

Módulo 0: Nociones matemáticas básicas

0.2. Cálculo

Rafael Zambrano

rafazamb@gmail.com

Introducción

PARTE II: CÁLCULO

2.1 Funciones

2.2 Derivadas

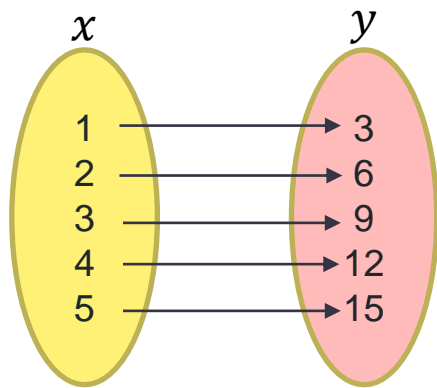
2.3 Optimización

1. Matemática Analítica

2.1. Funciones

Funciones

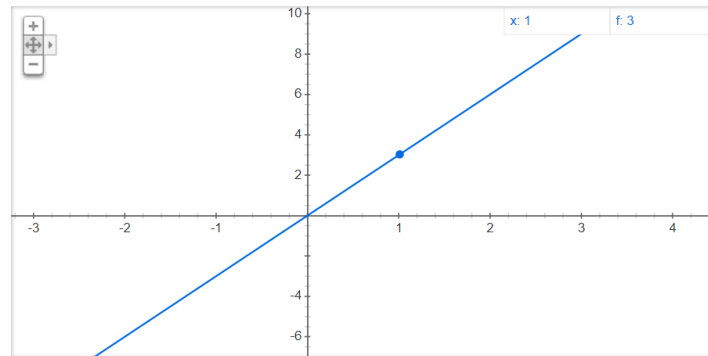
Una función es la relación que existe entre dos conjuntos de valores



