



UNIVERSITÉ  
LAVAL

---

**Laboratoire 2 : Mesure de la fonction de transfert d'un moteur**

---

Réalisé par  
Philippe Morin (536 776 382)  
Maxime Tousignant-Tremblay (536 763 988)

Dans le cadre du cours  
Systèmes et commandes linéaires (GEL-2005)

Poste utilisé : PCETU-116  
Date du laboratoire : 8 novembre 2021, 15h30

Travail présenté au professeur  
André Desbiens

Du département de génie électrique et génie informatique  
Faculté des Sciences et de Génie

22 novembre 2021

## Préparation

### 3.1 Fonction de transfert du tachymètre

$$G_T = K_T = \frac{7 \text{ V}}{1000 \text{ RPM}} = \frac{7 \text{ V}}{1000 \text{ RPM}} \frac{60 \text{ s}}{2\pi \text{ rad}} \approx 0,0668 \text{ V/rad/s}$$

### 3.2 Fonction de transfert théorique du moteur

(a) Calculez la fonction de transfert théorique du moteur en vitesse ( $\omega_M/V_a$ ).

(i) Donnez l'expression analytique générale.

$$\begin{aligned} \frac{\omega_M(s)}{V_a(s)} &= \frac{K_M}{L_a J s^2 + (J R_a + L_a K_f) s + R_a K_f + K_M K_b} \\ &= \frac{\frac{K_M}{R_a}}{\frac{L_a J}{R_a} s^2 + \left( J + \frac{L_a K_f}{R_a} \right) s + K_f + \frac{K_M K_b}{R_a}} \end{aligned}$$

(ii) Donnez l'expression analytique lorsqu'on néglige le frottement et l'inductance de l'induit, i.e si  $k_f \approx 0$ .

$$\frac{\omega_M(s)}{V_a(s)} = \frac{K_M}{J R_a s + K_M K_b} = \frac{\frac{1}{K_b}}{\frac{J R_a}{K_M K_b} s + 1}$$

(iii) Donnez l'expression numérique lorsqu'on néglige le frottement et l'inductance de l'induit, i.e si  $L_a, k_f \approx 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_b} &= \frac{\omega_v^*}{V_a^*} \approx \frac{523,6}{12} \approx 43,63 \\ \frac{K_M}{R_a} &= \left( \frac{K_M}{R_a} \right)^{-1} = \left( \frac{\tau_{Mb}^*}{V_a^*} \right)^{-1} \approx \left( \frac{0,016944}{12} \right)^{-1} \approx 0,001412^{-1} \end{aligned}$$

On substitut dans l'équation trouvée en (ii), puis nous obtenons :

$$\frac{\omega_M(s)}{V_a(s)} \approx \frac{43,63}{3 \cdot 10^{-6} (0,001412^{-1}) (43,63) s + 1} \approx \frac{43,63}{0,0926983 s + 1}$$

- (b) Calculez la fonction de transfert théorique du système complet en vitesse ( $V_{\omega f}/V_{in}$ )
- (i) Donnez l'expression analytique générale, incluant la présence d'une charge. Avec les engrenages, nous avons :

$$\begin{aligned}\tau_c &= K_{fc}\dot{\theta}_c + J_c\ddot{\theta}_c \\ \tau_M &= K_{fM}\dot{\theta}_M + \frac{\tau_c}{n} + J_M\ddot{\theta}_M \\ &= K_{fM}\dot{\theta}_M + \frac{K_{fc}}{n}\dot{\theta}_c + \frac{J_c}{n}\ddot{\theta}_c + J_M\ddot{\theta}_M \\ \tau_M(s) &= K_{fM}s\theta_M(s) + \frac{K_{fc}}{n}s\theta_c(s) + \frac{J_c}{n}s^2\theta_c(s) + J_Ms^2\theta_M(s)\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\omega_M(s) &= s\theta_M(s) \\ \frac{\omega_M(s)}{n} &= \omega_c(s) = s\theta_c(s)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\tau_M(s) &= K_{fM}\omega_M(s) + \frac{K_{fc}}{n^2}\omega_M(s) + \frac{J_c}{n^2}s\omega_M(s) + J_M\omega_M(s) \\ &= \omega_M(s) \left[ K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right] + s\omega_M(s) \left[ J_M + \frac{J_c}{n^2} \right]\end{aligned}$$

