دیفرانسیل کامل – دیفرانسیل کل

فرض کنید $z = f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد، در آن صورت دیفرانسیل کل این تابع با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$d_z = \frac{\partial z}{\partial x} d_x + \frac{\partial z}{\partial y} d_y$$

در حالت کلی دیفرانسیل کامل ، تابع n متغیره $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

که در آن جملات $\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$ را دیفرانسیل‌های جزئی به ترتیب نسبت به $x_1, \cdots, x_n$ نامند.

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: دیفرانسیل کامل $z = x \ln y + e^{\frac{1}{x}}$ را در نقطهٔ $x = y = 1$ را بیابید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln y - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}$$

$$dz = \left(\ln y - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) dx + \frac{x}{y} dy$$

$$dz \Big| (1,1) = \left(\ln 1 - \frac{1}{1} e^{\frac{1}{1}}\right) dx + \frac{1}{1} dy = -edx + dy$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: دیفرانسیل کامل تابع سه متغیره زیر را بیابید.

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\, sin^2 z$$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}\, sin^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\, sin^2 z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\,(2\sin z\cos z)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$

$$2xe^{x^2+y^2}\, sin^2 zdx + 2ye^{x^2+y^2}\, sin^2 zdy + e^{x^2+y^2}\,(2\sin z\cos z)dz$$

××××××××××××××××××××××××××××××

دیفرانسیل کامل مراتب بالاتر

با توجه به این که در دیفرانسیل کامل مرتبه اول داریم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$

از نماد $d = dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}$ برای دیفرانسیل مراتب بالاتر استفاده می‌کنیم. فرض کنید هدف محاسبه دیفرانسیل کل مرتبه دوم است در آن صورت داریم:

$$d^2z = d(dz) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$$

$$= \left(dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)z$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

به طور مشابه می‌توان دیفرانسیل کامل مراتب بالاتر را نیز به صورت زیر یافت:

$$d^2 z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: دیفرانسیل کامل مرتبه دوم $z = x^2 y^5$ را بیابید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^5 \quad , \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 y^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^5 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20x^2 y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 10xy^4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 10xy^4$$

$$d^2 z = 2y^5 dx^2 + 10xy^4 dxdy + 20x^2 y^3 dy^2$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

قاعدهٔ زنجیره‌ای

در توابع یک متغیره اگر y تابعی از u باشد، $y = f(u)$ و $u = g(x)$ در آن صورت بر اساس قاعدهٔ زنجیره‌ای

$$y'_x = y'_u . u'_x$$

به همین ترتیب در توابع چند متغیره داریم:

$$z = f(u, v)$$

$$\begin{matrix} u = u(u,v) \\ v = v(x,y) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} {z'}_x = {z'}_u.{u'}_x + {z'}_v.{v'}_x \\ {z'}_y = {z'}_u.{u'}_y + {z'}_v.{v'}_y \end{cases}$$

به همین ترتیب می‌توان برای تابعی با متغیرهای بیشتر نمودارهای درختی را کشید و از روی آنها فرمول‌ها را به دست آورد.

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: اگر $x = \frac{r}{t}$ و $y = t^2 - r$ ، $z = rt$ و هم چنین $w = \ln(xy - z^2)$ ، مطلوب است محاسبه $\frac{\partial w}{\partial r}$.

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= \frac{y}{xy - z^2}.\frac{1}{t} + \frac{x}{xy - z^2}(-1) + \frac{-2z}{xy - z^2}.t$$

××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: اگر $w = f(u)$ و $u = \frac{xy}{x^2+y^2}$ نشان دهید که $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du}.\frac{\partial u}{\partial x} \qquad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x(x^2 + y^2) - 2y(xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{du}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{df}{du}$$

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{xy^3-x^3y}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{df}{du}+\frac{x^3y-xy^3}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{df}{du}=0$$

××××××××××××××××××××××××××××××××

مثال: اگر a وb ثابت باشند و $w=f(u)$ و $u=ax+by$ نشان دهید:

$$a\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{\partial w}{\partial x}$$

حل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\ \ ,\frac{\partial u}{\partial y}=b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{df}{du}\ 0\ \frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{df}{du}\rightarrow\ b\frac{\partial w}{\partial x}=ab\frac{df}{du}\quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{df}{du}\ 0\ \frac{\partial u}{\partial y}=b\frac{df}{du}\rightarrow a\frac{\partial w}{\partial y}=ab\frac{df}{du}\quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}\ b\frac{\partial w}{\partial x}=\ a\frac{\partial w}{\partial y}\Longrightarrow a\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{\partial w}{\partial x}$$

××××××××××××××××××××××××××××××××