$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$y = 3x$$
$$f(x) = 3x$$

Gráfico de $3 \cdot x$



Tipos de funciones

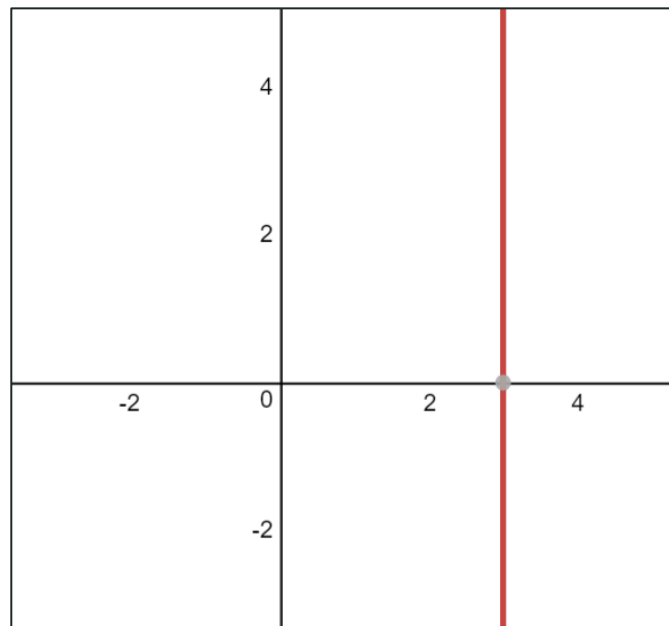
● **Constantes** $f(x) = k$

$$f(x) = 2$$



Las rectas paralelas al eje y
no son funciones

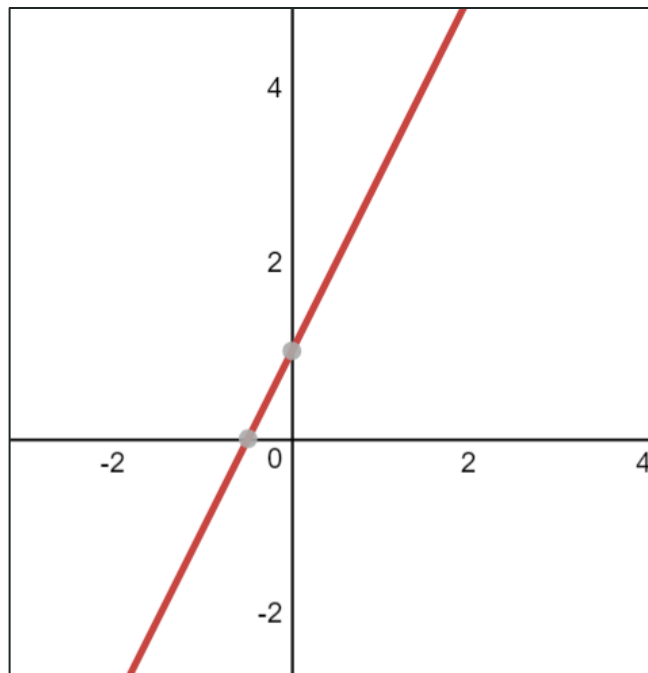
$$x = 3$$



Tipos de funciones

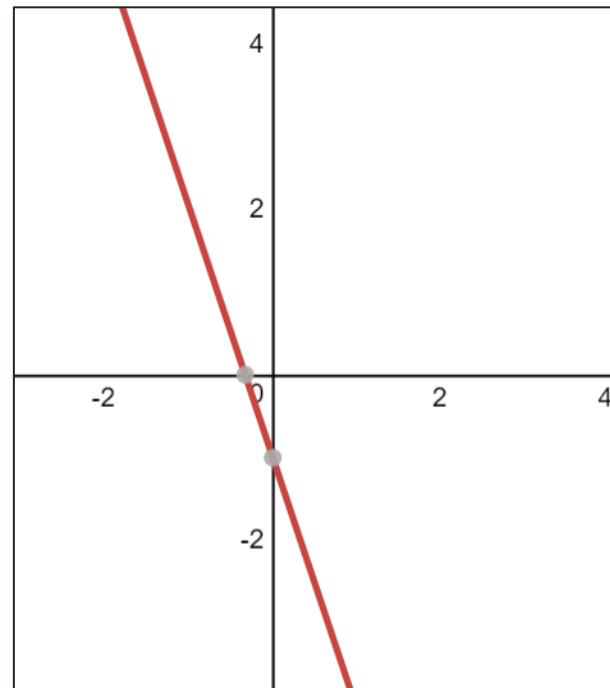
● **Lineal** $f(x) = ax + b$

$$f(x) = 2x + 1$$



a es la pendiente de la recta (inclinación), y b es el punto donde corta en $x = 0$

