Chapitre : Fonctions polynômes de degré 2 et 3

I. Fonctions polynôme de degré n

Définition 1 : On appelle **fonction polynôme de degré n** ($n \in \mathbb{N}$), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

où $a_0, a_2, \ldots, a_{n-1}$ et a_n sont des nombres réels, avec $a_n \neq 0$.

Définition 2 : Soit P un polynôme et r un réel.
On appelle racine (solution) d'un polynôme, le nombre r tel que $P(r) = 0$.

Graphiquement les racines d'un polynôme sont **les abscisses** des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Application 1 :

1. 2 est-il une racine de $f(x) = x^2 - x - 2$?
2. -1 est-il une racine de $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$?

Exercice 1 : Racines d'un polynôme

1. Vérifier que 1 est une racine de : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
2. Vérifier que -1 est une racine de : $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$
3. Vérifier que 2 est une racine de : $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$
4. Vérifier que -3 est une racine de : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

Exercice 2 : Racines d'un polynôme

Conjecturer une racine "évidente" des polynômes suivants et vérifier votre conjecture.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = x^2 + x - 2$
3. $f(x) = x^2 - 4$
4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
6. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$
7. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
8. $f(x) = 35x^3 + 23x^2 - 14x$

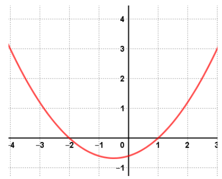
Exercice 3 : Résolution graphique (calculatrice)

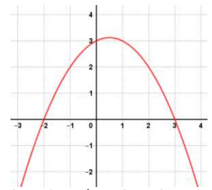
Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f, puis résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

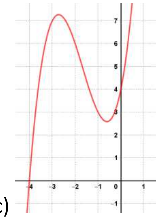
a) $f(x) = x^2 + x - 6$
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
c) $f(x) = 100 - 20x + x^2$
d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

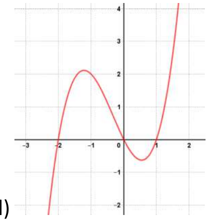
Exercice 4 :

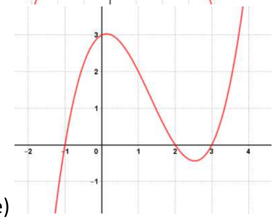
Conjecturer, grâce au graphique, les racines des polynômes représentés ci-dessous.

a)


b)


c)


d)


e)


II. Fonctions polynôme de degré 2

Définition 3 : Soit a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle ______________________________ (ou fonction trinôme), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P(x)$ est alors appelé _____________________________________ (ou trinôme).

L'écriture $ax^2 + bx + c$ s'appelle la ___________________________ du polynôme.

Exercice 5 : Fonction polynôme du second degré ou non ?

Dans chacun des cas suivants, on donne l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2.
Si oui, préciser les coefficients a, b et c.

a. $f(x) = 4 - x^2 + x^3$

b. $f(x) = 7 - 2x$

c. $f(x) = 3x - x^2$

d. $f(x) = 5 - 2x^2 + 3x$

e. $f(x) = 3(x+1)^2 - 4(2x-5)$

f. $f(x) = (x+1)^2 + (x-2)^2$

g. $f(x) = (2x+3)^2 - (2x-1)^2$

h. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$

1) Rappels : La fonction carrée

a) Définition et propriétés

Définition 4 : La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$

Application 2 : Déterminer les images des nombres suivants par la fonction carré :

$A = -\frac{1}{7}$	$B = 10^{-5}$	$C = 3\sqrt{2}$	$D = \sqrt{3} - 2$

Propriété 1 (signe) : Un carré est toujours positif dans $\mathbb{R}$.

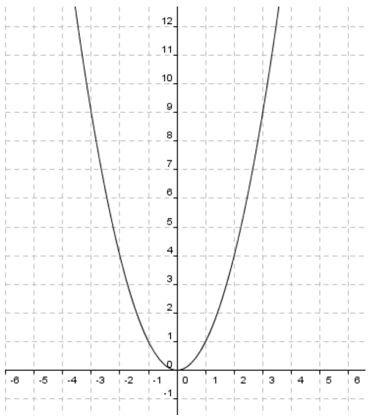
b) Représentation graphique

Définition 5 : La fonction carré est représentée par une courbe appelée ______________________.
Elle est constituée des points $M(x, x^2)$ et a pour équation __________

Le point $O(0,0)$ est appelée __________________ de la parabole.

Propriété 2 : Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$

admet l'axe des _________________comme axe de symétrie.



c) Variations et conséquences

Propriété 3 (variation) :

- La fonction carré est strictement ________________________________ sur $]-\infty, 0]$.
- La fonction carré est strictement ________________________________ sur $[0, +\infty[$.

