Graphentheorie: Bäume

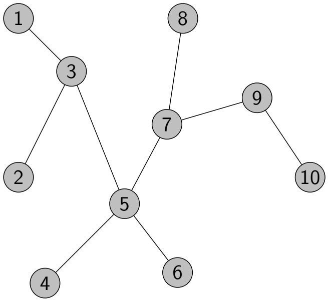
Programmieren und Software-Engineering
Theorie

23. Dezember 2025

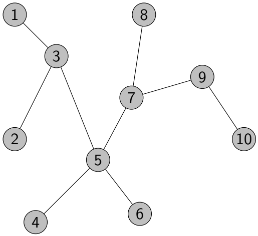
Bäume

Definition (Baum)

Ein zusammenhängender Graph der keine Kreise enthält wird *Baum T* genannt.



Bäume



Ein Baum T kann durch folgende äquivalente Aussagen charakterisiert werden:

- T ist ein Baum
- T ist zusammenhängend und kreisfrei
- Zwei beliebige Knoten von T sind durch genau einen Weg verbunden
- T hat $n - 1$ Kanten und ist zusammenhängend
- T hat $n - 1$ Kanten und ist kreisfrei
- T ist zusammenhängend und jede Kante ist eine Brücke

Begriffe

- **Grad eines Baumes:** maximaler Grad eines Knoten des Baumes
- **Blatt:** Knoten mit Grad 1 heißen *Blätter* des Baumes. Blätter haben nur einen Nachbarn. Jeder Baum hat mindestens ein Blatt.
- **Ast:** Die Kanten eines Baumes werden auch als *Äste* bezeichnet.
- **Innerer Knoten:** Ein Knoten heißt *innerer Knoten* wenn er kein Blatt ist.

Anmerkung: Bäume haben zahlreiche Anwendungen in der Informatik als Datenstrukturen, z.B. können Objekte in Bäumen so abgespeichert werden, dass sie schnell gesucht (gefunden) werden können!

Wurzelbäume, Arboreszenzen

Definition (Wurzelbaum, Arboreszenz)

Ein gerichteter Graph G heißt *Wurzelbaum* oder *Arboreszenz*, wenn er

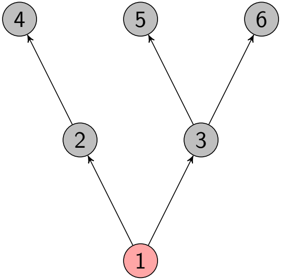
- zusammenhängend ist, und
- es genau einen Knoten $w \in V(G)$ gibt mit $d^-(w) = 0$, und
- für alle anderen Knoten $v \in V(G)$ gilt $d^-(v) = 1$.

Hierbei bezeichnet $d^-(v)$ den *Eingangsgrad* (engl. in-degree), also die Anzahl der zum Knoten führenden Kanten. Der *Ausgangsgrad* $d^+(v)$ (engl. out-degree) bezeichnet hingegen die vom Knoten wegführenden Kanten.

Anmerkung: Ein Wurzelbaum ist zusammenhängend und hat genau einen Knoten mit Eingangsgrad 0. Jeder andere Knoten hat den Eingangsgrad 1. Eine Arboreszenz ist ein gerichteter Graph dessen Schatten ein Baum ist, sodass ein Knoten w ausgezeichnet ist (Wurzel), und jede Kante der Arboreszenz von w weggerichtet ist.

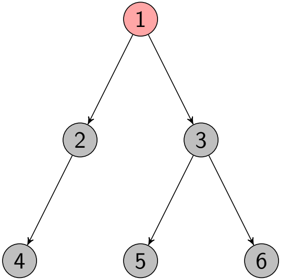
Wurzelbäume, Arboreszenzen

Beispiel: Ursprünglich wurden Wurzelbäume so gezeichnet:



Wurzelbäume, Arboreszenzen

Beispiel: Heute wird die Wurzel immer oben gezeichnet.

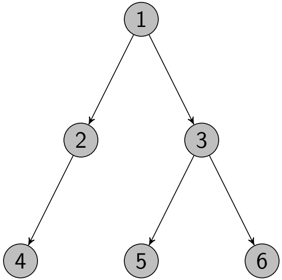


Binärbaum

In einem Wurzelbaum bezeichnet man alle Knoten u als Kinder von v wenn eine Kante (v, u) existiert.

Definition (Binärbaum)

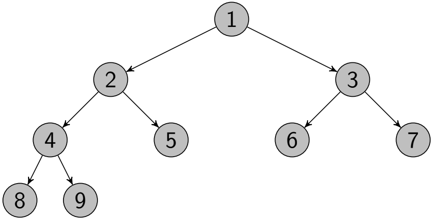
Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum in dem jeder Knoten maximal zwei Kinder hat.



Voller Binärbaum

Definition (Voller Binärbaum)

Ein Binärbaum ist *voll*, wenn alle Knoten entweder 0 oder 2 Kinder haben.



Binärbaum

Ein *Binärbaum* ist ein (gerichteter) Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei **Kinder** besitzt. Manchmal wird eine explizite Unterscheidung zwischen linkem und rechtem Kind vorgenommen. Wir unterscheiden:

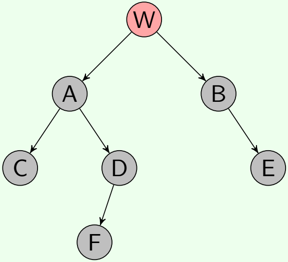
- **Voller Binärbaum** (auch: *strikt* oder *saturiert* gennant): Jeder innere Knoten besitzt *genau* zwei Kinder. (Ein Blatt hat keine Kinder.)
- **Vollständiger Binärbaum**: Alle Ebenen sind gefüllt, außer evtl. die letzte, die von links nach rechts gefüllt wird.
- **Perfekter Binärbaum**: Voller Binärbaum, bei dem alle Blätter die selbe Distanz zur Wurzel haben.

