晨沐公的数学竞赛习题集

ACGN doge(

© 晨沐公[†]

[†] 成都市锦江区嘉祥外国语高级中学

晨沐公的数学竞赛习题集

bilibili: 晨沐公 Johnny　github: MATHhahetaDEATH

2024 年 5 月 25 日

请：相信时间的力量，敬畏概率的准则。

JOHNNY TANG

前言

愿大家爱上数学！

目录

Chapter 1

代数 Algebra

问题 1.1 (APMO 2018) 设

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\cdots+\frac{1}{x-2018},\qquad g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}+\cdots+\frac{1}{x-2017}.$$

证明: $|f(x)-g(x)|>2$ 对任意 $x\notin\mathbb{Z}, 0<x<2018$ 成立.

问题 1.2 (APMO 2018) 求所有整系数多项式 $P(x)$, 使得对于任何实数 s,t, 若 $P(s)$ 和 $P(t)$ 均为整数, 则 $P(st)$ 也为整数.

问题 1.3 (EGMO 2018) 设

$$A=\left\{1+\frac{1}{k}:k=1,2,\cdots\right\}.$$

对任意正整数 $x\geq 2$, 记 $f(x)$ 为最少的将 x 写作 A 中数乘积需要的元素数 (计算重数). 证明: 存在无穷多对正整数 (x,y), $x\geq 2, y\geq 2$, 满足

$$f(xy)<f(x)+f(y).$$

问题 1.4 (EGMO 2018) (a) 求证: 对于任意实数 $0<t<1/2$, 均存在正整数 n 使得对于任意 n 元正整数集 S, 均存在不同的元素 $x,y\in S$ 和非负整数 m 满足

$$|x-my|\leq ty.$$

(b) 求问对实数 $0<t<1/2$, 是否存在无限正整数集 S 使得

$$|x-my|>ty$$

对任意不同的 $x,y\in S$ 和正整数 m 成立.

问题 1.5 (复仇赛 2018) 设 p 为给定素数, 记 $F=\mathbb{Z}/p$. 对 $x\in F$, 记 $|x|_p$ 为 x 到 0 的循环距离, 即若 y

为 x 在 0 到 $p-1$ 的代表元, 则

$$|x|_p = \begin{cases} y & \text{if } y < p/2, \\ p-y & \text{if } y \geq p/2. \end{cases}$$

定义 $f: F \to F$ 使得对任意 $x, y \in F$ 有

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)|_p < 100.$$

求证: 存在 $m \in F$, 使得对任意 $x \in F$ 均有

$$|f(x) - mx|_p < 1000.$$

问题 1.6 (IranMO 2018) $a > k$ 是两个正整数, $r_1 < \cdots < r_n, s_1 < \cdots < s_n$ 为两个正整数列, 满足:

$$(a^{r_1} + k) \cdots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k) \cdots (a^{s_n} + k).$$

求证这两个数列是相等的.

问题 1.7 (IranMO 2018) 求所有的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得对任意的实数 x, y, 均有:

$$f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3.$$

Chapter 2

组合 Combinatorics

问题 2.1 (EGMO 2018) n 只小青蛙 $C_1, \cdots, C_n$ 在一个池塘前按如下规则排队举行仪式: 首先, 青蛙长老决定最初的排队顺序. 之后每秒钟, 长老都选择一个正整数 $1 \leq i \leq n$. 假如 C_i 前面有至少 i 只小青蛙, 它献一秒给长老并向前移动 i 个位置; 假如 C_i 前面的小青蛙少于 i 只, 仪式结束, 所有小青蛙跳进池塘.

(a) 求证: 长老不能无限续秒. (b) 给定 n, 求长老最多能续多少秒.

