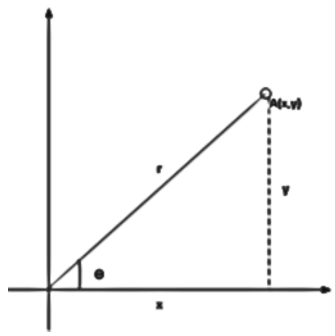
۳) انتگرال دوگانه با روش قطبی



در بعضی از موارد در تابع انتگرال یا حدود انتگرال‌گیری حالت‌هایی موجود است که اگر انتگرال را با روش قطبی حل کنیم آسان‌تر حل می‌گردد.

نکته: به‌جای حل انتگرال در مختصات دکارتی آن را در مختصات قطبی حل می‌کنیم.

نکته: به‌طور خلاصه می‌توان بیان داشت که اگر انتگرال را بر حسب متغیرهای x و y حل کنیم در مختصات قائم یا دکارتی هستیم اما اگر انتگرال را بر حسب متغیرهای r و θ حل کنیم در مختصات قطبی قرار داریم.

روش تبدیل حال‌های دکارتی و قطبی به یکدیگر

فاصله نقطه A تا مبدا را با r و زاویه‌ای که با محور xها دارد را با θ در نظر می‌گیریم. از نقطه A به محور xها خطی عمودی متصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه‌ای بوجود آید.

در این مثلث همواره داریم.

$$\cos\theta = \frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} \qquad \text{و} \qquad \sin\theta = \frac{\text{مقابل ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{و} \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ \text{و} \ x^۲ + y^۲ = r^۲$$

طرز تشخیص انتگرال‌هایی که با روش قطبی حل می‌شوند

برای تشخیص اینکه انتگرال را می‌توان با روش قطبی حل کرد، می‌توان این نکته را در نظر داشت که در بیشتر مواقع زمانی‌که در تابع زیر انتگرال یا حدود انتگرال‌گیری عبارت $x^۲ + y^۲$ و یا عبارت‌های مشابه مانند $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\sin x^۲ + y^۲$ و $\ln x^۲ + y^۲$و ... موجود باشد از روش قطبی برای حل استفاده می‌شود.

فرمول انتگرال‌گیری قطبی

برای حل یک انتگرال دوگانه با روش قطبی به‌جای $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ و به‌جای dA عبارت $rdrd\theta$ قرار می‌گیرد.

با این تبدیلات فرمول تبدیل انتگرال دوگانه از قائم به قطبی به‌صورت زیر خواهد بود.

$$I = \iint_R f(x,y)dA = \iint_T f(r\cos\theta\,, r\sin\theta)rdrd\theta$$

که T ناحیه انتگرال‌گیری در مختصات قطبی می‌باشد

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{۲xy}{x^۲+y^۲}dA$ که در آن R ناحیه‌ای محدود به معادلات $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ و $x^۲ + y^۲ \leq a^۲ (a > ۰)$ می‌باشد را حل کنید.

حل:

$$\iint_R \frac{۲xy}{x^۲+y^۲}dA = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۰^a \frac{۲(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^۲}rdrd\theta$$

$$۲\int_۰^a r\cos\theta\sin\theta\,dr = ۲\cos\theta\sin\theta(\frac{r^۲}{۲})]_۰^a = ۲\frac{a^۲}{۲}\cos\theta\sin\theta = a^۲\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta = \frac{a^۲}{۲}\sin ۲\theta$$

لذا برای حل انتگرال بیرونی خواهیم داشت

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{a^۲}{۲}\sin ۲\theta d\theta = \frac{-a^۲}{۲}\times\frac{۱}{۲}\cos ۲\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{-a^۲}{۴}\cos ۲\theta]_۰^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{-a^۲}{۴}(\cos\pi - \cos ۰) = \frac{a^۲}{۲}$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه زیر را بررسی کنید.

$$\iint_{x^۲+y^۲\leq ۱} \ln(x^۲+y^۲)\,dA$$

حل: با توجه به وجود عبارت $x^۲ + y^۲$ در تابع زیر انتگرال و در حدود انتگرال، از روش قطبی برای حل استفاده می‌کنیم که در آن $x^۲ + y^۲ = r^۲$ و $dA = rdrd\theta$ را در انتگرال جای گذاری می‌کنیم.

