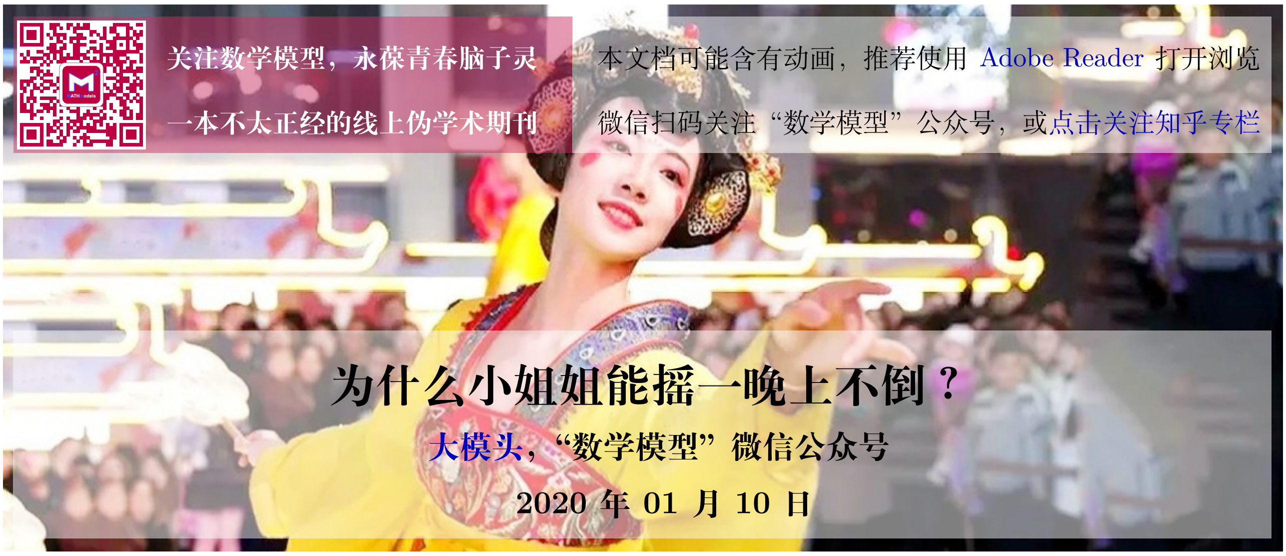

为什么小姐姐能摇一晚上不倒？

大模头，“数学模型”微信公众号

2020 年 01 月 10 日

摘　要：近日，西安大唐不夜城“不倒翁”女孩冯佳晨的表演走红。其表演主要通过腰部发力运作上轻下重的不倒翁的底座，使之有节奏的摇晃。本文通过力学建模，建立了不倒翁小姐姐的运动方程，研究了小姐姐与不倒翁底座的相互作用，并通过计算机模拟给出小姐姐摇晃的最佳策略。

关键词：不倒翁小姐姐、冯佳晨、力学建模、运动方程、计算机模拟

1　引言

最近，西安大唐不夜城“不倒翁”女孩街头表演的视频走红网络。在大唐不夜城步行街，“不倒翁”小姐姐身姿轻盈眼神妩媚令人梦回大唐，一颦一笑将中国唐朝美人的妩媚娇羞演绎得淋漓尽致。这勾人的小眼神，大模头看了觉得画面太美还能看 100 遍。尽管很美，但其实小姐姐表演得很辛苦。别只看到小姐姐在演出时体态轻盈、游刃有余，这背后的苦功夫她可是下足了。大唐不夜城的真人不倒翁演员都是经过层层选拔的，女性演员身高要在 163 厘米左右，体重不超过 50 公斤。扮演不倒翁的演员冯佳晨 [2]，今年 23 岁，身高 163 厘米，体重 45 公斤。虽有近 10 年的舞蹈功底，但这个表演刚开始的时候对她来说真的不容易。因表演需要将下半身完全固定在如图 3 的铁架子上，仅靠腰部发力运作不倒翁的底座，冯佳晨每天表演完胯和膝盖都会被磨青 [3]。

图 1: 小姐姐成名作：把蹄子给我

图 2: 是不是也被这小眼神迷倒了

不倒翁，是一种最常见的玩具。通常形状像一个蛋型、上轻而下重，扳倒后还能自动竖立起来。历史最早记载唐代的捕醉仙就是一种不倒翁 [4]。不倒翁不倒的原理并不难以理解：上轻下重的物体比较稳定，重心越低越稳定。当不倒翁在竖立状态处于平衡时，重心和接触点的距离最小，即重心最低。偏离平衡位置后，重心总是升高的。因此，这种状态的平衡是稳定平衡。所以不倒翁无论如何摇摆，总是不倒的。

但不倒翁究竟是如何运动的呢？小姐姐又是如何操控不倒翁，让其自由的摇摆呢？本文将建立不倒翁小姐姐的数学模型，研究不倒翁的运动方程，并通过计算给出小姐姐摇晃的最佳策略。

2　模型

先不考虑小姐姐的主动发力和地面滚动阻力，建立一个简单的不倒翁模型。在此基础上，再建立一个考虑小姐姐的主动发力和地面滚动阻力的模型。

图 3: 带 T 型架的半球形底座，重达 250 公斤 [1]

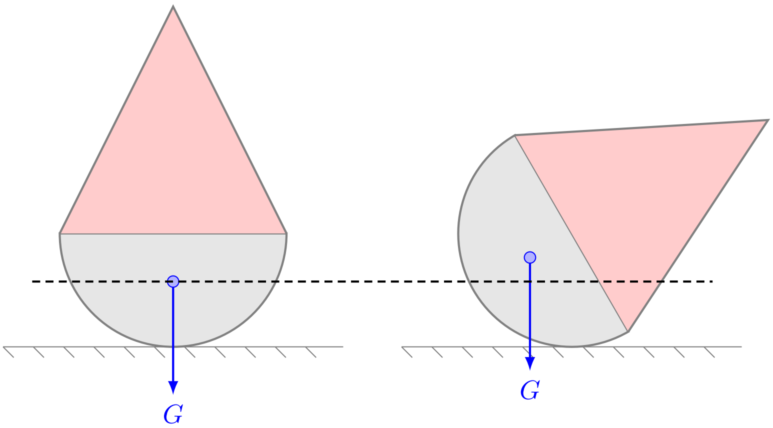

图 4: 不倒翁原理。左：不倒翁在竖立时重心最低；右：不倒翁偏离平衡位置后重心升高

2.1 简单的不倒翁模型

为了简化问题，我们把不倒翁简化为仅在二维平面（图 5 中的 xz 平面）内运动的半球。半球和地面均为刚性，两者无滑移。如图 5 所示的半球，其质量为 m，质心为 C，半球球心为 O。容易求得半球质心位置 h 和