注 *归纳; 类似题目: IMO2023-5.*

问题 2.2 (IranMO 2018) 平面上有 8 个点. 记它们组成的三角形面积分别为 $a_1, \cdots a_{56}$. 证明可以选取加减号 $\iota_i = \pm 1$ 使得

$$\iota_1 a_1 + \cdots + \iota_{56} a_{56} = 0.$$

问题 2.3 (IranMO 2018) 设 n 为正整数, 考察所有 2^n 个长为 n 的二进制字符串, 我们称两个字符串相邻, 如果它们恰有一位不同. 最开始 m 个字符串被标红, 之后你可以每秒钟选一个与两个标红了的字符串相邻的字符串, 将其标红. 求最小的 m, 使得你最终可以将全部字符串标红.

Chapter 3

几何 Geometry

Chapter 4

数论 Number Theory

问题 4.1 (复仇赛 2018) 设 $\{F_n\}_{n\geq 1}$ 为 Fibonacci 数列. 求所有的正整数 n 使得对任意 $k=0,\cdots,F_n$,

$$\binom{F_n}{k} \equiv (-1)^k \mod (F_n+1).$$

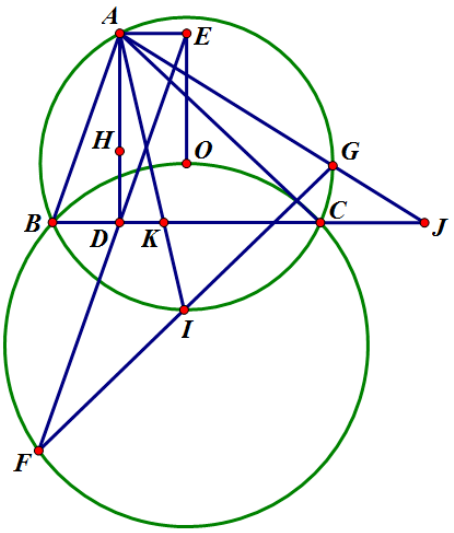
Chapter 5

二试专题

二试练习 1

1. *(szm 代数原创 1)* 设映射 $f:\{1,\cdots,100\}\to\{0,\cdots,99\}$, 满足对任意 $1\le n\le 100$ 均有 $f(n)<n$, 且 $\sum_{n=1}^{100}f(n)=2525$. 求最小的正整数 m, 使得必有 $f^m(100)=0$.

2. *(szm 几何原创 1)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, H 是垂心, O 是外心. AH 交 BC 于 D, 过 A 作 BC 的平行线, 与过 O 且垂直于 BC 的直线交于点 E. 延长 ED 交 $\odot(BOC)$ 于点 F, 过 F 作直线交 $\odot O$ 于点 G,I. 设 AG,AI 分别交 BC 于点 J,K, 求证: A,H,J,K 四点共圆.



3. *(szm 数论原创 6)* 设数列 $\{a_n\}$ 满足: (1) a_1 是完全平方数; (2) 对任意正整数 n, a_{n+1} 是使

$$2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \cdots + 2a_n + a_{n+1}$$

为完全平方数的最小正整数. 若存在正整数 s, 使得 $a_s = a_{s+1} = t$, 求 t 的最小可能值.

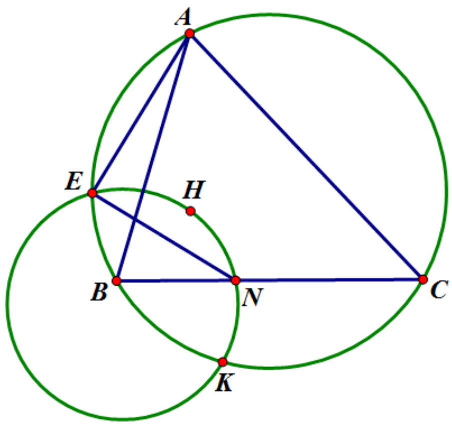
4. *(szm 组合原创 7)* 设 n, k 是给定的正整数. 在一个 $n \times n$ 的方格表中, 甲要从左下角格走到右上角格, 每次走入有公共边的格. 乙要将 k 个格挖坑, 可以是左下角格和右上角格. 问: 乙最多能保证甲踩几个坑?

