Chapitre : Nombres

I. Ensemble de nombres

Définition 1 :

Les ______________________________________ sont les nombres $0, 1, 2, 3, \dots 100, etc$.

L'ensemble des ____________________________________ (ou **entiers positifs ou nuls**) est noté_____.

Exemple :

Définition 2 :

Les ________________________________ sont les nombres $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$.

L'ensemble des _____________________________________ est donc formé des entiers _________________________ **et** leurs _________________________, il est noté _____.

Remarque 1 : Tout entier naturel est donc un entier ______________________________.

Définition 3 : Soit p un entier relatif et n un entier naturel.

Les ______________________________ sont des nombres de la forme :

L'ensemble des ____ est noté ______.

Exemples : 2,28 est un nombre décimal car $2{,}28 = \frac{228}{100} = \frac{228}{10^2}$.

$\frac{2}{5}$ est un nombre décimal aussi car $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Mais :

Propriété 1 : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33333 \dots$ ____.

Remarque 2 :

On peut voir les nombres décimaux comme des nombres « ________________________ » avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

Remarque 3 : Un entier relatif est un nombre _________________________________.

Définition 4 : Soit p un entier relatif et q un entier naturel non nul.

Les ____ sont des nombres de la forme :

L'ensemble des ____ est noté __________.

Nous étudierons plus précisément ce chapitre dans le chapitre Arithmétique

Remarque 4 : Un nombre décimal est un nombre ______________________________.

Définition 5 : L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des nombres ____ que l'on note________________.

Remarque 5 : L'ensemble des nombres réels est l'ensemble des nombres que l'on utilise.

Remarque 6 : Un nombre rationnel est un nombre ______________________________.

Définition 6 :
Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit ___________________________________.

Exemple : π, $\sqrt{2}$, 3 … ne sont pas rationnels.

II. Symbole

- $\in$ se lit « appartient à », $\notin$ se lit « n'appartient pas à »,
- $\subset$ se lit « est inclus dans », $\not\subset$ se lit « n'est pas inclus dans ».
- $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de zéro. (et de même $\mathbb{N}^*$…)
- $\mathbb{R}_+$est l'ensemble des réels positifs (avec le zéro). $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des réels négatifs (avec le zéro). $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble des réels strictement négatifs.
- $\emptyset$ signifie « ensemble vide »

Application 1 : Compléter par $\in$ ou $\notin$.

$2 \dots\dots \mathbb{N}$; $-3 \dots\dots \mathbb{Z}$; $-3 \dots\dots \mathbb{N}$; $2{,}3 \dots\dots D$; $2{,}3 \dots\dots \mathbb{Z}$; $\pi \dots\dots \mathbb{R}_+^*$; $\pi \dots\dots \mathbb{Q}$;

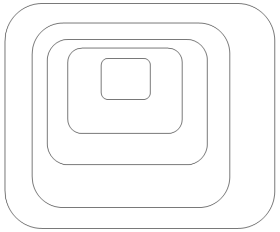
$\sqrt{2} \dots\dots \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \dots\dots \mathbb{R}$; $\frac{1}{2} \dots\dots \mathbb{Q}$; $\frac{5}{3} \dots\dots \mathbb{Z}$; $\frac{8}{4} \dots\dots \mathbb{Z}$; $-5 \dots\dots D$; $\frac{1}{7} \dots\dots D$.

Application 2 : Compléter par $\in$ ou $\notin$ puis donner la forme décimale si elle existe, ou une valeur approchée au centième près.

$\frac{1}{2}$ ..... $\mathbb{D}$	$\frac{3}{5}$ ..... $\mathbb{D}$..
$\frac{1}{3}$ ..... $\mathbb{D}$	$\frac{1}{8}$ ..... $\mathbb{D}$ ....
$\frac{1}{4}$ ..... $\mathbb{D}$	$\frac{2}{3}$ ..... $\mathbb{D}$ ....
$\frac{1}{5}$ ..... $\mathbb{D}$	$\frac{1}{6}$ ..... $\mathbb{D}$ ....

Propriété 2 :

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Remarque 7 : Ce n'est qu'une conséquence des remarques 1, 3, 4 et 6.

