کاربردهای مشتقات جزئی

فرض کنید تابع دو متغیره $z=f(x,y)$ در یک همسایگی از $P_0(x_0,y_0)$ تعریف شده باشد. می‌گوئیم f در P_0 دارای یک مقدار min نسبی است. اگر همسایگی از P_0 موجود باشد به طوری که برای هر (x,y) در آن همسایگی داشته باشیم $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. به همین ترتیب اگر یک همسایگی از P_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر (x,y) در آن همسایگی داشته باشیم $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ آنگاه نقطهٔ P_0 یک مقدار Max نسبی می‌باشد.

نقطه اکسترمم نسبی

نقطه P_0 که تابع در آن min نسبی یا max نسبی دارد را یک نقطه اکسترمم نسبی می‌نامند.

قضیه: اگر تابع $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $P_0(x_0,y_0)$ به اکسترمم خود برسد، آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول در نقطه $P_0(x_0,y_0)$ برابر صفر است یا وجود ندارد.

نقطه بحرانی

نقطه (x_0,y_0) را یک نقطه بحرانی تابع f می‌نامند اگر f در (x_0,y_0) مشتق پذیر نباشد و یا روابط زیر برقرار باشد.

$$f_x(x_0,y_0)=0\ ,f_y(x_0,y_0)=0$$

نقطه زینی

نقاط بحرانی که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی‌شوند را نقاط زینی می‌نامند.

- برای بررسی نقاط اکسترمم و زینی می‌توان از دو روش زیر استفاده کرد.

الف) دیفرانسیل مرتبه دوم

ب) روش دلتا

الف) روش دیفرانسیل مرتبه دوم

فرض کنید $P_0(x_0,y_0)$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x,y)$ بوده و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در یک همسایگی از P_0 پیوسته باشند در این صورت:

1- اگر $d^2z|_{P_0} < 0$ آن گاه نقطهٔ P_0، *max* است.

2- اگر $d^2z|_{P_0} > 0$ آن گاه نقطهٔ P_0، *min* است.

3- اگر $d^2z|_{P_0}$ گاهی مثبت . گاهی منفی باشد آن گاه نقطهٔ P_0،زینی است.

4- اگر $d^2z|_{P_0} = 0$ باشد از این روش نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

ب) روش دلتا

فرض کنید $P_0(x_0,y_0)$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x,y)$ بوده و تمام مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در یک همسایگی از P_0 پیوسته باشند فرض کنید:

$$\Delta|_{P_0} = {f^2}_{xy}(P_0) - f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0)$$

که رابطهٔ فوق از دترمینان زیر به دست آمده است :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xy} & f_{xx} \\ f_{yy} & f_{xy} \end{vmatrix}$$

آنگاه

1- اگر $\Delta < 0$ ، $f_{xx}|_{P0} < 0$ آن گاه P_0 نقطهٔ *max* است.

2- اگر $\Delta < 0$ ، $f_{xx}|_{P0} > 0$ آن گاه P_0 نقطهٔ *min* است.

3- اگر $\Delta > 0$ ، آن گاه P_0 نقطهٔ زینی است.

4- اگر $\Delta = 0$ ، از این روش نتیجه‌ای به دست نمی‌آید.

....

مثال: نقاط بحرانی تابع $z = x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ را تعیین نموده و نوع آن را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} z_x = 6x - 3x^2 \\ z_y = 6y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0,2 \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی عبارتند از $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ ، $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$.

الف) آزمون دیفرانسیل مرتبه دوم:

$$dz = (6x - 3x^2)dx + (6y + 4)dy$$

$$\Rightarrow d^2z = (6 - 6x)d^2\mathrm{x} + 6d^2\mathrm{y}|_{\left(0,-\frac{2}{3}\right)} = 6d^2\mathrm{x} + 6d^2\mathrm{y} > 0$$

پس نقطهٔ $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ نقطه *min* است.

$$d^2z = (6 - 6x)d^2\mathrm{x} + 6d^2\mathrm{y}|_{\left(2,-\frac{2}{3}\right)} = -6d^2\mathrm{x} + 6d^2\mathrm{y}$$

پس نقطهٔ $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ نقطه زینی است.

ب) آزمون Δ:

$$z_x = 6x - 3x^2 \Rightarrow z_{xx} = 6 - 6x \ , z_{xy} = 0$$

$$z_y = 6y + 4 \ \Rightarrow z_{yy} = 6$$

$$\Delta = z^2xy - z_{xx}z_{yy} = 0 - (6 - 6x)6 = 36x - 36$$

$$\Delta\left(0,-\frac{2}{3}\right) = -36 < 0 \ , z_{xx}|_{\left(0,-\frac{2}{3}\right)} = 6 > 0$$

پس نقطهٔ $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ نقطه min است.

$$\Delta\left(2\,,-\frac{2}{3}\right) = 36 \times 2 - 36 = 36 > 0$$

پس نقطهٔ $\left(2,-\frac{2}{3}\right)$ نقطه زینی است.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع زیر را بیابید.

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y + 20$$

حل: ابتدا مشتقات جزئی مرتبه اول را برای یافتن نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 3 \Rightarrow\; x^2 = 1 \Rightarrow\; x = \pm 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 3y^2 = 12 \Rightarrow\; x^2 = 4 \Rightarrow\; x = \pm 2$$

بنابراین نقاط بحرانی به‌صورت زیر می‌باشند.

$$(1,2), (-1,2), (-1,-2)(1,-2)$$

برای تعیین ماکزیمم و مینیمم از دیفرانسیل کل مرتبه دوم استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0$$

$$d^2 \mathrm{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d^2 \mathrm{x} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d^2 \mathrm{y}$$

$$\Rightarrow d^2 \mathrm{f} = 6x d^2 \mathrm{x} + 6y d^2 \mathrm{y}$$

$$d^2 \mathrm{f}|_{(1,2)} = \underbrace{6}_{>0} d^2 \mathrm{x} + \underbrace{6}_{>0} d^2 \mathrm{y}$$ نسبی $\min(1,2)$

$$d^2 \mathrm{f}|_{(-1,2)} = \underbrace{-6}_{<0} d^2 \mathrm{x} + \underbrace{12}_{>0} d^2 \mathrm{y}$$ زینی $(-1,2)$

$$d^2 \mathrm{f}|_{(-1,-2)} = \underbrace{-6}_{<0} d^2 \mathrm{x} - \underbrace{12}_{<0} d^2 \mathrm{y}$$ نسبی $\max(-1,-2)$

$$d^2 \mathrm{f}|_{(1,-2)} = \underbrace{6}_{>0} d^2 \mathrm{x} - \underbrace{12}_{<0} d^2 \mathrm{y}$$ زینی$(1,-2)$

×××××××××××××××××××××××××××××××××