第 9 次课 随机数和简单的游戏

Python 科学计算

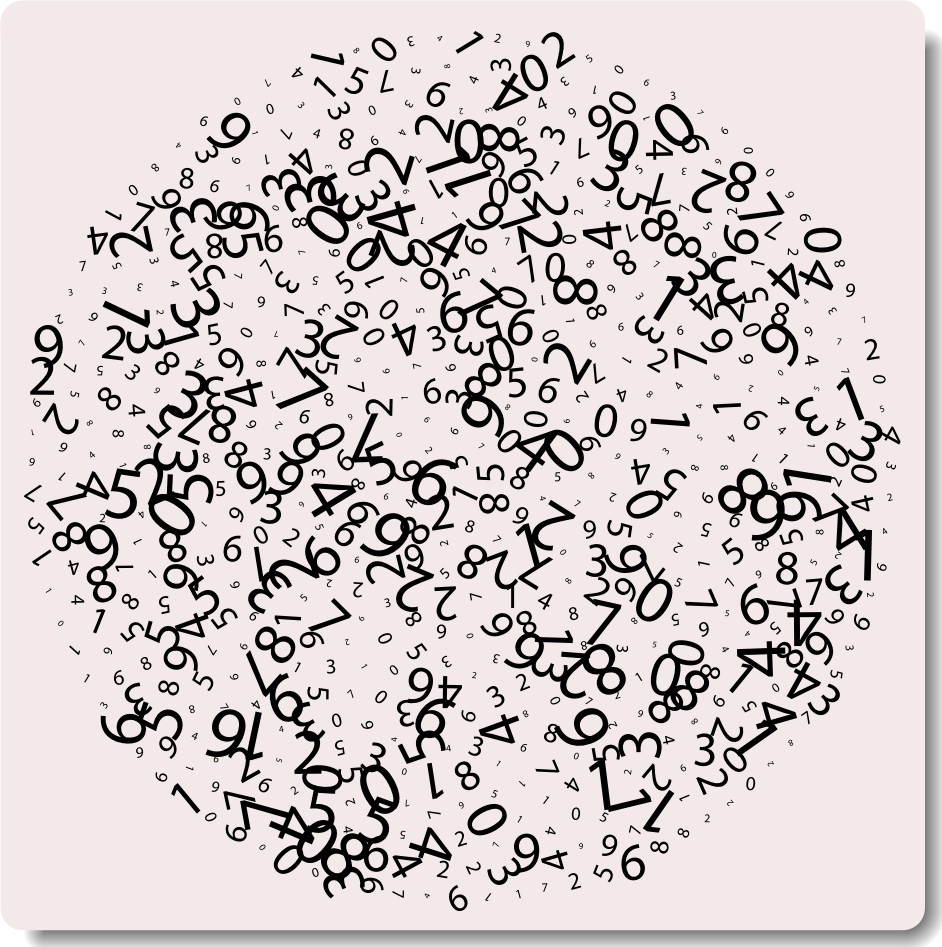
周吕文

宁波大学，机械工程与力学学院

2024 年 9 月 1 日

提要

在程序中使用随机数



随机数可以模拟不确定事件

确定问题

- 通过一些确定的数值计算出准确结果的科学和技术问题
- 例如：小球上抛 $y(t) = v_0 t - gt^2/2$

随机问题

- 不确定的问题
- 如：掷色子，分子运动，游戏
- 使用随机数可以模拟这些问题

随机数分布

random 模块可以获得随机数（均匀分布、正态分布）

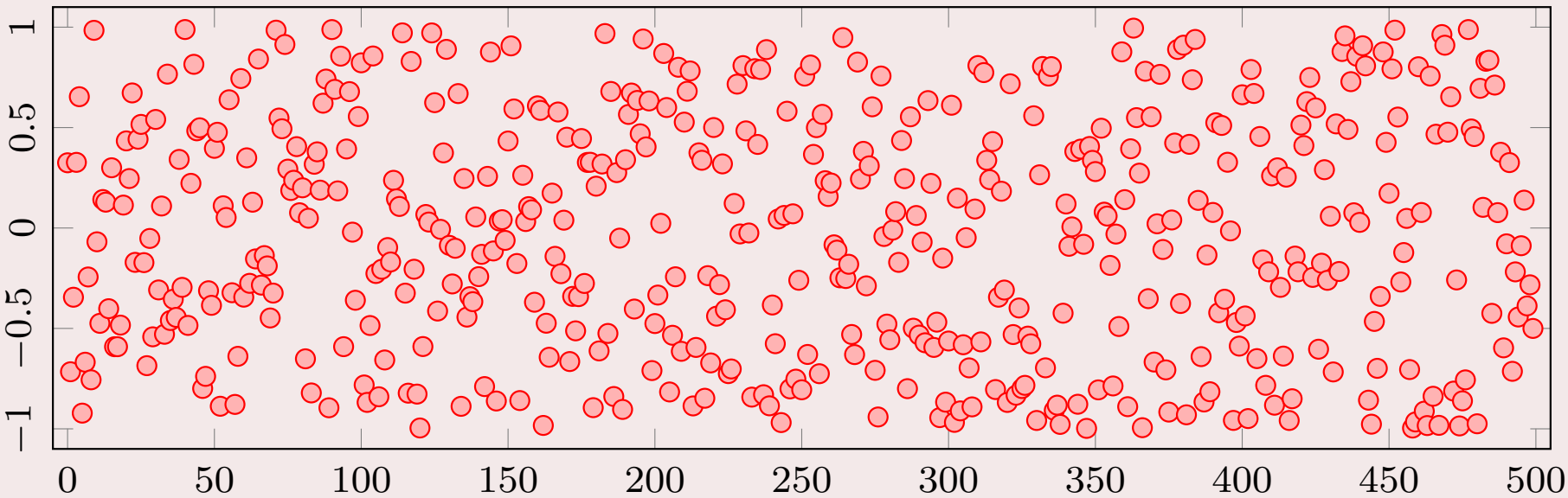
```
>>> import random
>>> random.random()          # 获得 [0, 1) 区间均匀分布的随机数
0.7012885673945388
>>> random.random()
0.03444694379715318 4
>>> random.uniform(2, 5) # 获得 [2, 5) 区间均匀分布的随机数
2.4616289166648477
>>> random.uniform(2, 5)
3.8680377395136274
>>> m, s = 0, 1              # 均值为 m, 标准差 s 正态分布随机数
>>> random.gauss(m, s)       # 等价于 random.normalvariate(m, s)
0.3086669907470012
```

