Chapitre   : Primitive

I. Définition et propriétés

Définition 1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f une fonction F définie et dérivable sur I vérifiant ____________ pour tout $x \in I$.

Remarque : Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors f est la dérivée de F sur I.

Exemple : Soit $f : x \mapsto 3x^2 + 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Alors $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 + x$ est une primitive de f, en effet $F'(x) = 3x^2 + 6x + 1 = f(x)$.
$G : x \mapsto x^3 + 3x^2 + x - 17$ est une autre primitive de f.

Propriété 1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto$
est aussi une primitive de f sur I.

Toutes les primitives de f sont de cette forme.

Remarque : Sur un intervalle, toutes les primitives d'une fonction f diffèrent d'une constante.

Application 1 : Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 6x + 1$.

Propriété 2 :
Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Exercice 1 : Dériver F pour montrer que c'est une primitive de f

Dans chaque cas, déterminer si la fonction F est une primitive de f

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{(x+3)^2}$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$

b) $f(x) = \cos(x) - x\sin(x)$ $\qquad F(x) = x\cos(x)$

c) $f(x) = \dfrac{28}{(-3x+7)^2}$ $\qquad F(x) = \dfrac{4x}{-3x+7}$

d) $f(x) = \dfrac{x(3x+2)}{(3x+1)^2}$ $\qquad F(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$

e) $f(x) = 16(2x+1)^7$ $\qquad F(x) = (2x+1)^8$

f) $f(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$ $\qquad F(x) = \cos^3(x)$

II. Primitives usuelles

Propriété 3 : Soit C une constante réelle.

Fonction f définie par :	Fonction primitive F définie par :	Intervalle de validité
$f(x) = m$ (constante)		$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = x$		$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$		$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$		$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*\backslash\{-1\}$		$]-\infty; +\infty[$ si $n \geq 1$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leq -2$
$f(x) = \cos x$		$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \sin x$		$]-\infty; +\infty[$
$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$		$]-\infty; +\infty[$
$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$ avec $\omega \neq 0$		$]-\infty; +\infty[$

III. Propriétés

Propriétés 4 :
Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

1) Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
2) Si $m \in \mathbb{R}$, alors mF est une primitive mf de sur I.

Remarque : En général, FG n'est pas une primitive de fg et $\frac{F}{G}$ n'est pas une primitive de $\frac{f}{g}$.

Exercice 2 : Primitives d'une fonction usuelle

Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2x^2$
2. $f(x) = x^9 + 1$
3. $f(t) = 3t^2 + 2t$
4. $f(t) = -5t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 8$
5. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$
6. $f(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$
7. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
8. $f(x) = 3\cos x$
9. $f(x) = \sin(3x + 2)$

Exercice 3 : Primitives d'une fonction usuelle

Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x - 7$

b) $f(t) = 3\cos\left(4t - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

d) $f(t) = 8\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

f) $f(t) = 4t^2 - 8t + 3$

g) $f(x) = 3\cos(2x)$

h) $f(t) = 9t + 3$

i) $f(x) = -4\sin(6x - 1)$

j) $f(t) = 6$

k) $f(x) = \cos(7 - 3x)$

l) $f(t) = \sin(\pi t - 4) + 2\cos(5 - t)$

m) $f(x) = 2 - 3x^2 + 5x^3 - x^7$

n) $f(t) = 5\cos(3t) - 6\sin(4t - 1)$

Propriété 5 :

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Alors il existe une ____________________ primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent :

Nous avons vu que toutes les primitives de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 + x + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Cherchons la primitive de f vérifiant $F(2) = -1$.