二试练习 2

1. *(szm 代数原创 3)* 求最大的实数 C, 使得对任意和不超过 $\sqrt{2}$ 的非负实数 $a_1, \cdots, a_{2022}$, 均有

$$\frac{1}{1+a_1^2}+\cdot+\frac{1}{1+a_{2022}^2} \geq \frac{1}{1+(a_1+\cdots+a_{2022})^2}+C.$$

2. *(szm 几何原创 6)* 如图, $\triangle ABC$ 的垂心是 H, 外接圆是 Ω. N, K 分别是边 BC 和 Ω 上的点, 满足 $NK=NH$ 且 A, H, K 不共线. 设 $\odot(HNK)$ 与 $\odot(ABC)$ 交于另一点 E, 求证: $AE \perp NE$.

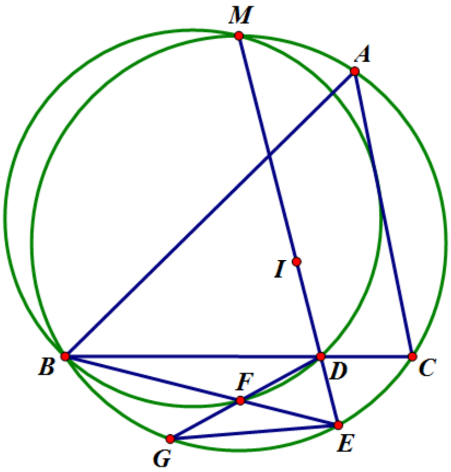


3. *(szm 数论原创 9)* 求证: 对任意整数 C 和正整数 n, 存在正整数 x, y, z, 满足 $n \mid x^2 + y^3 + z^5 + C$.

4. *(szm 组合原创 7)* 设整数 $n \geq 2$. 平面上有 $2n$ 条直线, 任两条不平行, 任三条不交于一点, 此时每条直线被截为 $2n$ 段. 对于其中的每条直线, 甲可去掉其两两不相邻的 n 段 (即第 $1, 3, \cdots, 2n-1$ 段或第 $2, 4, \cdots, 2n$ 段), 剩下的部分将平面分成若干连通区域. 求连通区域个数的最小值.

二试练习 3

1. *(szm 几何原创 4)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, I 是内心, M 是弧 BAC 的中点. 延长 MI 交 BC 于点 D, 交 $\odot(ABC)$ 于点 E. 设 $\odot(BMD)$ 交 BE 于 F, 延长 DF 交 $\odot(ABC)$ 于点 G. 求证: $EG = EI$.



2. *(szm 数论原创 2)* 设 p 是奇素数. 求证: 存在无穷多个素数 q, 使得对任意正整数 x, $q \nmid 2^x + x^2$ 且 $q \nmid p^x + x^2$.

3. *(szm 代数原创 4)* 给定正实数 k 和正整数 n. 对正实数 a,b,c, 令

$$f(a,b,c)=\min\left\{\frac{k}{a}+b,\frac{k}{b}+c,\frac{k}{c}+a\right\}.$$

设正实数 $a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+\cdots+a_n=1$, 求 $\sum_{i=1}^{n}f(a_i,a_{i+1},a_{i+2})$ 的最小值, 其中下标按模 n 理解.