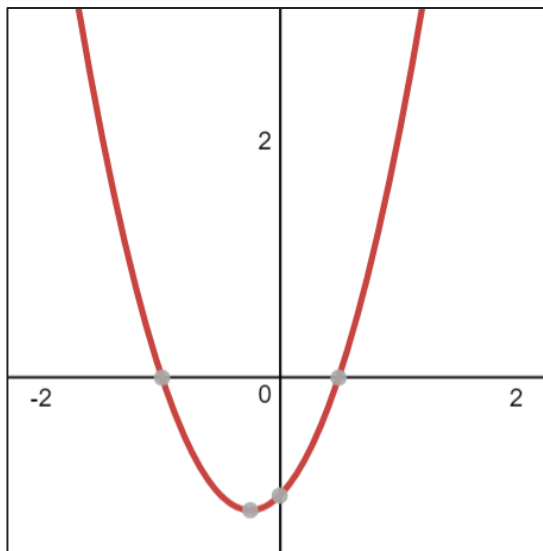
$$f(x) = -3x - 1$$



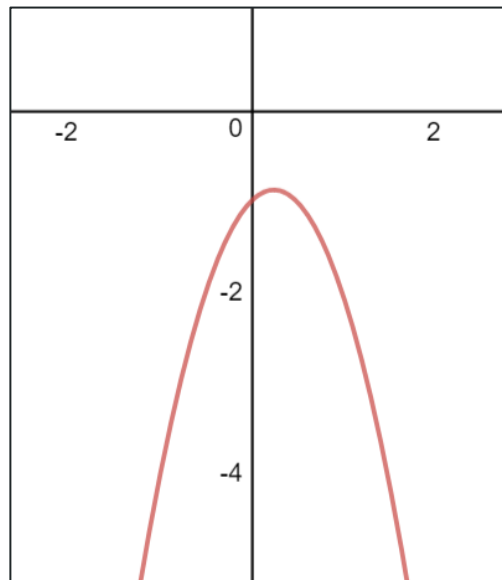
Tipos de funciones

● **Cuadráticas** $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

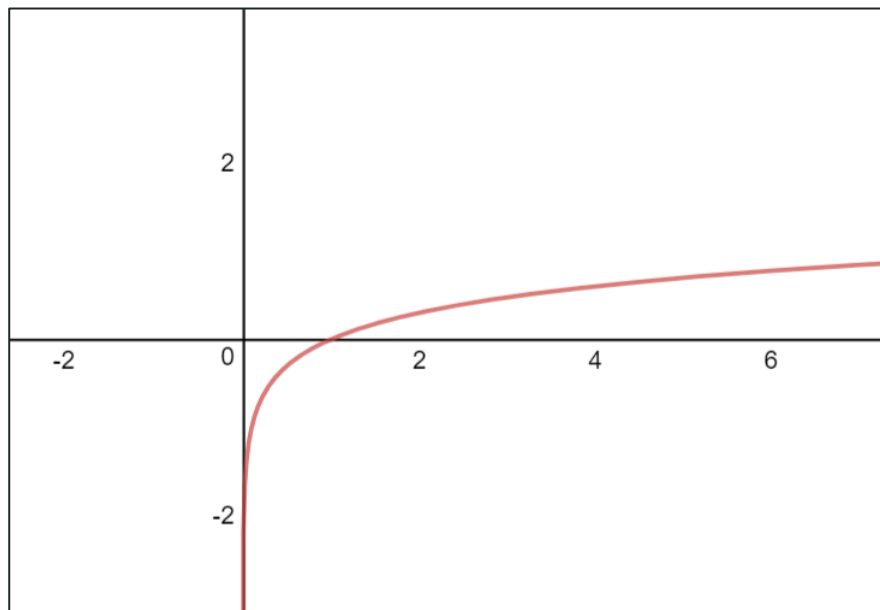


$$f(x) = -2x^2 + x - 1$$



Tipos de funciones

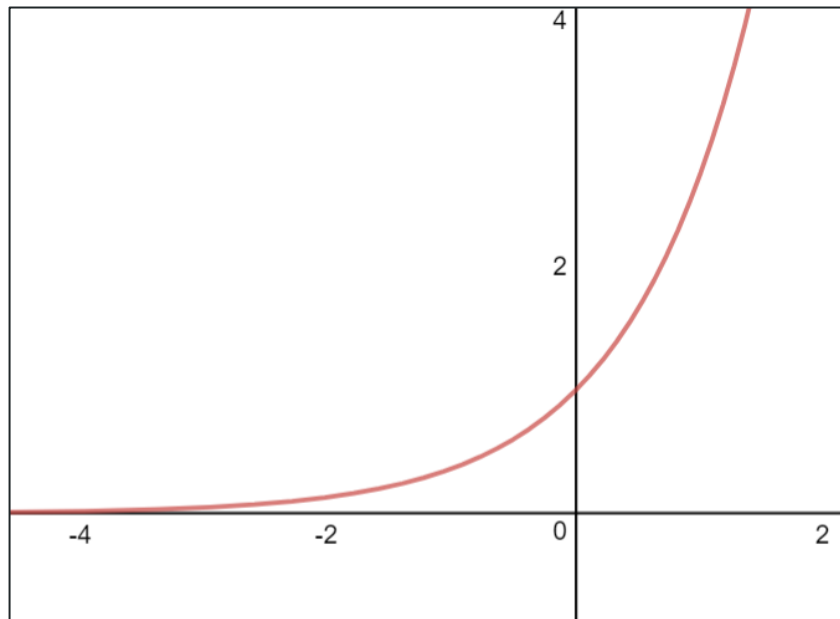
- **Logaritmo** $f(x) = \log(x)$