On est amené à résoudre $F(2) = -1$:

$$\begin{aligned} F(2) = -1 &\Leftrightarrow 2^3 + 3 \times 2^2 + 2 + C = -1 \\ &\Leftrightarrow 8 + 12 + 2 + C = -1 \\ &\Leftrightarrow 22 + C = -1 \\ &\Leftrightarrow C = -23 \end{aligned}$$

On en déduit que $F(x) = x^3 + 3x^2 + x - 23$

Application 2 :

Déterminer la primitive F des fonctions suivantes sur l'intervalle I vérifiant la condition imposée :

1. $f : x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(6) = 600$

2. $f : x \mapsto \frac{5}{x^3}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ et $F(5) = \frac{3}{10}$

3. $f : x \mapsto \sin 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ et $F(0) = 1$

Exercice 4 : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)^4$.
   Déterminer les primitives de f, puis la primitive F_0 telle que $F_0(-1) = 2$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
   Déterminer les primitives de f, puis la primitive F_0 telle que $F_0(0) = 1$.

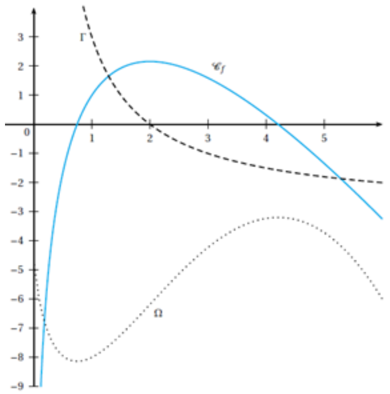
Exercice 5 : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition donnée

Déterminer la primitive F de f sur l'intervalle donné vérifiant la condition donnée.

a)	$f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$	$F(0) = 8$	$I = \mathbb{R}$
b)	$f(x) = 3\cos(x)$	$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$	$I = \mathbb{R}$
c)	$f(t) = 5\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$	$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$	$I = \mathbb{R}$
d)	$f(t) = t + 5$	$F(4) = -6$	$I = \mathbb{R}$

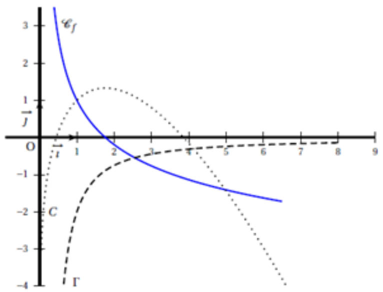
Exercice 6 : *BAC STI2D – Polynésie juin 2014*

On considère une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
Le point $A(1\,;1)$ appartient à C_f.
C_f admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.
Sur le graphique ci-contre, on a tracé C_f (trait plein) ainsi que les courbes Ω et Γ.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.
Identifier chacune des courbes, en justifiant soigneusement.



Exercice 7 : *BAC STI2D – Antilles-Guyane juin 2013*

On considère une fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
Sur le graphique ci-contre, on donne C_f et les courbes C et Γ.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f et l'autre représente une primitive F de f.
a) Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
b) Par lecture graphique, donner $F(1)$



IV. Applications

Rappels :

- L'accélération sur un intervalle Δt est défini par $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, où Δv est la variation de la vitesse.
- Si l'accélération, la vitesse et la distance sont des fonctions du temps, la distance est une primitive de la vitesse et la vitesse est une primitive de l'accélération.

Exercice 8 :

La vitesse d'un avion de chasse en m/s est donnée par une fonction v du temps t définie sur l'intervalle $[\,0\,;10\,]$ par :

$$v(t\,) = -1{,}5t^2 + 48t + 200$$

On note $x(t)$ la distance parcourue par l'avion au bout de t secondes et on rappelle que x est une primitive de v.
a) Montrer que les fonctions définies sur $[\,0\,;10\,]$ par $t \longmapsto -0{,}5\,t^3 + 24t^2 + 200t + k$ sont des primitives de v.
b) Justifier que, pour tout $t \in [\,0\,;10\,]$, $x(t) = -0{,}5\,t^3 + 24t^2 + 200t$.
c) Quelle distance sera parcourue par l'avion au bout de 10 secondes ?

Exercice 9 :

Un projectile est lâché sans vitesse initiale à 500m d'altitude. Il tombe vers la Terre sous l'effet de la pesanteur dans un mouvement rectiligne. Son accélération est égale à 9,81 $m.s^{-2}$.
a) Déterminer sa vitesse $v(t)$ puis la distance $x(t)$ parcourue au bout de t secondes.
b) Déterminer à quel instant le projectile touchera le sol. Quelle sera alors sa vitesse ?