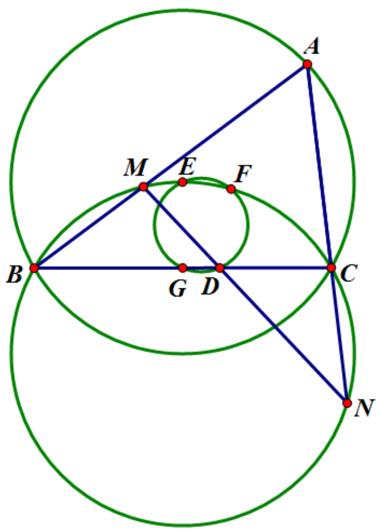
4. *(szm 组合原创 15)* 有 2022 个容量均为正整数 (不一定相同) 的水杯排成一圈, 顺时针编号为 $1,\cdots,2022$. 一开始 1 号水杯装满水, 其余水杯均为空杯. 一次操作定义为依次对 $i=1,\cdots,2022$, 把 i 号水杯里的水尽可能多地倒入 $i+1$ 号水杯, 使得不发生溢出 (有可能前一杯倒空后下一杯还不满), 这里编号是在模 2022 意义下的. 求证: 有限次操作后将得到一个状态, 这个状态在操作下是不变的.

二试练习 4

1. *(szm 代数原创 5)* 给定正整数 n. 求最小的正整数 k, 使得对任意和为 n 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$, 均有

$$n + \frac{k}{a_1 \cdots a_n} \geq k + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

2. *(szm 几何原创 8)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60°$, A-鸡爪圆交直线 AB, AC 于点 M, N, 直线 MN 交 BC 于点 D. 设弧 BMC 的中点为 E, 以 ED 为直径的圆交 BC 于点 G, 交鸡爪圆于点 F. 求证: A, F, G 三点共线.



3. *(szm 组合原创 5)* 有 $2n$ 张卡片, 上面写着 $1 \sim n$ 各两张. 将它们任意排成一行, 从中拿走 $1 \sim n$ 各一张, 剩余的卡片从左到右形成一个 $1 \sim n$ 的排列. 对不同的初始排列方式, 求所形成的排列个数的最大值.

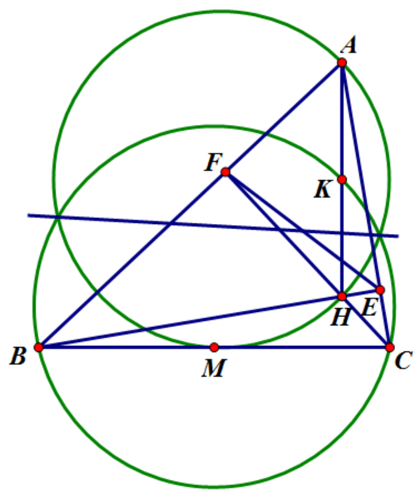
4. *(szm 数论原创 10)* 设整数 $k \geq 2$, 素数 p, q 满足 $p = kq + 1$. 求证: 存在正整数 m, 使得 $S(mp) \leq k + 1$. 这里 $S(n)$ 表示正整数 n 在十进制中的数码和.

二试练习 5

1. *(szm 代数原创 6)* 设正实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. 求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{1-x_i^n} \geq \frac{(1+n)^{1+1/n}}{n}.$$

2. *(szm 几何原创 13)* 如图, $\triangle ABC$ 的垂心为 H, BE, CF 是高, K, M 分别是 AH, BC 的中点. 求证: $\odot(AHM), \odot(BCK)$ 的根轴平分线段 EF.



3. *(szm 组合原创 20)* 平面上任给 n 条两两无公共点的线段. 每次操作可在两条不同的线段上各取一点并连线段, 然后擦掉所有与之相交的线段 (包括两点所在的两条线段). 问: 至少操作多少次能保证变为一条线段?

4. *(szm 数论原创 12)* 用 $\omega(n)$ 表示正整数 n 的不同素因子的个数, 其中 $\omega(1)=0$. 求证: 对任意正整数 a,b,