$\iint (\ln r^۲)\, rdrd\theta$ که با توجه به ناحیه $x^۲+y^۲\leq ۱$ ناحیه انتگرال درون یک دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱ می‌باشد و چون محدودیت دیگر گذاشته نشده پس کل دایره ناحیه جواب است پس زاویه را از ۰ تا ۲π در نظر می‌گیریم.

$$\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۱}(\ln r^۲)\, rdrd\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال بیرونی را حل می‌کنیم.

$$\int_۰^{۱}(\ln r^۲)\, rdr=\int\frac{۱}{۲}\ln t dt=\frac{۱}{۲}t\ln t-t]_۰^۱=\frac{۱}{۲}[۱-۰]=-\frac{۱}{۲}$$

$$-\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}d\theta=-\frac{۱}{۲}\theta]_۰^{۲\pi}=-\frac{۱}{۲}(۲\pi)=-\pi$$

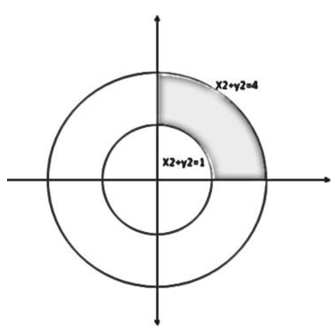
لازم به ذکر است که برای حل انتگرال درونی از روش تغییر متغیر و به صورت زیر استفاده شده است.

$$r^۲=t\Longrightarrow ۲rdr=dt\Longrightarrow rdr=\frac{۱}{۲}dt$$

نکته: دقت شود در محاسبه حد پایین یعنی عدد صفر در عبارت $t\ln t$ حالت $۰\times\infty$ بوجود می‌آید که می‌توان آن را رفع ابهام کرده که جواب آن صفر خواهد شد.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\iint_R\frac{۱}{x^۲+y^۲}dA$ در صورتی‌که R در ربع اول میان دو دایره $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۱$ قرار داشته باشد.



حل: معادله $x^۲+y^۲=۴$ دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۲ و $x^۲+y^۲=۱$ دایره به مرکز $(۰,۰)$ و شعاع ۱ می‌باشد با رسم دو دایره مورد نظر و این شرط که در ربع اول قرار داریم. شکل ناحیه به صورت شکلخواهد شد. برای حل انتگرال با توجه به وجود $x^۲+y^۲$ در انتگرال از روش قطبی و فرمول‌های قطبی استفاده می‌کنیم.

$$I=\iint_R\frac{۱}{x^۲+y^۲}dA=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\int_۱^{۲}\frac{۱}{r^۲}rdrd\theta$$

برای حل انتگرال فوق ابتدا انتگرال درونی و سپس انتگرال بیرونی را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\int_{۱}^{۲} \frac{۱}{r^{۲}} r dr = \int_{۱}^{۲} \frac{۱}{r} dr = \ln r]_{۱}^{۲} = \ln ۲ - \ln ۱ = \ln ۲$$

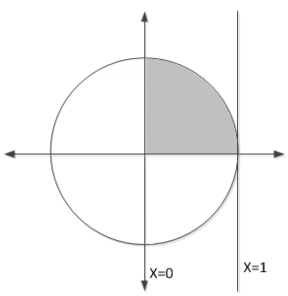
$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \ln ۲ d\theta = \ln ۲ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\theta = \ln ۲ \, (\theta)]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \ln ۲ \, (\frac{\pi}{۲}) = \frac{\pi}{۲} \ln ۲$$

×××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال $\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}} \sqrt{۱ - x^{۲} - y^{۲}} \, dydx$ را محاسبه کنید.

حل: انتگرال را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{۱} \int_{۰}^{\sqrt{۱-x^{۲}}} \sqrt{۱ - (x^{۲} + y^{۲})} \, dydx$$



با توجه به این که در تابع زیر انتگرال عبارت $x^{۲} + y^{۲}$ مشاهده می‌شود، لذا می‌توان انتگرال را از طریق قطبی حل کرد. برای این کار کافی است که فرمول‌های انتگرال قطبی را به کار ببریم و با توجه به آن که $۰ \leq y \leq \sqrt{۱ - x^{۲}}$ می‌توان $y = \sqrt{۱ - x^{۲}}$ که در آن صورت داریم $y^{۲} = ۱ - x^{۲}$، در نتیجه معادله $y^{۲} + x^{۲} = ۱$ یک دایره به مرکز مبدا و شعاع یک می‌باشد که با توجه به این دایره حدود انتگرال به صورت زیر خواهد بود.