En substituant l'équation précédente dans l'équation trouvée (a) (i), nous avons la fonction de transfert du moteur incluant la présence d'une charge

$$G_c(s) = \frac{K_M}{L_a \left( J_M + \frac{J_c}{n^2} \right) s^2 + \left[ R_a \left( J_M + \frac{J_c}{n^2} \right) + L_a \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) \right] s + R_a \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) + K_M K_b}$$

Soit  $K_a$  le gain statique de l'amplificateur, la fonction de transfert ( $V_{\omega f}/V_{in}$ ) s'exprime telle que :

$$\begin{aligned} \frac{V_{\omega f}}{V_{in}} &= G_a(s)G_c(s)G_T(s)G_f(s) = G_c(s) \cdot K_a \cdot K_T \cdot \frac{1}{Ts+1} = G_c(s) \cdot \frac{K_a K_T}{Ts+1} \\ &= \frac{K_a K_M K_T}{\left[ L_a \left( J_M + \frac{J_c}{n^2} \right) s^2 + \left[ R_a \left( J_M + \frac{J_c}{n^2} \right) + L_a \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) \right] s + R_a \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) + K_M K_b \right] (Ts+1)} \end{aligned}$$

- (ii) *Donnez l'expression analytique lorsqu'on néglige la charge, le frottement et l'inductance, i.e si  $J_c, K_{fM}, K_{fc}, L_a \approx 0$ .*

$$\frac{V_{\omega f}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{K_a K_T}{n K_b}}{\left( \frac{R_a J_M}{K_m K_b} s + 1 \right) (Ts+1)}$$

- (iii) *Donnez l'expression numérique lorsqu'on néglige la charge, le frottement et l'inductance.*  
On a

$$\begin{aligned} \frac{\omega_M(s)}{V_a(s)} &= \frac{43,63}{0,0926983s+1}, \text{ Donc} \\ \frac{V_{\omega f}(s)}{V_{in}(s)} &= \frac{\frac{3(0,0668)(43,63)}{5}}{(0,0926983s+1)(0,03s+1)} \\ &= \frac{1,7486904}{0,002780949s^2 + 0,1226983s+1} \end{aligned}$$