Propriété 4 : On a montré que :

- si $0 < a < b$ alors :
- si $a < b < 0$ alors :

Tableau de variation de la fonction carré :

Application 3 :

1. Sachant que $-2 \leq x \leq 4$, encadrer x^2.

2. Sachant que $3 < x < 5$, encadrer x^2.

3. Sachant que $-8 < x < -\frac{2}{3}$, encadrer x^2.

d) Equations et inéquations

Propriétés 5 :

- Si $a > 0$, $x^2 = a$ admet
- Si $a = 0$, $x^2 = a$ admet
- Si $a < 0$, $x^2 = a$

Application 4 : Déterminer les antécédents des nombres suivants par la fonction carré :

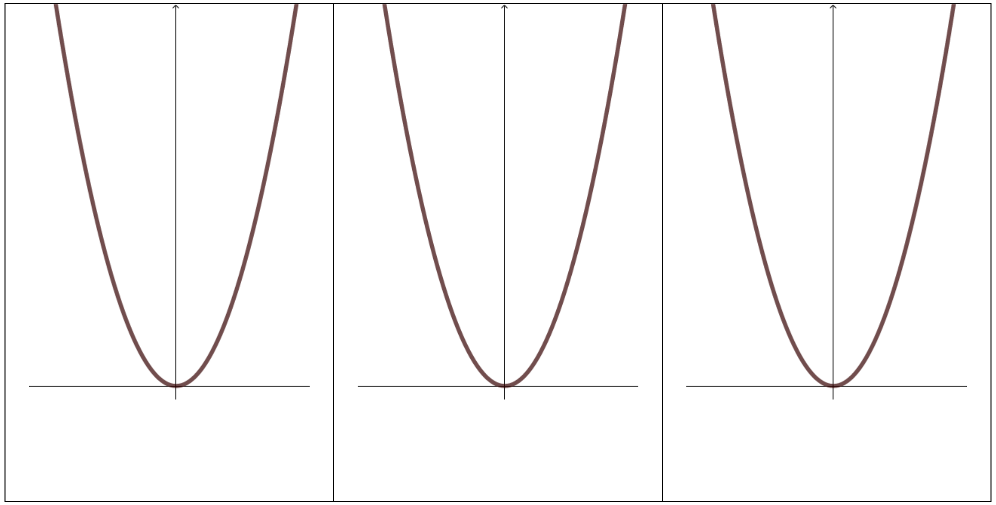
$0{,}36$	-5	7

Application 5 : Résoudre les équations suivantes :

$x^2 - \frac{3}{5} = 0$	$(2x-1)^2 = 25$

Application 6 : Dans chacun des cas suivants, **à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré**, déterminer pour quelles valeurs de x on a (*on fera apparaitre les pointillés et des couleurs) :*

1. $4 \leq x^2 \leq 9$
2. $x^2 > 5$
3. $x^2 \leq 16$



2) Fonctions définie par $f(x) = ax^2$ (cas où $b = c = 0$)

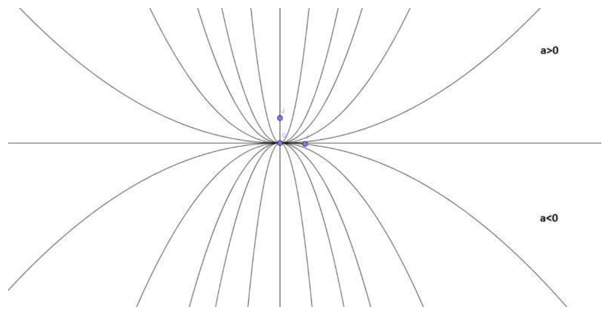
a) Représentation graphique

Définition 6 : Dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes représentatives des fonctions définies par $f(x) = ax^2$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ sont des

Son sommet est le point S de coordonnée $S($; $)$

Propriété 6 : Dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes représentatives des fonctions définies par $f(x) = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ sont toutes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

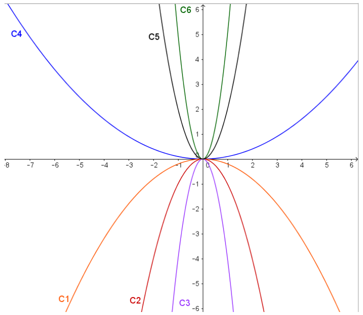
Courbes représentatives :



Remarque : Plus a est grand dans les positifs (ou a est petit dans les négatifs) plus la courbe se « rapproche » de l'axe des ordonnées.

