Fiche méthode : Vecteurs et droite

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et d' une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.
1. $d \mathbin{/\!/} d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**
2. $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**

I. Vecteur directeur

Application 1 : Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(5\,;-6)$ et $B(2\,;-1)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-5\\-1+6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) par définition.

2. Parmi les vecteurs suivants lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite (AB) ?

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\3{,}3\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}=2\,\vec{u}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc le vecteur $\vec{u}$ est directeur de la droite (AB).
- $-3\times 8-5\times 0=-24-0=-24\neq 0$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc le vecteur $\vec{v}$ n'est pas directeur de la droite (AB).
- $\overrightarrow{AB}=-3\,\vec{w}$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc le vecteur $\vec{w}$ est directeur de la droite (AB).
- $-3\times 3{,}3-5\times(-2)=-9{,}9+10=0{,}1\neq 0$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires donc le vecteur $\vec{t}$ n'est pas directeur de la droite (AB).

Application 2 : Le point appartient-il à la droite ?

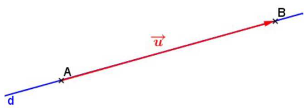
On considère la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par le point $A(-4;1)$.
Les points $B(1;-7)$ et $C(-1;-3{,}5)$ appartiennent-ils à d ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+4\\-7-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
$5\times(-3)-(-8)\times 2=-15+16=1\neq 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires ainsi $B\notin d$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1+4\\-3{,}5-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$
$3\times(-3)-(-4{,}5)\times 2=-9+9=0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ainsi $C\in d$.

Vecteur directeur :
Soit d une droite et A, B deux points distincts.
On appelle **vecteur directeur de d** tout vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ tel que les points A et B appartiennent à la droite d.

De plus :
Un vecteur est appelé **vecteur directeur d'une droite** lorsqu'il est **colinéaire** à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec A et B appartenant à la droite.



Vecteur directeur et équation réduite de droites :
Soit m et k deux réels.
1. Soit d la droite d'équation $y=mx+p$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
2. Soit d la droite horizontale d'équation $y=k$, le vecteur $\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
3. Soit d la droite verticale d'équation $x=k$, le vecteur $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Ensemble de points et droite :
Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et M un point du plan.
$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

II. Equation cartésienne de droite

Application 3 : Vecteurs directeurs
Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) dont on donne une équation.

$(d) : 5x+4y+1=0$	$(d) : x-3=0$
$\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$
$(d) : y=7x-5$	$(d) : -x+2y=0$
$\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}}$	$\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}}$

Equation cartésienne :
- Soient a, b, c des réels tels que $a\neq 0$ **ou** $b\neq 0$. Toute droite d du plan admet une équation de la forme $\boldsymbol{ax+by+c=0}$.
  Cette équation est appelée **équation cartésienne de d.**
- L'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant la relation $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ est une **droite.**
- Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de toute droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

Application 4 : Avec un point et vecteur directeur
On considère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

1ère méthode : (colinéarité)

$M(x\,;y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow 2(x-2)-(-1)(y+1)=0$
$\Leftrightarrow 2x-4+y+1=0$
$\Leftrightarrow 2x+y-3=0$

2ème méthode : $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) ainsi
(d) a pour équation : $2x+y+c=0$
$A(2\,;-1)\in(d)$ donc $2x_A+y_A+c=0$
$2\times 2-1+c=0$
$4-1+c=0$
$c=-3$

Conclusion :
(d) a pour équation : $2x+y-3=0$

Application 5 : Avec deux points
On considère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(2;-1)$ et $B(-25\,;30)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-25-2\\30+1\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-27\\31\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

1ère méthode : (colinéarité)

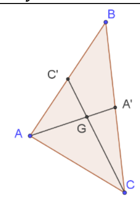
$M(x\,;y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-27\\31\end{pmatrix}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow 31(x-2)+27(y+1)=0$
$\Leftrightarrow 31x-62+27y+27=0$
$\Leftrightarrow 31x+27y-35=0$

2ème méthode : $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-27\\31\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) ainsi
(d) a pour équation : $31x+27y+c=0$
$A(2\,;-1)\in(d)$ donc $31x_A+27y_A+c=0$
$31\times 2-27+c=0$
$35+c=0$

Conclusion : (d) a pour équation : $31x+27y-35=0$

Application 6 : Equation de médianes
Soit les points $A(-1\,;1), B(3\,;7)$ et $C(4\,;-2)$.



