2.3: Umformungen

Computerarchitekturen und Betriebssysteme
Zahlensysteme und Aussagenlogik

15. Dezember 2025

Einsetzung

Definition

Einsetzung: Wir bezeichnen mit $a[p/b]$ die Formel, die aus a dadurch entsteht, dass für *jedes* Vorkommen der Aussagenvariablen p in a die Formel b eingesetzt wird.

Einsetzungstheorem: Ist a eine Tautologie oder eine Kontradiktion, dann auch $a[p/b]$.

Beispiel: Einsetzung:

Sei $a : p \to q \to p$

und $b : (r \vee s)$

dann ist $a[p/b] : (r \vee s) \to q \to (r \vee s)$

Einsetzung

Durch Einsetzen entstehen aus Tautologien wieder Tautologien und aus Kontradiktionen wieder Kontradiktionen.

Beispiel: Die Formel $a : p \vee \neg p$ ist eine Tautologie.
Wir ersetzen nun p durch $(r \to s)$. Die daraus entstehende Formel

$$a[p/(r \to s)] : (r \to s) \vee \neg(r \to s)$$

ist wiederum eine Tautologie!

Teilformel

Definition (Teilformel, bzw. Unterformel)

1. Jede Formel a ist Teilformel von sich selbst.
2. Ist a eine zusammengesetzte Formel, etwa $\neg b$, $b \vee c$, $b \rightarrow c$ etc., dann sind auch b und c Teilformeln von a.
3. Jede Teilformel einer Teilformel von a ist ebenfalls eine Teilformel von a.

Beispiel: Sei $a : p \rightarrow ((\neg q \vee r) \rightarrow s)$
Alle Teilformeln von a sind nun:

- $p \rightarrow ((\neg q \vee r) \rightarrow s)$, gemäß (1)
- $p, (\neg q \vee r) \rightarrow s$, gemäß (2)
- $\neg q \vee r, s$, gemäß (3)
- $\neg q, r$, gemäß (3)
- q, gemäß (3)

Ersetzung

Definition

Wir bezeichnen nun mit $a[[b/c]]$ eine derjenigen Formeln, die aus a dadurch entstehen, dass *beliebig viele* (keines, eines, ... alle) Vorkommnisse der Teilformel b von a durch die Formel c *ersetzt* werden.

Beispiel: Sei $a : (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$
und $b : q \vee \neg r$

und $c : p \rightarrow q$
dann bezeichnet $a[[b/c]]$ die folgenden Formeln:

- $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$
- $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$
- $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow s)$
- $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow s)$

Ersetzung

Definition

Wir bezeichnen nun mit $a[[b/c]]$ eine derjenigen Formeln, die aus a dadurch entstehen, dass *beliebig viele* (keines, eines, ... alle) Vorkommnisse der Teilformel b von a durch die Formel c *ersetzt* werden.

Beispiel: Sei $a : (p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$
und $b : q \vee \neg r$

und $c : p \rightarrow q$
dann bezeichnet $a[[b/c]]$ die folgenden Formeln:

- $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$ keine Ersetzung vorgenommen
- $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (\neg(q \vee \neg r) \rightarrow s)$ eine Ersetzung vorgenommen
- $(p \rightarrow (q \vee \neg r)) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow s)$ eine Ersetzung vorgenommen
- $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow s)$ alle Teilformeln wurden ersetzt

Ersetzung

- Die Ersetzung ist mehrdeutig!
- Man nennt zwei Formeln a und b **äquivalent** oder **logisch gleich** wenn die Formel $a \leftrightarrow b$ eine Tautologie ist.
- Diesfalls schreiben wir auch $a \equiv b$.

Ersetzungstheorem

Wenn $b \equiv c$, dann ist $a \equiv a[[b/c]]$.

Anmerkung: Wenn zwei Formeln b und c logisch gleich sind, dann lässt sich die Teilformel b von a durch die Formel c an beliebig vielen Stellen ersetzen, ohne dass sich dabei der Wahrheitswert der Formel a ändert.