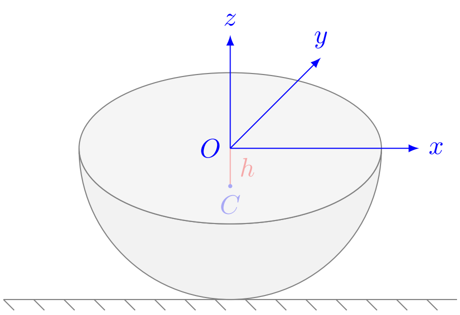

图 5: 半球的质心

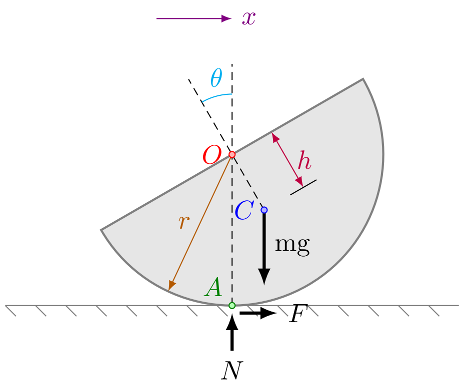

图 6: 半球运动和受力分析图

对 y 轴的转动惯量 [5]

$$h = \frac{3}{8}r, \quad I_c = \frac{83}{320}mr^2 \tag{1}$$

若该半球某时刻的位置如图 6 所示，mg 为半球重力，地面对半球的支撑力和摩擦力分别为 N 和 F。为了确定运动方程，需要知道半球是如何运动的。我们用 OC 与垂直方向的角度变量 θ 来描述半球的状态。考虑点 O 和 C 的坐标

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_O &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_C &= \mathbf{x}_O + h \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

因此，质心 C 的速度为

$$\mathbf{v}_C = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_C}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} + h\dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 是 x 和 θ 对时间的一阶导数。将 C 点速度对时间求导数，得到质心的加速度

$$\mathbf{a}_C = \begin{pmatrix} \ddot{x} + h\ddot{\theta}\cos\theta - h\dot{\theta}^2\sin\theta \\ h\ddot{\theta}\sin\theta + h\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

现在让我们通过考虑作用在物体上的所有力来研究运动方程。运动方程不仅要考虑刚体的平动，还必须考虑到关于质心转动：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F \\ N - mg \end{pmatrix} &= m\mathbf{a}_C \\ -(h\sin\theta)N + (r - h\cos\theta)F &= I_C\ddot{\theta} \end{aligned} \tag{5}$$

有三个方程，却有四个未知数（N，F，$\ddot{x}$，$\ddot{\theta}$）。要求解这个问题，还需要一个描述接触条件的表达式。对于不倒翁，假设半球与地面接触点没有滑移，则有

$$x = -\theta \cdot r \quad 或 \quad \dot{x} = -\dot{\theta} \cdot r \quad 或 \quad \ddot{x} = -\ddot{\theta} \cdot r \tag{6}$$

从而可得：

$$\ddot{\theta} = -\frac{h\,m \cdot (g + r\dot{\theta}^2)\sin\theta}{I_C + m \cdot (r^2 + h^2 - 2hr\cos\theta)} \tag{7}$$

上式微分方程也可由欧拉-拉格朗日方程 [6] 导出，感兴趣的读者可自行尝试。式 (7) 微分方程可由 MATLAB 函数 `ode45` 求出数值解，并结合式 (6) 可完全确定不同时刻半球的位置和角度。计算结果如图 7 所示，相应的计算程序见附录中的代码 4。

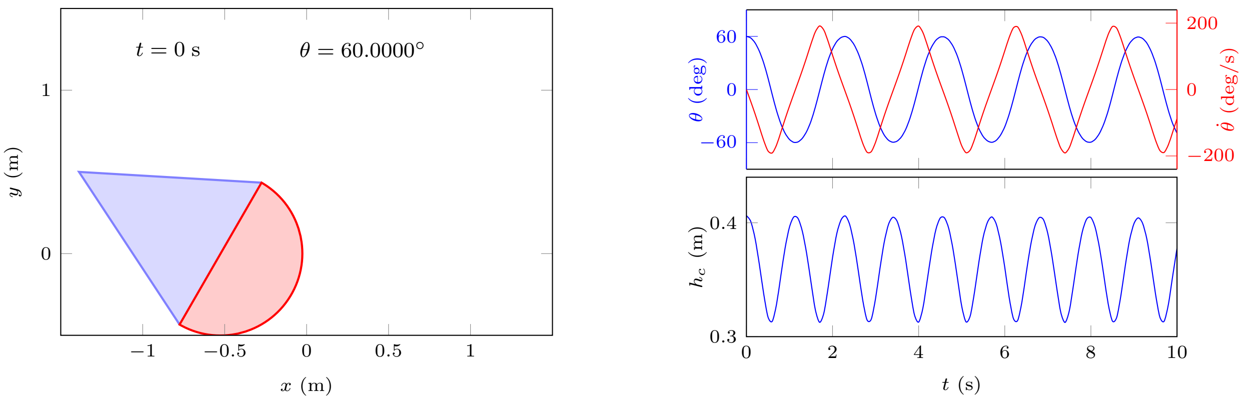

图 7: 理想不倒翁模拟结果。左：模拟动画，右：角度 θ、角速度 $\dot{\theta}$ 和质心高到底面距离 h_c 随时间的变化。

模拟结果表明，如果地面没有滚动阻力（机械能守恒），不倒翁将不停的摇摆。角度 θ 为 0 时，角速度 $\dot{\theta}$ 最大，重心 h_c 最低。

2.2 不倒翁小姐姐模型

在 2.1 中，本文仅给出了一个不倒翁玩具在理想地面上的运动状态。而实际上小姐姐的不倒翁在摇晃的过程中是受到滚动阻力的，小姐姐的腰部了在不停的扭动。为了了解小姐姐到底是如何将不倒翁摇晃起来的，本节将建立一个考虑滚动阻力和小姐姐摇晃的模型。

