3) روش تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

گاهی اوقات تابع زیر انتگرال پیچیده است و نمی‌توان به راحتی یا اصلا انتگرال مورد نظر را محاسبه کرد مانند $\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dxdy$ در آن صورت برای آنکه حل انتگرال ساده گردد بهتر است ترتیب انتگرال را عوض کرد(جای انتگرال درونی و بیرونی را تغییر داد) یعنی انتگرال فوق را به‌صورت $\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dydx$ در نظر گرفت.

گام‌های حل انتگرال دوگانه با روش تعویض ترتیب

گام 1: ناحیه R را بنویسید.

گام 2: شکل ناحیه R را رسم کنید و آن را هاشور بزنید.

گام 3: اگر در انتگرال مورد سوال پس از تعویض ترتیب $dxdy$داشته باشیم در قسمت هاشورخورده فلش هایی(المان‌هایی) به صورت افقی رسم کنید اما اگر در انتگرال مورد سوال پس از تعویض ترتیب $dydx$ داشتیم در قسمت هاشور خورده شکل ناحیه R فلش‌هایی(المان‌هایی) به‌صورت عمودی رسم کنید.

گام 4: ابتدا و انتهای المان‌ها را برای نوشتن حدود جدید در نظر بگیرید و حدود جدید را بنویسید و جای dx وdyرا تعویض کنید.

گام 5: انتگرال بدست آمده جدید را با روش معمولی حل کنید. .

××××××××××××××××××××××××××××××××

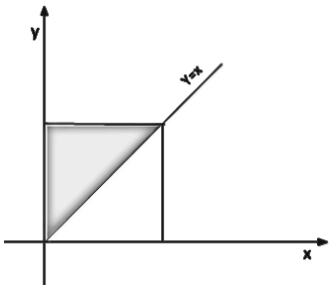
مثال: انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2\, dydx$ را حل کنید.

حل: برای حل انتگرال فوق گام های زیر را انجام می‌دهیم.

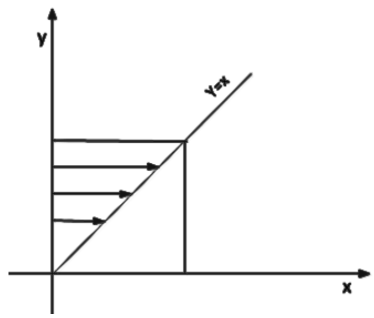
گام 1: ابتدا ناحیه R را می‌نویسیم.

$$R = \begin{cases} x \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

گام 2: شکل (6) ناحیه R را مشخص می‌کند مثلث بالایی به عنوان ناحیه انتگرال‌گیری انتخاب می‌شود.



شکل(6)



گام 3: در صورت سوال $dydx$داریم که پس از تعویض، $dxdy$ خواهیم داشت به همین علت در شکلفلش‌هایی(المان‌هایی) افقی رسم می‌کنیم.

گام 4: برای حدود جدید چون انتگرال به فرم $\iint \sin y^2\, dxdy$ درآمده بنابراین dx مربوط به انتگرال درونی است و باید ابتدا حدود انتگرال درونی مشخص شود. برای این کار سوالی که باید مطرح شود آن است که ابتدای المان‌ها روی چه خطی واقع شده که در شکل ابتدای همه المان‌ها روی خط $x = 0$ واقع شده پس کران پایین انتگرال درونی صفر خواهد شد. برای کران بالایی این سوال مطرح می‌شود که انتهای المان‌ها در کجا قرار دارد که جواب آن $y = x$ است چون باید حدود انتگرال درونی برحسب x باشد لذا جواب انتگرال درونی بر حسب متغیر y خواهد بود.

برای مشخص کردن حدود بیرونی چون dy مربوط به انتگرال بیرونی است پس حدود y در شکل را باید مشخص کنیم که از $y = 0$ تا $y = 1$ خواهد بود. پس انتگرال جدید به فرم زیر است.

$$\int_0^1 \int_0^y \sin y^2\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^y \sin y^2\, dx \right] dy$$

گام 5: در این گام باید انتگرال مورد نظر حل شود. بنابراین ابتدا انتگرال درونی را حل می‌کنیم.

$$\int_0^y \sin y^2\,dx = \sin y^2 \int_0^y dx = \sin y^2\,(x)]_0^y = \sin y^2\,(y-0) = y\sin y^2$$

در نهایت جواب انتگرال بیرونی را به دست می‌آوریم.