### 3.3 Fonction de transfert du potentiomètre

$$K_{pot} = \frac{V_{ali}}{2\pi N} = \frac{5}{\pi}$$

Donc,

$$\frac{V_{pot}}{\theta_c} = \frac{5}{\pi}$$

### 3.4 Forme du signal de sortie du potentiomètre

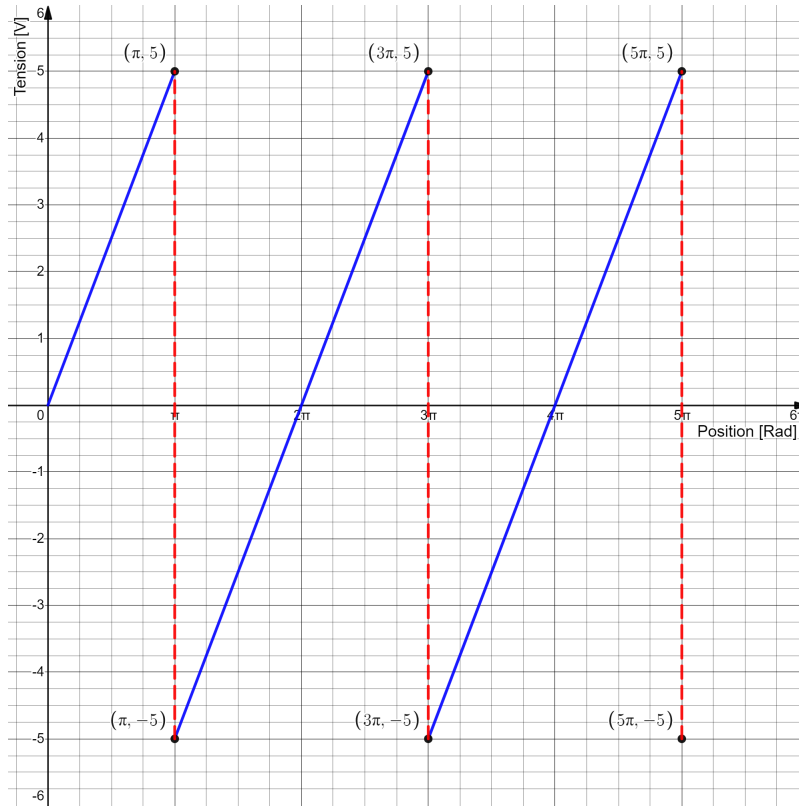


FIGURE 1 – Forme du signal de sortie du potentiomètre

### 3.5 Fonction de transfert théorique du système complet

(a) *Donnez l'expression analytique générale.*

$$\frac{V_{\theta}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{K_a K_M K_{pot}}{n}}{s \left[ L_a J_M s^2 + \left( \left( J_M + \frac{J_c}{n^2} \right) R_a + \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) L_a \right) s + R_a \left( K_{fM} + \frac{K_{fc}}{n^2} \right) + K_M K_b \right]}$$

(b) *Donnez l'expression analytique lorsqu'on néglige la charge, le frottement et l'inductance.*

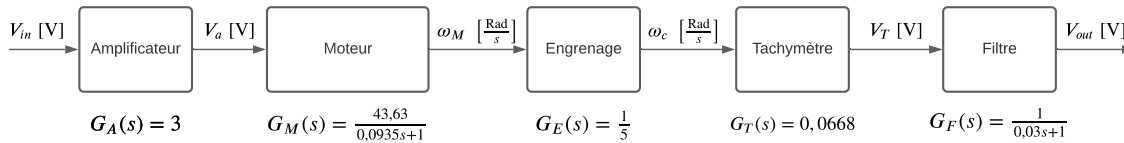
$$\frac{V_{\theta}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{K_a K_{pot}}{n K_b}}{s \left( \frac{R_a J_M}{K_M K_b} s + 1 \right)}$$

(c) *Donnez l'expression numérique lorsqu'on néglige la charge, le frottement et l'inductance.*

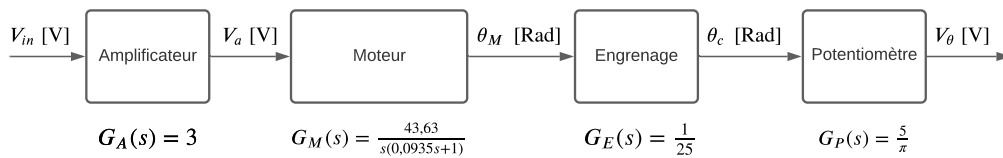
$$\frac{V_{\theta}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{43,63(3)(5)}{25\pi}}{s(0,093492s + 1)} = \frac{8,3327}{s(0,093492s + 1)}$$

### 3.6 Diagrammes fonctionnels

- (a) Tracez un diagramme fonctionnel du système complet en vitesse en indiquant les fonctions de transfert des différents éléments et les unités à la sortie de chacun des blocs.



- (b) Tracez un diagramme fonctionnel du système complet en position en indiquant les fonctions de transfert des différents éléments et les unités à la sortie de chacun des blocs.



## Questions et exercices

### 5.1 Système en vitesse sans frottement ni inertie

- (a) Justifiez le choix de votre signal d'excitation, en particulier

- (i) la valeur initiale et la valeur finale de l'échelon

La valeur initiale de l'échelon est de 0 V afin de mettre une situation initiale qui se comporte comme un système permanent ( $V_{in} = 0$ , donc  $V_{\omega f} = 0$ ). De plus, la valeur finale de l'échelon est de 2 V afin d'être éloignée de la tension minimale régit par la zone morte (0,85 V) et la valeur de saturation du signal (3,2 V).

- (ii) si la valeur initiale de l'échelon n'est pas zéro, quelle précaution faut-il prendre avant de changer l'entrée pour la valeur finale (i.e avant de débiter le test d'identification)

Si la valeur initiale n'est pas 0 V, nous devons laisser au moteur suffisamment de temps pour atteindre le régime permanent avant d'appliquer l'échelon afin d'analyser la fonction de transfert du moteur dans sa partie linéaire.