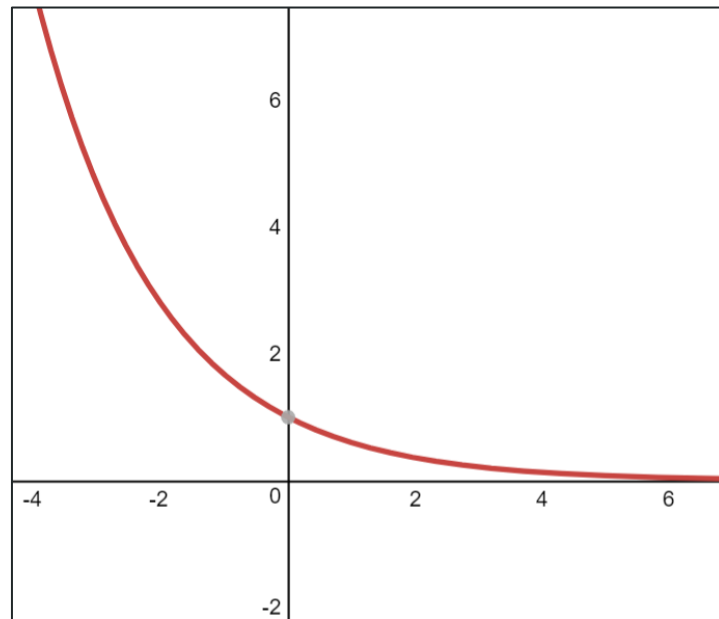
Tipos de funciones

- Exponencial $f(x) = a^x$

$$f(x) = e^x$$



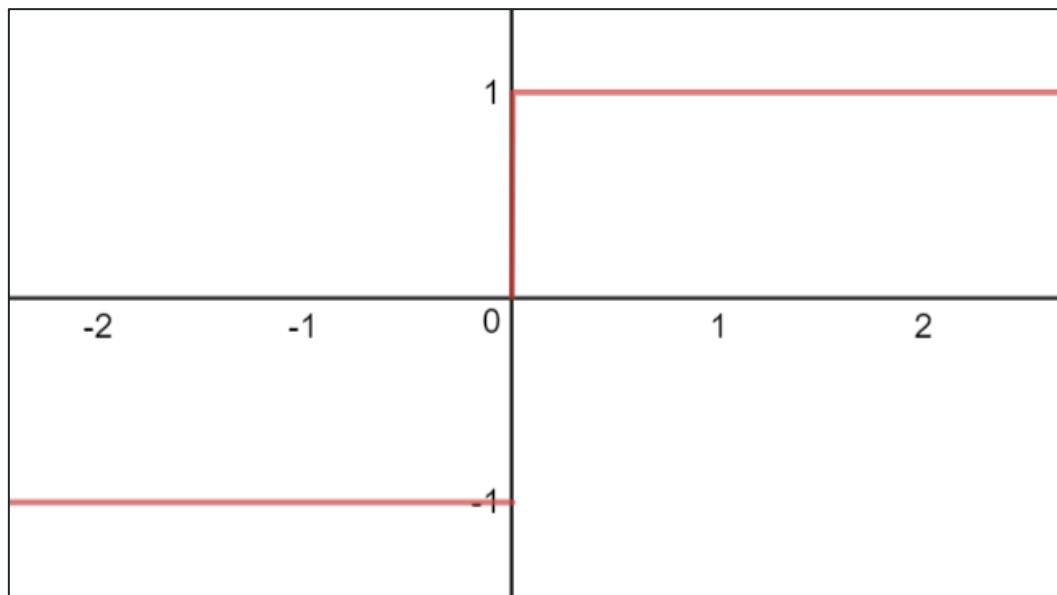
$$f(x) = 0.6^x$$



Tipos de funciones

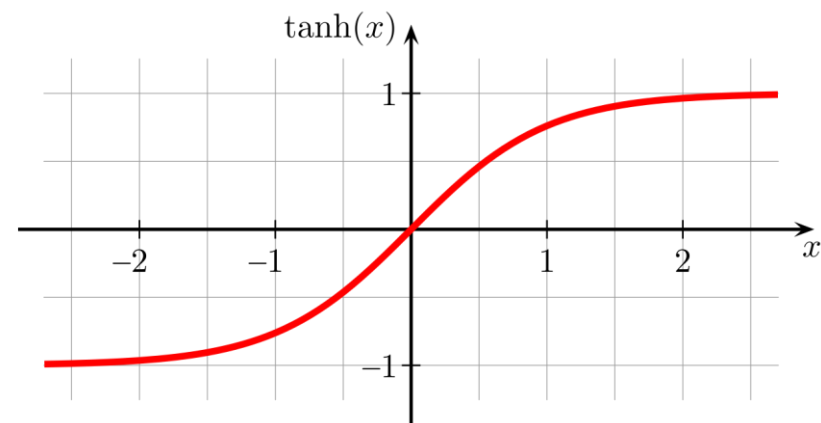
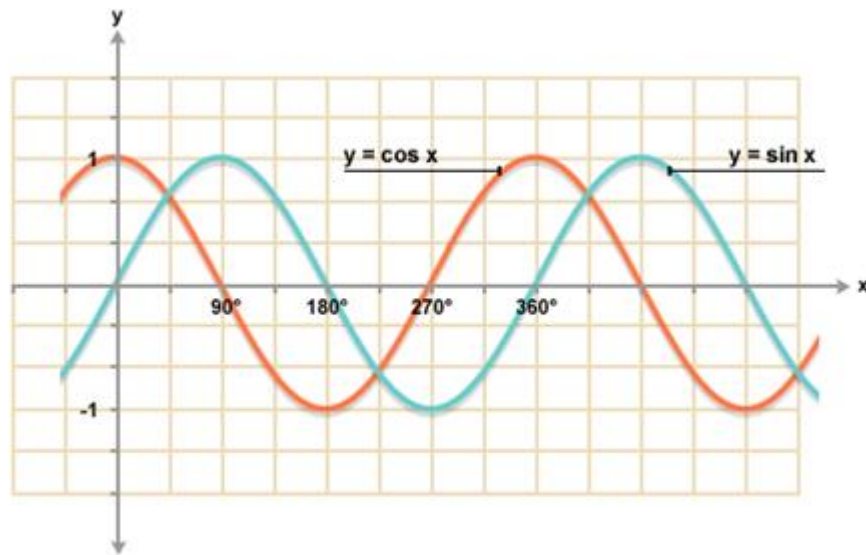
● Función signo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

