Algèbre Linéaire

TP n◦1 : Calcul matriciel

Exercice 1 :

On donne une valeur K et un tableau T de N valeurs entières(N<50) tel que la valeur K ne figure pas dans le tableau T (**T[i]!=K ;i=1..N**)

Ecrire une fonction **deplacer (T, K)** qui permet de déplacer les éléments du tableau T de manière à regrouper en tête de celui-ci toutes les valeurs inférieures à K et en queue les valeurs supérieures à K (sans utiliser un autre tableau).

Exercice 2 :

Soit une matrice **A(n,m)** de valeurs entières (n<50,m<100)
Ecrire une fonction **trier (A)** qui permet de faire un tri décroissant sur toutes les colonnes de la matrice A

05	15	34	21	11	18
03	11	75	03	56	39
19	30	24	95	99	90
10	24	43	45	65	19
45	87	18	78	74	71

Après tri A devient =

45	87	75	95	99	90
19	30	43	78	74	71
10	24	34	45	65	39
05	15	24	21	56	19
03	11	18	03	11	18

Exercice 3 :

Soit une matrice A de n ligne et m colonnes (n<100, m<50). Et soit le tableau T définie par rapport à la matrice A comme suit : L'ième élément de T représente le nombre d'éléments de la ligne i de A qui n'existe pas dans la ligne i+1 (la ligne suivante si elle existe).

Ecrire une fonction **build (A)** qui construit et affiche le tableau T.

Exercice 4 :

En mathématiques, une matrice stochastique (aussi appelée matrice de Markov) est une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Cela correspond, en probabilité, à la matrice de transition d'une chaîne de Markov finie.

Une matrice est dite bistochastique (ou doublement stochastique) si la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1.

Voici un exemple de matrice stochastique P (dans cet exemple, la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 ; on remarque que la somme des éléments de chaque colonne est quelconque):

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Exemple

Si G est une matrice stochastique, alors on appelle vecteur stable pour G un vecteur h tel que :

$$G = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$$

Et

$$h = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

$$hG = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$$

$$hG = \begin{pmatrix} 0,35625 + 0,01875 & 0,01875 + 0,60625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire une fonction **eststochastique(P)** qui permet de vérifier est ce que la matrice P est stochastique ou non.

2. Ecrire une fonction **estbistochastique(P)** qui permet de vérifier est ce que la matrice P est bistochastique ou non

3. Ecrire une fonction **vecteurstable(G, h)** qui permet de vérifier est ce que h est un vecteur stable de G ou non.

Exercice 5 :

On considère la matrice $A_{3,4}$ définie par :

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

1. Définir la matrice A.

2. Modifier la matrice A pour que ses deux premières lignes soient multipliées par 2 et que sa dernière colonne soit divisée par 3.
3. Créer une nouvelle matrice B définie par :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

en utilisant le fait que les lignes 1 et 2 sont composées des éléments successifs de deux suites arithmétiques (voir fonction *np.arange* et *np.ones()*).

4. Créer la matrice $C_{3,3}$ extraite de A telle que pour $1 \leq i, j \leq 3$, $c_{ij} = a_{ij}$.
5. Différents produits matriciels
    - Réaliser le produit matriciel D de B et A (*np.dot()*).
    - Réaliser le produit d'Hadamard E de B et de C.

(le produit d'Hadamard $E_{3,3}$ des matrices $B_{3,3}$ et $C_{3,3}$ est défini par : $\forall\ 1 \leq i, j \leq 3\ , e_{ij} = c_{ij} b_{ij}$)
6. Calculer la somme des éléments de la matrice E et le vecteur colonne Y ∈ R^3 tel que pour $1 \leq i \leq 3$, $y_i = \sum_{j=1}^{4} d_{ij}$ (*np.sum()*).

Exercice 6 :

On considère la matrice $A_{4,4}$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & 10 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi A est-elle diagonalisable ? À l'aide de la fonction *np.linalg.eig()*, calculer ses valeurs propres et donner une base de vecteurs propres.

2. Calculer de deux manières l'inverse de A en utilisant le résultat précédent et la fonction *np.linalg.inv*. Comparer les résultats obtenus (vous pourrez des tracés).
3. On considère maintenant la matrice $A_{n,n}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Examiner, comme à la question précédente, les cas n=5,10,50 (on utilisera n comme une variable, et on devra construire la matrice avec *np.eyes()* en fonction de n). Comparer les valeurs propres obtenues avec les valeurs définies pour $1 \leq k \leq n$ par

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right).$$

(On pourra utiliser la fonction *np.sort()*)

Exercice 7 :

On s'intéresse à la matrice $A_{3,5}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de la matrice A? Utiliser la fonction *np.linalg.matrix_rank* afin de retrouver ce résultat.
2. En définissant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Résoudre à l'aide de la fonction *np.linalg.solve()* le système $Ax = b$.