根据网络上的视频和图片，假设整个不倒翁底座重 250 kg，是由质量为 $m_c = 61.2$ kg，半径为 $r = 0.5$ m，厚为 $d = 0.005$ m 的铁制半球形圆壳和质量为 $m_w = 188.8$ kg，半径为 $c = r - d$ 的球缺（$b = c/2$）配重以及支架（忽略支架的质量）组成。小姐姐身高 $\ell_s = 1.63\,\text{m}$ ，体重 $m_s = 45\,\text{kg}$。如图 8 左图所示。

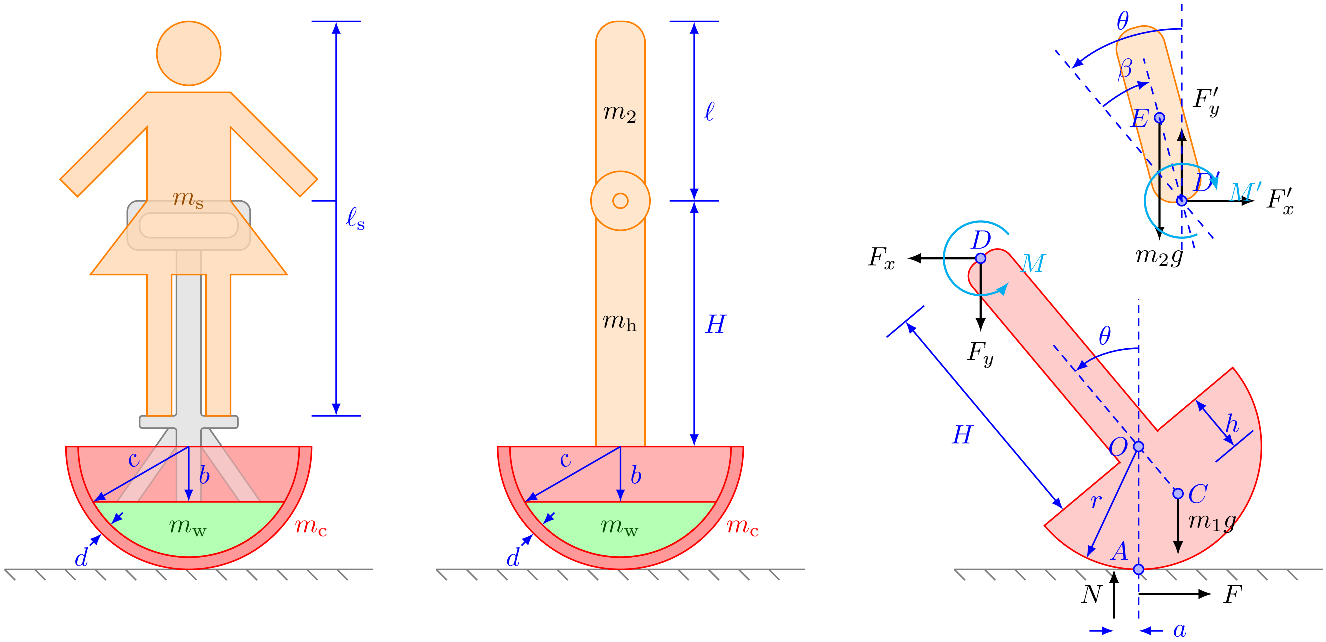

图 8: 不倒翁小姐姐模型图。左：小姐姐和不倒翁底座；中：将小姐姐简化为由一铰链连接的两圆柱；右：将小姐姐下半身与底座看为一体

在实际摇晃过程中，小姐姐只能通过晃动上半身带动底座摇晃。因此可将小姐姐简化为两个由铰链连接的圆柱（图 8 中图）。假设小姐姐的密度为 $\rho_s = 1 \times 10^3$ kg/m^3 [7]，则容易求得圆柱半径为 $r_s = 0.094$ m。假设小姐姐腰以下长 $H = 0.9$ m，腰以上长 $\ell = 0.73$ m。小姐姐的腰部以下固定在 T 字型支架上，因此我们将小姐姐的下半身与底座看成一体（图 8 右图），质量为 $m_1 = 275$ kg，转动惯量为 $I_1 = 28.34$ kg $\cdot$ m^2。小姐姐上半身质量为 $m_2 = 20$ kg，转动惯量为 $I_2 = 0.94$ kg $\cdot$ m^2。

图 8 右图是对两部分的受力分析，将小姐姐上半身对下半身的作用力简化为力 (F_x, F_y) 和力偶矩 M。在底座实际滚动过程中，由于地面和底座的变形，地面对底座的支撑力 N 的作用点并不在 A 点，偏离距离 a 可由滚动阻力系数给出。与 2.1 小节的“简单的不倒翁模型”类似，我们可以定义出 O、A、C、D 和 E 的坐标、速度和加速度，然后分别给出系统两部分的动力学方程，对于底座和小姐姐的下半身组成的整体有

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} F - F_x \\ N - F_y - m_1 g \end{pmatrix} = m_1 \mathbf{a}_C \\ -(h\sin\theta + d)N + (r - h\cos\theta)F + M = I_1\ddot{\theta}\end{gathered} \tag{8}$$

对于小姐姐的上半身有

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y - m_2 g \end{pmatrix} = m_2 \mathbf{a}_E \\ l\cos(\theta+\beta)F_x + l\sin(\theta+\beta)F_y - M = I_2(\ddot{\theta} + \ddot{\beta})\end{gathered} \tag{9}$$

根据以上六式以及式 (6) 可以求解出 $\ddot{\theta} = f(\beta(t))$，由于表达式比较复杂，这里不再列出。

小姐姐可以通过 $\beta(t)$ 来控制 $\ddot{\theta}$，即小姐姐可以通过摇晃上半身来使整个不倒翁底座摇晃起来。假设小姐姐摇晃的 $\beta(t)$ 随时间的变化满足 sin 函数：

$$\beta(t) = A_{\text{mp}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) \tag{10}$$

