

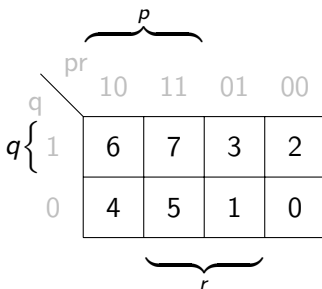
2.5: KV-Diagramme

Computerarchitekturen und Betriebssysteme Zahlensysteme und Aussagenlogik

15. Dezember 2025

KV-Diagramme

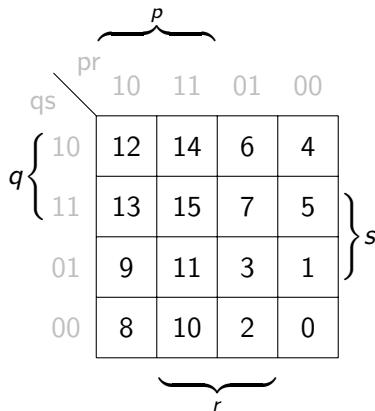
p	q	r	Binär	Dezimal
w	w	w	111	7
w	w	f	110	6
w	f	w	101	5
w	f	f	100	4
f	w	w	011	3
f	w	f	010	2
f	f	w	001	1
f	f	f	000	0



- Jeder Zeile in der Wahrheitstabelle entspricht genau eine Zelle im KV-Diagramm
- Zur Veranschaulichung schreiben wir die Wahrheitswerte als Binärzahl (0 und 1 statt f und w) und daneben die entsprechende Dezimalzahl
- Im KV-Diagramm wird die Dezimalzahl eingetragen um zu zeigen, welche Zeile welcher Zelle entspricht
- **Jeder Zelle im KV-Diagramm entspricht genau einer Basiskonjunktion!**

KV-Diagramme

<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	Binär	Dezimal
w	w	w	w	1111	15
w	w	w	f	1110	14
w	w	f	w	1101	13
w	w	f	f	1100	12
w	f	w	w	1011	11
w	f	w	f	1010	10
w	f	f	w	1001	9
w	f	f	f	1000	8
f	w	w	w	0111	7
f	w	w	f	0110	6
f	w	f	w	0101	5
f	w	f	f	0100	4
f	f	w	w	0011	3
f	f	w	f	0010	2
f	f	f	w	0001	1
f	f	f	f	0000	0



KV-Diagramme

- Der eigentliche Verwendungszweck von KV-Diagrammen liegt in der Bestimmung möglichst kompakter Formeln zu gegebenen Wahrheitswerten.
 - Möglichst kompakt bedeutet hierbei, dass so wenige Operatoren wie möglich in der Formel vorkommen sollen.

- Gegeben seien zum Beispiel die Wahrheitswerte:

ffff ffww wwww wwww

- Zunächst werden diese Wahrheitswerte in die entsprechenden Zellen des KV-Diagramms eingetragen.
- Jede Zelle im KV-Diagramm entspricht einer Basiskonjunktion.
- Eine einfachere Formel kann nun gefunden werden, indem größere Blöcke im KV-Diagramm gefunden werden.
 - Diese größeren Blöcke entsprechen Mintermen, die mehrere Basiskonjunktionen zusammenfassen (Distributivgesetze).

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

● $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$

		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		r			

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$

		p			
		pr			
		10	11	01	00
qs	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$

		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		s			
		r			

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$

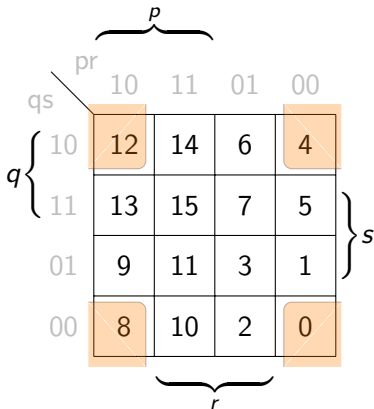
		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0

The diagram shows a 4x4 Karnaugh map with variables p , r , q , and s . The columns are labeled by pr (10, 11, 01, 00) and the rows by qs (10, 11, 01, 00). The cells contain decimal values from 0 to 15. A 2x2 block of cells (15, 7, 11, 3) is highlighted in pink. A bracket labeled s is on the right, indicating the rows $qs=11$ and $qs=01$. A bracket labeled r is at the bottom, indicating the columns $pr=11$ and $pr=01$.