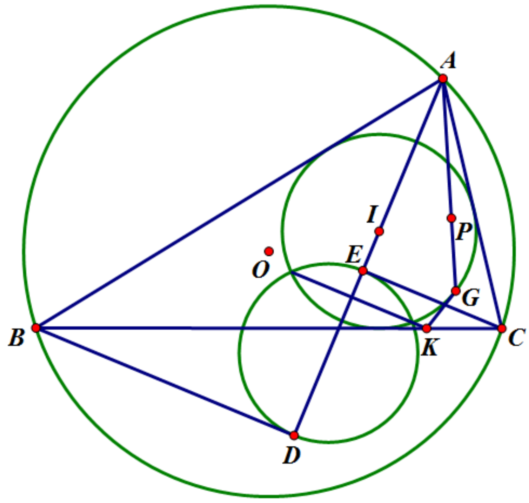
$$\sum_{i=a+1}^{a+b} 2^{\omega(i)} > \sum_{i=1}^{b} 2^{\omega(i)}.$$

二试练习 6

1. *(szm 数论原创 8)* 对正整数 $m < n$, 若存在正整数 m', n', 满足 $m < m' \leq n' < n$, 且 $mn = m'n'$, 则称 (m, n) 为可缩的. 求证: 对任意正整数 t, 存在正整数 $a_1 < \cdots < a_t$, 使得 $(a_1, a_2), \cdots, (a_{t-1}, a_t)$ 可缩, 而 (a_1, a_t) 不可缩.

2. *(szm 代数原创 8)* 给定正实数 n. 设和为 1 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$. 对 $1 \leq i \leq n$, 用 $f(i)$ 表示 $a_1, \cdots, a_i$ 中小于等于 a_i 的个数. 求最大的实数 c, 使得总有 $\sum_{i=1}^{n} a_{f(i)} \geq c$.

3. *(szm 几何原创 15)* 如图, $\odot O$ 和 $\odot I$ 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆, P 是两圆的外位似中心, 延长 AP 交 $\odot I$ 于点 G. 过 B,C 作 AI 的垂线, 垂足分别为 D,E, 设以 DE 为直径的圆与 $\odot I$ 的根轴为 ℓ. 求证: ℓ, BC, $\odot I$ 在 G 处的切线交于一点 K.



4. *(szm 组合原创 22 简化)* Jerry 和一些 Tom 在一个圆形花园 (即圆的内部或边界) 里玩抓人游戏. 若某一时刻至少一个 Tom 与 Jerry 在同一位置, 则认为 Jerry 被抓到. 已知 Tom 和 Jerry 的移动速度相同, 且它们互相都能看到对方的位置. 问: 至少需要几个 Tom 才能抓到 Jerry?

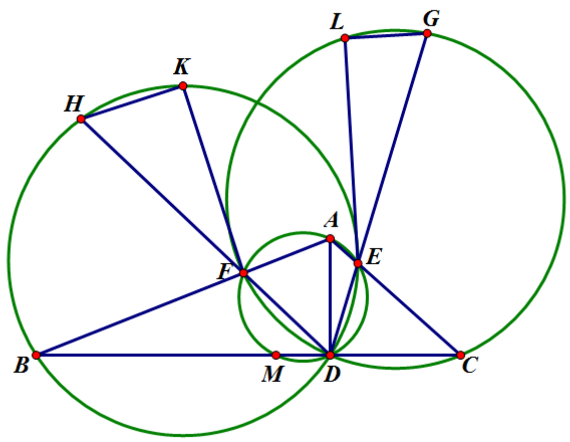
二试练习 6

1. *(szm 数论原创 13)* 对正整数 n, 记

$$\sigma_n := \prod_{p \text{ prime}} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}.$$

求证: $(n+1)! \mid \sigma_n$ 且 $\sigma_n \mid n![1,\cdots,n+1]$.

2. *(szm 几何原创 16)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, F,E,M 分别是 AB,AC,BC 上的点, 满足 E,A,F,M,D 五点共圆. 延长 DF,DE, 分别交 $\odot(BDE),\odot(CDF)$ 于点 H,G. K,L 分别是 $\odot(BDE),\odot(CDF)$ 上的点, 满足 $\angle HKF=\angle GLE=90°$. 求证: K,L,M,D 四点共圆.