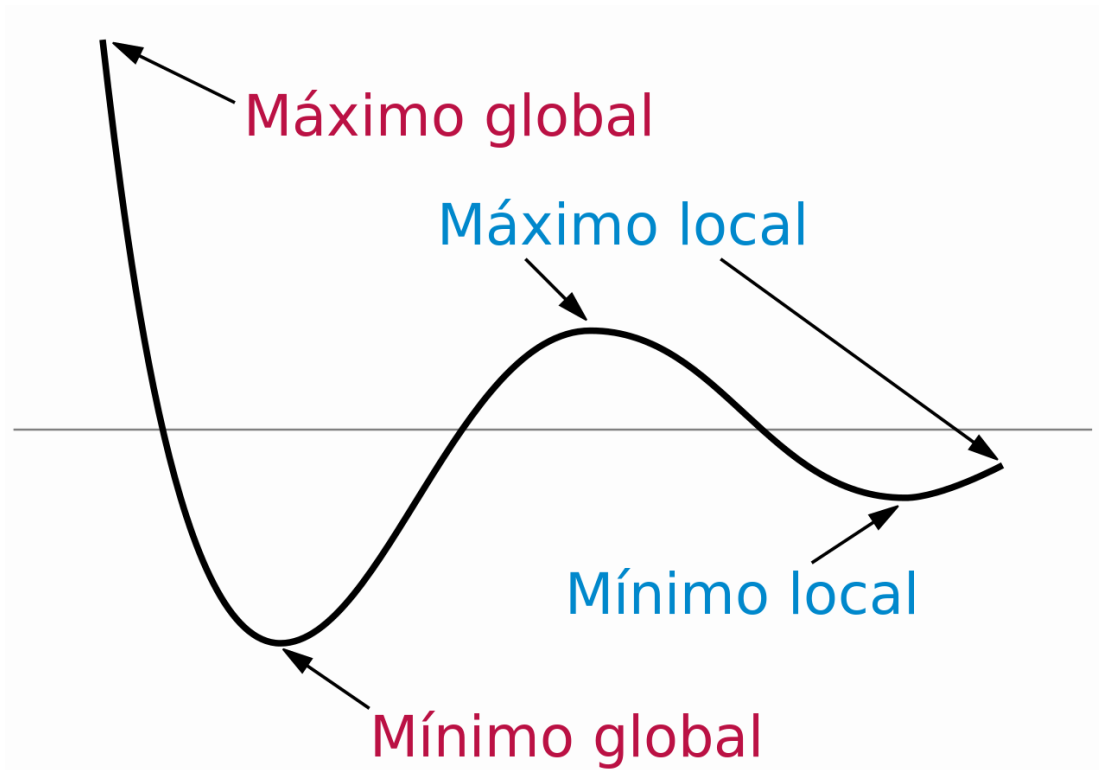


Tipos de funciones

- Trigonométricas

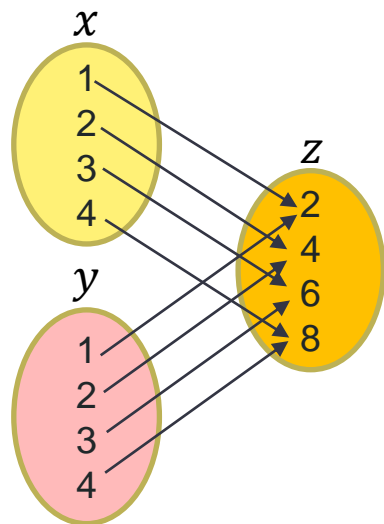


Máximos y mínimos de una función



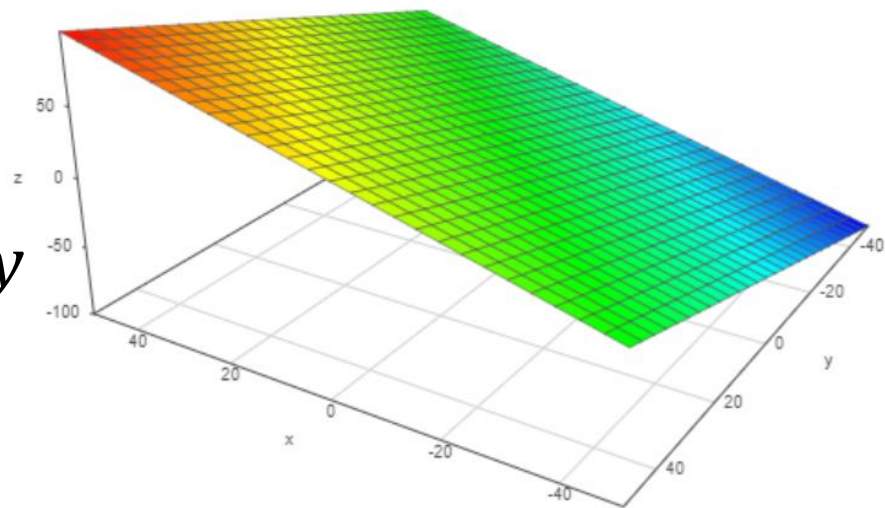
Funciones de varias variables