其中 A_{mp} 为摇晃幅度，T 为摇晃周期。

3 求解

经过大模头的分析，终于得到了小姐姐的摇晃方程。可小模王说看不懂方程，也不想看方程，就要看小姐姐摇。没办法，为了满足小模王的要求，大模头只好写段 MATLAB 程序模拟一下。不倒翁底座的摇晃方程可以由 ode45 函数直接求解，但为了加快程序运行速度并实时显示，我使用了 Euler 法求解，时间步长取 $\Delta t = 0.01$ s。模拟的主要步骤如下：

- 根据时间确定上半身相对于底座的角度 β、角速度 $\dot{\beta}$ 和角加速度 $\ddot{\beta}$
- 根据角速度更新角度：$\theta = \theta + \omega \Delta t$
- 根据角加速度更新角速度：$\omega = \omega + \ddot{\theta} \Delta t$，其中角加速度 $\ddot{\theta}$ 由运动方程给出。
- 确定底座球心 O 的水平位置：$x = -\theta r$。
- 根据底座球心 O 的水平位置，以及底座的转动角度，确定半圆位置。
- 更新时间步 $t = t + \Delta t$。如果 $t > 1$ 晚上，结束，否则跳到第 1 步。

为了模拟的视觉效果，大模头还需要动态展示出结果。大模头我专门写了一个函数 plotumbler 用来画底座半圆和性感的小姐姐，具体程序见附录中的 5。绘制结果如图 9 所示。小模王看了看我画的小姐姐，表示震惊：实在是太像了，将小姐姐妙曼的身姿展现得淋漓尽致，这大长腿，这伸出的纤纤玉手。

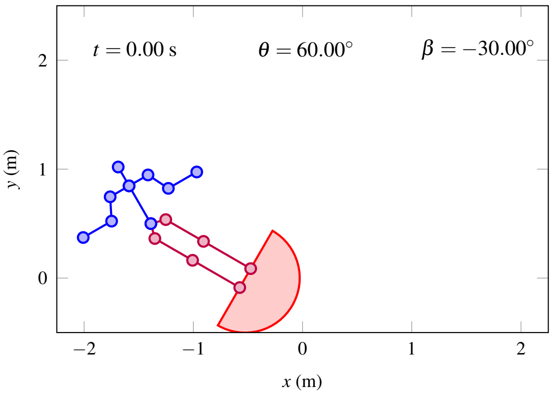

图 9: 小姐姐和半个球，我画的小姐姐是不是很性感！

根据运动方程，算出某时刻半圆心的位移以及角度后，需要对半圆和小姐姐进行平移和旋转，平移容易。旋转可根据以下公式进行：

$$x = (x_0 - x_c) \cdot \cos\theta - (y_0 - y_c) \cdot \sin\theta + x_c \tag{11}$$

$$y = (x_0 - x_c) \cdot \sin\theta + (y_0 - y_c) \cdot \cos\theta + y_c \tag{12}$$

以上公式将点 (x_0, y_0) 绕 (x_c, y_c) 旋转 θ 角。将以上公式写成 MATLAB 函数 rotxy，具体程序见附录中的代码 5。更多模拟细节见文末附录中的 MATLAB 完整代码。

4 结果

为了研究小姐姐究竟是如何通过摆动上半身将底座摇晃起来的。大模头我研究了不同情况下，底座摇晃的规律。

若小姐姐不摇晃，即摇晃幅度 $A_{mp} = 0$，并且没有滚动阻力，即 $d = 0$，则模型退化为 2.1 中的理想不倒翁模型，对于 $\theta(t = 0) = 30°$，结果如图 10 所示。结果表明，即使小姐姐不摇晃，小姐姐的腰也受到周期性的作用力。若考虑滚动阻力并假设 $a = 0.01$，则结果如图 11 所示。结果表明，在滚动阻力的作用下，不倒翁底座会逐渐停止摇晃。也就是说，在实际情况中，想要保持不倒翁底座的摇晃，小姐姐必须持续不断的摇晃身体。

接下来我们讨论小姐姐摇晃身体的周期对不倒翁底座运动的影响。假设小姐姐摇晃身体的幅度 $A_{mp} = 30°$。研究表明，小姐姐身体的摇晃与不倒翁底座的摇晃之间会产生共振效应，当小姐姐摇晃身体的周期 $T = 2.18$ s 时，不倒翁底座摇晃的幅度最大，结果如图 12 所示。而更小的周期（如 $T = 1$ s，结果见图 13）或更大的周期（如 $T = 3$ s，结果见图 14）都不能让不倒翁底座大幅度地摇晃。

