

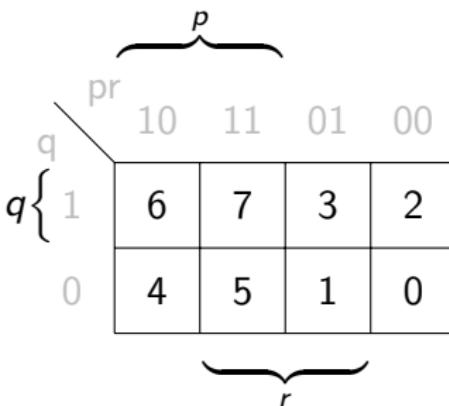
## 2.5: KV-Diagramme

# Computerarchitekturen und Betriebssysteme Zahlensysteme und Aussagenlogik

15. Dezember 2025

# KV-Diagramme

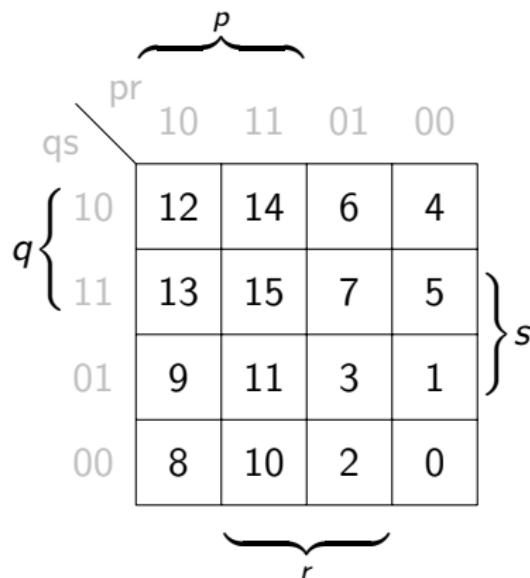
$p$	$q$	$r$	Binär	Dezimal
w	w	w	111	7
w	w	f	110	6
w	f	w	101	5
w	f	f	100	4
f	w	w	011	3
f	w	f	010	2
f	f	w	001	1
f	f	f	000	0



- Jeder Zeile in der Wahrheitstabelle entspricht genau eine Zelle im KV-Diagramm
- Zur Veranschaulichung schreiben wir die Wahrheitswerte als Binärzahl (0 und 1 statt f und w) und daneben die entsprechende Dezimalzahl
- Im KV-Diagramm wird die Dezimalzahl eingetragen um zu zeigen, welche Zeile welcher Zelle entspricht
- **Jeder Zelle im KV-Diagramm entspricht genau einer Basiskonjunktion!**

## KV-Diagramme

$p$	$q$	$r$	$s$	Binär	Dezimal
w	w	w	w	1111	15
w	w	w	f	1110	14
w	w	f	w	1101	13
w	w	f	f	1100	12
w	f	w	w	1011	11
w	f	w	f	1010	10
w	f	f	w	1001	9
w	f	f	f	1000	8
f	w	w	w	0111	7
f	w	w	f	0110	6
f	w	f	w	0101	5
f	w	f	f	0100	4
f	f	w	w	0011	3
f	f	w	f	0010	2
f	f	f	w	0001	1
f	f	f	f	0000	0



# KV-Diagramme

- Der eigentliche Verwendungszweck von KV-Diagrammen liegt in der Bestimmung möglichst kompakter Formeln zu gegebenen Wahrheitswerten.
  - Möglichst kompakt bedeutet hierbei, dass so wenige Operatoren wie möglich in der Formel vorkommen sollen.
- Gegeben seien zum Beispiel die Wahrheitswerte:

ffff ffww wwww wwww

- Zunächst werden diese Wahrheitswerte in die entsprechenden Zellen des KV-Diagramms eingetragen.
- Jede Zelle im KV-Diagramm entspricht einer Basiskonjunktion.
- Eine einfachere Formel kann nun gefunden werden, indem größere Blöcke im KV-Diagramm gefunden werden.
  - Diese größeren Blöcke entsprechen Mintermen, die mehrere Basiskonjunktionen zusammenfassen (Distributivgesetze).

