丘砖中的重要结论梳理

© 晨沐公[†]

[†] 成都市锦江区嘉祥外国语高级中学

临时笔记

bilibili: 晨沐公 Johnny github:MATHhahetaDEATH

2024 年 4 月 19 日

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则。

Johnny Tang

前言

愿大家爱上数学！

目录

Chapter 1

线性方程组与行列式

1.1 线性方程组解的情况

结论

定理 1.1 通过阶梯型矩阵判断解的情况

设 n 元线性方程组 $Ax = b$. 将其增广矩阵化为阶梯型矩阵: 若出现“$0 = d$”型方程则原方程组无解; 否则有解, 此时若阶梯型矩阵的非零行数目 r 等于 n 则有唯一解, 若 $r < n$ 则有无穷多解.

定理 1.2 通过系数矩阵与增广矩阵的秩判断解的情况

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 对应增广矩阵 $\tilde{A}$. 则其有解当且仅当 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A}$. 有解时, 若 $\operatorname{rank} A = n$ 则有唯一解, 若 $\operatorname{rank} A < n$ 则有无穷多解.

推论 1.3

设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$, 其有非零解 $\Leftrightarrow r < n \Leftrightarrow \operatorname{rank} A < n$. 进而, 若方程个数小于 n 则一定有非零解.

定理 1.4 用系数矩阵的行列式判断解的情况

设 n 元线性方程组 $Ax = b$. 当方程个数为 n 时, 其有唯一解当且仅当 $|A| \neq 0$.

推论 1.5

设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$. 当方程个数为 n 时, 其只有零解当且仅当 $|A| \neq 0$.

应用

例 1.1 (*p122, 例 3*) 证明: 线性方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩或者等于它的系数矩阵 A 的秩, 或者等于 $\operatorname{rank} A + 1$.

例 1.2 (*p123, 例 5*) 证明: 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

有解的充分必要条件是下列线性方程组无解:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ \cdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + \cdots + b_mx_m = 0. \end{cases}$$

1.2 线性方程组解集的结构

结论

计算齐次线性方程组的解集: 求出关于自由变量 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ 的解, 再令自由变量取遍 m 个线性无关的向量, 如 $(1, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 1)$. 由此得到线性无关的一组解 $\eta_1, \cdots, \eta_m$. 通过这种操作过程, 同时可以证明:

定理 1.6 秩—零化度定理

设 n 元其次线性方程组 $Ax = 0$, 其解空间记作 W, 则 $\dim W = n - \operatorname{rank} A$.

定理 1.7 非齐次线性方程组解集的结构

设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 及其导出组 $Ax = 0$, 两者的解集记为 U, W. γ_0 是 $Ax = b$ 的一个特解, 则

$$U = \{\gamma_0 + \eta : \eta \in W\}.$$

推论 1.8

若 $Ax = b$ 有解, 则该解唯一当且仅当 $Ax = 0$ 只有零解.

注. 从线性映射的角度看, 就是说 $Ax = b$ 的解唯一当且仅当 A 是单射.

利用行列式, 还可以得到某种意义上的通式:

定理 1.9　Cramer 法则

设 n 个方程的 n 元线性方程组 $Ax=b$, 并记将 A 的第 j 列换成 b 所得矩阵为 B_j. 当 $|A|\neq 0$ 时, 方程组的唯一解是

$$\begin{pmatrix}\frac{|B_1|}{|A|} & \cdots & \frac{|B_n|}{|A|}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

应用

例 1.3 (*p23, 补充题一,2*)　解下列线性方程组:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\cdots+(n-1)x_{n-1}+nx_n=b_1,\\ nx_1+x_2+2x_3+\cdots+(n-2)x_{n-1}+(n-1)x_n=b_2,\\ \cdots\\ 2x_1+3x_2+4x_3+\cdots+nx_{n-1}+x_n=b_n.\end{cases}$$

例 1.4 (*p23, 补充题一,3*)　解下列线性方程组:

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=1,\\ x_2+x_3+\cdots+x_{n+1}=2,\\ \cdots\\ x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}=n+1.\end{cases}$$

例 1.5 (*p128, 例 3*)　设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于 0, 并且 A 的 (k,ℓ) 元的代数余子式 $A_{k\ell}\neq 0$. 证明: $\begin{pmatrix}A_{k1} & \cdots & A_{kn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是该方程组的一个基础解系.

例 1.6 (*p129, 例 4*)　设 $n-1$ 个方程的 n 元齐次线性方程组 $Bx=0$. 将 B 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j, 令 $\eta=\begin{pmatrix}D_1 & -D_2 & \cdots & (-1)^{n-1}D_n\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. 若 $\eta\neq 0$, 则 η 是该方程组的一个基础解系.

