Chapitre : Produit scalaire (1)

Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, on se placera dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

I. Rappels

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ deux points du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$
- On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$, noté $\|\vec{u}\|$, la ___________________du segment $[AB]$.

  On a donc $\|\vec{u}\| = AB$.
- Dans une base orthonormée on a :

  $\|\vec{u}\| =$____

  $AB =$____

II. Produit scalaire

1) Produit scalaire et angle

Définition 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.
Il existe trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle ___________________________ de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel, noté _____________ tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} =$$

Autrement dit : $\vec{u}.\vec{v} =$

Remarque 1 : $(\vec{u}\,, \vec{v})$ est un angle orienté de vecteurs.
Pour le visualiser, il faut ramener ces vecteurs à la même origine.
Remarque 2 : Cette expression du produit scalaire modélise le travail d'une force en physique.

Application 1 :

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ tel que : $AB = 3, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$

2. Calculer AB sachant que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

3. Calculer $\widehat{BAC}$ au degré près sachant que : $AB = 3, AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.

Exercice 1 : Produit scalaire avec normes et angle
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On note θ une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}.\vec{v}$:

a. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 7$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
b. $\|\vec{u}\| = 8, \|\vec{v}\| = 5$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 7$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$
d. $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$
e. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 10$ et $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2 : Produit scalaire avec normes et angle
On considère un triangle ABC.
Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

a. $AB = 5, AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 0$.
b. $AB = 10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$.
c. $AB = 3, AC = 9$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 : Produit scalaire avec normes et angle
On considère un triangle ABC.
Calculer AB sachant que :

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40, AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice 4 : Produit scalaire avec normes et angle
On considère un triangle ABC.
Dans chacun des cas suivants, calculer $\widehat{BAC}$ au centième de radian près.

a. $AB = 3, AC = 7$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$.
b. $AB = 4\ AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$.
c. $AB = 8, AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$.

Exercice 5 : Produit scalaire avec normes et angle

En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Sur un téléski, la perche exerce sur un skieur une force constante $\vec{F}$ d'intensité 400N lors d'un déplacement du point A au point B de longueur 100 m.

Une mesure de l'angle $(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$ est 30°.

Quel est le travail de la force $\vec{F}$ durant le déplacement $\overrightarrow{AB}$?

Propriété 1 :

Si l'un des vecteurs (ou les deux) est le vecteur nul, alors le produit scalaire est __________.

Attention ! La réciproque n'est pas généralement vraie.

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle __________________ du vecteur $\vec{u}$ le nombre réel :

$$\vec{u}^2 =$$

Preuve : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

Remarque : On a alors $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}^2 = \boldsymbol{AB}^2$

2) Propriétés

Définition 2 : Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ________________________ lorsque les droites (AB) et (CD) sont _________________________.

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété 3 :

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est _______________.

Preuve : Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ deux vecteurs.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan par définition.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors AB et AC sont non nuls.
  $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{BAC}$ est droit $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriétés 4 (symétrie et bilinéarité du produit scalaire) :

Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un réel alors :

1. $\vec{u}.\vec{v} =$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) =$
3. $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} =$
4. $k(\vec{u}.\vec{v}) =$

Application 2 :

Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 10$, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}$.

Exercice 6 : Propriété du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui vérifient :

$\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$.

Calculer les réels suivants :

a) $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{v}$ b) $(\vec{u} + 3\vec{v}).(2\vec{u} + \vec{v})$ c) $(\vec{u} + \vec{v})^2$

Exercice 7 : Propriété du produit scalaire

Soit ABC un triangle, I étant le milieu du côté $[BC]$.

On suppose que $BC = 8$ et $IA = 5$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Exercice 8 : Propriété du produit scalaire

Soit trois points A, B et C.

On suppose que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -4$.

Calculer la longueur du segment $[AB]$.

Exercice 9 : Propriété du produit scalaire

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6, AD = 7$ et $BD = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$, puis $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$.
2. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
3. Déterminer alors la longueur de la diagonale $[AC]$

3) Expression analytique

Propriété 5 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base **orthonormée.**

Le produit scalaire est le nombre réel $\vec{u}.\vec{v}=$___________________________.

Preuve : Soit une base orthonormée $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ du plan donc $\vec{\imath}^2=1, \vec{\jmath}^2=1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\vec{\jmath}.\vec{\imath}=0$.

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$.

Ainsi $\vec{u}.\vec{v}=(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})$

$=xx'\vec{\imath}^2+xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}^2$ (à l'aide des **propriétés 4**)

$=xx'+yy'$.

Remarque : On retrouve $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=x^2+y^2=\|\vec{u}\|^2$.

Propriété 6 : Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée.

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si ___________________________________.

Preuve : C'est une conséquence des propriétés 3 et 5.

Application 3 : Démonter que deux vecteurs sont orthogonaux.