$$\int_0^1 y\sin y^2\,dy$$

برای حل فوق از تغییر متغیر $y^2 = t$ استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$y^2 = t \Longrightarrow 2ydy = dt \Longrightarrow ydy = \frac{1}{2}dt$$

با جای‌گذاری عبارت‌های بدست آمده با روش تغییر متغیر در انتگرال داریم :

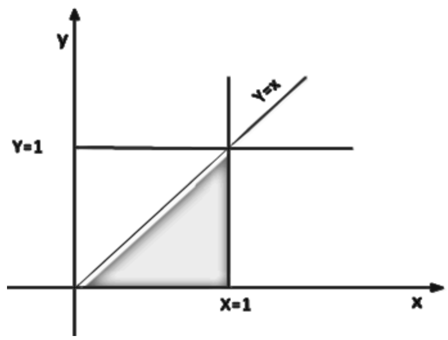
$$\int_0^1 \frac{1}{2}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(y^2)]_0^1 = -\frac{1}{2}(\cos 1 - \cos 0) = -\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dxdy$ را حل کنید.

حل: برای حل، انتگرال را به صورت زیر در نظر می گیریم و سپس گام های حل را به کار می بریم:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right] dy$$



گام 1: ابتدا ناحیه R را می‌نویسیم.

$$R = \begin{cases} y \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

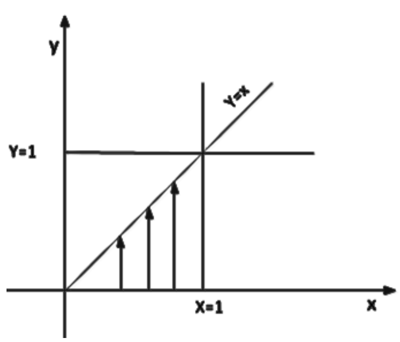
گام2: شکل ناحیه را به‌صورت شکل(8) رسم می‌کنیم.

گام3: پس از تعویض انتگرال به فرم $\iint e^{x^2} dydx$ خواهد شد، لذا در ناحیه‌ای که توسط روش تیک زنی هاشور خورده المان‌های عمودی رسم می‌کنیم. زیرا پس از تعویض المان‌ها به صورت عمودی می‌باشند

گام 4: حدود جدید را با توجه به شکل فوق می‌نویسیم.

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dydx = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2}\, dy \right] dx$$

گام 5: برای حل ابتدا از انتگرال درونی شروع می‌کنیم.



شکل (9)

$$\int_0^x e^{x^2} dy = e^{x^2} \int_0^x dy = e^{x^2} (y)]_0^x = e^{x^2}(x) = xe^{x^2}$$

سپس انتگرال بیرونی را حل می‌کنیم.

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e-1)$$

نکته: برای حل انتگرال بیرونی از روش تغییر متغیر و به صورت زیر استفاده شده است.

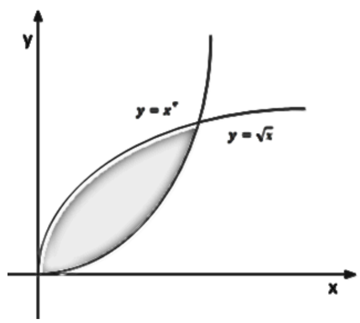
$$x^2 = t \Longrightarrow 2xdx = dt \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

×××××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: در انتگرال $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$ ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید.

حل: ابتدا ناحیه R را می‌نویسیم.

$$R: \begin{cases} x^3 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



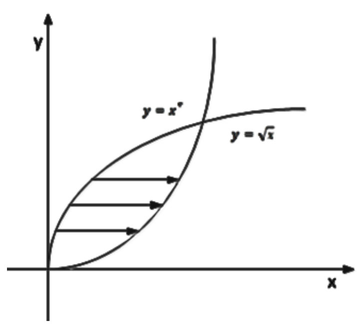
سپس شکل ناحیه را رسم می‌کنیم.

محل تلاقی تابع‌های صورت مساله را به صورت زیر می‌یابیم.

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^3 \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{x} = x^3 \xrightarrow{\text{به توان 2}} x = x^6 \Longrightarrow x(x^5 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ x^5 = 1 \Longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

اگر $x = 0 \Rightarrow y = 0$ و اگر $x = 1$ در آن صورت $y = 1$ خواهد بود. حال ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\iint f(x,y)dxdy$$



چون پس از تعویض، $dxdy$ داریم لذا در شکل، مانند شکل (13) المان افقی رسم می‌کنیم. حدود جدید را به صورت

$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$ زیر می‌نویسیم.