Exercice 1 : Compléter par $\in$ ou $\notin$:

a) $7 \;...\; \mathbb{Z}$ | b) $-12,4 \;...\; \mathbb{R}$ | c) $41 \;...\; \mathbb{D}$ | d) $0,145 \;...\; \mathbb{N}$

e) $\pi \;...\; \mathbb{Q}$ | f) $\sqrt{16} \;...\; \mathbb{Q}$ | g) $10^{45} \;...\; \mathbb{Z}$ | h) $-78 \;...\; \mathbb{Z}$

i) $\frac{1}{3} \;...\; \mathbb{D}$ | j) $4,789 \;...\; \mathbb{Q}$ | k) $-\frac{3}{2} \;...\; \mathbb{D}$ | l) $7\times10^{-3} \;...\; \mathbb{N}$

m) $\frac{\pi}{2} \;...\; \mathbb{R}$ | n) $\frac{12}{3} \;...\; \mathbb{D}$ | o) $10^{-5} \;...\; \mathbb{Z}$ | p) $\sqrt{51} \;...\; \mathbb{Q}$

Exercice 2 : Mettre une croix dans chaque case correspondant aux ensembles auxquels le nombre appartient.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
1,23					
$\frac{\sqrt{64}}{2}$					
0,003					
$\frac{4}{10}$					
$-2\sqrt{7}$					
$\frac{526}{7}$					

Exercice 3 :

1) Donner un entier relatif qui ne soit pas un entier naturel.
2) Donner un nombre décimal qui ne soit pas un entier relatif.
3) Donner un nombre rationnel qui ne soit pas un nombre décimal.
4) Donner un nombre réel qui ne soit pas un rationnel.

Exercice 4 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

a) L'opposé d'un entier naturel est un entier naturel.

b) L'opposé d'un entier relatif est un entier négatif.

c) L'inverse d'un entier non nul est un décimal.

d) L'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel.

e) La racine carrée d'un entier naturel est toujours irrationnelle.

III. Intervalle

Définition 7 : Sur une droite graduée, les ________________________________ sont les ________________ de $\mathbb{R}$ qui correspondent à un segment, à une demi-droite, ou à la droite toute entière.

Comparaison	Représentation	Traduction	Autrement dit :	Intervalle
		x est compris entre a et b	Tous les nombres sont entre a et b (que l'on prend)	
		x est compris entre a et b (exclu)	Tous les nombres sont entre a (que l'on prend) et b (exclu)	
		x est compris entre a (exclu) et b	Tous les nombres sont entre a (exclu) et b	
		x est compris entre a (exclu) et b (exclu)	Tous les nombres sont entre a (exclu) et b (exclu)	
		x est inférieur ou égal à b	Tous les nombres sont à gauche de b sur la droite.	
		x est strictement inférieur à b	Tous les nombres sont à gauche de b (exclu) sur la droite.	
		x est supérieur ou égal à a	Tous les nombres sont à droite de a sur la droite.	
		x est strictement supérieur à a	Tous les nombres sont à droite de a (exclu) sur la droite.	

Remarques 8 :

- Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ se lisent "moins l'infini" et "plus l'infini".
- Les nombres a et b sont appelées __________________________ de l'intervalle.
- Un crochet tourné vers l'extérieur est un crochet ________________________________, un crochet tourné vers l'intérieur est un crochet ________________________________.
- En $-\infty$ et $+\infty$, les crochets sont ______________________________________ ouverts.
- Pour les intervalles $[\,a\,;\,b\,]$, $]\,a\,;\,b\,[$, $[a\,;\,b\,[$ et $]\,a\,;\,b\,]$, l'amplitude (longueur) de l'intervalle est :

Définition 8 : L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à I _______ à J.
On le note :

Définition 9 : La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble des réels appartenant à I _________ à J.
On le note :

Application 3 : Déterminer des intervalles

Inégalité	Intervalles	Représentation sur une droite graduée
$x < -1$		
	$]3;\ +\infty[$	
		
$-\frac{1}{2} \leq x < 5$		
$x \leq -2$ ou $x > \frac{1}{5}$		

Exercice 5 :

Inégalité	Intervalles	Représentation sur une droite graduée
$-1 \leq x < 3$		
	$[7\,;12]$	
$0 < x < 4$		
	$]-1\,;\pi]$	
	$]-5\,;3[$	
$3{,}14 < x \leq \pi$		
	$[-100\,;50[$	
	$[4\,;\ +\infty[$	
$x > -7$		
$x \leq 5$		
$x \leq -5$ ou $x > 1$		