- 这些随机数其实是由一个确定的算法生成的，看起来随机而已
- 服从某种分布是指：生成大量的随机数后这些数服从该种分布

随机数分布可视化

uniform_numbers.py

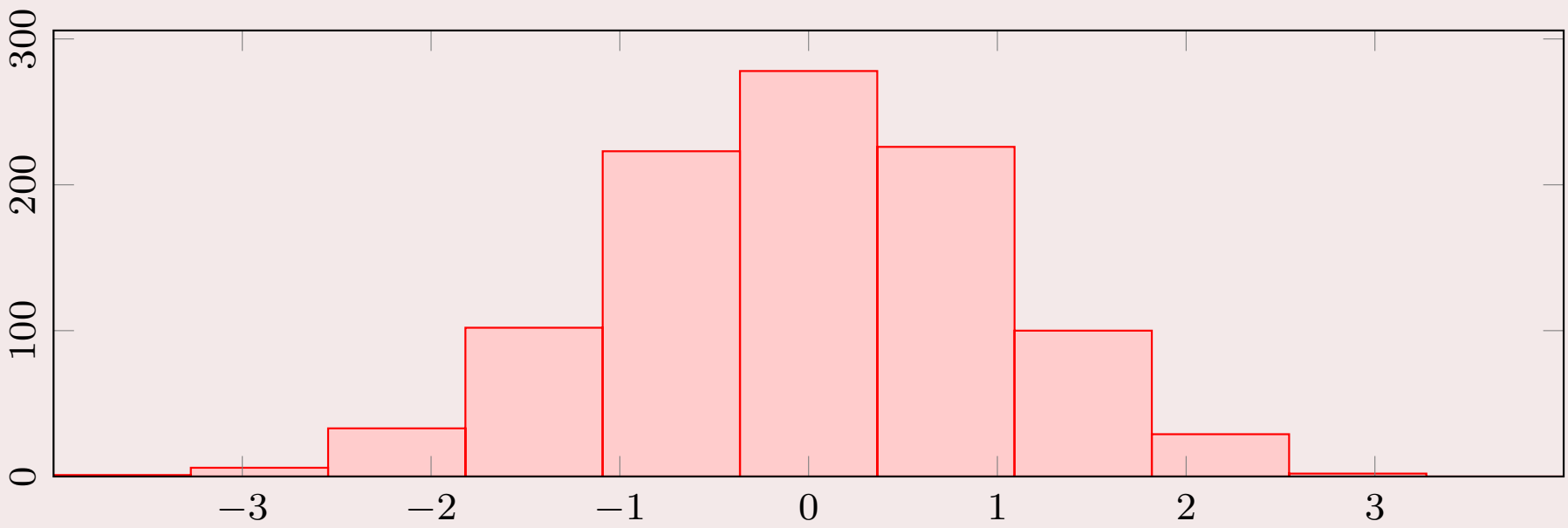
```
import random, matplotlib.pyplot as plt
N = 500
r = [random.uniform(-1,1) for i in range(N)]
plt.plot(r, 'o')
plt.show()
```



随机数分布可视化

normal_numbers.py

```
import random, matplotlib.pyplot as plt
m, s, N = 0, 1, 1000
r = [random.gauss(m, s) for i in range(N)]
plt.hist(r)
plt.show()
```



随机数函数

- random 中的 random() 和 gauss() 一次生成一个随机数
- numpy 中也有一个 random 模块，可以一次生成多个随机数

```
>>> from numpy import random
>>> random.random()
0.4845156613411209

>>> random.random(size=4)
array([0.98507347, 0.56008434, 0.90742439, 0.2216079 ])

>>> random.uniform(2, 3, size=4)
array([2.40962721, 2.10016106, 2.4390706 , 2.95800693])

>>> random.normal(0, 1, size=4)
array([ 0.17118656, -0.68495013,  0.13896593,  0.15998356])
```

整数随机数

- 有时候我们需要 $[a, b]$ 之间的整数随机数，而不是实数
- random 和 numpy 都提供了整数随机数函数

```
>>> import random
>>> r = random.randint(1,100)          # [1, 100]
>>> r
70

>>> import numpy as np
>>> r = np.random.randint(1,100,10) # [1, 100)
>>> r
array([37, 74, 36, 97, 94,  5, 40, 28, 27, 76])
```

例子：掷色子-出现 6 的概率是多少？

标量版本 roll_die.py

```
import random
def six_eyes(N):        # 掷 N 次色子，计算出现 6 的概率
    M = 0
    for i in range(N):
        outcome = random.randint(1, 6)
        if outcome == 6:
            M += 1
    return M/N
```

```
>>> N = 10000
>>> six_eyes(N)
0.1735
>>> six_eyes(N)
0.1695
```

例子：掷色子-出现 6 的概率是多少？

向量版本 roll_die.py

```python
import numpy as np
def six_eyes_vec(N): # 掷 N 次色子，计算出现 6 的概率
    eyes = np.random.randint(1, 7, N)
    success = eyes == 6
    M = np.sum(success)
    return M/N
```

```
>>> N = 10000
>>> six_eyes_vec(N)
0.1706
>>> six_eyes_vec(N)
0.1612
```

