توابع چند متغیره

در علوم مختلف توابعی وجود دارند که بیش از یک متغییر مستقل دارند. در ریاضی پایه بیش‌تر با مواردی سروکار داشتیم که تابع‌ها دارای یک متغیر مستقل بودند. به عنوان مثال تابع $y = f(x)$ دارای یک متغیر مستقل x و یک متغیر وابسته y می‌باشد. در این فصل با توابعی سر و کار داریم که بیش از یک متغییر مستقل دارند. این توابع مانند توابع یک متغیره دارای مشتق، انتگرال و نظایر آن می‌باشند.

تعریف

یک تابع n متغیره مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب $(x_1, \dots, x_n, z)$ است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای عنصر اول یکسان نباشند. به عبارت دیگر تابع f که ضابطه یا معادله‌ی آن به صورت $w = f(x_1, \dots, x_n)$ است یک تابع n متغیره می‌باشد.

نکته: در تعریف فوق $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای مستقل و z متغیر وابسته می‌باشد.

مشتقات جزئی(نسبی)

در توابع یک متغیره $\left(y = f(x)\right)$ هدف از مشتق گیری محاسبه تغییرات متغیر وابسته y نسبت به متغییر مستقل x می‌باشد که آن را با y' نمایش می‌دهیم. در توابع دو متغیره $\left(z = f(x, y)\right)$ هدف از مشتق‌گیری محاسبه تغیرات متغیر وابسته z نسبت به متغیرهای مستقل x و y است. در توابع چند متغیره به طور مشابه بیان می‌شود. در توابع با بیش از یک متغیر به جای نماد مشتق که پریم بود، از نماد رُند با علامت اختصاری ∂ استفاده می‌شود و مشتق گیری را نسبت به همه متغیرهای مستقل تابع به طور جدا محاسبه می‌کنند. از این رو نماد گذاری‌های به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad {z'}_x \quad , \quad f_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad z'_y \quad , \quad f_y$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید $z = x^2 + y^3$ است، مطلوب است محاسبه مشتقات جزئی z نسبت به x و y .

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\mathrm{x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید $z = 5x^2 + 7y^3$ است، مطلوب است محاسبه مشتقات جزئی z نسبت به x و y .

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10\mathrm{x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 21y^2$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید $z = x^2 + 7xy^3$ است، مطلوب است محاسبه مشتقات جزئی z نسبت به x و y .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\mathrm{x} + 7y^3 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 21\mathrm{x}y^2$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: اگر $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ نشان دهید:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

حل: با توجه به این که $z = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$، لذا داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+y^2}\right] = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right] = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: اگر $f(x,y) = e^{-x}sin(x+2y)$ باشد، مقدار $f_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ را بیابید .

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}sin(x+2y) + e^{-x}cos(x+2y)$$

$$f_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مشتقات مراتب بالاتر توابع چند متغیره

همان‌طور که در توابع یک متغیره $y = f(x)$ می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را محاسبه کرد و آن را y' و $y"$ و ... نامید در توابع چند متغیره نیز می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را محاسبه کرد. به عنوان مثال برای توابع دو متغیره

$z = f(x,y)$ مشتقات مرتبه دوم به صورت زیر محاسبه می‌گردد که نمادگذاری‌ها و محاسبات به صورت زیر آورده شده است:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\left(f_y\right)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\left(f_y\right)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

دقت شود در نمادگذاری $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = fxy$ هدف آن است که ابتدا نسبت به x مشتق گرفته شود سپس نسبت به yمشتق گرفته شود، در حالی که در محاسبه f_{yx} عکس این محاسبات انجام می‌شود. همچنین توجه به این نکته ضروری است که ترتیب x و y در نمادهای f_{xy} به عکس ترتیب آنها در نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $f_{(x,y)} = 2x^4 + x^2y^4 - 2x^2$ را بیابید.

ابتدا باید مشتقات جزئی مرتبه اول را محاسبه کرد.

$$f_x = 8x^3 + 2xy^4 - 4x$$

$$f_y = 4x^2y^3$$

سپس مشتق‌های جزئی مرتبه دوم f را با توجه به فرمول‌های بیان شده محاسبه می‌کنیم:

$$f_{xx} = 24x^2 + 2y^4 - 4$$

$$f_{yy} = 12x^2y^2$$

$$f_{xy} = 8xy^3$$

$$f_{yx} = 8xy^3$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

نکته: دقت کنید در مثال فوق $f_{xy} = f_{yx}$ برابرند. در قضیه‌ای که توسط کلرو بیان شده مطرح می‌گردد که اگر f یک تابع دو متغییره باشد و f_{xy} و f_{yx} در نقطه (a,b) پیوسته باشند، در آن صورت $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

نکته: مشتقات جزئی مراتب بالاتر به صورت مشابه بیان می‌گردد. به عنوان مثال داریم:

$$f_{xy} = \left(f_{xy}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

که در تابع سه متغیره با قضیه کلرو می‌توان نشان داد که $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$