Application 7 :
On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f_1(x) = 5x^2$
b. $f_2(x) = 2x^2$
c. $f_3(x) = 0{,}1x^2$
d. $f_4(x) = -\frac{1}{5}x^2$
e. $f_5(x) = -x^2$
f. $f_6(x) = -4x^2$



Sur le graphique ci-contre, identifier les représentations des fonctions précédentes.

b) Variations

Propriété 7 : Soit a un réel non nul ($a \neq 0$) .
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$, avec $a \in \mathbb{R}^*$.
Son tableau de variation est :

Si $a > 0$	Si $a < 0$

Application 8 :

1. Donner le tableau de variations la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{2}x^2$

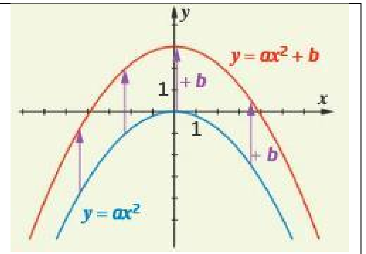
2. Donner le tableau de variations la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2$

3) Fonctions définie par $f(x) = ax^2 + c$ (cas où $b = 0$)

a) Représentation graphique

Définition 7 : Soient a et c des réels avec $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes représentatives C_f des fonctions f, sont des ______________________________.

Elle est obtenue, à partir de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$, par translation de vecteur __________.



Propriété 8 : Soient a et c des réels avec $a \neq 0$.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes représentatives des fonctions définies par $f(x) = ax^2 + c$, sont ____.

Son sommet est le point S de coordonnée $S($; $)$

b) Variations

Propriété 9 : Soient a et c des réels avec $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + c$.
Son tableau de variation est :

Si $a > 0$	Si $a < 0$

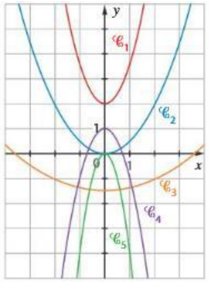
Propriété 10 : Soient a et c des réels avec $a \neq 0$.
Si a et b ont le même signe, la courbe représentative de la fonction définie par :
$f(x) = ax^2 + b$ ne coupe pas l'axe des abscisses, ce qui signifie que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Exercice 6 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2
Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = 3x^2$
b) $f(x) = -6x^2 + 1$
c) $f(x) = -2x^2$
d) $f(x) = 4x^2 + 3$

Application 9 :
Relier chacune des courbes aux fonctions données ci-dessous.

1. $f(x) = \ 0{,}5\ x^2$
2. $g(x) = \ 1{,}5x^2 + 2$
3. $h(x) = \ -4x^2$
4. $j(x) = \ 0{,}1x^2 - 1{,}5$
5. $k(x) = \ -2x^2 + 1$



4) Fonctions définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (cas général)

Propriété 11 : Soit a un réel non nul.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
L'écriture $f(x) = \ a(x - x_1)(x - x_2)$ est la forme factorisée du polynôme de degré 2 où x_1 et x_2 sont les **racines du polynôme**, c'est-à-dire **les solutions de l'équation $f(x) = 0$** .

Graphiquement cela signifie que la courbe représentative de la fonction f coupe ___________________________ en x_1 et x_2.

Application 10 : Factoriser chaque polynôme à l'aide des données suivantes :

1. $P(x) = 5x^2 + 20x$
2. $P(x) = -4x^2 + 4x + 8$ avec : $x_1 = \ -1$ et $x_2 = \ 2$
3. $P(x) = x^2 - 5x + 6$ avec : $x_1 = \ 3$ et $x_2 = \ 2$
4. $P(x) = 5x^2 + 9x - 2$ avec $x_1 = -2$.

Exercice 7 : Polynôme et racines

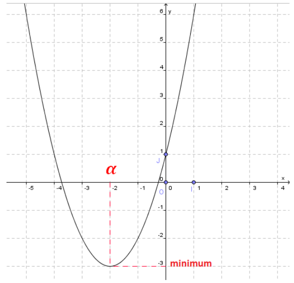
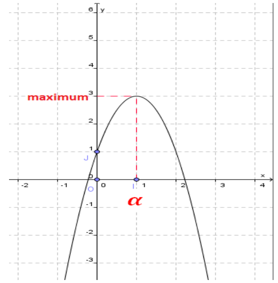
1. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines 2 et 8.
2. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines -3 et 5.
3. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines -7 et -11
4. Donner un polynôme de degré 2 ayant pour racines 0 et 4

Exercice 8 : Polynôme et racines

1. Donner deux polynômes de degré 2 ayant pour racine 3 et 5.
2. Donner deux polynômes de degré 2 ayant pour racines - 2 et 4.