- Su entrada consiste en varios números



$$z = x + y$$

$$f(x, y) = x + y$$



$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

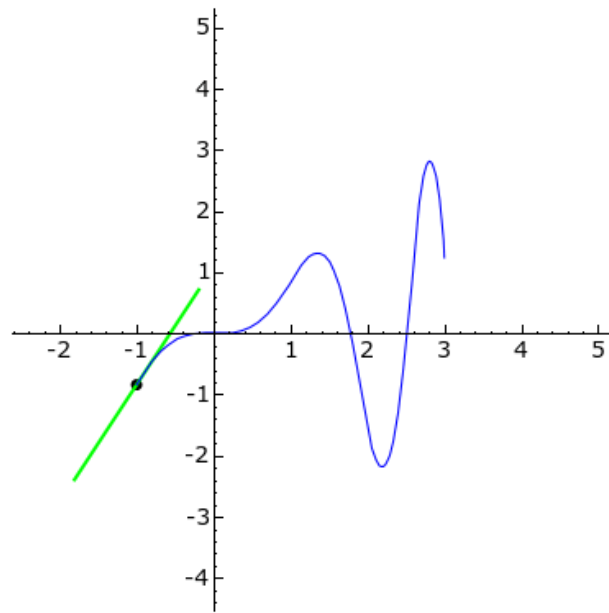
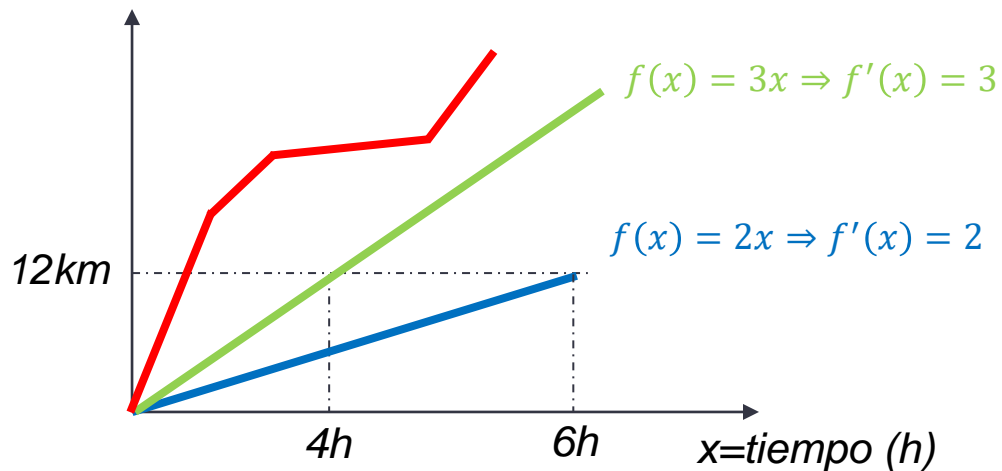
1. Matemática Analítica

