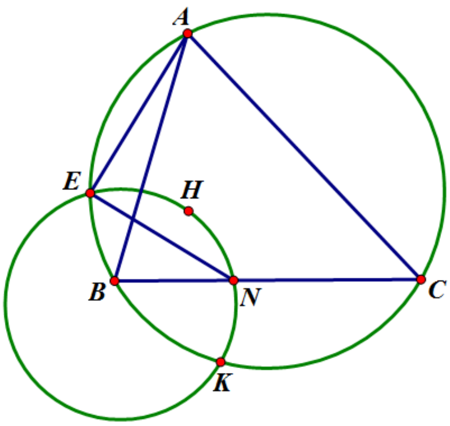
二试练习 2

1. *(szm 代数原创 3)* 求最大的实数 C, 使得对任意和不超过 $\sqrt{2}$ 的非负实数 $a_1,\cdots,a_{2022}$, 均有

$$\frac{1}{1+a_1^2}+\cdot+\frac{1}{1+a_{2022}^2}\geq\frac{1}{1+(a_1+\cdots+a_{2022})^2}+C.$$

2. *(szm 几何原创 6)* 如图, $\triangle ABC$ 的垂心是 H, 外接圆是 Ω. N,K 分别是边 BC 和 Ω 上的点, 满足 $NK=NH$ 且 A,H,K 不共线. 设 $\odot(HNK)$ 与 $\odot(ABC)$ 交于另一点 E, 求证: $AE\perp NE$.



3. *(szm 数论原创 9)* 求证: 对任意整数 C 和正整数 n, 存在正整数 x, y, z, 满足 $n \mid x^2 + y^3 + z^5 + C$.

4. *(szm 组合原创 7)* 设整数 $n \geq 2$. 平面上有 $2n$ 条直线, 任两条不平行, 任三条不交于一点, 此时每条直线被截为 $2n$ 段. 对于其中的每条直线, 甲可去掉其两两不相邻的 n 段 (即第 $1, 3, \cdots, 2n-1$ 段或第 $2, 4, \cdots, 2n$ 段), 剩下的部分将平面分成若干连通区域. 求连通区域个数的最小值.