Exercice 10 :

La voiture de course la plus rapide est capable de passer de 0 à 100 km/h en $2{,}4s$
a) Calculer la valeur a de l'accélération que l'on suppose constante.
b) Déterminer la vitesse v de la voiture en fonction du temps t.
c) Exprimer la distance d parcourue par la voiture en fonctions du temps.
d) Quelle distance aura parcourue la voiture en passant de 0 à 100 km/h?

Exercice 11 :

Un cycliste démarre sa course avec une accélération donnée pendant les 20 premières secondes par :$a(t) = -\frac{t^2}{80} + \frac{t}{4}$ en $m.s^{-2}$, où t désigne le temps écoulé depuis le début de la course.
a) Calculer sa vitesse $v(t)$, la primitive de $a(t)$ qui s'annule en 0.
b) Calculer la distance parcourue $x(t)$, la primitive de $v(t)$ qui s'annule en 0.
c) Quelle distance aura parcouru le cycliste au bout de 20 secondes ?

Exercice 12 :

Un skieur descend un pente à 45° en ligne droite.
La force de gravité est représentée par un vecteur vertical $\vec{g} = \overrightarrow{g_x} + \overrightarrow{g_y}$ comme indiqué ci dessous.

L'accélération du skieur $a(t)$ est constante égale à $\|\overrightarrow{g_x}\|$.
On donne $\|\vec{g}\|$ = 9,81 $m.s^{-2}$
L'accélération, la vitesse et la distance parcourue sont ds fonctions du temps t en secondes.

a) Calculer $\|\overrightarrow{g_x}\|$.
b) Déterminer la vitesse du skieur $v(t)$, primitive de $a(t)$ sachant que la vitesse initiale $v(0)$ est égale à $1m/s$.
c) Exprimer la distance parcourue $x(t)$, primitive de $v(t)$
d) Quelle distance aura parcouru le skieur au bout de 25 secondes ? Le résultat semble-t-il cohérent ? Commenter.

Exercice 13 :

Un mobile glisse sans frottement le long d'un axe horizontal muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,)$.
Son accélération instantanée à l'instant t est donnée par $a(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.
1) Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse initiale est nulle, déterminer $v(t)$, la vitesse instantanée du mobile en fonction du temps t.
2) A $t = 0$, le mobile , représenté par le point M d'abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O\,;\,\vec{\imath}\,)$, se trouve en O. Exprimer l'abscisse de M en fonction de t .

Exercice 14 :

L'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal évolue en fonction du temps t suivant la formule :

$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$

où i_0 est l'amplitude du signal en ampères,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du signal en $rad.s^{-1}$

T est la période du signal en seconde

φ est le déphasage exprimé en radian.

Lorsque ce courant traverse une résistance R, l'énergie émise su l'intervalle $[\,0\,;T\,]$ est égale à $E = R\left(F(T) - F(0)\right)$ où F est une primitive de i^2.

Un logiciel de calcul nous fournit deux expressions de i^2. On admet qu'elles sont égales:

$$i^2(t) = i_0^2(\sin(\omega t + \varphi))^2 \quad et\ i^2(t) = \frac{i_0^2}{2} - \frac{i_0^2}{2}\cos(2\omega t + 2\varphi)$$

a) Après avoir choisi l'une de ces deux expressions, déterminer une primitive F de i^2.

b) Montrer que $E = \frac{1}{2} R\, i_0^2 T$

Exercice 15 :

Lors d'une pénalité au rugby, la trajectoire du ballon peut être modélisée par deux fonctions x et y donnant le déplacement horizontal et vertical du ballon en fonction du temps t.

Le buteur se trouve à 50m face aux poteaux et le ballon est posé au sol.