2.2. Derivadas

Derivadas

- La derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto

$f(x)$ =distancia (Km)



Derivadas de funciones de una variable

- Sea $f(x)$ una función. Expresamos su derivada como $f'(x)$ ó $\frac{df}{dx}$

- Tabla de derivadas más comunes \Rightarrow

- **Regla de la cadena**

(para funciones compuestas):

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x , entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = a^x (a > 0)$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = (x^n)^{-1} = x^{-n}$	$f'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \text{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\text{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

Regla de la cadena: ejemplos

- $y = (x^2 + 1)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x$
 $u = (x^2 + 1)$
 $y = u^3$

- $y = \ln(x^4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3$
 $u = (x^4)$
 $y = \ln u$

- $f(x) = ax$

- $J(a) = (f(x) - y)^2 \Rightarrow \frac{dJ}{da} = \frac{dJ}{df} \cdot \frac{df}{da} = 2(f(x) - y) \cdot x$

Derivadas de funciones de varias variables

- El **Gradiente** es la generalización de derivada a funciones de más de una variable
- Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. Su gradiente es un vector compuesto por las derivadas parciales:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Ejemplo: $f(x, y) = 3x^2 + y^3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 \end{aligned} \Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x \\ 3y^2 \end{bmatrix}$$

Interpretación del gradiente

- Ejemplo

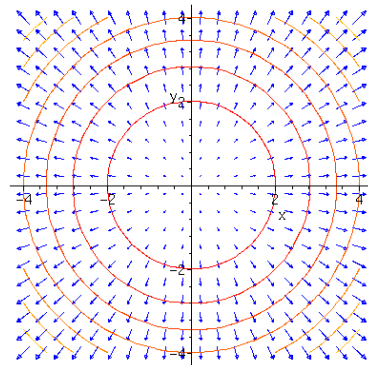
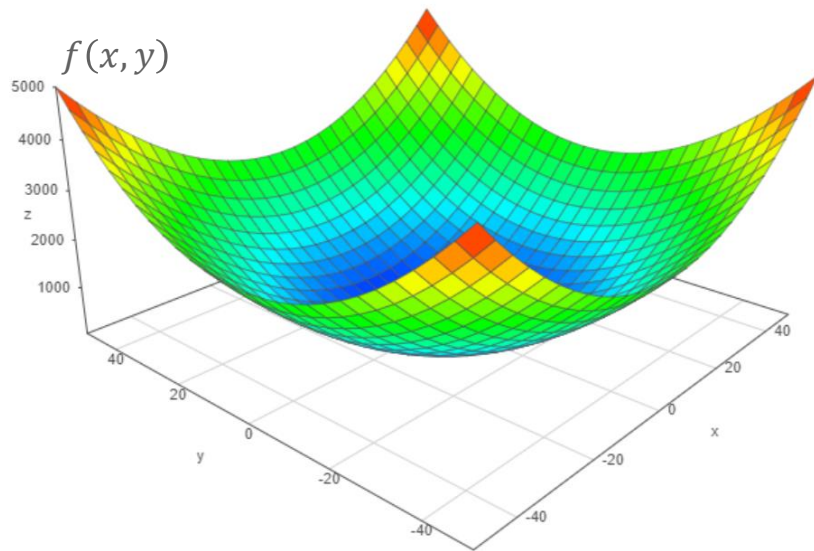
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

En cada punto del plano XY, el vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de $f(x, y)$



1. Matemática Analítica

2.3. Optimización

Optimización

- Consiste en obtener el máximo o mínimo de una función sujeta a posibles restricciones
- Ejemplo: El Levante vende 1000 camisetas cada mes a un precio de 12 euros. Tras realizar una encuesta, se estima que por cada incremento de 1 euro en el precio, se venderían 10 camisetas menos. ¿A qué precio debe vender el Levante las camisetas para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el nuevo beneficio esperado?

