemple : Pour aller de Paris à Lille, on peut aussi faire Paris – Reims puis Reims – Lille.



Propriété 8 : Relation de Chasles : D'après ce qui vient d'être vu, on a toujours :
Quels que soient les points A, B, C du plan, ____

Application 7 : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{\dots E} = \overrightarrow{F\dots} + \overrightarrow{G\dots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{\dots K}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} =$

Exercice 37 : Relation de Chasles

Compléter les égalités suivantes en utilisant la relation de Chasles.

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{\dots\dots}$
b. $\overrightarrow{B\dots} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\dots C}$
c. $\overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{A\dots} = \overrightarrow{OE}$
d. $\overrightarrow{B\dots} + \overrightarrow{C\dots} + \overrightarrow{A\dots} = \overrightarrow{\dots F}$
e. $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\dots\dots}$
f. $\overrightarrow{\dots B} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A\dots}$
g. $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{\dots\dots} = \overrightarrow{EO}$
h. $\overrightarrow{\dots R} + \overrightarrow{\dots S} + \overrightarrow{\dots N} = \overrightarrow{V\dots}$

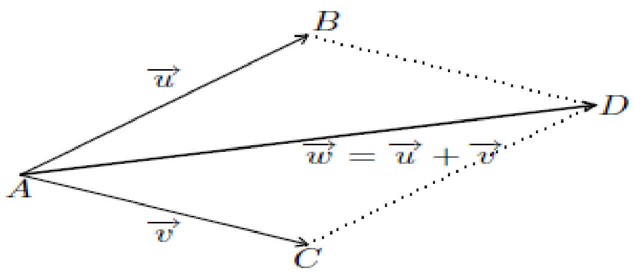
Exercice 38 : Somme et différence de vecteurs

Compléter les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{A\dots} + \overrightarrow{C\dots} = \vec{0}$
b. $\overrightarrow{D\dots} - \overrightarrow{\dots F} = \vec{0}$
c. $\overrightarrow{B\dots} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{\dots\dots} = \vec{0}$
d. $\overrightarrow{\dots C} - \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{\dots\dots} = \vec{0}$

Propriété 9 : Règle du parallélogramme :

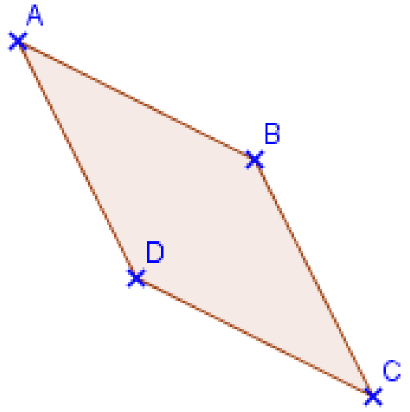
Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs de même origine A. Pour tous points A, B, C et D on a : __________________, si, et seulement si, D est le point tel que _______________soit un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque : Ceci nous donne une autre méthode de construction du vecteur somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.En effet, soit A un point du plan, on trace la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (origine A, extrémité B). Puis on trace la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ (origine A, extrémité C). Enfin on trace le point D tel que ABDC forme un parallélogramme. Alors $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur associé à la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 39 : Règle du parallélogramme

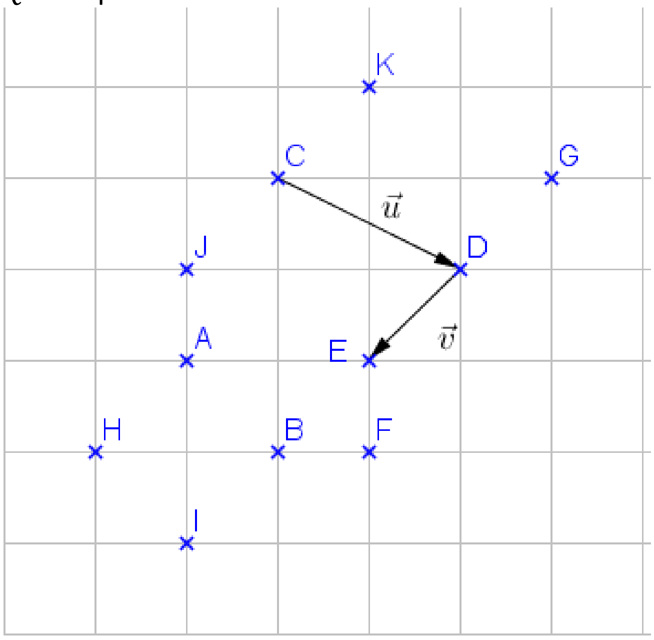
A l'aide du parallélogramme $ABCD$, compléter les égalités suivantes :



