انتگرال سه‌گانه[1]

انتگرال سه‌گانه برخلاف انتگرال دوگانه که حجم را محاسبه می‌کند، ابر حجم را مورد محاسبه قرار می‌دهد.

در حل یک انتگرال سه‌گانه، چهار روش پیشنهاد می‌گردد که به صورت زیر می‌باشد.

1) روش معمول
2) روش استوانه‌ای
3) روش کروی
4) روش ژاکوبی

روش‌های انتگرال‌گیری سه‌گانه

1) روش معمول

در این روش، مشابه انتگرال دوگانه، انتگرال‌گیری از درون به سمت بیرون صورت می‌گیرد. بنابراین در گام اول، جواب درونی‌ترین انتگرال محاسبه شده سپس این جواب را در انتگرال وسط قرار داده و نهایتاً جواب انتگرال بیرونی که همان جواب نهایی است به دست می‌آید.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال سه‌گانه $\iiint_R xyz\, dV$ را حل کنید، که در آن R ناحیه $0 \le x \le 1$ ، $-2 \le y \le 0$ و $1 \le z \le 4$ می‌باشد.

حل:

برای حل انتگرال، ابتدا حدود را جای گذاری می‌کنیم و سپس از درونی‌ترین انتگرال شروع به حل می‌کنیم:

$$\int_0^1 \int_{-2}^0 \int_1^4 xyzdzdydx$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال میانی و در نهایت انتگرال بیرونی، را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_1^4 xyzdz = xy\int_1^4 z\,dz = xy\frac{z^2}{2}\Big]_1^4 = \frac{xy}{2}(16-1) = \frac{15}{2}xy$$

$$\int_{-2}^0 \frac{15}{2}xydy = \frac{15}{2}x\int_{-2}^0 ydy = \frac{15}{2}x\frac{y^2}{2}\Big]_{-2}^0 = \frac{15}{4}x(0-4) = -15x$$

[1] Triple Integrals

$$\int_0^1 -15x\,dx = -\frac{15}{2}x^2\Big]_0^1 = -\frac{15}{2}$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

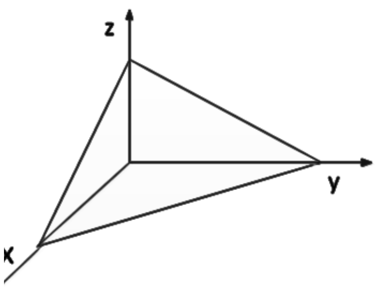
مثال: مطلوب است محاسبه $\iiint_R (xz+y^2)dv$ که در آن R ناحیه بین صفحات مختصات و صفحه $2x+y+3z=6$ می‌باشد.

حل:

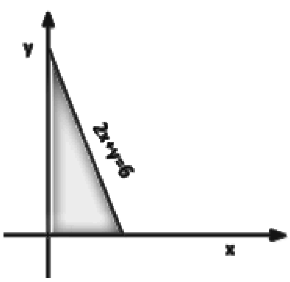
ابتدا ناحیه را بصورت زیر رسم می‌کنیم.

$$3z = 6-2x-y$$
$$\Rightarrow z = \frac{6-2x-y}{3}$$

تصویر ناحیه به شکل زیر است.



شکل(1)



شکل(2)

زمانی که در رابطه $2x+y+3z=6$، $z=0$ است، یعنی تصویر ناحیه بر xoy مد نظر است. برای حل از روش معمولی استفاده می‌شود. برای این کار ابتدا حدود z را به دست می‌آوریم. $2x+y+3z=6 \Rightarrow z=\frac{6-2x-y}{3}$

برای تعیین حدود y، $z=0$ قرار می‌دهیم و خواهیم داشت.

$$2x+y=6 \Rightarrow y=6-2x$$

و برای تعیین حدود x، $y=0$ و $z=0$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$2x=6 \Rightarrow x=3$$