例 1.7 (*p135, 例 2*)　设 γ_0 是 n 元线性方程组 $Ax=b$ 的特解, $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系, 令 $\gamma_i=\gamma_0+\eta_i, i=1,\cdots,t$. 证明, $Ax=b$ 的解集为 $\{c_0\gamma_0+c_1\gamma_1+\cdots+c_t\gamma_t : c_0+c_1+\cdots+c_t=1\}$.

1.3 行列式的计算

结论

行列式函数可以有不同的定义方式, 这里直接用完全展开式定义之: 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则

$$\det A=\sum_{j_1,\cdots,j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}.$$

命题 1.10 行列式的性质

设 A 是 n 阶方阵, 记 $A=\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_n\end{pmatrix}$.

1. $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$.
2. 倍乘变换: $\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & ku_i & \cdots & u_n\end{pmatrix}=k\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i & \cdots & u_n\end{pmatrix}$.
3. 倍加变换: $\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i & \cdots ku_i+u_j & \cdots & u_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i & \cdots u_j & \cdots & u_n\end{pmatrix}$.
4. 对换变换: $\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_j & \cdots & \cdots u_i & \cdots & u_n\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i & \cdots & \cdots u_j & \cdots & u_n\end{pmatrix}$.
5. 多线性: $\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i+u_i' & \cdots & u_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i & \cdots & u_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}u_1 & \cdots & u_i' & \cdots & u_n\end{pmatrix}$.
6. 两行成比例, 行列式的值为 0.

注. 作为推论, 初等行变换保持行列式的非零性.

在 n 阶方阵 A 中, 划去第 i 行和第 j 列所成的矩阵的行列式称为 (i,j) 元的余子式, 记作 M_{ij}. 令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 (i,j) 元的代数余子式.

定理 1.11 行列式按一行展开

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$, 则

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

注. 当 $i\neq j$ 时还有

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0.$$

进一步地, 考虑在 n 阶方阵 A 中选取第 $i_1,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,\cdots,j_k$ 列所成的 k 阶方阵的行列式, 称其为一个 k 阶子式, 记作 $A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}$. 令 $\{i_1',\cdots,i_{n-k}'\}=\{1,\cdots,n\}\setminus\{i_1,\cdots,i_n\}$, $\{j_1',\cdots,j_{n-k}'\}=$

$\{1,\cdots,n\}\setminus\{j_1,\cdots,j_n\}$, 则 $A\begin{pmatrix} i'_1,\cdots,i'_{n-k} \\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}$ 称为上述子式的余子式. 同样地, 令

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}A\begin{pmatrix} i'_1,\cdots,i'_{n-k} \\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}$$

为对应的代数余子式.

定理 1.12 行列式按 k 行展开, Laplace

设 n 阶方阵 A, 则

$$|A| = \sum_{1<j_1<\cdots<j_k\leq n} A\begin{pmatrix} i_1,\cdots,i_k \\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}A\begin{pmatrix} i'_1,\cdots,i'_{n-k} \\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}.$$

命题 1.13 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j).$$

应用

计算行列式的常见方法:

1. 用完全展开式计算, 适用于行列式内 0 较多的情况.
2. 做初等行变换.
3. 利用多线性拆成几个行列式的和.
4. 按行/列展开, 常用于归纳 (递推) 法.
5. 加边法.

例 1.8 (*p48, 例 9*) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$, J 表示元素均为 1 的 n 阶方阵. 则

$$|A+tJ| = |A| + t\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

例 1.9 (*p52, 例 13*) 计算下列 $n(\geq 2)$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

例 1.10 (*p54, 习题 2.4,7*) 计算下列 $n(\geq 2)$ 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & \cdots & x & y \\ z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}.$$

例 1.11 (*p55, 习题 2.4,10*) 计算下列 $n(\geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

例 1.12 (*p67, 例 2*) 设 $|A|$ 是关于 $1, \cdots, n$ 的 Vandermonde 行列式, 求:

$$A\begin{pmatrix} 1, \cdots, n-1 \\ 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n \end{pmatrix}.$$

Chapter 2

n 维向量空间 $\mathbb{F}^n$

Chapter 3

矩阵的运算

3.1 特殊矩阵

3.2 特殊矩阵的秩与行列式

Chapter 4

矩阵的相抵与相似

Chapter 5

二次型与矩阵的合同

Chapter 6

多项式环

Chapter 7

线性空间与线性映射

Chapter 8

带有度量的线性空间

Chapter 9

多重线性代数