Exercice 6 : Compléter par $\in$ ou $\notin$

a) $2{,}5$ … $[\,2\,;\,+\infty\,[$
b) $5{,}1$ … $]\,-\infty\,;\,5\,]$
c) 3 … $]\,-\infty\,;\,3\,[$
d) π … $[\,0\,;\,4\,]$
e) $6{,}02$ … $[\,6\,;\ +\infty\,[$
f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ … $[\,1\,;\,3\,]$
g) 2 … $[\,2\,;\,4\,]$
h) $7{,}53$ … $[\,7{,}5\,;\,7{,}6\,\,[$
i) $\sqrt{2}$ … $[\,1\,;\,3\,]$
j) -5 … $]\,-\infty\,;\,-6\,]$
k) $1{,}2$ … $]\,-\infty;0\,[\,\cup\,[\,2\,;\,5\,]$
l) $\frac{1}{4}$ … $[\,1\,;\,4\,]$

Exercice 7 : Compléter le tableau suivant :

I	J	$I \cup J$	$I \cap J$
$[\,-4\,;\,3]$	$[\,1\,;\,5\,]$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$
$]\,-\infty\,;\,2\,[$	$[\,-4\,;\,+\infty\,[$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$
$]\,-\infty\,;\,3\,]$	$]\,-\infty\,;\,5\,[$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$
$[\sqrt{6}\,;\,+\infty\,[$	$[\,3\,;\,+\infty\,[$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$
$]\,-\infty\,;\,7\,]$	$[\,7\,;\,+\infty\,[$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$
$[\,-3\,;\,+\infty\,[$	$]\,-\infty\,;\,-3\,[$	**Représentation sur une droite :**	
		$I \cup J =$	$I \cap J =$

IV. Encadrement décimal et arrondi

Définition 10 : Un encadrement décimal d'un nombre x est une écriture $d_1 \leq x \leq d_2$ avec d_1 et d_2 des nombres décimaux.
L'amplitude de l'encadrement est la différence ________________________________.
L'encadrement est à 10^{-n} près (n étant un entier) si son amplitude est égale à 10^{-n}.

Autrement dit : il existe un nombre décimal d et un entier naturel n tel que :

$$d \leq x < d + 10^{-n}$$

Remarque 9 : **Pour arrondir** : dans la pratique : on regarde le n+1 ième chiffre.

- Si ce chiffre est inférieur ou égal à ______, on "arrondit ______________________".
- Si ce chiffre est supérieur ou égal à ______, on "arrondit ______________________".

Exemple : L'arrondi de $\frac{1}{3} \approx 0{,}333..$ à 10^{-2} près est $0{,}33$ et l'arrondi de $\frac{2}{3} \approx 0{,}6666..$ au millième est $0{,}667$.

Exercice 8 :
On prend le nombre $A = 915{,}457\,845\,631$
a) Donner la valeur arrondie de A au dixième.
b) Donner la valeur arrondie de A à 10^{-3} près.
c) Donner la valeur arrondie de A à l'unité.

Exercice 10 :
On prend le nombre $C = 123{,}456789$
a) Donner un encadrement de C au millième.
b) Donner un encadrement de C à l'unité.
c) Donner un encadrement de C à 10^{-2}.
d) Donner la valeur arrondie au dixième.
e) Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près .

Exercice 9 :
On prend le nombre $B = 4\,562{,}7814932$
a) Donner la valeur arrondie de B au millième.
b) Donner la valeur arrondie de B à 10^{-2} près.
c) Donner la valeur arrondie de B à 10^{-1} près.
d) Donner la valeur arrondie de B à la centaine près.

Exercice 11 :
On prend le nombre $D = 3{,}1415926535$
a) Donner un encadrement de D au centième
b) Donner un encadrement de D à l'unité.
c) Donner un encadrement de D à 10^{-4}.
d) Donner la valeur arrondie de D au centième.
e) Donner la valeur arrondie de D à 10^{-4} près .

V. Equations

1) Equation

Définition 11 :

- **Une équation** est une ______________________________ de deux expressions (appelées ____________________________) dans lesquelles figurent des lettres (appelées ____________________________).
- **Résoudre une équation d'inconnue x**, c'est trouver toutes les valeurs possibles que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vérifiée.

Application 4 :
Vérifier si $x = 4$ puis si $x = -3$ est solution de l'équation : $x^2 - 10 = 2x + 5$

Propriété 3 : Soient a, b et c des nombres, $c \neq 0$

- **On ne change pas une égalité** lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

Autrement dit : Si $a = b$ alors : et si $a = b$ alors :

- **On ne change pas une égalité** lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre non nul chacun de ses membres.