- 使用数组比较和 numpy 中的数组求和比内置的 random 函数更高效

随机数程序的调试

- 随机数程序的调试困难，因为每次执行会生成不同的数据序列
- 可以设置随机种子，使随机数的生成序列固定 random.seed(整数)
- 缺省情况下，系统以当前时间作为种子

```
>>> import random
>>> random.seed(2)
>>> [eval('%.2f' % random.random()) for i in range(8)]
[0.96, 0.95, 0.06, 0.08, 0.84, 0.74, 0.67, 0.31]
>>> [eval('%.2f' % random.random()) for i in range(8)]
[0.61, 0.61, 0.58, 0.16, 0.43, 0.39, 0.72, 0.99]

>>> random.seed(2)
>>> [eval('%.2f' % random.random()) for i in range(8)]
[0.96, 0.95, 0.06, 0.08, 0.84, 0.74, 0.67, 0.31]
>>> [eval('%.2f' % random.random()) for i in range(8)]
[0.61, 0.61, 0.58, 0.16, 0.43, 0.39, 0.72, 0.99]
```

从列表中随机取出元素

方法 1：使用 choice 方法

```
>>> awards = ['car', 'computer', 'ball', 'pen']
>>> import random
>>> random.choice(awards)
'ball'
```

方法 2：生成随机序号

```
>>> index = random.randint(0, len(awards)-1)
>>> awards[index]
'pen'
```

方法 3：洗牌

```
>>> random.shuffle(awards)
>>> awards[0]
'computer'
```

例子：扑克牌 - 洗牌、拿牌

cards.py

```
import random
def make_deck():
    ranks = ['A', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
             '8', '9', '0', 'J', 'Q', 'K'] # 0表示10
    suits = ['梅','方','红','黑']
    deck = [s+r for s in suits for r in ranks]
    random.shuffle(deck)
    return deck
```

```
>>> deck = make_deck()
>>> deck[:6]
['梅7', '梅A', '黑2', '梅4', '梅0', '黑9']
>>> card = deck.pop(0) # 等价于 card = deck[0]; del deck[0]
>>> card
'梅7'
```

例子：扑克牌 - 拿一手牌

cards.py

```
def deal_hand(n, deck):
    hand = [deck[i] for i in range(n)]
    del deck[:n]
    return hand, deck
```

```
>>> deck = make_deck()
>>> deck[:6]
['梅Q', '黑9', '梅6', '方2', '红J', '梅0']
>>> hand, deck = deal_hand(4, deck)
>>> hand
['梅Q', '黑9', '梅6', '方2']
>>> deck[:6]
['红J', '梅0', '梅3', '方9', '红3', '黑8']
```

例子：扑克牌 - 发牌

cards.py

```
def deal(cards_per_hand, no_of_players):
    deck = make_deck()
    hands = []
    for i in range(no_of_players):
        hand, deck = deal_hand(cards_per_hand, deck)
        hands.append(hand)
    return hands
```

```
>>> players = deal(5, 4)
>>> from pprint import pprint
>>> pprint(players)
[['方2', '方Q', '黑5', '黑Q', '梅8'],
 ['方9', '方5', '方8', '梅J', '红Q'],
 ['黑K', '方A', '黑9', '梅A', '黑A'],
 ['方7', '红0', '梅9', '方0', '红3']]
```

例子：扑克牌 - 分析相同牌面

cards.py

```
def same_rank(hand, n_of_a_kind):
    # 给定一手牌，返回具有指定张数相同牌面的数量
    ranks = [card[1] for card in hand]
    counter = 0
    for rank in set(ranks):
        if ranks.count(rank) == n_of_a_kind:
            counter += 1
    return counter
```

```
>>> players[0]
['方2', '方Q', '黑5', '黑Q', '梅8']
>>> same_rank(players[0], 2)
1
```

例子：扑克牌 - 分析相同花色

cards.py

```
def same_suit(hand):
    # 给定一手牌，返回手牌中每种花色的牌的数量
    suits = [card[0] for card in hand]
    counter = {}        # counter[suit] 存放 suit 花色的数量
    for suit in suits:
        count = suits.count(suit)
        if count > 1: # 只记录同种花色数量大于 1 的
            counter[suit] = count
    return counter
```

```
>>> players[0]
['方2', '方Q', '黑5', '黑Q', '梅8']
>>> same_suit(players[0])
{'方': 2, '黑': 2}
```

例子：扑克牌 - 分析一场牌局

cards.py

```
players = deal(5, 4)
for hand in players:
    print('手牌: %s\n      有%d对，%s个三条，%4s张同花' % \
    (', '.join(hand), same_rank(hand,2), same_rank(hand,3),
     '+'.join([str(s) for s in same_suit(hand).values()])))
```

```
手牌: 方2，方Q，黑5，黑Q，梅8
      有1对，0个三条，2+2张同花
手牌: 方9，方5，方8，梅J，红Q
      有0对，0个三条，  3张同花
手牌: 黑K，方A，黑9，梅A，黑A
      有0对，1个三条，  3张同花
手牌: 方7，红0，梅9，方0，红3
      有1对，0个三条，2+2张同花
```

例子：扑克牌 - 使用类实现

Deck.py (接下页)

```
import random
class Deck:
    def __init__(self):
        ranks = ['A', '2', '3', '4', '5', '6', '7',
                 '8', '9', '0', 'J', 'Q', 'K'] # 0表示10
        suits = ['梅','方','红','黑']
        self.deck = [s+r for s in suits for r in ranks]
        random.shuffle(self.deck)
    def hand(self, n=1):
        hand = [self.deck[i] for i in range(n)]
        del self.deck[:n]
        return hand
    def deal(self, cards_per_hand, no_of_players):
        return [self.hand(cards_per_hand) \
                for i in range(no_of_players)]
```

例子：扑克牌 - 使用类实现

Deck.py (接上页)

```
    def putback(self, card):
        self.deck.append(card)

    def __str__(self):
        s = ','.join(self.deck[  :13])+'\n'+\
            ','.join(self.deck[13:26])+'\n'+\
            ','.join(self.deck[26:39])+'\n'+\
            ','.join(self.deck[39:52])
        return s
    def __repr__(self):
        return str(self)

    def __len__(self):
        return len(self.deck)
```