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$

		pr	10	11	01	00
		qs	12	14	6	4
q		10	13	15	7	5
11		01	9	11	3	1
00		00	8	10	2	0

$\overbrace{\hspace{10em}}^r$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

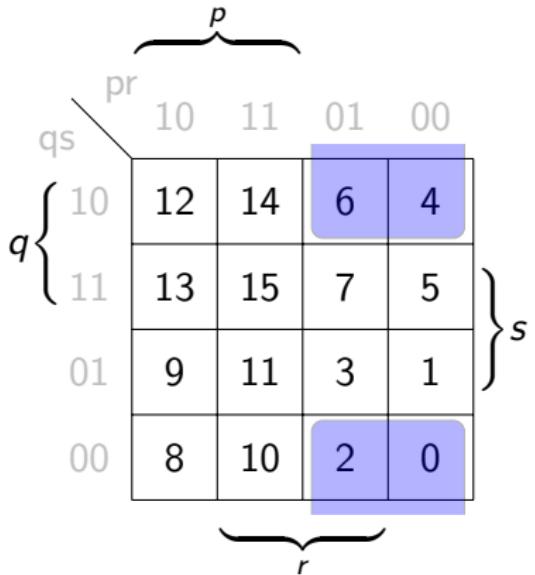
A KV-Diagramm (Karnaugh Map) with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are mapped to binary values as follows:  $p$  (top row) has values 10, 11, 01, 00;  $qs$  (leftmost column) has values 10, 11, 01, 00;  $q$  (vertical column) has values 10, 11, 01, 00; and  $r$  (bottom row) has values 12, 14, 6, 4, 13, 15, 7, 5, 9, 11, 3, 1, 8, 10, 2, 0. The map is a 4x4 grid of 16 cells, labeled with minterms 0 through 15. The minterms are grouped into four 2x2 blocks, each highlighted with a red background. The first block (top-left) contains minterms 12, 14, 6, and 4. The second block (top-right) contains minterms 13, 15, 7, and 5. The third block (bottom-left) contains minterms 9, 11, 3, and 1. The fourth block (bottom-right) contains minterms 8, 10, 2, and 0.

				$p$
$qs$	10	11	01	00
$q$	10	11	01	00
12	14	6	4	
13	15	7	5	
9	11	3	1	
8	10	2	0	
				$r$

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:



- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

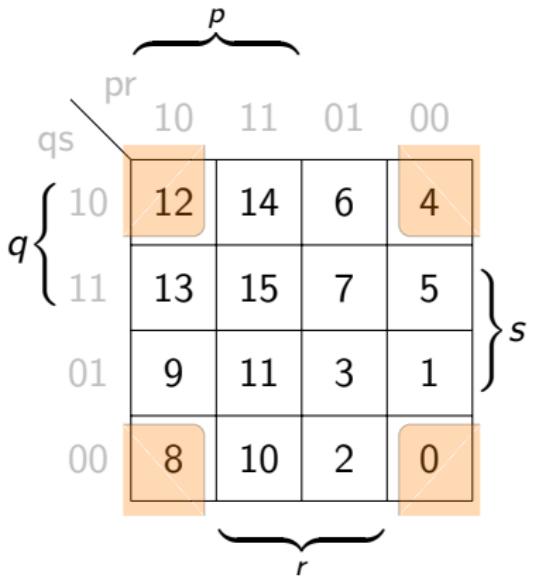
A KV-Diagramm (Karnaugh Map) with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are mapped to binary values as follows:  $p$  (top row) has values 10, 11, 01, 00;  $q$  (leftmost column) has values 10, 11, 01, 00;  $r$  (bottom row) has values 00, 01, 10, 11; and  $s$  (rightmost column) has values 12, 13, 9, 8. The minterms are numbered 0 to 15 in the following pattern: 12, 14, 6, 4, 13, 15, 7, 5, 9, 11, 3, 1, 8, 10, 2, 0. The cells containing minterms 15, 11, and 3 are highlighted in pink.