$$\textit{Beneficio}(B) = \textit{Precio}(P) \times \textit{Cantidad}(C)$$

$$B = (12 + 1x) \times (1000 - 10x) \quad x \text{ representa el número de incrementos de 1€}$$

$$B = -10x^2 + 880x + 12000$$

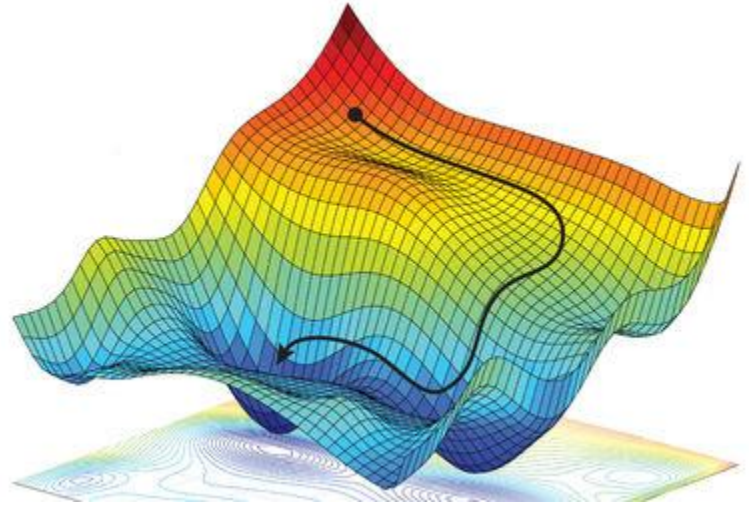
$$B' = -20x + 880 = 0 \Rightarrow x = 44$$

⇒ El precio que maximiza los beneficios será: $P = 12 + 1 \times 44 = \mathbf{56}$ euros

⇒ El beneficio esperado será: $B = 56 \times (1000 - 10 \times 44) = \mathbf{31.360}$ euros

Optimización: gradiente descendente

- El algoritmo del gradiente descendente es muy utilizado en problemas de Inteligencia Artificial, cuando tenemos funciones multivariables



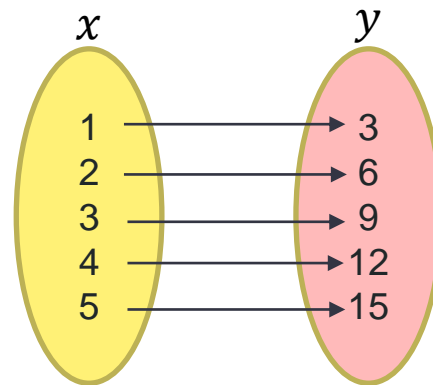
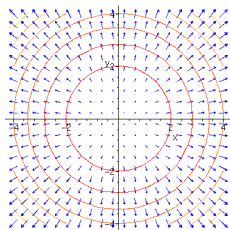
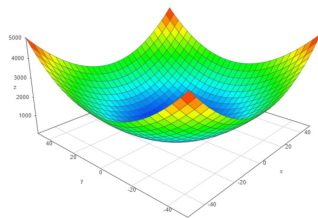
Conclusiones Cálculo

2.1 Funciones

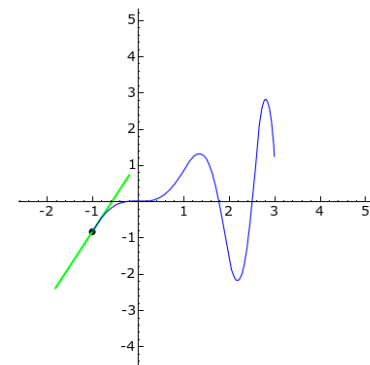
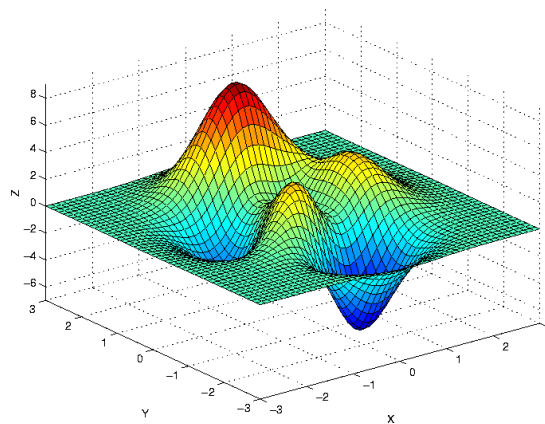
2.2 Derivadas

2.3 Optimización

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$



$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$



¡Gracias!

Contacto: Rafael Zambrano

rafazamb@gmail.com