لذا با جای گذاری حدود به‌دست آمده در انتگرال داریم:

$$\iiint (xz+y^2)dv = \int_0^3\int_0^{6-2x}\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} (xz+y^2)dzdydx$$

برای حل انتگرال فوق، ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال بیرونی را به‌ترتیب به‌صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{6-2x-y}{3}} (xz+y^2)dz = \left(x\frac{z^2}{2}+y^2z\right)\Big]_0^{\frac{6-2x-y}{3}} = \frac{x}{2}\left(\frac{6-2x-y}{3}\right)^2 + y^2\left(\frac{6-2x-y}{3}\right)$$

$$= \frac{x}{18}(6-2x-y)^2 + \frac{y^2}{3}(6-2x-y)$$

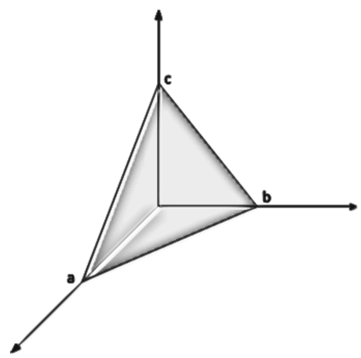
××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه $\iiint_R xdV$ روی چهار وجهی محدود به صفحات مختصات و صفحه

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

حل:

شکل ناحیه مورد نظر به صورت شکل (3) می‌باشد.



شکل(3)

$$\iiint\limits_R xdV=\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} xdzdydx$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی، سپس انتگرال میانی و در نهایت انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} xdz=x\int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz=xz]_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})}=xc(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})$$

$$\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} xc(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\,dy=xc\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})\,dy=xc(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b})]_0^{b(1-\frac{x}{a})}$$

$$=xc[b\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{b^2}{2b}(1-\frac{x}{a})^2]=\frac{bc}{2}(1-\frac{x}{a})^2x$$

$$\int_0^a\frac{bc}{2}(1-\frac{x}{a})^2xdx=\frac{bc}{2}\int_0^a(1-\frac{x}{a})^2\,xdx$$

برای حل انتگرال فوق از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$1-\frac{x}{a}=t$$

$$1-\frac{x}{a}=t\ \Rightarrow\ dt=\frac{-1}{a}dx\quad \text{و}\quad 1-t=\frac{x}{a}\ \Rightarrow\ x=a(1-t)\quad \text{و}\quad dx=-adt$$

$$\frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2xdx=\frac{bca}{2}\int_0^1 t^2(1-t)(-adt)=-\frac{bca^2}{2}\int_0^1 t^2(1-t)dt=\frac{a^2bc}{24}$$

نکته: دقت کنید با توجه به تغییر متغیر موجود یعنی $1-\frac{x}{a}=t$ حدود انتگرال جدید با جای گذاری $x=0$ و $x=a$ در این رابطه به صورت $t=0$ و $t=1$ به دست آمده است.

××××××××××××××××××××××××××××××××

2) روش استوانه‌ای

در روش استوانه‌ای همواره فرمول‌های زیر موجود است:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad r > 0 \text{ و } r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = Arc\tan\frac{y}{x}$$

با توجه به مختصات استوانه‌ای می‌توان انتگرال در مختصات استوانه‌ای را با فرمول زیر محاسبه کرد

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از بالا به سهمی‌وار $z = 5 - x^2 - y^2$ و از پایین به سهمی‌وار $z = 4x^2 + 4y^2$ محدود است.

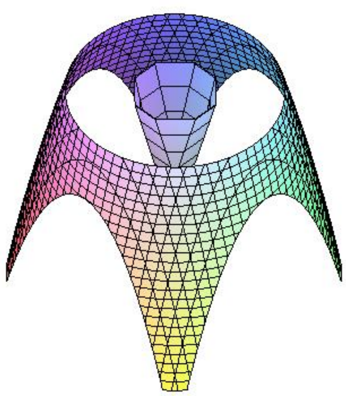
حل:

ابتدا محل تلاقی دو رویه را می‌یابیم.