			$p$		
$qs$	$pr$	10	11	01	00
$q$	10	12	14	6	4
	11	13	15	7	5
	01	9	11	3	1
	00	8	10	2	0
		$r$			

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:



- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

		$p$	
		10	11
$qs$	10	12	14
	11	13	15
	01	9	11
	00	8	10
		$r$	
		01	00
		6	4
		7	5
		3	1
		2	0

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

A KV-Diagramm (Karnaugh Map) with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are grouped as follows:  $p$  (top row),  $qs$  (leftmost column),  $q$  (vertical column), and  $r$  (bottom row). The diagram shows 16 cells representing minterms: 12, 13, 9, 8, 11, 10, 6, 7, 3, 2, 4, 5, 1, 0. Cells 12 and 13 are highlighted in blue.

			$p$
$qs$	10	11	01
$q$	10	11	01
11	12	14	6
11	13	15	7
01	9	11	3
00	8	10	2
			$r$

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

A KV-Diagramm (Karnaugh Map) with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are mapped to binary values as follows:  $p$  (top row) has values 10, 11;  $q$  (left column) has values 10, 11;  $r$  (bottom row) has values 00, 01;  $s$  (right column) has values 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. The map contains the following minterms:  
Row 10: 12 (highlighted), 14 (highlighted)  
Row 11: 13 (highlighted), 15 (highlighted)  
Row 01: 6, 4  
Row 00: 7, 5  
Column 0: 9, 11  
Column 1: 3, 1  
Column 2: 2, 0

		$p$	
$qs$	$pr$	10	11
$q$	10	12	14
	11	13	15
	01	6	4
	00	7	5
	9	11	
	3	1	
	2	0	
		$r$	

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$
- $p \wedge q$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

A KV-Diagramm (Karnaugh Map) with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are mapped to binary values as follows:  $p$  (top row) has values 10, 11, 01, 00;  $q$  (left column) has values 10, 11, 01, 00;  $r$  (bottom row) has values 00, 01, 11, 10;  $s$  (right column) has values 12, 13, 9, 8 (top), 14, 15, 11, 10 (middle), 6, 7, 3, 2 (bottom), 4, 5, 1, 0 (far bottom). The diagram shows minterms 0 through 15. Minterms 12, 14, 6, and 4 are highlighted in orange, while others are white. Braces indicate groupings:  $\{12, 14, 6, 4\}$  (top-left block),  $\{13, 15, 7, 5\}$  (second block),  $\{9, 11, 3, 1\}$  (third block), and  $\{8, 10, 2, 0\}$  (bottom-left block).

			$p$
$qs$	$pr$	10	11
$q$	10	12	14
	11	13	15
	01	9	11
	00	8	10
			$r$

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$
- $p \wedge q$
- $q$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen den folgenden Mintermen:

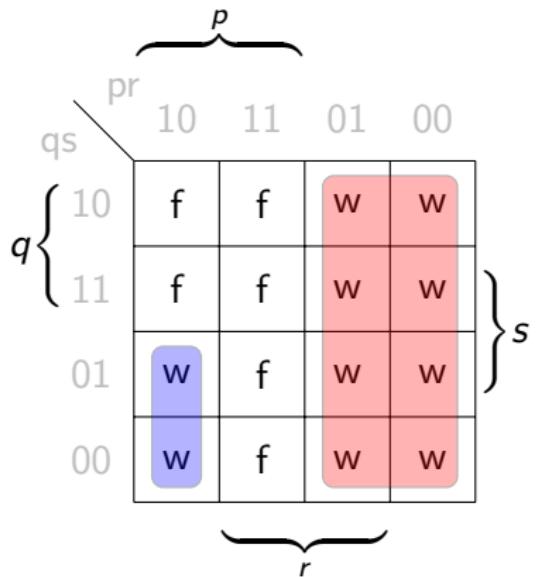
A KV-Diagramm with four variables:  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The variables are represented by horizontal bars above the columns. The rows are labeled with the binary values of  $q$  and  $s$ : 10, 11, 01, 00. The columns are labeled with the binary values of  $p$  and  $r$ : pr, qs. The diagram shows four minterms: 12 (highlighted in green), 13 (highlighted in green), 9, and 8. The minterms are represented by the intersections of the row and column labels.