a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\dots\dots}$
b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{\dots\dots}$
c. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\dots\dots} = \overrightarrow{BD}$
d. $\overrightarrow{\dots\dots} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}$

Exercice 40 : Somme et différence de vecteurs

Soit A et B deux points du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Sur la figure ci-dessous, identifier les points M, NP et Q tels que :



a. $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$
b. $\overrightarrow{BN} = -\vec{v}$
c. $\overrightarrow{CP} = \vec{u} + \vec{v}$
d. $\overrightarrow{DQ} = -\vec{u} + \vec{v}$

Propriétés 10 :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (symétrique)
2. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associative)

Propriété 11 :

Le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ de coordonnées :

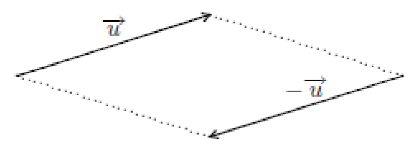
$$\begin{pmatrix} \quad\quad\quad\quad \end{pmatrix}$$

2) Vecteur opposé

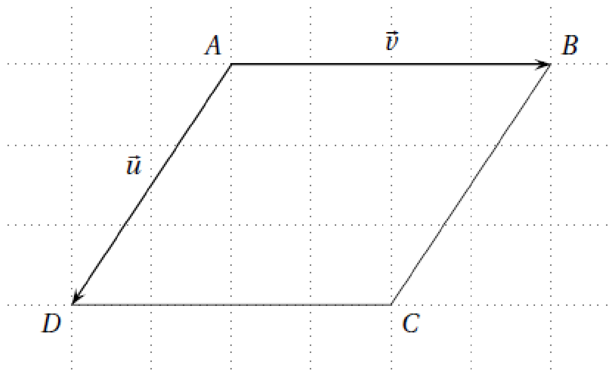
La relation de Chasles nous donne : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ pour tous points A et B du plan, donc on peut définir le vecteur $\overrightarrow{BA}$ comme l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Définition 15 :
L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur
____

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur
____



Application 8 : Etant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA} =$ ....;
- $\overrightarrow{DA} =$ ....;
- $\overrightarrow{CB} =$ ....;
- $\overrightarrow{DC} =$ ....;
- $\overrightarrow{AC} =$ ....;
- $\overrightarrow{CD} =$ ....;
- $\overrightarrow{CA} =$ ....;
- $\overrightarrow{DB} =$ ....;
- $\overrightarrow{BD} =$ ....;
- $\overrightarrow{BC} =$ ....;

Propriété 12 :
Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J)

Soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ un vecteur.

L'**opposé** du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur ______________ de coordonnées :

Propriété 13 :
Le plan est muni d'un repère (O ;I, J)

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et$\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.

La **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w} =$__________________de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \quad\quad\quad\quad \end{pmatrix}$$

Exercice 41 : Coordonnées de somme et différence de vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.

Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}+\vec{v}$
2. $\vec{u}-\vec{v}$
3. $-\vec{u}+\vec{w}$
4. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
5. $\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

Exercice 42 : Coordonnées de somme et différence de vecteurs et équation

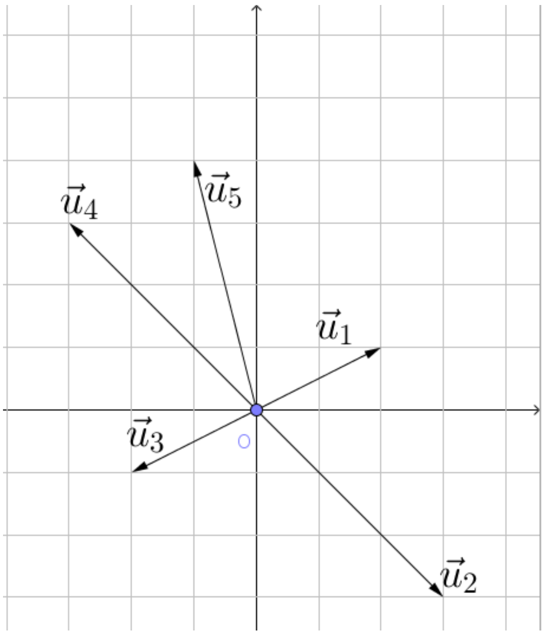
Le plan est muni d'un repère orthonormée $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$.

Soit $A(-5\,;6), B(7\,;4)$ et $C(-4\,;\,-1)$.

1. Calculer les coordonnées du point D vérifiant :
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$
2. Calculer les coordonnées du point E vérifiant :
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$
3. Calculer les coordonnées du point F vérifiant :
$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

Exercice 43 : Somme de vecteurs

Compléter les égalités suivantes à l'aide de la figure.



a. $\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_5}=\overrightarrow{\ldots}$

b. $\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{\ldots}=\overrightarrow{u_5}$

c. $\overrightarrow{\ldots}+\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{u_4}$

d. $\overrightarrow{u_3}+\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{\ldots}$

Exercice 44 : Somme de vecteurs et parallélogramme

1. Construire un parallélogramme $ABCD$ de centre O.
2. En utilisant uniquement les points de la figure, trouver un vecteur égal aux sommes suivantes :

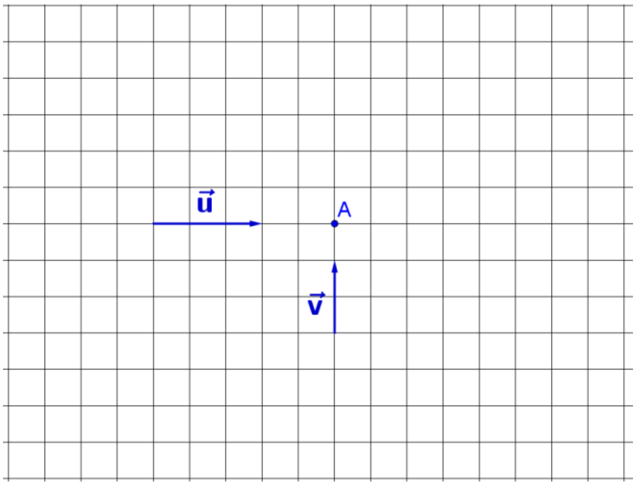
a. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ b. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$

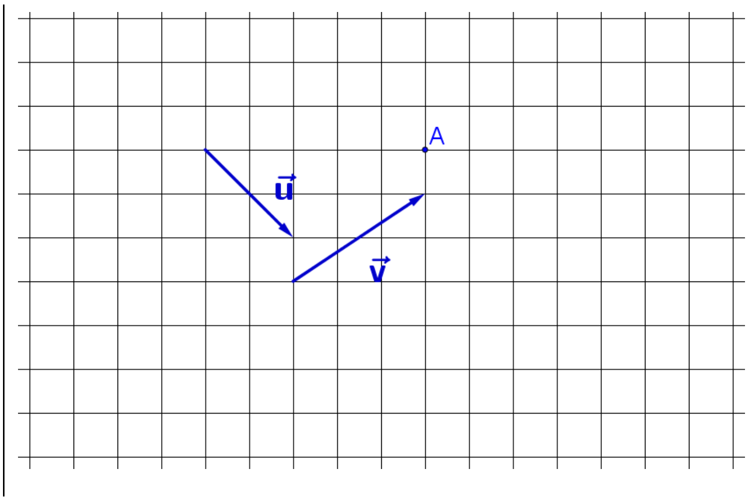
c. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$ d. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