Autrement dit : Si $a = b$ alors : et si $a = b$ alors :

Définition 12 : **Une équation du 1^er^ degré à une inconnue** est une équation du type :
où a, b, c et d sont des nombres.

Application 5 : Résoudre les équations suivantes (en notant à la fin $S = $) :

a) $6x - 5 = 2$	b) $5x + 2 = 3x - 4$	c) $4x - 7 = 3(2x + 5)$

2) Equation produit

Propriété 4 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Application 6 : Résoudre les équations suivantes (en notant à la fin $S =$) :

a) $(3x-2)(-x+7)=0$	b) $(2-3x)(x-4)-(x-4)(5+2x)=0$

Exercice 12 : Résoudre les équations suivantes :

a) $2x + 4 = 9$

b) $3x - 5 = 6$

c) $\frac{5}{3} + 6x = 4x + 10$

d) $3x + 7 = x + 12$

e) $3 - \frac{2}{5}x = \frac{3}{2} + 5x$

f) $3(-2x + 1) = 5 - 2(x + 1)$

g) $3(2x + 1) = 2 + 2x$

h) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{2x-3}{2}$

i) $\frac{-2x+3}{4} + \frac{x-5}{2} = \frac{-3x+2}{2}$

j) $(-2x + 3)\left(\frac{5}{3} - 4x\right) = 0$

k) $-2x(-x - 3) = 0$

l) $\left(-5 + \frac{2}{3}x\right)(-4x + 1) = 0$

m) $(1 - x)(-2 - x) = 0$

n) $\frac{2x+3}{2} = 8$

o) $\frac{x+2}{3} = \frac{1-x}{4}$

VI. Inéquations

Propriété 5 : Soient *a*, *b* et *c* sont des nombres.

- **On ne change pas une inégalité** lorsqu'on ajoute ou on soustrait un même nombre à chacun de ses membres.

Autrement dit : Si $a \leq b$ alors : et si $a \leq b$ alors :

- **On ne change pas une inégalité** lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre **positif** non nul chacun de ses membres. On prend $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$

Autrement dit : Si $a \leq b$ alors : et si $a \leq b$ alors :

- **On change une inégalité** lorsqu'on multiplie ou on divise par un même nombre **négatif** non nul chacun de ses membres. On prend $\boldsymbol{c} < \mathbf{0}$

Autrement dit : Si $a \leq b$ alors : et si $a \leq b$ alors :

Application 7 : Résoudre les inéquations suivantes (en notant à la fin $S =$) :

a) $2x + 5 \geq 7$	b) $-4x + 8 > 6$	c) $-2x - 1 < 0$	d) $4x + 7 \leq 3(2x + 5)$

Exercice 13 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $-6x < -3$

b) $3x + 1 < 2$

c) $3x + 3 < 1 - 2x$

d) $2x > \frac{5}{2} - 3$

e) $2x + \frac{1}{2} \geq 4 + 5x$

f) $3(-2x + 1) < 5 - 2(x + 1)$

g) $-1 + 2x < 0$

h) $10x < 5x - 3$

i) $35x + 14 \leq 43x - 1$

j) $-3x > 0$

k) $3(2x - 1) > 5(x + 2)$

l) $-16x + 3 \geq -2x + 25$

m) $45 + 12x \geq 154$

n) $-5x + 6 \leq 2x + 8$

o) $2(x-1) > 2x + 5$

Exercice (supplémentaire) 14 : Résoudre, en donnant l'ensemble des solutions S = ...

a) $13x - 5 = 20x + 12$
b) $2x - 3 < 6x + 9$
c) $(3x + 1)(x - 2) = 0$
d) $(x - 2) - (2x + 3) = 0$
e) $3x + 5 > x - 4$
f) $x(2x + 8) = 0$
g) $\frac{1}{3}x + 2 = 5x - \frac{6}{5}$
h) $4x + 7 < 7x - 2$
i) $\frac{3}{2}x + 2 > \frac{5}{2}x - 7$
j) $3x + 2 > 1 + 3x$
k) $-5x - 12 > -10x + 3$
l) $2x + 3 = 2x - 1$
m) $3x - 1 < 5x - 4$
n) $\frac{2}{3}x + 1 > \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$
o) $2x + 3(x - 1) = 0$
p) $2x + 3 = (x + 2) + (x + 1)$
q) $3x - 1 < 3x + 3$
r) $(x - 1)(2x + 3)(4x - 2) = 0$
s) $3x - 5 = 12x + 4$
t) $-4x + 2 > x + 18$

VII. Problèmes

Exercice 15 :

Lisa s'est inscrite auprès d'un club nautique pour louer du matériel pendant un an afin de faire des sorties en rivière. L'inscription lui a coûté 22 € et la location d'un kayak lui revient à 2,80 € par heure. Lisa a un budget de 100 € sur l'année.