				$p$		
	qs	pr	10	11	01	00
$q$	{	10	12	14	6	4
11	13	15	7	5		
01	9	11	3	1		
00	8	10	2	0		
			$r$			

- $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$
- $q \wedge \neg s$
- $\neg p \wedge \neg s$
- $r \wedge s$
- $\neg r \wedge \neg s$
- $\neg r \wedge s$
- $p \wedge q \wedge \neg r$
- $p \wedge q$
- $q$
- $p \wedge \neg r$

# KV-Diagramme

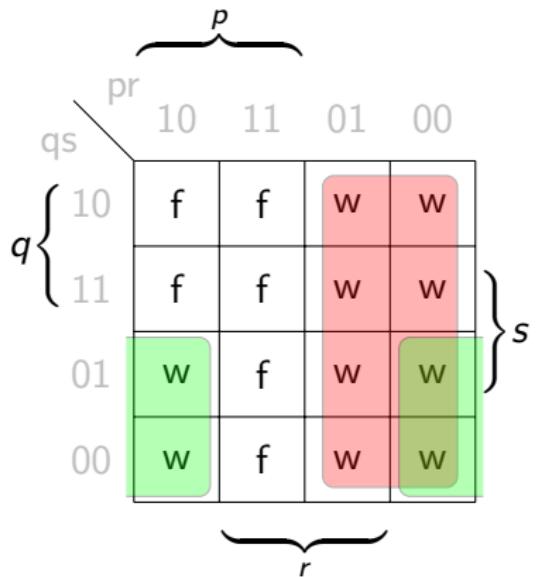
*Beispiel:* ffff    ffww    wwww    wwww



- Wir suchen möglichst große Blöcke die w-Felder überdecken:
- $\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

# KV-Diagramme

*Beispiel:* ffff    ffww    wwww    wwwww



- Wir suchen möglichst große Blöcke die w-Felder überdecken:
- $\neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
- Wir können eine kleinere Formel erhalten, wenn wir zulassen, dass die Blöcke überlappen:
- $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

# KV-Diagramme: Verwendung von “falsch”-Blöcken

- Alternativ können auch “falsch”-Blöcke zur Ermittlung einer Formel herangezogen werden
- Erster Block:  $p \wedge q$
- Zweiter Block:  $p \wedge r$
- Wir erhalten

$$\neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r)).$$

- Mittels Distributivgesetz erhalten wir dann

$$\neg(p \wedge (q \vee r)),$$

- und weiters mittels De Morgan

$$\neg p \vee \neg(q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \wedge \neg r).$$

# KNF mittels KV-Diagramm

- Eine (minimale) KNF kann ebenso mittels KV-Diagramm ermittelt werden.
- Hierzu werden “falsch”-Blöcke (statt der “wahr”-Blöcke) gesucht.
- Die Formulierung dieser Blöcke erfolgt jedoch als Maxterm.
- Hierzu werden die **negierten Literale** verwendet (wie bei Ermittlung der KKNF).

# Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

$p$	$q$	$r$	$s$	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte ( $p$ ) und die untere Hälfte ( $\neg p$ ).

# Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

$p$	$q$	$r$	$s$	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte ( $p$ ) und die untere Hälfte ( $\neg p$ ).
- Der Minterm  $\neg p$  beschreibt alle Ergebniswerte w der unteren Hälfte der Tabelle.

# Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

$p$	$q$	$r$	$s$	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte ( $p$ ) und die untere Hälfte ( $\neg p$ ).
- Der Minterm  $\neg p$  beschreibt alle Ergebniswerte w der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

# Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

$p$	$q$	$r$	$s$	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte ( $p$ ) und die untere Hälfte ( $\neg p$ ).
- Der Minterm  $\neg p$  beschreibt alle Ergebniswerte w der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- Wie im KV-Diagramm können wir anstatt dessen jedoch den einfacheren Minterm  $\neg q \wedge \neg r$  heranziehen.