Beispiel: Lügengeschichte

1. $a \leftrightarrow (\neg c \rightarrow \neg b)$
2. $b \leftrightarrow (a \wedge c)$
3. $c \leftrightarrow \neg a$

Da c mit $\neg a$ äquivalent ist, kann c in (2) durch $\neg a$ ersetzt werden. Wir erhalten die Kontradiktion $a \wedge \neg a$ äquivalent zu b, womit gilt $b = \text{f}$.

Nun können wir $(a \wedge \neg a)$ in (1) einsetzten (aufgrund der Äquivalenz zu b). Aufgrund der Negation $\neg b$ in (1) erhalten wir auf der rechten Seite der Implikation eine Tautologie. Somit ist $\neg c \rightarrow \text{w}$ immer erfüllt.

Es gilt also: a ist immer erfüllt, b und c sind falsch.

Anmerkung: Bei *eindeutiger* Lösung ist diese Vorgehensweise oft besser.

Assoziativität, Kommutativität, Distributivität

	Arithmetik	Logik
Kommutativ-gesetze	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$a \wedge b \equiv b \wedge a$ $a \vee b \equiv b \vee a$ $a \leftrightarrow b \equiv b \leftrightarrow a$
Assoziativ-gesetze	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$ $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c \equiv a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$
Distributiv-gesetze	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Gesetze von De Morgan

De Morganschen Gesetze

$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$$

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b),$$

bzw.

$$a \vee b \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b).$$

Man beachte: a und b steht hier für beliebige Teilformeln (und nicht nur für einzelne Variablen)!

Gesetze von De Morgan

Beispiel: Darstellung von $p \wedge \neg q$ nur mit Operatoren $\neg$ und $\vee$.

Gesetze von De Morgan

Beispiel: Darstellung von $p \wedge \neg q$ nur mit Operatoren $\neg$ und $\vee$.

Um das Gesetz $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ anwenden zu können verwenden wir die doppelte Negation:

Gesetze von De Morgan

Beispiel: Darstellung von $p \wedge \neg q$ nur mit Operatoren $\neg$ und $\vee$.

Um das Gesetz $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ anwenden zu können verwenden wir die doppelte Negation:

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q)$$

Hier entspricht p dem a und $\neg q$ dem b in $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$
Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet, dass wir eine Äquivalenzumformung machen, also der Wahrheitsverlauf der Formel nicht verändert wird.

Gesetze von De Morgan

Beispiel: Darstellung von $p \wedge \neg q$ nur mit Operatoren $\neg$ und $\vee$.

Um das Gesetz $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ anwenden zu können verwenden wir die doppelte Negation:

$$p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q)$$

Hier entspricht p dem a und $\neg q$ dem b in $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$
Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet, dass wir eine Äquivalenzumformung machen, also der Wahrheitsverlauf der Formel nicht verändert wird.

Wir formen nun um:

$$\neg\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg\neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q).$$

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee s))$$

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee s))$$

2. Darstellung von $\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\wedge$ und $\neg$:

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee s))$$

2. Darstellung von $\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\wedge$ und $\neg$:

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg((p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s)) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg((p \wedge \neg r) \wedge \neg(q \wedge \neg s)) \end{aligned}$$

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee s))$$

2. Darstellung von $\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\wedge$ und $\neg$:

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg((p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s)) \\ &\Leftrightarrow \quad \neg((p \wedge \neg r) \wedge \neg(q \wedge \neg s)) \end{aligned}$$

3. Darstellung von $p \wedge q \wedge \neg r$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

Beispiele [4.1.x]

1. Darstellung von $p \wedge \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$p \wedge \neg(\neg q \vee s) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee s))$$

2. Darstellung von $\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s)$ mit ausschließlich den Operatoren $\wedge$ und $\neg$:

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg(\neg q \vee s) &\Leftrightarrow \neg((p \wedge \neg r) \wedge (\neg q \vee s)) \\ &\Leftrightarrow \neg((p \wedge \neg r) \wedge \neg(q \wedge \neg s)) \end{aligned}$$

3. Darstellung von $p \wedge q \wedge \neg r$ mit ausschließlich den Operatoren $\vee$ und $\neg$:

$$\begin{aligned} p \wedge q \wedge \neg r &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r \\ &\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee \neg q) \vee r) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \end{aligned}$$