例子：扑克牌 - 使用类实现

```
>>> from Deck import *; import pprint
>>> deck = Deck()
>>> deck
方2, 方4, 红Q, 黑7, 黑Q, 黑0, 方6, 梅A, 红7, 黑K, 黑2, 红2, 方K
梅K, 梅0, 红J, 红K, 黑6, 红A, 梅3, 红6, 黑J, 红5, 梅2, 方A, 方0
红9, 红0, 方Q, 黑5, 方3, 方7, 梅8, 梅5, 梅Q, 方J, 方5, 梅4, 方8
梅6, 梅9, 梅J, 红3, 黑4, 红8, 黑9, 方9, 黑8, 黑3, 红4, 黑A, 梅7
>>> len(deck)
52
>>> players = deck.deal(5, 4)
>>> pprint.pprint(players)
[['方2', '方4', '红Q', '黑7', '黑Q'],
 ['黑0', '方6', '梅A', '红7', '黑K'],
 ['黑2', '红2', '方K', '梅K', '梅0'],
 ['红J', '红K', '黑6', '红A', '梅3']]
```

课堂练习

1 猜数字 文件名：guess_number.py

实现一个简单的游戏：

- 用计算机随机生成一个 1-100 之间的整数，然后玩家猜测该数字。
- 对于每次猜测，计算机会告知该数字是太大还是太小，直到猜中。
- 统计玩家共计猜测的次数。

提要

使用蒙特卡洛（Monte Carlo）方法计算概率

蒙特卡洛模拟的原理：某件事发生的概率

- 模拟 N 次，事件 A 发生了 M 次，则 A 发生的概率是 $M/N\,(N \to \infty)$
- 例子：两个色子，一黑一绿，统计扔色子时黑色子比绿色子大的概率

black_gt_green.py（标量版）

```
import random
N = 100000
M = 0
for i in range(N):
    black = random.randint(1, 6)
    green = random.randint(1, 6)
    if black > green:
        M += 1
print('概率: %.4f' % (M/N))
```

```
>>>
概率: 0.4168
```

使用随机数向量编写更高效的程序

black_gt_green_vec.py（向量版）

```
import numpy as np
N = 100000
r = np.random.randint(1, 7, size=(2,N))
black, green = r[0,:], r[1,:]
M = np.sum(black > green)
print('概率: %.4f' % (M/N))
```

```
>>>
概率: 0.4159
```

black_gt_green_exact.py（理论值 = 15/36）

```
combinations = [(black, green) for black in range(1, 7)
                               for green in range(1, 7)]
success = [black > green for black, green in combinations]
M = sum(success)
N = len(combinations)
print('概率: %.4f' % (M/N))
```

```
>>>
概率: 0.4167
```

蒙特卡洛模拟的准确度和效率如何？

```
>>> from timeit import timeit
>>> timeit("exec(open('black_gt_green.py').read())",\
...         number=1)
概率: 0.4165
0.18423032800092187

>>> timeit("exec(open('black_gt_green_vec.py').read())",\
...         number=1)
概率: 0.4186
0.0023407799999404233

>>> timeit("exec(open('black_gt_green_exact.py').read())",\
...         number=1)
概率: 0.4167
0.0001384970000799512 5
```

例子：赌色子 - 每局1元，若黑大于绿，赢2元，玩不？

black_gt_green_game.py（标量版）

```
import random
N = 10000
start_capital = 10
money = start_capital
for i in range(N):
    money -= 1          # 每局交 1 元
    black = random.randint(1, 6)
    green = random.randint(1, 6)
    if black > green:
        money += 2  # 黑>绿，赢 2 元

net_profit_total = money - start_capital
net_profit_per_game = net_profit_total/N
print('平均每局输赢数: %g 元' % net_profit_per_game)
```

```
>>>
平均每局输赢数: -0.1784 元
```

例子：赌色子 - 每局1元，若黑大于绿，赢2元，不玩！

black_gt_green_game_vec.py（向量版）

```
import numpy as np
N = 10000
r = np.random.randint(1, 7, size=(2,N))
start_capital = 10
money = start_capital - N
black, green = r[0,:], r[1,:]
M = np.sum(black > green)
money += 2*M
net_profit_total = money - start_capital
net_profit_per_game = net_profit_total/N
print('平均每局输赢数：%g 元' % net_profit_per_game)
```

```
>>>
平均每局输赢数：-0.1772 元
```

思政点：远离赌博，十赌九输，十赌九诈

- 年轻人不要赌博，吸大麻；可以读博，写代码！

课堂练习（思政案例）

2 色宝（押大押小） 文件名：sic_bo.py

赌场里有一种常见的押大押小的游戏，规则如下：

- 盅里有三个色子，掷出后会计算三个色子点数的总和。如果点数总和小于等于 10，则称为"小"；大于等于 11，则称为"大"。
- 如果三个骰子的点数相同（如三个 1，三个 2，...，三个 6），称为“围骰”，此时不论玩家押大还是押小，都算玩家输。
- 玩家每次投注一个筹码，押中赢取两个筹码，押错则输掉一个筹码。

请用蒙特卡洛模拟方法估算玩家押大或押小的胜率：

- 在模拟中设定赌场进行 100,000 次游戏，统计玩家押大、押小的胜率。
- 根据结果分析，赌场设置围骰规则后，玩家是否仍有公平的获胜机会？

思政点：远离赌博，十赌九输，十赌九诈

- 运气只是一时，概率才是本质，搞懂蒙特卡洛，远离欺诈赌博。

例子：摸球

帽子里有 12 个球，4 黑、4 红、4 蓝

```
>>> hat = [c for c in ['black', 'red', 'blue'] \
...           for i in range(4)]
```