دقت کنید برای حدود درونی چون dx اول قرار گرفته و چون ابتدای المان‌ها روی منحنی $y=\sqrt{x}$ می‌باشد، لذا حدود باید بر حسب x باشد، بنابراین طرفین این رابطه را به توان 2 می‌رسانیم و خواهیم داشت $y^2=x$. به همین ترتیب اگر از $y=x^3$ ، جذر 3 بگیریم و داریم $x=\sqrt[3]{y}$.

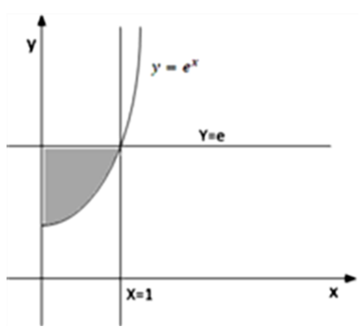
××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^1 \int_{e^x}^{e} \frac{1}{\ln y} dydx$ را بیابید.

حل: ابتدا ناحیه R را می‌نویسیم و در گام بعد شکل ناحیه R را رسم می‌کنیم.

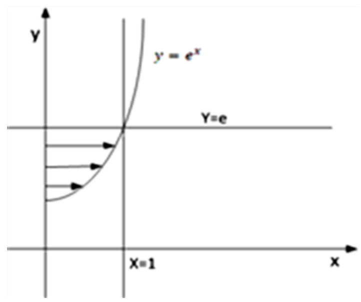
$$R:\begin{cases} e^x \le y \le e \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

با توجه به این که محاسبه $\int \frac{1}{\ln y} dy$ سخت و پیچیده است، ابتدا تعویض را انجام داده و سپس حدود انتگرال جدید را می‌نویسیم. برای نوشتن حدود جدید چون پس از تعویض $dxdy$ داریم و dx اول است لذا المان‌های افقی در شکل در نظر می‌گیریم. به شکل (20) مراجعه شود



ابتدای المان روی خط $x=0$ و انتهای آن روی منحنی $y=e^x$ است که باید آن را بر حسب y بنویسیم و برای نوشتن این رابطه بر اساس y داریم.

$$y = e^x \xrightarrow{\text{از طرفین ln بگیرید}} \ln y = \ln e^x = x \implies \ln y = x$$



بنابراین حدود جدید به فرم زیر است.

$$\int_1^e \int_0^{\ln y} \frac{1}{\ln y} dxdy$$

در گام بعد انتگرال را حل می‌کنیم. برای اینکار کافی است ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال بیرونی را حل کنیم.

$$\int_0^{\ln y} \frac{1}{\ln y} dx = \frac{1}{\ln y} \int_0^{\ln y} dx = \frac{1}{\ln y} (x)]_0^{\ln y} = \frac{1}{\ln y} (\ln y) = 1$$

$$\int_1^e dy = y]_1^e = (e-1)$$

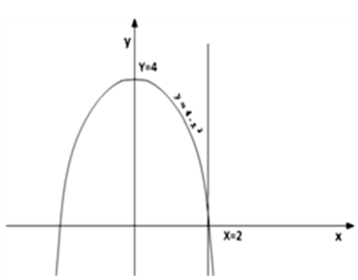
×××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه زیر را با روش تعویض ترتیب انتگرال‌گیری حل کنید.

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dydx$$

حل: برای حل ابتدا ناحیه را نوشته و سپس ناحیه را رسم می‌کنیم.

$$R: \begin{cases} 0 \le y \le 4 - x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \implies x^2 = 4 - y \implies x = \sqrt{4-y}$$



(21)شکل

انتگرال پس از تعویض و با حدود جدید به صورت زیر خواهد بود.

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} x \frac{e^{2y}}{4-y} dxdy$$

در زیر حل انتگرال به صورت کلی صورت گرفته است.

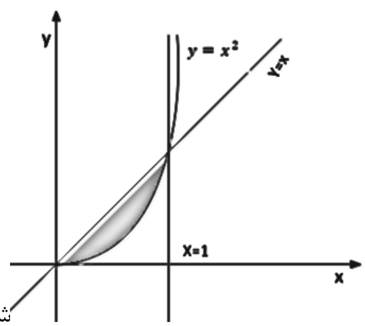
$$=\int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y}\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{4-y}}dy=\int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y}\left(\frac{4-y}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^4 e^{2y}dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2y}\right)\Big|_0^4$$

$$=\frac{1}{4}(e^8-1)$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_R \frac{x}{y}e^y dA$ که در آن R ناحیه $x^2\le y\le x$ و $0\le x\le 1$ می‌باشد.