A l'instant $t = 0$, le coup de pied donne au ballon une vitesse initiale de 25 m/s représentée par un vecteur $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

a) Calculer la vitesse horizontale $v_x(0)$ et la vitesse verticale $v_y(0)$ du ballon juste après le coup de pied ($v_x(0)$ et $v_y(0)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v_0}$.)

b) La vitesse horizontale est constante et la fonction x vérifie, pour $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[$

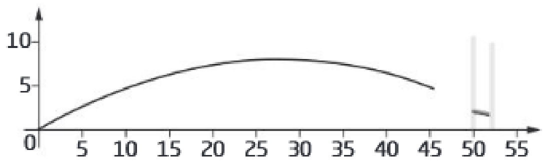
$x'(t) = v_x(0)\ et\ x(0) = 0$. Donner l'expression de $x(t)$.

c) La vitesse verticale v_y varie en fonction du temps sous l'effet de la pesanteur. Pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty[$, $v_y'(t) = -9{,}81$.

Exprimer $v_y(t)$.

d) Exprimer $y(t)$ sachant que $y'(t) = v_y(t)$ pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty[$.

e) Pour marquer la pénalité, le ballon doit passer au dessus de la barre transversale située à 3m du sol. Le buteur va-t-il marquer?



Exercice 16 :

On lance à partir du sol une bille verticalement vers le haut, à la vitesse initiale de $20 m.s^{-1}$. Le but de l'exercice est de savoir à quelle hauteur monte-t-elle et au bout de combien de temps revient-elle sur terre. La bille subit une accélération constante de $g = -9{,}81\ m.s^{-2}$

1) Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de l'accélération qui vérifie $v(0) = 20$.

2) A quel instant $t_0$la vitesse s' annule-t-elle? Que fait la bille avant t_0? Après t_0 ?

3) Déterminer l'altitude $h(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de la fonction v qui vérifie $h(0) = 0$.

4) En déduire à quel instant t la bille retombe au sol.

Exercice 17 :

Un mobile, de masse 1kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9N/m$.

Si on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

A chaque instant t , la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,)$. Les lois de la physique montrent que la fonction f vérifie la relation (E): $f'' + 9f = 0$ où f''est la dérivée seconde de f.

1) a) Montrer que les fonctions f de la forme $f(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$, où A et B sont des constantes réelles, vérifient la relation (E).

b) Que représentent $f''(t)$ et $f'(t)$ pour le mobile à l'instant t ?

2) On sait qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0{,}5\ m$ et a une vitesse initiale $f'(0) = 1{,}5\ m.s^{-1}$.

Déterminer les valeurs des réels A et B.

3) On admet que

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4})$$

a) Résoudre l'équation $f(t) = 0$

b) A partir de l'instant $t = 0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (on donnera la réponse arrondie au millième de seconde)

V. Construction de la courbe d'une primitive par la méthode d'Euler

Lorsqu'on ne connait pas l'expression d'une primitive de f, on peut tout de même avoir une idée de l'allure de sa représentative à l'aide de méthode d'approximation comme la méthode d'Euler.

Autrement dit, on connait f mais pas F et on veut tout de même tracer la courbe de F.

Principe de la méthode d'Euler :

- On cherche à tracer la courbe représentative de la fonction F sachant que :
  F est la primitve de f (on a donc $F' = f$)
  $F(a) = b$
  On place donc le premier point de la courbe de F : le point $A(a; b)$

- On choisit un pas h (par exemple : 0,1 ou 0,01)
  On cherche à placer le point de la courbe de F d'abscisse $a + h$ donc le point de coordonnées $\left(a + h ; F(a + h)\right)$
  Pour cela on a besoin de connaître la valeur de $F(a + h)$
  Comme on ne connaît pas l'expression de F, on va utiliser une approximation :
  L'approximation affine locale :
  $$F(a + h) \approx F'(a) \times h + F(a)$$
  $$F(a + h) \approx f(a) \times h + F(a)$$
  avec ici $f(a)$ connu car on connait la fonction f et le nombre a ; h connu car on l'a choisi et $F(a)$ connu (et égal à b)