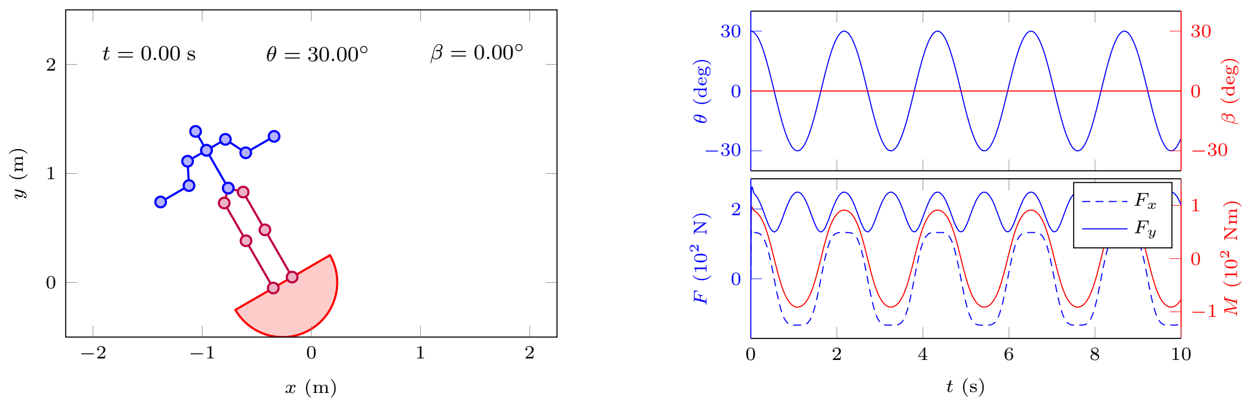

图 10: 没有滚动阻力，小姐姐不摇的模拟结果。

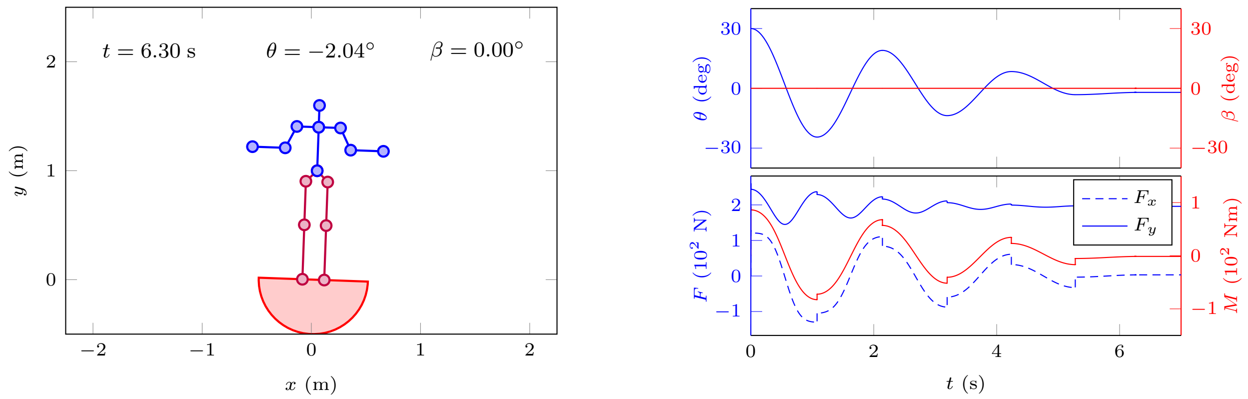

图 11: 有滚动阻力，小姐姐不摇的模拟结果。

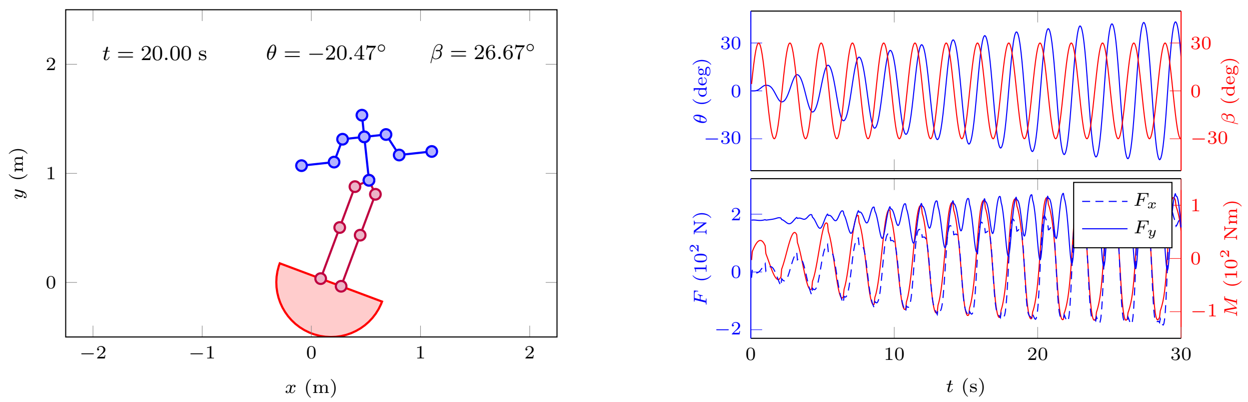

图 12: 小姐姐摇晃周期为 2.18 s 的模拟结果。

5 结论

- 通过运动和受力分析可以求解出不倒翁小姐姐的运动方程，并可以确定出小姐姐与底座发生共振的最佳摇晃周期。
- 小姐姐能大幅度摇晃的最佳周期为 2.2 s 左右。若小姐姐照此周期不停的摇，一小时大约要晃 $3600/2.2 \approx 1636$ 下。
- 在本文的最佳周期模拟中，小姐姐晃动幅度约为 40°，这相当于要晃出 1 m 左右的距离，一个周期内腰移动的距离约为 4 m。小姐姐腰间平均水平发力在 130 N　左右。因此一个周期小姐姐做功约 520 J，摇 1 小时做功约 850 kJ。因为仅考虑了水平方向的力，实际上这低估了小姐姐实际做功。