3. *(szm 组合原创 14)* 设数列 $\{a_n\}$ 满足, 对任意正整数 i, 可重集 $A_i = \{a_1, \cdots, a_i\}$ 可从可重集 $B_i = \{a_{i+1}, \cdots, a_{2i+1}\}$ 中去掉一个元素得到. 对给定的正整数 k, 求最小的正整数 n_k, 使得 $a_1 \sim a_{n_k}$ 中可能有 k 个不同的值.

4. *(szm 代数原创 11)* 设 $y_1, \cdots, y_n$ 和 $\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_n}{y_n}$ 均为不减的正数数列, 满足 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. 求证:

$$\sum_{\varnothing \neq S \subseteq \{1,\cdots,n\}} \frac{\sum_{i \in S} x_i}{\sum_{i \in S} y_i} \leq 2^n - 1.$$

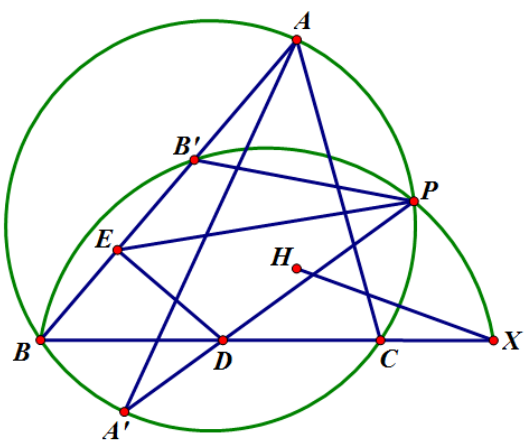
二试练习 7

1. *(szm 数论原创 21)* 设 p 是奇素数, a 是大于 1 的整数. 定义多项式

$$f_k(x)=\prod_{j=1}^{a-1}(xp^j-k), \qquad g(x)=x\prod_{k=1}^{p-1}f_k(x).$$

求证: $g(1),\cdots,g(p^a)$ 构成模 p^a 的一个完全剩余系.

2. *(szm 几何原创 17)* 如图, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, A' 是 A 的对径点. D 是 BC 上一点, E 是 D 在 AB 上的投影, B' 是 AB 上的点, 使得 $B'E=BE$. 延长 $A'D$ 交 $\odot(ABC)$ 于点 P, 延长 BC 与 $\odot(BB'P)$ 于点 X. 求证: $\angle HXC=\angle EPB'$.



3. *(szm 代数原创 13)* 设 n 是正整数, $a_1, \cdots a_{n^2}$ 为正实数, 满足 $a_1^2 + \cdots + a_{n^2}^2 = 1$. 求证:

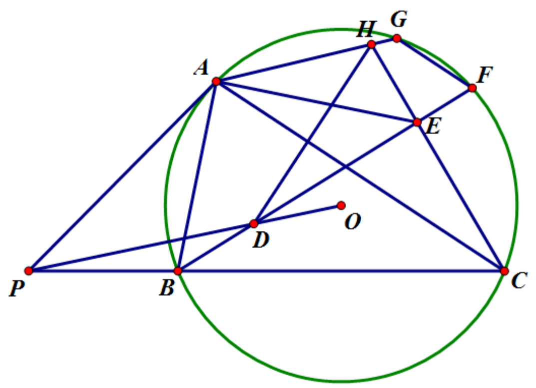
$$(n-1)^{n^2} a_1 \cdots a_{n^2} \le (1-a_1)\cdots(1-a_{n^2}).$$

4. *(szm 组合原创 23)* 一个形如半径为 1 的圆的"欢乐动物园"的圆心有一只"欢乐马", 在其边界上有 t 个管理员. 欢乐马可在平面上自由移动, 而管理员仅可在他们的初始位置的凸包的边界上移动, 并且所有人和动物的速度均不超过 1. 当欢乐马与管理员的位置重合时, 则视为管理员抓住欢乐马. 当欢乐马达到圆外时, 则视为它逃离欢乐动物园. 求 t 的最大值, 使得欢乐马可以在不被管理员抓住的情况下, 逃离欢乐动物园.