Absorptionsgesetz (Verschmelzungsgesetz)

$$a \vee (a \wedge b) \equiv a$$

$$a \wedge (a \vee b) \equiv a$$

Beispiel:

p	q	r	$(\neg p \wedge q)$	$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$
w	w	w	f	f
w	w	f	f	f
w	f	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	f
f	w	f	w	w
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

- Wir betrachten die Formel
$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$
- Die Zeilen in welchen die Teilformel $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ den Wert *wahr* ergibt, sind in der Tabelle (links) rot dargestellt.
- Die Zeilen in welchen die Teilformel $(\neg p \wedge q)$ den Wert *wahr* ergibt, sind in der Tabelle (links) grün dargestellt.
- Man erkennt, dass die roten Zeilen in den grünen enthalten sind.
- Somit gilt:
$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

Absorptionsgesetz (Verschmelzungsgesetz)

Beispiele [4.2.x]

1. Vereinfachung von $(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s)$ mithilfe des Absorptionsgesetzes:

Absorptionsgesetz (Verschmelzungsgesetz)

Beispiele [4.2.x]

1. Vereinfachung von $(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s)$ mithilfe des Absorptionsgesetzes:

$$(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \Leftrightarrow p \vee \neg s$$

Absorptionsgesetz (Verschmelzungsgesetz)

Beispiele [4.2.x]

1. Vereinfachung von $(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s)$ mithilfe des Absorptionsgesetzes:

$$(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \Leftrightarrow p \vee \neg s$$

2. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $\neg(p \to q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q)$:

Absorptionsgesetz (Verschmelzungsgesetz)

Beispiele [4.2.x]

1. Vereinfachung von $(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s)$ mithilfe des Absorptionsgesetzes:

$$(p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \Leftrightarrow p \vee \neg s$$

2. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $\neg(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q)$:

$$\begin{aligned} \neg(p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

Anwendung des Distributivgesetzes

Wir betrachten die Formel $(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s)$. Wir können hier das Distributivgesetz anwenden und erhalten

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \wedge (s \vee \neg s)$$

durch *Herausheben* von $(p \wedge \neg q \wedge r)$.

Der Term $(s \vee \neg s)$ ergibt *wahr*, wodurch wir erhalten:

$$(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r).$$

An diesem Beispiel sehen wir den folgenden, manchmal als Nachbarschaftsgesetz bezeichneten, Zusammenhang:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \equiv a$$

Rechenregeln Implikation (*)

- $a \vee b \equiv \neg a \to b$
- $a \wedge b \equiv \neg(a \to \neg b)$
- $a \to (b \to c) \equiv b \to (a \to c)$
- $a \to b \equiv \neg a \vee b \equiv \neg(a \wedge \neg b)$

Kontraposition:

- schwache K.: $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$
  "Wenn es regnet, dann ist die Straße nass" $\to$ "Wenn die Straße *nicht* nass (also trocken) ist, regnet es *nicht*"
- starke K.: $(\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$
- Somit gilt: $(a \to b) \equiv (\neg b \to \neg a)$

Allgemeingültige Formeln (*)

- Modus ponens:

$$a \land (a \to b) \to b$$

- Modus tollens:

$$(a \to b) \land \neg b \to \neg a$$

  Beispiel: "Wenn es regnet, ist die Straße nass" *und* "die Straße ist nicht nass" *ermöglicht die Schlussfolgerung* "Es regnet nicht"

- Indirekter Beweis:

$$(\neg a \to b) \land \neg b \to a$$

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \to q) \to (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \\
&\Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \land \neg q \land p)$

$$\begin{aligned}
(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \land \neg q \land p) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \lor q) \lor (\neg r \land \neg q \land p) \\
&\Leftrightarrow \quad (p \land \neg q) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \\
&\Leftrightarrow \quad p \land \neg q
\end{aligned}$$

2. Stellen Sie $p \leftrightarrow q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg$, $\land$ und $\lor$ dar!

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \\ &\Leftrightarrow \quad (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ &\Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q \end{aligned}$$

