

第 10 次课 数列和差分方程 课后习题

宁波大学《Python 科学计算》 周吕文

1 求数列极限 [文件名: ex10_1.py] 编写函数, 返回数列

$$a_n = \frac{7 + 1/(n+1)}{3 - 1/(n+1)^2}, \quad n = 0, 2, \dots, N$$

对 $N = 100$ 写出数列。从数学上求解当 $N \rightarrow \infty$ 时数列的准确极限, 并与 a_N 做比较。

2 通过数列计算 π [文件名: ex10_2.py] 以下三个数列都收敛到 π :

$$(a_n)_{n=1}^\infty, a_n = 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}; \quad (b_n)_{n=1}^\infty, b_n = \left(6 \sum_{k=1}^n k^{-2} \right)^{1/2}; \quad (c_n)_{n=1}^\infty, c_n = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$$

为每一个数列写一个函数, 返回值

3 计算贷款增长 [文件名: ex10_3.py] 某人从银行贷款 $L = 10$ 万, 分 $N = 12$ 个月尝还, 每个月的还款额 y_n 包含 L/N 加上贷款的利息。贷款的年利率为 $p = 3.6\%$, 则月利率为 $p/12$ 。 n 个月后的贷款额为 x_n 。那么 x_n 和 y_n 的变化可以建模为

$$y_n = \frac{p}{12} x_{n-1} + \frac{L}{N}, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{p}{12} x_{n-1} - y_n$$

编写函数计算 y_n 和 x_n , 并绘制数列 y_n 。

4 迭代法求根 [文件名: ex10_4.py] 迭代法是一种逐次逼近的方法, 首先给定一个粗糙的初值, 然后用同一个迭代公式, 反复校正这个初值, 直到满足预先给出的精度要求为止。考虑以下方程:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

显然, 以上方程在 $[2, 4]$ 区间内有唯一根。我们可以构造以下迭代公式来逼近根:

$$x_n = \sqrt{2x_{n-1} + 3}$$

请应用上式, 编程实现迭代法求根。

5 确定接待员数量 [文件名: ex10_5.py] 某机关单位需要接待来访人员。

- 来访人员按照泊松流到达 (到达时间间隔服从负指数分布), 到达速率为 $\lambda = 20$ 人/小时。
- 接待人员的服务速率服从 $\mu = 3$ 人/小时的负指数分布。
- 为使来访问者等待不超过 5 分钟, 请应用随机服务系统模拟确定最少应配置几名接待员?