随机从中摸出两个球

```
>>> import random
>>> index = random.randint(0, len(hat)-1)
>>> ball1 = hat[index]; del hat[index]
>>> ball2 = hat[index]; del hat[index]
>>> # or
>>> random.shuffle(hat)
>>> ball1 = hat.pop(0)
>>> ball2 = hat.pop(0)
>>> # or
>>> ball1 = random.choice(hat); hat.remove(ball1)
>>> ball2 = random.choice(hat); hat.remove(ball2)
```

例子：摸球 - 一次摸出 2 个或更多黑球的概率

balls_in_hat.py

```
import random
def new_hat():
    hat = [c for c in ['black', 'red', 'blue'] \
               for i in range(4)]
    random.shuffle(hat)  # 打乱顺序
    return hat

n, N = 5, 10000  # 一次摸 n 个球，独立实验 N 次
M = 0
for e in range(N):
    balls = new_hat()[0:n]
    if balls.count('black') >= 2:
        M += 1
print('概率: ', M/N)
```

```
>>>
概率:  0.5816
```

提要

蒙特卡罗积分：原理

积分中值定理：f_m 是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间的平均值

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f_m(b-a)$$

蒙特卡罗积分：在 $[a,b]$ 区间选择 n 个随机数 x_i 估计 f_m

$$f_m \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

蒙特卡罗积分：程序实现

MCint.py

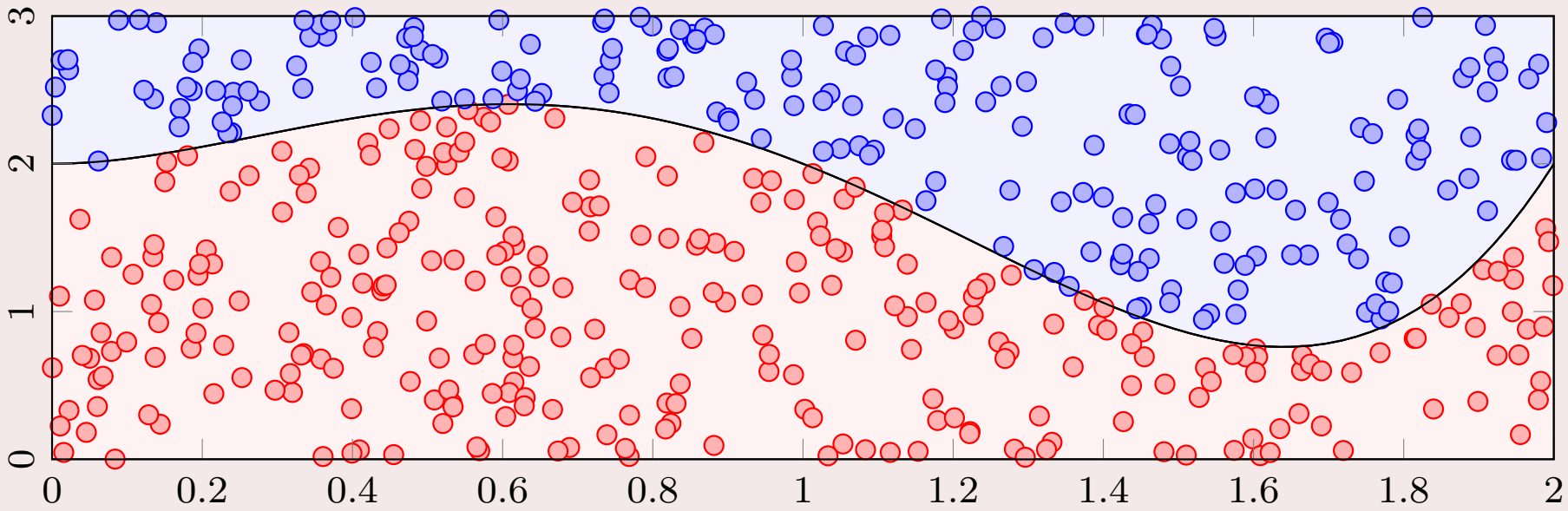
```
import random, numpy as np
def MCint(f, a, b, n):
    s = 0
    for i in range(n):
        x = random.uniform(a, b)
        s += f(x)
    return (b-a)*s/n
def MCint_vec(f, a, b, n):
    x = np.random.uniform(a, b, n)
    s = np.sum(f(x))
    return (b-a)*s/n
```

```
>>> f = lambda x: 1 + 2*x
>>> a, b, n = 1, 2, 1000
>>> MCint(f, a, b, n)
3.9834987128956767
>>> MCint_vec(f, a, b, n)
4.007490493037052
```

蒙特卡洛积分比传统梯形方法慢，但对于多变量积分更高效，如

$$\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

蒙特卡罗积分：随机投点法



- 问题：求矩形区域 $B = [x_L, x_H] \times [y_L, y_H]$ 内一几何图形 G 的面积。
- 方法：在 B 中随机投 N 点，M 点落入 G，则 G 面积为 $\dfrac{M}{N}\mathsf{area}(B)$
- 特例：G 是 $y = f(x)$ 与 x 轴在 $x \in [a, b]$ 围成的区域，则

$$\mathsf{area}(G) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{M}{N} m(b-a), \quad m \geq \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