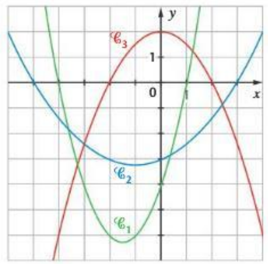
a) Représentation graphique

Définition 8 : Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est
Son sommet est le point S de coordonnée $S(\alpha\ ;\ \beta)$ avec $\alpha =$ et $\beta =$

Si $a > 0$	Si $a < 0$
 On dit que la parabole est « **tournée vers le haut** » ou « **à l'endroit** » (comme celle de x^2)	 On dit que la parabole est « **tournée vers le bas** » ou « **à l'envers** » (par rapport à celle de x^2)

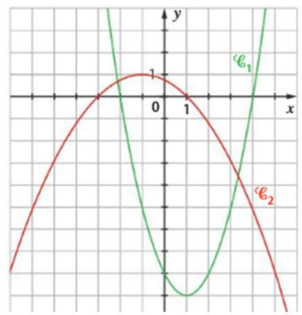
Propriété 12 : Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la parabole représentant une fonction polynôme du second degré admet un axe vertical de symétrie d'équation :

Exercice 9 : Lecture graphique
Relier chacune des courbes aux fonctions données ci-dessous.



a) $f(x) = (x - 1)(x - 4)$
b) $g(x) = \ -0{,}5(x - 2)(x + 2)$
c) $h(x) = \ 0{,}2(x - 3)(x + 5)$

Exercice 10 : Lecture graphique
Les courbes C_1 et C_2 sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g s'écrivant sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.
Déterminer l'expression de f et celle de g.



b) Variations

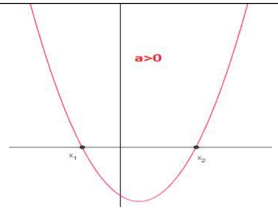
Propriété 13 : Soit a un réel avec $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Son tableau de variation est :

Si $a > 0$	Si $a < 0$

c) Signe

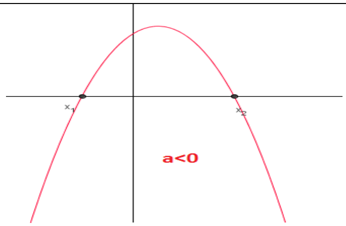
Propriété 14 : Soit a un réel avec $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leq x_2$.
Le signe du polynôme du 2nd degré de $f(x)$ dépend du signe du réel a.

$a > 0$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

$a < 0$

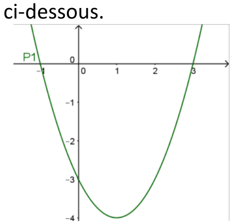


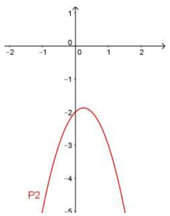
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	

$f(x)$ est du signe de a « à l'extérieur de l'intervalle des racines x_1 et x_2 » et est du signe contraire « à l'intérieur ».

Exercice 11 : Lecture graphique du signe

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.

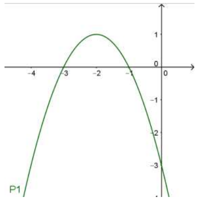


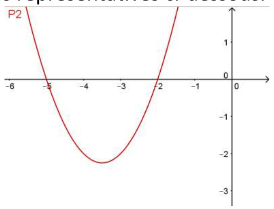


1. Dans un tableau, donner le signe de $f(x)$.
2. Dans un tableau donner le signe de $g(x)$

Exercice 12 : Lecture graphique

f et g sont deux fonctions polynômes du second degré dont on donne les courbes représentatives ci-dessous.





Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x) > 0 \quad f(x) \geq 0 \quad f(x) < 0 \quad f(x) \leq 0$

$g(x) > 0 \quad g(x) \geq 0 \quad g(x) < 0 \quad g(x) \leq 0$

Application 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

1) Montrer que f peut s'écrire $f(x) = -2\,(x-1)(x+2)$

2) a) Donner l'allure de la courbe représentative, son sommet et son axe de symétrie.

b) Donner le tableau de variations de f.

3) a) Déterminer les solutions de $f(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 13 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2

Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = 3(x+1)(x-2)$
b) $f(x) = -6(x-2)(x+7)$
c) $f(x) = -5(x-2)^2$
d) $f(x) = 4(x-3)(x+1)$

Exercice 14 : Eléments caractéristiques d'un polynôme de degré 2

Pour chaque polynôme, déterminer : ses racines éventuelles ; le sens de la parabole, son sommet et son axe de symétrie ; le tableau de variations et le tableau de signes.

a) $f(x) = -2(x+5)(x+4)$
b) $f(x) = 3x(x-4)$
c) $f(x) = -2(x-3)(x-6)$
d) $f(x) = (x+5)^2$

Exercice 15 : Factorisation d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P(x) = 2x^2 - x$
2. $P(x) = x^2 + 2x + 1$
3. $P(x) = x^2 - 9$
4. $P(x) = 3x^2 + 5x$
5. $P(x) = x^2 - 2x + 1$
6. $P(x) = x^2 - 7$

Exercice 16 : Factorisation d'un polynôme

Factoriser chaque polynôme sachant que x_1 et x_2 en sont les racines.