二试练习 8

1. *(szm 代数原创 14)* 设 $x_1,\cdots,x_{2022}$ 是和为 1 的非负实数, 满足 $\sum_{i=1}^{2022} x_ix_{i+1}=\frac{1}{2000}$, 其中 $x_{2023}=x_1$. 求证: 存在 $i,j\in\{1,\cdots,2022\}$, 使得 $|x_i-x_j|>10^{-5}$.

2. *(szm 几何原创 18)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB<AC$, $\odot O$ 是外接圆. $\odot O$ 在 A 处的切线与直线 BC 交于点 P, D 是 PO 上的一点使得 $BD=OD$. 延长 BD 交 $\odot O$ 于点 F, 过 F 作 AC 的平行线交 $\odot O$ 于点 G, 过 A 作 AB 的垂线交 BF 于点 E, 延长 CE 交 AG 于点 H. 求证: $DH\perp AC$.



3. *(szm 数论原创 19)* 设 K 和 $a_1 < \cdots < a_{n+1}$ 是正整数. 若对任意 $1 \le i \le n$, 都有 $K \equiv a_i \mod a_{i+1}$, 求证: $K > \frac{n^2}{4}$.

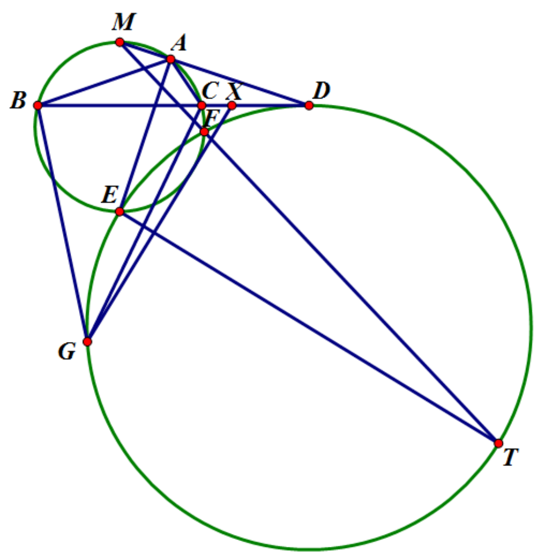
4. *(szm 组合原创 24)* K 岛是一个面积为 520 的没有湖泊的小岛, 它的海岸线是一个简单 1000 边形. 小林在岛上的某处种下一朵盛开的蒲公英, 它的无数种子向四面八方沿直线传播, 并有可能在任何时刻落在地面上, 但所有种子至多只能飞越一道海湾. 不久后, 岛上所有种子萌发. 试问小林是否一定能保证此时岛上有面积不小于 π 的蒲公英花海?

二试练习 9

1. *(szm 代数原创 22)* 给定正整数 n. 设正实数 $a_1, \cdots, a_n$ 满足 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n$. 求最大的实数 λ, 使得恒有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq n\left(n-\lambda\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}\right)^2.$$

2. *(szm 几何原创 19)* 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, M 是弧 BAC 的中点. 延长 MA, BC 交于点 D. 过 D 且与 BC 相切的圆 Γ 交 $\odot(ABC)$ 于弧 BC 上的两点 E, F, 延长 MF 交 Γ 于点 T. G 是 Γ 上一点, 满足 $\angle BGC = \angle CAD$, 过 G 作 ET 的垂线交 BD 于点 X. 求证: 若 $\angle EAB + \angle CAD = 90°$, 则 XG 与 $\odot(ABC)$ 相切.