$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2 \\ z = 4x^2 + 4y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - x^2 - y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$



دایره‌ی فوق فصل مشترک دو سهمی‌وار می‌باشد و چون در صورت سوال حجم ناحیه مد نظر است که ناحیه هم به شکل $x^2 + y^2$ است پس انتگرال را از راه استوانه‌ای حل می‌کنیم.

$$V = \iiint_R r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4r^2}^{5-r^2} r dz dr d\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی، سپس انتگرال میانی و در نهایت انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_{4r^2}^{5-r^2} rdz = r\int_{4r^2}^{5-r^2} dz = rz]_{4r^2}^{5-r^2} = r(5-r^2-4r^2) = r(5-5r^2)$$

$$\int_0^1 r(5-5r^2)\,dr = \int_0^1 (5r-5r^3)\,dr = \frac{5r^2}{2}-\frac{5r^4}{4}]_0^1 = \frac{5}{2}-\frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\int_0^{\pi ۲} \frac{5}{4}d\theta = \frac{5}{4}\theta]_0^{\pi ۲} = \frac{5}{4}\pi ۲ = \frac{5}{2}\pi$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال سه‌گانه $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2dzdydx$ را محاسبه کنید.

حل:

با توجه به این که در صورت سوال یک انتگرال سه‌گانه داریم اما در حدود انتگرال عبارت x^2+y^2 مشاهده می‌شود پس بین روش‌های انتگرال‌گیری سه‌گانه، مختصات استوانه‌ای راه بهتری می‌باشد. برای تعیین حدود انتگرال‌گیری $(x^2+y^2)^2 \le z \le 1$ است و چون $x^2+y^2=r^2$ لذا $r^4 \le z \le 1$ خواهد بود. از طرفی $-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$ و عبارت $y=\sqrt{4-x^2}$ دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع 2 را مشخص می‌کند و این، محدودیت $0 \le r \le 2$ را تعیین می‌کند. برای محدوده‌ی θ چون هیچ شرطی در مساله آورده نشده، پس $0 \le \theta \le \pi ۲$ خواهد بود. با توجه به محدودیت‌های بدست آمده، انتگرال دوگانه به صورت زیر است. دقت شود همواره $x = r\cos\theta$ است.

$$\int_0^{\pi ۲}\int_0^{2}\int_{r^4}^{1} r^2\cos^2\theta\, rdzdrd\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی، سپس انتگرال میانی و در آخر انتگرال بیرونی به صورت زیر حل می‌گردد:

$$\int_{r^4}^{1} r^2\cos^2\theta\, rdz = r^3\cos^2\theta z]_{r^4}^{1} = r^3\cos^2\theta(1-r^4) = (r^3-r^7)\cos^2\theta$$

$$\int_0^2 (r^3-r^7)\cos^2\theta dr = (\frac{r^4}{4}-\frac{r^8}{8})\cos^2\theta]_0^2 = \left(\frac{16}{4}-\frac{256}{8}\right)\cos^2\theta = -28\cos^2\theta$$

$$\int_0^{\pi ۲} -28\cos^2\theta d\theta = -28\int_0^{\pi ۲}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = -28(\int_0^{\pi ۲}(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2})d\theta)$$

$$= -28(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta)]_0^{\pi ۲} = -28(\frac{1}{2}\pi ۲+\frac{1}{4}\sin \pi ۴-\frac{1}{4}\sin 0) = -28\pi$$

××××××××××××××××××××××××××××××

3) روش کروی

فرمول‌های روش کروی به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le \pi ۲ \text{ و } 0 \le \varphi \le \pi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

$$r = \rho \sin\varphi$$

براساس فرمول‌های فوق، فرمول انتگرال کروی به‌صورت زیر خواهد بود

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_{R'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta\,, \rho\sin\varphi\sin\theta\,, \rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

که در آن ناحیه R واقع در قسمت بالایی مخروط $z = c\sqrt{x^2+y^2}$ در داخل کره $x^2+y^2+z^2 = a^2$ می‌باشد.