2. Stellen Sie $p \leftrightarrow q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg, \wedge$ und $\vee$ dar!

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Anmerkung: Es gibt auch eine andere Darstellung: $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \to q) \to (\neg r \wedge \neg q \wedge p)$

$$\begin{aligned}(p \to q) \to (\neg r \wedge \neg q \wedge p) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge \neg q \wedge p)\\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q\end{aligned}$$

2. Stellen Sie $p \leftrightarrow q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg, \wedge$ und $\vee$ dar!

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Anmerkung: Es gibt auch eine andere Darstellung: $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

3. Stellen Sie $p \veebar q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg, \wedge$ und $\vee$ dar!

Beispiele [4.3.x]:

1. Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck: $(p \to q) \to (\neg r \land \neg q \land p)$

$$\begin{aligned} (p \to q) \to (\neg r \land \neg q \land p) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \lor (\neg r \land \neg q \land p) \\ &\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (p \land \neg q \land \neg r) \\ &\Leftrightarrow p \land \neg q \end{aligned}$$

2. Stellen Sie $p \leftrightarrow q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg, \land$ und $\lor$ dar!

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$$

Anmerkung: Es gibt auch eine andere Darstellung: $(\neg p \lor q) \land (p \lor \neg q)$

3. Stellen Sie $p \veebar q$ ausschließlich durch die Operatoren $\neg, \land$ und $\lor$ dar!

$$p \veebar q \Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$$

Aufgaben

Übungsaufgabe [2.3.1]

Zeigen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln (d.h. die Formeln sind Tautologien).

1. $a \to b \leftrightarrow \neg b \to \neg a$
2. $((\neg a \to b) \wedge \neg b) \to a$

Aufgaben

Übungsaufgaben [2.3.2-4]

1. Gegeben sei die Formel $a: p \to q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

   Geben Sie die Formel $a[p/(r \wedge \neg r)]$ an.

   Geben Sie die Formel $a[p/(r \vee \neg r)]$ an.

   Handelt es sich bei den neuen Formeln um Tautologien, bzw. Kontradiktionen?

2. Geben Sie alle Teilformeln von $(p \to (q \vee \neg p)) \leftrightarrow (\neg(\neg r \wedge q) \vee s)$ an.

3. Gegeben sind folgende Formeln:

   $a: (q \to q \vee \neg p) \to (\neg(\neg r \wedge q) \vee s) \leftrightarrow q \vee \neg p$

   $b: q \vee \neg p$

   $c: (r \to s) \leftrightarrow \neg q$

   Geben Sie alle Formeln an, die durch $a[[b/c]]$ angesprochen werden können.

Aufgaben

Übungsaufgaben [2.3.5-9]: Umformungen

1. Zeigen oder widerlegen Sie durch Umformung, dass a eine Kontradiktion ist

$$a : p \vee q \wedge r \leftrightarrow \neg(p \vee r) \vee \neg(p \vee q)$$

2. Zeigen Sie, dass gilt:

$$p \vee q \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \equiv \neg((\neg p \rightarrow q) \wedge p \wedge r)$$

3. Stellen Sie $\neg p \wedge q \vee r$ nur mithilfe von $\rightarrow$ dar.
4. Stellen Sie $\underline{\vee}$ mithilfe von $\neg$ und $\vee$ dar.
5. Zeigen Sie die Linksdistributivität von $\rightarrow$ bezüglich $\wedge$ (durch Rechnung).

Aufgaben

Übungsaufgaben [2.3.10-11]: Umformungen

1. Stellen Sie $(p \to q) \to r$ nur mit den Operatoren $\neg$ und $\wedge$ dar.

2. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(q \vee (r \to s)) \to (\neg q \wedge r \wedge s)$.

Aufgaben

Übungsaufgaben [2.3.10-11]: Umformungen

1. Stellen Sie $(p \to q) \to r$ nur mit den Operatoren $\neg$ und $\wedge$ dar.

$$\begin{aligned}(p \to q) \to r \quad &\Leftrightarrow \quad (\neg p \vee q) \to r\\ &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg p \vee q) \vee r\\ &\Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q \vee r\\ &\Leftrightarrow \quad \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)\end{aligned}$$

2. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(q \vee (r \to s)) \to (\neg q \wedge r \wedge s)$.

