4) روش ژاکوبی

بسیاری از انتگرال‌ها با روش تعویض یا قطبی قابل حل نمی‌باشند، از این رو روش دیگری به‌نام روش ژاکوبی پیشنهاد می‌گردد. در روش ژاکوبی متغیرهای جدید v و uمعرفی می‌شوند و این معرفی به گونه‌ای صورت می‌گیرد که داشته باشیم.

$$x = x(u, v) \quad \text{و} \quad y = y(u, v)$$

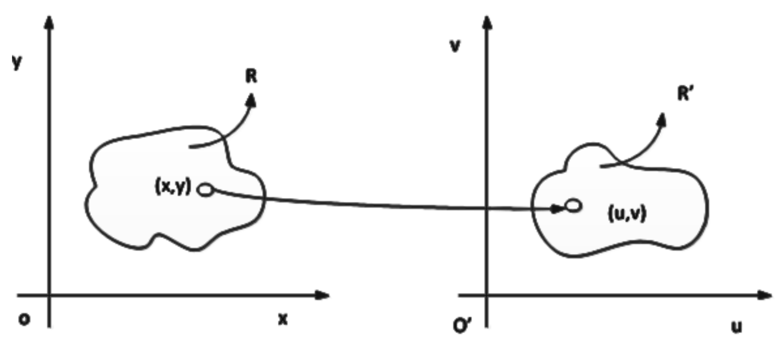
در گام بعدی، انتگرال را بر حسب u و vنوشته و در دستگاه جدید انتگرال را حل می‌کنیم. به عبارت دیگر به‌جای این‌که انتگرال‌را در ناحیه xoyحل کنیم، آن را در ناحیه‌ای به‌نام $UO'V$ حل می‌کنیم. بنابراین اگر تابع زیر انتگرال به صورت $f(x, y)$ باشد در دستگاه جدید به‌صورت $f(x(u, v), y(u, v))$خواهد بود که در آن صورت فرمول تبدیل انتگرال‌گیری به صورت زیر معرفی خواهد شد.

$$\iint_R f(x, y)dA = \iint_R |J| f\big(x(u, v), y(u, v)\big)dA'$$

که در آن $dA' = dudv$ و $|J|$ را قدرمطلق J در نظر می‌گیریم و J را یک دترمینان به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم و آن را ژاکوبی می‌نامیم.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

شکل کلی تبدیل ناحیه به‌صورت زیر می باشد.



نکته: اگر در ناحیه انتگرال‌گیری R یا تابع زیر انتگرال حالت‌هایی از معادلاتی به‌صورت $x + y$ و $x - y$ و یا ضرایبی از آن مانند $x + \frac{1}{2}y$ و... وجود داشت در آن صورت برای سادگی حل انتگرال از روش ژاکوبی استفاده می‌کنیم و از همین معادلات برای فرض گرفتن u و vاستفاده می‌کنیم.

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول و محدود به خطوط $y=-2x+4$ ، $y=-2x+7$ ، $y=x-2$ و $y=x+1$ باشد، مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dxdy$$

حل:

$$y-x=1 \quad \text{و} \quad y-x=-2$$

$$y+2x=4 \quad \text{و} \quad y+2x=7$$

$$y-x=1 \Longrightarrow u=1,\quad y-x=-2 \Longrightarrow u=-2$$
$$y+2x=4 \Longrightarrow v=4,\quad y+2x=7 \Longrightarrow v=7$$

بنابراین حدود $-2 \le u \le 1$ ، حدود $4 \le v \le 7$ خواهد بود. در گام بعد باید v و u را در تابع زیر انتگرال جای‌گذاری کرد از این‌رو باید x و y را برحسب u و v محاسبه کرد. برای این‌کار دستگاهی دو معادله و دو مجهول زیر را معرفی می‌کنیم.

$$\begin{cases} y-x=u \\ y+2x=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+x=u \\ y+2x=v \end{cases} \Rightarrow\ 3x=u+v \ \Rightarrow\ x=\frac{u+v}{3}$$

با توجه به دستگاه به راحتی می‌توان y را محاسبه کرد که به صورت $y=\frac{4u+v}{3}$ می‌باشد.