حل:

با وجود عبارت $x^2+y^2+z^2$ در انتگرال، انتگرال را با روش کروی حل می‌کنیم. بدین منظور کافی است حدود انتگرال را تعیین کنیم.

چون در صورت مساله هیچ شرطی آورده نشده است پس $0 \le \theta \le \pi ۲$ و از طرفی با توجه به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع a است پس $0 \le \rho \le a$ می‌باشد. برای تعیین حدود φ از فرمول $\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{1}{c} \implies \varphi = Arc\tan\frac{1}{c}$$

با توجه به حدود فوق، انتگرال سه‌گانه را به صورت زیر داریم:

$$I = \iiint_R (x^2+y^2+z^2)\, dV = \int_0^{\pi ۲} \int_0^{Arc\tan\frac{1}{c}} \int_0^{a} (\rho^2)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی، سپس انتگرال میانی و در نهایت انتگرال بیرونی، را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\int_0^a \rho^4 \sin\varphi\, d\rho = \sin\varphi \int_0^a \rho^4\, d\rho = (\sin\varphi)(\frac{1}{5})\rho^5]_0^a = \frac{1}{5}a^5 \sin\varphi$$

$$\int_0^{Arc\tan\frac{1}{c}} \frac{1}{5}a^5 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{5}a^5 \int_0^{Arc\tan\frac{1}{c}} \sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{5}a^5 \cos\varphi]_0^{Arc\tan\frac{1}{c}}$$

$$= -\frac{1}{5}a^5(\cos(Arc\tan\frac{1}{c}) - \cos 0) = \frac{1}{5}a^5(1-\cos(Arc\tan\frac{1}{c}))$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5}a^5\left(1-\cos\left(Arc\tan\frac{1}{c}\right)\right)d\theta = \frac{1}{5}a^5\left(1-\cos\left(Arc\tan\frac{1}{c}\right)\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{5}a^5\left(1-\cos\left(Arc\tan\frac{1}{c}\right)\right)\theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{5}a^5\left(1-\cos\left(Arc\tan\frac{1}{c}\right)\right)$$

×××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه $\iiint zdzdydx$ که در آن R ناحیه محدود به نیم کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z \geq 0)$ و صفحه xoy می‌باشد.

حل:

برای حل مساله با توجه به اینکه ناحیه، یک نیم کره است می‌توان از مختصات کروی استفاده کرد. لذا در ابتدا باید حدود ناحیه را مشخص کنیم. چون محدودیتی از صفحه‌ی xoy آورده نشده است پس $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و چون نیم کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع a داریم پس $0 \leq \rho \leq a$ اما برای حدود φ، چون $z \geq 0$ بنابراین $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ با توجه به محدودیت‌های فوق انتگرال سه‌گانه به صورت زیر خواهد بود و همواره در مختصات کروی $z=\rho\cos\varphi$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho\cos\varphi(\rho^2\sin\varphi)d\rho d\varphi d\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی، سپس انتگرال میانی و در نهایت انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_0^a (\rho\cos\varphi)(\rho^2\sin\varphi)d\rho = \cos\varphi\sin\varphi\int_0^a \rho^3 d\rho = \cos\varphi\sin\varphi\,(\frac{\rho^4}{4})]_0^a = \frac{a^4}{4}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4}{4}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{a^4}{8}(\frac{1}{2}\cos 2\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^4}{16}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{a^4}{16}$$

$$\int_{0}^{\pi۲} \frac{a^4}{16} d\theta = \frac{a^4}{16} \theta]_0^{\pi۲} = \frac{a^4}{16} (\pi۲) = \frac{a^4 \pi}{8}$$