- (iii) la durée de l'échelon

Nous avons choisi un échelon d'une durée de 25 secondes afin d'obtenir un échantillonnage significatif lorsque le moteur atteint le régime permanent.

- (b) Graphiquement, à l'aide du tracé de la réponse à l'échelon du système en vitesse sans frottement ni inertie que vous avez réalisée, identifiez la fonction de transfert en vitesse du système global ( $V_{\omega f}/V_{in}$ ).

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,321}{0,078s + 1}$$

- (c) Identifiez à nouveau la fonction de transfert plus précisément à partir des données en utilisant *IdentSyst*.

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,31}{0,08s + 1}$$

- (d) Incluez dans votre rapport une figure superposant la réponse à l'échelon expérimentale, la réponse à l'échelon du modèle identifié avec *IdentSyst* (question 5.1 c) et la réponse à l'échelon du modèle théorique (question 3.2 b iii). Comment expliquez-vous la différence du gain du modèle théorique ? Comment expliquez-vous la différence de la dynamique du modèle théorique ?

L'écart entre le gain statique du modèle *IdentSyst* et du modèle théorique (1,31 et 1,75 respectivement) est en partie dû au fait que le frottement et l'inertie ont été négligés. Or, il est pratiquement impossible de négliger ces facteurs, car, même s'ils sont faibles, voir négligeables, le frottement et l'inertie ne sont jamais nuls. Cette négligence explique également que la constante de temps expérimentale soit plus petite. La différence de gain statique peut aussi être engendrée par une incertitude du gain de l'amplificateur ou du tachymètre. En effet, ces incertitudes peuvent causer un écart entre le gain statique expérimentale et théorique.

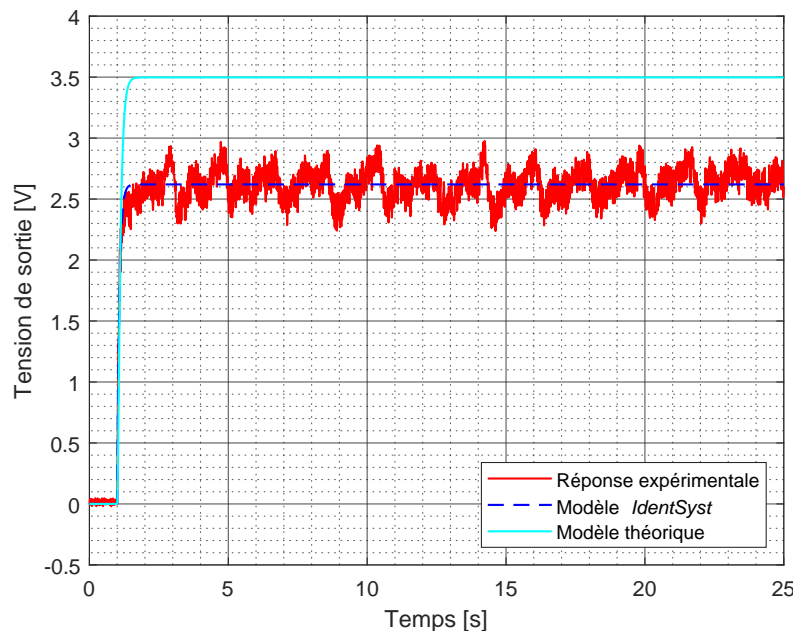


FIGURE 2 – Réponse à l'échelon expérimentale, du modèle théorique et du modèle *IdentSyst* du système en vitesse

## 5.2 Système en vitesse avec inertie supplémentaire

- (a) Graphiquement, à l'aide du tracé de la réponse à l'échelon du système en vitesse sans frottement et avec l'inertie supplémentaire que vous avez réalisée, identifiez la fonction de transfert en vitesse du système global ( $V_{\omega f}/V_{in}$ ).

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,342}{0,194s + 1}$$

- (b) Identifiez à nouveau la fonction de transfert plus précisément à partir des données en utilisant *IdentSyst*. Incluez dans votre rapport une figure superposant la réponse à l'échelon expérimentale et la réponse à l'échelon du modèle identifié avec *IdentSyst*.