蒙特卡罗积分：随机投点法 - 程序实现

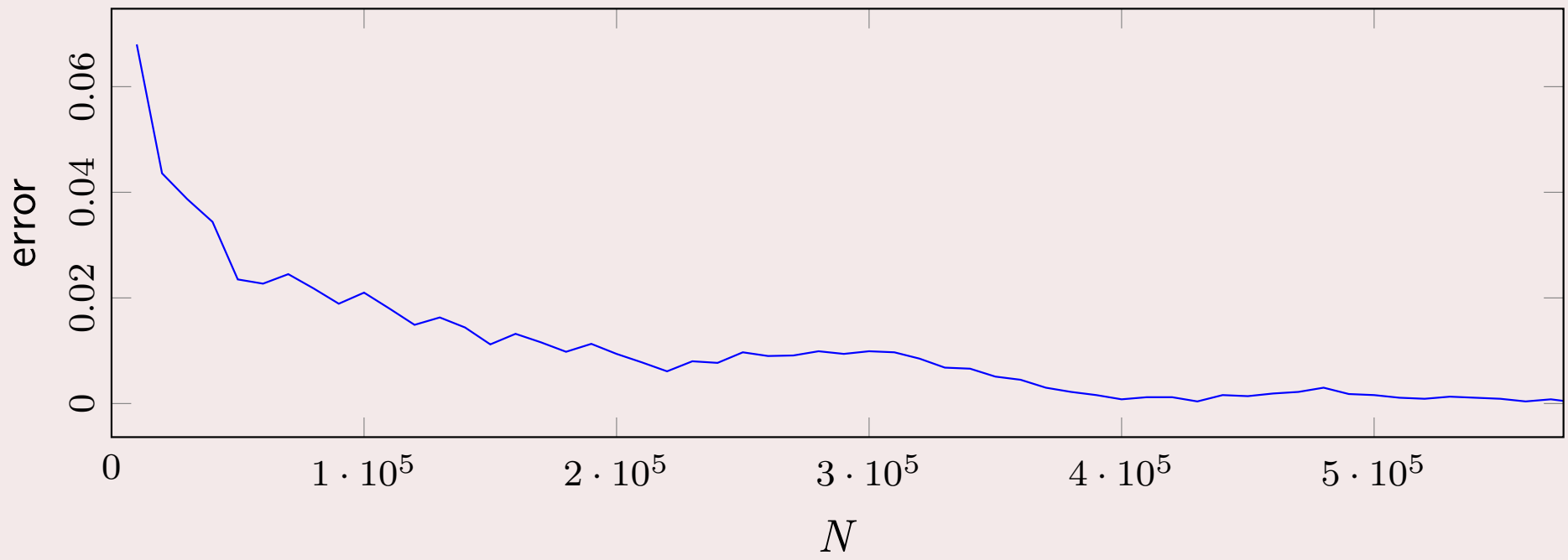
MCint_area.py

```
import random, numpy as np
def MCint_area(f, a, b, m, N):      # 标量版本
    below = 0
    for i in range(N):
        x = random.uniform(a, b)
        y = random.uniform(0, m)
        if y <= f(x):
            below += 1
    return below/N*m*(b-a)

def MCint_area_vec(f, a, b, m, N): # 矢量版本
    x = np.random.uniform(a, b, N)
    y = np.random.uniform(0, m, N)
    below = np.sum(y < f(x))
    return below/N*m*(b-a)
```

蒙特卡罗积分：随机投点法 - 误差分析

```
>>> f = lambda x: 2 + 3*x
>>> a = 1; b = 2; m = f(b); N = 1000000
>>> MCint_area(f, a, b, m, N)
6.493664
>>> MCint_area_vec(f, a, b, m, N)
6.4978
```



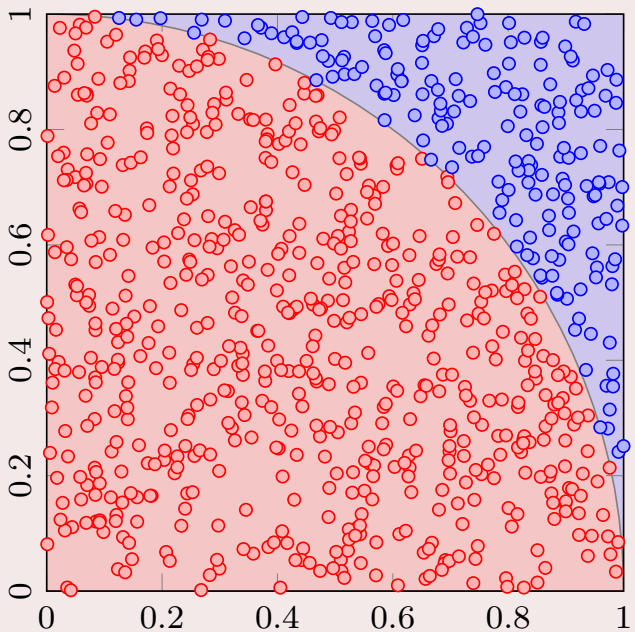
3 计算 π

文件名：MCpi.py

由于圆的面积与圆周率 π 有关，因此可以通过随机投点法来计算 π 的值，具体方法如下：

- 在 (0,0)、(1,0)、(1,1)、(0,1) 构成的边长为 1 的正方形内，生成 N 个随机点。
- 统计以 (0,0) 为圆心，1 为半径的四分之一个圆内点数量 N_{in}。
- 四分之一个圆的面积与正方形的面积比为 $\pi/4$，因此可根据下式估计 π：