a) $P(x) = 5x^2 + 20x$ Avec : $x_1 = 0$ et $x_2 = -4$
b) $P(x) = -2x^2 - 16x - 14$ Avec : $x_1 = -7$ et $x_2 = -1$
d) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ Avec : $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

Exercice 17 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x+2)(x-1)$.
b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 18 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$.
a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -3(x-5)(x+2)$.
b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 19 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.
a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-5)(x-1)$.
b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 20 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = -4x^2 + 12x - 8$.
a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -4(x-1)(x-2)$.
b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 21 : Factoriser à l'aide d'une racine

Factoriser chaque polynôme du second degré dont on donne une racine.

a) $P(x) = x^2 + 13x + 30$ de racine -3
b) $P(x) = 5x^2 + 9x - 2$ de racine -2
c) $P(x) = x^2 - 10x - 200$ de racine 10

Exercice 22 : Résolution d'équations « simples »

Dans chacun des cas, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

a) $f(x) = 25 - 4x^2$
b) $f(x) = 2x^2 - 8x$
c) $f(x) = (x-2)^2 - 49$
d) $f(x) = (x+3)^2$
e) $f(x) = (x+1)(2x+3)$

Exercice 23 : Signe d'un produit

Dans chaque cas, étudier le signe de $f(x)$.

a) $f(x) = (x-2)(x+3)$
c) $f(x) = (7-x)(1+x)$
b) $f(x) = 2x(x-5)$
d) $f(x) = (x+5)(3-x)$

Exercice 24 : Signe d'un produit

A l'aide de la forme factorisée, déterminer le tableau de signes de chaque polynôme.

a) $P(x) = (x+2)(x-1)$
b) $P(x) = (x+7)(x+8)$
c) $P(x) = 3(x-2)(x+7)$
d) $P(x) = -5(x+5)(x-1)$

Exercice 25 : Inéquations produit

Résoudre chaque inéquation.

a) $(x+3)(x-2) \leq 0$
b) $(x-4)(x-5) > 0$
c) $3(x-4)(x+2) < 0$
d) $-(x+2)(x+3) \geq 0$

Exercice 26 : Inéquations produit

Soit f la fonction définie par $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$.
a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -3(x+2)(x-5)$.
b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Compétence : Forme développée, forme factorisée et forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Exercice 27

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x - 6$$

1. Montrer que $f(x) = (x-1)(x+6)$
2. Montrer que $f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :
   a. Calculer l'image de -6, de 0 et de $-\frac{5}{2}$
   b. résoudre l'équation $f(x) = 0$
   c. résoudre l'équation $f(x) = -6$
   d. résoudre l'équation $f(x) = \frac{15}{4}$
4. Déterminer les variations de la fonction f.

Exercice 28

On considère la fonction f sous sa forme développée définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

1. Montrer que $f(x) = 2(x-2)(x+1)$
2. Montrer que $f(x) = -\frac{9}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour :
   a. Calculer l'image de -3, de 2 et de $\frac{1}{2}$
   b. Calculer l'image de $\sqrt{3}$ et de $1 - \sqrt{5}$
   c. résoudre l'équation $f(x) = 0$
   d. résoudre l'équation $f(x) = -4$
   e. résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$
4. Déterminer les variations de la fonction f.

III. Fonctions polynôme de degré 3

Définition 9 : Soient a, b, c et d quatres nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle ______________________________ toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$P(x)$ est alors appelé _____________________________________ .

L'écriture $ax^3 + bx^2 + cx + d$ s'appelle la ___________________________ du polynôme.

1) Rappels : La fonction cube

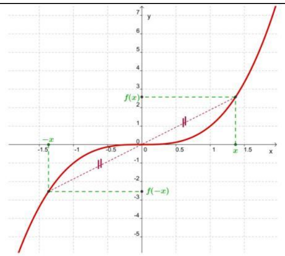
a) Définition

Définition 10 : On appelle fonction cube la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$

b) Représentation graphique et variation

Propriété 15 (variation) :
La fonction cube est strictement sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est donnée ci-contre :



c) Equations et inéquations

Définition 11 : Soit x un nombre réel positif. La racine cubique de x, notée $\sqrt[3]{x}$, est l'unique nombre positif dont le cube est x : $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

Propriétés 16 : Soit k un réel.

- L'équation $x^3 = k$ admet une unique solution : $\sqrt[3]{k}$
- L'inéquation $x^3 < k$ a pour ensemble de solution l'intervalle $]-\infty\,;\,\sqrt[3]{k}[$

Application 12 : Résoudre. Donner la valeur exacte, puis, si la solution n'a pas d'écriture rationnelle,
utilisez la calculatrice pour donner une valeur approchée au centième près.

