TP 1: Neurosciences et inférence bayésienne

contenu développé par Simon Lizotte

Date de remise: 18 février 2024

PHY-3500 – Physique numérique (H24)

Professeur : Philippe Després et Antoine Allard

Objectif

Caractériser le comportement de neurones en analysant leurs séries temporelles d'activité à l'aide de méthodes d'intégration numérique. Se familiariser avec l'inférence bayésienne.

Introduction

Au cours des dernières décennies, le domaine des neurosciences a fait des progrès significatifs, notamment dans la compréhension de la connectivité cérébrale grâce à d'impressionnants développements en imagerie et en modélisation numérique. L'activité neuronale — la signalisation électrique et chimique à l'intérieur et entre les neurones — constitue la base de tous les processus neuronaux, depuis la réception sensorielle de base jusqu'aux fonctions cognitives supérieures. L'une des avancées les plus notables dans l'observation de l'activité neuronale est la microscopie à excitation deux photons. Cette technique d'imagerie *in vivo* à haute résolution spatio-temporelle permet d'observer la concentration fluctuante d'ions de calcium au sein des neurones, synonymes d'activité. À partir de ces mesures d'activité, les neuroscientifiques ont pu inférer l'architecture complexe du réseau cérébrale et ainsi dévoiler certaines propriétés du circuit neuronale à plusieurs échelles spatiales. Des recherches récentes se sont de plus en plus concentrées sur la compréhension de ces réseaux, explorant comment les connexions neuronales individuelles contribuent à une dynamique de réseau plus large et comment ces réseaux s'adaptent et se réorganisent en réponse à divers stimuli, au cours de l'apprentissage ou face à l'apparition de pathologies neurodégénératives.

Évidemment, une analyse sophistiquée de données neuronales dépasse largement le niveau du cours. Le travail proposé vous amènera à analyser le comportement de trois neurones en utilisant l'inférence bayésienne.

Processus de Poisson

On suppose un modèle naïf du fonctionnement des neurones dans lequel le neurone envoie de manière stochastique des impulsions instantanées, ce qu'on appelle un *événement*. On suppose également que le taux d'événements par seconde λ est constant dans le temps et que l'arrivée d'un événement n'influence par le temps d'arrivée d'un autre. Ce type de processus stochastique est un *processus de Poisson*.

Dans un processus de Poisson, on peut démontrer que les écarts entre deux événements, appelés *temps d'attente*, sont indépendants et sont distribués selon une loi exponentielle

$$f(x|\Lambda = \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0. \tag{1}$$

Notez que l'espérance de cette loi est $\mathbb{E}[X|\Lambda = \lambda] = 1/\lambda$.

Inférence bayésienne

L'inférence bayésienne est une puissante méthode d'inférence statistique qui permet d'estimer les paramètres d'un modèle. Cette description peut sembler vague, mais c'est parce qu'il s'agit d'une technique pouvant réellement être utilisée à toute les sauces.

En inférence bayésienne, on modélise une séquence de donnée X comme étant le fruit d'une expérience aléatoire. Sachant que l'écart entre deux événements d'un processus de Poisson admet une loi exponentielle et que ces écarts sont indépendants, le modèle (la vraisemblance) des écarts entre les impulsions $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1}^T$ s'écrit

$$f(\mathbf{x}|\Lambda = \lambda) = \prod_{i=1}^T f(x_i|\Lambda = \lambda) = \prod_{i=1}^T \lambda e^{-\lambda x_i}, \qquad \mathbf{x} \in (0, \infty)^T. \tag{2}$$

On suppose qu'*a priori* (avant même de mesurer les impulsions), par nos connaissances actuelles, nous croyons que ce paramètre λ est distribué selon une loi Gamma de paramètres α et β, soit

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \beta^\alpha, \qquad \lambda \in (0, \infty). \tag{3}$$

Ainsi, grâce au théorème de Bayes, on peut calculer la plausibilité $\pi(\lambda|X = \mathbf{x})$ de chaque valeur de λ pour les données observées x :

$$\pi(\lambda|X = \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}|\Lambda = \lambda)\pi(\lambda)}{f(\mathbf{x})} = \frac{1}{f(\mathbf{x})} \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \prod_{i=1}^T \lambda e^{-\lambda x_i}. \tag{4}$$