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ - r^{۲}} \, rdrd\theta \;\; = \int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ - r^{۲}} \, rdr = \frac{۱}{۳}$$

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۳} d\theta = \frac{۱}{۳} \theta |_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi}{۶}$$

توجه به این نکته ضروری است که انتگرال درونی از روش تغییر متغیر و به صورت زیر حل می‌گردد.

$$\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ - r^{۲}} \, rdr$$

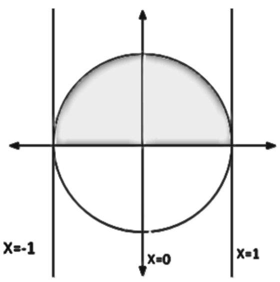
$$۱ - r^{۲} = t \Longrightarrow -۲□□□ = dt \Longrightarrow rdr = -\frac{۱}{۲} dt$$

$$\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ - r^{۲}} \, rdr = -\frac{۱}{۲} \int \sqrt{t} dt = -\frac{۱}{۲} \int t^{\frac{۱}{۲}} dt = -\frac{۱}{۲}\frac{۲}{۳} t^{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳} t^{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۱}{۳} (۱ - r^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

×××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دو گانه $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^{2}}} e^{x^{2}+y^{2}}\,dydx$ را حل کنید.

حل: با توجه به حدود ناحیه شکل ناحیه به صورت زیر می‌باشد. لذا چون در تابع زیر انتگرال عبارت $x^{2}+y^{2}$ مشاهده می‌شود بنابراین انتگرال را با روش قطبی حل می‌کنیم.



$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} e^{r^{2}} r dr d\theta$$

$$\int_{0}^{1} e^{r^{2}} r dr = \frac{1}{2}(e-1)$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(e-1)d\theta = \frac{1}{2}(e-1)\int_{0}^{\pi} d\theta = \frac{1}{2}(e-1)\theta\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{2}(e-1)\pi$$

باتوجه به این نکته ضروری است که انتگرال درونی با روش تغییر متغیر و به صورت زیر قابل حل است.

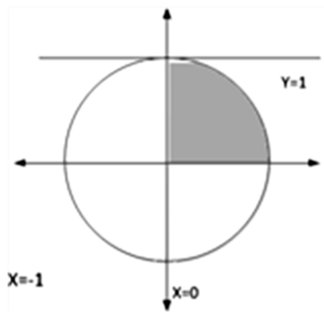
$$r^{2} = t \Longrightarrow 2\square\square\square = dt \Longrightarrow rdr = \frac{1}{2}dt$$

$$\int_{0}^{1} e^{r^{2}} r dr = \frac{1}{2}\int e^{t}dt = \frac{1}{2}e^{t} = \frac{1}{2}e^{r^{2}} = \frac{1}{2}(e-e^{0}) = \frac{1}{2}(e-1)$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^{2}}} \sin(x^{2}+y^{2})\,dxdy$ را حل کنید.

حل: با توجه به حدود ناحیه شکل ناحیه، به صورت زیر می‌باشد. لذا چون در تابع زیر انتگرال عبارت $x^{2}+y^{2}$ مشاهده می‌شود بنابراین انتگرال را با روش قطبی حل می‌کنیم.



$$\int_{\cdot}^{\text{١}} \int_{\cdot}^{\sqrt{\text{١}-y^{\text{٢}}}} \sin(x^{\text{٢}} + y^{\text{٢}})\, dxdy = \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \int_{\cdot}^{\text{١}} \mathrm{r}\sin r^{\text{٢}} drd\theta$$

$$\int_{\cdot}^{\text{١}} \mathrm{r}\sin r^{\text{٢}} dr = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \cos \text{١})$$

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \cos \text{١}) d\theta = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \cos \text{١}) \int_{\cdot}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} d\theta$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \cos \text{١})\theta \Big|_{\cdot}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} - \cos \text{١})\frac{\pi}{\text{٢}}$$

$$= \frac{\pi}{\text{۴}}(\text{١} - \cos \text{١})$$

××××××××××××××××××××××××××××××××