- On se "décale" de h à nouveau, on veut placer le point de la courbe de F d'abscisses $a + 2h$
  On calcule une valeur approchée de $F(a + 2h)$ avec l'approximation affine locale
  $$F(a + 2h) \approx F'(a + h) \times h + F(a + h)$$
  $$F(a + 2h) \approx f(a + h) \times h + F(a + h)$$
  et on remplace $F(a + h)$ par la valeur trouvée à l'étape d'avant ; $f(a + h) et\ h$ sont connus

On se décale à nouveau de h et on continue de la même façon....

On peut effectuer les calculs avec un tableur ... et créer deux suites : une pour les abscisses et une pour les ordonnées des points tracés

On aura : $x_{n+1} = x_n + h$ avec $x_0 = a$

et $y_{n+1} = y_n + f(x_n) \times h$ avec $y_0 = b$

Exemple :

Construction de la courbe représentative de la primitive F de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ telle que $F(0) = 0$.

On construit les points de coordonnées $(x_n; y_n)$ avec :

$x_0 = 0\ et\ x_{n+1} = x_n + h$

$y_0 = 0\ et\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{1 + x_n^2} \times h = y_n + \dfrac{h}{1 + x_n^2}$

	A	B	C	D
1	h	x	y	
2	0,1	0	0	
3		0,1	0,0990099	
4		0,2	0,19516375	
5		0,3	0,28690687	
6		0,4	0,37311376	
7		0,5	0,45311376	
8		0,6	0,52664317	
9		0,7	0,59375727	
10		0,8	0,65473288	
11		0,9	0,7099815	
12		1	0,7599815	
13		1,1	0,80523037	
14		1,2	0,84621397	
15		1,3	0,88338869	
16		1,4	0,91717248	
17		1,5	0,94794171	
18		1,6	0,9760316	
19		1,7	1,00173854	
20		1,8	1,02532344	
21		1,9	1,04701542	
22		2	1,06701542	
23		2,1	1,0854997	
24		2,2	1,10262299	
25		2,3	1,11852124	

Dans la cellule A2 : on entre la valeur de h (ici 0,1)

Dans la cellule B2 : on entre 0

Dans la cellule C2 : on entre 0

On utilise les relations de récurrence pour les formules suivantes :

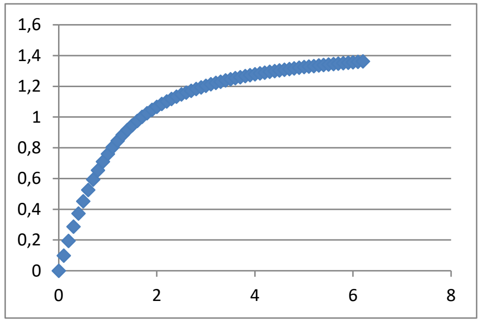
Dans la cellule B3 : on entre $= B2 + \$A\$3$

(on fixe la cellule A3 pour bien ajouter h à chaque fois)

Dans la cellule C3 : on entre

$$= B2 + \$A\$3\ /(1 + B2^{\wedge}2)$$

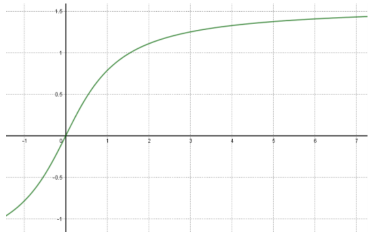
On obtient la courbe suivante pour la primitive de f qui s'annule en 0



Remarque :

- la courbe tracée est celle de la fonction Arctangente (notée Arctan ou $\tan^{-1}$)

Tracé avec geogebra :



- en prenant un pas (h) négatif, on obtient une partie de la courbe sur $]-\infty; 0[$

Application 3 :

Construire, à l'aide de la méthode d'Euler, la courbe représentative de la primitive F de $f(x) = \frac{1}{x}$ telle que $F(1) = 0$