# Fiche méthode : Dérivation

## I. Nombre dérivé et taux d'accroissement

**Application 1 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $h$ un réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$.

| |
|---|
| $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ |
| $f(-2+h) = (-2+h)^2 + 1$ <br> $= 4 - 4h + h^2 + 1$ <br> $= h^2 - 4h + 5$ |

2. Vérifier que le taux d'accroissement de $f$ entre $-2$ et $-2+h$ est égal à $-4+h$

| |
|---|
| Pour $h \neq 0$, <br> $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \dfrac{h^2 - 4h + 5 - 5}{h}$ <br> $= \dfrac{h^2 - 4h}{h}$ <br> $= h - 4$ |

3. En déduire que $f$ est dérivable en $-2$ et déterminer $f'(-2)$.

| |
|---|
| $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3h - 4$ <br> $= -4$ <br> $= f'(-2)$ <br> Donc $f$ est dérivable en $-2$ et $f'(-2) = -4$. |

**Nombre dérivé et taux d'accroissement :**

Le nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ est, si elle existe, la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h$ tend vers 0 , on note ce nombre $\boldsymbol{f'(a)}$.

On écrit alors :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Méthode :**

Pour déterminer $f'(a)$ lorsqu'on a l'expression de $f(x)$ sans utiliser les formules de dérivation :

- On calcule $f(a)$
- On calcule $f(a+h)$
- On calcule $f(a+h) - f(a)$
- On calcule $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- On en déduit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Si la limite existe alors :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Et $f$ est dérivable en $a$.

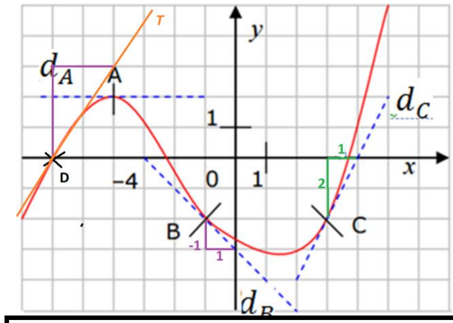
## II. Nombre dérivé et coefficient directeur

**Application 2 :** La courbe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est donnée ci– contre en rouge.

1. Déterminer :

| | |
|---|---|
| $f'(-4)$ | Le point $A$ a pour abscisse $-4$. <br> $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente (horizontale) à $C_f$ au point $A$ ainsi $f'(-4) = 0$. |
| $f'(-1)$ | Le point $B$ a pour abscisse $-1$. <br> $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point $B$ ainsi : <br> $\boldsymbol{f'(-1) = -1}$ |
| $f'(3)$ | Le point $C$ a pour abscisse 3. <br> $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ au point $C$ ainsi : <br> $\boldsymbol{f'(3) = 2}$ |

2. **Tracer la tangente $T$ à la courbe au point $D(-6\,;0)$ sachant que $f'(-6) = \frac{3}{2}$**




**Application 3 :**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, soit $C_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe $C_f$ au point $A(-3; 1)$ passe par le point $B(2; -1)$.

Déterminer le nombre dérivé $f'(-3)$

| |
|---|
| $\boldsymbol{f'(-3) = m_{(AB)} = \dfrac{-1-1}{2+3} = -\dfrac{2}{5}}$ |

**Nombre dérivé et coefficient directeur :**

Le nombre dérivé de $f$ en $a$ est le coefficient directeur de la tangente à $C_f$ en $a$.

Il est noté $f'(a)$.

**Rappel : Coefficient directeur :**

- On note $m$ le coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{Vertical}}{\text{Horizontal}}$$

- Si la tangente est horizontale, alors $m = 0$.

## III. Tangente

**Application 4 :**

1. Déterminer une équation de la tangente au point $A(-1\,;2)$ à $C_f$ sachant que $f'(-1) = 3$.

| | |
|---|---|
| $A(-1\,;2) \in C_f$ <br> donc $f(-1) = 2$ | $T_A : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ <br> $y = 3(x+1) + 2$ <br> $y = 3x + 3 + 2$ <br> $y = 3x + 5$ |

2. Déterminer une équation de la tangente $T$ au point $A(1\,;3)$ à $C_f$ sachant que le coefficient directeur de $T$ est 4.

| | |
|---|---|
| $A(1\,;3) \in C_f$ donc <br> $f(1) = 3$ <br> $m = 4 = f'(1)$ | $T_A : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ <br> $y = 4(x-1) + 3$ <br> $y = 4x - 4 + 3$ <br> $y = 4x - 1$ |

3. Donner une équation de la tangente au point $A$ de $C_f$ d'abscisse $x_A$ sachant :
$f(x) = x^2 - 5x + 3$ et $f'(x) = 2x - 5$ en $x_A = 2$

| | |
|---|---|
| $f(2) = 2^2 - 5\times 2 + 3$ <br> $= 4 - 10 + 3$ <br> $= -3$ <br> $f'(2) = 2\times 2 - 5$ <br> $= -1$ | $T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ <br> $y = -(x-2) - 3$ <br> $y = -x + 2 - 3$ <br> $y = -x - 1$ |

**Tangente :**

- La tangente en un point d'une courbe est la position limite d'une sécante passant par ce point et un point voisin de la courbe, lorsque ce point vient se confondre avec le premier point.
- Si $f$ est dérivable en $a$ , alors la tangente à la courbe représentative $C_f$ de $f$ au point $A$ de $C_f$ est **la droite passant par $A$** de **coefficient directeur** : **le nombre dérivé** de $f$ en $a$.
- La tangente à la courbe représentative $C_f$ au point $A$ admet pour équation :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

**Rappel :**

Si $M(x\,;y) \in C_f$ alors $M(x\,;f(x))$.

Autrement dit : $y = f(x)$.