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $A(-1;-1), B(3\,;5), C(2;1)$ et $D(-1\,;3)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 10 : Expression analytique du produit scalaire

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans chacun des cas :

1. Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}.\vec{u}, (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}$ et $\vec{v}^2$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ c. $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

2. Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ c. $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$

3. Déterminer le réel m de telle sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\-5\end{pmatrix}$ b. $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\m\end{pmatrix}$ c. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\m-3\end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2m\end{pmatrix}$

Exercice 11 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

1. $A(1\,;1), B(2\,;3), C(-2;1)$ et $D(2\,;\,-1)$
2. $A(-3\,;2), B(6\,;-1), C(3;4)$ et $D(1\,;\,-2)$

Exercice 12 : Expression analytique

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle EFG.

1. $E(8\,;4), F(4\,;-2)$, et $G(-2\,;\,2)$
2. $E(1\,;2), F(9\,;-2)$, et $G(13\,;\,6)$

Exercice 13 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(3\,;5), B(-3\,;7), C(-1;1)$ et $D(5\,;\,-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 14 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A\left(\frac{3}{2}\,;-2\right), B\left(-\frac{3}{2}\,;4\right), C(2;2)$ et $D(-2\,;\,0)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ACBD$.

Exercice 15 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $E(2\,;20), F(10\,;-5)$ et $G(27\,;\,28)$.

1. Montrer que le triangle FEG est rectangle en E.
2. Calculer les coordonnées du point H tel que $EFHG$ est un rectangle.

Exercice 16 : Expression analytique du produit scalaire

Soit les points $A(5\,;3)$ et $B(-3\,;\,1)$.

Déterminer les coordonnées du point C de sorte que C appartienne à l'axe des abscisses et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Application 4 : Soient $A(1\ ;\ \ 2)$, $B(3\ ;\ -4)$ et $C(1\ ;\ \ -1)$ trois points du plan.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. Calculer $\cos(\widehat{BAC})$
3. Donner une mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
4. Le triangle ABC est-il rectangle en A ? **Justifier.**

Exercice 17 : Produit scalaire avec normes et angle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On donne les points A, B et C.
Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

1. $A(4\,;1), B(-3\,;1)$ et $C(1\ ;\ 5)$.
2. $A(1\,;2), B(-1\,;2)$ et $C(3\ ;\ 2$

Exercice 18 : Produit scalaire avec normes et angle

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1\,;3), B(-3\,;2)$ et $C(-5\ ;\ -2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.
2. En déduire une valeur approchée en degré des mesures des angles du triangle ABC.

4) Vecteurs colinéaires

Propriété 7 : Soient A, B, C trois points distincts.

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$_______________ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont __________________________.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$_______________ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont __________________________.

Preuve :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens, alors $\widehat{BAC} = 0$ et $\cos(0) = 1$ ainsi :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(0) = AB \times AC$$
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraire, alors $\widehat{BAC} = 180$ et $\cos(180) = -1$ ainsi :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(180) = -AB \times AC$$

5) Produit scalaire et projection orthogonale

Définition 3 : Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est _________________________________ de la droite d et de la perpendiculaire à d passant par M.

Propriété 8 : Soient des points A, B, C et D avec A, B distincts. Soit C' et D' les projeté orthogonaux de C et D sur la droite (AB) alors :
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} =$$

Preuve :

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

En effet $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D} = \vec{0}$ car C' et D' sont les projeté orthogonaux de C et D sur la droite (AB).

Illustration :

Propriété 9 : Soient A, B, C trois point distincts. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$$

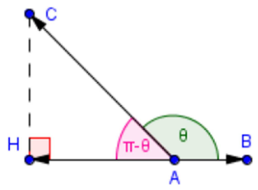
Preuve : C'est un cas particulier de la propriété précédente où A a pour projeté lui-même.

Conséquence 10 :

Soient A, B, C trois point distincts. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$______________ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont ________________________.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$______________ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont ________________________.

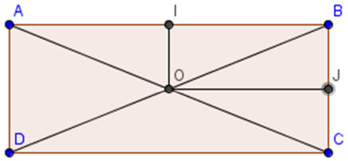
Illustation : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



Application 5 :

$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 5$ et $AD = 2$. Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$ e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$



Exercice 19 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle et H est le pied de la hauteur issue de A.

On suppose que $AB = 6, BH = 4$ et $HC = 5$. Calculer :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 20 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un carré de côté 5. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$

Exercice 21 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que : $AB = AD = 5$ et $DC = 7$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

Exercice 22 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle rectangle en B, avec $AB = 4$ et $BC = 6$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 23 : Produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle équilatéral de côté 5.

Soit les points I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB], [BC]$ et $[AC]$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

Exercice 24 : Produit scalaire et projeté orthogonal

$ABCD$ est un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$.

On note O le centre de ce losange.

1. Calculer :
   a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
   b) De la même façon, calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

6) Produit scalaire avec normes

Propriété 11 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} =$$

On trouve souvent cette formule de cette manière :

Application 6 : Calculer un produit scalaire à l'aide des normes.

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4, AD = 5$ et $AC = 7$. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ c) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$

Exercice 25 : Produit scalaire avec normes

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}.\vec{v}$, puis indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
   a. $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 7$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 12$.
   b. $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$.
2. Dans chacun des cas suivants, calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.
   a. $\|\vec{u}\| = 4, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.
   b. $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 8$ et $\vec{u}.\vec{v} = -5$.
3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\|\vec{u}\|$.
   a. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 10, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 6$.
   b. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 8, \|\vec{v}\| = 9$ et $\vec{u}.\vec{v} = -11$.