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

که قدرمطلق آن $|J|=\frac{1}{3}$ خواهد بود.

$$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dxdy = \int_4^7 \int_{-2}^{1} (2\,(\frac{u+v}{3})^2-\left(\frac{u+v}{3}\right)\left(\frac{4u+v}{3}\right)-(\frac{4u+v}{3})^2)\,\frac{1}{3}\,dudv$$
$$=\int_4^7 \int_{-2}^{1} (\frac{uv}{3})\,dudv$$

$$\int_{-2}^{1} (\frac{uv}{3})\,du=\frac{v}{3}\int_{-2}^{1} udu=\frac{v}{3}(\frac{u^2}{2})]_{-2}^{1}=\frac{v}{3}(\frac{1}{2}-2)=\frac{v}{3}(\frac{1-4}{2})=\frac{v}{3}(\frac{-3}{2})=\frac{-v}{2}$$

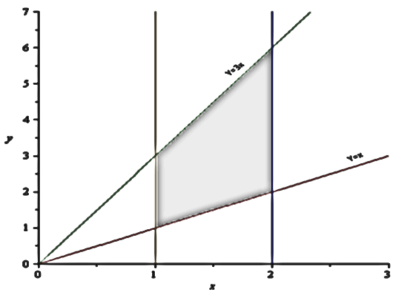
$$\int_4^7 \frac{-v}{2}dv=-\frac{1}{2}\int_4^7 v\,dv=-\frac{1}{2}\frac{v^2}{2}]_4^7=-\frac{1}{2}\left(\frac{49}{2}-\frac{16}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{33}{2}\right)=\frac{-33}{4}$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: انتگرال دوگانه $\iint_R \sin(\frac{y}{x})\,dydx$ که در آن $R = \{(x, y), 1 \le x \le 2\,, x \le y \le 3x\}$ می‌باشد را حل کنید.. (راهنمایی $u = x$ و $v = \frac{y}{x}$)

حل:

ابتدا ناحیه R را رسم می‌کنیم. در مساله u و v مشخص شده است پس کافی است x و y را بر حسب u و v محاسبه کنیم. با توجه به این‌که $v = \frac{y}{x}$ و $u = x$ بنابراین $v = \frac{y}{u}$ و لذا $y = uv$.
بنابراین با توجه به x و y بدست آمده می‌توان ژاکوبی را به‌صورت زیر محاسبه کرد.



شکل(81)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u \to |J| = u$$

حال باید حدود u و v مشخص شود.

$$1 \le x \le 2 \implies x = u \implies 1 \le u \le 2$$

$$x \le y \le 3x \implies 1 \le \frac{y}{x} \le 3 \implies \frac{y}{x} = v \implies 1 \le v \le 3$$

با توجه به حدود جدید و $|J|$ ، انتگرال دوگانه با روش ژاکوبی به‌صورت زیر خواهد بود

$$\iint_R \sin(\frac{y}{x})\,dydx = \int_1^3 \int_1^2 u \sin v \,dudv$$

$$\int_1^2 u \sin v\,du = \sin v \int_1^2 u du = \sin v\,(\frac{u^2}{2})]_1^2 = \sin v\,(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\sin v$$

$$\int_1^3 \frac{3}{2}\sin v\,dv = \frac{3}{2}\int_1^3 \sin v\,dv = -\frac{3}{2}\cos v]_1^3 = \frac{-3}{2}(\cos 3 - \cos 1) = \frac{3}{2}(\cos 1 - \cos 3)$$

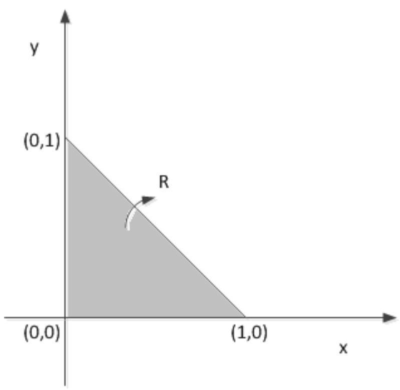
نکته: در برخی از مواقع محاسبه J به‌دلیل آنکه محاسبه دستگاه برای یافتن x و y مشکل است، پیچیده خواهد شد. در این‌گونه از موارد می‌توان به‌جای J، J' را محاسبه کرد، که در آن $J' = \frac{1}{J}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J' = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

×××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه $\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA$ که در آن R مثلثی با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌باشد.

حل:



در مساله، u و v مشخص نشده اما می‌توان با توجه به تابع زیر انتگرال به راحتی u و v را مشخص کرد. فرض کنید $y-x=u$ و $y+x=v$. با توجه به تعریف u و v دستگاهی دو معادله و دو مجهول تشکیل داده و از روی آن x و y را بر حسب u و v می‌یابیم.

$$\begin{cases} y-x=u \\ y+x=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{v-u}{2} \\ y=\dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

با توجه به x و y بدست آمده می‌توان J را یافت.

$$\mathrm{J}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \rightarrow |\mathrm{J}|=\frac{1}{2}$$

در گام بعد باید حدود انتگرال‌گیری را مشخص کرد و برای یافتن این حدود از نقاط رئوس مثلث استفاده می‌کنیم.

$$if \quad x=0 \Rightarrow x=\frac{v-u}{2} \Rightarrow 0=\frac{v-u}{2} \Rightarrow u=v$$

$$if \quad y=0 \Rightarrow y=\frac{u+v}{2} \Rightarrow 0=\frac{u+v}{2} \Rightarrow u=-v$$

با توجه به عبارات محاسبه شده، $-v\le u\le v$ و $0\le u\le 1$می‌باشد.

$$if \quad x=0 \text{ و } y=0 \Rightarrow x+y=v \Rightarrow 0+0=v \Rightarrow v=0$$

$$x+y=v \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow v=1$$

$$\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA=\int_0^1\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,|\mathrm{J}|dudv$$

$$\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,|\mathrm{J}|du=\int \frac{1}{2}e^t\,vdt=\frac{1}{2}v\int e^t\,dt=\frac{1}{2}ve^t=\frac{1}{2}ve^{\frac{u}{v}}]_{-v}^{v}=\frac{1}{2}v(e^{\frac{v}{v}}-e^{-\frac{v}{v}})$$

$$=\frac{1}{2}v(e^1-e^{-1})$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}v\left(e^1-e^{-1}\right)dv=\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)\int_0^1 vdv=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\frac{v^2}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

لازم به ذکر است برای حل این انتگرال درونی از روش تغییر متغیر و به صورت زیر استفاده شده است.

$$\frac{u}{v}=t \implies \frac{1}{v}du=dt \implies du=vdt$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_R (x^2+y^2)dA$ که در آن R ناحیه واقع در ربع اول محدود به $y=0$، $y=x$، $xy=1$ و $x^2-y^2=1$ می‌باشد.

حل:

با توجه به ساختار R از روش ژاکوبی برای حل انتگرال استفاده می‌کنیم و برای این کار باید u و v را مشخص کنیم. $u=x^2-y^2$ و $v=xy$ انتخاب می‌کنیم. در گام بعد x و y را بر حسب u و v بدست آوریم که مشکل است. لذا برای راحتی کار از J' استفاده می‌کنیم.

$$J'=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)$$

$$J=\frac{1}{J'}\implies J=\frac{1}{2(x^2+y^2)}\implies |J|=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

حال باید حدود انتگرال را محاسبه کنیم.

$$\begin{cases}xy=1, xy=v\implies v=1\\ y=0, xy=v\implies v=0\end{cases}\implies 0\le v\le 1$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=1 \text{ و } x^2-y^2=u\implies u=1\\ y=0, y=x\implies x=0\implies x^2-y^2=0-0=0\implies u=0\end{cases}\implies 0\le u\le 1$$

با توجه به حدود محاسبه شده، انتگرال به صورت زیر خواهد بود.

$$\iint_R (x^2+y^2)dA=\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)|J|dudv$$
$$=\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\frac{1}{2(x^2+y^2)}dudv=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 dudv$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} du = \frac{1}{2}u\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}v\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

××××××××××××××××××××××××××××××××