Aufgaben

Übungsaufgaben [2.3.10-11]: Umformungen

1. Stellen Sie $(p \to q) \to r$ nur mit den Operatoren $\neg$ und $\wedge$ dar.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \to r &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r \\
&\Leftrightarrow p \wedge \neg q \vee r \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)
\end{aligned}$$

2. Vereinfachen Sie den Ausdruck $(q \vee (r \to s)) \to (\neg q \wedge r \wedge s)$.

$$\begin{aligned}
(q \vee (r \to s)) \to (\neg q \wedge r \wedge s) &\Leftrightarrow (q \vee \neg r \vee s) \to (\neg q \wedge r \wedge s) \\
&\Leftrightarrow \neg(q \vee \neg r \vee s) \vee (\neg q \wedge r \wedge s) \\
&\Leftrightarrow (\neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg q \wedge r \wedge s) \\
&\Leftrightarrow \neg q \wedge r
\end{aligned}$$

Wichtige Äquivalenzen

$a \equiv a$	Reflexivität der Äquivalenz
$\neg\neg a \equiv a$	Gesetz der doppelten Negation
$a \vee a \equiv a$	Idempotenz der Disjunktion
$a \vee \mathrm{w} \equiv \mathrm{w}$	
$a \vee \mathrm{f} \equiv a$	
$a \vee b \equiv b \vee a$	Kommutativität der Disjunktion
$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$	Assoziativität der Disjunktion
$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	Distributivität der Disjunktion bezüglich der Konjunktion
$a \vee (a \wedge b) \equiv a$	Verschmelzungs-(Absorptions-)gesetz
$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$	Gesetz von *De Morgan*
$a \vee b \equiv \neg a \rightarrow b$	

Wichtige Äquivalenzen (Forts.)

$a \wedge a \equiv a$	Idempotenz der Konjunktion
$a \wedge \mathrm{w} \equiv a$	
$a \wedge \mathrm{f} \equiv \mathrm{f}$	
$a \wedge b \equiv b \wedge a$	Kommutativität der Konjunktion
$a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$	Assoziativität der Konjunktion
$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	Distributivität der Konjunktion bezüglich der Disjunktion
$a \wedge (a \vee b) \equiv a$	Verschmelzungs-(Absorptions-)gesetz
$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$	Gesetz von *De Morgan*
$a \wedge b \equiv \neg(a \rightarrow \neg b)$	
$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$	
$a \rightarrow b \equiv \neg(a \wedge \neg b)$	

Wichtige Äquivalenzen

$a \rightarrow (b \rightarrow c) \equiv b \rightarrow (a \rightarrow c)$	Vertauschungsgesetz für Prämissen
$(a \leftrightarrow b) \equiv (b \leftrightarrow a)$	Kommutativität der Äquivalenz
$(a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)) \equiv ((a \leftrightarrow b) \leftrightarrow c)$	Assoziativität der Äquivalenz
$(a \leftrightarrow b) \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	
$(a \leftrightarrow b) \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$	
$(a \leftrightarrow b) \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$	

Wichtige Tautologien

$a \to a$	
$a \vee \neg a$	Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten tertium non datur
$a \to \neg\neg a$	
$\neg\neg a \to a$	
$a \wedge \neg a \to b$	e falso quodlibet
$a \wedge b \to a$	
$a \wedge b \to b$	
$a \to a \vee b$	Verdünnungsgesetz

Wichtige Tautologien (Forts.)

$a \wedge (a \to b) \to b$	modus ponens (Abtrennungsgesetz)
$(a \to b) \wedge \neg b \to \neg a$	modus tollens (Widerlegungsgesetz)
$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$	schwache Kontraposition
$(a \to b) \wedge (b \to c) \to (a \to c)$	Transitivitätsgesetz
$a \to (b \to a)$	verum e quodlibet
$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$	Transitivität der Implikation
$(\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$	starke Kontraposition