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$



KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$

		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		r			

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

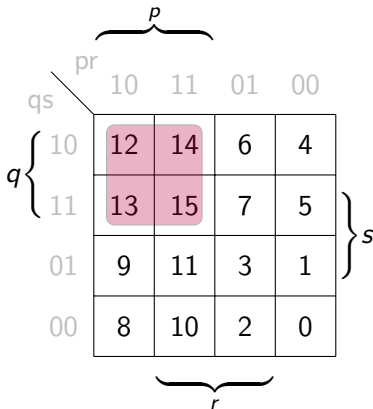
- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$

		p			
		pr			
		10	11	01	00
qs	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
		9	11	3	1
		8	10	2	0
		r			

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$
- $p \wedge q$



KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		r			

The diagram shows a 4x4 Karnaugh map with rows labeled by qs (10, 11, 01, 00) and columns labeled by pr (10, 11, 01, 00). The top two rows (10 and 11) are grouped by a bracket labeled s . The first two columns (10 and 11) are grouped by a bracket labeled p . The bottom two columns (01 and 00) are grouped by a bracket labeled r . The cells in the top two rows and first two columns (12, 14, 6, 4, 13, 15, 7, 5) are highlighted in orange.

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$

- $q \wedge \neg s$

- $\neg p \wedge \neg s$

- $r \wedge s$

- $\neg r \wedge \neg s$

- $\neg r \wedge s$

- $p \wedge q \wedge \neg r$

- $p \wedge q$

- q

KV-Diagramme

Beispiel: Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

		p			
		pr			
		10	11	01	00
q	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		r			

• $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$

• $q \wedge \neg s$

• $\neg p \wedge \neg s$

• $r \wedge s$

• $\neg r \wedge \neg s$

• $\neg r \wedge s$

• $p \wedge q \wedge \neg r$

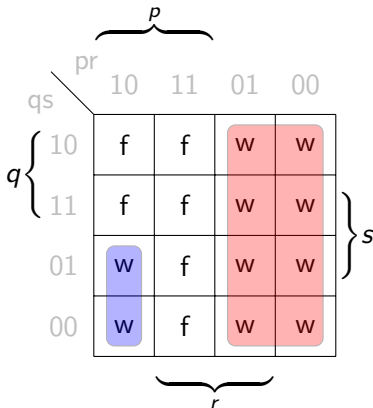
• $p \wedge q$

• q

• $p \wedge \neg r$

KV-Diagramme

Beispiel: ffff ffww wwww wwww

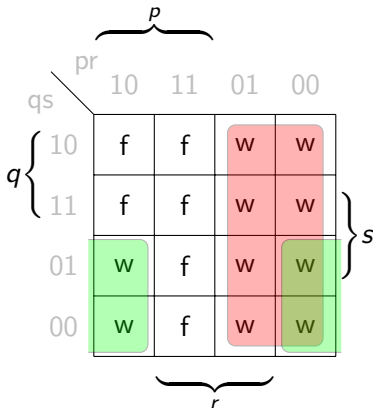


- Wir suchen möglichst große Blöcke die w-Felder überdecken:

- $\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

KV-Diagramme

Beispiel: ffff ffww wwww wwww



- Wir suchen möglichst große Blöcke die w-Felder überdecken:
- $\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
- Wir können eine kleinere Formel erhalten, wenn wir zulassen, dass die Blöcke überlappen:
- $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

KV-Diagramme: Verwendung von “falsch”-Blöcken

- Alternativ können auch “falsch”-Blöcke zur Ermittlung einer Formel herangezogen werden
- Erster Block: $p \wedge q$
- Zweiter Block: $p \wedge r$
- Wir erhalten

$$\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

- Mittels Distributivgesetz erhalten wir dann

$$\neg(p \wedge (q \vee r)),$$

- und weiters mittels De Morgan

$$\neg p \vee \neg(q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

KNF mittels KV-Diagramm

- Eine (minimale) KNF kann ebenso mittels KV-Diagramm ermittelt werden.
- Hierzu werden “falsch”-Blöcke (statt der “wahr”-Blöcke) gesucht.
- Die Formulierung dieser Blöcke erfolgt jedoch als Maxterm.
- Hierzu werden die **negierten Literale** verwendet (wie bei Ermittlung der KKNF).

Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

p	q	r	s	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte (p) und die untere Hälfte ($\neg p$).

Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

p	q	r	s	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte (p) und die untere Hälfte ($\neg p$).
- Der Minterm $\neg p$ beschreibt alle Ergebniswerte **w** der unteren Hälfte der Tabelle.

Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

p	q	r	s	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte (p) und die untere Hälfte ($\neg p$).
- Der Minterm $\neg p$ beschreibt alle Ergebniswerte **w** der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

p	q	r	s	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte (p) und die untere Hälfte ($\neg p$).
- Der Minterm $\neg p$ beschreibt alle Ergebniswerte **w** der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- Wie im KV-Diagramm können wir anstatt dessen jedoch den einfacheren Minterm $\neg q \wedge \neg r$ heranziehen.

Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

p	q	r	s	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte (p) und die untere Hälfte ($\neg p$).
- Der Minterm $\neg p$ beschreibt alle Ergebniswerte **w** der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- Wie im KV-Diagramm können wir anstatt dessen jedoch den einfacheren Minterm $\neg q \wedge \neg r$ heranziehen.
- Wir erhalten also $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

Zusammenfassung

- KV-Diagramme können auch für mehr als 4 Variable verwendet werden, indem das Diagramm gespiegelt wird, und die neue Variable das Diagramm wieder in zwei Hälften unterteilt.
- Dieses Vorgehen wird jedoch ab 6 Variablen sehr unübersichtlich.
- Die Methode des Heraushebens von Variablen ist auch für mehrere Variable anwendbar.
- Die Größe der resultierenden Formel hängt im Wesentlichen von der Reihenfolge der herausgehobenen Variablen ab.
- Um kleinstmögliche Formeln zu erhalten ist ein gewisses Geschick erforderlich.
- Gegebenenfalls können erhaltene Formeln durch Anwendung der Distributivgesetze weiter vereinfacht werden.

Übungsaufgaben

Gegeben seien die Formeln:

$$a : \neg r \vee p \rightarrow q \wedge \neg p$$

$$b : \neg(p \leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r \rightarrow \neg p)$$

$$c : p \rightarrow q \wedge (r \leftrightarrow p)$$

Übungsaufgaben [2.5.1-3]

- 2.5.1 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel a mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle
- 2.5.2 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel b mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle
- 2.5.3 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel c mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben [2.5.4-5]

2.5.4 Gegeben sei das folgende Ergebnis einer aussagenlogischen Formel:

wfwf fwwf wwff ffwf

Ermitteln Sie eine möglichst kompakte Formel (hinsichtlich der Anzahl der vorkommenden Literale) mittels (1) KV-Diagramm, und (2) Herausheben.

2.5.5 Gegeben sei das folgende Ergebnis einer aussagenlogischen Formel:

wwfw wwfw ffwf wwff

Ermitteln Sie eine möglichst kompakte Formel (hinsichtlich der Anzahl der vorkommenden Literale) mittels (1) KV-Diagramm, und (2) Herausheben.

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben [2.5.6-10]

Bilden Sie mit Hilfe des KV-Diagramms zu folgenden Formeln möglichst einfache äquivalente Formeln:

$$2.5.6 \quad (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (r \vee p)$$

$$2.5.7 \quad (\neg(q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \rightarrow p)$$

$$2.5.8 \quad (r \wedge \neg q) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge \neg q))$$

$$2.5.9 \quad \neg(\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge s) \rightarrow (r \vee \neg\neg p)$$

$$2.5.10 \quad (s \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$