Algèbre Linéaire

TP n◦3 : Trigonalisation

Exercice 1 :

On considère la matrice $A_{4,4}$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Définir la matrice A.
2. Déterminer son polynôme caractéristique et justifier qu'elle n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

On considère la matrice $A_{3,3}$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique.
2. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
3. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 0 & a \\ 0 & * & b \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Exemple de code python utilisant le module sympy pour obtenir la forme de Jordan (triangulaire si la matrice est trigonalisable) :

```python
from sympy import *

M = Matrix([[2,-1],[1,4]])
P, J = M.jordan_form()
pprint(P)
pprint(J)
pprint(P**-1)
print(P*J*P**-1==M)
```

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

```
True
```