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,332}{0,2s + 1}$$

- (c) Selon le modèle théorique, quels sont les effets d'une augmentation de l'inertie sur le gain statique du système et sur sa constante de temps dominante ? Est-ce que cela correspond à ce que vous observez ?

Puisque l'inertie multiplie le numérateur de l'expression donnant la constante de temps, une augmentation de l'inertie devrait théoriquement engendrer une augmentation de la constante de temps. Cette affirmation concorde bien avec les résultats expérimentaux, car la constante de temps est effectivement plus élevée. Quant au gain statique, il ne devrait pas être affecté, car l'inertie n'intervient pas dans son calcul. Encore une fois, le gain statique expérimental est demeuré similaire au gain de l'essai précédent.

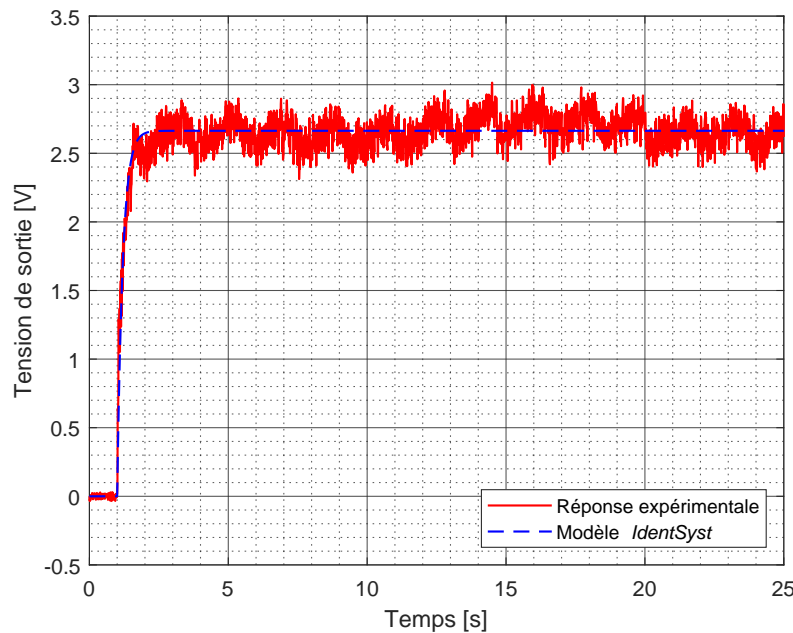


FIGURE 3 – Réponse à l'échelon expérimentale et du modèle *IdentSyst* du système en vitesse avec inertie supplémentaire



### 5.3 Système en vitesse avec frottement proportionnel à la vitesse

- (a) Graphiquement, à l'aide du tracé de la réponse à l'échelon du système en vitesse avec frottement proportionnel que vous avez réalisée, identifiez la fonction de transfert en vitesse du système global ( $V_{\omega f}/V_{in}$ ).

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,175}{0,062s + 1}$$

- (b) Identifiez à nouveau la fonction de transfert plus précisément à partir des données en utilisant *IdentSyst*. Incluez dans votre rapport une figure superposant la réponse à l'échelon expérimentale et la réponse à l'échelon du modèle identifié avec *IdentSyst*.

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{1,165}{0,05s + 1}$$

- (c) Selon le modèle théorique, quels sont les effets d'une augmentation du frottement sur le gain statique du système et sur sa constante de temps dominante ? Est-ce que cela correspond à ce que vous observez ?

$$\frac{V_{\omega f}}{V_{in}} = \frac{K_a K_M K_T}{R_a J_M s + R_a K_{fM} + K_M K_b} = \frac{\frac{K_a K_M K_T}{R_a K_{fM} + K_M K_b}}{\frac{R_a J_M}{R_a K_{fM} + K_M K_b} s + 1}$$

D'après l'équation précédente, si  $K_{fM}$  augmente, la valeur du gain statique et de la constante de temps du modèle théorique diminue. Selon la figure 4, exprimant la réponse expérimentale du système, une diminution du gain et du temps de réponse à l'échelon sont observés, ce qui converge bel et bien avec le modèle théorique.