Avec $\pi(\lambda|X = \mathbf{x})$, appelée *loi a posteriori*, on peut évaluer quelle est la valeur idéale $\hat{\lambda}$ ajustée aux données à partir de l'espérance a posteriori

$$\hat{\lambda} := \mathrm{E}[\Lambda|X = \mathbf{x}] = \int_0^\infty \lambda \pi(\lambda|X = \mathbf{x}) \mathrm{d}\lambda. \tag{5}$$

Questions

Certains calculs numériques impliquent de très grands ou de très petits nombres réels. Notez qu'il est souvent possible d'améliorer la stabilité numérique d'un calcul dans cette situation en utilisant le logarithme et ses propriétés. Cette astuce n'est pas nécessaire ici, mais pourrait vous être utile si votre implémentation cause problème.

1. Trouvez analytiquement $\pi(\lambda|X = \mathbf{x})$ et déduisez la valeur de $f(\mathbf{x})$. Indice : trouvez une fonction $g(\lambda)$ proportionnelle à la loi a posteriori, ce qui vous permettra de retrouver la même forme que la loi a priori $\pi(\lambda)$. Cette loi a priori $\pi(\lambda)$ est *conjuguée* à la vraisemblance.
2. Évaluez analytiquement l'espérance a priori $\lambda_0 := \mathbb{E}[\Lambda] = \int_0^\infty \pi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ et l'espérance a posteriori $\hat{\lambda}$. Rappel : $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. Écrivez une fonction permettant de lire les données des trois fichiers textes qui vous sont fournis. Chaque ligne d'un fichier est le temps en millisecondes auquel une impulsion a été mesurée. Vous devez analyser **chaque** série de données dans les prochains exercices.
4. En inférence bayésienne, il n'est généralement pas possible d'évaluer analytiquement $f(\mathbf{x})$ et l'équation (5). En posant que $\alpha = 2$ et $\beta = 1/4$, évaluez numériquement $f(\mathbf{x})$ et $\hat{\lambda}$ pour chaque série de données x en utilisant la méthode de Simpson et la méthode de Romberg. Considérez que $\lambda = 200$ est suffisamment grand dans les bornes d'intégration [1]. Vous pouvez utiliser la fonction Gamma de `scipy`.
5. En comparant à votre solution analytique, tracez l'erreur sur $f(\mathbf{x})$ et $\hat{\lambda}$ engendrée par vos deux méthodes d'intégration en fonction du nombre de tranches pour le jeux de données de votre choix.
6. Quels sont les défis reliés à l'intégration numérique de l'évidence $f(\mathbf{x})$ en inférence bayésienne ?
7. Tracez un histogramme des fréquences relatives des écarts entre les impulsions. Tracez également la loi du modèle a priori $f(x_i|\Lambda = \lambda_0)$ et celle ajustée $f(x_i|\Lambda = \hat{\lambda})$.
8. Avec vos connaissances sur le processus de Poisson et l'inférence bayésienne, que pouvez-vous conclure du comportement de chaque neurone grâce à vos résultats ? Les processus sont-ils poissonien dans tous les cas ? Vous pouvez soutenir votre réponse en utilisant le fait que $-\log(f(\mathbf{x}))$ croît en fonction d'un modèle qui décrit de mieux en mieux les données.

Instructions pour la remise

Le travail devra être complété en trinômes sous format de cahier de bord `jupyter` (.ipynb) et remis dans la boîte de dépôt créée à cette fin. Ce document contiendra **toutes informations pertinentes** permettant au lecteur d'apprécier vos résultats et conclusions, incluant le code Python utilisé et d'éventuelles références bibliographiques. La qualité de la présentation est très importante (utilisation de sections, de graphiques appropriés, de mise en contexte, etc.).

Prenez soin de bien indiquer votre (ou vos) nom(s) dans le cahier de bord. Pour faciliter la tâche de classification, utilisez la nomenclature suivante pour le fichier transmis (un seul) :

`TPn_nom1_nom2_nom3.ipynb`

1. On peut utiliser une approche Monte Carlo pour faire ces calculs pour éviter ce genre d'approximation. Ce n'est pas ce qui est demandé ici cependant. À moins qu'un changement de variable vous permette de passer d'une intégrale sur une plage infinie à une plage finie ?