2.4: Normalformen

Computerarchitekturen und Betriebssysteme
Zahlensysteme und Aussagenlogik

15. Dezember 2025

Normalformen

- **Literal:** negierte oder nicht negierte Aussagenvariable oder Konstante

  Beispiel: $p, q, \neg r, \mathrm{w}, \neg \mathrm{f}$

- **Minterm:** Konjunktion von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Literalen:

  Beispiel: $p \wedge \neg q \wedge \mathrm{w} \wedge \neg q \wedge \neg p$

- **Maxterm:** Disjunktion von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Literalen:

  Beispiel: $p \vee \neg q \vee \mathrm{w} \vee \neg q \vee \neg p$

Normalformen

- **Disjunktive Normalform (DNF):** Disjunktion von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Mintermen

  Beispiel: $(p \wedge \neg q \wedge \mathrm{w}) \vee (r \wedge s \wedge \neg t) \vee (s \wedge s \wedge \mathrm{f})$

- **Konjunktive Normalform (KNF):** Konjunktion von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Maxtermen

  Beispiel: $(p \vee \neg q \vee \mathrm{w}) \wedge (r \vee s \vee \neg t) \wedge (s \vee s \vee \mathrm{f})$

Normalformen

- **Basiskonjunktion:** Minterm, der alle gegebenen Aussagenvariablen genau einmal als Literal enthält (jedoch nicht w oder f)

  Beispiel: Bezüglich der Aussagenvariablen p, q und r ist $p \wedge \neg q \wedge r$ eine Basiskonjunktion

- **Basisdisjunktion:** Maxterm, der alle gegebenen Aussagenvariablen genau einmal als Literal enthält (jedoch nicht w oder f)

  Beispiel: $p \vee q \vee \neg r$

Anmerkung: Bei Basiskonjunktion/disjunktionen sollen per Konvention die Aussagenvariablen in alphabetischer Reihenfolge auftreten.

Normalformen

- **Kanonische (ausgezeichnete) DNF (KDNF):** Disjunktive Verknüpfung von Basiskonjunktionen, bei der jede Basiskonjunktion höchstens einmal auftritt

  Beispiel: $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

  Anmerkung: Dieses Beispiel zeigt also eine KDNF zu einer Formel (bzw. einem Wahrheitsverlauf) mit *drei* Variablen.

- **Kanonische (ausgezeichnete) KNF (KKNF):** Konjunktive Verknüpfung von Basisdisjunktionen, bei der jede Basisdisjunktion höchstens einmal auftritt

  Beispiel: $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Anmerkung: Darüber hinaus ist auch die Konstante f alleine eine DNF (KDNF), bzw. w eine KNF (KKNF).

Normalformen

Die Normalformen ermöglichen uns eine einheitliche Darstellung von aussagenlogischen Formeln. Diese sind jedoch nicht immer minimal bezüglich der Anzahl der vorkommenden Junktoren und Variablen.
Zu jeder aussagenlogischen Formel existiert eine äquivalente KDNF (bzw. KKNF).

Beispiel: Wir suchen eine KDNF zur Formel

$$\neg(\neg p \to q) \vee r$$

Anhand dieses Beispiels wird nun ein Lösungsverfahren (Algorithmus) angegeben (3 Schritte).

KDNF: 1. Schritt

Wahrheitstafel:

p	q	r	$\neg$	$(\neg p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	r	
w	w	w	f	f	w		w		(i)
w	w	f	f	f	w		f		
w	f	w	f	f	w		w		(ii)
w	f	f	f	f	w		f		
f	w	w	f	w	w		w		(iii)
f	w	f	f	w	w		f		
f	f	w	w	w	f		w		(iv)
f	f	f	w	w	f		w		(v)
			(3)	(1)	(2)		(4)		

KDNF: 2. Schritt

Wir suchen in der Ergebnisspalte alle Zeilen, in denen als Resultat w steht (die mit (i) bis (v) gekennzeichneten Zeilen). Nun bilden wir der Reihe nach Basiskonjunktionen wie folgt: wir verfolgen die Zeilen, in denen w steht, nach links und schauen für welche Wahrheitsannahmen über p, q, r als Resultat w herauskommt. Hat die Variable den Wert w, dann nehmen wir die Variable als Literal, hat sie den Wert f, dann ihre Negation. Danach fügen wir die Literale konjunktiv zusammen.

