Algèbre Linéaire

TP n∘2 : Diagonalisation

Si une matrice carrée A d'ordre n possède exactement n vecteurs propres indépendants, on peut la *diagonaliser*, c'est-à-dire l'écrire sous la forme suivante, où P et D sont des matrices carrées d'ordre n et où D est en plus une matrice diagonale :

$A=PDP^{-1}$.

On construit la matrice P en y plaçant simplement les vecteurs propres de A et la matrice D est une matrice diagonale constituée avec les valeurs propres de A. Voyons un exemple qui illustre cette décomposition :

```
A = np.matrix('2 1;1 2')
eigval, eigvec = eig(A)


P = np.mat(eigvec)
D = np.diag(eigval)

print(P * D * P.I)
```

Ce programme déclare une matrice A et en calcule les valeurs et les vecteurs propres à l'aide de la fonction `eig`. Il construit ensuite les deux matrices P et D et calcule le résultat du produit PDP^{-1}. Le résultat de l'exécution montre que l'on retrouve ainsi la matrice A :

```
[[2.+0.j 1.+0.j]
 [1.+0.j 2.+0.j]]
```

On a donc réussi à décomposer la matrice A en un produit de trois matrices, plus simples que A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}7 \\ 0{,}7 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}7 \\ -0{,}7 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

sympy.

Si on utilise, le module sympy, la matrice ne se définit plus par **np.array** mais par **Matrix ,** exemple :

```
from sympy import*
M= Matrix([[3,-2,4,-2],
           [5,3,-3,-2],
           [5,-2,2,-2],
           [5,-2,-3,3]])
```

M.eigenvals( ) donne la séquence des valeurs propres
M.eigenvects( ) donne en plus des valeurs propres des vecteurs propres associés.

Exercice 1 : diagonalisation d'une matrice

On considère la matrice $A_{4,4}$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Définir la matrice A.
2. A l'aide de fonctions du sous module **numpy.linalg**, déterminer les valeurs propres et une matrice de vecteurs propres pour :

3. Faire de même à l'aide de fonctions du module **sympy.** Comparer.

Exercice 2 :

On considère la matrice $M_{4,4}$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Utiliser le module **sympy** pour diagonaliser la matrice.