3. *(szm 数论原创 29)* 求所有的正整数 n, 满足

$$\lfloor\sqrt{2}n\rfloor^2+4\lfloor\sqrt{2}n\rfloor=2n^2+4n.$$

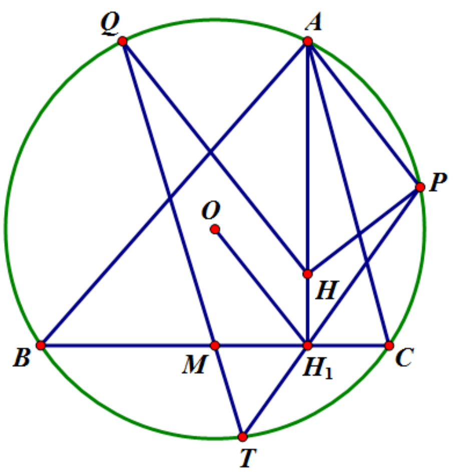
4. *(szm 组合原创 25)* 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排列. 对 $1\le i\le n$, 设以 a_i 为首项的最长递增子列的长度为 x_i, 最长递减子列的长度为 y_i. 求正整数 k 的最大可能值, 使得存在 k 个正整数 $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, 满足 $x_{i_1}>\cdots>x_{i_k}$ 且 $y_{i_1}>\cdots>y_{i_k}$.

二试练习 10

1. *(szm 代数原创 23)* 给定正整数 $n \geq 2$. 求最小的实数 λ, 使得对任意和为 1 的正实数 $a_1, \cdots, a_n$, 都有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 + \lambda a_{k+1}}{\sum_{j \neq k} a_j} \geq \frac{n+1}{n-1}.$$

2. *(szm 几何原创 20)* 如图, $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O, H. 设 AH 与 BC 交于点 H_1, 以 AH 为直径的圆与 $\odot O$ 的另一个交点为 P, 延长 PH_1 交 $\odot O$ 于点 T. 过 H 作 OH_1 的平行线与弧 BAC 交于点 Q. 求证: QT 过 BC 中点 M.



3. *(szm 数论原创 36)* 求所有的正整数 t, 使得对无穷个正整数 n, 存在正整数 $a_{ij}(1\le i,j\le n)$, 满足

$$(a_{11},\cdots,a_{1n}),\cdots,(a_{t1},\cdots,a_{tn}),(a_{11}\cdots a_{t1},\cdots,a_{1n}\cdots a_{tn})$$

均为模 n 的完全剩余系.

4. *(szm 组合原创 37)* 给定整数 $x\ge 2$. MO 星球的“世界杯”小组赛如下进行: 每个小组有 $2x$ 个国家的球队, 采用单循环赛制, 每支球队赢一场积 3 分, 平一场积 1 分, 输一场积 0 分. 最终总积分排名前 x 位的球队晋级, 其余球队淘汰, 如果有平分出现, 则根据净胜球等其他指标决出优胜者. 设此规则下淘汰球队的最高可能积分为 $M(x)$, 晋级球队的最低可能积分为 $m(x)$. 求 $M(x)$ 和 $m(x)$.

数学竞赛唐题 (欣赏题) 集

1. 设 $ABCDEF$ 为非凸的, 不自交的六边形, 对边都不平行. 其内角满足 $\angle A = 3\angle D, \angle E = 3\angle B, \angle C = 3\angle F$. 求证: 若 $|AB| = |DE|, |BC| = |EF|, |CD| = |FA|$, 则 AD, BE, CF 三线共点.

2. 设 A 是一个 225 元集合, $A_1, \cdots, A_{11}$ 是 A 的 11 个 45 元子集, 满足对任意 $1 \leq i < j \leq 11, |A_i \cap A_j| = 9$. 求证: $|A_1 \cup \cdots \cup A_{11}| \geq 165$.

3. 设整数 $n \geq 2$. 实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足

$$x_1 + \cdots + x_n = 0, \qquad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

对于 $\{1, \cdots, n\}$ 的子集 A, 定义 $S_A = \sum\limits_{i \in A} x_i$. 求证: 对于任意正数 λ, 满足 $S_A \geq \lambda$ 的集合 A 的个数不超过 $\dfrac{2^{n-3}}{\lambda^2}$, 并给出取等情况.