Zeile	Wahrheitswerte von			Literale			Basiskonjunktion
	p	q	r				
(i)	w	w	w	p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
(ii)	w	f	w	p	$\neg q$	r	$p \wedge \neg q \wedge r$
(iii)	f	w	w	$\neg p$	q	r	$\neg p \wedge q \wedge r$
(iv)	f	f	w	$\neg p$	$\neg q$	r	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
(v)	f	f	f	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

KDNF: 3. Schritt

Wir fügen die Basiskonjunktionen disjunktiv zusammen und erhalten eine KDNF, die zur gegebenen Formel $\neg(\neg p \to q) \vee r$ äquivalent ist:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Begründung der Richtigkeit der Methode

- Eine Basiskonjunktion ist nur dann wahr, wenn alle Literale wahr sind (deshalb muß man, falls eine Variable den Wahrheitswert f hat, deren Negation verwende)
- Die Disjunktion von Basiskonjunktionen ist genau dann wahr, wenn mindestens eine Basiskonjunktion wahr ist.
- Jede andere Wahrheitsannahme über p, q, r macht alle Basiskonjunktionen falsch und somit auch deren Disjunktion.

Die KDNF hat daher genau die gleichen Wahrheitswerte wie die gegebene Formel und ist somit zu ihr äquivalent.

Anmerkung: Kommen in der Resultatsspalte nur die Wahrheitswerte f vor, dann ist f die äquivalente KDNF.

KKNF

- Die Bildung der KKNF verläuft (relativ) analog zur KDNF.
- In Schritt 1 werden jene Zeilen gewählt, die f ergeben
- In Schritt 2 werden dann die **negierten Literale** zu **Basisdisjunktionen** zusammengefügt.
- Abschliessend werden die erhaltenen Basisdisjunktionen **konjunktiv** verknüpft.

Anmerkung: Kommen in der Resultatsspalte nur Werte w vor, dann ist w die äquivalente KKNF.

Dualitätsprinzip

Sind zwei Ausdrücke a und b, in denen nur die Junktoren $\neg, \wedge, und \vee$ vorkommen, äquivalent, dann sind auch die Formeln, die aus a und b dadurch entstehen, dass alle auftretenden $\wedge$ durch $\vee$, sowie $\vee$ durch $\wedge$, und w durch f, sowie f durch w ersetzt werden, ebenfalls äquivalent.

Beispiel:

$$a \wedge \mathrm{w} \leftrightarrow a \equiv a \vee \mathrm{f} \leftrightarrow a$$

Übungsbeispiele

Gegeben seien die Formeln:

$a : \neg r \vee p \rightarrow q \wedge \neg p$

$b : \neg(p \leftrightarrow \neg q \vee \neg p \vee r \rightarrow \neg p)$

$c : p \rightarrow q \wedge (r \leftrightarrow p)$

Übungsbeispiele [6.1]

1. Bestimmen Sie die KDNF zur Formel a.
2. Bestimmen Sie die KKNF zur Formel a.
3. Bestimmen Sie die KDNF zur Formel b.
4. Bestimmen Sie die KKNF zur Formel b.
5. Bestimmen Sie die KDNF zur Formel c.
6. Bestimmen Sie die KKNF zur Formel c.

Übungsbeispiele

Übungsbeispiele [6.2]

1. Bestimmen Sie die KDNF/KKNF zur Formel a durch Umformung
2. Bestimmen Sie die KDNF/KKNF zur Formel b durch Umformung
3. Bestimmen Sie die KDNF/KKNF zur Formel c durch Umformung
4. Gegeben sei die KDNF

   $$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

   Ermitteln Sie die zugehörige KKNF.
5. Bringen Sie die Formel $(\neg\neg p \to q) \leftrightarrow (q \to p \wedge q \vee \neg \mathrm{f})$ auf eine DNF.