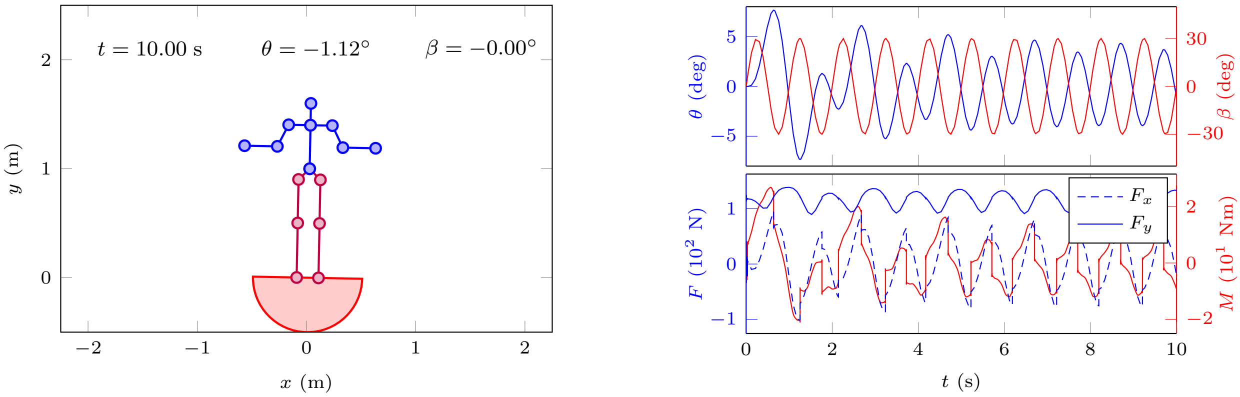

图 13: 小姐姐摇晃周期为 1 s 的模拟结果。

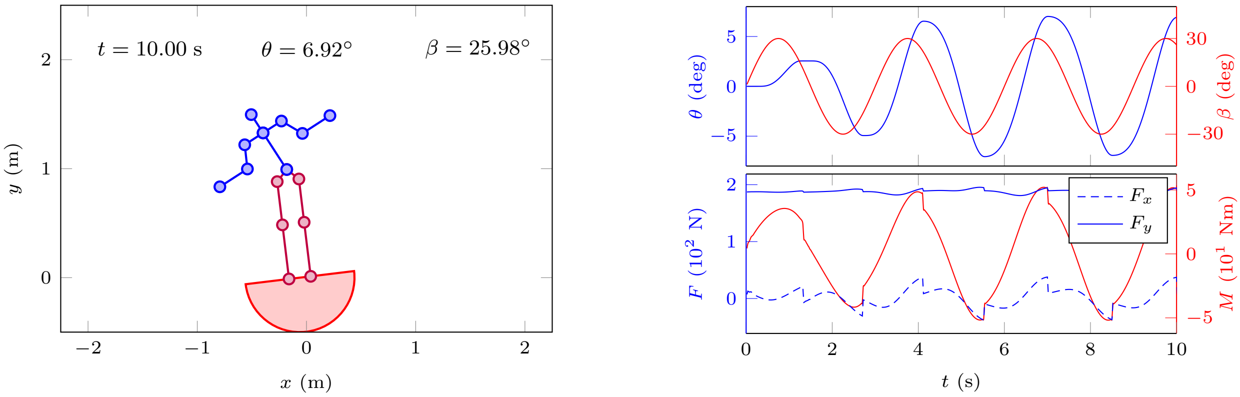

图 14: 小姐姐摇晃周期为 3 s 的模拟结果。

- 根据上面两条结论，可知“不倒翁”小姐姐摇一晚上真的很累，为“不倒翁”女孩点赞！
- 听说不少群众模仿“不倒翁”小姐姐并闪了腰，请大家小心模仿。此外，骨科专家也告诫大家谨慎模仿。

参考文献

[1] 曲江新区. 不倒翁小姐姐的秘密终于藏不住了. https://kuaibao.qq.com/s/XAC2019112600405400?refer=spider.

[2] 百度百科. 冯佳晨. https://baike.baidu.com/item/冯佳晨/24144236.

[3] 南京晨报. 西安“不倒翁”女孩的表演走红网络，大家都想牵她的手！. https://new.qq.com/omn/20191117/20191117A03D2I00.html.

[4] Wikipedia contributors. Roly-poly toy — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Roly-poly_toy, 2019.

[5] Blitiri. Mass moment of inertia of a hemisphere. https://blitiri.blogspot.com/2014/05/mass-moment-of-inertia-of-hemisphere.html.

[6] Wikipedia contributors. Euler–lagrange equation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Lagrange_equation, 2019. [Online; accessed 17-December-2019].

[7] Babette Zemel. Body composition during growth and development. Human growth and development, pages 271–294, 2002.

附录

A 质心和转动惯量

A.1 球缺

球缺是指球体被平面截去的一部分。截面称为球缺的底面，垂直于截面的直径被此截面截得的线段长称为球缺的高。球缺上距离 O 点 z 处取一层厚度为 $\mathrm{d}z$ 的微元，其体积为 $\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z$，因此球缺的体积为

图 15: 球缺

$$V=\int_{-r}^{-b}\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi(b-r)^2(b+2r)}{3} \tag{13}$$

质心距离 O 点的距离为

$$h=\frac{1}{V}\int_{-r}^{-b}\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z=-\frac{3\,(b+r)^2}{4\,(b+2r)} \tag{14}$$

微元的转动惯量为

$$\frac{1}{4}(r^2-z^2)\mathrm{d}m+z^2\mathrm{d}m=\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{3}{4}z^2\right)\frac{m}{V}\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z \tag{15}$$

$$I=\int_{-r}^{-b}\left(\frac{1}{4}r^2+\frac{3}{4}z^2\right)\frac{m}{V}\pi(r^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{m}{10}\left(\frac{9b^2}{2}+\frac{17r^2}{2}-\frac{9r^3}{b+2r}\right) \tag{16}$$

若 $b=r/2$，则有

$$V=\frac{5\pi r^3}{24},\qquad h=-\frac{27\,r}{40},\qquad I=\frac{241mr^2}{400} \tag{17}$$

A.2 半球壳

外半径为 R，内半径为 r 的半球壳可以看成是一个半径为 R 大实心半球挖去一个半么为 r 的小实心半球。大小半径的体积分别为

$$V_R=\frac{2}{3}\pi R^3,\quad V_r=\frac{2}{3}\pi r^3 \tag{18}$$

因此半球壳的质心距离球心为

$$h_c=\frac{-3/8\cdot RV_R+3/8\cdot rV_r}{V_R-V_r}=-\frac{3}{8}\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3} \tag{19}$$

转动惯量

$$I_c=\frac{2}{5}m_RR^2-\frac{2}{5}m_rr^2=\frac{2}{5}(m_R-m_r)\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}=\frac{2}{5}m_c\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3} \tag{20}$$

B MATLAB 代码

代码 1: 简单的不倒翁模型符号推导程序 syms1.m

```
%% 微信公众号：数学模型（MATHmodels）
%  联系方式：mathmodels@outlook.com

syms theta(t) r h F N g m I

x = -r*theta;
xo = [x; 0];
xc = xo + h*[sin(theta); -cos(theta)];
ac = diff(xc, t, 2);

eqF = [F; N-m*g]==m*ac;
eqI = -(h*sin(theta))*N + (r-h*cos(theta))*F == I*diff(theta,t,2);

[Fv,Nv] = solve(eqF, F, N)

eqI = subs(eqI, F, Fv);
eqI = subs(eqI, N, Nv);

ddt = isolate(eqI, diff(theta,t,2))
```

代码 2: 不倒翁小姐姐模型符号推导程序 syms2.m

```
%% 微信公众号：数学模型（MATHmodels）
%  联系方式：mathmodels@outlook.com

syms theta(t) beta(t) r h F N g m1 m2 I1 I2 d H Fx Fy T l w1 w2 dw2

x = -r*theta;

xo = [x; 0];
xc = xo + h*[ sin(theta); -cos(theta)];
xd = xo + H*[-sin(theta);  cos(theta)];
xe = xd + l*[-sin(theta+beta); cos(theta+beta)];

ac = diff(xc, t, 2);
ad = diff(xd, t, 2);
ae = diff(xe, t, 2);


eqF1 = [F-Fx; N-m1*g-Fy]==m1*ac;
eqF2 = [  Fx; Fy-m2*g  ]==m2*ae;

eqI1 = -(h*sin(theta)+d)*N + (r-h*cos(theta))*F + M == I1*diff(theta,t,2);
eqI2 = l*cos(theta+beta)*Fx + l*sin(theta+beta)*Fy - M == I2*diff(theta+beta,t,2);

eqI = eqI1 + eqI2;

[Fv,Nv,Fxv, Fyv] = solve([eqF1; eqF2], F, N, Fx, Fy);

eqI = subs(eqI, {F, N, Fx, Fy}, {Fv, Nv, Fxv, Fyv});


ddt = isolate(eqI, diff(theta,t,2));
ddt = subs(ddt, diff(theta,t), w1);
ddt = subs(ddt, diff(beta,t), w2);
ddt = subs(ddt, diff(beta,t,t), dw2);

ddt = subs(ddt, {w2, dw2, d, I2, m2}, {0,0,0,0,0});