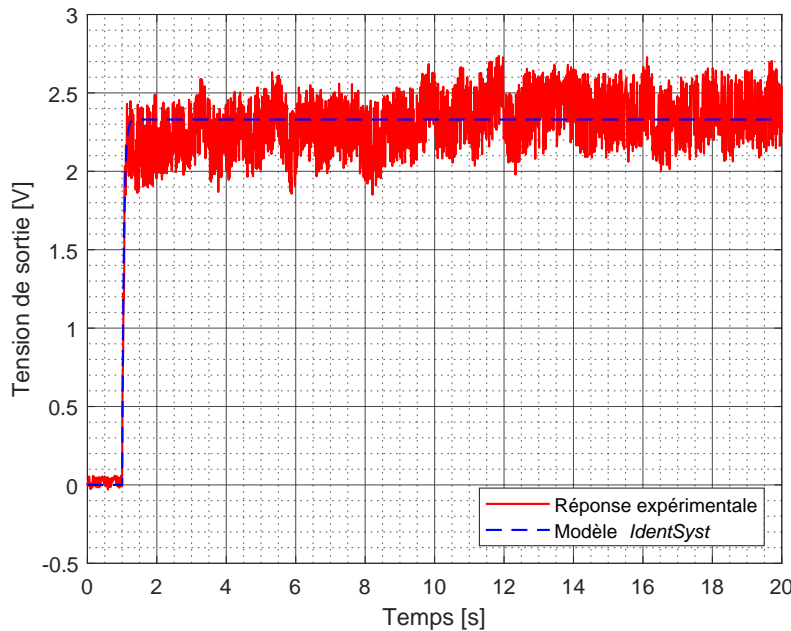


FIGURE 4 – Réponse à l'échelon expérimentale et du modèle *IdentSyst* du système en vitesse avec friction proportionnelle à la vitesse

## 5.4 Système en position

(a) *Justifiez le choix de votre signal d'excitation, en particulier*

(i) *la valeur initiale et la valeur finale de l'échelon*

La valeur initiale de l'échelon est de 0V afin d'être sûr que le moteur est immobile au départ de l'expérimentation. La valeur finale de l'échelon a été fixée à 0,85 V, car elle correspond à la tension minimale requise afin que le moteur tourne. La tension avant ce point correspond à la zone morte du système. Ainsi, à 0,85 V ( $V_a = 0V$ ). De plus, à 0,85 V, la zone de saturation n'est pas atteinte, cette dernière située à 3,2V.

(ii) *la durée de l'échelon*

La durée de l'échelon est de 25 secondes, afin d'obtenir un graphique avec plusieurs « dents de scie », qui ont été mises sous forme linéaire dans la figure 5 afin d'illustrer plus clairement les fonctions de transfert de la tension du potentiomètre.

(b) *Graphiquement, à l'aide du tracé de la réponse à l'échelon du système en position que vous avez réalisée, identifiez la fonction de transfert en position du système global ( $V_\theta/V_{in}$ ).*

$$\frac{V_\theta}{V_{in}} = \frac{2,21}{s(0,4s + 1)}$$

(c) *Identifiez à nouveau la fonction de transfert plus précisément à partir des données en utilisant IdentSyst.*

$$\frac{V_\theta}{V_{in}} = \frac{2,83}{s(0,26s + 1.2)}$$

- (d) Incluez dans votre rapport une figure superposant la réponse à l'échelon expérimentale, la réponse à l'échelon du modèle identifié avec *IdentSyst* (question 5.4 c) et la réponse à l'échelon du modèle théorique (question 3.5 c). Quelles différences remarquez-vous ? Quelles sont les raisons qui expliquent ces distinctions ?

La pente et la constante de temps du modèle expérimental sont nettement inférieures au modèle théorique. Cet écart est dû au fait que l'inductance, la charge et le frottement, qui ont été négligés dans ce dernier. En pratique, ces facteurs ne sont jamais totalement nuls et puisqu'ils contribuent à réduire la vitesse angulaire du moteur, ils réduisent de ce fait la tension de sortie du potentiomètre.