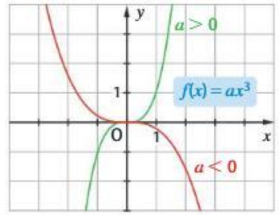
1) $x^3 = 1$	2) $x^3 = 5$	3) $x^3 = 8$	4) $x^3 = -10$	5) $x^3 = -27$

2) Fonctions définie par $f(x) = ax^3$ (cas où $b = c = d = 0$)

a) Représentation graphique

Propriété 17 : Soit a un réel non nul ($a \neq 0$).
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3$.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, les courbes représentatives C_f des fonctions f sont toutes symétriques par rapport à _____________________.



b) Variations

Propriété 18 : Soit a un réel non nul ($a \neq 0$). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3$.

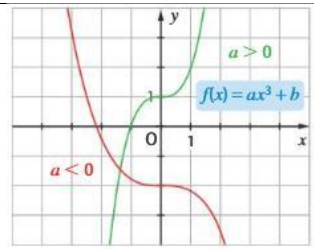
Si $a > 0$	Si $a < 0$

3) Fonctions définie par $f(x) = ax^3 + d$ (cas où $b = 0$)

a) Représentation graphique

Définition 12 : Soient a et d des réels avec $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + d$.

La courbe représentative de la fonction f est obtenue, à partir de la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto ax^3$, par translation de vecteur _________.



b) Variations

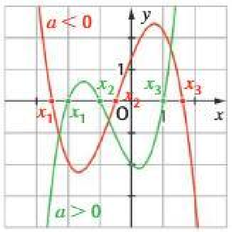
Propriété 19 : Soient a et c des réels avec $a \neq 0$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + d$.
Son tableau de variation est :

Si $a > 0$	Si $a < 0$

4) Fonctions définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ (cas général)

Propriété 20 : Soit a un réel non nul.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$



L'écriture $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est la forme factorisée du polynôme de degré 3 où x_1, x_2 et x_3 sont les **racines du polynôme**, c'est-à-dire **les solutions de l'équation $f(x) = 0$**.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentative de la fonction f coupe ____________________________ en x_1; x_2 et x_3.

Application 13 : Polynôme et racines

1. Donner deux polynômes de degré 3 ayant pour racines -7 ; - 2 et – 1

2. Donner deux polynômes de degré 3 ayant pour racines - 6 ; 0 et 4

Exercice 29 : Lecture graphique

On donne quatre courbes ci-contre et quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

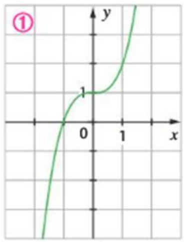
a) $f(x) = -0{,}05\,(x + 3)(x - 4)(x + 1)$

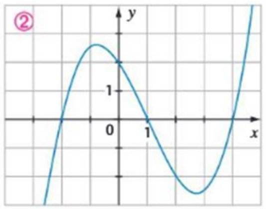
b) $g(x) = x^3 + 1$

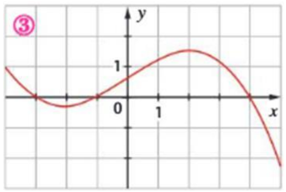
c) $h(x) = -0{,}3x^3 - 2$

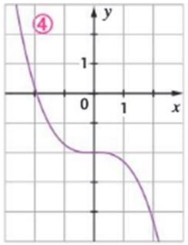
d) $i(x) = 0{,}0.25(x - 1)(x + 2)(x - 4)$

Relier chaque fonction à sa représentation graphique.









Application 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 - 24x^2 - 12x + 40$.

1) Montrer que f peut s'écrire $f(x) = -4\,(x - 1)(x + 2)(x + 5)$.

2) a) Déterminer les solutions de $f(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 30 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 31 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 14x + 12$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$

b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 32 : Forme factorisée et développée

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = (x+4)(x-1)^2$

b) Déterminer alors les racines de f.

Exercice 33 : Signe d'un produit

A l'aide de la forme factorisée, déterminer le tableau de signes de chaque polynôme.

a) $P(x) = (x-1)(x+5)(x-4)$

b) $P(x) = 5(x-2)(x-3)(x+7)$

c) $P(x) = -4(x+6)(x+5)(x+1)$

d) $P(x) = 5x(x+1)(x-2)$

Exercice 34 : Inéquations produit

Résoudre chaque inéquation.

a) $(-4)(x+3)(x-1) < 0$

b) $5(x-2)(x+6)(x+4) \leq 0$

c) $-6(x-2)(x-1)(x+7) \geq 0$

d) $-(x+3)(x-4)(x-1) > 0$

Exercice 35 : Inéquations produit

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 + 10x^2 + 4x - 16$

a) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = 2(x-1)(x+2)(x+4)$

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

IV. Problèmes

Exercice 36 : Problème : Bénéfice et second degré

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village. Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.
On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes) avec $0 < q < 60$.
Charlie sait que le cout de production comme la recette de son entreprise est fonction de la quantité produite.
Son objectif est double :

- Rendre la production rentable ;
- Maximiser le bénéfice de sa chocolaterie.