Quel nombre d'heures de kayak peut-elle prévoir ?

Exercice 16 :

Dans une boulangerie, Romain veut acheter autant de croissants que de pains au chocolat. Un croissant est vendu 1,10€ et un pain au chocolat 1,35 € . Avec 30€, combien Romain peut-il acheter de viennoiseries au total?

Exercice 17 :

Dans une salle de spectacles, chaque place à un spectacle coûte 40 €.
On peut aussi acheter pour 75 € une carte d'adhérent, valable un an, qui donne droit à une réduction de 40 % sur tous les spectacles.

A partir de combien de spectacles vus dans l'année est-il plus intéressant d'acheter une carte d'adhérent ?

Exercice 18 :

Pour entrer dans une école de théâtre, Thomas passe une épreuve écrite qui compte avec un coefficient 4 et une épreuve orale qui compte avec un coefficient 6.

Il a obtenu 7/20 à l'écrit. Il doit avoir une moyenne supérieure ou égale à 13/20 pour être admis.

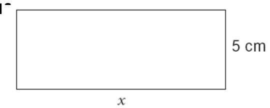
Thomas peut-il être admis ? Si oui, quelle note minimale doit-il obtenir à l'oral ?

Exercice 19 : Résoudre les problèmes suivants :

1) Trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme est 363.
2) Trouver un nombre, qui multiplié par 3, augmente de 100.
3) La jauge de la voiture de M. Dupont indique que le réservoir est à moitié plein.

   M. Dupont rajoute 15 litres d'essence, le réservoir est alors rempli au $\frac{3}{4}$ de son volume.

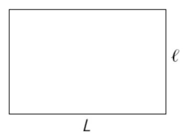
   Déterminer la contenance du réservoir.
4) Un père a 32 ans et son fils 4 ans.
   a) Quel âge auront-ils dans 6 ans ?
   b) Quel âge auront-ils dans x années ?
   c) Déterminer pendant combien d'années l'âge du père sera supérieur ou égal au triple de l'âge de son fils.
5) Je dépense le quart de mon salaire pour mon logement et les deux cinquièmes pour la nourriture. Il me reste 378 € pour les autres dépenses. Calculer mon salaire mensuel.
6) Pour acheter un lave-linge, Antoine dépense les $\frac{3}{5}$ de son revenu mensuel. Il utilise ensuite $\frac{1}{8}$ du reste pour payer sa note d'électricité. Il lui reste alors 560 euros.
   Quel est, en euros, le prix du lave-linge ?
7) Soit un carré de côté x .On transforme ce dernier en rectangle; de telle sorte qu'un côté fasse 4 cm de plus et l'autre côté 1 cm de moins que le côté du carré. On s'aperçoit que le périmètre du rectangle est le double du périmètre du carré. Quelle est la mesure du côté du carré ?
8) On considère le rectangle ci-dessous

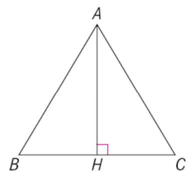


Déterminer la longueur x du rectangle sachant que son aire est égale à 42,5 cm².

9) On donne L = 10 cm et l = 7 cm.

ABC est un triangle isocèle en *A* tel que AH = 11,2 cm.
Calculer *BC* sachant que le triangle *ABC* et le rectangle ont la même aire.





10) ABCD est un carré de côté *x*.
EDC est un triangle isocèle en E tel que EH = 2 .
1. Exprimer l'aire A_1 du carré ABCD en fonction de *x*.
2. Exprimer l'aire A_2 du triangle EDC en fonction de *x*.
3. En déduire l'expression de l'aire A de la partie hachurée en fonction de *x*.
4. L'aire de la partie hachurée est égale à 2 cm².
   Quelle équation obtient-on ?
5. Développer, réduire et ordonner $(x - 2)(x + 1)$.
6. En déduire les solutions de l'équation de la question 4.
7. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire A de la partie hachurée est de 2 cm².