

数学竞赛唐题 (欣赏题) 集

1. 设 $ABCDEF$ 为非凸的, 不自交的六边形, 对边都不平行. 其内角满足 $\angle A = 3\angle D, \angle E = 3\angle B, \angle C = 3\angle F$. 求证: 若 $|AB| = |DE|, |BC| = |EF|, |CD| = |FA|$, 则 AD, BE, CF 三线共点.

2. 设 A 是一个 225 元集合, A_1, \dots, A_{11} 是 A 的 11 个 45 元子集, 满足对任意 $1 \leq i < j \leq 11$, $|A_i \cap A_j| = 9$. 求证: $|A_1 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$.

3. 设整数 $n \geq 2$. 实数 x_1, \dots, x_n 满足

$$x_1 + \dots + x_n = 0, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

对于 $\{1, \dots, n\}$ 的子集 A , 定义 $S_A = \sum_{i \in A} x_i$. 求证: 对于任意正数 λ , 满足 $S_A \geq \lambda$ 的集合 A 的个数不超过 $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$, 并给出取等情况.