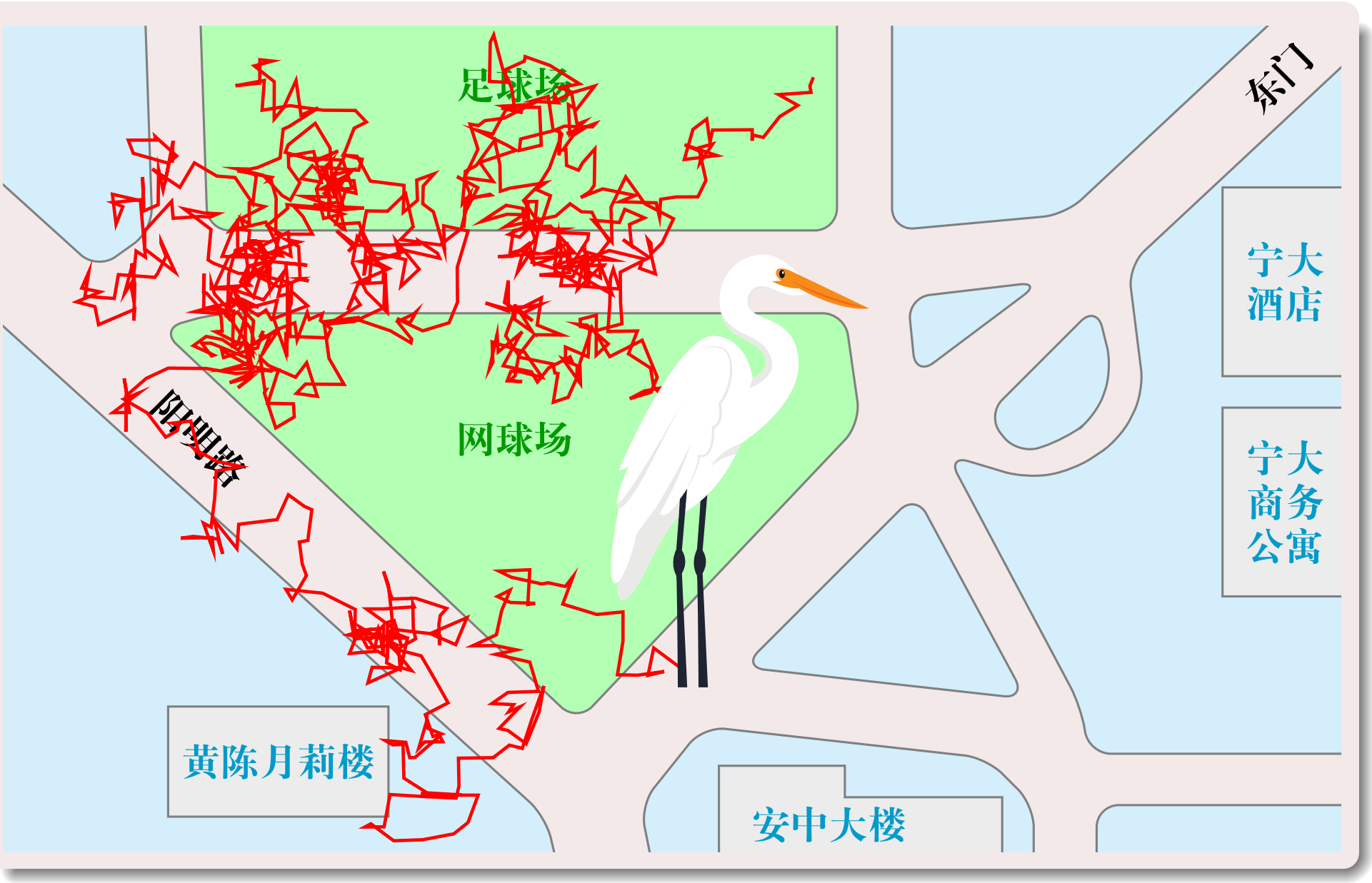
$$\pi \approx 4 \times \frac{N_{\text{in}}}{N}$$



请根据以上方法，编写程序计算 π。测试并绘制不同 N 值导致的误差图。

提要

在宁波大学随机游走（Random Walk）



一维空间随机游走

基本概念

- 每个粒子每一步都等概率地向左或者向右。某粒子的运动可表示为

$$x_t = x_{t-1} + s, \quad x_0 = 0, \quad P(s=1) = P(s=-1) = 1/2$$

- 当 $t = 0$ 时，N 个粒子在位置 0，它们随时间的分布是？

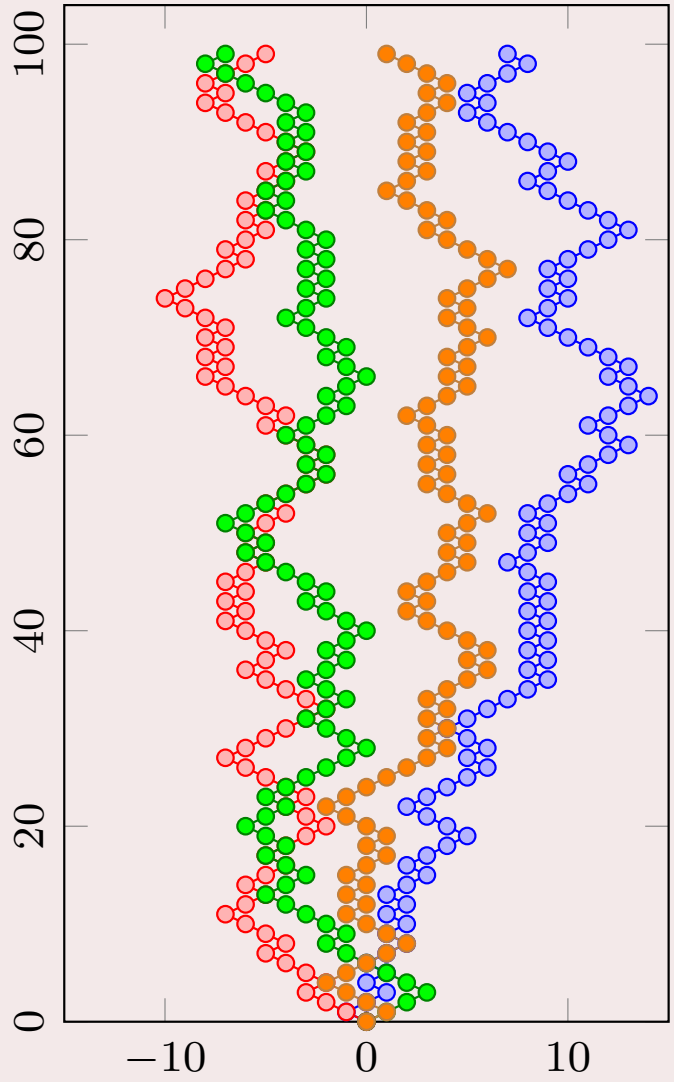
应用

- 分子运动（molecular motion）
- 热传递（heat transport）
- 量子力学（quantum mechanics）
- 聚合链（polymer chains）
- 群体遗传学（population genetics）
- ...