Les formules donnant le cout $C(q)$ et la recette $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées :

$$C(q) = q^2 + 30q + 1000 \text{ et } R(q) = 100q$$

1. Justifier que $B(q) = -q^2 + 70q - 1000$
2. a. Montrer que $B(q) = -(q-20)(q-50)$
   b. Quelles sont les racines de $B(q)$?
3. a. Résoudre $B(q) > 0$
   b. En déduire les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait du bénéfice.
4. a. Donner le tableau de variation de la fonction B.
   b. Pour quelle quantité q, le bénéfice est maximal, quel est son montant ?

Exercice 37 : Problème : Second degré

Une salle de spectacle peut contenir jusqu'à 5000 personnes. Pour organiser un concert, le gestionnaire de cette salle doit remplir cette salle à au moins 80%.
D'après une étude, il estime que le nombre de spectateurs est donné par :

$$g(x) = -x^2 + 30x + 5000$$

où x est le prix d'une place de spectacle et $g(x)$ le nombre de places achetées.

Il veut alors exploiter cette étude pour déterminer les différents prix de la place qui lui permettront de remplir sa salle à au moins 80% de sa capacité maximale et ainsi pouvoir organiser le concert.

1. Quel est le nombre de places achetées par les clients si le prix de la place est fixé à 10€ ? 30 € ?
2. Vérifier que :
$$-x^2 + 30x + 1000 = (x+20)(50-x).$$
3. Résoudre l'inéquation $g(x) > 4000$ puis répondre au problème posé.

Exercice 38 : Problème : Second degré

L'empreinte carbone est un indicateur des émissions de gaz à effet de serre qui intègre les émissions directes des ménages français, de la production nationale et celles associées aux produits importés. On étudie les émissions de CO_2 entre 1995 et 2015. Les émissions sont exprimées en million de tonnes équivalent CO_2 (Mt eq CO_2). On modélise l'évolution de ces émissions en fonction du temps écoulé depuis 1995, exprimés en années, par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 39] par :

$$*f(x) = -0{,}8x^2 + 19{,}2\,x - 468.$$

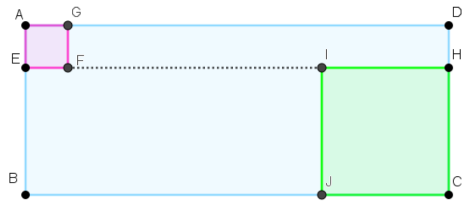
1) Montrer que $f(x) = -0{,}8\,(x-39)(x+15)$.
En déduire les deux racines du polynôme sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 39].

3) La France s'est engagée, d'ici 2030, à réduire ses émissions de CO_2 de 40% par rapport à leur niveau en 1995, estimé à 468 Mt eq CO_2.
D'après ce modèle, l'engagement de la France sera-t-il tenu en 2030? Justifier la réponse.

Exercice 39 : Problème : Géométrie et second degré

Sur une parcelle rectangulaire ABCD de 4 mètres par 10 mètres, on veut délimiter deux parterres de fleurs carrés, dans deux coins opposés (AEFG et CHIJ sur le schéma ci dessous), tels que les points E, F, I et H soient alignés.
On pose AB = 4 , AD = 10 et AE = x, avec $0 < x < 4$.



1a) Exprimer en fonction de x l'aire du carré AEFG et celle du carré CHIJ.
1b) En déduire l'aire de la zone non fleurie.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0;4] par $f(x) = -x^2 + 4x + 12$.
a) Vérifier que -2 est racine de f.
b) En déduire f(x) sous forme factorisée.
c) Déterminer les variations de f.
d) Comment faut-il construire ces deux carrés pour l'aire de la zone non fleurie soit maximale?

Exercice 40 : Problème : Second degré

La grue blanche, un oiseau d'Amérique du Nord, était une espèce en voie de disparition au tournant du XXème siècle. En 1938, il en restait seulement 15. Les chances de les préserver étaient maigres mais aujourd'hui il y en a environ 600.

1) Le nombre de grues blanches au début du XXème siècle est donné dans le tableau ci-après. une espèce est considérée en "danger critique d'extinction" si sa population a diminué de plus de 80% sur la période des dix années précédentes. Peut-on considérer que c'est la cas en 1938?

2) Avec les programmes de protection mis en œuvre depuis 1938, l'évolution de la population de grues blanches à partir de 1938 peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle [38;100] par :

$$f(t) = 0{,}08t^2 - 7{,}2\,t + 173$$

où t est le temps écoulé en années à partir de 1900 (l'année 1938 correspond à t = 38).