```

```
[num, den] = numden(rhs(ddt))
```

代码 3: 不倒翁底座（含小姐姐下半身）质心和转动惯量计算程序 mr2.m

```
%% 微信公众号: 数学模型 (MATHmodels)
%  联系方式: mathmodels@outlook.com

[hc, Ic, mc] = sphcapci(); % 底座球壳质心、转动量和质量
[hw, Iw, mw] = sphshlci(); % 底座配重质心、转动量和质量
[hh, Ih, mh] = cylci();    % 小姐姐下半身质心、转动量和质量

m = mc + mw + mh;
h = (hc*mc + hw*mw + hh*mh)/m;
I = Ic + mc*(hc-h)^2 + Iw + mw*(hw-h)^2 + Ih + mh*(hh-h)^2;

% ------------------------------------------------------------------------

function [Zc, Ic, m] = sphshlci(R, r, m)
% 半球壳的质心、转动量和质量

if nargin==0
    R = 0.5;
    r = R - 0.005;
    rho = 7.87e3;  % kg/m^3
    m = rho*2/3*pi*(R.^3 - r.^3);
end

dr3 = (R.^3 - r.^3);
dr4 = (R.^4 - r.^4);
dr5 = (R.^5 - r.^5);

V = 2/3*pi*dr3;
Zc = -3/8 * dr4./dr3;
Iy = 2/5 * m * dr5/dr3;
Ic = Iy - m*Zc^2;
end

% ------------------------------------------------------------------------

function [Zc, Ic, m] = sphcapci(r, b, m)
% 球缺的质心、转动动量和质量

% syms r z b m
% dv = pi*(r^2-z^2);
% V = int(dv, z, -r, -b)
% Zc = simplify(int(dv*z, z, -r, -b)/V)
% dm = m/V * dv;
% dI = 1/4*(r^2-z^2)*dm + z^2*dm;
% I = int(dI, z,-r,-b)

if nargin==0
    r = 0.495; b = -r/2; m = 188.81;
end

Zc = 3*(b - r)^2/(4*b - 8*r);
Iy = (9*b^2 + 17*r^2 + 18*r^3/(b-2*r))*m/20;
Ic = Iy - m*Zc^2;
V = pi*(b + r)^2*(2*r-b)/3;
end

% ------------------------------------------------------------------------

function [Zc, Ic, m] = cylci(r, h, m)
```

```
% 圆柱的质心、转动动量和质量

if nargin==0;
    h = 0.9; % h = 0.73;
    r = 0.094; m = 45*h/1.63;
end

Zc = h/2;
Iy = 1/4*m*r^2 + 1/3*m*h^2;
Ic = Iy - m*Zc^2;
end
```

代码 4: 简单的不倒翁模型模拟程序 rolypoly.m

```
%% 微信公众号：数学模型（MATHmodels）
%  联系方式：mathmodels@outlook.com

%% 不倒翁半球数据
r = 0.5;              % [m] 半径
m = 1.0               % [kg] 质量
g = 9.8;              % [m/s] 重力加速度
h = 3/8*r;            % [m] 重心位置
Ic = 83/320*m*r^2;    % [kg*m^2] 转动惯量

%% 仿真参数
tmax = 2.3*5;               % [s] 仿真时间
theta0 = deg2rad(60);% [deg] 初始角度
omega0 = 0;           % [deg/s] 初始角速度
xo = -theta0*r;       % [m] 初始位移

%% 画不倒翁，为了更像玩具不倒底，加了个三角形的顶
Xb = r*[cosd(180:360) 0];
Yb = r*[sind(180:360) 2];
[xb, yb] = rotxy(Xb,Yb, theta0);
hb = fill(xb+xo,yb,[1,0.8,0.8]);
axis image; axis([-2.25,2.25,-0.5,2]);

%% 调用 ode45 求解微分方程
[t, to] =ode45(@odes,[0,tmax], [theta0 omega0], [], r, m, g, h, Ic);
title(sprintf('t = %8.4f', 0));

for i =2:length(t)
    theta = to(i,1);

    % 更新中心位移
    xo = -theta*r;

    % 根据角度旋转座标点
    [xb, yb] = rotxy(Xb, Yb, theta);

    % 更新图形并显示
    set(hb, 'XData',xb+xo, 'YData',yb)
    title(sprintf('t = %8.4f', t(i)));
    pause(t(i)-t(i-1)) % 暂停 dt 秒
end

% -----------------------------------------------------------------------

function dy = odes(t, y, r, m, g, h, Ic)
% y(1) = theta; y(2) = d(theta)/dt

nume = -h*m*(g+r*y(2)^2)*sin(y(1));    % 分子
deno = Ic+m*(r^2+h^2-2*h*r*cos(y(1))); % 分母
```

```

dy = [y(2); nume/deno];
end

% ------------------------------------------------------------------------

function [x, y] = rotxy(x0, y0, theta)
% 将 (x0,y0) 绕 (0,0) 旋转 theta 度
x = x0*cos(theta) - y0*sin(theta);
y = x0*sin(theta) + y0*cos(theta);
end
```