一维空间随机游走

walk1D.py

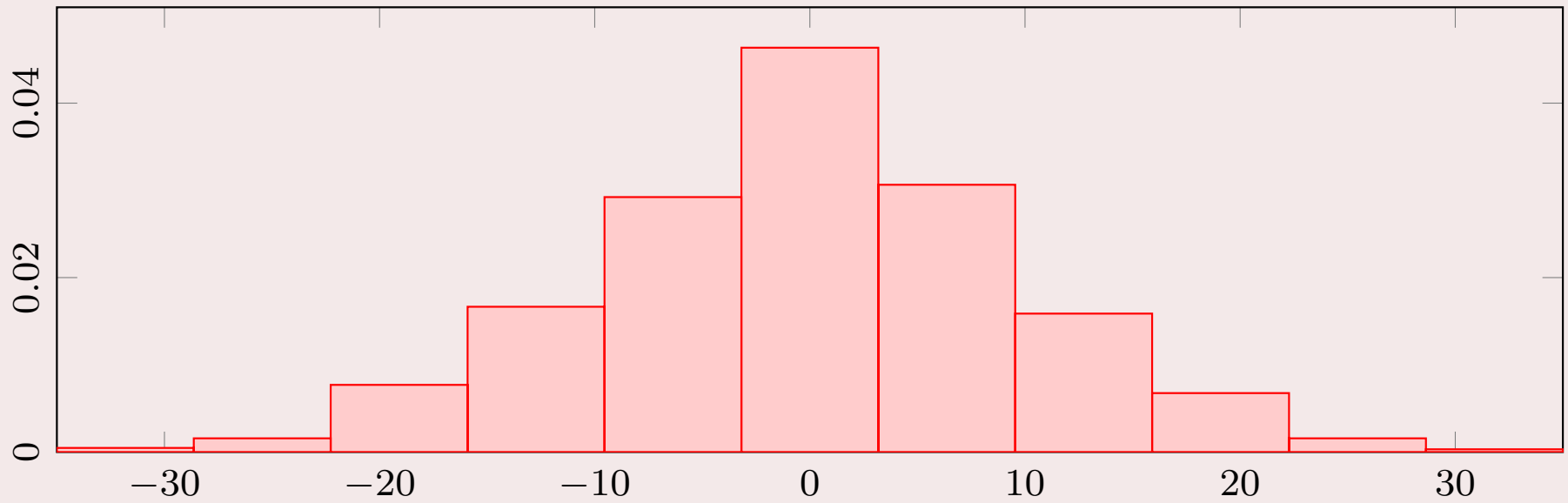
```
import random, numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
Np = 4      # 粒子数
Ns = 100    # 步数
x = np.zeros((Ns, Np))
t = np.arange(Ns)
for i in t[1:]:
    for p in range(Np):
        if random.random()<0.5:
            x[i,p] = x[i-1,p] + 1
        else:
            x[i,p] = x[i-1,p] - 1
plt.plot(x, t, '-o')
plt.show()
```



一维空间随机游走

相比一个粒子的运动状态，可能更关心群体效应（平均位置、分布）

```
x = x[-1,:]                    # x 由 Np = 1000; Ns = 100 计算得到
mean_pos = np.mean(x)          # 平均位置
stdev_pos = np.std(x)          # 集群宽度
plt.hist(x)                    # 位置分布
plt.show()
```



二维空间随机游走

基本概念

- 每一步随机上下左右，每个方向的概率都是 1/4
- N_p 个粒子，随机走 N_s 步，群体分布情况如何？

walk2D.py（标量版）

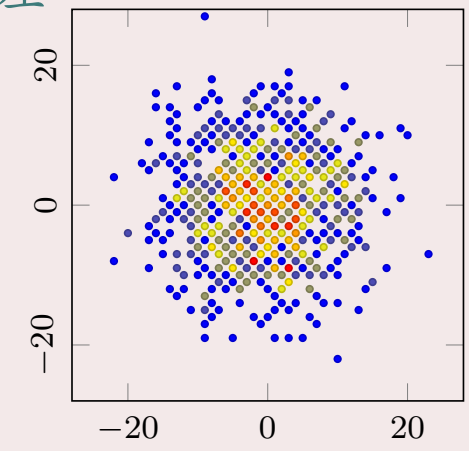
```
import random, numpy as np
def random_walk_2D(Np, Ns):
    x, y = np.zeros(Np), np.zeros(Np)
    for step in range(Ns):
        for i in range(Np):
            direction = random.randint(1, 4)
            if   direction == 1: y[i] += 1 # 上
            elif direction == 2: y[i] -= 1 # 下
            elif direction == 3: x[i] += 1 # 右
            elif direction == 4: x[i] -= 1 # 左
    return x, y
```

二维空间随机游走

walk2D.py（矢量版）

```
def random_walk_2D_vec(Np, Ns):
    x, y = np.zeros(Np), np.zeros(Np)
    moves = np.random.randint(1, 5, size=(Ns, Np))
    for step in range(Ns):
        this_move = moves[step,:]
        y += np.where(this_move==1, 1, 0) # 上
        y -= np.where(this_move==2, 1, 0) # 下
        x += np.where(this_move==3, 1, 0) # 右
        x -= np.where(this_move==4, 1, 0) # 左
    return x, y

import matplotlib.pyplot as plt
x, y = random_walk_2D_vec(1000, 100)
plt.plot(x,y,'x')
plt.show()
```



4 二维空间随机游走的类实现　　文件名：walk2D_classes.py

编写程序使用类实现粒子随机游走的模拟。定义类 Particle，实现单个粒子的定义和移动。该类包含以下属性和方法：

- 属性：粒子的位置 x、y
- 方法：初始化方法及用来随机移动一步（上、下、左、右）的 move 方法。

定义类 Particles，实现多个粒子一步和多步随机游走的模拟。该类包含以下属性和方法：

- 属性：存储多个 Particle 实例的列表
- 方法：初始化方法、所有粒子移动一步的 move 方法、所有粒子移动 n 步的 moves 方法，以及绘图方法。

The End!