Compléter le tableau de valeurs en arrondissant les résultats à l'unité.

Rang de l'année*	10	20	28	30	38	40	45	50	60	80	100
Nbre de grues	200	150	90	44							

*le rang 0 correspond à l'année 1900.

3) a) Résoudre dans ℝ l'équation $f(t) = 173$.

b) En considérant les propriétés de symétrie de la parabole représentant la fonction *f*, en déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son extremum et dresser son tableau de variation sur l'intervalle [38;100].

c) Déterminer, selon ce modèle, l'année pour laquelle le nombre de grues blanches a été minimal.

4) A l'aide de la calculatrice, estimer l'année à partir de laquelle le nombre de grues aura atteint l'effectif de 1910.

Exercice 41 : Problème : Second degré

Au cours d'une compétition d'athlétisme, un athlète lance un javelot. L'étude des divers mouvements subis par ce javelot montre que, au bout de t secondes, il atteint une hauteur, exprimée en mètres, donnée par l'expression :

$$f(t) = -5t^2 + 17t + 2.$$

1) Pour des problèmes liés à des panneaux publicitaires, l'organisateur de la compétition se demande si le javelot montera à plus de 16 mètres.

a) Ecrire l'inéquation liée à ce problème.

b) Soit le polynôme $g(t) = f(t) - 16$. Vérifier que 2 est une ravine de $g(t)$.

c) En déduire une factorisation de $g(t)$.

d) Construire le tableau de signes de $g(t)$.

e) Répondre à la question posée par l'organisateur.

2) On veut savoir au bout de combien de temps le javelot va toucher le sol.

a) En utilisant la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude une seconde de l'instant t_0 où le javelot touche le sol.

b) On veut déterminer par balayage un encadrement de t_0 d'amplitude 10^{-3}.
Compléter l'algorithme ci-contre afin que la variable a contienne en fin d'algorithme une valeur approchée de t_0 à 10^{-3}près par défaut.

c) A l'aide de la calculatrice et/ou de l'algorithme, donner l'encadrement de t_0 demandé.

```
a ← 3
p ← 10^-3
Tant que ....................................
        a ← ........................
Fin Tant que
a ← ......................
```

c) Créer la fonction h sous Python et traduire l'algorithme de la question 2b) .

```
def  h(t) :                                   | a =
                                              | p =
```

Exercice 42 : Problème : 3ème degré

Une usine produit chaque mois entre 50et 90 machines agricoles. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 50] par :

$$f(x) = x^3 - 96x^2 + 2489{,}25x - 10171{,}25.$$

L'entreprise réalise des profits si son bénéfice est strictement positif.

1) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 50]:

$$f(x) = (x-5)(x-39{,}5)(x-51{,}5)$$

2) Etudier le signe de $f(x)$.

3) En déduire le nombre de machines agricoles que l'entreprise doit produire pour réaliser des profits.

Exercice 43 : Problème : 3ème degré

Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 85 tonnes de produit chimique. Le coût de fabrication de q tonnes de ce produit, exprimé en centaines d'euros, est donné par la fonction C définie par $C(q) = 0{,}01q^3 - 1{,}04q^2 + 36{,}43q + 40$ où q est compris entre 0 et 85.

Chaque tonne de ce produit est vendue 1900€. On note R(q) la recette, et B(q) le bénéfice, en centaines d'euros, obtenus pour la vente mensuelle d q tonnes de ce produit.

1) On fait varier q de 0 à 85 avec un pas de 1. On souhaite créer une feuille de calcul comme ci-dessous, présentant le coût de fabrication, la recette et le bénéfice réalisés.

	A	B	C	D
1	**q**	**C(q)**	**R(q)**	**B(q)**
2	0	40	0	-40
3	1	75,4	19	-56,4
4	2	108,78	38	-70,78

a) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule B2 pour obtenir les valeurs du coût de fabrication?

b) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule C2 pour obtenir les valeurs de la recette?

c) Quelle formule, recopiée vers le bas, entre-t-on dans la cellule C2 pour obtenir les valeurs du bénéfice?

2) a) Déterminer l'expression de la fonction $R(q)$.

b) En déduire une expression du bénéfice $B(q)$

c) A l'aide d'un tableur et/ou de votre calculatrice, conjecturer, à une tonne près, la quantité de produit Q_0qu'il faut produire et vendre mensuellement pour réaliser le plus grand bénéfice.

d) En modifiant le pas de variation de la variable q, donner une valeur approchée à 0,1 tonne près de Q_0.

3) On veut à présent déterminer les valeurs de q pour lesquelles les pertes mensuelles dépassent 4000 euros.

a) Ecrire l'inéquation liée à ce problème.

b) Montrer que l'inéquation s'écrit $-0{,}01q(q-21)(q-83) < 0$.

c) Répondre à la question posée.