1. Déterminer les coordonnées des points A' et C', milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$.

Calculons les coordonnées de A' milieu du segment $[BC]$. $A'\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$
Calculons les coordonnées de C' milieu du segment $[AB]$. $C'(1;4)$.

2. Déterminer une équation des médianes issues de A et de C dans le triangle ABC.

La médiane issue de A est donc la droite (AA').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}+1\\\frac{5}{2}-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$
On prendra donc $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (AA')
$M(x\,;y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
$\Leftrightarrow 3(x+1)-9(y-1)=0$
$\Leftrightarrow 3x+3-9y+9=0$
$\Leftrightarrow 3x-9y+12=0$

La médiane issue de C est donc la droite (CC').
Soit $M(x\,;y)$.
$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}1-4\\4+2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$
On prendra donc $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de (CC')
$M(x\,;y)\in(d) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y+2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
$\Leftrightarrow 2(x-4)-(-1)(y+2)=0$
$\Leftrightarrow 2x-8+y+2=0$
$\Leftrightarrow 2x+y-6=0$

3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

Le centre de gravité G du triangle ABC est le point d'intersection des médianes (deux suffisent).

1ère méthode : Par substitution

$\begin{cases}3x-9y+12=0\\2x+y-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-9(-2x+6)+12=0\\y=-2x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+18x-54+12=0\\y=-2x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}21x=42\\y=-2x+6\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}x=2\\y=-2\times 2+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. Ainsi $G(2\,;2)$.

2ème méthode : Par combinaison

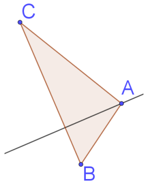
$\begin{cases}3x-9y+12=0\\2x+y-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-9y+12=0\\18x+9y-54=0\ (L2\leftarrow 9L2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-9y+12=0\\21x-42=0\ (L2\leftarrow L1+L2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-9y+12=0\\21x=42\end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases}3\times 2-9y+12=0\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9y=-18\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$. Ainsi $G(2\,;2)$.

III. Vecteur normal et équation cartésienne

Application 7 : Vecteur normal et hauteur

Soient $A(2\,;1), B(0;\,-2)$ et $C(-3\,;5)$ trois points dans un repère orthonormé.
Déterminer une équation de la hauteur du triangle ABC issue de A.

On note (h) la hauteur issue de A.
Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3-0\\5+2\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (h).



1$^{\text{ère}}$ méthode : Produit scalaire

$M(x\,;y)\in(h) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ sont orthogonaux

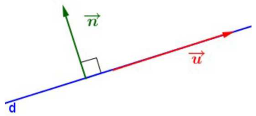
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$
$\Leftrightarrow -3(x-2)+7(y-1)=0$
$\Leftrightarrow -3x+6+7y-7=0$
$\Leftrightarrow -3x+7y-1=0$

2$^{\text{ème}}$ méthode : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (h) ainsi (h) a pour équation : $-3x+7y+c=0$
$A(2\,;1)\in(h)$ ainsi $-3x_A+7y_A+c=0$
$-3\times2+7\times1+c=0$
$-6+7+c=0$
$c=-1$

Conclusion : (h) a pour équation : $-3x+7y-1=0$

Vecteur normal :
Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un vecteur normal à la droite d est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.