حل: ناحیه R به صورت زیر می‌باشد و شکل آن به صورت زیر می‌باشد.

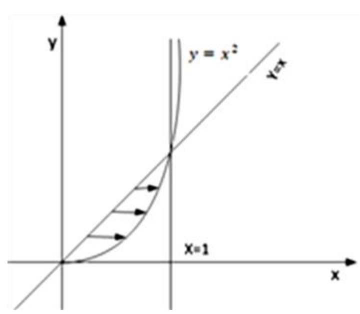


شکل(22)

$$R=\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le x\end{cases}$$

در صورت مساله dA مطرح شده که می‌توان به جای آن $dxdy$ یا $dydx$ را قرار داد. اما اگر $dydx$ را قرار دهیم چون حل انتگرال $\int \frac{e^y}{y}dy$ مشکل می باشد پس بهتر است $dxdy$ را قرار دهیم. در نتیجه در شکل المان افقی کشیده تا به توان حدود انتگرال را تشخیص داد. در آن صورت انتگرال به صورت $\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}}\frac{x}{y}e^y dxdy$ خواهد بود.

شکل(23)



برای حل مورد نظر ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_{y}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} e^{y} dx = \frac{e^{y}}{y} \int_{y}^{\sqrt{y}} x\, dx = \frac{e^{y}}{y} \frac{x^2}{2}\Big]_{y}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \frac{e^{y}}{y} (y - y^2) = \frac{1}{2}(e^{y} - e^{y} y)$$

حال با جای‌گذاری انتگرال درونی در بیرونی داریم:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} (e^{y} - e^{y} y) dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{y}(1-y) dy$$

برای حل این انتگرال از روش جز به جز استفاده می‌کنیم.

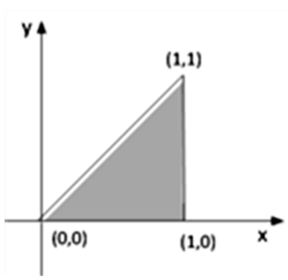
$$\begin{cases} u = 1 - y \implies du = -dy \\ dv = e^{y} dy \implies v = e^{y} \end{cases}$$

$$I = uv - \int v du = \frac{1}{2}\left[(1-y)e^{y}]_0^1 + \int_{0}^{1} e^{y} dy\right] = \frac{1}{2}[(1-y)e^{y}]_0^1 + e^{y}]_0^1]$$

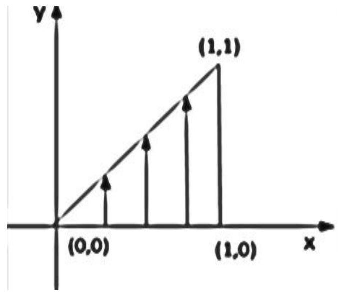
$$= \frac{1}{2}[-e^{0} + (e^{1} - e^{0})] = \frac{1}{2}[-1 + e^{1} - 1] = \frac{1}{2}[e-2] = \frac{1}{2}e - 1$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_R \frac{xy}{1+x^4} dA$ که در آن R عبارت است از مثلث با رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(1,1)$.



حل: شکل ناحیه به صورت زیر است. چون حل انتگرال $\int \frac{xy}{1+x^4} dx$ پیچیده است پس ترتیب انتگرال را به صورت زیر عوض می‌کنیم. برای این کار ابتدا انتگرال $\iint \frac{xy}{1+x^4} dydx$ در نظر می‌گیریم. بنابراین در شکل المان عمودی رسم می‌کنیم و با توجه به این المان، حدود انتگرال به صورت زیر خواهد بود.



$$\int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{1+x^4} dydx$$

برای حل مورد نظر ابتدا انتگرال درونی و 1 انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می کنیم.

$$\int_0^x \frac{xy}{1+x^4} dy = \frac{x}{1+x^4} \int_0^x ydy = \frac{x}{1+x^4} \frac{y^2}{2}]_0^x = \frac{x}{1+x^4} \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2(1+x^4)}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \ln(1+x^4)]_0^1 = \frac{1}{8} \ln(1+x^4)]_0^1 = \frac{1}{8} (\ln(1+1) - \ln(1-0))$$

$$= \frac{1}{8} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{8} \ln 2$$