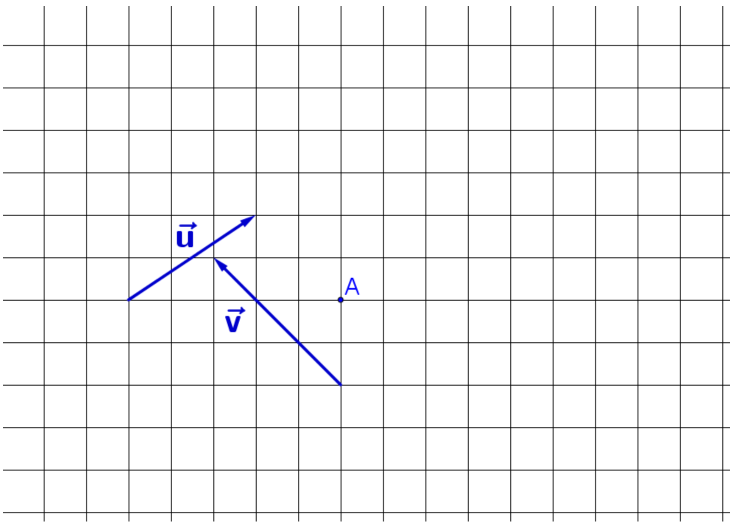
e. $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$

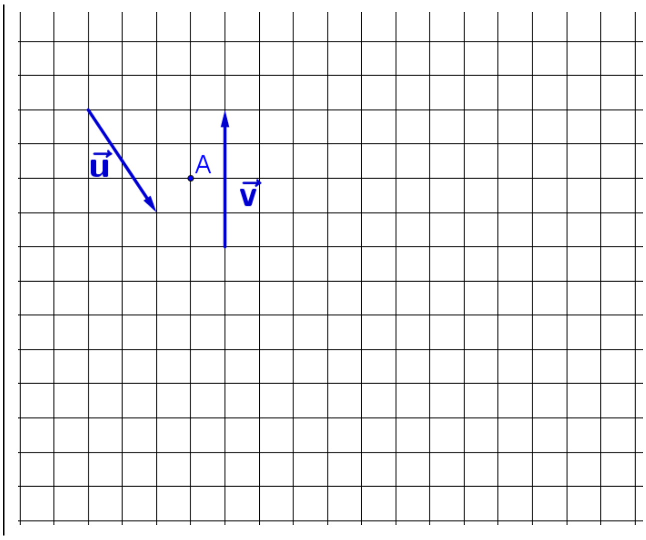
Exercice 45 : Construction de sommes et différences de vecteurs

1. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u}+\vec{v}$.
2. Construire le vecteur d'origine A égal à $\vec{u}-\vec{v}$.







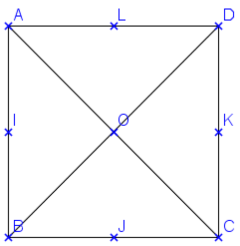


Exercice 46 : Carré et somme de vecteurs

$ABCD$ est un carré de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

Compléter les égalités suivantes :



a. $\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{\dots\dots}$

b. $\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{\dots\dots}$

c. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{LI}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{\dots\dots}$

d. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{\dots\dots}$

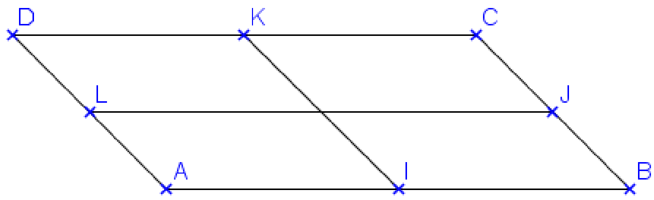
e. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{\dots\dots}$

f. $\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{\dots\dots}$

Exercice 47 : Parallélogramme et somme de vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.



Compléter les égalités suivantes :

a. $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{A\dots}$

c. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{\dots D}$

b. $\overrightarrow{LJ}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{D\dots}$

d. $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{LD}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{\dots C}$