مشتق ضمنی

در توابع تک متغیره صورت کلی تابع در حالت صریح به شکل $F(x,y)=0$ می‌باشد که در آن صورت مشتق ضمنی این تابع به شکل $y'=-\frac{f_x}{f_y}$ می‌باشد. دقت کنید در این نوع توابع y متغیر وابسته می‌باشد.

اما اگر تابع به صورت صریح باشد و دو متغیره نیز باشد، شکل کلی آن به صورت $F(x,y,z)=0$ است. حال با فرض آنکه z متغیر وابسته باشد مشتق ضمنی این تابع به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

همچنین اگر تابع به صورت سه متغیره و به شکل کلی $F(x,y,z,w)=0$ باشد در آن صورت با فرض آنکه w متغیر وابسته باشد مشتق ضمنی به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_w}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_w}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{f_z}{f_w}$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید $x^4+y^4+z^4+9xyz=1$ در آن صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{4x^3+9yz}{4z^3+9xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}=-\frac{4y^3+9xz}{4z^3+9xy}$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید $x\sin(y^2-z)=e^{x^2-z}+x^{y+z}$ باشد مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial x}{\partial y}$.

حل: ابتدا تابع را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$F(x,y,z)=x\sin(y^2-z)-e^{x^2-z}-x^{y+z}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z}=-\frac{\sin(y^2-z)-2xe^{x^2-z}-(y+z)\,x^{y+z-1}}{-x\cos(y^2-z)+e^{x^2-z}-x^{y+z}\ln x}$$

نکته: دقت کنید همواره $(a^u)'=u'a^u\ln a$. مشتق مخرج کسر باتوجه به این فرمول محاسبه شده است.

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_x}=-\frac{2yx\cos(y^2-z)-0-x^{y+z}\ln x}{\sin(y^2-z)-2xe^{x^2-z}-(y+z)\,x^{y+z-1}}$$

××××××××××××××××××××××××××××××

گرادیان

فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد در آن صورت گرادیان f تابع برداری ∇f است که با

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

تعریف می‌شود که به آن گرادیان f یا دِل f گفته می‌شود.

تعریف فوق را می‌توان به توابع چند متغیره تعمیم داد به عنوان مثال برای توابع سه متغیره $F(X,Y,Z)$ داریم:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

تعریف رویه: در حالت کلی معادلهٔ $f(x,y,z) = 0$ معادله یک رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ است.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: گرادیان $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$ را در نقطه $(0,1)$ به دست آورید.

حل:

$$\nabla f(x,y) = (cosx + ye^{xy})\vec{\imath} + xe^{xy}\vec{\jmath}$$

$$\nabla f(o,1) = (cos0 + e^{0})\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = 2\vec{\imath}$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مشتق جهتی(سوئی)

همان طور که می‌دانیم $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ میزان تغییرات تابع را نسبت به x ، y و z تغییر می‌کند که این میزان تغییرات در جهت‌های $\vec{\imath}$ ، $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ می‌باشد. اگر بخواهیم میزان تغییرات را در هر جهت دلخواه تعریف کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم تغییرات را در جهت بردار $\vec{b}$ و در یک نقطه دلخواه بیابیم باید بردار یکهٔ u را هم جهت بردار $\vec{b}$ یافته که به صورت زیر است:

$$\vec{u} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

سپس $\overrightarrow{\nabla f} \cdot \vec{u}$ را محاسبه کنیم. که این همان میزان تغییرات تابع f و در جهت $\vec{b}$ می‌باشد.

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=\ln(e^x+e^y+e^z)$ را در مبدأ مختصات و در جهت بردار $\vec{b}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ محاسبه کنید.

حل: برای یافتن مشتق جهتی، ابتدا بردار یکه را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم که در آن $|\vec{b}|$ اندازه بردار $\vec{b}$ می‌باشد.

$$\vec{u}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{u}=\frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

در گام بعد باید گرادیان تابع f به‌صورت زیر محاسبه گردد:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y+e^z}\Big|(0,0,0)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y+e^z}\Big|(0,0,0)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{e^z}{e^x+e^y+e^z}\Big|(0,0,0)=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{\nabla f}\Big|(0,0,0)=\frac{1}{3}\vec{\imath}+\frac{1}{3}\vec{\jmath}+\frac{1}{3}\vec{k}$$

برای یافتن مشتق جهتی باید $\overrightarrow{\nabla f}.\vec{\mathrm{u}}$ به‌صورت زیر محاسبه گردد:

$$\overrightarrow{\nabla f}.\vec{\mathrm{u}}=\left(\frac{1}{3}\vec{\imath}+\frac{1}{3}\vec{\jmath}+\frac{1}{3}\vec{k}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0\Rightarrow\overrightarrow{\nabla f}.\vec{\mathrm{u}}=0$$