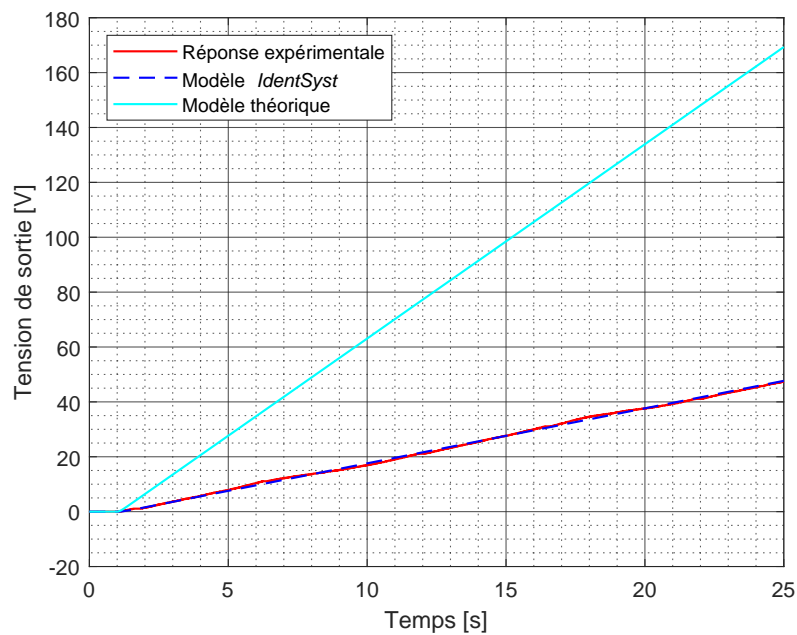


FIGURE 5 – Réponse à l'échelon expérimentale, du modèle *IdentSyst* et du modèle théorique du système en position

### 5.5 Caractéristique d'amplitude

- (a) Tracez la partie positive de la caractéristique d'amplitude du système à l'aide des données récoltées à la section 4.1.

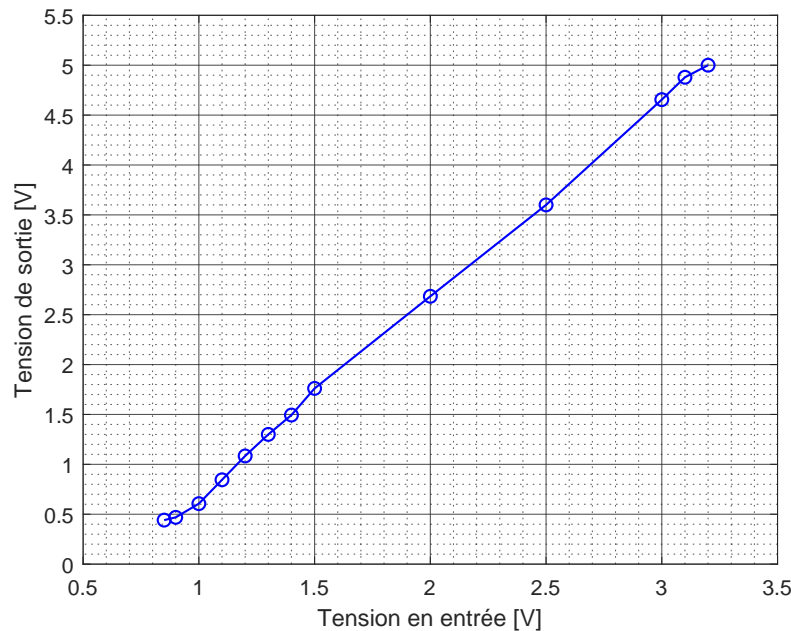


FIGURE 6 – Tension de sortie en fonction de la tension d'entrée

- (b) Y a-t-il présence d'une :

- (i) *zone morte* ? Justifiez votre réponse. Il y a bien présence d'une zone morte jusqu'à 0,85 V, car l'amplitude de sortie en régime permanent est nul sous cette valeur.
- (ii) *saturation* ? Justifiez votre réponse. Il y a bien présence d'une zone de saturation, car la sortie du système sature à 5 V lorsque la tension d'entrée est supérieur à 3,2 V.
- (iii) *courbure* ? Justifiez votre réponse. Il a bien présence d'une courbure puisqu'un système est rarement linéaire en pratique. C'est pourquoi des zones de courbe dans les zones inférieures et supérieures apparaissent dans le graphique.