Remark: Literaturhinweis: Manche Quellen verwenden die Begriffe *voll* und *vollständig* synonym oder vertauscht. Hier gilt: "voll" $\Rightarrow$ jeder innere Knoten hat zwei Kinder; "vollständig" $\Rightarrow$ linkslückenlose Füllung der Ebenen.

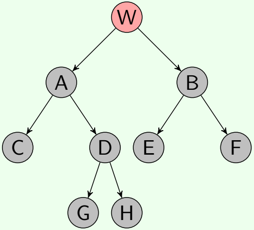
Arten von Binärbäumen

Beispiele

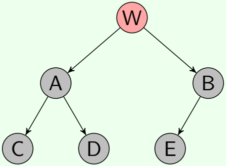
Allgemeiner Binärbaum



Voller, aber nicht vollständig



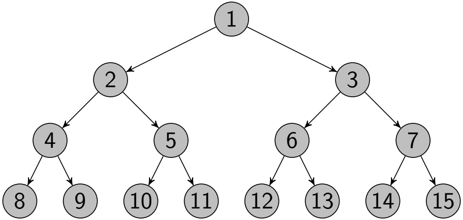
Vollständig, aber nicht voll



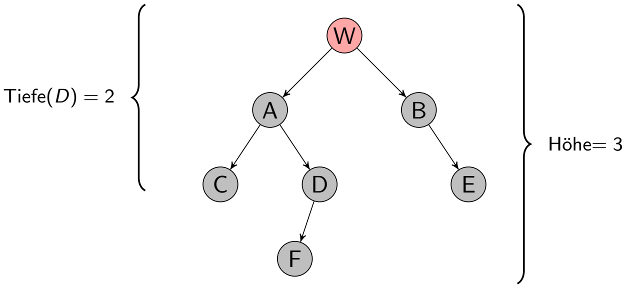
Links: jeder innere Knoten hat zwei Kinder (voll); mittig: volle Struktur, aber letzte Ebene nicht lückenlos (nicht vollständig); rechts: Ebenen füllen sich lückenlos von links, aber Knoten *B* hat nur ein Kind (nicht voll).

Perfekter Binärbaum

Beispiel: Perfekter Binärbaum: voller Binärbaum bei dem alle Blätter die selbe Distanz zur Wurzel (Tiefe) haben.

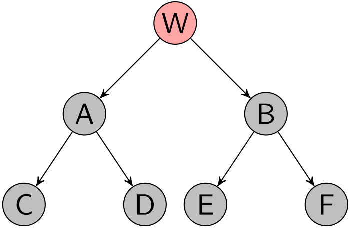


Höhe und Tiefe eines Baumes



- Tiefe(v) = Anzahl Kanten des Weges von der Wurzel zu v
- Höhe(T) = maximale Tiefe über alle Knoten

Zusammenhang Höhe und Anzahl an Blättern



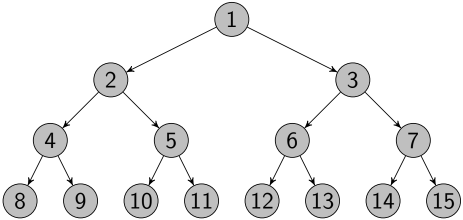
Ebene 0: 1 Knoten $= 2^0$ Knoten

Ebene 1: 2 Knoten $= 2^1$ Knoten

Ebene 2: 4 Knoten $= 2^2$ Knoten

- Ein perfekter Binärbaum mit Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{(h+1)} - 1$ Knoten.
- Ein perfekter Binärbaum mit n Blättern hat $h = \mathrm{ld}\ n$.
- Dabei steht ld für den *Logarithmus Dualis*, also den Logarithmus zur Basis 2.

Perfekter Binärbaum



Tiefe	Anzahl Knoten
0	1
1	2
2	4
3	8

Vollständiger Binärbaum

In jeder Ebene vedoppelt sich die Anzahl der Knoten.

Zusammenhang: Tiefe – Anzahl an Knoten pro Ebene

Die Tiefe t hängt mit der Anzahl der Knoten n in dieser Ebene wie folgt zusammen:

$$2^t = n$$

Die Höhe h eines vollständigen Binärbaumes ist der *Logarithmus Dualis* der Anzahl der Blätter (hier ebenso mit n bezeichnet):

$$h = \mathrm{ld} n$$

Der Logarithmus Dualis hängt mit dem natürlichen Logaritmus wie folgt zusammen:

$$\mathrm{ld} a = \log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$$

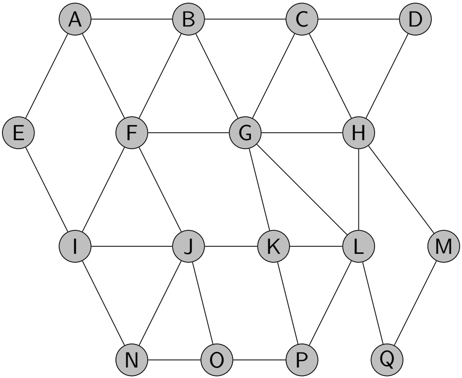
Spannbäume

Definition (Spannbaum)

Ein *Spannbaum* T zu einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein (auf-)spannender Teilgraph von G der ein Baum ist.

Beispiel 8.1.3

Gegeben sei der folgende Graph G:



Bestimmen Sie einen Spannbaum mit

1. größtem Durchmesser,
2. kleinstem Radius,
3. der Eigenschaft, dass er ein voller Binärbaum ist. Konkret soll hier der Schatten des Binärbaumes ein Teilgraph von G sein.