代码 5: 不倒翁小姐姐模型模拟程序 tumber.m

```
%% 微信公众号: 数学模型 (MATHmodels)
%  联系方式: mathmodels@outlook.com

clear; clc
%% 可调参数
T = 2.18;             % [s]       小姐姐摇晃周期
amp = deg2rad(30);    % [rad]     小姐姐摇晃幅度
a0 = 0.01;            % [m]       滚动阻力系数
dt = 1e-2;            % [s]       仿真步长

%% 物理常数
g = 9.8;              % [m/s]     重力加速度

%% 底座(含小姐姐的下半身)数据
r = 0.5;              % [m]       底座半径
m1 = 275;             % [kg]      底座(含小姐姐的下半身)质量
h = 0.2442;           % [m]       底座(含小姐姐的下半身)重心位置
I1 = 28.34;           % [kg*m^2]  底座(含小姐姐的下半身)转动惯量
theta = deg2rad(0);   % [rad]     初始角度
w1 = 0;               % [deg/s]   初始角速度
H = 0.9;              % [m]       小姐姐下半身长度

%% 小姐姐上半身数据
m2 = 20;              % [kg]      小姐姐上半身质量
l = 0.73/2;           % [m]       小姐姐上半身长度的一半(质心到腰的距离)
I2 = 0.94;            % [kg*m^2]  小姐姐上半身转动惯量

[beta, w2, dw2] = sway(0, T, amp);
hp = plotumbler(theta, beta);

t = 0:dt:12*3600;

for i = 2:length(t)
    [beta(i), w2, dw2] = sway(t(i), T, amp);

    theta(i) = theta(i-1) + w1 * dt;

    dw1 = odes(theta(i),w1, beta(i),w2,dw2,a0,m1,m2,H,h,r,l,I1,I2,g);

    w1 = w1 + dw1 * dt;

    [F(i,:), M(i,:)] = force(m2,r,H,l,I2,g,w1,w2,dw1,dw2,theta(i),beta(i));

    plotumbler(theta(i), beta(i), hp);
end

% ------------------------------------------------------------------------

function [F, M] = force(m2, r, H, l, I2, g, w1, w2, dw1, dw2, theta, beta)
```

```matlab
% 求解小姐姐腰部作用力和力偶
Fx = -m2*(r*dw1 + l*cos(beta + theta)*(dw2 + dw1) ...
          - H*sin(theta)*w1^2 + H*cos(theta)*dw1 ...
          - l*sin(beta + theta)*(w2 + w1)^2        );

Fy = -m2*(   -g + l*sin(beta + theta)*(dw2 + dw1) ...
          + H*cos(theta)*w1^2 + H*sin(theta)*dw1 ...
          + l*cos(beta + theta)*(w2 + w1)^2        );

F = [Fx, Fy];
M = l*cos(theta+beta)*Fx + l*sin(theta+beta)*Fy - I2*(dw1+dw2);
end

% -------------------------------------------------------------------------

function dw1 = odes(theta,w1, beta,w2,dw2, a0, m1,m2, H,h,r,l, I1,I2, g)
a = a0 * sign(w1); % d = d0 * w1;
num = l*m2*(g+r*(w1+w2)^2+dw2*a)*sin(beta + theta) ...
      + l*m2*(  a*(w1+w2)^2-dw2*r)*cos(beta + theta) ...
      - (m1+m2)*a*g - dw2*l^2*m2 - I2*dw2 - (m1+m2)*g*h*sin(theta) ...
      + dw2*h*l*m2*cos(beta) - l*m2*(h*(w1+w2)^2+H*w1^2)*sin(beta) ...
      + w1^2*(H*m2 - m1*h)*(a*cos(theta)+ r*sin(theta));

den = I1 + I2 + m1*(h^2 + r^2) + m2*(l^2 + r^2 - H*h) ...
      + 2*l*m2*r*cos(beta + theta) - a*l*m2*sin(beta + theta) ...
      + (H-h)*l*m2*cos(beta) + (H*m2 -h*m2- 2*m1*h)*r*cos(theta) ...
      + (m1*h-H*m2)*a*sin(theta);

dw1 = num/den;
end
% -------------------------------------------------------------------------

function [beta, w, dw] = sway(t, T, amp)
if nargin==1; T = 2; amp = deg2rad(30); end
omega = 2*pi/T;                 % [rad/s] 摇晃周期的角速度
beta = amp*sin(omega*t);        % [rad]   摇晃角度
w = amp*omega*cos(omega*t);     % = d(beta)/dt 摇晃角速度
dw = -amp*omega^2*sin(omega*t);% = d(w)/dt 摇晃角加速度
end

% -------------------------------------------------------------------------

function h = plotumbler(theta, beta, h)
if nargin==0; theta = deg2rad(60); beta = deg2rad(-30); end
r = 0.5;                        % [m] 半径
xo = -theta* r;                 % [m] 底座半球中心位置
%  底座半球坐标
xb = r*cosd(180:360); yb = r*sind(180:360);
[xb, yb] = rotxy(xb,yb, theta);
xb = xb + xo;
% 小姐姐坐标
x = [0.0  0.6  0.3  0.2  0.0 -0.2 -0.3 -0.6 ...
      0.1  0.1  0.1  0.0 -0.1 -0.1 -0.1  NaN];
y = [1.6  1.2  1.2  1.4  1.4  1.4  1.2  1.2 ...
      0.0  0.5  0.9  1.0  0.9  0.5  0.0  NaN];

I = [1 5 12 16 2 3 4 5 6 7 8 16 9 10 11 12 13 14 15];
It = 1:8; % 表示上半身节点编号
Ic = 12;  % 表示腰的节点（小姐姐摇晃的转动中心）编号

[x, y] = rotxy(x,y,theta); % 小姐姐整体随底座转动 theta 角
% 小姐姐上半身绕腰转动 beta 角
```

```
[x(It), y(It)] = rotxy(x(It), y(It), beta, x(Ic), y(Ic));
xm = x(I)+xo; ym = y(I);
if nargin<3
    h(1) = fill(xb, yb, [1,0.8,0.8]); hold on;
    h(2) = plot(xm,ym,'bo-','linewidth',2, 'markersize',10);
    axis image; axis([-2.25,2.25,-0.5,2]);
else
    set(h(1), 'XData',xb, 'YData',yb)
    set(h(2), 'XData',xm, 'YData',ym)
end
drawnow
end

% -------------------------------------------------------------------------

function [x, y] = rotxy(x0, y0, theta, xc, yc)
% 将 (x0,y0) 绕 (xc,yc) 旋转 theta
if nargin==3; xc = 0; yc = 0; end
x0 = x0 - xc; y0 = y0 - yc;
x =  x0*cos(theta) - y0*sin(theta) + xc;
y =  x0*sin(theta) + y0*cos(theta) + yc;
end
```