Vecteur normal et équation cartésienne de droites :
Soit a, b et c des réels tels que $a\neq0$ ou $b\neq0$, soit d une droite et $\vec{n}$ un vecteur.
d a pour équation $ax+by+c=0 \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Ensemble de points et droite :
Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
Soit d la droite passant par A, de vecteur normal $\vec{n}$ et M un point du plan.
$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

Conclusion (vecteurs et droite) :
Soit a, b et c des réels tels que $a\neq0$ ou $b\neq0$.
Si la droite d a pour équation $ax+by+c=0$, elle a :

- Pour vecteur **normal** $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
- Pour vecteur **directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Application 8 : Equations de droite et vecteur normal

Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation :

a) $5x-3y+7=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

b) $y=-7x+3 \Leftrightarrow -7x-y+3=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$

c) $x=-5 \Leftrightarrow x+5=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

d) $y=2 \Leftrightarrow y-2=0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

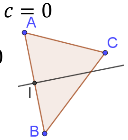
Application 9 : Médiatrices et vecteur normal

Soit $A(-1\,;2), B(0\,;\,-3)$ et $C(3\,;1)$.
Détermine une équation de la médiatrice de $[AB]$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la médiatrice du segment $[AB]$. On notera (d_1) une telle droite.
Ainsi $(d_1): x-5y+c=0$ convient.
Notons I le milieu de $[AB]$ ainsi $I(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2})$.
Or $I(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2})\in(d_1)$ ainsi $x_I-5y_I+c=0$

$-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+c=0$
$c=-2$

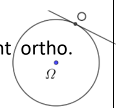
Donc $(d_1): x-5y-2=0$



Application 10 : Tangente à un cercle et vecteur normal

Soit le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,-2)$ et passant par l'origine O du repère.
Déterminer une équation de la tangente (T) à ce cercle passant par O, puis tracer le cercle et cette tangente.

La tangente en O est la droite passant par O et perpendiculaire au rayon $[O\Omega]$.
$\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la tangente en O. On notera (T) une telle droite.
$M(x\,;y)\in(T) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ sont ortho.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{O\Omega}=0$
$\Leftrightarrow x\times1+2y=0$
$\Leftrightarrow x+2y=0$



IV. Equation de cercle

Application 11 : Centre et rayon

Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon 3.

$M\in C(\Omega\,;3) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=9$
$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-4y+4-9=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-4y-4=0$

Application 12 : Avec deux points (diamètre)

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(4\,;5)$ et $B(-2\,;7)$.

Soit $M(x\,;y)$. Soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+2\\y-7\end{pmatrix}$
$M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$
$\Leftrightarrow (x-4)(x+2)+(y-5)(y-7)=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x-4x-8+y^2-7y-5y+35=0$
$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-12y+27$

Equation de cercle avec centre et rayon :
Soit C un cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon r.
Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$M\in C \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$

Equation de cercle avec deux points :
Soient A et B deux points du plan.
Soit C un cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan.

$$M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$$

Application 13 : Ensemble de point vérifiant une équation de cercle

Déterminer et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation :

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0$$

Objectif : Retrouver une équation du type : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$
$x^2-4x+y^2+6y-3=0$
$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-3=0$
$(x-2)^2+(y+3)^2-16=0$
$(x-2)^2+(y+3)^2=16$
$(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$

Méthode :
On doit reconnaitre le début d'une identité remarquable :

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Ainsi l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ est un cercle de centre $\Omega(2\,;\,-3)$ et de rayon 4.

Détails :
On cherche le début d'une identité remarquable :

- $\boldsymbol{x^2-4x}$ est le début de l'identité remarquable $(x-2)^2$
  $(x-2)^2=\boldsymbol{x^2-4x}+4$
  $\boldsymbol{x^2-4x}=(x-2)^2-4$

- $\boldsymbol{y^2+6y}$ est le début de l'identité remarquable $(y+3)^2$
  $(y+3)^2=\boldsymbol{y^2+6y+9}$
  $\boldsymbol{y^2+6y}=(y+3)^2-9$