# Herausheben von Variablen aus der Tabelle

Alternativ können wir die Formel auch direkt aus der Tabelle herauslesen:

$p$	$q$	$r$	$s$	Resultat
w	w	w	w	f
w	w	w	f	f
w	w	f	w	f
w	w	f	f	f
w	f	w	w	f
w	f	w	f	f
w	f	f	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	w	f	w
f	w	f	w	w
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w
f	f	w	f	w
f	f	f	w	w
f	f	f	f	w

- Dazu teilt man die Tabelle zunächst gedanklich in die obere Hälfte ( $p$ ) und die untere Hälfte ( $\neg p$ ).
- Der Minterm  $\neg p$  beschreibt alle Ergebniswerte w der unteren Hälfte der Tabelle.
- In der oberen Hälfte erhalten wir den Minterm  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ .
- Wie im KV-Diagramm können wir anstatt dessen jedoch den einfacheren Minterm  $\neg q \wedge \neg r$  heranziehen.
- Wir erhalten also  $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$ .

# Zusammenfassung

- KV-Diagramme können auch für mehr als 4 Variable verwendet werden, indem das Diagramm gespiegelt wird, und die neue Variable das Diagramm wieder in zwei Hälften unterteilt.
- Dieses Vorgehen wird jedoch ab 6 Variablen sehr unübersichtlich.
- Die Methode des Heraushebens von Variablen ist auch für mehrere Variable anwendbar.
- Die Größe der resultierenden Formel hängt im Wesentlichen von der Reihenfolge der herausgehobenen Variablen ab.
- Um kleinstmögliche Formeln zu erhalten ist ein gewisses Geschick erforderlich.
- Gegebenenfalls können erhaltene Formeln durch Anwendung der Distributivgesetze weiter vereinfacht werden.

# Übungsaufgaben

Gegeben seien die Formeln:

$$a : \neg r \vee p \rightarrow q \wedge \neg p$$

$$b : \neg(p \leftrightarrow \neg q) \vee \neg p \vee r \rightarrow \neg p$$

$$c : p \rightarrow q \wedge (r \leftrightarrow p)$$

## Übungsaufgaben [2.5.1-3]

- 2.5.1 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel  $a$  mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle
- 2.5.2 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel  $b$  mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle
- 2.5.3 Ermitteln Sie eine DNF zu Formel  $c$  mittels (1) KV-Diagramm und (2) Herausheben von Variablen basierend auf der Wahrheitstabelle

# Übungsaufgaben

## Übungsaufgaben [2.5.4-5]

2.5.4 Gegeben sei das folgende Ergebnis einer aussagenlogischen Formel:

wfwf fwfw wwff ffww

Ermitteln Sie eine möglichst kompakte Formel (hinsichtlich der Anzahl der vorkommenden Literale) mittels (1) KV-Diagramm, und (2) Herausheben.

2.5.5 Gegeben sei das folgende Ergebnis einer aussagenlogischen Formel:

wwfw wwww fffw wwff

Ermitteln Sie eine möglichst kompakte Formel (hinsichtlich der Anzahl der vorkommenden Literale) mittels (1) KV-Diagramm, und (2) Herausheben.

# Übungsaufgaben

## Übungsaufgaben [2.5.6-10]

Bilden Sie mit Hilfe des KV-Diagramms zu folgenden Formeln möglichst einfache äquivalente Formeln:

$$2.5.6 \quad (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (r \vee p)$$

$$2.5.7 \quad (\neg(q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \rightarrow p)$$

$$2.5.8 \quad (r \wedge \neg q) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge \neg q))$$

$$2.5.9 \quad \neg(\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \wedge s) \rightarrow (r \vee \neg\neg p)$$

$$2.5.10 \quad (s \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$