Exercice 26 : Produit scalaire avec normes

$ABCD$ est un parallélogramme tel que :
$AB = 5, AC = 9$ et $AD = 7$.

1. Calculer :
   a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$
2. a. Justifier l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
   b. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Exercice 27 : Produit scalaire avec normes

ABC est un triangle tel que :
$AB = 6, BC = 3$ et $AC = 4$.
Calculer :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

Exercice 28 : Produit scalaire avec normes

$ABCD$ est un losange tel que $AB = 10$ et $AC = 16$.

1. Calculer la longueur de la diagonale $[BD]$
2. Calculer :
   a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$ d) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$

Exercice 29 : Produit scalaire avec normes

$ABCD$ est un carré de côté 4.

1. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
2. Calculer :
   a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}$ e) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$

Application 7 : Choisir la forme la plus adapté.

Calculer dans chacun des cas le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

1. ABC est un triangle tel que $AB = 5, AC = 6$ et $BC = 10$.

2. ABC est un triangle tel que $AB = 3, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$

3. Les trois points A, B et C sont tel que $AB = 6, BC = 3$ et B appartient au segment $[AC]$.

4. $A(2\,;6), B(-1\,;7)$ et $C(5\,;3)$.

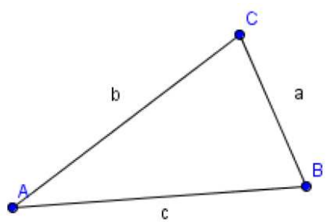
5. $ABCD$ est un losange dans lequel la diagonale $[AC]$ mesure 10 cm.

6. $ABCD$ est un rectangle dans lequel $AB = 6$.

7. $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 4.

8. ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 5$ et $\widehat{ABC} = 30°$.

III. Théorème d'AL-Kashi



Propriété 12 : Dans un triangle **quelconque** ABC, notons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Le théorème d'AL-Kashi nous donne :

- $a^2 =$
- $b^2 =$
- $c^2 =$

Remarque : Ce théorème généralise le théorème de Pythagore. Il permet de calculer la longueur d'un côté d'un triangle quelconque en fonction des deux autres et de l'angle opposé au côté.

Preuve :
$a^2 = BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$
D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
Ainsi :
$a^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$
$a^2 = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$
$a^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}^2$
$a^2 = \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}^2$
$a^2 = \overrightarrow{BA}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$
$a^2 = c^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|\cos(\hat{A}) + b^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$

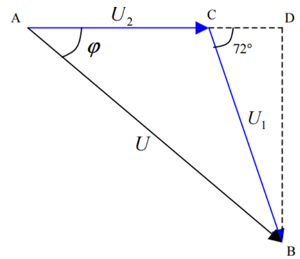
Application 8 : Calculer une longueur et un angle

Le triangle ABC est tel que $AB = 9$, $AC = 4$ et $\hat{A} = 60°$.

1. Calculer BC.
2. Calculer $\hat{C}$, en donner l'arrondi au degré près.

Exercice 30 : Electricité

Il est conseillé d'avoir un bon $\cos\varphi$, sur une installation électrique.

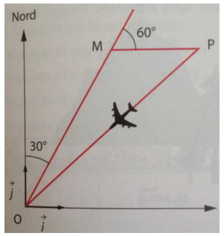


La figure est issue d'une situation rencontrée en électricité.
On donne :
$\|\overrightarrow{BC}\| = U_1 = 25$, $\|\overrightarrow{AC}\| = U_2 = 20$ et $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = -72°$.
Dans le triangle ABC, déterminer :

1. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $U = \|\overrightarrow{AB}\|$
2. La valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la mesure φ en degrés de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 31 : Parcours d'un avion (En mécanique)

Un avion se déplace dans un plan horizontal à partir d'un point O situé à la verticale de sa base.

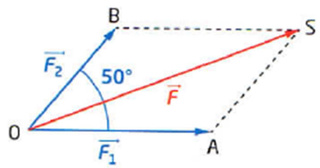


Il part en suivant une direction de 30° par rapport au nord, cap nord-est, parcourt 200 km et arrive en point M. Là il change de cap, suit la direction est, sur une distance de 100 km jusqu'au point P.

Quelle distance doit-il parcourir pour revenir au-dessus de sa base ?

Exercice 32 :

On souhaite calcule la somme de deux forces. Soit $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces s'exerçant sur un même point O d'intensités respectives $F_1 = 40N$ et $F_2 = 30N$ en formant un angle de 50° comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ces deux forces s'exerçant simultanément sur O peuvent être résumées par une seule force $\vec{F}$ appelée force résultante et obtenue par la relation :

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

On souhaite déterminer l'intensité et la direction de $\vec{F}$.
a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{OAS}$.
b) En déduire la valeur approchée à 0,01 près de la distance OS.
c) Calculer enfin l'angle $\widehat{AOS}$ à 0,1° près .
d) Conclure par rapport au problème posé.